



institut für  
theoretische physik

Institut für Theoretische Physik  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Wilhelm-Klemm-Str. 9  
D-48149 Münster

Nicht-perturbative Renormierung  
des statischen Axialstromes  
mit zwei dynamischen Quarkflavours

WS 2004/2005





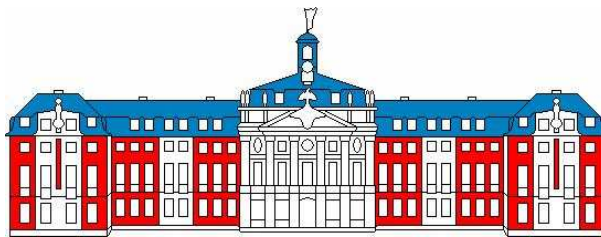
institut für  
theoretische physik

Diplomarbeit

**Nicht-perturbative Renormierung  
des statischen Axialstromes  
mit zwei dynamischen Quarkflavours**

vorgelegt von Patrick Fritzsch

09. Februar 2005



Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Diese korrigierte Version unterscheidet sich nur geringfügig von der dem Prüfungssekretariat am 09. Februar 2005 vorgelegten Arbeit. Die Verbesserungen sind hauptsächlich orthographischer und stilistischer Natur. Desweiteren wurden für eine bessere Übersichtlichkeit die Tabellen 4.9 bis 4.12, sowie 4.13 bis 4.16 neu positioniert.

Münster, den 16. März 2005

für meine Eltern



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>1 Das Schrödinger-Funktional</b>	<b>11</b>
1.1 Definition	11
1.2 Quantenmechanische Interpretation des SFs	12
1.3 Das induzierte Hintergrundfeld	13
1.4 Die renormierte Kopplung	14
1.5 Quarks	15
1.6 Erwartungswerte von Operatoren	16
1.7 Formulierung der QCD auf dem Gitter	17
1.7.1 Die Eichwirkung	18
1.7.2 Die Fermionische Wirkung	20
1.7.3 $O(a)$ -Verbesserung	22
1.7.4 Die Quarkmatrix	24
1.8 Anomalien	24
1.8.1 Chirale Symmetrie	25
1.8.2 PCAC-Relation	26
1.8.3 PCAC-Relation auf dem Gitter	27
1.9 Renormierung	27
<b>2 Heavy Quark Effective Theory – Eine effektive Theorie schwerer Quarks</b>	<b>29</b>
2.1 Definition der effektiven Theorie auf dem Gitter	29
2.2 Symmetrien der statischen Wirkung	30
2.3 Die Zeitkomponente des statischen Axialstromes	31
2.4 Alternative Diskretisierungen statischer Quarks	32
2.5 Leichte und schwere Quarks im Schrödinger-Funktional	33
2.5.1 Statische Quarks	34
2.5.2 Wichtige Observablen	35
2.6 Verknüpfung von HQET und QCD	37
<b>3 Allgemeine Strategie einer nicht-perturbativen skalenabhängigen Renormierung</b>	<b>39</b>
3.1 Einschränkungen und Strategie	39
3.2 Skalenabhängige Matrixelemente	41
3.3 Verknüpfung von Step-Scaling-Funktion und $\Phi_{\text{RGI}}$	43
<b>4 Numerische Ergebnisse und Auswertung – Bestimmung der Renormierungsgruppeninvarianten</b>	<b>45</b>
4.1 Simulationsparameter und Umsetzung	45
4.1.1 Wirkungen	47
4.1.2 Korrelationsfunktionen auf dem Gitter	48
4.1.3 Normierungsbedingung 1 - Das 'alte' Schema	48
4.1.4 Normierungsbedingung 2 - Ein neues Schema	49
4.2 Bestimmung des Kontinuumslikes	50
4.2.1 Kontinuumsextrapolation aus allen Daten	51
4.2.2 Ergänzende Untersuchungen	57

4.2.3	Kontinuumsextrapolationen unter Ausschluß von $L = 6$ . . . . .	58
4.3	Polynomialer Fit an die Step-Scaling-Funktion . . . . .	61
4.4	Bestimmung der Renormierungsgruppeninvarianten . . . . .	62
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>		<b>65</b>
<b>A Vereinbarungen und Zusätze</b>		<b>67</b>
A.1	Eichfelder im Kontinuum . . . . .	67
A.2	Dirac'sche Gamma-Matrizen . . . . .	67
A.3	Gell-Mann-Matrizen . . . . .	68
A.4	Vereinbarungen für das Gitter . . . . .	69
A.5	Begründung und Einfluß des Wilson-Terms . . . . .	70
A.6	Die lokale effektive Theorie nach Symanzik . . . . .	71
A.7	Das hyperkubische Blocking . . . . .	72
A.8	Yang-Mills-Wirkung $\leftrightarrow$ Wilson-Wirkung . . . . .	73
<b>B Numerische Behandlung und Ergebnisse</b>		<b>74</b>
B.1	Bestimmung der statistischen Unsicherheit . . . . .	74
B.2	Erzeugung der Jackknife-Samples und Datenanalyse . . . . .	75
B.3	Tabellen zur Gitter-Step-Scaling-Funktion . . . . .	78
B.4	Kontinuumswerte zur neuen Normierungsbedingung . . . . .	81
B.5	Bestimmung der Unsicherheit des RGI-Matrixelementes . . . . .	82
B.5.1	Fehlerfortpflanzung bzgl. der $\{\sigma_i\}$ und $\{u_i\}$ . . . . .	83
B.5.2	Fehlerfortpflanzung bzgl. $\gamma$ und $\beta$ . . . . .	84
B.5.3	Die Unsicherheit von $\gamma_1$ und $b_2$ . . . . .	86
<b>Danksagung</b>		<b>87</b>
<b>Selbstständigkeitserklärung</b>		<b>97</b>



---

## Einleitung

*QCD, the marvellous theory of the strong interactions, has a split personality. It explains both 'hard' and 'soft' phenomena, the softer ones being the hardest.*

Y. Dokshitzer

### Das Standardmodell der Elementarteilchen

Traditionell unterscheidet man im Gebiet niedriger Energien zwischen vier grundlegenden Kräften oder Wechselwirkungen (WW), die in ihrer Gesamtheit alle bekannten Naturgeschehnisse erklären sollen. Dies sind die Gravitation, der Elektromagnetismus, die schwache und die starke Kernkraft. Im Laufe der wissenschaftlichen Forschung als solche hat sich ein starker Trend zu einer vereinheitlichten Beschreibung aller Teilchen und Wechselwirkungen herausgebildet. Dieser beruht im wesentlichen auf der Verknüpfung des Prinzips der lokalen Eichinvarianz der Lagrangedichte bzgl. fundamentaler Symmetriegruppen mit der Idee der Existenz eines unsymmetrischen Grundzustandes (Vakuum).

Letzteres bezeichnet den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung durch den Grundzustand, den *Higgs-Mechanismus*, der in der Vereinigung von elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung zur elektroschwachen Theorie eine ausschlaggebende Rolle spielt. Erst durch diesen Mechanismus wurde eine konsistente theoretische Beschreibung der elektroschwachen Theorie im Rahmen einer renormierbaren Yang-Mills-Theorie mit der Symmetriegruppe  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  möglich. Die Beschreibung der starken Wechselwirkung erfolgt ebenfalls im Rahmen einer Yang-Mills-Theorie. Sie besitzt die Symmetriegruppe  $SU(3)_c$  und heißt *Quantenchromodynamik* (QCD). Eine Verknüpfung dieser beiden Eichtheorien bildet das *Standardmodell*<sup>1</sup> mit der Eichproduktgruppe

$$SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y .$$

Die erfolgreiche Entwicklung dieser Eichtheorien führte schließlich auf Versuche, eine vereinigte Theorie aus starker und elektroschwacher Kraft aufzustellen, sogenannter GUTs (grand unified theories), welche u.a. den Zerfall des Protons vorhersagen. Eine konsistente Vereinigung beider Theorien steht bis heute aus. Außerdem scheint die Einbeziehung der Gravitation eine wesentlich schwierigere Aufgabe zu sein, da hier noch nicht einmal eine konsistente Quantentheorie vorliegt.

Im Rahmen von Eichtheorien werden Kräfte durch Eichfelder übertragen, deren Quanten, die Eichbosonen, die entsprechende Wechselwirkung vermitteln. Dies sind die Gluonen für die starke WW, die intermediären Vektorbosonen  $W^+$ ,  $W^-$  und  $Z$  für die schwache WW und das Photon für die elektromagnetische WW. Alle diese Bosonen tragen den Spin 1. Die Anzahl der Eichbosonen wird bestimmt durch die Zahl der Generatoren der zur Symmetriegruppe gehörenden Lie-Algebra.

---

<sup>1</sup>Der Name Standardmodell ist ein bißchen unser Problem: Wenn Sie ein Auto kaufen, würden Sie ja auch nie das Standardmodell nehmen. (J.H. Kühn, Karlsruhe)

Obwohl uns keine Quantentheorie der Gravitation vorliegt, wird ein entsprechendes Teilchen, das Graviton, welches einen Spin von 2 tragen muss, postuliert. Eine kurze Übersicht über die Eigenschaften dieser Kräfte liefert Tabelle 1.

Kraft	Reichweite	relative Stärke	betroffene Teilchen	Austauschboson
Gravitation	$\infty$	$G_N = 6 \cdot 10^{-39}$	alle	Graviton $g$
elektromagn.	$\infty$	$e^2 = 1/137$	geladene Teilchen	Photon $\gamma$
stark	$10^{-13}\text{cm}$	$g^2 = 1$	Hadronen	Gluonen $g_1, \dots, g_8$
schwach	$10^{-16}\text{cm}$	$G_F = 10^{-5}$	Hadronen & Leptonen	$W^{\pm}$ - und $Z$ -Boson

Tabelle 1: Charakteristika der in der Natur beobachteten Typen von Wechselwirkungen (relative Stärke in natürlichen Einheiten  $\hbar = c = M_P = 1$ )

Die Theorien zur Beschreibung von Elementarteilchen ähneln aufgrund ihrer mathematischen Struktur denen der kondensierten Materie. Beide besitzen eine Schichtstruktur, d. h. für verschiedene typische Abstände und Zeitbereiche werden verschiedene effektive Theorien zur Beschreibung des zugrundeliegenden Modells herangezogen und die relevanten Kopplungsparameter variieren bei einer kontinuierlichen Änderung der Skala. In solchen Fällen spricht man von einer *laufenden Kopplung* (running coupling), welche vom Energieübertrag  $\mu$  des betrachteten Wechselwirkungsprozesses abhängt.

### Quantenchromodynamik

Die QCD beschreibt die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen. In der Natur werden  $N_f = 6$  unterschiedliche Quarkarten (massive Fermionfelder), die *Quarksflavours*  $f = u, d, s, c, b, t$  (up, down, strange, charm, bottom, top) beobachtet. Sie werden durch Flavourquantenzahlen unterschieden und tragen verschiedene Massen, siehe Tabelle 2. Desweiteren trägt jedes Quark aufgrund der  $SU(3)_c$ -Eichgruppe eine Farbe (*c:colour*):  $r, g$  oder  $b$ .

Quarks	Ladung $Q/e$	Flavourquantenzahlen						Masse MeV
		$I$	$I_3$	$S$	$C$	$B$	$T$	
u	2/3	1/2	1/2	0	0	0	0	1.5-4.0
d	-1/3	1/2	-1/2	0	0	0	0	4.0-8.0
s	-1/3	0	0	-1	0	0	0	80-130
c	2/3	0	0	0	1	0	0	1150-1350
b	-1/3	0	0	0	0	-1	0	4100-4900
t	2/3	0	0	0	0	0	1	$\approx 175000$

Tabelle 2: Eigenschaften der sechs Quarkflavours: elektrische Ladung  $Q$ , Isospin  $I$  und dessen dritte Komponente  $I_3$ , Strangeness  $S$ , Charm  $C$ , Bottomness  $B$  und Topness  $T$

---

Die Theorie der starken Wechselwirkung wird durch wenige freie Parameter, nämlich die starke Kopplungskonstante und die Quarkmassen, bestimmt. Eine der charakteristischen Eigenschaften ist, dass ihre Kopplungskonstante mit zunehmendem Energieübertrag des betrachteten Prozesses abnimmt. Belege für die Existenz der Quarks wurden in Hochenergieexperimenten  $\mu \gtrsim 10 \text{ GeV}$  gesammelt. In Experimenten bei niedrigen Energien  $\mu \lesssim 1 \text{ GeV}$ , dem hadronischen Sektor, werden Bindungszustände von Quarks und Gluonen, darunter Protonen, Neutronen und  $\pi$ -Mesonen, jedoch keine Einteilchenzustände der grundlegenden Quarkfelder beobachtet. Der Grund hierfür ist die laufende Kopplung der QCD, die im phänomenologisch relevanten Niederenergiebereich (Hadronenphysik) einen hohen und im Hochenergiebereich (Jet-Physik) einen niedrigen Wert annimmt<sup>2</sup>. Daraus folgend zeigt die Struktur der Theorie *Confinement* bei niedrigen und *asymptotische Freiheit* bei hohen Energien.

Eine Frage, die sich dabei stellt, ist, wie man den theoretisch zugänglicheren Bereich der QCD bei hohen Energien mit den beobachteten Eigenschaften der Hadronen bei niedrigen Energien in Beziehung setzen kann. Hierfür bedarf es *nicht-perturbativer*, d. h. skalenunabhängig anwendbarer Methoden. Die momentan einzige zuverlässige Methode, nicht-perturbative Vorhersagen aus der QCD zu extrahieren, ist deren Formulierung auf einem Raumzeitgitter. Innerhalb dieser sogenannten *Gitter-QCD* lässt sich dann der Niederenergiebereich durch Monte-Carlo-Simulationen (MC) abdecken. Bei der Diskretisierung der Kontinuums-QCD wird ein Gitterabstand  $a$  eingeführt, der einem Inversen Impuls-*Cutoff* entspricht. Die Gitter-QCD stellt damit automatisch eine Regularisierung der Kontinuumstheorie dar.

Die Auswertung der Quantenchromodynamik auf dem Gitter wird in erster Linie durch die zur Verfügung stehenden Rechenkapazitäten begrenzt. Sie liefern für ein festes, endliches Simulationsvolumen eine untere Grenze für den Gitterabstand, also eine obere Grenze für den Cutoff. Auf aktuellen Computersystemen ist es insbesondere nicht möglich, den Cutoff wesentlich über die Masse des  $b$ -Quarks zu schieben, so dass es sich bisher einer relativistischen Simulation entzieht<sup>3</sup>. Die Behandlung schwerer Quarks  $Q$  mit Massen  $m_Q \gg \Lambda_{\text{QCD}} \approx 0.2 \text{ GeV}$  ist daher nur im Rahmen einer effektiven Theorie möglich. Dazu werden die im Niederenergiesektor vernachlässigbaren Freiheitsgrade ausintegriert, wodurch im gleichen Zug der Gültigkeitsbereich der entsprechenden effektiven Theorie festgelegt ist. Von besonderem experimentellem wie theoretischem Interesse sind Systeme aus einem leichten und einem schweren Quark, wie das  $B$ -Meson. Aus ihnen erhofft man sich ein Verständnis der CP-Verletzung und die Entdeckung einer Physik jenseits des Standardmodells der Elementarteilchen. Zu ihrer Beschreibung wird lediglich das leichte Quark als relativistisches Teilchen betrachtet und die als klein anzusehende Dynamik des schweren Quarks vernachlässigt. In der *effektiven Theorie schwerer Quarks* (HQET: Heavy Quark Effective Theory) werden dazu Observablen der QCD als systematische Entwicklung nach Potenzen der inversen Masse,  $1/m_Q$ , des schweren Quarks aufgefasst. Die HQET in führender Ordnung dieser Entwicklung nennt man auch *statische Theorie*.

---

<sup>2</sup>Unter einem niedrigen bzw. hohen Wert der Kopplung ist zu verstehen, ob die Störungstheorie, eine Reihenentwicklung nach Potenzen der Kopplung wohldefiniert ist oder nicht.

<sup>3</sup>Das  $b$ -Quark fällt regelrecht durch das Gitter, da dessen Auflösung nicht fein genug ist, um es zu tragen.

Damit die Ergebnisse der Rechnungen in der HQET als Vorhersagen für die QCD dienen können, müssen beide Theorien einander angepasst werden. Dieses sogenannte *Matching* sollte nicht-perturbativ durchgeführt werden, denn eine störungstheoretische Anpassung beider Theorien lässt nicht-perturbative Effekte außer Acht, so dass deren Einfluß nur schlecht abzuschätzen ist. Für das Matching werden geeignet gewählte Größen benötigt, die in beiden Theorien definiert sind und in der jeweiligen Gitterformulierung ihre Entsprechungen finden. Schließlich müssen sich die gewählten Observablen ins Kontinuum extrapolieren lassen.

In dieser Arbeit wird die Renormierung einer HQET-Observable in statischer Näherung mit zwei dynamischen Flavours durchgeführt. Namentlich handelt es sich dabei um die Zeitkomponente des Axialstromes zwischen einem schweren und einem leichten Quark. Die vorliegende Arbeit liefert damit eine wichtige Erweiterung von [25], in der die zugrundeliegende Prozedur zunächst in der Valenzquark-Näherung angewandt wurde, auf die realistischere Situation, in der die Physik eines leichten (masseentarteten) Quarkdubletts berücksichtigt wird. Desweiteren wurden die neuen Rechnungen mit verschiedenen Gitterdiskretisierungen der Theorie durchgeführt.

Im ersten Teil wird das *Schrödinger-Funktional*, ein Renormierungsschema im endlichen Volumen, in dem sich die QCD gerade in Hinsicht auf unsere Simulationen sehr zweckmäßig formulieren lässt [38], eingeführt. Es eignet sich nach seiner Formulierung auf dem Gitter besonders für eine nicht-perturbative Bestimmung skalenabhängiger Größen. Es schließt sich im zweiten Teil eine Einführung in die HQET an, die dann in das SF-Schema übertragen wird. Desweiteren wird der statische Axialstrom eingeführt und die zur Renormierung notwendigen Korrelationsfunktionen. Der dritte Teil zeigt, wie durch die sogenannte *Step-Scaling-Methode* die Renormierung einer skalenabhängigen Größe über einen großen Energiebereich durchgeführt wird. Im vierten Teil wird auf die numerische Umsetzung eingegangen, bevor die erzielten Ergebnisse präsentiert werden. Schließlich endet die Arbeit mit der Zusammenfassung und einem Ausblick.

# 1 Das Schrödinger-Funktional

Jeder naturbeschreibenden Quantenfeldtheorie (QFT) liegt eine unendlich ausgedehnte vierdimensionale Basismannigfaltigkeit zugrunde. Numerische Simulationen mit einem Computer benötigen hingegen eine diskretisierte Version der entsprechenden QFT in einem endlichen Volumen. Die einfachste Möglichkeit einer solchen Gitterformulierung ist diejenige mit periodischen Randbedingungen für die Felder in Raum und Zeit. Beschränkt man sich aber auf periodische Randbedingungen in drei Raumzeitdimensionen und feste Randwerte in Einer, so werden in dem endlichen Volumen Randeffekte induziert, welche man als Observable verwenden kann.

Ein solches endliches Volumenschema ist das vor mehreren Jahren eingeführte *Schrödinger-Funktional (SF)* [38]. Die vorliegende Arbeit nutzt die Vorzüge des SFs zur nicht-perturbativen Bestimmung einer skalenabhängigen Größe. Zunächst werden die Grundzüge dieses Schemas in Kontinuumsnotation vorgestellt. Eine Gitterformulierung folgt in Abschnitt 1.7.

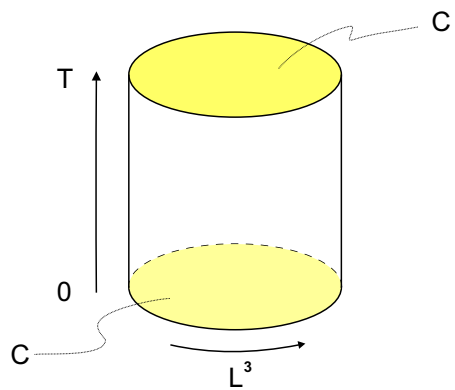


Abbildung 1.1: Illustration des Schrödinger-Funktional

## 1.1 Definition

Die formale Definition des SF erfolgt hier in der reinen nicht-abelschen (Yang-Mills-) Theorie über einer kontinuierlichen Raumzeit. Eine strikte Behandlung im Rahmen der gitterregularisierten Theorie ist ebenso möglich.

Die Raumzeit sei mit einer Zylindertopologie ( $L^3 \times T$ ) für ein festes Verhältnis von  $T/L$  gegeben, siehe Abbildung 1.1.  $L$  ist die Ausdehnung in räumlicher und  $T$  in zeitlicher Richtung. Ohne nochmals darauf einzugehen, gilt später immer  $T = L$ . An die Randflächen der Zeitrichtung werden Dirichlet-Randbedingungen für die Vektorpotentiale

$$A_k(x) = \begin{cases} C_k^\Lambda(\mathbf{x}) & \text{bei } x_0 = 0 \\ C_k^\Lambda(\mathbf{x}) & \text{bei } x_0 = L \end{cases} \quad (1.1)$$

mit klassischen Eichpotentialen  $C$  und  $C'$  gestellt. Der Raumindex  $k$  trägt die Werte 1, 2, 3 und  $\hat{k}$  ist der Einheitsvektor in  $k$ -Richtung. An die Zeitkomponente des Eichfeldes werden keine Rand-

bedingungen gestellt.  $A^\Lambda$  bezeichnet eine lokale Eichtransformation von  $A$  gemäß

$$A_k^\Lambda(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x})A_k(\mathbf{x})\Lambda(\mathbf{x})^{-1} + \Lambda(\mathbf{x})\partial_k\Lambda(\mathbf{x})^{-1}, \quad \Lambda \in \text{SU}(N). \quad (1.2)$$

In den Raumrichtungen verbleiben periodische Randbedingungen

$$A_k(x + L\hat{k}) = A_k(x), \quad \Lambda(\mathbf{x} + L\hat{k}) = \Lambda(\mathbf{x}). \quad (1.3)$$

Die euklidische Zustandsfunktion unter diesen Randbedingungen definiert das Schrödinger-Funktional der reinen Eichtheorie

$$\mathcal{Z}[C', C] \equiv \int D[\Lambda] \int D[A] e^{-S_G[A]}, \quad (1.4a)$$

$$D[A] = \prod_{\mathbf{x}, \mu, a} dA_\mu^a(x), \quad D[\Lambda] = \prod_{\mathbf{x}} d\Lambda(\mathbf{x}) \quad (1.4b)$$

mit der euklidischen Eichwirkung

$$S_G[A] = -\frac{1}{2g_0^2} \int d^4x \text{tr}\{F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\} \quad (1.5a)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (1.5b)$$

Hierbei beschreibt  $d\Lambda(\mathbf{x})$  das Haar-Maß der Eichgruppe  $\text{SU}(N)$ . Das SF ist ein eichinvariantes Funktional der Randfelder

$$\mathcal{Z}[C'^{\Omega'}, C^\Omega] = \mathcal{Z}[C', C]. \quad (1.6)$$

## 1.2 Quantenmechanische Interpretation des SFs

Das Schrödinger-Funktional gestattet eine quantenmechanische Interpretation im Rahmen der Schrödinger-Darstellung der Quantenmechanik. Es ist die quantenmechanische Übergangsamplitude von einem Zustand  $|C\rangle$  in einen Zustand  $|C'\rangle$  nach einer (euklidischen) Zeit  $T$ . Die quantentheoretischen Zustände einer QFT in dieser Darstellung sind die Wellenfunktionale  $\Psi[A]$  bzgl. den Raumkomponenten des Vektorpotentials  $A_k^a(\mathbf{x})$ . Die zugehörigen kanonisch konjugierten Feldvariablen sind über Funktionalableitungen

$$E_k^a(\mathbf{x}) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta A_k^a(\mathbf{x})} \quad (1.7)$$

definiert und ein Skalarprodukt ist gegeben durch

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int D[A] \Psi[A]^* \Phi[A], \quad D[A] = \prod_{\mathbf{x}, k, a} dA_k^a(\mathbf{x}). \quad (1.8)$$

Dem sogenannten farbelektrischen Feld  $E_k^a(\mathbf{x})$  entspricht in Analogie zur abelschen  $U(1)$ -Eichtheorie gerade die Zeitkomponente des Feldstärketensors  $F_{0k}^a(\mathbf{x})$ . Die physikalischen Zustände ei-

ner QFT sind eichinvariant, d. h. für sie gilt  $\Psi[A^\Lambda] = \Psi[A]$ . Durch Integration über alle Eichtransformationen wird ein gegebenes Funktional  $\Psi[A]$  auf den physikalischen Unterraum projiziert. Der zugehörige Projektor, der durch die Operation

$$\mathcal{P}\Psi[A] = \int D[\Lambda]\Psi[A^\Lambda] \quad (1.9)$$

definiert ist, vertauscht mit dem Hamiltonoperator

$$\mathcal{H} = \int_0^L d^3x \left\{ \frac{g_0^2}{2} E_k^a(\mathbf{x}) E_k^a(\mathbf{x}) + \frac{1}{4g_0^2} F_{kl}^a(\mathbf{x}) F_{kl}^a(\mathbf{x}) \right\}. \quad (1.10)$$

$g_0$  ist die nackte Kopplung. Da jedes klassische Eichfeld einen Zustand  $|C\rangle$  über

$$\langle C|\Psi\rangle = \Psi[C] \quad (1.11)$$

definiert, ist die quantenmechanische Darstellung des SF durch

$$\mathcal{Z}[C', C] = \langle C'| e^{-\mathcal{H}T} \mathcal{P}|C\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n T} \Psi_n[C'] \Psi_n[C]^* \quad (1.12)$$

gegeben. In der Gitterformulierung kann (1.12) streng berechnet werden und ist für reelle Energieeigenwerte gültig.

### 1.3 Das induzierte Hintergrundfeld

Ein zusätzlicher quantenmechanischer Zugang zum SF ist, dass es die Behandlung der QCD über ein Farbhintergrundfeld zulässt. Angenommen  $B_\mu(x)$  ist eine Lösung der Bewegungsgleichungen unter den Randbedingungen (1.1). Ist desweiteren die Wirkung bzgl. des Feldes  $B_\mu(x)$  ein absolutes Minimum, d. h. es gilt

$$S[A] > S[B] \quad (1.13)$$

für alle Eichfelder  $A$ , welche keiner Eichtransformation  $B^\Omega$  von  $B$  entsprechen, so ist  $B$  das (durch die Randbedingungen induzierte) *Hintergrundfeld*.

Demnach dominieren also für eine schwache Kopplung  $g_0$  Felder in der Umgebung von  $B$  das Pfadintegral und die effektive Wirkung

$$\Gamma[B] \equiv -\ln \mathcal{Z}[C', C] \quad (1.14)$$

besitzt eine reguläre Störungsentwicklung von der Form

$$\Gamma[B] = \frac{1}{g_0^2} \Gamma_0[B] + \Gamma_1[B] + g_0^2 \Gamma_2[B] + \dots, \quad (1.15a)$$

$$\Gamma_0[B] \equiv g_0^2 S[B]. \quad (1.15b)$$

Die Verknüpfung zwischen den Randfeldern  $C$ ,  $C'$  und dem Hintergrundfeld  $B$  ist bijektiv, so dass  $B$  als Argument anstelle von  $C$ ,  $C'$  dienen kann.

Obige Eichtransformation  $\Omega = \Omega(x)$  bezieht sich auf alle  $x$  des Zylinders mit Rand und  $B^\Omega$  ist die entsprechende Verallgemeinerung von (1.2).

## 1.4 Die renormierte Kopplung

Zur Definition einer renormierten und damit laufenden Kopplung benötigt man eine Größe, welche lediglich von der Skala abhängt. Da die Feldstärke  $B$  mit  $1/L$  skaliert, ist durch die Wahl  $LB$  eine dimensionslosen Größe  $\eta$  gegeben. Ist nun ein Hintergrundfeld entsprechend Abschnitt 1.3 gegeben, so lässt sich die Ableitung der effektiven Wirkung

$$\Gamma'[B] = \frac{\partial}{\partial \eta} \Gamma[B] \quad (1.16)$$

nicht-perturbativ definieren. Dadurch wiederum ist man in der Lage, die effektive Kopplung

$$\bar{g}^2(L) = \frac{\Gamma'_0[B]}{\Gamma'[B]} \quad (1.17)$$

zu definieren, welche für kleine Kopplungen gegen die nackte Kopplung  $g_0^2$  strebt:

$$\begin{aligned} \bar{g}^2(L) &= \Gamma'_0[B] / \left( \frac{1}{g_0^2} \Gamma'_0[B] + \Gamma'_1[B] + g_0^2 \Gamma'_2[B] + \dots \right) \\ &= \Gamma'_0[B] / \left( \frac{1}{g_0^2} \Gamma'_0[B] \cdot \left( 1 + g_0^2 \Gamma'_1[B] / \Gamma'_0[B] + O(g_0^4) \right) \right) \\ &= g_0^2 / \left( 1 + g_0^2 \Gamma'_1[B] / \Gamma'_0[B] + O(g_0^4) \right) \\ &\approx g_0^2 - g_0^4 \frac{\Gamma'_1[B]}{\Gamma'_0[B]} + O(g_0^6) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dabei wurde von der Störungsentwicklung der effektiven Wirkung (1.15a) die Ableitung genommen, eingesetzt und die Näherung  $1/(1+x) \approx 1-x+O(x^2)$  verwendet. Offenkundig dient der Faktor  $\Gamma'_0[B]$  der Normierung. Da es nur eine Längenskala  $L$  gibt, läuft diese Definition von  $\bar{g}$  mit der Boxgröße  $L$ .

Eine spezielle Wahl für die Eichgruppe  $SU(3)$  ist das *abelsche Hintergrundfeld* [42], welches durch die Randwerte

$$C_k = \frac{i}{L} \text{diag}(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad C'_k = \frac{i}{L} \text{diag}(\phi'_1, \phi'_2, \phi'_3), \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.19a)$$

mit

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \eta - \frac{\pi}{3} & \phi'_1 &= -\phi_1 - \frac{4\pi}{3} \\ \phi_2 &= -\frac{1}{2}\eta & \phi'_2 &= -\phi_2 + \frac{2\pi}{3} \\ \phi_3 &= -\frac{1}{2}\eta + \frac{\pi}{3} & \phi'_3 &= -\phi_2 + \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \quad (1.19b)$$



induziert wird. Das zugehörige Hintergrundfeld lautet

$$B_0 = 0, \quad B_k = [x_0 C'_k + (L - x_0) C_k] / L, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.20)$$

und besitzt nach [63] einen Feldtensor mit den nicht-verschwindenden Komponenten

$$G_{0k} = \partial_0 B_k = (C'_k - C_k) / L, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.21)$$

Dies ist ein konstantes farbelektrisches Feld, das man sich anschaulich wie einen Plattenkondensator vorstellen kann.

## 1.5 Quarks

Bisher wurde lediglich die reine Yang-Mills-Theorie betrachtet. Zu einer vollständigen Beschreibung der starken Wechselwirkung im Rahmen des SFs werden nun Quarks, bzw. fermionische Freiheitsgrade in die Theorie eingefügt. Dies wurde zuerst in [57, 58] von S. Sint diskutiert.

Bei der Formulierung der Dirichlet-Randbedingungen für die Quarkfelder ist Vorsicht geboten. Der Dirac-Operator ist ein Operator erster Ordnung. Es kann daher nur die Hälfte der Komponenten von fermionischen Feldern auf dem Rand festgelegt werden um eine eindeutige Lösung der Dirac-Gleichung zu erhalten. Die fermionische Wirkung im SF entspricht aufgrund der Zylinder-topologie nicht der reinen Standard-Fermionwirkung

$$S_F^{(0)} \equiv \int d^4x \bar{\psi}(x) [\gamma_\mu D_\mu + m] \psi(x), \quad (1.22)$$

sondern ist durch zwei Randterme zu

$$S_F = \int d^4x \bar{\psi}(x) [\gamma_\mu D_\mu + m] \psi(x) - \int d^3\mathbf{x} [\bar{\psi}(x) P_- \psi(x)]_{x_0=0} - \int d^3\mathbf{x} [\bar{\psi}(x) P_+ \psi(x)]_{x_0=L} \quad (1.23)$$

mit den zeitlichen Projektionsoperatoren

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_0) \quad (1.24)$$

zu vervollständigen [57]. Die  $\gamma_\mu$  sind die euklidischen  $\gamma$ -Matrizen in Standardnotation und die kovariante Ableitung  $D_\mu$  wirkt wie

$$D_\mu \psi(x) = (\partial_\mu + A_\mu(x)) \psi(x). \quad (1.25)$$

Die gesamte Wirkung schreibt sich dann mit der reinen Eichwirkung  $S_G$  aus (1.5a) als

$$S[A, \bar{\psi}, \psi] = S_G[A] + S_F[A, \bar{\psi}, \psi]. \quad (1.26)$$

Die Quarkfelder auf den Randflächen des Zylinders unterliegen hierbei den Randbedingungen

$$\begin{aligned} P_+ \psi(x) \Big|_{x_0=0} &= \rho(\mathbf{x}) , & P_- \psi(x) \Big|_{x_0=L} &= \rho'(\mathbf{x}) , \\ \bar{\psi}(x) P_- \Big|_{x_0=0} &= \bar{\rho}(\mathbf{x}) , & \bar{\psi}(x) P_+ \Big|_{x_0=L} &= \bar{\rho}'(\mathbf{x}) , \end{aligned} \quad (1.27)$$

welche zu einer quantenmechanischen Interpretation gemäß (1.12) führen. Das SF

$$\mathcal{Z}[C', \bar{\rho}', \rho'; C, \bar{\rho}, \rho] = \int D[A] D[\psi] D[\bar{\psi}] e^{-S[A, \bar{\psi}, \psi]} \quad (1.28)$$

enthält daher eine Integration über alle Felder mit den angegebenen Randwerten. Zu den Randfeldern der reinen Eichtheorie  $C, C'$  treten in Analogie die Randfelder von Fermionen und Antifermionen  $\rho, \rho'$  bzw.  $\bar{\rho}, \bar{\rho}'$  hinzu.

Im Gegensatz zu den periodischen Randbedingungen an die Eichfelder (1.3), gelten für die fermionischen Felder periodische Randbedingungen bis auf eine konstante Phase [59]

$$\psi(x + L\hat{k}) = e^{i\theta} \psi(x) , \quad \bar{\psi}(x + L\hat{k}) = e^{-i\theta} \bar{\psi}(x) . \quad (1.29)$$

Die Wahl  $\theta = 0$  entspricht den üblichen periodischen Randbedingungen, doch ist eine Wahl  $\theta \neq 0$  oft von praktischem Nutzen in Monte-Carlo-Simulationen. Der Grund hierfür ist, dass die Eigenwerte der Fermionmatrix sensitiv auf  $\theta$  reagieren und deren Invertierung vom Verhältnis des höchsten zum niedrigsten Eigenwert abhängt.

Statt an dieser Stelle kann der Phasenfaktor auch in den Ableitungsoperatoren auftreten, so dass sich (1.29) rein formal wie (1.3) schreiben lässt und der Theta-Winkel nun in der kovarianten Ableitung auftritt, siehe Abschnitt A.4.

## 1.6 Erwartungswerte von Operatoren

Korrelationsfunktionen im SF sind durch Erwartungswerte fermionischer Operatoren  $\mathcal{O}$  gegeben, die sich aus Produkten von Feldern im Volumen und auf dem Rand des SF-Zylinders zusammensetzen. Ergänzt man die bisherige Wirkung (1.26) durch den fermionischen *Quellterm* (source)

$$S_S[\bar{\psi}, \psi, \bar{\eta}, \eta] \equiv \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta , \quad (1.30)$$

so lässt sich wegen

$$\left[ \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} e^{-S-S_S} \right]_{\bar{\eta}=\eta=0} = \psi(x) e^{-S} , \quad \left[ \frac{\delta}{\delta \eta(x)} e^{-S-S_S} \right]_{\bar{\eta}=\eta=0} = -\bar{\psi}(x) e^{-S} \quad (1.31)$$

folgende Identifizierung treffen

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \rightarrow \psi(x) , \quad \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \rightarrow -\bar{\psi}(x) . \quad (1.32)$$

Das Minuszeichen tritt wegen der Grassmannwertigkeit der fermionischen Felder auf. Abgesehen von den Eich-, Quark- und Antiquarkfeldern kann  $\mathcal{O}$  die *Randfelder*  $\bar{\zeta}, \zeta$  und  $\bar{\zeta}', \zeta'$  gemäß der

Identifizierung

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \bar{\rho}(\mathbf{x})} &\rightarrow \zeta(\mathbf{x}), & \frac{\delta}{\delta \rho(\mathbf{x})} &\rightarrow -\bar{\zeta}(\mathbf{x}), \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\rho}'(\mathbf{x})} &\rightarrow \zeta'(\mathbf{x}), & \frac{\delta}{\delta \rho'(\mathbf{x})} &\rightarrow -\bar{\zeta}'(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1.33)$$

mit den Variationsableitungen bzgl. den in (1.27) definierten Randbedingungen enthalten. Der Erwartungswert eines solchen Operators  $\mathcal{O}$  ist nun gegeben durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \left\{ \frac{1}{\mathcal{Z}} \int D[A] D[\psi] D[\bar{\psi}] \mathcal{O} e^{-S[A, \bar{\psi}, \psi; \bar{\rho}, \rho, \bar{\rho}', \rho'] + S_S[\bar{\psi}, \psi, \bar{\eta}, \eta]} \right\}_{\substack{\bar{\rho}=\rho=\bar{\rho}'=\rho'= \\ \bar{\eta}=\eta=0}}, \quad (1.34)$$

mit dem Normierungsfaktor  $\mathcal{Z}$ , so dass  $\langle 1 \rangle = 1$ .

## 1.7 Formulierung der QCD auf dem Gitter

Zur Implementierung einer Theorie auf den Computer, muss diese diskretisiert werden, d. h. aus Ableitungsoperatoren in der kontinuierlichen Theorie werden Differenzenquotienten und Integrale sind endliche Aufsummierungen mit bestimmten Gewichtungsfaktoren. Das soeben eingeführte SF ist nun auf ein hyperkubisches Gitter mit endlichem Gitterabstand  $a$  zu übertragen. Hierbei ist zu beachten, dass für einen Vergleich von diskretisierter und Kontinuumstheorie der Kontinuumsabstand  $a \rightarrow 0$  wohldefiniert sein muss.

Nach der Standardformulierung der Gitter-QCD [69] sind die Quarkfelder  $\psi(x)$  und  $\bar{\psi}(x)$  auf den Gitterpunkten  $x$  definiert und tragen wie im Kontinuum Dirac-, Farb- und Flavourindizes. Das Eichfeld wird durch ein Feld von  $SU(3)$ -Matrizen  $U(x, \mu)$  dargestellt. Hierbei entspricht  $(x, \mu)$  dem geordneten Paar

$$(x, \mu) \equiv \langle x + a\hat{\mu}, x \rangle = b \quad (1.35)$$

vom Gitterpunkt  $x$  zum nächsten Nachbarpunkt  $x + a\hat{\mu}$  mit Einheitsvektor  $\hat{\mu}$  zu den Raumzeitrichtungen  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .  $b$  nennt man einen *Link*, also die Verknüpfung nächster Nachbarpunkte, und die Paralleltransporter des Gitters

$$U(x, \mu) \equiv U_{x\mu} \equiv U_{x, x+a\hat{\mu}} \equiv U(x + a\hat{\mu}, x) \quad (1.36)$$

heißen *Linkvariable*. Allgemein gilt  $U_{x+a\hat{\mu}, x}^{-1} = U_{x, x+a\hat{\mu}}$  ( $U^{-1} \equiv U^\dagger$ ) – siehe auch Abbildung 1.2. Der zu einem beliebigen Weg  $\mathcal{C} = b_n \circ \dots \circ b_1$  auf dem Gitter gehörige Paralleltransporter ist durch die Linkvariablen

$$U(\mathcal{C}) = U(b_n) \dots U(b_1) \equiv \prod_{b \in \mathcal{C}} U(b) \quad (1.37)$$

gegeben. Erst die Menge aller Linkvariablen bildet das Gittereichfeld.

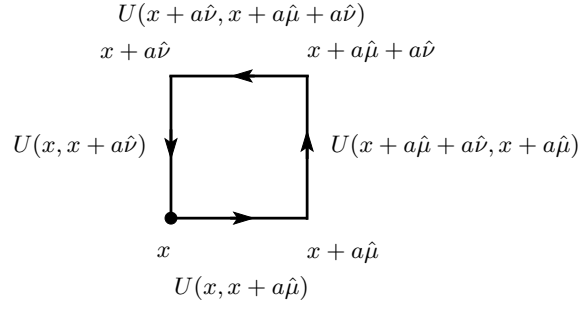


Abbildung 1.2: Elementarplakette  $U(p)$  im Punkt  $x$  in Richtung  $\mu$  und  $\nu$  des hyperkubischen Gitters

Auf dem Gitter unterscheidet man zwischen Vorwärts- und Rückwärtsableitung (A.15). Deren eichkovariante, d. h. unter den lokalen Eichtransformationen  $\Lambda(x)$  der Felder

$$\psi(x) \rightarrow \Lambda(x)\psi(x), \quad U(x, \mu) \rightarrow \Lambda(x)U(x, \mu)\Lambda(x + a\hat{\mu})^{-1} \quad (1.38)$$

invariante Pendanten sind definiert über

$$\nabla_{\mu}\psi(x) = \frac{1}{a}[U(x, \mu)\psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x)], \quad (1.39a)$$

$$\nabla_{\mu}^*\psi(x) = \frac{1}{a}[\psi(x) - U(x - a\hat{\mu}, \mu)^{-1}\psi(x - a\hat{\mu})], \quad (1.39b)$$

und bilden zusammen die Gitterversion des Dirac-Operators, den Wilson-Dirac-Operator

$$D = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \{ \gamma_{\mu}(\nabla_{\mu}^* + \nabla_{\mu}) - a\nabla_{\mu}^*\nabla_{\mu} \} \quad (1.40)$$

mit dem zum Gitterabstand  $a$  proportionalen Wilson-Term zur Vermeidung sogenannter *Doppler* – siehe Abschnitt 1.7.2.

### 1.7.1 Die Eichwirkung

Die Eichinvarianz der reinen Eichwirkung sollte auf dem Gitter natürlich ihren Bestand haben. Eichinvariante Größen sind gegeben über die Spur eines Produktes von Links entlang einer geschlossenen Kurve  $\text{Tr}\{U(\mathcal{C}_{x,x})\}$  auf dem Gitter. Die kleinstmögliche geschlossene, orientierte Kurve ist in Abbildung 1.2 dargestellt und heißt *Plakette*,  $p = (x; \mu, \nu)$ .

Daraus lässt sich nach WILSON [69] für die reine Gittereichtheorie eine Gittereichwirkung durch

$$S_G[U] = \sum_p S_p(U_p) \quad (1.41a)$$

mit

$$S_p(U_p) = -\beta \left\{ \frac{1}{2 \text{Tr} \mathbf{1}} (\text{Tr} U_p + \text{Tr} U_p^{-1}) - 1 \right\} \quad (1.41b)$$

$$= \beta \left\{ 1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} U_p \right\} \quad (1.41c)$$

für  $U_p \in \text{SU}(N)$  definieren. Man nennt

$$U_p \equiv U_{x,\mu\nu} \equiv U(x, x + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \cdot U(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu})U(x + a\hat{\mu}, x) \quad (1.42)$$

eine *Plakettvariable*. Die Summe über die Plaketten

$$\sum_p \equiv \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu,\nu} \quad (1.43)$$

beschränkt sich auf einen Umlaufsinn pro Plakette. Die explizite Form der Wilson-Wirkung für die reine Gittereichtheorie, siehe Anhang A.8, lautet dann

$$S = -\frac{\beta}{4N} \sum_x a^4 \text{Tr} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + O(a^5) \quad (1.44)$$

und strebt für kleine Gitterabstände  $a$  mit der Identifizierung

$$\beta = \frac{2N}{g_0^2} \quad (1.45)$$

gegen die reine Yang-Mills-Wirkung. Für die Eichgruppe der starken Wechselwirkung folgt

$$\beta = 6/g_0^2. \quad (1.46)$$

### Verwendung der Wilson-Wirkung im Schrödinger-Funktional

Nach Wilson [69] folgt die Eichwirkung (1.41a) zu

$$S_G[U] = \frac{1}{g_0^2} \sum_p w(p) \text{Tr} \{1 - U(p)\} \quad (1.47)$$

mit von der jeweiligen Diskretisierung abhängigen Gewichtungsfaktoren,  $w(p)$ . Diese werden im Schrödinger-Funktional [38] durch

$$w(p) = \begin{cases} 1 & \text{für Plaketten im Inneren} \\ \frac{1}{2} & \text{für räumliche Plaketten auf dem Rand } x_0 = 0, T \end{cases} \quad (1.48)$$

festgelegt.

### Eichfelder im Schrödinger-Funktional

Die Randbedingungen für die Gittereichfelder erhält man aus den Kontinuumsrandwerten durch die Bildung entsprechender Paralleltransporter zwischen  $x + a\hat{k}$  und  $x$  bei  $x_0 = 0, T$ . Für die anfangs betrachteten konstanten abelschen Hintergrundfelder  $C$  und  $C'$  aus (1.19a) gilt

$$U(x, k)|_{x_0=0} = \exp(aC_k), \quad U(x, k)|_{x_0=T} = \exp(aC'_k), \quad (1.49)$$

für  $k = 1, 2, 3$ . Diese Randbedingungen führen wie im Kontinuum auf eine bis auf Eichtransformationen eindeutige wirkungsminimalisierende Konfiguration  $V$ , dem Gitterhintergrundfeld. Dies kann folglich über

$$V(x, \mu) = \exp(aB_\mu(x)) \quad (1.50)$$

durch das Hintergrundfeld  $B$  ausgedrückt werden.

### 1.7.2 Die Fermionische Wirkung

Eine naive Wirkung für freie Fermionen auf dem Gitter ist gegeben durch

$$S_F[U, \bar{\psi}, \psi] = a^4 \sum_{0 < x_\mu < L} \bar{\psi}(x)(D + m_0)\psi \quad (1.51)$$

mit nackter Quarkmasse  $m_0$  und dem Dirac-Operator auf dem Gitter

$$D = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) \quad (1.52)$$

als symmetrisierte Summe der kovarianten Vorwärts- und Rückwärtsableitung (A.17). In dieser Diskretisierung tritt das sogenannte Problem der *Fermionenverdopplung*<sup>4</sup> auf, welche mehr als die benötigten oder erwarteten Teilchenanregungen der Kontinuumstheorie liefert. Am freien Gitterpropagator für periodische Randbedingungen (4-dim. Torus)

$$S(p) = 1 / \left\{ m_0 + \frac{i}{a} \sum_{\mu} \gamma_\mu \sin ap_\mu \right\}, \quad \text{mit } -\pi \leq ap_\mu \leq \pi, \quad (1.53)$$

zählt man im Grenzfall verschwindender Quarkmassen ( $m_0 \rightarrow 0$ ) 16 Singularitäten innerhalb der Brillouin-Zone. Der Propagator des freien Fermionfeldes im Kontinuum besitzt hingegen nur eine Singularität, so dass fünfzehn als unphysikalisch zu betrachten sind. Die Anzahl der Fermionen in dieser diskretisierten Wirkung ist  $2^d$ , also von der Raumzeitdimension  $d$  abhängig. Die Menge der Punkte im Impulsraum, an denen diese Fermionen erzeugt werden, ist für  $d = 4$  in Gittereinheiten gegeben durch

$$\Pi = \{ \pi_{ijkl} = (i\pi, j\pi, k\pi, l\pi) \mid i, j, k, l \in \{0, 1\} \}. \quad (1.54)$$

---

<sup>4</sup>Verdopplung ist hier so zu verstehen, dass sich die Anzahl der Fermionen pro Raumzeitdimension verdoppelt.

Zur Behebung dieses Problems haben sich zwei Lösungen als besonders geeignet herausgestellt. Eine geht auf Kogut und Susskind [31] zurück und nennt sich *staggered fermions*. Die dieser Arbeit zugrunde liegende Formulierung der Fermionen auf dem Gitter ist jedoch die der

### Wilson-Fermionen

Von jeder Gitterwirkung, die ein bestimmtes physikalisches System im Kontinuum beschreiben soll, müssen wir fordern, dass deren Kontinuumsliches  $a \rightarrow 0$  erstens wohldefiniert ist und zweitens gegen die Kontinuumswirkung dieses Systems strebt. Es ist daher offensichtlich, dass man zu  $a^p$ ,  $0 < p \in \mathbb{N}$ , proportionale Terme zur Gitterwirkung addieren kann, ohne den Grenzwert zu ändern. Dies hat sich Wilson zunutze gemacht, um die zusätzlichen Fermionen aus dem Spektrum zu entfernen, siehe Anhang A.5.

Unter Hinzunahme des Wilson-Terms  $-\frac{1}{2}a\nabla_\mu^*\nabla_\mu$  zum Dirac-Operator des Gitters (1.52) gelangt man zum bereits erwähnten Wilson-Dirac-Operator (1.40), dessen freier Propagator im Impulsraum die Gestalt

$$S(p) = a / \left\{ 1 - 2\kappa \sum_{\mu} [\cos(ap_{\mu}) - i\gamma_{\mu} \sin(ap_{\mu})] \right\} \quad (1.55)$$

annimmt – wieder im Limes  $m_0 \rightarrow 0$ . Dadurch erhalten alle Quarkzustände, außer dem physikalischen im Ursprung  $ap_{\mu} = \pi_{0000} = (0, 0, 0, 0) \in \Pi$ , im Kontinuumsliches eine unendliche Masse und verschwinden aus dem Spektrum.

Ein Nachteil dieser Umsetzung ist, dass der Diskretisierungsfehler der naiven Fermionwirkung durch den Wilson-Term von  $O(a^2)$  auf  $O(a)$  steigt. Ein vielleicht noch gravierender Nachteil dieses Zusatzterms, da er physikalische Konsequenzen für die Theorie bei endlichem Gitterabstand hat, ist die explizite Brechung der chiralen Symmetrie auf dem Gitter, die erst im Kontinuumsliches wieder hergestellt wird. Als Konsequenz wird eine additive und multiplikative Renormierung der Quarkmasse benötigt, d. h. dass jede renormierte Quarkmasse  $m_R$  von der Form

$$m_R = Z_m m_q, \quad m_q = m_0 - m_c \quad (1.56)$$

ist.  $m_c$  heißt *kritische Quarkmasse* und  $m_q$  nennt man *subtrahierte nackte Quarkmasse*.

Es sei hier erwähnt, dass es auch eine Realisierung der chiralen Symmetrie auf dem Gitter gibt, welche die chirale Symmetrie bewahrt und keine Fermionenverdopplung aufweist [36]. Ein Dirac-Operator  $D$  welcher diese Eigenschaften erfüllen soll, muss der *Ginsparg-Wilson-Relation*

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = a D \gamma_5 D \quad (1.57)$$

genügen.

Es wird jedoch die Fermionwirkung mit dem Wilson-Term verwendet, denn die  $O(a^2)$ -Genauigkeit des naiven Dirac-Operators kann für den Wilson-Dirac-Operator wieder hergestellt werden. Diese Form der Reduzierung der Gitterfehler von  $O(a)$  auf  $O(a^2)$  heißt  *$O(a)$ -Verbesserung*.

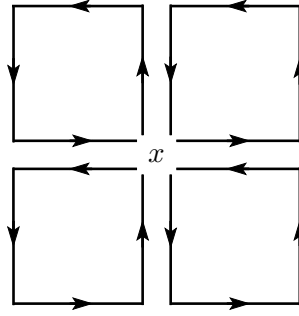


Abbildung 1.3: Graphische Darstellung der zum Feldtensor  $F_{\mu\nu}$  beitragenden Linkvariablen

### 1.7.3 $O(a)$ -Verbesserung

Ist  $R$  eine dimensionslose Variable, z. B. ein Verhältnis zweier Massen von Hadronen, so unterscheidet sich sein Erwartungswert auf dem Gitter von dem im Kontinuum durch Korrekturen der Ordnung  $a^p$ :

$$R^{\text{lat}} = R^{\text{cont}} + O(a^p). \quad (1.58)$$

Die Potenz  $p$  hängt von der gewählten Diskretisierung der Gitterwirkung ab, d. h. sie lässt sich durch zusätzliche Terme erhöhen, so dass entsprechend die Konvergenz zum Kontinuumslimites *verbessert* wird. Der Preis für eine bessere Konvergenz ist in den meisten Fällen durch eine längere Simulationszeit auf Grund des größeren numerischen Aufwandes gegeben. Auch die Suche nach der verbesserten Gitterwirkung ist nicht trivial und für  $p = 2$  spricht man von  $O(a)$ -Verbesserung. Diese beschleunigte Konvergenz zum Kontinuumslimites geht auf die Arbeiten von Symanzik [66, 67] zurück und wird daher auch als Symanziks Verbesserungsprogramm bezeichnet.

### Verbesserung der Wilson-Wirkung

Wie schon erwähnt wurde, können zu einer Gitterwirkung Terme proportional zu  $a^q$ ,  $0 < q \in \mathbb{N}$ , addiert werden, da deren Kontinuumslimites verschwindet. Die gewöhnliche Gitterformulierung mit periodischen Randbedingungen in Raum und Zeit erlaubt die  $O(a)$ -Verbesserung der fermionischen Gitterwirkung der QCD bereits mit einem Gegenterm. Dieser Gegenterm<sup>5</sup> wurde zuerst von Sheikholeslami und Wohlert [56] eingeführt und lautet

$$\delta S[U, \bar{\psi}, \psi] = S_{SW}[U, \bar{\psi}, \psi] = a^5 \sum_x c_{sw} \bar{\psi}(x) \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} \psi(x). \quad (1.59)$$

<sup>5</sup>Aufgrund der Darstellung von  $F_{\mu\nu}$  in Abbildung 1.3 wird der Verbesserungsterm von SW auch als (*clover*) Kleeblatt-Term bezeichnet.



$\widehat{F}_{\mu\nu}$  ist der Feldstärketensor auf dem Gitter

$$\widehat{F}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{8a^2} \{Q_{\mu\nu}(x) - Q_{\nu\mu}(x)\} , \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}(x) = & U(x, \mu)U(x + a\hat{\mu}, \nu)U(x + a\hat{\nu}, \mu)^{-1}U(x, \nu)^{-1} \\ & + U(x, \nu)U(x - a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, \mu)^{-1}U(x - a\hat{\mu}, \nu)^{-1}U(x - a\hat{\mu}, \mu) \\ & + U(x - a\hat{\mu}, \mu)^{-1}U(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}, \nu)^{-1}U(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}, \mu)U(x - a\hat{\nu}, \nu) \\ & + U(x - a\hat{\nu}, \nu)^{-1}U(x - a\hat{\nu}, \mu)U(x + a\hat{\mu} - a\hat{\nu}, \nu)U(x, \mu)^{-1} \end{aligned} \quad (1.61)$$

und die Spinmatrizen  $\sigma_{\mu\nu}$  sind in (A.9) definiert. Der Verbesserungskoeffizient  $c_{\text{sw}}$  ist keineswegs universell. Er hängt von der nackten Kopplung  $g_0$  ab und muss nicht-perturbativ bestimmt werden. Ergebnisse für  $c_{\text{sw}}$  liegen in nicht-perturbativer Genauigkeit für die Valenzquarknäherung (s.o.) [40], für zwei [28] und für drei [2] dynamische Wilsonfermionen vor.

### Verbesserung im Schrödinger-Funktional

Überträgt man diese Ergebnisse auf das Schrödinger-Funktional, so ist der Einfluß der Randfelder zu beachten. Im Falle der Eichwirkung genügt es die Gewichtungsfaktoren (1.48) zu

$$w(p) = \begin{cases} c_t(g_0) & \text{für eine mit dem Rand verbundene zeitartige Plakette} \\ \frac{1}{2}c_s(g_0) & \text{für räumliche Plaketten auf dem Rand } x_0 = 0, T \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.62)$$

abzuändern. Bei korrekter Wahl der Raum- und Zeitkoeffizienten  $c_s, c_t$  werden die Randeffekte kompensiert, so dass die Eichwirkung nur noch Gittereffekte der Ordnung  $a^2$  aufweist.

Für die Standardfermionwirkung wurde für die Randfelder (b:boundary) von Lüscher et. al. [39, 43] der Gegenterm

$$S_{F,b} = a^4 \sum_{\mathbf{x}} \left\{ (\tilde{c}_s - 1) [\mathcal{O}_s(\mathbf{x}) - \mathcal{O}'_s(\mathbf{x})] + (\tilde{c}_t - 1) [\mathcal{O}_t(\mathbf{x}) - \mathcal{O}'_t(\mathbf{x})] \right\} \quad (1.63)$$

mit  $\tilde{c}_t = \tilde{c}_t(g_0)$ ,  $\tilde{c}_s = \tilde{c}_s(g_0)$  und

$$\mathcal{O}_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \gamma_k (\nabla_k^* + \nabla_k) \rho(\mathbf{x}) , \quad (1.64a)$$

$$\mathcal{O}'_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \bar{\rho}'(\mathbf{x}) \gamma_k (\nabla_k^* + \nabla_k) \rho'(\mathbf{x}) , \quad (1.64b)$$

$$\mathcal{O}_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[ \bar{\psi}(x) (P_- \nabla_0 + P_+ \overleftarrow{\nabla}_0^*) \psi(x) \right]_{x_0=a} , \quad (1.64c)$$

$$\mathcal{O}'_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[ \bar{\psi}(x) (P_+ \nabla_0 + P_- \overleftarrow{\nabla}_0^*) \psi(x) \right]_{x_0=T-a} , \quad (1.64d)$$

eingeführt.

Durch die spezielle Wahl der zum Hintergrundfeld (1.20) gehörenden Randfelder lässt sich die Anzahl dieser Verbesserungskoeffizienten halbieren. Dies betrifft die räumlichen Plaketten auf dem Rand, d. h.  $c_s = 1 = \tilde{c}_s$ .

### 1.7.4 Die Quarkmatrix

Da es sich bei dem fermionischen Funktionalintegral um eine Integration über Grassmannvariablen handelt und die Fermionwirkung bilinear ist, gilt die Identität

$$\int D[\bar{\psi}] D[\psi] e^{-S_F[U, \bar{\psi}, \psi]} \equiv \det Q[U]. \quad (1.65)$$

Die *Quark-* oder *Fermionmatrix*  $Q$  hängt nach Integration über alle fermionischen Feldkonfigurationen also nur noch von den Linkvariablen ab. Welche Auswirkungen hat dies auf die Erwartungswerte? Ist der zugehörige Operator

$$\mathcal{O}[U, \bar{\psi}, \psi] = \psi_{y_1} \bar{\psi}_{x_1} \cdots \psi_{y_n} \bar{\psi}_{x_n} A[U] \quad (1.66a)$$

ein beliebiges Produkt von fermionischen Bilinearen, so ist der Erwartungswert gegeben durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int D[U] e^{-S_{\text{eff}}[U]} A[U] \sum_{z_1, \dots, z_n} \epsilon_{y_1, \dots, y_n}^{z_1, \dots, z_n} Q[U]_{z_1 x_1}^{-1} \cdots Q[U]_{z_n x_n}^{-1} \quad (1.66b)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int D[U] e^{-S_G[U]} \det Q[U] A[U] \sum_{z_1, \dots, z_n} \epsilon_{y_1, \dots, y_n}^{z_1, \dots, z_n} Q[U]_{z_1 x_1}^{-1} \cdots Q[U]_{z_n x_n}^{-1} \quad (1.66c)$$

mit der *effektiven Eichwirkung*

$$S_{\text{eff}}[U] \equiv S_G[U] - \ln \det Q[U] \equiv S_G[U] - \text{Tr} \ln Q[U] \quad (1.67)$$

und dem Normierungsfaktor  $\mathcal{Z} = \int D[U] e^{-S_{\text{eff}}[U]} = \int D[U] e^{-S_G[U]} \det Q[U]$ . Dies zeigt, dass eine Theorie mit Fermionen und Bosonen durch eine rein bosonische Theorie beschrieben werden kann. Anhand (1.67) sieht man, dass die effektive Wirkung nur für eine positiv definite Fermionmatrix existiert. Dies ist i.a. jedoch nicht gewährleistet.

Diese Schwierigkeit tritt in der *Valenzquark-Näherung* (*quenched approximation*) nicht auf, die zunächst hauptsächlich durch den hohen numerischen Aufwand bei Berechnungen mit  $N_f > 0$  Quarkflavours und hierzu noch nicht ausreichender Computereffizienz motiviert wurde. Die *Valenzquark-Näherung* lautet explizit

$$\det Q[U] = \text{konst.} > 0 \quad (1.68)$$

und vernachlässigt den Beitrag interner Quark-Schleifen, lässt also Effekte von Quark-Antiquark-Paaren außer Acht. In einer solchen MC-Simulation lassen sich die Updates der Eichfeldkonfigurationen, auf denen dann die Quarkpropagatoren  $Q[U]^{-1}$  zu berechnen sind, allein mit der reinen Eichwirkung durchführen.

## 1.8 Anomalien

Eines der grundlegenden Prinzipien zur Modellbildung in der Teilchenphysik ist das Symmetriekonzept. Symmetrien spielen die entscheidende Rolle, da aus ihnen unter anderem die Renormier-

barkeit und Unitarität einer Theorie folgen. Außerdem ist die Lagrangedichte eines physikalischen Systems so aufzustellen, dass sie die beobachtete Symmetrie aufweist. Eine derart eingebettete Symmetrie liegt jedoch auf klassischer Ebene vor und es gibt keine Garantie dafür, dass sie in der zugehörigen Quantentheorie weiterhin existiert. Falls eine solche Symmetrie der Lagrangedichte die Quantisierungsprozedur nicht überlebt, so spricht man von einer *Anomalie*.

Es gibt verschiedenste Arten von Anomalien, wie z. B. die Eichanomalie oder die chirale Anomalie, von der nun die Rede sein soll.

### 1.8.1 Chirale Symmetrie

Betrachten wir in der Kontinuums-QCD ein Multipllett  $\psi = (q_1, \dots, q_N)^T$  aus  $N$  Quarks mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu - M)\psi, \quad M = \text{diag}(m_1, \dots, m_N). \quad (1.69)$$

Im Falle von  $N$  masselosen Flavours, d.h. Massenparameter  $M \equiv 0$ , ist diese Lagrangedichte invariant unter den *chiralen Transformationen*

$$\psi \rightarrow \exp \left\{ i \left[ P_- (\omega_L^0 + \omega_L^a t^a) + P_+ (\omega_R^0 + \omega_R^a t^a) \right] \right\} \psi, \quad (1.70)$$

mit der Symmetriegruppe

$$U(N)_L \otimes U(N)_R = U(1)_L \otimes U(1)_R \otimes SU(N)_L \otimes SU(N)_R. \quad (1.71)$$

$P_\pm = (1 \pm \gamma_5)/2$  sind die chiralen Projektoren und  $t^a$  die  $N^2 - 1$  Generatoren der  $SU(N)$ .  $U(1) \otimes SU(N)$  ist eine Untergruppe dieser Symmetriegruppe in der  $\gamma_5$  nicht vorhanden ist und zwar genau dann, wenn  $\omega_L = \omega_R = \omega$  mit  $\psi \rightarrow \exp \{ i(\omega^0 + \omega^a t^a) \} \psi$  gilt.

Aus jeder exakten Symmetrie der Wirkung folgt ein erhaltener Strom, hier also die Vektorströme

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad : \text{Singlett}, \quad (1.72)$$

$$j_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi \quad : \text{Non-Singlett}. \quad (1.73)$$

Die zum  $\gamma_5$ -Anteil gehörenden erhaltenen Ströme sind die beiden Axialströme

$$j^{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad : \text{Singlett}, \quad (1.74)$$

$$j_a^{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 t^a \psi \quad : \text{Non-Singlett}. \quad (1.75)$$

Was passiert mit diesen erhaltenen Strömen, wenn eine *explizite Symmetriebrechung* durch die Massenmatrix vorliegt? Unter der Annahme von paarweise verschiedenen Massen der  $N$  Quarkflavours folgt [9]

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \partial_\mu j^{\mu 5} = -2i \bar{\psi} \gamma^5 M \psi \quad : \text{Singlett}, \quad (1.76)$$

$$\partial_\mu j_a^\mu = -i \bar{\psi} [t^a, M] \psi, \quad \partial_\mu j_a^{\mu 5} = -i \bar{\psi} \gamma^5 \{t^a, M\} \psi \quad : \text{Non-Singlett}. \quad (1.77)$$

Offensichtlich bleibt lediglich der Singlett-Vektorstrom  $j^\mu$  erhalten. Dieser Strom ist für die Erhaltung der Quarkzahl, die gerade  $1/3$  der Baryonenzahl ist, verantwortlich.

Ein Spezialfall liegt für  $N$  massenentartete Quarks ( $m_1 = \dots = m_N =: m$ ) vor, denn dann verschwindet wegen  $M = m\mathbb{1}$  der Kommutator  $[t^a, M]$  und es gilt insgesamt

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \partial_\mu j^{\mu 5} = -2im \bar{\psi} \gamma^5 \psi \quad : \text{Singlett}, \quad (1.78)$$

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0, \quad \partial_\mu j_a^{\mu 5} = -2im \bar{\psi} \gamma^5 t^a \psi \quad : \text{Non-Singlett}, \quad (1.79)$$

d.h. auch der Non-Singlett-Vektorstrom  $j_a^\mu$  ist erhalten und führt auf die Isospinsymmetrie. An dieser Stelle sei gesagt, dass lediglich der Singlett-Axialstrom, und zwar auch im Falle verschwindender Massen, auf eine Anomalie führt.

In der Natur wirklich zu beobachten ist, aufgrund der Massenentartung von up- und down-Quark ( $m_u \simeq m_d$ ), eine  $SU(2)_V$ -Isospinsymmetrie. Desweiteren sind beide Massen sehr viel kleiner als die Energieskala der QCD, so dass man auch von einer näherungsweise chiralen  $SU(2)_A$ -Symmetrie ( $m_u, m_d \simeq 0$ ) ausgehen kann. Die aus dieser approximativen  $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ -Symmetrie folgenden erhaltenen Ströme sind der *Vektorstrom*

$$V_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau^a \psi(x) \quad (1.80)$$

und der *Axial(vektor)strom*

$$A_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^a \psi(x). \quad (1.81)$$

Aufgrund des nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswert des Quark-Kondensates

$$\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R | 0 \rangle \neq 0 \quad (1.82)$$

ist die  $SU(2)_A$ -Symmetrie auch *spontan gebrochen* und es entsteht nach dem *Goldstone-Theorem* für jeden Generator der spontan gebrochenen Symmetrie ein masseloses Boson, also drei im Falle der  $SU(2)_A$ . Diese drei Goldstone-Bosonen erhalten eine geringe Masse, da diese Symmetrie von vornherein nur approximativ ( $m \approx 0$ ) erfüllt war. Sie werden mit den Pionen  $\pi^0, \pi^\pm$  identifiziert und liefern eine Erklärung für die relative Kleinheit der Pionmasse ( $M_\pi \approx 138 \text{ MeV}$ ) gegenüber der Masse des  $\rho$ -Mesons ( $M_\rho \approx 770 \text{ MeV}$ ).

### 1.8.2 PCAC-Relation

Da die  $SU(2)_A$ -Symmetrie nicht als völlig exakte Symmetrie anzusehen ist, verschwindet auch die Divergenz des Axialstromes  $\partial_\mu A_\mu$  nicht vollständig. Vielmehr gilt entsprechend (1.79) die Erhaltung nur bis auf einen lokalen Term. Die diesen Sachverhalt beschreibende Gleichung ist die *PCAC-Relation*<sup>6</sup> (*Partially Conserved Axial Current*)

$$\partial_\mu A_\mu^a(x) = 2mP^a(x) \quad (1.83)$$

---

<sup>6</sup>hier nun in der für das Gitter notwendigen euklidischen Notation

mit der über

$$P^a(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\frac{1}{2}\tau^a\psi(x) \quad (1.84)$$

definierten *pseudoskalaren Dichte*. Die PCAC-Relation ist eine Operatorrelation und als solche auf einen Zustand anzuwenden. Für ein Operatorprodukt  $\mathcal{O}$  aus lokal zusammengesetzten Feldern lautet die PCAC-Relation

$$\langle \partial_\mu A_\mu^a(x)\mathcal{O} \rangle = 2m\langle P^a(x)\mathcal{O} \rangle \quad (1.85)$$

und ist von  $\mathcal{O}$  unabhängig, wenn dessen Definitionsbereich  $x$  nicht enthält.

### 1.8.3 PCAC-Relation auf dem Gitter

Überträgt man die PCAC-Relation für die entsprechend renormierten Größen auf das Gitter

$$\langle \tilde{\partial}_\mu (A_R)_\mu^a(x)\mathcal{O} \rangle = 2m_R\langle (P_R)^a(x)\mathcal{O} \rangle + O(a), \quad (1.86)$$

so kommen Gitterartefakte der Ordnung  $O(a)$  hinzu.  $\tilde{\partial}_\mu$  ist die symmetrische Gitterableitung (A.19). Die PCAC-Relation bietet sich dadurch gerade als Definition einer renormierten Quarkmasse

$$m_R = \frac{1}{2} \frac{\langle \tilde{\partial}_\mu (A_R)_\mu^a(x)\mathcal{O} \rangle}{\langle (P_R)^a(x)\mathcal{O} \rangle} + O(a), \quad (1.87)$$

an, die man dann über ausgewählte Korrelationsfunktionen mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen berechnen kann. Dies spielt jedoch in dieser Arbeit keine Rolle.

## 1.9 Renormierung

Die Invarianz der masselosen QCD-Lagrangedichte unter  $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ -Flavourtransformationen führt zu nicht-linearen Beziehungen unter den Strömen. Aus diesen sogenannten *Stromalgebrabeziehungen* [3, 41, 45] lässt sich folgern, dass für die Ströme keine Renormierung notwendig ist. In enger Beziehung zur Stromalgebra stehen die sogenannten *Ward-Identitäten*. Sie folgen aus der Invarianz der Pfadintegraldarstellung von Korrelationsfunktionen unter einer Variation der Feldvariablen und dienen unter anderem zur Überprüfung der Renormierbarkeit einer physikalischen Theorie. Ist eine Symmetrie gebrochen, so ist auch die zugehörige Ward-Identität nicht mehr gültig. Dies hat zur Folge, dass Korrelationsfunktionen, die sich aus entsprechenden Observablen zusammensetzen, skalenabhängig werden. Kurz gesagt: Ward-Identitäten 'schützen' renormierte Korrelationsfunktionen in der Kontinuumstheorie vor einer Skalenabhängigkeit.

Betrachtet man die gitterregularisierte Theorie, so liegt für den masselosen Fall keine exakte  $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ -Symmetrie vor, da sie durch Terme der Ordnung  $a$  explizit verletzt wird. Als eine Konsequenz hieraus muss bei endlichem Gitterabstand eine endliche Renormierung  $Z_A \neq 1 \neq Z_V$  erfolgen [63], die aber im Kontinuumsimes wieder auf 1 reduziert ist. In einem massenu-

nabhängigem Renormierungsschema lauten die renormierten Größen des verbesserten Axialstromes und des verbesserten Vektorstromes dann

$$(A_R)_\mu^a = Z_A(1 + b_A a m_q)(A_I)_\mu^a, \quad (1.88)$$

$$(V_R)_\mu^a = Z_V(1 + b_V a m_q)(V_I)_\mu^a, \quad (1.89)$$

mit der subtrahierten nackten Quarkmasse  $m_q = m_0 - m_c$  aus (1.56). Neben den Verbesserungskoeffizienten der Wirkung müssen auch  $b_A$  und  $b_V$  zur  $O(a)$ -Verbesserung richtig eingestellt werden.

Die Renormierungskonstanten  $Z_A$  und  $Z_V$  können im Schrödinger-Funktional bestimmt werden. Dazu sind zweckmäßig gewählte Normierungsbedingungen aus Korrelationsfunktionen im SF zu definieren. In dieser Arbeit soll die nicht-perturbative Bestimmung des Renormierungsfaktors,  $Z_A^{\text{stat}}$ , zum statisch-leichten Axialvektorstrom  $A_0^{\text{stat}}$  erfolgen. Dieser ist (siehe (2.11)) in einer effektiven Theorie, der HQET, definiert. Im Gegensatz zur relativistischen Theorie existiert für den statischen Axialvektorstrom keine Ward-Identität, so dass er im Zuge der Renormierung der effektiven Theorie eine Skalenabhängigkeit erhält.

## 2 Heavy Quark Effective Theory – Eine effektive Theorie schwerer Quarks

Die HQET ist eine effektive Niederenergie Theorie der QCD zur Beschreibung hadronischer Systeme mit schweren Quarks. Es folgt die Definition der HQET als eine effektive Feldtheorie der QCD auf dem Gitter mit einem schweren Quark-Flavour  $\psi_h$  (h:heavy). Zurückgehend auf die Arbeiten von Eichten und Hill [16, 17, 18] kann eine effektive Feldtheorie für ruhende Hadronen mit  $N_f - 1$  leichten und einem schweren Quark der Masse  $m$ , dem b-Quark, über die formale Entwicklung der QCD-Lagrangedichte nach inversen Potenzen dieser schweren Quarkmasse definiert werden. Dies wird dadurch ermöglicht, dass der Gittercutoff  $a^{-1}$  weit über der Masse des b-Quarks liegt. Die Einführung der HQET folgt hier im wesentlichen den Ausführungen in [33, 34, 27].

### 2.1 Definition der effektiven Theorie auf dem Gitter

Die QCD-Lagrangedichte ist im allgemeinen Fall zunächst gegeben als Summe über die betrachteten Flavours  $N_f$ . Ein Flavour ist das schwere Quark, so dass die Wirkung in zwei Anteile, dem rein relativistischen Anteil  $S_{\text{rel}}$  aus den Eichfeldern und den  $N_f - 1$  leichten Quarks, sowie dem Anteil aus einem schweren Quark  $S_{\text{HQET}}$  zerfällt. Letzterer wird nach den inversen Potenzen der Masse des schweren Quarks entwickelt:

$$S_{\text{HQET}} = a^4 \sum_x \mathcal{L}_{\text{HQET}}(x) = a^4 \sum_x \left\{ \mathcal{L}_{\text{stat}}(x) + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{(i)}(x) \right\}, \quad (2.1a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{stat}}(x) = \bar{\psi}_h(x) [D_0 + \delta m] \psi_h(x), \quad (2.1b)$$

$$\mathcal{L}^{(i)} = \sum_j \omega_j^{(i)} \mathcal{L}_j^{(i)}. \quad (2.1c)$$

$\mathcal{L}_{\text{stat}}$  ist die Lagrangedichte der *statischen Theorie* und  $\delta m$  ein Gegenterm der Massendimension Eins. Für ein ruhendes (schweres) Quark verbleibt in  $S_{\text{HQET}}$  lediglich die Zeitableitung (2.1b).  $\omega_j^{(i)}$  sind die Entwicklungskoeffizienten der Korrekturterme  $\mathcal{L}^{(i)}$  bis zur Ordnung  $n$  an die statische Theorie. Sie sind Funktionen der nackten Kopplung und der schweren Quarkmasse, d. h. von der Ordnung  $O(1/m^i)$ . Die Massendimension von  $\mathcal{L}_j^{(i)}$  ist somit  $4 + i$ .

Mit dieser Entwicklung lässt sich der Boltzmann-Faktor im Pfadintegral schreiben als

$$\begin{aligned} e^{-(S_{\text{rel}} + S_{\text{HQET}})} &= \exp \left\{ - \left( S_{\text{rel}} + a^4 \sum_x \mathcal{L}_{\text{stat}}(x) \right) \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + a^4 \sum_x \mathcal{L}^{(1)}(x) + \frac{1}{2} \left[ \sum_x \mathcal{L}^{(1)}(x) \right]^2 - a^4 \sum_x \mathcal{L}^{(2)}(x) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Setzt man nun im Rahmen von Symanziks effektiver Theorie, siehe A.6, das Pfadintegralmittel bezüglich der Wirkung in der statischen Näherung für schwere Quarks

$$S \equiv S_{\text{rel}} + S_{\text{h}} , \quad S_{\text{rel}} = S_G + S_{\text{impr}} = S_G + S_F + S_{SW} \quad (2.3)$$

$$S_{\text{h}} \equiv a^4 \sum_x \mathcal{L}_{\text{stat}}(x) \quad (2.4)$$

voraus, so treten die  $1/m$ -Korrekturen lediglich als Zusatzterme  $\mathcal{O}_j^{(i)}$  und  $\mathcal{A}_j^{(i)}$  in lokalen Operatoren und Korrelationsfunktionen auf. Die Entwicklung der ersten Ordnung in  $1/m$  liefert auf klassischer Ebene

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}_1^{(1)} + \mathcal{L}_2^{(1)} , \quad \mathcal{L}_1^{(1)} = -\bar{\psi}_{\text{h}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B} \psi_{\text{h}} , \quad \mathcal{L}_2^{(1)} = -\bar{\psi}_{\text{h}} \frac{1}{2} \mathbf{D}^2 \psi_{\text{h}} . \quad (2.5)$$

$\mathbf{B}$  ist das chromomagnetische Feld in drei Dimensionen und  $\mathbf{D}^2$  der 3-dim. Laplace-Operator. Die Entwicklungskoeffizienten sind so festzulegen, dass die effektive Theorie zur QCD passt. In vorliegenden Fall lauten sie

$$\omega_1^{(1)} = 1/m_b + O(g_0^2) = \omega_2^{(1)} . \quad (2.6)$$

Das schwere Quark  $\psi_{\text{h}}$  und das zugehörige Antiquark  $\bar{\psi}_{\text{h}}$  besitzen als nicht-relativistische Spin 1/2-Teilchen nur zwei Freiheitsgrade. Dies wird für vierkomponentige Spinoren durch die Bedingungen

$$P_+ \psi_{\text{h}} = \psi_{\text{h}} , \quad \bar{\psi}_{\text{h}} P_+ = \bar{\psi}_{\text{h}} , \quad \text{mit } P_{\pm} = (1 \pm \gamma_0)/2 \quad (2.7)$$

gewährleistet.  $P_{\pm}$  projizieren auf orthogonale Unterräume ( $P_- P_+ = 0$ ), so dass in der Dirac-Darstellung die zwei unteren bzw. oberen Komponenten zu Null gewählt werden können.

## 2.2 Symmetrien der statischen Wirkung

In dieser effektiven Feldtheorie liegen zwei neue Symmetrien vor, die es in der QCD bei endlichen Massen nicht gibt. Dies sind

### 1. Spinsymmetrie des schweren Quarks

Die Wirkung  $S_{\text{h}}$  ist (ebenso wie das Integrationsmaß) invariant unter SU(2)-Rotationen

$$\psi_{\text{h}}(x) \longrightarrow V \psi_{\text{h}}(x) , \quad \bar{\psi}_{\text{h}}(x) \longrightarrow \bar{\psi}_{\text{h}}(x) V^{-1} \quad \text{mit } V = \exp(-i \phi_i \epsilon_{ijk} \sigma_{jk}) \quad (2.8)$$

und Transformationsparametern  $\phi_i$ .

### 2. Lokale Erhaltung der Anzahl schwerer Quarkflavours

Ursache ist die reine Zeitpropagation des schweren Quarks, wodurch eine rein raumabhängige



ge Phasentransformation

$$\psi_h(x) \longrightarrow e^{i\eta(\mathbf{x})}\psi_h(x), \quad \bar{\psi}_h(x) \longrightarrow \bar{\psi}_h(x)e^{-i\eta(\mathbf{x})}, \quad (2.9)$$

als Freiheit übrig bleibt. Als Konsequenz dieser Invarianz der Wirkung ist der Propagator des statischen Quarks proportional zur Gitter- $\delta$ -Funktion im Raum. Mit anderen Worten ist ein schweres Quark 'exakt statisch' für einen endlichen Gitterabstand.

### 2.3 Die Zeitkomponente des statischen Axialstromes

Als Beispiel der Definition einer Korrelationsfunktion aus zusammengesetzten Feldern in der HQET soll die Zeitkomponente des Axialstromes dienen, deren Renormierungskonstante  $Z_A^{\text{stat}}$  in dieser Arbeit nicht-perturbativ bestimmt werden soll. Die Definition in der HQET lautet formal

$$A_0^{\text{HQET}}(x) \equiv \sum_{\nu=0}^n \mathcal{A}^{(\nu)}(x), \quad \mathcal{A}^{(\nu>0)}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(\nu)} \mathcal{A}_i^{(\nu)}(x). \quad (2.10)$$

Der Term führender Ordnung ist definiert durch

$$\mathcal{A}^{(0)}(x) = \alpha_0^{(0)} A_0^{\text{stat}}(x), \quad (2.11a)$$

$$A_0^{\text{stat}}(x) = \bar{\psi}_1(x) \gamma_0 \gamma_5 \psi_h, \quad (2.11b)$$

so dass  $\alpha_0^{(0)}$  gerade die gesuchte Renormierungskonstante des statischen Axialstromes  $Z_A^{\text{stat}}$  ist. Auch der statische Axialstrom trägt bzgl. der Transformation

$$A_0^{\text{stat}}(x) \longrightarrow e^{i\eta(\mathbf{x})} A_0^{\text{stat}}(x) \quad (2.12)$$

eine Flavourquantenzahl.

#### Verbesserung des Axialstromes

Nach Symanzik sind renormierte, zusammengesetzte Gitterfelder durch effektive Felder zu beschreiben. Für die Zeitkomponente des Axialstromes gilt nach [33] für beliebige Koeffizienten  $\omega_k$

$$(A_0^{\text{stat}})_{\text{eff}} = A_0^{\text{stat}} + a \sum_{k=1}^4 \omega_k (\delta A_0^{\text{stat}})_k, \quad (2.13)$$

mit

$$(\delta A_0^{\text{stat}})_1 = \bar{\psi}_1 \overleftarrow{D}_j \gamma_j \gamma_5 \psi_h, \quad (2.14a)$$

$$(\delta A_0^{\text{stat}})_2 = \bar{\psi}_1 \gamma_5 D_0 \psi_h, \quad (2.14b)$$

$$(\delta A_0^{\text{stat}})_3 = \bar{\psi}_1 \overleftarrow{D}_0 \gamma_5 \psi_h, \quad (2.14c)$$

$$(\delta A_0^{\text{stat}})_4 = m \bar{\psi}_1 \gamma_0 \gamma_5 \psi_h. \quad (2.14d)$$

Terme wie  $D_0\psi_h$  treten nicht auf, da sie (2.12) verletzen würden. Diese Basis lässt sich noch verkleinern, beispielsweise muss für eine On-Shell-Verbesserung  $(\delta A_0^{\text{stat}})_2$  verschwinden. Auch  $(\delta A_0^{\text{stat}})_3$  lässt sich zu Gunsten von  $(\delta A_0^{\text{stat}})_1$  und  $(\delta A_0^{\text{stat}})_4$  eliminieren, denn alle drei zusammen wären nicht linear unabhängig.  $m$  stellt die Masse des relativistischen Quarks dar. Soll es masselos sein, kann auch auf diesen Term verzichtet werden.

Dementsprechend werden zur Behebung der  $O(a)$ -Effekte Korrekturterme zum Axialstrom addiert. Die verbesserte und die renormierte Version des statischen Axialstromes (2.11b) lautet dann

$$(A_R^{\text{stat}})_0(x) = Z_A^{\text{stat}}(1 + b_A^{\text{stat}} am_q)(A_I^{\text{stat}})_0(x), \quad (2.15a)$$

$$(A_I^{\text{stat}})_0(x) = A_0^{\text{stat}}(x) + ac_A^{\text{stat}} \delta A_0^{\text{stat}}(x), \quad (2.15b)$$

$$\delta A_0^{\text{stat}}(x) = \bar{\psi}_1(x) \gamma_j \gamma_5 \frac{1}{2} (\overleftarrow{\nabla}_j + \overleftarrow{\nabla}_j^*) \psi_h(x). \quad (2.15c)$$

Die Renormierungskonstante  $Z_A^{\text{stat}}$  und die Verbesserungskoeffizienten  $b_A^{\text{stat}}$ ,  $c_A^{\text{stat}}$  hängen nur von  $g_0$  und nicht von der Masse  $m_q$  ab. Der Verbesserungskoeffizient  $c_A^{\text{stat}}$  wird oft auf den störungstheoretischen 1-Loop-Wert [49]

$$c_A^{\text{stat}} = -\frac{1}{4\pi} g_0^2 \quad (2.16)$$

mit  $g_0^2 = 6/\beta$  gesetzt, ist im allgemeinen jedoch noch von der genauen Diskretisierung der Wirkung abhängig (siehe Abschnitt 4.1.1).

### Zeitkomponente des Vektorstromes

Desweiteren lässt sich auch der Vektorstrom untersuchen, dessen Zeitkomponente entsprechend definiert werden kann und in völliger Analogie auf den renormierten bzw. verbesserten Strom

$$(V_R^{\text{stat}})_0 = Z_V^{\text{stat}}(1 + b_V^{\text{stat}} am)(V_I^{\text{stat}})_0, \quad (2.17a)$$

$$(V_I^{\text{stat}})_0 = \bar{\psi}_1 \gamma_0 \psi_h + ac_V^{\text{stat}} \bar{\psi}_1 \gamma_j \frac{1}{2} (\overleftarrow{\nabla}_j + \overleftarrow{\nabla}_j^*) \psi_h, \quad (2.17b)$$

führt.

## 2.4 Alternative Diskretisierungen statischer Quarks

Die Standardwirkung in der HQET ist die bereits in Abschnitt 2.1 erwähnte *Eichten-Hill-Wirkung*

$$S_h^{\text{EH}} = a^4 \sum_x \bar{\psi}_h(x) \nabla_0^* \psi_h(x), \quad (2.18a)$$

$$\nabla_0 \psi_h(x) = \frac{1}{a} [\psi_h(x) - U^\dagger(x - a\hat{0}, 0) \psi_h(x - a\hat{0})] \quad (2.18b)$$

für das statische Quark. Der Versuch, die Diskretisierungsfehler durch Verkleinerung des Gitterabstandes  $a$  zu reduzieren, wird sehr schnell von nichtgewünschten Beiträgen durch Zustände höherer Energie begrenzt, so dass die Berechnung von Matrixelementen in der statischen Nähe-

rung aufwendig ist. Eine Änderung der Diskretisierung [12] verschafft hier Abhilfe.

Unter Bewahrung der beiden Symmetrien der HQET (2.8,2.9) bleibt keine große Freiheit in der Wahl der Wirkung übrig. Was man noch ändern kann, ist die Art, wie die Eichfelder in die diskretisierte kovariante Ableitung  $\nabla_0$  eingehen. Der Ansatz hierbei ist, anstelle der  $U(x, 0)$  verallgemeinerte Paralleltransporter  $W(x, 0)$  mit denselben Transformationseigenschaften wie die der  $U(x, 0)$  einzuführen. Formal ist daher einfach  $U$  in (2.18b) durch ein  $W(x, 0)$  zu ersetzen, welches dann eine unter den kubischen Raumrotationen invariante Funktion von Linkvariablen in der Nachbarschaft von  $x$  ist und den richtigen Kontinuumslikes  $\nabla_0 = \partial_0 + A_0 + O(a^2)$  besitzt. Drei verallgemeinerte Linkvariablen, die diesen Kriterien entsprechen sind

$$W_S(x, 0) = V(x, 0) \left[ \frac{g_0^2}{5} + \sqrt{\frac{1}{3} \text{tr} V^\dagger(x, 0) V(x, 0)} \right]^{-1}, \quad (2.19a)$$

$$W_A(x, 0) = V(x, 0), \quad (2.19b)$$

$$W_{\text{HYP}}(x, 0) = V_{\text{HYP}}(x, 0), \quad (2.19c)$$

mit

$$V(x, 0) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 \left[ U(x, j) U(x + a\hat{j}) U^\dagger(x + a\hat{0}, j) + U^\dagger(x - a\hat{j}, j) U(x + a\hat{j}, 0) U(x + a\hat{0} - a\hat{j}, j) \right]. \quad (2.20)$$

Aus den so definierten Links  $W_S, W_A, W_{\text{HYP}}$  folgen durch Einsetzen in (2.18) die entsprechenden Wirkungen  $S_h^S, S_h^A, S_h^{\text{HYP}}$ . Nähere Informationen zu dem sogenannten hyperkubisch geblockten Link  $W_{\text{HYP}}$  befinden sich im Anhang A.7.

## 2.5 Leichte und schwere Quarks im Schrödinger-Funktional

Wie Quarkfelder in die Formulierung des Schrödinger-Funktional eingehen, wurde in Abschnitt 1.5 diskutiert. Für den Fall der leichten bzw. relativistischen Quarks ist lediglich eine Indizierung der dortigen Felder  $\psi, \bar{\psi}, \rho, \bar{\rho}, \dots$  mit dem Index  $l$  nötig, um sie von den statischen (schweren) Quarks, welche mit  $h$  indiziert werden, zu unterscheiden. Für ein leichtes Quark gilt somit

$$\begin{aligned} P_+ \psi_1(x) \Big|_{x_0=0} &= \rho_1(\mathbf{x}), & P_- \psi_1(x) \Big|_{x_0=L} &= \rho_1'(\mathbf{x}), \\ \bar{\psi}_1(x) P_- \Big|_{x_0=0} &= \bar{\rho}_1(\mathbf{x}), & \bar{\psi}_1(x) P_+ \Big|_{x_0=L} &= \bar{\rho}_1'(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

mit der fermionischen Wirkung

$$\begin{aligned} S_F &= \int d^4x \bar{\psi}_1(x) [\gamma_\mu D_\mu + m] \psi_1(x) \\ &\quad - \int d^3\mathbf{x} [\bar{\psi}_1(x) P_- \psi_1(x)]_{x_0=0} - \int d^3\mathbf{x} [\bar{\psi}_1(x) P_+ \psi_1(x)]_{x_0=L}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.5.1 Statische Quarks

Für schwere Quarks sind die Randfelder eindeutig definiert durch

$$\psi_h(x)|_{x_0=0} = \rho_h(\mathbf{x}), \quad \bar{\psi}_h(x)|_{x_0=L} = \bar{\rho}'_h(\mathbf{x}), \quad (2.23)$$

denn auf Grund der Eigenschaft (2.7) entfallen die sonst notwendigen Projektoren. Desweiteren sind keine räumlichen Randbedingungen anzubringen, da statische Quarks sich per Konstruktion nicht fortbewegen. Folglich ist anstelle von zwei Randtermen in (2.22) nur ein Randterm hinzuzufügen,

$$S_h = \int d^4x \bar{\psi}_h(x) D_0 \psi_h(x) - \int d^3\mathbf{x} [\bar{\psi}_h(x) \psi_1(x)]_{x_0=T}. \quad (2.24)$$

Die Wirkung der HQET mit einem schweren und einen leichten Quark in statischer Näherung lautet nun

$$S[A, \bar{\psi}_1, \psi_1, \bar{\psi}_h, \psi_h] = S_G[A] + S_F[A, \bar{\psi}_1, \psi_1] + S_h[A, \bar{\psi}_h, \psi_h] \quad (2.25)$$

mit dem durch die Zustandsfunktion der Randfelder

$$\mathcal{Z}[C', \bar{\rho}'_1, \rho'_1, \bar{\rho}'_h; C, \bar{\rho}_1, \rho_1, \rho_h] = \int D[A] D[\psi_1] D[\bar{\psi}_1] D[\psi_h] D[\bar{\psi}_h] e^{-S[A, \bar{\psi}_1, \psi_1, \bar{\psi}_h, \psi_h]} \quad (2.26)$$

definierten Schrödinger-Funktional. Folglich sind die Erwartungswerte von Operatoren für verschwindende Randeichfelder definiert durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \left\{ \frac{1}{\mathcal{Z}} \int D[A] D[\psi_1] D[\bar{\psi}_1] D[\psi_h] D[\bar{\psi}_h] \mathcal{O} e^{-S[A, \bar{\psi}_1, \psi_1, \bar{\psi}_h, \psi_h]} \right\}_{\substack{\bar{\rho}'_1 = \rho'_1 = \\ \bar{\rho}_1 = \rho_1 = \\ \bar{\rho}'_h = \rho_h = 0}}. \quad (2.27)$$

Der Operator  $\mathcal{O}$  kann hierbei wiederum über

$$\zeta_1(\mathbf{x}) = \frac{\delta}{\delta \bar{\rho}_1(\mathbf{x})}, \quad \bar{\zeta}_1(\mathbf{x}) = -\frac{\delta}{\delta \rho_1(\mathbf{x})}, \quad (2.28)$$

$$\zeta'_1(\mathbf{x}) = \frac{\delta}{\delta \bar{\rho}'_1(\mathbf{x})}, \quad \bar{\zeta}'_1(\mathbf{x}) = -\frac{\delta}{\delta \rho'_1(\mathbf{x})}, \quad (2.29)$$

$$\zeta'_h(\mathbf{x}) = \frac{\delta}{\delta \bar{\rho}'_h(\mathbf{x})}, \quad \bar{\zeta}_h(\mathbf{x}) = -\frac{\delta}{\delta \rho_h(\mathbf{x})}, \quad (2.30)$$

leichte und schwere Randfelder beinhalten.

### 2.5.2 Wichtige Observablen

In der vorliegenden Arbeit sind die folgenden HQET-Observablen im Schrödinger-Funktional von besonderem Interesse:

$$f_A^{\text{stat}}(x_0) = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z} \langle A_0^{\text{stat}}(x) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_1(\mathbf{z}) \rangle, \quad (2.31)$$

$$f_{\delta A}^{\text{stat}}(x_0) = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z} \langle \delta A_0^{\text{stat}}(x) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_1(\mathbf{z}) \rangle. \quad (2.32)$$

$f_A^{\text{stat}}$  ist eine Korrelationsfunktion zwischen der oben definierten Zeitkomponente des statisch-leichten Axialstromes  $A_0^{\text{stat}}$  im Inneren und einer statisch-leichten pseudoskalaren Randquelle  $\bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_1(\mathbf{z})$ .

Für je eine solche Randquelle bei  $x_0 = 0$  und  $x_0 = T$  lässt sich die Korrelationsfunktion

$$f_1^{\text{stat}} = -\frac{1}{2L^6} \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{v} d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z} \langle \bar{\zeta}'_1(\mathbf{u}) \gamma_5 \zeta'_h(\mathbf{v}) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_1(\mathbf{z}) \rangle, \quad (2.33)$$

konstruieren. Eine hierzu ähnliche Größe ist die Korrelationsfunktion

$$f_1 = -\frac{1}{2L^6} \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{v} d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z} \langle \bar{\zeta}'_1(\mathbf{u}) \gamma_5 \zeta'_2(\mathbf{v}) \bar{\zeta}_2(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_1(\mathbf{z}) \rangle \quad (2.34)$$

zwischen zwei pseudoskalaren Randquellen leichter Quarks. Die statisch-statische Randkorrelationsfunktion

$$f_1^{\text{hh}}(x_3) = -\frac{1}{2L^2} \int dx_1 dx_2 d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z} \langle \bar{\zeta}'_h(\mathbf{x}) \gamma_5 \zeta'_h(\mathbf{0}) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_h(\mathbf{z}) \rangle \quad (2.35)$$

hingegen setzt sich nur aus schweren Quarks zusammen. Eine Veranschaulichung dieser Korrelationen ist in Abbildung 2.1 gegeben.

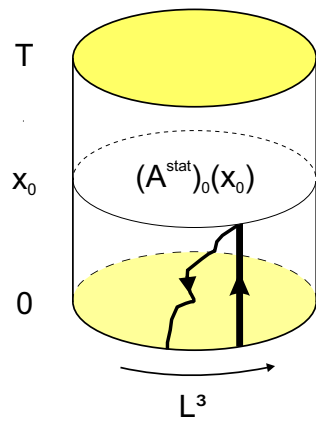
Welchem Zweck dienen derartige Korrelationsfunktionen? Im SF lassen sich für numerische Simulationen geeignet gewählte Korrelationsfunktionen aufstellen, die dann auf bestimmte Weise miteinander in Beziehung gesetzt, einer gewünschten Renormierungsbedingung genügen. Dies funktioniert deshalb so gut, weil sich die Renormierung der Randfelder meist auf einfache Weise neutralisieren lässt. Im vorliegenden Fall des statisch-leichten Axialstromes folgt nach [33] für das Verhältnis

$$X = \frac{f_A^{\text{stat}}}{\sqrt{f_1^{\text{stat}}}}, \quad (2.36)$$

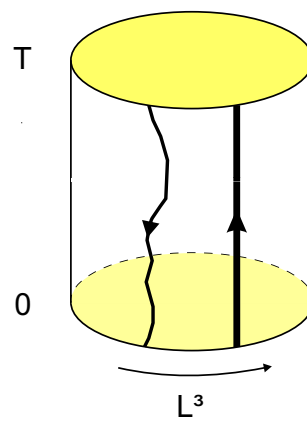
der Korrelationsfunktionen  $f_A^{\text{stat}}$  und  $f_1^{\text{stat}}$ , die Renormierungseigenschaft

$$X_R = Z_A^{\text{stat}} X. \quad (2.37)$$

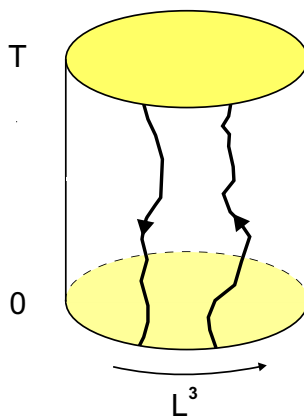
Durch die Größe  $X$  kann somit die Renormierungskonstante  $Z_A^{\text{stat}}$  aus (2.15) für die Zeitkomponente des statisch-leichten Axialstromes bestimmt werden. Dies erkennt man genauer wie folgt:



(a) Korrelation  $f_A^{\text{stat}}(x_0)$  zwischen einer statisch-leichten Randquelle und der Axialstromzeitkomponente  $A_0^{\text{stat}}$  im Inneren



(b) Rand-Rand-Korrelation  $f_1^{\text{stat}}$  zwischen einem leichten und einem schweren Quark



(c) Rand-Rand-Korrelation  $f_1$  zweier leichter Quarks

Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der Korrelationsfunktionen im Schrödinger-Funktional. Die unregelmäßigen Linien stehen für die Propagatoren der leichten Quarks, während die dicken, geraden Linien den statischen Quarkpropagator wiedergeben.

aus der Renormierung der Randfelder  $\zeta_R = Z_\zeta \zeta$  folgt ebenso wie für den renormierten Strom  $(A_R^{\text{stat}})_0 = Z_A^{\text{stat}} A_0^{\text{stat}}$  je ein  $Z$ -Faktor. Für die beiden Korrelationsfunktionen folgt daher

$$(f_A^{\text{stat}})_R = Z_{\zeta_1} Z_{\zeta_h} Z_A^{\text{stat}} f_A^{\text{stat}}, \quad (2.38)$$

$$(f_1^{\text{stat}})_R = (Z_{\zeta_1} Z_{\zeta_h})^2 f_1^{\text{stat}}, \quad (2.39)$$

und rechtfertigt (2.36). Zur  $O(a)$ -Verbesserung muss der Korrelator  $f_{\delta A}^{\text{stat}}$  hinzugefügt werden. Das verbesserte Verhältnis ist dann gegeben durch

$$X_I = \frac{f_A^{\text{stat}} + a c_A^{\text{stat}} f_{\delta A}^{\text{stat}}}{\sqrt{f_1^{\text{stat}}}}. \quad (2.40)$$

Per Konstruktion genügt auch dieses verbesserte Verhältnis Gleichung (2.37).

Aus den hier definierten Korrelationsfunktionen lässt sich ein weiteres, in [24] motiviertes Verhältnis

$$\Xi = \frac{f_A^{\text{stat}}}{[f_1 f_1^{\text{hh}}]^{1/4}}, \quad (2.41)$$

bilden, welches auf gleiche Weise auf den Renormierungsfaktor  $Z_A^{\text{stat}}$  schließen lässt. Die  $O(a)$ -verbesserte Größe lautet hier in Analogie

$$\Xi_I = \frac{f_A^{\text{stat}} + a c_A^{\text{stat}} f_{\delta A}^{\text{stat}}}{[f_1 f_1^{\text{hh}}]^{1/4}}. \quad (2.42)$$

## 2.6 Verknüpfung von HQET und QCD

In der Einleitung wurde erwähnt, dass die relativistische QCD und die HQET verknüpft werden müssen, um aus der effektiven Theorie Vorhersagen zu gewinnen. Auch wenn dies nicht Thema dieser Arbeit ist, soll der Vollständigkeit halber skizziert werden, wie dies nicht-perturbativ gelingen kann. Eine Beziehung zwischen dem Erwartungswert einer beliebigen QCD-Observablen und dem zugehörigen Erwartungswert in der effektiven Theorie ist durch die *Operatorproduktentwicklung* (OPE) gegeben. Explizit gilt

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{QCD}} = c_0(\mu) \langle \mathcal{O}_0(\mu) \rangle_{\text{HQET}} + \frac{c_1(\mu)}{2m_Q} \langle \mathcal{O}_1(\mu) \rangle_{\text{HQET}} + \dots \quad (2.43)$$

mit den *Wilson-Koeffizienten*  $c_i(\mu)$ . Sie liefern Korrekturen durch höherenergetische Beiträge, die durch die HQET nicht berücksichtigt sind. Die Gültigkeit der HQET ist dadurch auf Energieskalen  $\mu$  mit

$$\Lambda_{\text{QCD}} \ll \mu \ll m_Q \quad (2.44)$$

beschränkt. Um einen Anschluss an den perturbativen Bereich zu gewährleisten, kommen für die Anwendung der HQET nur die schwersten Quarks,  $b$  oder  $t$ , in Frage. Obige OPE setzt die Kon-

tinuumsgrößen in Beziehung, doch müssen die QCD und HQET auf dem Gitter nicht-perturbativ verknüpft werden. Um einen hinreichend guten Kontinuumlimes auf der rechten Seite von (2.43) zu erhalten, muss eine sehr feine Gitterauflösung  $a/L$  verwendet werden. Das impliziert einen Cutoff  $1/a$  weit über der Masse des schweren Quarks, also

$$am_Q \ll 1 . \tag{2.45}$$

Die Möglichkeiten heutiger Computer reichen aber bei weitem noch nicht aus, um ein hinreichend großes Volumen bzw. Gitterlänge  $L$  für derartige Rechnungen zu erzeugen. Für eine hohe Gitterauflösung muss man daher mit dem kleinen Volumen auskommen. Dies ist auch möglich, wenn die Parameter der effektiven Theorie durch Anpassung an geeignete QCD-Observablen in kleinem Volumen fixiert werden. Die Anwendbarkeit der HQET ist durch (2.44) gegeben und liefert für ein kleines Volumen  $L_0 = 1/\mu_0$  die Bedingung

$$1 \ll L_0 m_Q . \tag{2.46}$$

Für das  $b$ -Quark  $m_Q = m_b$  wird diese Bedingung erfüllt für  $L_0 \simeq 0.2 \text{ fm}$ , siehe [23].



---

## 3 Allgemeine Strategie einer nicht-perturbativen skalenabhängigen Renormierung

### 3.1 Einschränkungen und Strategie

Die numerische Berechnung einer von der Energieskala  $\mu$  abhängigen Korrelationsfunktion wie z. B. der laufenden Kopplung unterliegt mehreren Einschränkungen. Ausgehend von der hadronischen Größenskala ( $\approx 0.4 \text{ GeV}$ ) muss die Hochenergieskala ( $\approx 10 \text{ GeV}$ ) erreichbar sein um dort, im Rahmen der Störungstheorie, den Anschluß an andere Renormierungsschemata zu gewährleisten. Infolgedessen muss der durch die Diskretisierung eingeführte Gittercutoff relativ groß sein. Dazu benötigt man wiederum ein sehr feines Gitter, also einen kleinen Gitterabstand  $a$ .

Die Berechnung der Korrelationsfunktion über eine Monte-Carlo-Simulation bedingt ein endliches System, wobei wiederum die Gitterlänge  $L$  zur Vermeidung von Randeffekten hinreichend groß zu wählen ist. Diese Bedingungen spiegelt die Ungleichung

$$L \gg \frac{1}{0.4 \text{ GeV}} \gg \frac{1}{\mu} \approx \frac{1}{10 \text{ GeV}} \gg a \quad (3.1)$$

wieder, die auch mit den momentan modernsten Computern, wegen der Einschränkung  $L/a \leq 32 \leftrightarrow a \geq 0.05 \text{ fm}$ , nicht zu handhaben ist. Dieses Problem kann nach [44] dadurch umgangen werden, dass man die durch das endliche Volumen induzierten Effekte selbst als physikalische Observable betrachtet. Dazu werden konventionell die beiden physikalischen Skalen  $L$  und  $\mu$  durch

$$\mu \equiv \frac{1}{L} \quad (3.2)$$

identifiziert. Zum selben Ziel würde natürlich auch  $\mu = c/L$ ,  $c \in \mathbb{R}$  führen. Mit dieser Identifikation kann die Berechnung der laufenden Kopplung schrittweise durchgeführt werden, indem  $\mu$  jeweils um einen konstanten Faktor erhöht, bzw.  $L$  erniedrigt wird.

Eine Methode durch die sich über numerische Simulationen große Energiebereiche abdecken lassen, ist das

#### Step-Scaling

Dazu sind in einem Schema mit endlichem Volumen wie dem Schrödinger-Funktional abwechselnd der Gitterausdehnung  $L$  und die Gitterauflösung  $a/L$  um einen Faktor  $s > 1$  zu erhöhen. Als eine skalenabhängige Größe soll hier die laufende Kopplung  $\bar{g}^2$  dienen. Durch diese Faktorisierungszurückführung wird implizit die *Step-Scaling-Funktion*

$$\sigma(s, \bar{g}^2(L)) \equiv \bar{g}^2(sL) \quad (3.3)$$

definiert. Ihr Wert bei einer Gittergröße  $L$  entspricht also per Definition dem Wert auf einem mit dem Faktor  $s$  skalierten Gitter, was auch oftmals in der Form

$$\sigma(s, u) = u' \quad , \quad \text{mit} \quad u = \bar{g}^2(L) \quad \text{und} \quad u' = \bar{g}^2(sL) \quad (3.4)$$

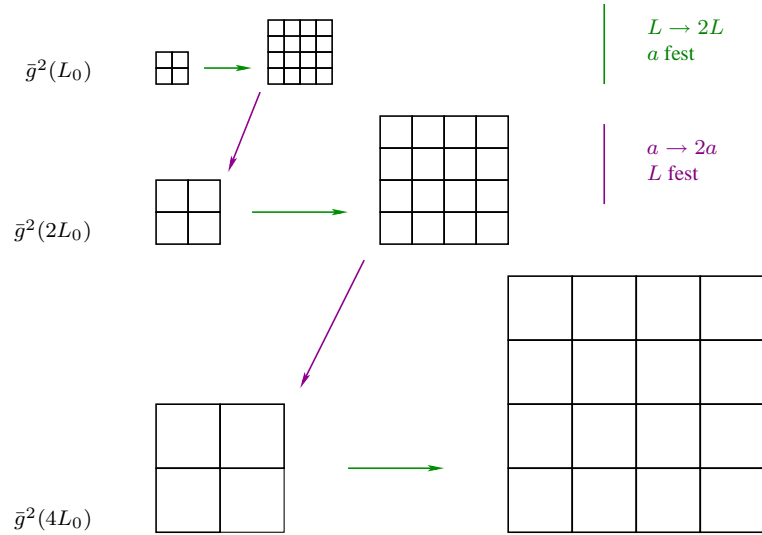


Abbildung 3.1: Schematisches Vorgehen zur Bestimmung der Step-Scaling-Funktion mit  $s = 2$

ausgedrückt wird. Die zugehörige Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\Sigma$  ist zudem noch von der Gitterauflösung  $L/a$  abhängig und es gilt die Beziehung

$$\sigma(s, u) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \Sigma(s, u, a/L) \Big|_{\bar{g}^2 = u, m=0} \quad (3.5)$$

Üblicherweise wird direkt mit einem Faktor  $s = 2$  gearbeitet, so dass im Weiteren die  $s$ -Abhängigkeit in beiden Funktionen unterdrückt wird.

Wie ist die Step-Scaling-Funktion nun aber numerisch zu bestimmen? Zunächst wählt man ein Gitter mit  $L/a$  Punkten und wiederholt iterativ die Schritte

- Vergrößerung der Gitterlänge  $L$  bei festgehaltenem Gitterabstand  $a$  um den Faktor  $s$
- Vergrößerung des Gitterabstandes bei fester renormierter Kopplung  $\bar{g}^2$  um Faktor  $s$

solange, bis man von einem kleinen Grundvolumen  $L_0$  schrittweise in ein hinreichend großes Volumen  $L = 2^n L_0$  vorgedrungen ist. Dieses Vorgehen kann auch umgekehrt werden, d. h. von einem großen Volumen  $L_{\max}$  kann in ein kleines Volumen hinabgestiegen werden. Dort in kleinem Volumen oder großen Energien ist dann keine MC-Simulation mehr nötig, da hier die Störungstheorie anwendbar ist. Damit hat man aber erst die Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\Sigma(u, a/L)$  für eine feste Auflösung  $L/a$  erhalten. Für eine Kontinuumsextrapolation ist mindestens eine Wiederholung dieser Prozedur für eine andere Auflösung notwendig. Aus den so gewonnenen Daten lässt sich in jedem dieser diskreten Kopplungspunkte der Kontinuumslikes  $\sigma(u)$  bilden. Aus der Menge aller Kontinuumswerte

$$\left\{ \sigma(u) \Big| u = \bar{g}^2(2^{-k} L_{\max}), k = 0, \dots, n \right\} \quad (3.6)$$

kann ein polynomialer Fit erzeugt werden, so dass beliebige Kopplungspunkte zugänglich sind. Neben der Kopplung lassen sich weitere im endlichen Volumen des Gitters definierte Größen

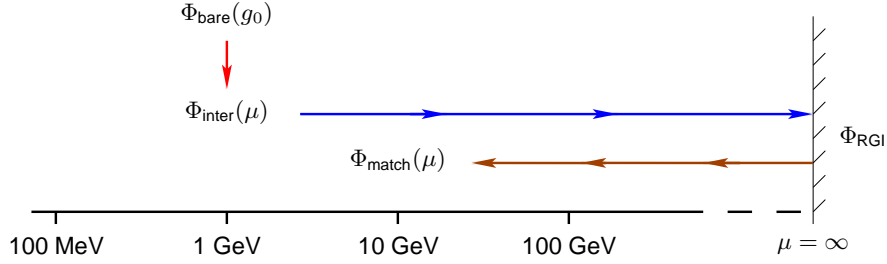


Abbildung 3.2: Strategie zur Verknüpfung eines nackten Matrixelementes mit seinem Pendant im Matching-Schema.

$X(L)$ , wie beispielsweise (2.36), durch Step-Scaling studieren. Für sie ist die Step-Scaling-Funktion bei der Kopplung  $u \equiv \bar{g}^2(L)$  definiert durch

$$Z_X(2L) = \sigma_X(u) Z_X(L). \quad (3.7)$$

### 3.2 Skalenabhängige Matrixelemente

In der multiplikativen Renormierung wird ein nackter Operator  $\mathcal{O}_{\text{bare}}$  über einen von der nackten Kopplung  $g_0$  und der dimensionslosen Kombination  $a\mu$  abhängigen Renormierungsfaktor  $Z_{\text{inter}}$  bei einer Skala  $\mu$  durch

$$\mathcal{O}_{\text{inter}}(\mu) = Z_{\text{inter}}(g_0, a\mu) \mathcal{O}_{\text{bare}} \quad (3.8)$$

in ein Renormierungszwischenschema übertragen (roter Pfeil in Abbildung 3.2). In diesem Renormierungszwischenschema (*intermediate scheme*) wird  $Z$  über die Bedingung

$$\langle \beta | \mathcal{O}_{\text{inter}}(\mu) | \alpha \rangle = \langle \beta | \mathcal{O}_{\text{bare}} | \alpha \rangle_{\text{treelevel}} \quad (3.9)$$

für geeignet gewählte Zustände  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  so gewählt, dass das Matrixelement des nackten Operators auf Tree-Ebene mit dem Matrixelement des bei der Skala  $\mu$  renormierten Operators übereinstimmt. Die Zustände  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$  dürfen dabei nur von der Skala  $\mu$  abhängen, so dass sich einfache Renormierungsgruppengleichungen (RGE) ergeben. Als Zwischenschema dient das Schrödinger-Funktional-Schema (SF), welches neben dem MOM-Schema (*momentum subtraction scheme*) [46] die größte Verwendung findet. Beides sind masselose Schemen, so dass ihre Renormierungskonstanten bei verschwindenden Quarkmassen berechnet werden, was wiederum eine weitere Vereinfachung der RGE zur Folge hat. In dem nun gewählten Renormierungszwischenschema werden Matrixelemente

$$\Phi_{\text{SF}}(\mu) \equiv \langle f | \mathcal{O}_{\text{SF}}(\mu) | i \rangle \quad (3.10)$$

definiert, die im Limes  $a \rightarrow 0$  von der Regularisierung unabhängig sind. Desweiteren sind die Zustände  $|f\rangle, |i\rangle$  im SF-Schema durch Randfelder festgelegt und die Energieskala wird für eine Anwendung des Step-Scalings auf  $\mu = 1/L$  gesetzt. Ein solches Matrixelement genügt dann der

Renormierungsgruppengleichung

$$\mu \frac{d\Phi_{\text{SF}}}{d\mu} = \gamma^{\text{SF}}(\bar{g}^2(\mu)) \Phi_{\text{SF}}(\mu) \quad (3.11)$$

mit einer im Hochenergiesektor möglichen Störungsentwicklung der Form

$$\gamma^{\text{SF}}(\bar{g}^2(\mu)) = -\bar{g}^2 [\gamma_0 + \gamma_1^{\text{SF}} \bar{g}^2 + \gamma_2^{\text{SF}} \bar{g}^4 + \dots] . \quad (3.12)$$

Hier ist nur der führende Koeffizient,  $\gamma_0$ , universell. Es wird aber im Folgenden auf eine spezielle Schemenkennzeichnung der Koeffizienten verzichtet, da nur im Schrödinger-Funktional gearbeitet wird. Das im Schrödinger-Funktional gewonnene Ergebnis der Skalenentwicklung von der hadronischen Skala hin zu einer Hochenergieskala (blauer Pfeil) muss noch in ein *Matching*-Schema konvertiert werden. Erst dadurch wird ein Vergleich mit Werten, die auf eine andere Art und Weise, ob experimentell oder numerisch, bestimmt wurden, möglich. Dieses Anpassen (*matching*) wird jedoch nicht direkt durchgeführt. Obwohl man sich durch die Skalenentwicklung schon im perturbativen Bereich befindet, wird das Matrixelement zunächst zu seinem renormierungsgruppeninvarianten (RGI-) Wert

$$\Phi_{\text{RGI}} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \Phi_{\text{SF}}(\mu) [2b_0 \bar{g}^2(\mu)]^{-\gamma_0/2b_0^2} \quad (3.13)$$

$$= \Phi_{\text{SF}}(\mu_n) [2b_0 \bar{g}^2(\mu_n)]^{-\gamma_0/2b_0^2} \times \exp \left\{ - \int_0^{\bar{g}(\mu_n)} dg \left[ \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} - \frac{\gamma_0}{b_0 g} \right] \right\} \quad (3.14)$$

bei  $\mu = \infty$  entwickelt und erst diese RGI-Größe mit dem Matching-Schema verknüpft. Die Restskalenentwicklung  $\mu_n \rightarrow \infty$  trägt hier der Exponentialfaktor, in den der perturbative Restanteil der Gamma-Funktion (3.12) und der Beta-Funktion

$$\beta(\bar{g}(\mu)) = -\bar{g}^3 [b_0 + b_1 \bar{g}^2 + b_2 \bar{g}^4 + \dots] \quad (3.15)$$

eingeht. Letztere entspricht formal der Gamma-Funktion in der Renormierungsgruppengleichung für die laufende Kopplung mit den universellen Koeffizienten

$$b_0 = \left\{ 11 - \frac{2}{3} N_f \right\} / (4\pi)^2 \quad \text{und} \quad b_1 = \left\{ 102 - \frac{38}{3} N_f \right\} / (4\pi)^4 . \quad (3.16)$$

Auch hier wird auf die spezielle Schemenkennzeichnung der anderen Koeffizienten und der Funktion selbst verzichtet.

Derart ermittelte RGI-Matrixelemente sind auf gewisse Weise fundamentale Größen der QCD, da sie nicht mehr von einer physikalischen Skala abhängen und über die Störungstheorie leicht in ein beliebiges, für Hochenergiephysiker interessantes Schema, wie z. B. das  $\overline{\text{MS}}$ -Schema, konvertiert werden können. Außerdem sind die Fehler kontrollierbar, so dass diese Größe mit guter Genauigkeit über Gitter-QCD zugänglich wird.

Die Beziehung zwischen dem nackten und dem renormierungsgruppeninvarianten Matrixelement

lässt sich leicht durch Einfügen von Einsen und Überschiebung aufschreiben:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{RGI}} &= \Phi_{\text{RGI}} \times \frac{\Phi_{\text{SF}}(\mu_n)}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_n)} \frac{\Phi_{\text{SF}}(\mu_{n-1})}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_{n-1})} \dots \frac{\Phi_{\text{SF}}(\mu_0)}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_0)} \\
 &= \frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_n)} \times \frac{\Phi_{\text{SF}}(\mu_n)}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_{n-1})} \frac{\Phi_{\text{SF}}(\mu_{n-1})}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_{n-2})} \dots \frac{\Phi_{\text{SF}}(\mu_1)}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_0)} \Phi_{\text{SF}}(\mu_0) \\
 &= \frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_n)} \times \frac{\Phi_{\text{SF}}(\mu_n)}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_{n-1})} \dots \frac{\Phi_{\text{SF}}(\mu_1)}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_0)} Z_{\text{SF}}(g_0, a\mu_0) \Phi_{\text{bare}}(g_0) \\
 &= \frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_n)} \times \frac{\Phi_{\text{SF}}(\mu_n)}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_{n-1})} \dots Z_{\text{SF}}(g_0, a\mu_1) \Phi_{\text{bare}}(g_0) \\
 &= \frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_n)} \times Z_{\text{SF}}(g_0, a\mu_n) \Phi_{\text{bare}}(g_0) . \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Von der zweiten zur dritten Zeile wird von der Definition von  $\Phi_{\text{SF}}$  bei der hadronischen Skala  $\mu_0$  Gebrauch gemacht. Alle auftretenden Verhältnisse  $\Phi_{\text{SF}}(\mu_i)/\Phi_{\text{SF}}(\mu_{i-1})$  werden im Schrödinger-Funktional durch Step-Scaling – Abschnitt 3.1 – berechnet und sind daher zunächst von der Wahl der Wirkung abhängig. Davon unabhängig ist jedoch der erste Faktor, der die perturbative Verknüpfung der Hochenergie- und RGI-Größe nach (3.14) darstellt.

Hat man das RGI-Matrixelement, so lässt sich auf gleiche Weise die Relation zu einem Matching-Schema herstellen:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{match}}(\mu) &= \frac{\Phi_{\text{match}}(\mu)}{\Phi_{\text{RGI}}} \times \Phi_{\text{RGI}} \\
 &= \frac{\Phi_{\text{match}}(\mu)}{\Phi_{\text{RGI}}} \times \frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi_{\text{SF}}(\mu_n)} Z_{\text{SF}}(g_0, a\mu_n) \Phi_{\text{bare}}(g_0) . \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

### 3.3 Verknüpfung von Step-Scaling-Funktion und $\Phi_{\text{RGI}}$

Das Matrixelement  $\Phi(g_0)$  eines nackten Operators sei bei einer Skala  $\mu$  renormiert durch

$$\Phi_{\text{R}}(\mu) = Z_{\Phi}(g_0, \mu) \Phi(g_0) . \tag{3.19}$$

Nun könnte man das nackte Matrixelement auch bei einer anderen Skala, z. B.  $\mu/2$  renormieren. Entsprechend würde

$$\Phi_{\text{R}}(\mu/2) = Z_{\Phi}(g_0, \mu/2) \Phi(g_0) \tag{3.20}$$

gelten. Um nun Step-Scaling anwenden zu können wird die Renormierungsskala mit der inversen Boxgröße  $L^{-1}$  identifiziert. Setzt man die beiden letzten Gleichungen ins Verhältnis, so folgt das vom nackten Matrixelement unabhängige Verhältnis

$$\frac{\Phi_{\text{R}}(2L)}{\Phi_{\text{R}}(L)} = \frac{Z_{\Phi}(g_0, 2L)}{Z_{\Phi}(g_0, L)} =: \sigma_{\Phi}(u) , \tag{3.21}$$

durch dass die Step-Scaling-Funktion am Kopplungspunkt  $u \equiv \bar{g}^2(L)$  definiert wird.

Es folgt die wiederholte Änderung der Skala nach Abschnitt 3.1, beginnend bei einem niedrigen Energiewert, d. h. einem großen  $L = 2L_{\max}$ , hinauf in den Bereich hoher Energien, also kleinem  $L = 2^{-n}L_{\max}$ . Die Skala  $L_{\max}$  ist hierbei durch den höchsten Wert der Kopplung  $u_0 = \bar{g}^2(L_{\max})$  definiert. über die Sequenz  $u_k = \bar{g}^2(2^{-k}L_{\max})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  werden dann die Werte für  $\sigma_\Phi(\mu_k)$  aus (3.17), mit  $\mu_k = 2^k/L_{\max}$  festgelegt. Das renormierte Matrixelement bei der hadronischen Skala  $L = 2L_{\max}$  lautet

$$\Phi(\mu) = Z_\Phi(L)\Phi_{\text{bare}}(g_0). \quad (3.22)$$

Damit folgt für das Verhältnis zwischen dem Matrixelement bei hohen und niedrigen Energien

$$\frac{\Phi(\mu_n)}{\Phi(2L_{\max})} = \frac{\Phi(2^{-n}L_{\max})}{\Phi(2^{-n+1}L_{\max})} \dots \frac{\Phi(L_{\max})}{\Phi(2L_{\max})} = [\sigma(u_n)]^{-1} \dots [\sigma(u_0)]^{-1} \quad (3.23)$$

und somit für das Verhältnis von RGI-Matrixelement zum hadronischen Matrixelement

$$\frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi((2L_{\max})^{-1})} = \frac{\Phi(\mu_n)}{\Phi(2L_{\max})} [2b_0\bar{g}^2(\mu_n)]^{-\gamma_0/2b_0^2} \quad (3.24a)$$

$$\times \exp \left\{ - \int_0^{\bar{g}(\mu_n)} dg \left[ \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} - \frac{\gamma_0}{b_0 g} \right] \right\}$$

$$= \frac{Z_\Phi(2^n/L_{\max})}{Z_\Phi(2L_{\max})} [2b_0\bar{g}^2(2^n/L_{\max})]^{-\gamma_0/2b_0^2} \quad (3.24b)$$

$$\times \exp \left\{ - \int_0^{\bar{g}(2^n/L_{\max})} dg \left[ \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} - \frac{\gamma_0}{b_0 g} \right] \right\}$$

$$= [\sigma(u_n)]^{-1} \dots [\sigma(u_0)]^{-1} [2b_0u_n]^{-\gamma_0/2b_0^2} \quad (3.24c)$$

$$\times \exp \left\{ - \int_0^{\sqrt{u_n}} dg \left[ \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} - \frac{\gamma_0}{b_0 g} \right] \right\}.$$

Die genaue Umsetzung dieser Prozedur folgt im nächsten Abschnitt. Eine Bestimmung der Unsicherheit, die diesem Wert anhaftet steht in Abschnitt B.5.

## 4 Numerische Ergebnisse und Auswertung – Bestimmung der Renormierungsgruppeninvarianten

### 4.1 Simulationsparameter und Umsetzung

Die numerische Implementation erfolgt im Schrödinger-Funktional mit  $T = L$ ,  $\theta = 1/2$  und verschwindenden Eichrandfeldern  $C = C' = 0$ . Diese Festlegung wird motiviert durch eine gute statistische Genauigkeit der Monte-Carlo-Ergebnisse, einer gut kontrollierten Störungsentwicklung der Renormierungsgruppenfunktionen und minimierter Gitterartefakte [6, 25].

Die Theorie ist nicht-perturbativ  $O(a)$ -verbessert bis auf die störungstheoretische Bestimmung der Verbesserungskoeffizienten [10, 33]

$$c_t = 1 + c_t^{(1)} g_0^2 + c_t^{(2)} g_0^4 + \dots, \quad (4.1a)$$

$$\tilde{c}_t = 1 + \tilde{c}_t^{(1)} g_0^2 + \tilde{c}_t^{(2)} g_0^4 + \dots, \quad (4.1b)$$

$$c_A^{\text{stat}} = c_A^{\text{stat}(1)} g_0^2 + O(g_0^4). \quad (4.1c)$$

Der SW-Verbesserungskoeffizient  $c_{\text{sw}}$  zur Wilson-Fermionwirkung hängt ebenfalls nur von der nackten Kopplung ab und wurde nicht-perturbativ [28] bestimmt. Er ist parametrisiert durch

$$c_{\text{sw}} = \frac{1 - 0.454 g_0^2 - 0.175 g_0^4 + 0.012 g_0^6 + 0.045 g_0^8}{1 - 0.720 g_0^2}. \quad (4.2)$$

Die Berechnung der zu betrachtenden Korrelationsfunktionen erfolgt auf vorgegebenen Feldkonfigurationen. Diese wurden durch die ALPHA-Kollaboration [1] innerhalb der letzten Jahre in umfangreichen [4, 10, 29, 30] Monte-Carlo-Simulationen der QCD mit zwei dynamischen Flavours im SF-Formalismus erzeugt. Die sechs hierzu zur Verfügung stehenden Simulationspunkte der Kopplung,  $u_k = \bar{g}^2(2^{-k} L_{\text{max}})$ ,  $k = 0, \dots, 5$ , sind:

$k$	5	4	3	2	1	0	
$u_k$	0.9793	1.1814	1.5031	1.5078	2.0142	2.4792	3.3340
$\Delta u_k$	0.0011	0.0015	0.0025	0.0044	0.0102	0.0128	0.0190
$c_t$	1-loop	1-loop	1-loop	2-loop	2-loop	2-loop	2-loop

Tabelle 4.1: Feste Werte der laufenden Kopplung  $u_k$  mit Unsicherheiten  $\Delta u_k$

Die zu diesen Kopplungen gehörenden Simulationsparameter  $(L/a, \beta, \kappa)$ , die eine Trajektorie konstanter Physik im Parameterraum widerspiegeln, sind in Tabelle 4.2 aufgelistet. Die Parameter  $\beta$  und  $\kappa$  sind im Rahmen der oben genannten MC-Simulationen gerade so gewählt, dass bei gegebenem  $L/a$  die renormierte Kopplung  $\bar{g}^2(L)$  den festen Wert  $u$  annimmt und die Quarkmasse verschwindet.

Für den Randverbesserungskoeffizient  $c_t$  gehen die störungstheoretischen Werte auf 1-Schleifen-Niveau, wie auch auf 2-Schleifen-Niveau ein. Der Grund hierfür ist, dass erst im Laufe der Erzeu-

$u$	$L/a$	$\beta$	$\kappa$	$u$	$L/a$	$\beta$	$\kappa$
0.9793	6	9.5000	0.1315322	2.0142	6	6.6085	0.1352600
	8	9.7341	0.1313050		8	6.8217	0.1348910
	12	10.05755	0.1310691		12	7.09300	0.1344320
1.1814	6	8.5000	0.1325094	2.4792	6	6.1330	0.1361100
	8	8.7223	0.1322907		8	6.3229	0.1357673
	12	8.99366	0.1319754		12	6.63164	0.1352270
1.5031	6	7.5000	0.1338150	3.3340	6	5.6215	0.1366650
	12	8.02599	0.1330633		8	5.8097	0.1366077
1.5078	6	7.5420	0.1337050	2-lp	12	6.11816	0.1361387
	8	7.7206	0.1334970				

Tabelle 4.2: Zusammenfassung aller Gitterparameter ( $L/a, \beta, \kappa$ ) bei renormierter Kopplung  $u$ . Bis auf die gekennzeichneten Werte gehören die mit diesen Parametern verbundenen Datensätze auf der linken Seite zu  $c_t^{1\text{-loop}}$  und auf der rechten Seite zu  $c_t^{2\text{-loop}}$

gung der Eichfeldkonfigurationen der 2-Schleifen-Wert zugänglich wurde, genauer gesagt bei dem Wert der Kopplung  $u_3$ . Tabelle 4.1 ist zu entnehmen, dass für die beiden niedrigsten Kopplungspunkte,  $u_5$  und  $u_4$ , nur die Datensätze zur ersten Ordnung von  $c_t$  zur Verfügung stehen, für  $u_3$  zusätzlich die zur zweiten Ordnung und die übrigen nur in zweiter Ordnung. Die Kopplungswerte  $u_3^{1\text{-loop}} = 1.5031$  und  $u_3^{2\text{-loop}} = 1.5078$  stimmen nicht ganz überein, denn sie wurden verwendet, um den störungstheoretischen Einfluß abzuschätzen. Dieser ist jedoch im Rahmen der statistischen Unsicherheiten vernachlässigbar. Die zugrunde liegende Störungsentwicklung von  $c_t$  wurde in [5] durchgeführt mit den Ergebnissen

$$\begin{aligned} c_t^{1\text{-loop}} &= 1 + (-0.089 + 0.019 N_f) g_0^2 \Big|_{N_f=2} \\ &= 1 - 0.051 g_0^2, \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$\begin{aligned} c_t^{2\text{-loop}} &= c_t^{1\text{-loop}} + (-0.029 + 0.002 N_f) g_0^4 \Big|_{N_f=2} \\ &= 1 - 0.051 g_0^2 - 0.025 g_0^4. \end{aligned} \quad (4.3b)$$

Der Koeffizient  $\tilde{c}_t$  ist in 1-Schleifen-Störungstheorie hingegen nicht von  $N_f$  abhängig und lautet

$$\tilde{c}_t(g_0) = 1 - 0.018 g_0^2. \quad (4.3c)$$

Aufgrund etwaiger nicht-perturbativer Effekte ist a priori nicht klar, ob eine Extrapolation der Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\Sigma(u, a/L)$  in  $(a/L)^2$  mit den so festgelegten Werten (4.3) gewährleistet ist. Dieser Umstand bedarf daher noch einer expliziten Untersuchung (Abschnitt 4.2.2).



### 4.1.1 Wirkungen

In den Simulationen wurden ursprünglich vier Wirkungen implementiert. Für jede dieser Diskretisierungen wird zur  $O(a)$ -Verbesserung der Zeitkomponente des statisch-leichten Axialstromes  $A_0^{\text{stat}}$  ein separater Wert für  $c_A^{\text{stat}}$  benötigt. Diese vier Wirkungen seien bezeichnet durch *Link*, *S(x)*, *Hyp1* und *Hyp2*. Für sie gilt:

- **Link:** Hierbei handelt es sich um die ursprüngliche Eichten-Hill-Wirkung (2.18) ohne verbesserte Eigenschaften. Der Verbesserungskoeffizient zum statischen Axialstrom ist in diesem Fall [49]

$$c_A^{\text{stat}}(g_0) = -0.07958 g_0^2 + O(g_0^4) . \quad (4.4)$$

Diese Wirkung war für die hier untersuchten Korrelationsfunktionen nur bedingt geeignet, da B-Meson-Korrelationsfunktionen mit statischem Quarkpropagator ein schlechtes Signal-Rausch-Verhältnis aufweisen [12, 21]. Schon in der Quenched-Rechnung [25] wurde nachgewiesen, dass ein starker Anstieg der Unsicherheiten folgt und so eine verlässliche Kontinuumsextrapolation unmöglich macht. Derselbe Sachverhalt zeigt sich auch hier für  $N_f = 2$  dynamische Flavours: mit steigender Gitterauflösung oder Kopplungskonstante folgen immer größer werdende Unsicherheiten und verhindern eine aussagefähige Kontinuumsextrapolation gegenüber den folgenden drei Wirkungen.

Die Einbeziehung der aus dieser Diskretisierung extrahierbaren Daten ist daher nicht sinnvoll, so dass sie in der weiteren Diskussion keine Rolle mehr spielen wird.

- **S(x)** bezeichnet die spezielle Wahl der Eichlinks aus (2.19a), die durch das in der Literatur bekannte 1-Link-Integral (in der reinen Eichtheorie) motiviert ist [53]. Der zu dieser Diskretisierung gehörige Verbesserungskoeffizienten des statischen Axialstromes ist

$$c_A^{\text{stat}}(g_0) = 0.0072 g_0^2 + O(g_0^4) . \quad (4.5)$$

- **Hyp1** ist eine Eichten-Hill-Wirkung, die durch eine weitere Reduktion der statistischen Unsicherheit motiviert wurde. Sie wird mit Hilfe der hyperkubisch geblockten Eichlinks (2.19c) für den optimierten Blocking-Parametersatz [20]

$$\alpha_1 = 0.75 , \quad \alpha_2 = 0.6 , \quad \alpha_3 = 0.3 \quad (4.6)$$

gebildet. Als Verbesserungskoeffizient wird für diese Parameter [14]

$$c_A^{\text{stat}}(g_0) = 0.0357 g_0^2 + O(g_0^4) \quad (4.7)$$

verwendet.

- **Hyp2** ist wie Hyp1 eine hyperkubisch geblockte Diskretisierung, jedoch für einen anderen

Satz optimierter Parameter

$$\alpha_1 = 1.0 , \quad \alpha_2 = 1.0 , \quad \alpha_3 = 0.5 . \quad (4.8)$$

Der Verbesserungskoeffizient des statisch-leichten Axialstromes ist für diese Diskretisierung durch

$$c_A^{\text{stat}}(g_0) = 0.215 g_0^2 + O(g_0^4) \quad (4.9)$$

gegeben.

Die genannten Verbesserungskoeffizienten  $c_A^{\text{stat}}$  für S(x), Hyp1 und Hyp2 wurden störungstheoretisch im Rahmen des Schrödinger-Funktional bestimmt [14].

#### 4.1.2 Korrelationsfunktionen auf dem Gitter

Mit den in Tabelle 4.2 gelisteten Parametern wurden auf den zuvor genannten Eichfeldkonfigurationen bei einfacher Auflösung ( $L/a$ ) und zweifacher Auflösung ( $2L/a$ ) die Gitterkorrelationsfunktionen im Schrödinger-Funktional

$$f_A^{\text{stat}}(x_0) = -a^6 \sum_{\mathbf{y}, \mathbf{z}} \frac{1}{2} \langle A_0^{\text{stat}}(x) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_1(\mathbf{z}) \rangle , \quad (4.10a)$$

$$f_{\delta A}^{\text{stat}}(x_0) = -a^6 \sum_{\mathbf{y}, \mathbf{z}} \frac{1}{2} \langle \delta A_0^{\text{stat}}(x) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_1(\mathbf{z}) \rangle , \quad (4.10b)$$

$$f_1 = -\frac{a^{12}}{L^6} \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}} \frac{1}{2} \langle \bar{\zeta}'_1(\mathbf{u}) \gamma_5 \zeta'_2(\mathbf{v}) \bar{\zeta}_2(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_1(\mathbf{z}) \rangle , \quad (4.10c)$$

$$f_1^{\text{stat}} = -\frac{a^{12}}{L^6} \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}} \frac{1}{2} \langle \bar{\zeta}'_1(\mathbf{u}) \gamma_5 \zeta'_h(\mathbf{v}) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_1(\mathbf{z}) \rangle , \quad (4.10d)$$

$$f_1^{\text{hh}}(x_3) = -\frac{a^8}{L^2} \sum_{x_1, x_2, \mathbf{y}, \mathbf{z}} \frac{1}{2} \langle \bar{\zeta}'_h(\mathbf{x}) \gamma_5 \zeta'_h(\mathbf{0}) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_h(\mathbf{z}) \rangle , \quad (4.10e)$$

gebildet. Diese Korrelationsfunktionen wurden schon in Abschnitt 2.5.2 definiert und es wurde angedeutet, dass man aus diesen Korrelationsfunktionen den skalenabhängigen Renormierungsfaktor  $Z_A^{\text{stat}}$  gewinnen kann. Dazu muss eine *Normierungsbedingung* ausgewählt werden, durch die gewährleistet ist, dass sich weitere mögliche Renormierungskonstanten, welche nicht direkt zugänglich sind, herausheben. Entsprechend der Arbeit [25] für die Valenzquark-Näherung werden hierzu in gleicher Notation und Benennung zwei Normierungsbedingungen eingeführt.

#### 4.1.3 Normierungsbedingung 1 - Das 'alte' Schema

Nach [33] wird bei verschwindender Quarkmasse  $m_q = m_0 - m_c = 0$  die Renormierungskonstante  $Z_A^{\text{stat}}$  des  $O(a)$ -verbesserten statischen Axialstromes mit Hilfe des Wertes  $X(0, L)$  auf

Baumgraphenniveau definiert vermöge der Bedingung

$$Z_A^{\text{stat}}(g_0, L)X(g_0, L) = X(0, L) \quad , \quad \text{mit} \quad X(g_0, L) = \frac{f_A^{\text{stat}}(L/2)}{\sqrt{f_1^{\text{stat}}}} . \quad (4.11)$$

Diese Definition ist auf das Gitter zu übertragen und zwar gleich in der verbesserten Version. Dann ist  $Z_A^{\text{stat}}$  gegeben durch

$$Z_A^{\text{stat}}(g_0, L/a)X_I(g_0, L/a) = X_I(0, L/a) , \quad (4.12a)$$

mit

$$X_I(g_0, L/a) = \frac{f_A^{\text{stat}}(L/2) + ac_A^{\text{stat}} f_{\delta A}^{\text{stat}}(L/2)}{\sqrt{f_1^{\text{stat}}}} , \quad (4.12b)$$

und läuft mit der Skala  $\mu = 1/L$ . Dadurch wird nach Abschnitt 3.1 die Gitter-Step-Scaling-Funktion

$$\Sigma_A^{\text{stat}}(u, a/L) = \frac{Z_A^{\text{stat}}(g_0, 2L/a)}{Z_A^{\text{stat}}(g_0, L/a)} , \quad \text{bei} \quad \bar{g}^2(L) = u , \quad m_0 = m_c , \quad (4.13)$$

definiert und die Step-Scaling-Funktion folgt durch Extrapolation gemäß

$$\sigma_A^{\text{stat}}(u) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \Sigma_A^{\text{stat}}(u, a/L) \Big|_{\bar{g}^2=u, m_q=0} . \quad (4.14)$$

Auf eine spezielle Kennzeichnung wie  $Z_{A, \text{SF}}^{\text{stat}}$ , die das Schrödinger-Funktional als relevantes Renormierungsschema auszeichnet, wird verzichtet. Jedoch muss einstweilen eine Unterscheidung zur zweiten Normierungsbedingung gemacht werden. Die zu dieser, der alten Normierungsbedingung gehörige Renormierungskonstante wird dann als  $Z_{A, \text{old}}^{\text{stat}}$  bezeichnet, während die im folgenden Unterabschnitt definierte Renormierungskonstante durch  $Z_{A, \text{new}}^{\text{stat}}$  bezeichnet wird. Dasselbe gilt für weitere abgeleitete Größen wie die Step-Scaling-Funktion.

#### 4.1.4 Normierungsbedingung 2 - Ein neues Schema

Auf dieselbe Art und Weise wird die neue Normierungsbedingung [25] auf dem Gitter am Punkt  $m_0 = m_c$  mit  $L = 1/\mu$  über das verbesserte Verhältnis

$$\Xi_I(g_0, L/a) = \frac{f_A^{\text{stat}}(L/2) + ac_A^{\text{stat}} f_{\delta A}^{\text{stat}}(L/2)}{[f_1 f_1^{\text{hh}}(L/2)]^{1/4}} \quad (4.15a)$$

mit

$$Z_A^{\text{stat}}(g_0, L/a)\Xi_I(g_0, L/a) = \Xi_I(0, L/a) , \quad (4.15b)$$

definiert. Ebenso gelten die Gleichungen (4.13) und (4.14).

Für die Normierungskonstanten auf Tree-Ebene gilt  $X_I(0, L/a) = \Xi_I(0, L/a)$ . Ihre Werte sind

$L/a$	$\Xi_1(0, L/a)$
6	-1.5964837518021
8	-1.5996643156321
10	-1.6011462370857
12	-1.6019540566018
16	-1.6027594410020
20	-1.6031330222299
24	-1.6033361949926
32	-1.6035384024722

Tabelle 4.3: Das Verhältnis  $\Xi_1$  auf Tree-Level für  $\theta = 0.5$ .

für den vorliegenden Fall ( $\theta = 1/2$ ) bekannt [25] und in Tabelle 4.3 wiedergegeben.

Die Definitionen beinhalten die Bedingung verschwindender Quarkmasse  $m_q$  für jede Gitterauflösung  $L/a$ , d. h. die nackte Masse ist mit der kritischen Masse zu identifizieren,  $m_0 = m_c$ . Dadurch wird entsprechend (A.25b) der *kritische Hopping-Parameter*  $\kappa = \kappa_c$  definiert. Als kritische Masse ist die in [6] nicht-perturbativ im leichten Quarksektor definierte,  $O(a)$ -verbesserte PCAC-Masse zu verstehen. Desweiteren wird verlangt, dass die laufende Kopplung  $\bar{g}^2(L)$  auf die in Tabelle 4.1 vorgegebenen Werte von  $u$  gesetzt wird, wodurch wiederum für gegebenes  $L/a$  der Wert der nackten Kopplung durch  $g_0^2 = 6/\beta$  fixiert ist.

Die numerische Effizienz der Auswertung der Korrelationsfunktion  $f_1^{\text{hh}}$  [53] beschränkt sich auf den Fall der Valenzquark-Näherung, in dem es das neue Schema gegenüber dem Alten [33] begünstigt hat. Dies ist im Falle dynamischer Quarks nicht mehr sinnvoll gegeben.

Für  $N_f = 2$  führen die genannten verbesserten Diskretisierungen dazu, dass die alte Definition von  $Z_A^{\text{stat}}$  eine befriedigende Genauigkeit bietet. Der Vollständigkeit halber wird aber in der Auswertung das neue Schema mitgeführt.

## 4.2 Bestimmung des Kontinuumslikes

Der Kontinuumslikes soll auf verschiedene Weisen ermittelt werden. Hierbei liegen immer die Definitionen und Werte aus Abschnitt 4.1 zugrunde. Außerdem wird unter der Annahme, dass wirklich eine nahezu vollständige  $O(a)$ -Verbesserung erreicht wurde, d. h. die führende Ordnung der Cutoff-Effekte quadratisch im Gitterabstand ist, die Kontinuumsextrapolation

$$\Sigma_A^{\text{stat}}(u, x) = \sigma_A^{\text{stat}}(u) + B(u) \cdot x^2 \quad (4.16)$$

quadratisch in  $x \equiv a/L$  durchgeführt. Zur Rechtfertigung dieses Ansatzes wird in Abschnitt 4.2.2 überprüft, ob die  $O(a/L)$ -Terme wirklich vernachlässigbar sind. Zur Bestimmung der Koeffizienten dieses Fitpolynom,  $\sigma_A^{\text{stat}}(u)$  und  $B(u)$ , wird eine  $\chi^2$ -Minimierung durchgeführt. Dazu wird

die entsprechende Prozedur aus [54] übernommen und den Erfordernissen angepasst. Insbesondere sind hier zwei Methoden der Kontinuumsextrapolation zu unterscheiden. Gleichung (4.16) gilt für die Extrapolation aus einer einzigen Wirkung, so dass für die drei Wirkungen  $S(x)$ , Hyp1 und Hyp2 auch drei unterschiedliche Kontinuumswerte folgen. Aufgrund der Universalität erwartet man, dass diese auf einem, den physikalisch Kontinuumswert führen. Dazu muss die  $\chi^2$ -Minimierung unter der Nebenbedingung eines einzigen Kontinuumswertes für alle drei Wirkungen durchgeführt werden. Um die  $\chi^2$ -Minimierungsprozedur anwenden zu können, müssen die Basispolynome linear unabhängig sein. Das sind sie in diesem Falle aber nicht, denn die Gitterpunkte zu den drei Diskretisierungen liegen bei denselben Auflösungen  $L/a = x$  vor und werden mit derselben Eichfeldkonfiguration berechnet. Man gelangt durch ein künstliches Verschieben der Argumente zu einem Ansatz für den simultanen Fit, der die Daten zu allen Diskretisierungen unter der zusätzlichen Bedingung desselben Kontinuumslikes berücksichtigt (*Constraint-Fit*). Wegen den drei zu berücksichtigenden Diskretisierungen werden zwei Verschiebungen benötigt,  $s_1, s_2$ . Diese dürfen verschwinden, noch identisch sein. Eine *Constraint-Fitfunktion*<sup>7</sup> lautet dann

$$\begin{aligned} \Sigma_A^{\text{stat}}(u, x) = & \sigma_A^{\text{stat}}(u) + B^{S(x)}(u) x^2 + \\ & + B^{\text{HYP1}}(u) (x - s_1)^2 + B^{\text{HYP2}}(u) (x - s_2)^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Für die Bestimmung der statistischen Unsicherheit der aus den korrelierten Datensätzen folgenden numerischen Ergebnisse wird eine Jackknife-Analyse, siehe Abschnitt B.1, verwendet. Die dadurch ermittelten Unsicherheiten für die einzelnen Punkte der Gitter-Step-Scaling-Funktion gehen ihrerseits als Gewichte in die  $\chi^2$ -Minimierung ein. Mehr über die genaue Datenanalyse zeigt Abschnitt B.2 auf Seite 75.

Abgesehen von der Unterscheidung zwischen alter und neuer Normierungsbedingung ist die Extrapolation ins Kontinuum von den verwendeten Werten der Gitter-Step-Scaling-Funktion abhängig. Man kann sich beispielsweise bei der Kopplung  $u_3$  dazu entscheiden, die Werte aus der 1-Schleifenrechnung denen der 2-Schleifenrechnung vorzuziehen, da für Erstere die feinere Gitterauflösung  $L/a = 12$ , und damit der kontinuumsnaheste Wert, zur Verfügung steht. Eine weitere hiermit kombinierbare Analyse könnte sich für jeden Kopplungspunkt auf die beiden feinsten Gitter beschränken, so dass das größte Gitter  $L/a = 6$  nicht verwendet werden muss.

Die allen möglichen Kombinationen zugrunde liegende, aus den MC-Simulationen gewonnene Wertemenge für die Renormierungskonstante  $Z_A^{\text{stat}}$  nach der alten und der neuen Normierungsbedingung, ist in den Tabellen B.3 und B.4 wiedergegeben. Die aus ihnen folgenden Werte für die Gitter-Step-Scaling-Funktion sind dort ebenfalls für die verschiedenen Diskretisierungen  $S(x)$ , Hyp1 und Hyp2 aufgelistet.

#### 4.2.1 Kontinuumsextrapolation aus allen Daten

Hier sollen zunächst alle Gitterpunkte verwendet werden. Auf ihre Erzeugung aus den Rohdaten wird in Abschnitt B.2 kurz eingegangen. Für den Kopplungspunkt  $u_3$  werden hier die 2-

<sup>7</sup>eigentlich besser: Fitfunktion mit Nebenbedingung

$u$	$\sigma_{A,\text{old}}^{\text{stat}}(u)$	$\chi^2/\text{dof}$
0.9793	0.9834(12)	1.92/5
1.1814	0.9791(16)	12.41/5
1.5078	0.9769(39)	0.005/2
2.0142	0.9529(24)	0.66/5
2.4792	0.9428(35)	2.91/5
3.3340	0.9104(54)	1.14/5

Tabelle 4.4: Constraint-Werte der Kontinuumsextrapolation bei den vorgegebenen Kopplungswerten für die Step-Scaling-Funktion  $\sigma_{A,\text{old}}^{\text{stat}}$  im alten Schema und das  $\chi^2$  pro Freiheitsgrad (dof)

$u$	$\sigma_{A,\text{old}}^{\text{stat}}(u)$		
	$S(x)$	Hyp1	Hyp2
0.9793	0.9832(13)	0.9834(13)	0.9837(12)
1.1814	0.9793(16)	0.9791(16)	0.9790(15)
1.5078	0.9767(42)	0.9771(40)	0.9770(38)
2.0142	0.9522(25)	0.9530(24)	0.9533(23)
2.4792	0.9423(36)	0.9428(35)	0.9432(34)
3.3340	0.9138(57)	0.9103(55)	0.9077(52)

Tabelle 4.5: Standard-Werte der Kontinuumsextrapolation bei den vorgegebenen Kopplungswerten für die Step-Scaling-Funktion  $\sigma_{A,\text{old}}^{\text{stat}}$  der Diskretisierung  $S(x)$ , Hyp1 und Hyp2 für das alte Schema

Schleifenwerte verwendet. Anschließend werden die gewonnenen Werte für die 1-Schleifen- und die 2-Schleifenrechnung verglichen.

Nach obiger Diskussion werden die Kontinuumswerte für die unterschiedlichen Diskretisierungen einzeln und auch zusammen ermittelt. Die Ergebnisse für das alte Schema sind in Tabelle 4.4 für die Constraint-Fits und in Tabelle 4.5 für die Standard-Fits wiedergegeben. Diejenigen für das neue Schema stehen im Anhang B.4 auf Seite 81.

In Abbildung 4.1 auf der nächsten Seite werden alle Werte graphisch dargestellt. Die Kontinuumswerte aus den Constraint-Fits erscheinen darin als schwarze, ausgefüllte Punkte. Damit die Werte der drei Diskretisierungen bei gleicher Gitterauflösung gut erkennbar sind, ist rein formal eine minimale Verschiebung eingebaut.

Betrachtet man die Werte in der Abbildung oder in beiden Tabellen, so ist als erste Erkenntnis festzuhalten, dass alle Kontinuumswerte im Bereich ihrer Fehler übereinstimmen. Die Constraint-Werte bieten gegenüber den drei Standardwerten keinen Gewinn an statistischer Genauigkeit. Dies bedeutet, dass sich eine Diskussion allein mit einer der drei Diskretisierungen, und zwar der mit der besten Genauigkeit, anbietet. Wie die Betrachtung der Werte aus Tabelle 4.4 und 4.5 zeigt, besitzen die Kontinuumswerte von Hyp2 gegenüber den Constraint-Werten und den Werten von  $S(x)$  und Hyp1 die geringsten Unsicherheiten.

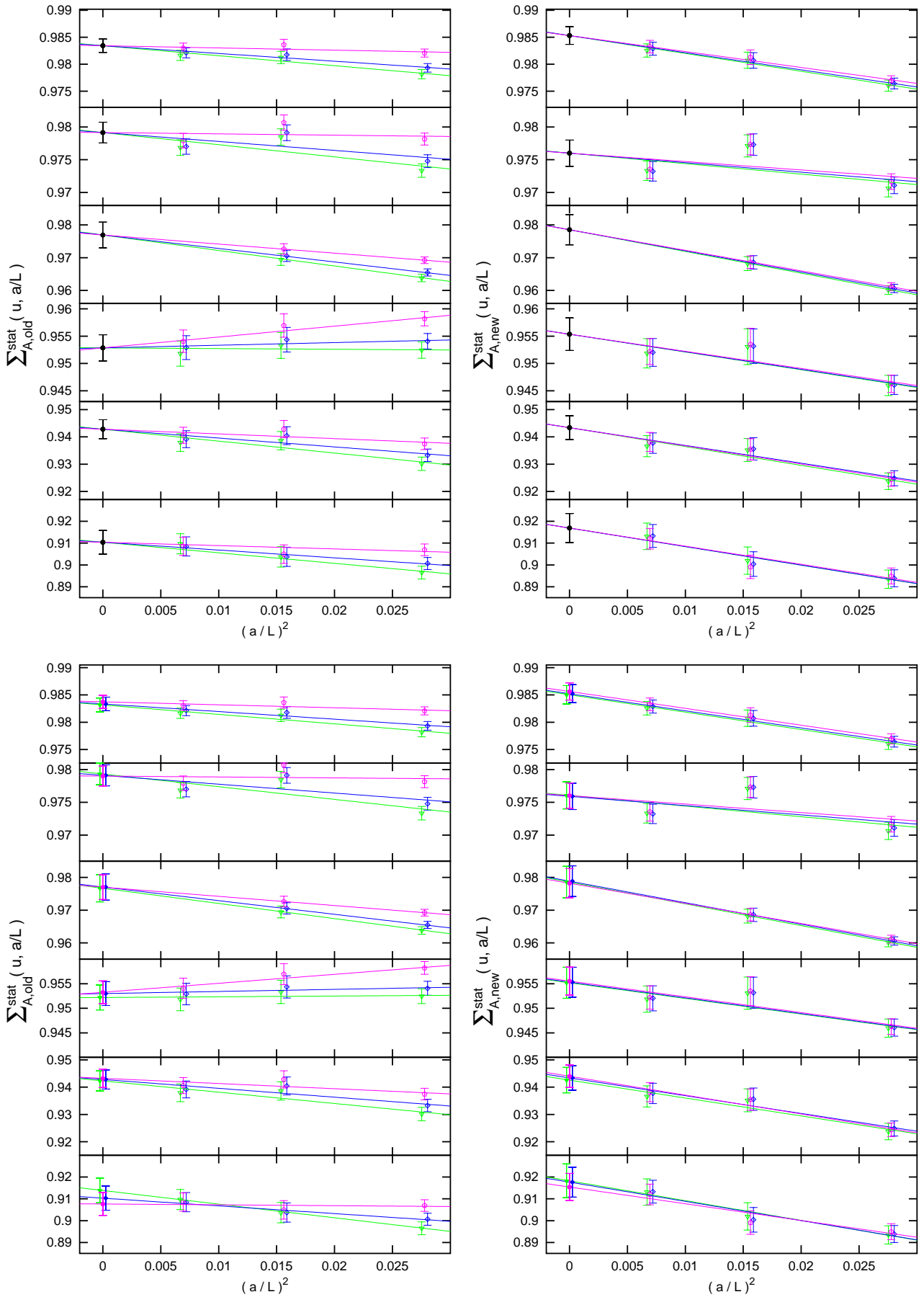


Abbildung 4.1: Darstellung der in  $(a/L)^2$  linearen Kontinuumsextrapolation der Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\Sigma_{A,old}^{stat}$  (linke Seite) und  $\Sigma_{A,new}^{stat}$  (rechte Seite), mit Nebenbedingung (oben) und ohne Nebenbedingungen (unten) für die drei Diskretisierungen  $S(x)$  (◆), Hyp1 (◆) und Hyp2 (◆).

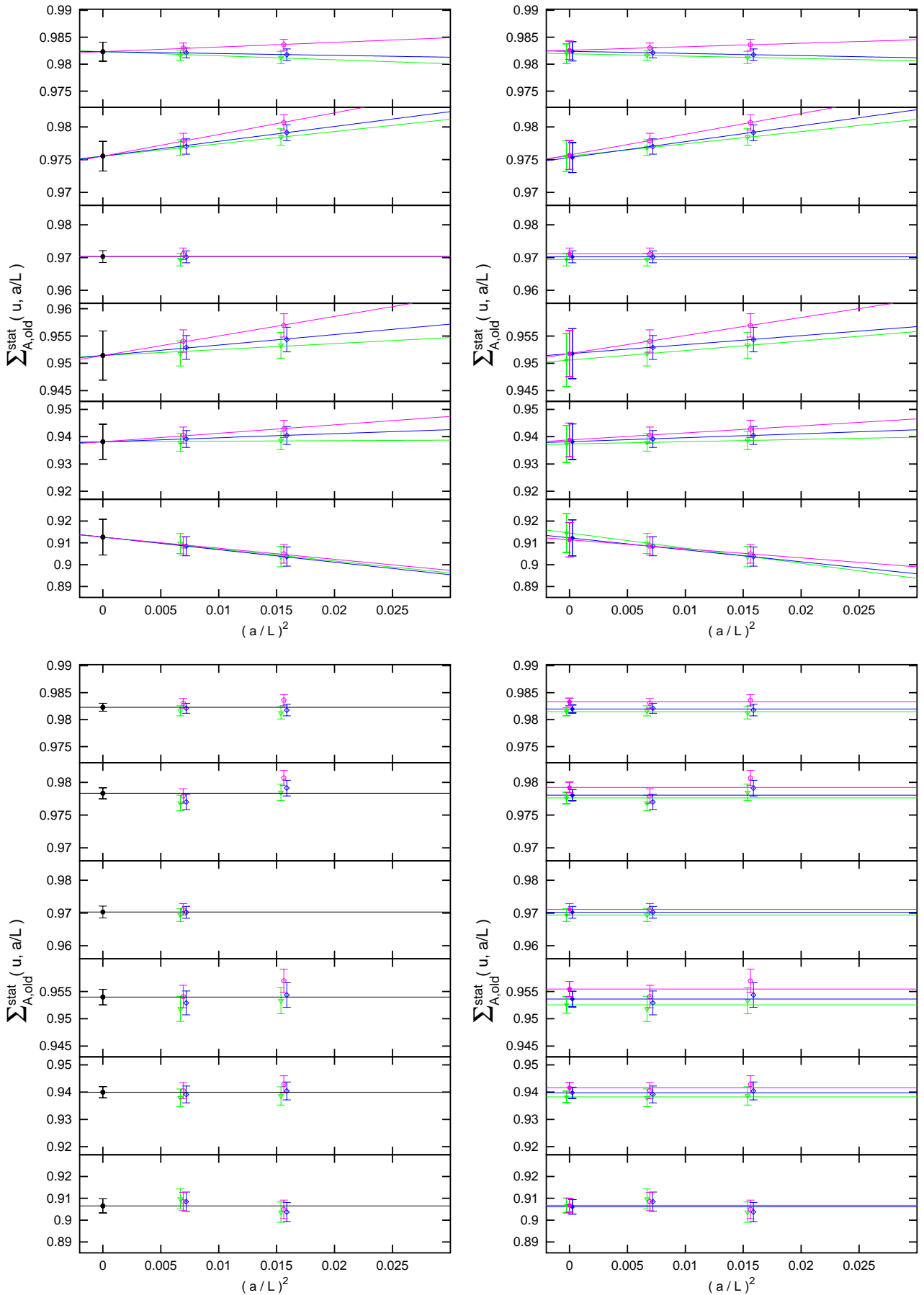


Abbildung 4.2: Darstellung einer Kontinuumsextrapolation der Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\sum_{A,old}^{stat}$  ohne die kleinste Gitterauflösung  $L/a = 6$ . Im oberen Teil der Abbildung wurde wie in Abbildung 4.1 linear in  $(a/L)^2$  gefittet. Im unteren Teil wurde ein konstanter Fit durchgeführt. In beiden Fällen sind Links der Constraint-Fit und Rechts die einzelnen Fits zu sehen. Die drei Diskretisierungen sind S(x) ( $\blacklozenge$ ), Hyp1 ( $\blacklozenge$ ) und Hyp2 ( $\blacklozenge$ ).



$u_3$	Constraint		$\sigma_{A,\text{old}}^{\text{stat}}(u_3)$		
	$\sigma_{A,\text{old}}^{\text{stat}}(u_3)$	$\chi^2/\text{dof}$	$S(x)$	Hyp1	Hyp2
1.5031	0.9710(25)	0.034/2	0.9706(26)	0.9711(25)	0.9712(24)
1.5078	0.9769(39)	0.005/2	0.9767(42)	0.9771(40)	0.9770(38)

Tabelle 4.6: Vergleich zwischen den Kontinuumswerten der  $c_t^{1\text{-loop}}$ - und  $c_t^{2\text{-loop}}$ -Berechnungen für die Step-Scaling-Funktion  $\sigma_{A,\text{old}}^{\text{stat}}(u_3)$

Den Werten ist aber auch zu entnehmen, dass die Unterschiede in den Unsicherheiten nur marginal sind. Dazu trägt teilweise bei, dass die Berechnung der Korrelationsfunktionen für die unterschiedlichen statischen Wirkungen auf identischen Eichfeldkonfigurationen durchgeführt wurde und diese Daten somit korreliert sind. In zukünftigeren Simulationen kann man sich deshalb auf eine dieser Diskretisierungen beschränken, so dass Simulationszeit eingespart wird.

Für eine weitere Auswertung werden die Kontinuumswerte aus den Constraint-Fits verwendet. Es bleibt aber noch zu klären, ob in den folgenden Auswertungen für den Kopplungspunkt  $u_3$  die 1-Schleifen- oder die 2-Schleifenwert-Kontinuumswerte für den Randverbesserungskoeffizienten  $c_t$  zu verwenden sind.

### Unterschied zwischen 1-Loop- und 2-Loop-Rechnung

Eine graphische Gegenüberstellung der beiden Auswertungen für den dritten Kopplungspunkt  $u_3$  zeigt Abbildung 4.3. Die zugehörige numerischen Werte sind in Tabelle 4.6 eingetragen.

Betrachtet man die Constraint-Fits von  $\Sigma_A^{\text{stat}}$  in Abbildung 4.1, so wäre zu erwarten, dass eine hier nicht mögliche 2-Loop-Auswertung bei  $L = 12$  zu einer Absenkung des Kontinuumslikes bei  $u_3^{2\text{-loop}}$  führt, wie es bei den Kopplungen  $u_5$ ,  $u_4$ ,  $u_2$  und  $u_1$  der Fall ist. Desweiteren ist zu berücksichtigen, dass für den 2-Loop-Wert am Punkt  $L = 12$  bisher nur eine geringe Statistik zur Verfügung steht, siehe Tabelle B.1 auf Seite 77. Bei allen übrigen Werten für  $L = 12$  wurde mit zunehmender Statistik tendenziell eine Anhebung der entsprechenden Punkte festgestellt.

Unter diesen Gesichtspunkten lässt sich trotz der um  $\Delta u_3 = 0.0047$  voneinander abweichenden Kopplungswerte sagen, dass die gewonnenen Kontinuumswerte innerhalb ihrer Fehlergrenzen übereinstimmen. Wie hoch ein möglicher Effekt der verschiedenen Kontinuumslimiten wirklich ist, zeigt ein Vergleich der relevanten Fitparameter für die Fits der Kontinuums-Step-Scaling-Funktion an die Constraint-Daten. Dazu wird auf ein im nächsten Abschnitt 4.3 zu erläuterndes Verfahren vorgegriffen.

Der Ansatz für den Fit an die Constraint-Daten der Step-Scaling-Funktion lautet

$$\sigma_A^{\text{stat}}(u) = 1 + s_0 u + s_1 u^2 + s_2 u^3 + s_3 u^4. \quad (4.18)$$

Dabei sind die Parameter  $s_0$  und  $s_1$  bekannt, so dass drei Fälle unterschieden werden können. Entweder werden nur  $s_2$  oder  $s_3$  und entsprechend der andere Wert auf Null gesetzt, oder beide werden gleichzeitig gefittet. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 4.7.

In jedem einzelnen Vergleich ist festzustellen, dass die Parameterwerte innerhalb der Fehler

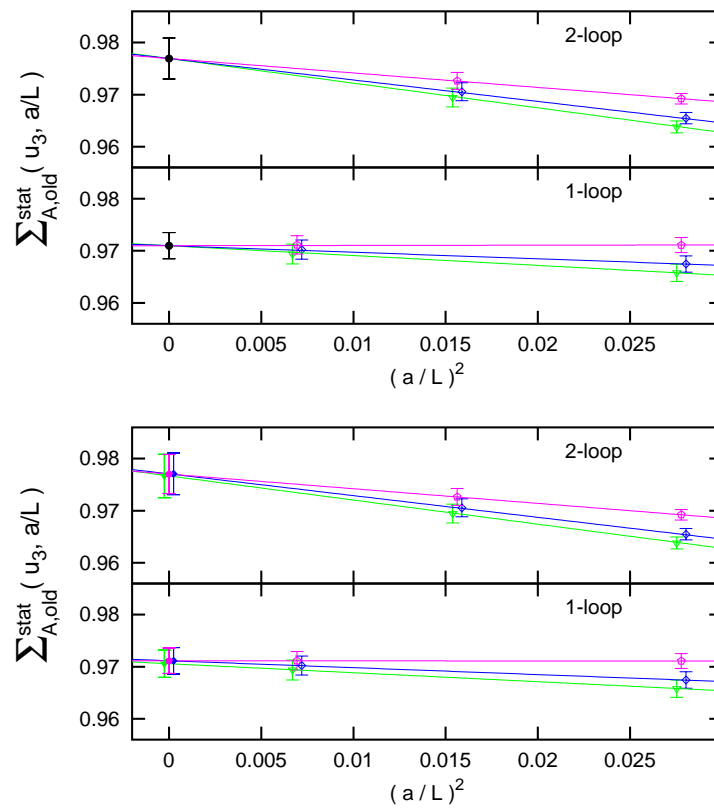
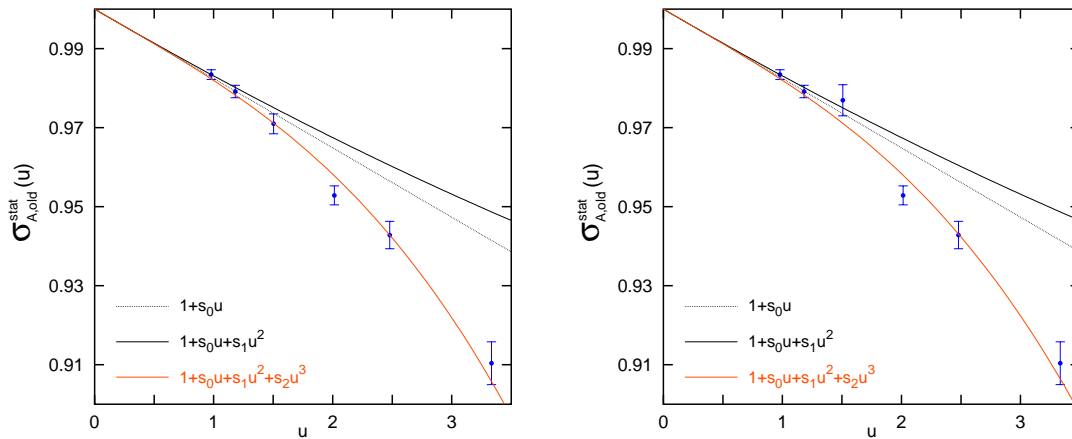


Abbildung 4.3: Gegenüberstellung der 1-Loop- und 2-Loop-Kontinuumsextrapolationen bei der Kopplung  $u_3$ . Im oberen Teil für die Constraint- und im unteren Teil für die Standard-Werte



(a) Kontinuumswerte der Step-Scaling-Funktion für 1-Schleifenkopplung am Kopplungspunkt  $u_b = 1.5031$

(b) Kontinuumswerte der Step-Scaling-Funktion für 2-Schleifenkopplung am Kopplungspunkt  $u_b = 1.5078$

Abbildung 4.4: Graphische Gegenüberstellung zweier Fitfunktionen an die Kontinuumswerte: (a) mit 1-Schleifenkopplungspunkt, (b) mit 2-Schleifenkopplungspunkt.

$u_3$	$s_2$	$s_3$
1-loop	-0.0012(1)	—
	—	-0.00038(4)
2-loop	-0.0018(5)	0.00022(18)
	-0.0011(1)	—
	—	-0.00037(4)
	-0.0016(6)	0.00017(19)

Tabelle 4.7: Vergleich zwischen den Fitparametern der Kontinuums-Step-Scaling-Funktion die mit dem 1-Loop-Wert bzw. dem 2-Loop-Wert folgen

koinzidieren. Es ist daher davon auszugehen, dass kein Einfluß bei der Bestimmung der renormierungsgruppeninvarianten Größe folgt. Alle weiteren Betrachtungen beziehen sich von nun an auf den 1-Loop-Datensatz bei  $u_3$ , weil für diesen der kontinuumsnaheste Punkt zur Verfügung  $L/a = 12$  zur Verfügung steht.

#### 4.2.2 Ergänzende Untersuchungen

Da die erzielten Ergebnisse für die Kontinuums-Step-Scaling-Funktion auf einer  $O(a)$ -Verbesserung basieren, und die Kontinuumsextrapolation entsprechend linear in  $(a/L)^2$  durchgeführt wurde, soll an dieser Stelle diskutiert werden, ob die Terme in  $a/L$  hinreichend klein sind.

Dies lässt sich auf zweierlei Art durchführen. Zum einen kann man direkt einen  $(a/L)$ -linearen Fit durch die übliche  $\chi^2$ -Minimierung durchführen, andererseits besteht aber auch die Möglichkeit die bereits ermittelten Werte abzuziehen und den Rest in  $(a/L)$  linear zu fitten.

#### Betrachtung einer in $a/L$ linearer Extrapolation

Hier sollen zunächst die Werte für die Gitter-Step-Scaling-Funktion direkt bzgl.  $a/L$  anstelle von  $(a/L)^2$  gefittet werden. Der Extrapolationsansatz für jede der drei Wirkungen lautet daher

$$\widehat{\Sigma}(u, x) = \widehat{\sigma}(u) + \widehat{C}(u) \cdot x, \quad (4.19)$$

für  $x = a/L$ . Das Resultat ist in Tabelle 4.8 zusammengefasst.

$k$	$\widehat{\sigma}(u)$	$\chi^2/\text{dof}$	$\widehat{C}(u)$		
			S(x)	Hyp1	Hyp2
5	0.9851(20)	2.8/5	-0.039(15)	-0.033(15)	-0.017(15)
4	0.9803(27)	14.8/5	-0.035(21)	-0.028(21)	-0.011(21)
3	0.9849(71)	0.12/2	-0.126(45)	-0.116(45)	0.045(94)
2	0.9514(40)	0.45/5	0.007(29)	0.017(29)	0.041(29)
1	0.9468(59)	3.81/5	-0.093(44)	-0.076(44)	-0.053(43)
0	0.9154(87)	1.79/5	-0.106(60)	-0.089(60)	-0.059(60)

Tabelle 4.8: Kontinuumsextrapolation in  $a/L$  für die Step-Scaling-Funktion im alten Schema

Bildet man hier die Summe der  $\chi^2$  und teilt diese durch die Gesamtzahl der Freiheitsgrade, so bekommt man eine Aussage über das Verhalten dieses Fitansatzes. Hier folgt  $\chi^2 \simeq 0.88$ . Vergleicht man diesen Wert mit dem entsprechenden für die quadratische Kontinuumsextrapolation ( $\chi^2 \simeq 0.71$ ), so ist festzustellen, dass der quadratische Ansatz bevorteilt ist.

### Betrachtung des linearer 'Rest-Fits'

Hier werden die Ergebnisse der in  $(a/L)^2$  linearen Kontinuumsextrapolation verwendet, d.h. die aus den Standard-Fits

$$\Sigma(u, x^2) = \sigma(u) + B(u) \cdot x^2, \quad \text{für } x = a/L, \quad (4.20)$$

erhaltenen Konstanten,  $\sigma(u)$  und  $B(u)$ . Diese Größen gehen nun als feste Parameter in den neuen Fit,

$$\tilde{\Sigma}(u, x) = \sigma(u) + \tilde{D}(u) \cdot x + B(u) \cdot x^2, \quad (4.21)$$

ein. Effektiv werden nun also nur die  $\tilde{D}(u)$  nach  $\chi^2$ -Minimierung berechnet. Die Ergebnisse sind in den folgenden Tabellen 4.9, 4.10, 4.11 und 4.12 gelistet.

Die Mehrzahl der so ermittelten Werte verschwinden innerhalb der Unsicherheiten, so dass man abschließend sagen kann, dass die  $O(a)$ -Verbesserung gültig, bzw. die Extrapolation ins Kontinuum mit  $(a/L)^2$  gerechtfertigt, ist.

### 4.2.3 Kontinuumsextrapolationen unter Ausschluß von $L = 6$

An dieser Stelle soll der Einfluß des größten Gitters,  $L = 6$ , auf den Kontinuumslices untersucht werden. Hierzu wurden die entsprechenden Punkte für die Gitter-Step-Scaling-Funktion entfernt. Für  $u_3$  kommt wie erwähnt der Datensatz aus den  $c_t^{1-\text{loop}}$ -Werten zum Einsatz. Außerdem ist nur für diesen auch der kontinuumsnaheste Punkt, wie für die anderen Kopplungspunkte, durch  $L = 12$  gegeben. Die Wegnahme der Datensätze für  $L = 6$  führt hier außerdem dazu, dass für  $u_3$  lediglich ein Auflösung als Referenzpunkt für die Gitter-Step-Scaling-Funktion zur Verfügung steht. Die Fitprozedur des letzten Abschnittes ist trotzdem ohne Einschränkungen möglich. Neben den in  $(a/L)^2$  linearen Extrapolationen werden hier desweiteren konstante Extrapolationen, d.h. ohne  $a/L$ -Abhängigkeit, durchgeführt und auch deren Ergebnis untersucht.

Die ermittelten Kontinuumslimiten stehen für die linearen Extrapolationen in den Tabellen 4.13 und 4.15, für die Constraint- bzw. die Standard-Werte. Entsprechende Werte zur Kontinuumsextrapolationen durch konstante Funktionen sind in Tabelle 4.14, respektive 4.16, eingetragen. Eine zu beiden Extrapolationen gehörende graphische Darstellung ist in Abbildung 4.2 zu sehen. Dort wurde zu einem besseren Vergleich dieselbe Skala wie in Abbildung 4.1 gewählt.

Ein Vergleich der hier ermittelten Constraint-Kontinuumswerte mit den aus dem gesamten Datensatz extrahierten Kontinuumswerten (Tabelle 4.4) zeigt weitgehende Übereinstimmung innerhalb der statistischen Fehler.

Tabelle 4.9:

Linearer 'Rest-Fit' der Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\tilde{\Sigma}$  in  $a/L$  mit Nebenbedingung im alten Schema

$k$	$\tilde{D}(u)$		
	S(x)	Hyp1	Hyp2
5	-0.000105(104)	0.000003(94)	0.000252(111)
4	0.000346(150)	0.000211(120)	0.000108(135)
3	-0.000038(80)	0.000019(35)	0.000013(75)
2	-0.000236(128)	0.000114(158)	0.000235(202)
1	-0.000024(422)	0.000232(283)	0.000429(341)
0	0.001513(539)	-0.000114(355)	-0.001397(407)

Tabelle 4.10:

Linearer 'Rest-Fit' der Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\tilde{\Sigma}$  in  $a/L$  mit Nebenbedingung im neuen Schema

$k$	$\tilde{D}(u)$		
	S(x)	Hyp1	Hyp2
5	-0.000144(198)	-0.000113(164)	0.000071(182)
4	0.000390(175)	0.000300(145)	0.000332(172)
3	0.000005(93)	0.000044(42)	-0.000044(90)
2	0.000093(264)	0.000145(187)	0.000249(247)
1	-0.000202(602)	0.000201(326)	0.000492(439)
0	0.000481(1392)	0.000113(587)	-0.001202(892)

Tabelle 4.11:

Linearer 'Rest-Fit' der Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\tilde{\Sigma}$  in  $a/L$  ohne Nebenbedingung im alten Schema

$k$	$\tilde{D}(u)$		
	S(x)	Hyp1	Hyp2
5	-0.000117(120)	-0.000022(108)	0.000230(127)
4	0.000231(104)	0.000226(99)	0.000189(93)
3	0.000000(3)	0.000000(3)	0.000000(3)
2	0.000067(150)	0.000051(140)	0.000058(124)
1	0.000259(265)	0.000230(241)	0.000210(221)
0	-0.000027(293)	-0.000079(265)	-0.000156(265)

Tabelle 4.12:

Linearer 'Rest-Fit' der Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\tilde{\Sigma}$  in  $a/L$  ohne Nebenbedingung im neuen Schema

$k$	$\tilde{D}(u)$		
	S(x)	Hyp1	Hyp2
5	0.000056(106)	0.000032(101)	0.000041(94)
4	0.000353(131)	0.000353(126)	0.000315(118)
3	0.000001(3)	0.000000(3)	0.000000(3)
2	0.000175(173)	0.000168(162)	0.000168(146)
1	0.000258(323)	0.000193(286)	0.000170(252)
0	-0.000171(428)	-0.000296(401)	-0.000355(380)

$u$	$\sigma_{A,old}^{stat}(u)$	$\chi^2/dof$
0.9793	0.9823(18)	0.06/2
1.1814	0.9755(23)	0.02/2
1.5031	0.9703(18)	0.46
2.0142	0.9514(45)	0.05/2
2.4792	0.9381(64)	0.03/2
3.3340	0.9126(82)	0.07/2

Tabelle 4.13:

Constraint-Werte der  $(a/L)^2$ -linearen Kontinuums-  
extrapolation von  $\Sigma_{A,old}^{stat}$  unter Ausschluß der Daten für  
 $L = 6$  und das  $\chi^2$  pro Freiheitsgrad (dof)

$u$	$\sigma_{A,old}^{stat}(u)$	$\chi^2/dof$
0.9793	0.9823(7)	4.0/2
1.1814	0.9783(8)	7.5/2
1.5031	0.9703(18)	0.46
2.0142	0.9540(14)	3.2/2
2.4792	0.9400(20)	1.6/2
3.3340	0.9066(33)	1.9/2

Tabelle 4.14:

Constraint-Werte der konstanten Kontinuumsextra-  
polation von  $\Sigma_{A,old}^{stat}$  unter Ausschluß der Daten für  
 $L = 6$  und das  $\chi^2$  pro Freiheitsgrad (dof)

$u$	$\sigma_{A,old}^{stat}(u)$		
	$S(x)$	Hyp1	Hyp2
0.9793	0.9819(18)	0.9824(18)	0.9826(17)
1.1814	0.9755(23)	0.9753(23)	0.9757(22)
1.5031	0.9694(19)	0.9702(18)	0.9711(18)
2.0142	0.9506(48)	0.9518(46)	0.9518(42)
2.4792	0.9373(68)	0.9382(65)	0.9388(61)
3.3340	0.9145(88)	0.9123(82)	0.9114(78)

Tabelle 4.15:

Standard-Werte der  $(a/L)^2$ -linearen  
Kontinuumsextrapolation ohne  
Gitter  $L = 6$  von  $\Sigma_{A,old}^{stat}$  für die  
Diskretisierungen  $S(x)$ , Hyp1 und  
Hyp2

$u$	$\sigma_{A,old}^{stat}(u)$		
	$S(x)$	Hyp1	Hyp2
0.9793	0.9815(7)	0.9820(7)	0.9833(7)
1.1814	0.9776(8)	0.9780(8)	0.9792(8)
1.5031	0.9694(19)	0.9702(18)	0.9711(18)
2.0142	0.9525(15)	0.9536(14)	0.9554(14)
2.4792	0.9383(21)	0.9398(20)	0.9417(20)
3.3340	0.9067(34)	0.9061(33)	0.9068(32)

Tabelle 4.16:

Standard-Werte der konstanten  
Kontinuumsextrapolation ohne  
Gitter  $L = 6$  von  $\Sigma_{A,old}^{stat}$  für die  
Diskretisierungen  $S(x)$ , Hyp1 und  
Hyp2

### 4.3 Polynomialer Fit an die Step-Scaling-Funktion

Aus den unterschiedlichen, diskreten Kontinuumsdaten des letzten Abschnittes ist jeweils ein Fit für die Skalenentwicklung zu extrahieren. Ein Fitansatz für die Step-Scaling-Funktion lautet

$$\sigma_A^{\text{stat}}(u) = 1 + s_0 u + s_1 u^2 + s_2 u^3 + \dots + s_n u^{n+1} \quad (4.22a)$$

und ist dadurch motiviert [6, 25], dass er für kleine Kopplungen die Form einer Störungsentwicklung annimmt. Die beiden nicht-trivialen führenden Terme können daher der Störungstheorie entnommen und in den Fits auf diese Werte fixiert werden:

$$s_0 = \sigma_A^{\text{stat},(1)} \quad s_1 = \sigma_A^{\text{stat},(2)} . \quad (4.22b)$$

Der erste Koeffizient ist universell aufgrund

$$s_0 \equiv \ln(2)\gamma_0 \equiv -\frac{\ln(2)}{4\pi^2} \simeq -1.7558 \cdot 10^{-2} , \quad (4.22c)$$

während  $s_1$  durch  $\gamma_1$  vom verwendeten Schema abhängig ist:

$$s_1 = \frac{1}{2} \ln^2(2)\gamma_0^2 + \ln^2(2)b_0\gamma_0 + \ln(2)\gamma_1 . \quad (4.22d)$$

$b_0 \equiv b_0|_{N_f=2} \simeq 6.1215 \cdot 10^{-2}$  ist der universelle 1-Schleifenkoeffizient der  $\beta$ -Funktion (3.16). Die zu verwendenden Werte für  $\gamma_1$  lauten nach [33, 24]

$$\gamma_{1,\text{old}}^{\text{SF}}(\theta = 0.5) = \frac{1}{(4\pi)^2} \{0.08(2) - 0.0466(13) N_f\}_{N_f=2} \simeq -8.3590 \cdot 10^{-5} , \quad (4.23)$$

$$\gamma_{1,\text{new}}^{\text{SF}}(\theta = 0.5) = \frac{1}{(4\pi)^2} \{0.10(2) - 0.0477(13) N_f\}_{N_f=2} \simeq +2.9130 \cdot 10^{-5} . \quad (4.24)$$

Der zweite führende Term aus (4.22a) ist damit für das hier interessante alte Schema gegeben durch

$$s_1 \simeq 6.4879 \cdot 10^{-4} . \quad (4.25)$$

Nachdem im letzten Abschnitt die Kontinuumsdaten auf drei verschiedene Arten betrachtet wurden, werden deren Werte nun auch separat zur Bestimmung des Fitpolynoms der Step-Scaling-Funktion herangezogen und im folgenden Abschnitt zum RGI-Wert entwickelt.

Als Beispiel werden explizit Werte der quadratischen Kontinuumsextrapolationen für alle vorhandenen Auflösungen verwendet. Die höchste Potenz des Polynoms wird auf maximal vier gesetzt. Bekannt sind nur die beiden führenden Koeffizienten,  $s_0$  und  $s_1$ , welche daher fixiert werden können. In Tabelle 4.17 sind einige Koeffizienten durch entsprechende Kombinationen von Basisfunktionen bestimmt worden. Für  $s_0$  stimmt zumindestens die Größenordnung noch mit obigem perturbativen Wert überein. Dies ist für  $s_1$  schon nicht mehr der Fall.

In den Untersuchungen hat sich herausgestellt, dass sich ein Polynom dritten Grades für die Be-

$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
—	—	<b>-0.0012(1)</b>	—
—	—	—	-0.00038(4)
—	—	-0.0118(5)	+0.00053(2)
—	-0.0022(3)	—	—
-0.021(1)	—	—	—
-0.013(2)	-0.004(1)	—	—

*Tabelle 4.17:* Kombinationen unterschiedlicher Basispolynome für einen Fit der Step-Scaling-Funktion. Die bei der Berechnung des RGI-Wertes verwendete Größe wurde zur Kennzeichnung fettgedruckt.

schreibung der vorliegenden Datensätze am Besten eignet. Die zugehörige graphische Darstellung, d. h. für die erste Zeile in Tabelle 4.17, ist in diesem Fall in Abbildung 4.4 gezeigt.

Auf eine Angabe aller Werte für die Daten ohne die kleinste Gitterauflösung wird an dieser Stelle verzichtet.

#### 4.4 Bestimmung der Renormierungsgruppeninvarianten

Nach Abschnitt 3.3 gilt

$$\frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi((2L_{\text{max}})^{-1})} = [\sigma(u_n)]^{-1} \cdots [\sigma(u_0)]^{-1} [2b_0 u_n]^{-\gamma_0/2b_0^2} \times \exp \left\{ - \int_0^{\sqrt{u_n}} dg \left[ \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} - \frac{\gamma_0}{b_0 g} \right] \right\}. \quad (4.26)$$

Für die Renormierungsgruppenfunktion  $\beta(g)$  wird die Störungsentwicklung im Schrödinger-Funktional auf 3-Schleifen-Niveau nach [5] verwendet. Daher ist lediglich der Wert

$$b_2 \Big|_{N_f=2} = 0.064(10) \times (4\pi)^{-3} \approx 3.2252 \cdot 10^{-5} \quad (4.27)$$

nachzutragen. Um das Integral auswerten zu können, muss die Störungsentwicklung der Renormierungsgruppenfunktion  $\gamma(g)$  in einer niedrigeren Ordnung erfolgen. Diese ist durch (4.23) gegeben. Der Exponentialfaktor wird mit einem Computeralgebraprogramm aus den genannten Werten berechnet. Wie die Unsicherheit von (4.26) ermittelt wird, steht in Abschnitt B.5.

Mit den Werten aus Tabelle 4.18 erhält man

$$\frac{Z_A^{\text{stat}}(2L_{\text{max}})}{Z_A^{\text{stat}}(L)} = 0.7647(67) \quad \text{bei} \quad L = 2^{-5} L_{\text{max}} \quad (4.28)$$



Tabelle 4.18:

Wiederholung der Constraint-Werte zur Step-Scaling-Funktion des vollständigen Datensatzes  $\sigma_{A,\text{old}}^{\text{stat}}(u)$  im alten Schema.

$u$	$\Delta u$	$\sigma_{A,\text{old}}^{\text{stat}}(u)$
0.9793	0.0011	0.9834(12)
1.1814	0.0015	0.9791(16)
1.5031	0.0044	0.9710(25)
2.0142	0.0102	0.9529(24)
2.4792	0.0128	0.9428(35)
3.3340	0.0190	0.9104(54)

und für

$$\frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi(2L_{\text{max}})} = 0.836(7) \quad (4.29)$$

bzw.

$$\Phi(\mu)/\Phi_{\text{RGI}} = 1.20(1) \quad \text{bei} \quad \mu = (2L_{\text{max}})^{-1} \quad (4.30)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Größen  $\sigma$  und  $\Delta\sigma$ , und nicht die Fitfunktion selbst, in die Berechnung eingegangen sind. Die Fitfunktion selbst kommt hier erst bei der Auswertung der Unsicherheit des RGI-Wertes, siehe Abschnitt B.5, ins Spiel. Die für obige Ergebnisse herangezogene Fitfunktion sei hier noch explizit erwähnt:

$$\sigma_{\text{fit}}(u) = 1 - 1.7557 \cdot 10^{-2} u + 6.4879 \cdot 10^{-4} u^2 - 12 \cdot 10^{-4} u^3 . \quad (4.31)$$



---

## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die nicht-perturbative Renormierung des statischen Axialstromes für den Fall von zwei dynamischen Flavours berechnet und sie stellt eine Erweiterung der Valenzquark-Näherung dar. Der statische Axialstrom ist eine Observable in führender Ordnung der HQET, einer effektiven Theorie der QCD im Grenzfall schwerer Quarkmassen, und setzt sich aus einem statischem und einem leichten Quarkfeld zusammen. Matrixelemente dieses Stromes sind von großer phänomenologischer Bedeutung, da z.B. für den Fall, dass das schwere Quark ein b-Quark ist, das zugehörige renormierte Matrixelement proportional zur Zerfallskonstante des B-Mesons ist.

Die Rechnungen wurden im Rahmen eines Renormierungsschemas der QCD in endlichem Volumen, dem Schrödinger-Funktional, durchgeführt. Dazu wurde die Methode des rekursiven *Finite-Size-Scalings* verwendet, bei dem in jedem Schritt der Kontinuumslikes gebildet wurde. Spezielle im Schrödinger-Funktional definierte Korrelationsfunktionen dienten hierbei als 'Träger' des skalenabhängigen Renormierungsfaktors zum statischen Axialstrom. Der nackte Strom in der  $O(a)$ -verbesserten Theorie wurde für drei verschiedene Diskretisierungen des statischen Sektors betrachtet, die zu einem universellen Kontinuumslikes geführt haben. Daraus wurde schließlich der renormierungsgruppeninvariante Wert des Matrixelementes abgeleitet.

Der ermittelte Renormierungsfaktor des Matrixelementes des statischen Axialstromes kann bereits unmittelbar angewendet werden, da in der Literatur [47] erste Resultate für die unrenormierten Matrixelemente vorliegen und daher mit diesem über einen (noch zu berechnenden) Matching-Faktor in Beziehung gesetzt werden können.



---

## A Vereinbarungen und Zusätze

Raumzeitindizes  $\mu, \nu, \dots$  laufen von 0 bis 3 und Raumindizes aus der Mitte des Alphabetes  $k, l, \dots$  von 1 bis 3.  $\hat{\mu}$  bezeichnet den 4-dim. Einheitsvektor in  $\mu$ -Richtung und  $\hat{k}$  entsprechend den 3-dim. Einheitsvektor in  $k$ -Raumrichtung. Indizes von Symmetriegruppen sind vom Beginn des Alphabetes  $a, b, \dots$  verwendet und laufen über die entsprechende Indexmenge.

Desweiteren steht  $a$  für den Gitterabstand, was aus dem Kontext immer ohne Schwierigkeiten hervorgehen sollte.

### A.1 Eichfelder im Kontinuum

In einer  $SU(N)$ -Eichtheorie im Kontinuum trägt das (Vektor-) Eichfeld  $A_\mu(x)$ , auch Zusammenhang genannt, Werte in der Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(N)$ . Das Eichfeld kann daher bzgl. einer Basis, oder den Generatoren, der Lie-Algebra  $\{T^a\}$  gemäß

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a \quad (\text{A.1})$$

mit reellen Komponentenfunktionen  $A_\mu^a(x)$  entwickelt werden. Eine Fundamentaldarstellung der Generatoren der Lie-Algebra ist gegeben durch

$$(T^a)^\dagger = -T^a, \quad \text{tr}\{T^a T^b\} = -\frac{1}{2}\delta^{ab} \quad (\text{A.2})$$

Auf analoge Weise kann der zugehörige Feldtensor

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (\text{A.3})$$

bzgl. der Lie-Algebra der Eichgruppe zerlegt werden.

### A.2 Dirac'sche Gamma-Matrizen

In einer euklidischen vierdimensionalen Feldtheorie sind die Dirac-Matrizen definiert über

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \quad (\text{A.4})$$

und nehmen in der *chiralen Darstellung* die Form

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & e_\mu \\ e_\mu^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

mit  $\gamma_\mu^\dagger \equiv \gamma_\mu$  an. Die  $(2 \times 2)$ -Matrizen

$$(e_\mu) = (e_0, e_k) = (-\mathbf{1}, -i\sigma_k) \quad (\text{A.6})$$

setzen sich aus der Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$  und den Standard-Paulimatrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

zusammen. Mit der Definition  $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  ist

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \gamma_5^\dagger = \gamma_5 \quad \text{und } \gamma_5^2 = \mathbb{1}. \quad (\text{A.8})$$

Die hermiteschen Matrizen

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (\text{A.9})$$

sind in dieser Darstellung explizit durch

$$\sigma_{0k} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = -\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

mit dem total antisymmetrischen Symbol  $\epsilon_{ijk}$  für  $\epsilon_{123} = 1$  gegeben.

### A.3 Gell-Mann-Matrizen

Die acht Erzeugenden der Gruppe  $SU(3)$  nennt man Gell-Mann-Matrizen. Sie nehmen mit  $k = 1, 2, 3$  die Gestalt

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (\text{A.11}) \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

an und genügen der Lie-Algebra

$$\left[ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad (\text{A.12})$$

für die vollständig antisymmetrischen Strukturkonstanten  $f_{abc}$  mit nicht-verschwindenden Komponenten

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{345} = f_{516} = f_{257} = f_{637} = \frac{1}{2}, \quad (\text{A.13})$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (\text{A.14})$$

## A.4 Vereinbarungen für das Gitter

Die gewöhnliche vorwärts- und rückwärtsgerichtete Gitterableitung wirkt auf einfache Funktionen, d. h. Farbsingletts,  $f(x)$  wie

$$\partial_\mu f(x) = \frac{1}{a} [f(x + a\hat{\mu}) - f(x)] , \quad (\text{A.15a})$$

$$\partial_\mu^* f(x) = \frac{1}{a} [f(x) - f(x - a\hat{\mu})] . \quad (\text{A.15b})$$

Dies lässt sich auch schreiben als

$$\partial_\mu = \frac{1}{a} [\delta_{x,x+a\hat{\mu}} - \delta_{x,x}] , \quad \partial_\mu^* = \frac{1}{a} [\delta_{x,x} - \delta_{x,x-a\hat{\mu}}] . \quad (\text{A.16})$$

Entsprechende auf die Quarkfelder  $\psi(x)$  wirkende eichkovariante Ableitungen sind durch

$$\nabla_\mu \psi(x) = \frac{1}{a} [U(x, \mu) \psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x)] , \quad (\text{A.17a})$$

$$\nabla_\mu^* \psi(x) = \frac{1}{a} [\psi(x) - U(x - a\hat{\mu}, \mu)^{-1} \psi(x - a\hat{\mu})] , \quad (\text{A.17b})$$

definiert und lassen sich darstellen als

$$\nabla_\mu = \frac{1}{a} [U_{x\mu} \delta_{x,x+a\hat{\mu}} - \delta_{x,x}] , \quad \nabla_\mu^* = \frac{1}{a} [\delta_{x,x} - U_{x-a\hat{\mu},x}^{-1} \delta_{x,x-a\hat{\mu}}] . \quad (\text{A.18})$$

Für Beide lässt sich eine symmetrisierte Ableitung aufstellen, und zwar

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_\mu &= \frac{1}{2} (\partial_\mu + \partial_\mu^*) & \tilde{\nabla}_\mu &= \frac{1}{2} (\nabla_\mu + \nabla_\mu^*) \\ &= \frac{1}{2a} [\delta_{x,x+a\hat{\mu}} - \delta_{x,x-a\hat{\mu}}] , & &= \frac{1}{2a} [U_{x\mu} \delta_{x,x+a\hat{\mu}} - U_{x-a\hat{\mu},x}^{-1} \delta_{x,x-a\hat{\mu}}] . \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Auf dieselbe Art und Weise werden die linkswirkenden Ableitungen definiert, z. B.

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\nabla}_\mu \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{a} [\bar{\psi}(x + a\hat{\mu}) U(x, \mu)^{-1} - \bar{\psi}(x)] , \\ \overleftarrow{\nabla}_\mu^* \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{a} [\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}(x - a\hat{\mu}) U(x, \mu)] . \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

### Ableitungen mit Phasenfaktoren

Wie erwähnt (Abschnitt 1.5) entsprechen die periodischen Randbedingungen an die Fermionfelder den periodischen Randbedingungen der Eichfelder bis auf eine Phase, siehe (1.29). Der Phasenwinkel  $\theta$  lässt sich auf die kovariante Ableitung übertragen, so dass die Randbedingungen an die Eich- und Fermionfelder in ihrer Form übereinstimmen. Die Ableitungen lauten dann:

$$\nabla_\mu \psi(x) = \frac{1}{a} [\lambda_\mu U(x, \mu) \psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x)] , \quad (\text{A.21a})$$

$$\nabla_\mu^* \psi(x) = \frac{1}{a} [\psi(x) - \lambda_\mu^{-1} U(x - a\hat{\mu}, \mu)^{-1} \psi(x - a\hat{\mu})] , \quad (\text{A.21b})$$

mit den Phasenfaktoren

$$\lambda_\mu = e^{ia\theta_\mu/L} , \quad \text{für } \theta_0 = 0 , \quad -\pi < \theta_k \leq \pi . \quad (\text{A.22})$$

Die Phasenfaktoren hängen offensichtlich von der räumlichen Ausdehnung des Gitters  $L$  ab und sind auf einem unendlich ausgedehnten Gitter identisch Eins. Die zugehörigen Linkswirkungen der Gitterableitungen sind definiert durch

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(x) \overleftarrow{\nabla}_\mu &= \frac{1}{a} [\overline{\psi}(x + a\hat{\mu}) U(x, \mu)^{-1} \lambda_\mu^{-1} - \overline{\psi}(x)] , \\ \overline{\psi}(x) \overleftarrow{\nabla}_\mu^* &= \frac{1}{a} [\overline{\psi}(x) - \overline{\psi}(x - a\hat{\mu}) U(x, \mu) \lambda_\mu] .\end{aligned}\tag{A.23}$$

## A.5 Begründung und Einfluß des Wilson-Terms

Hierzu wird nach Wilson der fünfdimensionale, parameterabhängige Operator  $ar \overline{\psi} \square \psi$  für  $r \in [0, 1]$  eingeführt. Addiert man ihn zur naiven Gitterwirkung (1.51), so folgt [19]

$$\begin{aligned}S_W &= m_0 \underbrace{\sum_x \overline{\psi}_x \psi_x + \frac{1}{2a} \sum_{x,\mu} \overline{\psi}_x \gamma_\mu [U_{x,\mu} \psi_{x+a\hat{\mu}} - U_{x-a\hat{\mu},\mu}^{-1} \psi_{x-a\hat{\mu}}]}_{\text{naive Fermionwirkung}} - \\ &\quad - \underbrace{\frac{r}{2a} \sum_{x,\mu} \overline{\psi}_x [U_{x,\mu} \psi_{x+a\hat{\mu}} - 2\psi_x + U_{x-a\hat{\mu},\mu}^{-1} \psi_{x-a\hat{\mu}}]}_{\text{Wilson-Term}} \\ &= \frac{am_0 + 4r}{a} \sum_x \overline{\psi}_x \psi_x + \sum_{x,\mu} \overline{\psi}_x [(\gamma_\mu - r) U_{x,\mu} \psi_{x+a\hat{\mu}} - (\gamma_\mu + r) U_{x-a\hat{\mu},\mu}^{-1} \psi_{x-a\hat{\mu}}] .\end{aligned}\tag{A.24}$$

Durch eine Reskalierung der Quarkfelder

$$\psi'_x = \sqrt{am_0 + 4r} \psi_x = \psi_x / \sqrt{2\kappa} ,\tag{A.25a}$$

$$\kappa = 1/(2am_0 + 8r) ,\tag{A.25b}$$

lässt sich die Wilson-Fermionwirkung in folgende Gestalt bringen:

$$S_W = \sum_{x,y} \overline{\psi}'_x Q_{xy} \psi'_y .\tag{A.26}$$

Dadurch wird die *Fermionmatrix*  $Q$  definiert, die im vorliegenden Fall die Gestalt

$$Q_{xy}[U] = \frac{1}{a} \left[ \delta_{xy} - \kappa \sum_\mu [(r - \gamma_\mu) U_{x,\mu} \delta_{x,y-a\hat{\mu}} + (r + \gamma_\mu) U_{x-a\hat{\mu},\mu}^{-1} \delta_{x,y+a\hat{\mu}}] \right]\tag{A.27}$$

annimmt. Der Limes  $r \rightarrow 0$  reproduziert die naive Fermionwirkung mit

$$Q_{xy}[U] = \frac{1}{a} \left[ \delta_{xy} - \kappa \sum_\mu \gamma_\mu [U_{x,\mu} \delta_{x,y-a\hat{\mu}} + U_{x-a\hat{\mu},\mu}^{-1} \delta_{x,y+a\hat{\mu}}] \right] .\tag{A.28}$$



Im Grenzwert  $r \rightarrow 1$  folgt für die Fermionmatrix

$$Q_{xy}[U] = \frac{1}{a} \left[ \delta_{xy} - \kappa \sum_{\mu} \delta_{x,y+a\hat{\mu}} (1 + \gamma_{\mu}) U_{x,\mu} \right]. \quad (\text{A.29})$$

In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich mit einer Wilson-Fermionwirkung gearbeitet, so dass auf eine explizite Kennzeichnung durch ' verzichtet werden kann und die Fermionfeldern  $\psi_x$  immer als die reskalierten Felder zu betrachten sind. Der hierbei auftretende Parameter  $\kappa$  ist dadurch als neuer Massenparameter anzusehen. Man nennt ihn auch *Hopping-Parameter*. Die Gitter-Wirkung und damit die Gitter-QCD wird daher insgesamt durch den Parametersatz  $(L/a, \beta, \kappa)$  bestimmt.

## A.6 Die lokale effektive Theorie nach Symanzik

In der Nähe des Kontinuumslikes kann eine Gittertheorie in Termen einer effektiven (lokalen) Theorie durch die Störungsentwicklung

$$S_{\text{eff}} = S_0 + aS_1 + a^2S_2 + \dots \quad (\text{A.30})$$

ausgedrückt werden.  $S_0$  ist die Wirkung der Kontinuumstheorie bzw. einer Gittertheorie mit noch viel kleinerem Gitterabstand  $\varepsilon \ll a$ . Aufgrund der dimensionsbehafteten Gitterkonstanten  $a$  sind die Terme  $S_k, k = 1, 2, \dots$ , Raumzeitintegrale über Lagrangedichten  $\mathcal{L}_k(x)$  der Dimension  $4 + k$ , welche die exakten Symmetrien der Gittertheorie erfüllen müssen und aus allgemeinen Kombinationen eichinvarianter zusammengesetzter Felder bestehen.

Eine mögliche Feldbasis für die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_1(x)$  lautet

$$\mathcal{O}_1 = \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi, \quad (\text{A.31})$$

$$\mathcal{O}_2 = \bar{\psi} D_{\mu} D_{\mu} \psi + \bar{\psi} \overleftarrow{D}_{\mu} \overleftarrow{D}_{\mu} \psi, \quad (\text{A.32})$$

$$\mathcal{O}_3 = m \text{tr}\{F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\}, \quad (\text{A.33})$$

$$\mathcal{O}_4 = m \{ \bar{\psi} \gamma_{\mu} D_{\mu} \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{D}_{\mu} \gamma_{\mu} \psi \}, \quad (\text{A.34})$$

$$\mathcal{O}_5 = m^2 \bar{\psi} \psi. \quad (\text{A.35})$$

Die Untersuchung von Korrelationsfunktionen lokal eichinvarianter Gitterfelder  $\phi(x)$  zeigt, dass die Wirkung nicht die einzige Quelle von Cutoff-Effekten ist. Für die zusammenhängende n-Punkt-Funktion

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = (Z_{\phi})^n \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_{\text{con}} \quad (\text{A.36})$$

sollte man für ein richtig abgestimmtes  $Z_{\phi}$  und  $x_1 \neq \dots \neq x_n$  einen wohldefinierten Kontinuumslikes erwarten. Das Problem ist nur, dass in der effektiven Theorie das renormierte Gitterfeld  $Z_{\phi}\phi(x)$  durch das effektive Feld

$$\phi_{\text{eff}}(x) = \phi_0(x) + a\phi_1(x) + a^2\phi_2(x) + \dots \quad (\text{A.37})$$

dargestellt wird. Die  $\phi_k(x)$  sind Linearkombinationen zusammengesetzter lokaler Felder mit entsprechenden Dimensionen und Symmetrien.  $\phi_1(x)$  wäre nun eine Linearkombination aus der oben angeführten Feldbasis, die sich oft noch durch Rand- oder Nebenbedingungen reduzieren lässt. Dadurch kann nun der Kontinuumsliches der Korrelationsfunktion in der effektiven Theorie

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) \rangle_{\text{con}} \quad (\text{A.38})$$

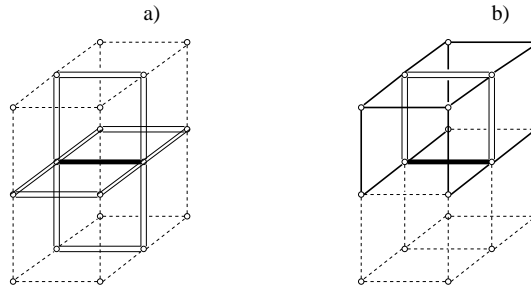
$$- a \int d^4y \langle \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) \mathcal{L}_1(y) \rangle_{\text{con}} \quad (\text{A.39})$$

$$+ a \sum_{k=1}^n \langle \phi_0(x_1) \cdots \phi_1(x_k) \cdots \phi_0(x_n) \rangle_{\text{con}} + O(a^2) \quad (\text{A.40})$$

untersucht werden. Die Erwartungswerte  $\langle \rangle_{\text{con}}$  beziehen sich auf die Kontinuumswirkung  $S_0$ .

## A.7 Das hyperkubische Blocking

Der Vollständigkeit halber wird hier die Konstruktion des verallgemeinerten HYP-Links  $W_{\text{HYP}}$  aus Abschnitt 2.4 angegeben. Für weitere Informationen sei auf [20] und die darin enthaltene Literatur verwiesen.



*Abbildung A.1:* Schematische Darstellung des hyperkubischen Blockings in drei Dimensionen a) Der dicke Link wird aus den doppelinierten 'Staples' gebildet. b) Jeder der doppelt-linierten Links wird aus zwei Staples gewonnen, die sich nur in diejenige Hyperkuben ausdehnen, welche an den ursprünglichen Link grenzen. Die in die Staples eingehenden Links werden vorher auf  $SU(3)$  projiziert. *Bildquelle:* [20]

Die dicken Links – siehe Abbildung A.1 – des hyperkubischen Blockings (HYP) werden in drei Schritten konstruiert. Im letzten Schritt werden die geblockten Links

$$V_{i,\mu} = \text{Proj}_{SU(3)} \left[ (1 - \alpha_1) U_{i,\mu} + \frac{\alpha_1}{6} \sum_{\pm\nu \neq \mu} \tilde{V}_{i,\nu;\mu} \tilde{V}_{i+\hat{\nu},\mu;\nu} \tilde{V}_{i+\hat{\mu},\nu;\mu}^\dagger \right] \quad (\text{A.41})$$

welche aus den ursprünglichen dünnen Links  $U_{i,\mu}$  und den Links

$$\tilde{V}_{i,\mu;\nu} = \text{Proj}_{SU(3)} \left[ (1 - \alpha_2) U_{i,\mu} + \frac{\alpha_2}{4} \sum_{\pm\rho \neq \nu,\mu} \bar{V}_{i,\rho;\nu\mu} \bar{V}_{i+\hat{\rho},\mu;\rho\nu} \bar{V}_{i+\hat{\mu},\rho;\nu\mu}^\dagger \right] \quad (\text{A.42})$$

bestehen, gebildet. Letztere setzen sich wiederum aus den

$$\bar{V}_{i,\mu;\nu\rho} = \text{Proj}_{\text{SU}(3)} \left[ (1 - \alpha_3) U_{i,\mu} + \frac{\alpha_3}{2} \sum_{\pm\eta \neq \rho, \nu, \mu} U_{i,\eta} U_{i+\hat{\eta},\mu} U_{i+\hat{\mu},\eta}^\dagger \right] \quad (\text{A.43})$$

zusammen. Die Parameter  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sollten optimiert werden. Ein Satz von optimierten Werten [20] lautet

$$\alpha_1 = 0.75, \quad \alpha_2 = 0.6, \quad \alpha_3 = 0.3. \quad (\text{A.44})$$

Die zugehörige Wirkung wird mit HYP1 bezeichnet. Ein weiterer Parametersatz wurde kürzlich von M. Della Morte et al. [14] gefunden. Obwohl er noch nicht veröffentlicht wurde, soll er hier verwendet werden. Er lautet

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0.5 \quad (\text{A.45})$$

und wird HYP2 genannt.

## A.8 Yang-Mills-Wirkung $\leftrightarrow$ Wilson-Wirkung

Wie ist die reine Eichwirkung auf dem Gitter darzustellen? Eine Antwort darauf liefert Abschnitt 3.2.2 in [48] und soll an dieser Stelle wiederholt werden.

Entsprechend dem Kontinuumseichfeld der starken Wechselwirkung führt man

$$A_\mu(x) = -i g A_\mu^a(x) T_a \quad (\text{A.46})$$

auf dem Gitter ein. Die Generatoren  $T_a$  erzeugen die Lie-Algebra der SU(3)-Eichgruppe und sind in einer üblichen Darstellung  $T_a = \lambda_a/2$  durch die Gell-Mann-Matrizen  $\lambda_a$  (A.3) gegeben. Definiert man nun

$$U(x, \mu) \equiv e^{-a A_\mu(x)} = 1 - a A_\mu(x) + \frac{a^2}{2} A_\mu(x)^2 - \dots \quad (\text{A.47})$$

und formt die Gitterableitung (A.15a) nach

$$A_\nu(x + a\hat{\mu}) = A_\nu(x) + a \partial_\mu A_\nu(x) \quad (\text{A.48})$$

um, so erhält man unter Verwendung der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^x e^y = e^{x+y+[x,y]/2+\dots} \quad (\text{A.49})$$

die Plakettvariable

$$U_{x;\mu\nu} = e^{-a^2 G_{\mu\nu}(x)} \quad (\text{A.50a})$$

mit den Feldtensoren

$$G_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) + O(a) , \quad (\text{A.50b})$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] . \quad (\text{A.50c})$$

Mit  $\text{Tr } G_{\mu\nu}(x) = 0$  folgt für die Spur

$$(\text{Tr } U_p + \text{Tr } U_p^{-1}) = 2 \text{Tr } \mathbb{1} + a^4 \text{Tr } (F_{\mu\nu}(x))^2 + O(a^5) , \quad (\text{A.51})$$

so dass nach Einsetzen in (1.41b) die Wilson-Wirkung

$$S = -\frac{\beta}{4N} \sum_x a^4 \text{Tr } F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + O(a^5) \quad (\text{A.52})$$

folgt.

## B Numerische Behandlung und Ergebnisse

### B.1 Bestimmung der statistischen Unsicherheit

Die statistische Unsicherheit der aus der Monte-Carlo-Simulation gewonnenen Korrelationsfunktionen und der daraus abgeleiteten Größen wird mit Hilfe einer *Jackknife-Analyse* bestimmt. Sie liefert gegenüber der Standardabweichung eine verlässlichere Schätzung der Unsicherheit für korrelierte Datensätze. Dazu müssen aus den Rohdaten der MC-Rechnung Stichproben (*samples*), die sogenannten *Jackknife-Samples*, erstellt werden.

Der Datensatz bestehe aus einer Menge von  $n$  geordneten Messwerten  $\{x_i\}$ . Hieraus erhält man ein Jackknife-Sample  $\tilde{x}_j$  durch Herausnahme des Messwertes  $x_j$ , gefolgt von der Mittelwertbildung über die verbleibenden Messwerte  $\{x_i\}_{i \neq j}$ , d. h.

$$\tilde{x}_j = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_i . \quad (\text{B.1})$$

Die Anzahl der so erzeugten Jackknife-Samples stimmt mit der Anzahl der ursprünglichen Messwerte überein. Dieses Verfahren lässt sich erweitern, indem man statt eines Messwertes Blöcke von  $k$  Messwerten aus dem Datensatz schneidet und entsprechend mittelt.

Diese Jackknife-Samples verwendet man nun, um eine aus den Messwerten abgeleitete Größe  $A$  und deren Unsicherheit zu bestimmen. Für eine solche *sekundäre Größe*

$$A_i \equiv A(\tilde{x}_i) \quad (\text{B.2})$$

wird nun der übliche Mittelwert

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \quad (\text{B.3})$$

gebildet. Die zugehörige Unsicherheit lautet

$$\Delta A = \sqrt{\frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{A} - A_i)^2}. \quad (\text{B.4})$$

Die Korrelation von Messwerten in einer MC-Simulation fällt mit der zwischen ihnen liegenden Rechenzeit ab. Zur Vermeidung zu starker Korrelationen wurden die Messwerte erst bei jedem zwanzigsten Eichfeld-Update gesichert. Dadurch wird sichergestellt, dass der zeitliche Abstand größer als die integrierte *Autokorrelationszeit*, der Dauer von Korrelationen in einer MC-Simulation, ist.

## B.2 Erzeugung der Jackknife-Samples und Datenanalyse

Wie bereits erwähnt, müssen aus den Datensätzen der Korrelationsfunktionen sogenannte Jackknife-Samples erstellt werden. Dafür sind zwei Größen von belang: Die *Binning-Größe* (siehe B.1) und die *Thermalisierung*. Diese gibt an, wieviele Daten vom Beginn der Messreihe fortgelassen werden müssen, um mögliche Effekte der Thermalisierungsphase, in der sich das System von seiner Startkonfiguration durch den MC-Algorithmus in seinen Gleichgewichtszustand entwickelt, auszuschließen.

In Abbildung B.1 wird an der mit (1) markierten Stelle durch Thermalisierung und Binning für jeden Datensatz innerhalb einer festen Kopplung dieselbe Anzahl von Jackknife-Samples erzeugt. Hier werden aus den Korrelationsfunktionen je nach Normierungsbedingung die Samples von  $Z_A^{\text{stat}}$  gebildet. Die genauen Einstellungen, und die damit der vorliegenden Arbeit zugrunde liegende Statistik, sind in Tabelle B.1 wiedergegeben.

Wichtig ist, dass die Anzahl der Jackknife-Samples für die Punkte der Gitter-Step-Scaling-Funktion in einem festen Kopplungspunkt gleich ist, da sich ansonsten keine  $\chi^2$ -Minimierung innerhalb der Samples durchführen lässt, die die möglichen Korrelationen der Daten angemessen berücksichtigt. An Punkt (2) werden aus den Samples der Renormierungskonstante die der Gitter-Step-Scaling-Funktion gebildet. Aus diesen wird wiederum in (3) der Jackknife-Mittelwert und Fehler für die einzelnen Punkte bestimmt, der seinerseits als Gewichtungsfaktor in die  $\chi^2$ -Minimierung der Kontinuumsextrapolation bei (4) eingeht. Die derart gewonnenen Daten für einen Kontinuumswert pro Kopplungspunkt werden in einem weiteren Schritt, (5), zur Ermittlung einer polynomialen Fitfunktion für die kontinuierliche Step-Scaling-Funktion zusammengelegt.

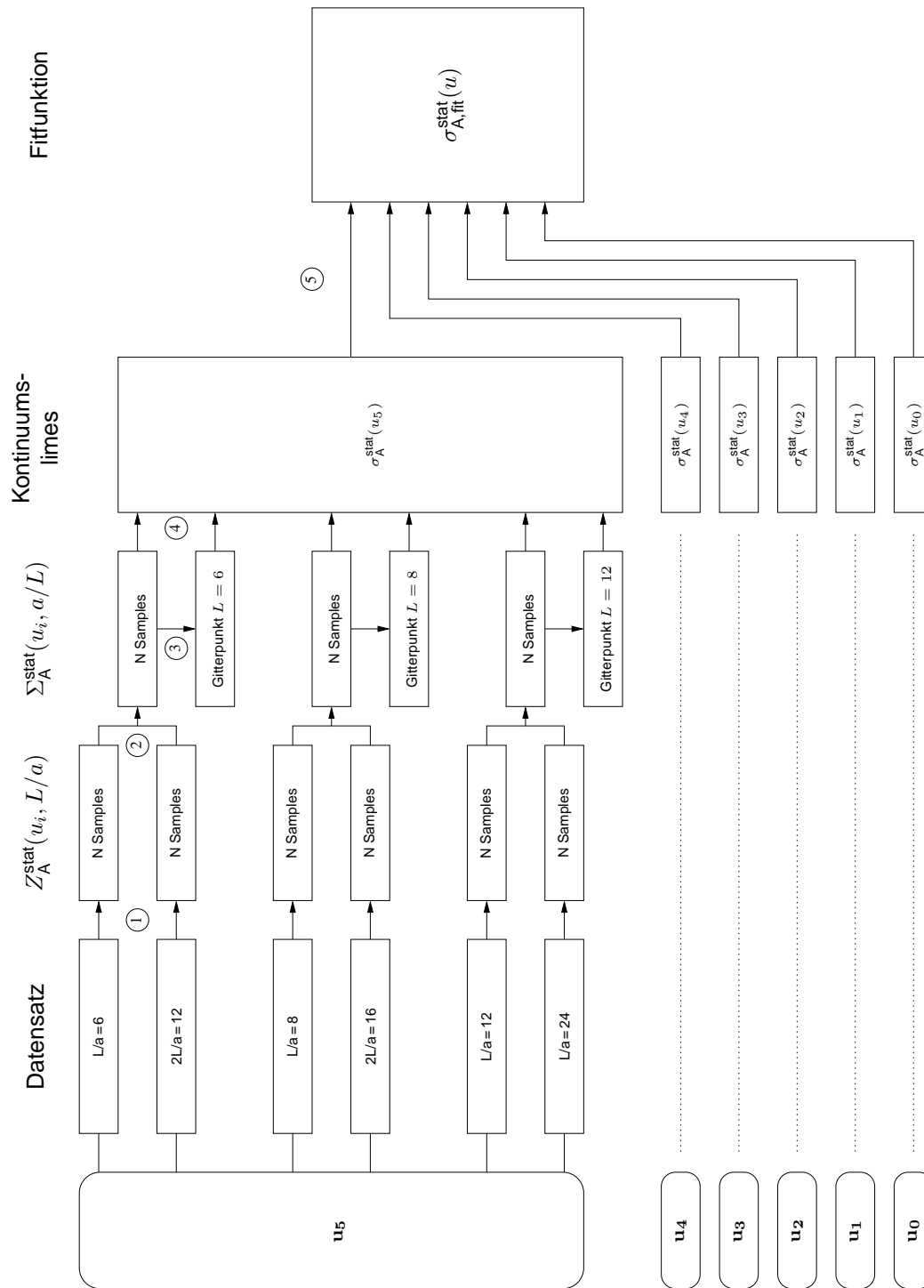


Abbildung B.1: Flußdiagramm zur Datenanalyse

$u$	$L/a$ $2L/a$	Konfigurationen	Replika	Messungen gesamt	Thermalisierung	verbliebene Messungen	Größe der Bins	Jackknife-Samples	Restkonfigurationen
0.9793	6	25	32	800	0	800	8	100	0
	12	160	4	640	10	600	6	100	0
	8	160	4	640	10	600	6	100	0 (40)
	16	520	1	520	20	500	5	100	0 (500)
	12	399	4	1596	24	1500	15	100	0
	24	350	2	700	0	700	7	100	75 (215)
1.1814	6	50	32	1600	0	1600	16	100	0
	12	100	4	400	0	400	4	100	0
	8	200	4	800	0	800	8	100	0
	16	560	1	560	60	500	5	100	0 (400)
	12	400	4	1600	25	1500	15	100	0
	24	353	2	706	3	700	7	100	108
1.5031	6	50	32	1600	0	1600	16	100	0
	12	85	4	340	10	300	3	100	0
	12	150	4	600	0	600	6	100	0
	24	210	2	420	10	400	4	100	0
1.5078	6	50	32	1600	0	1600	16	100	0
	12	160	4	640	10	600	6	100	0
	8	120	4	480	20	400	4	100	0
	16	500	1	500	0	500	5	100	0
2.0142	6	49	32	1568	9	1280	16	80	0
	12	162	4	648	2	640	8	80	0 (60)
	8	99	4	396	19	320	4	80	0
	16	761	1	761	41	720	9	80	239 (1000)
	12	180	4	720	0	720	9	80	0
	24	360	2	720	0	720	9	80	68 (190)
2.4792	6	30	32	960	0	960	12	80	0
	12	100	4	400	0	400	5	80	0
	8	140	4	560	0	560	7	80	0 (40)
	16	500	1	500	20	480	6	80	0
	12	280	4	1120	0	1120	14	80	0
	24	320	2	640	0	640	8	80	180
3.3340	6	30	32	960	0	960	12	80	0
	12	160	4	640	0	640	8	80	0
	8	300	4	1200	0	1200	15	80	0
	16	570	1	570	10	560	7	80	0
	12	193	4	772	13	720	9	80	0
	24	330	2	660	10	640	8	80	138

Tabelle B.1: Parameter zur Erzeugung der Samples für alle Kopplungen.

### B.3 Tabellen zur Gitter-Step-Scaling-Funktion

In den Tabellen B.3 und B.4 sind die gewonnenen Ergebnisse für die Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\Sigma_A^{\text{stat}}(u, a/L)$  für das alte und das neue Schema wiedergegen. Die zugehörigen Gitterparameterwerte  $(L/a, \beta, \kappa)$  sind aus Platzgründen in Tabelle B.2 vorgezogen.

Wiederum zu beachten sind die Unterschiede am Kopplungspunkt  $u_3$ , siehe Abschnitt 4.2. Der Wert  $u_3 = 1.5031$  gehört zur 1-Loop-MC-Simulation und  $u_3 = 1.5078$  entsprechend 2-Loop-MC-Simulation.

$\bar{g}^2(L)$	$\beta$	$\kappa$	$L/a$
0.9793	9.500000	0.1315322	6
	9.734100	0.1313050	8
	10.05755	0.1310691	12
1.1814	8.500000	0.1325094	6
	8.722300	0.1322917	8
	8.993660	0.1319754	12
1.5031	7.500000	0.1338150	6
	8.025990	0.1330633	12
1.5078	7.542000	0.1337050	6
	7.720600	0.1334970	8
2.0142	6.608500	0.1352600	6
	6.821700	0.1348910	8
	7.093000	0.1344320	12
2.4792	6.133000	0.1361100	6
	6.322900	0.1357673	8
	6.631640	0.1352270	12
3.3340	5.621500	0.1366650	6
	5.809700	0.1366087	8
	6.118160	0.1361397	12

Tabelle B.2: Werte der laufenden Kopplung  $\bar{g}^2(L) = u$ , der  $\beta$ - und  $\kappa$ -Parameter bei verschiedenen Gitterauflösungen  $L/a$



$L/a$	<b>S(x)</b>			<b>Hyp1</b>			<b>Hyp2</b>		
	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, L/a)$	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, 2L/a)$	$\Sigma_A^{\text{stat}}(u, a/L)$	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, L/a)$	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, 2L/a)$	$\Sigma_A^{\text{stat}}(u, a/L)$	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, L/a)$	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, 2L/a)$	$\Sigma_A^{\text{stat}}(u, a/L)$
6	0.9396(5)	0.9190(7)	0.9782(8)	0.9363(5)	0.9169(6)	0.9793(8)	0.9507(5)	0.9337(6)	0.9821(7)
8	0.9321(6)	0.9146(9)	0.9813(11)	0.9295(5)	0.9126(9)	0.9818(11)	0.9449(5)	0.9294(8)	0.9836(10)
12	0.9253(4)	0.9083(7)	0.9816(9)	0.9231(3)	0.9066(7)	0.9821(9)	0.9389(3)	0.9230(7)	0.9830(9)
6	0.9277(4)	0.9030(9)	0.9733(10)	0.9245(4)	0.9012(8)	0.9748(10)	0.9412(3)	0.9206(8)	0.9781(9)
8	0.9195(7)	0.8997(10)	0.9785(13)	0.9170(6)	0.8978(10)	0.9791(12)	0.9346(6)	0.9166(10)	0.9807(12)
12	0.9115(4)	0.8903(11)	0.9768(12)	0.9095(4)	0.8886(10)	0.9770(12)	0.9276(4)	0.9071(10)	0.9779(11)
6	0.9095(6)	0.8783(14)	0.9658(17)	0.9070(5)	0.8774(13)	0.9675(16)	0.9270(5)	0.9002(12)	0.9711(14)
12	0.8922(8)	0.8649(14)	0.9694(19)	0.8902(7)	0.8637(14)	0.9702(18)	0.9112(7)	0.8849(13)	0.9711(18)
6	0.9110(6)	0.8780(9)	0.9638(12)	0.9084(5)	0.8771(9)	0.9655(11)	0.9283(5)	0.8998(8)	0.9692(10)
8	0.9012(11)	0.8736(13)	0.9694(18)	0.8991(10)	0.8726(13)	0.9706(17)	0.9201(9)	0.8949(12)	0.9726(16)
6	0.8843(9)	0.8422(11)	0.9525(15)	0.8830(8)	0.8424(11)	0.9541(14)	0.9086(7)	0.8706(10)	0.9582(13)
8	0.8752(15)	0.8343(16)	0.9533(24)	0.8745(14)	0.8346(16)	0.9543(23)	0.9003(13)	0.8615(16)	0.9569(21)
12	0.8636(11)	0.8219(17)	0.9518(23)	0.8628(10)	0.8222(17)	0.9529(22)	0.8880(9)	0.8472(16)	0.9541(20)
6	0.8623(11)	0.8021(18)	0.9302(24)	0.8626(10)	0.8050(16)	0.9333(23)	0.8932(9)	0.8374(16)	0.9375(21)
8	0.8506(16)	0.7984(25)	0.9386(34)	0.8510(15)	0.8004(24)	0.9404(33)	0.8814(14)	0.8310(24)	0.9428(32)
12	0.8417(9)	0.7894(24)	0.9379(32)	0.8422(8)	0.7910(23)	0.9392(31)	0.8700(8)	0.8183(22)	0.9406(29)
6	0.8310(13)	0.7450(22)	0.8965(29)	0.8332(12)	0.7504(20)	0.9007(28)	0.8717(11)	0.7905(20)	0.9069(27)
8	0.8152(14)	0.7367(36)	0.9037(47)	0.8184(13)	0.7396(34)	0.9037(44)	0.8551(13)	0.7738(35)	0.9050(43)
12	0.8061(14)	0.7333(35)	0.9097(46)	0.8078(13)	0.7339(33)	0.9085(44)	0.8405(13)	0.7637(32)	0.9085(42)

Tabelle B.3: Ergebnisse für die Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\Sigma_{A,\text{old}}^{\text{stat}}$  bzgl. der drei Wirkungen im alten Schema

$L/a$	<b>S(x)</b>			<b>Hyp1</b>			<b>Hyp2</b>		
	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, L/a)$	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, 2L/a)$	$\Sigma_A^{\text{stat}}(u, a/L)$	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, L/a)$	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, 2L/a)$	$\Sigma_A^{\text{stat}}(u, a/L)$	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, L/a)$	$Z_A^{\text{stat}}(g_0, 2L/a)$	$\Sigma_A^{\text{stat}}(u, a/L)$
6	0.9446(6)	0.9220(8)	0.9760(10)	0.9423(6)	0.9201(8)	0.9764(10)	0.9597(5)	0.9376(8)	0.9769(9)
8	0.9350(7)	0.9170(12)	0.9807(15)	0.9331(7)	0.9151(12)	0.9807(14)	0.9502(6)	0.9324(12)	0.9813(14)
12	0.9275(5)	0.9113(10)	0.9826(12)	0.9255(5)	0.9097(9)	0.9829(12)	0.9421(5)	0.9263(9)	0.9833(12)
6	0.9336(5)	0.9062(12)	0.9706(13)	0.9317(5)	0.9048(11)	0.9711(13)	0.9520(4)	0.9250(11)	0.9717(12)
8	0.9240(9)	0.9028(14)	0.9771(17)	0.9222(8)	0.9012(13)	0.9773(16)	0.9419(8)	0.9205(13)	0.9773(16)
12	0.9146(6)	0.8902(13)	0.9733(15)	0.9129(5)	0.8885(13)	0.9732(15)	0.9319(5)	0.9072(13)	0.9736(14)
6	0.9167(7)	0.8825(19)	0.9627(22)	0.9157(6)	0.8822(18)	0.9635(21)	0.9401(6)	0.9063(16)	0.9640(19)
12	0.8960(11)	0.8692(17)	0.9701(24)	0.8945(10)	0.8680(17)	0.9704(23)	0.9165(10)	0.8894(17)	0.9704(23)
6	0.9183(7)	0.8816(11)	0.9601(13)	0.9173(6)	0.8811(10)	0.9606(13)	0.9416(6)	0.9050(10)	0.9611(12)
8	0.9067(13)	0.8779(17)	0.9682(21)	0.9055(12)	0.8770(16)	0.9686(20)	0.9291(11)	0.8999(16)	0.9686(19)
6	0.8944(10)	0.8460(14)	0.9460(18)	0.8951(9)	0.8468(13)	0.9461(17)	0.9262(8)	0.8765(13)	0.9463(16)
8	0.8803(19)	0.8390(23)	0.9531(33)	0.8809(18)	0.8397(23)	0.9532(32)	0.9099(16)	0.8675(23)	0.9535(30)
12	0.8698(14)	0.8279(20)	0.9519(27)	0.8694(13)	0.8277(20)	0.9520(25)	0.8957(13)	0.8529(19)	0.9522(24)
6	0.8733(12)	0.8067(23)	0.9237(30)	0.8763(11)	0.8104(21)	0.9249(27)	0.9136(10)	0.8446(20)	0.9244(25)
8	0.8576(17)	0.8020(34)	0.9352(42)	0.8593(16)	0.8040(33)	0.9356(41)	0.8931(16)	0.8355(33)	0.9355(39)
12	0.8465(12)	0.7929(28)	0.9366(39)	0.8477(11)	0.7949(28)	0.9377(37)	0.8768(11)	0.8226(26)	0.9381(35)
6	0.8449(16)	0.7549(32)	0.8935(42)	0.8506(15)	0.7603(30)	0.8939(39)	0.8973(14)	0.8030(29)	0.8950(37)
8	0.8246(19)	0.7438(47)	0.9020(63)	0.8294(18)	0.7468(43)	0.9004(56)	0.8702(17)	0.7824(43)	0.8991(54)
12	0.8113(18)	0.7408(46)	0.9131(61)	0.8138(17)	0.7432(39)	0.9133(52)	0.8484(17)	0.7738(38)	0.9120(47)

Table B.4: Ergebnisse für die Gitter-Step-Scaling-Funktion  $\Sigma_{A,\text{new}}^{\text{stat}}$  bzgl. der drei Wirkungen im neuen Schema

### B.4 Kontinuumswerte zur neuen Normierungsbedingung

$u$	$\sigma_{A,\text{new}}^{\text{stat}}(u)$	$\chi^2/\text{dof}$
0.9793	0.9853(16)	0.66/5
1.1814	0.9760(20)	18.87/5
1.5078	0.9785(46)	0.009/2
2.0142	0.9554(30)	3.33/5
2.4792	0.9434(43)	1.64/5
3.3340	0.9169(66)	1.70/5

Table B.5: Constraint-Werte der Kontinuumsextrapolation bei den vorgegebenen Kopplungswerten für die Step-Scaling-Funktion  $\sigma_{A,\text{new}}^{\text{stat}}$  im neuen Schema

$u$	$\sigma_{A,\text{new}}^{\text{stat}}(u)$		
	$S(x)$	$Hyp1$	$Hyp2$
0.9793	0.9850(17)	0.9852(17)	0.9856(16)
1.1814	0.9761(21)	0.9759(20)	0.9760(19)
1.5078	0.9786(48)	0.9789(47)	0.9782(45)
2.0142	0.9552(32)	0.9553(30)	0.9555(28)
2.4792	0.9426(46)	0.9434(45)	0.9440(41)
3.3340	0.9182(78)	0.9177(69)	0.9154(62)

Table B.6: Standard-Werte der Kontinuumsextrapolation bei den vorgegebenen Kopplungswerten für die Step-Scaling-Funktion  $\sigma_{A,\text{new}}^{\text{stat}}$  der drei Diskretisierung  $S(x)$ ,  $Hyp1$  und  $Hyp2$  im neuen Schema

## B.5 Bestimmung der Unsicherheit des RGI-Matrixelementes

Für das renormierungsgruppeninvariante (RGI) Matrixelement gilt

$$\Phi_{\text{RGI}} = \Phi(\mu) \times \left[ 2b_0 \bar{g}^2(\mu) \right]^{-\gamma_0/2b_0} \exp \left\{ - \int_0^{\bar{g}(\mu)} dg \left[ \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} - \frac{\gamma_0}{b_0 g} \right] \right\} \quad (\text{B.5})$$

mit den universellen, nicht mit Unsicherheiten behafteten Konstanten  $b_0$  und  $\gamma_0$  bezüglich der Störungsentwicklung von  $\beta$ - respektive  $\gamma$ -Funktion, siehe (3.15) und (3.16). Wie in Abschnitt 3.3 dargelegt, lässt sich dessen Verhältnis zum hadronischen Matrixelement über die Step-Scaling-Funktion gemäß

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi((2L_{\text{max}})^{-1})} &= [\sigma(u_n)]^{-1} \cdots [\sigma(u_0)]^{-1} [2b_0 u_n]^{-\gamma_0/2b_0^2} \\ &\times \exp \left\{ - \int_0^{\sqrt{u_n}} dg \left[ \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} - \frac{\gamma_0}{b_0 g} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

ausdrücken, mit

$$\sigma(u(L)) = \frac{Z_A(2L)}{Z_A(L)} = \frac{\Phi(2/\mu)}{\Phi(1/\mu)}. \quad (\text{B.7})$$

Es liegen sechs Werte für die Kopplung vor, siehe Tabelle 4.1.  $L_{\text{max}}$  ist durch den größten Wert der Kopplung definiert, d.h. bei

$$\begin{aligned} \bar{g}^2(L_{\text{max}}) &\equiv u_{\text{max}} = 3.334 \\ \text{und es gilt} \quad u_k &= \bar{g}^2(2^{-k} L_{\text{max}}), \quad k = 0, \dots, 5 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Dies bedeutet explizit:

$$\sigma(u_0) = \frac{\Phi(2L_{\text{max}})}{\Phi(L_{\text{max}})}, \quad \sigma(u_1) = \frac{\Phi(L_{\text{max}})}{\Phi(2^{-1}L_{\text{max}})}, \quad \dots, \quad \sigma(u_5) = \frac{\Phi(2^{-4}L_{\text{max}})}{\Phi(2^{-5}L_{\text{max}})}. \quad (\text{B.9})$$

Die Faktoren vor der Exponentialfunktion sind durch nicht-perturbative Rechnungen in Abschnitt 4 festgelegt und entsprechend fehlerbehaftet. Weitere Unsicherheiten ergeben sich aus der perturbativen Bestimmung der  $\beta$ - und  $\gamma$ -Funktion. Für eine korrekte Auswertung des Integrals, muss die  $\beta$ -Funktion in höherer Ordnung als die  $\gamma$ -Funktion vorliegen. Für die  $\beta$ -Funktion liegt nach [5] eine 3-Loop-Auswertung vor und für die  $\gamma$ -Funktion werden die 2-Loop-Werte aus [33] herangezogen.

Für die folgende Fehlerrechnung bietet es sich an, obiges Verhältnis in ein Produkt zu zerlegen:

$$y := \frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi(2L_{\text{max}})} = A(\{\sigma_i(u_i)\}) \cdot B(u_5) \cdot D(u_5, \gamma, \beta) \quad (\text{B.10a})$$

mit

$$A(\{\sigma_i(u_i)\}) = \frac{\Phi(1/\mu)}{\Phi(2L_{\max})} = \frac{1}{\sigma_0(u_0)\sigma_1(u_1) \cdot \dots \cdot \sigma_5(u_5)} = \prod_{j=0}^5 \frac{1}{\sigma_j(u_j)}, \quad (\text{B.10b})$$

$$B(u_5) = [2b_0 u_5]^{-\gamma_0/2b_0}, \quad (\text{B.10c})$$

$$D(u_5, \gamma, \beta) = \exp \left\{ - \int_0^{\sqrt{u_5}} dg \left[ \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} - \frac{\gamma_0}{b_0 g} \right] \right\}, \quad (\text{B.10d})$$

für  $i = 0, \dots, 5$ . Damit ist die Abhängigkeit gegeben durch  $y = y(\{\sigma_i\}, \{u_i\}, \gamma, \beta)$ . Alle angegebenen Variablen sind fehlerbehaftet und tragen damit zur Unsicherheit von  $\Phi_{\text{RGI}}$  bei. Im allgemeinen wird der größte anzunehmende Fehler verwendet. Nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung ist

$$(\Delta y)^2 = \sum_{i=0}^5 \left( \frac{\partial y}{\partial \sigma_i} \right)^2 (\Delta \sigma_i)^2 + \sum_{i=0}^5 \left( \frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 (\Delta u_i)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right)^2 (\Delta \gamma)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 (\Delta \beta)^2. \quad (\text{B.11})$$

Es verbleiben aufgrund der Abhängigkeiten die Terme

$$\begin{aligned} (\Delta y)^2 &= (BD)^2 \sum_{i=0}^5 \left( \left( \frac{\partial A}{\partial \sigma_i} \right)^2 (\Delta \sigma_i)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial u_i} \right)^2 (\Delta u_i)^2 \right) + \\ &\quad + A^2 \left( \frac{\partial(BD)}{\partial u_5} \right)^2 (\Delta u_5)^2 + \\ &\quad + (AB)^2 \left( \left( \frac{\partial D}{\partial \gamma} \right)^2 (\Delta \gamma)^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial \beta} \right)^2 (\Delta \beta)^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{B.12a})$$

mit

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left( \prod_{j=0}^5 \frac{1}{\sigma_j} \right) = -\frac{1}{\sigma_i} \prod_{j=0}^5 \frac{1}{\sigma_j} = -\frac{A}{\sigma_i}, \quad (\text{B.12b})$$

$$\frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial A}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial u_i} = -\frac{A}{\sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial u_i}, \quad (\text{B.12c})$$

$$\frac{\partial(BD)}{\partial u_5} = \frac{\partial B}{\partial u_5} D + B \frac{\partial D}{\partial u_5}. \quad (\text{B.12d})$$

### B.5.1 Fehlerfortpflanzung bzgl. der $\{\sigma_i\}$ und $\{u_i\}$

Für die beiden Terme in (B.12d) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial u_5} &= \frac{\partial}{\partial u_5} \left( [2b_0 u_5]^{-\gamma_0/2b_0} \right) = -\gamma_0/2b_0 \cdot [2b_0 u_5]^{-1-\gamma_0/2b_0} \cdot 2b_0 \\ &= -\gamma_0 \cdot [2b_0 u_5]^{-1-\gamma_0/2b_0} = -\frac{\gamma_0}{2b_0} \frac{B}{u_5} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

bzw.

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial u_5} &= \frac{\partial}{\partial u_5} \left( \exp \left\{ - \int_0^{\sqrt{u_5}} dg f(g) \right\} \right) \quad \text{mit} \quad f(g) = \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} - \frac{\gamma_0}{b_0 g} \\ &= - \frac{\partial}{\partial u_5} \left( \int_0^{\sqrt{u_5}} dg f(g) \right) \cdot \exp \left\{ - \int_0^{\sqrt{u_5}} dg f(g) \right\}.\end{aligned}$$

Bezeichnet  $F(g)$  die Stammfunktion zu  $f(g)$ , so folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial u_5} &= - \frac{\partial}{\partial u_5} \left( F(\sqrt{u_5}) - F(0) \right) \cdot D = - \frac{\partial F(\sqrt{u_5})}{\partial u_5} \cdot D \\ &= - \frac{\partial F(\sqrt{u_5})}{\partial \sqrt{u_5}} \frac{\partial \sqrt{u_5}}{\partial u_5} \cdot D = - \frac{D}{2\sqrt{u_5}} \frac{\partial F(\sqrt{u_5})}{\partial \sqrt{u_5}} = - \frac{D \cdot f(\sqrt{u_5})}{2\sqrt{u_5}}.\end{aligned} \tag{B.14}$$

Setzt man die bisherigen Ergebnisse ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}(\Delta y)^2 &= (BD)^2 \sum_{i=0}^5 \left( \left( - \frac{A}{\sigma_i} \right)^2 (\Delta \sigma_i)^2 + \left( - \frac{A}{\sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial u_i} \right)^2 (\Delta u_i)^2 \right) + \\ &\quad + A^2 \left( - \frac{\gamma_0}{2b_0} \frac{B}{u_5} D - B \frac{D \cdot f(\sqrt{u_5})}{2\sqrt{u_5}} \right)^2 (\Delta u_5)^2 + \dots \\ &= (ABD)^2 \left( \sum_{i=0}^5 \left( \left( \frac{\Delta \sigma_i}{\sigma_i} \right)^2 + \left( \frac{\Delta u_i}{\sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial u_i} \right)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\gamma_0}{2b_0} \frac{1}{u_5} + \frac{f(\sqrt{u_5})}{2\sqrt{u_5}} \right)^2 (\Delta u_5)^2 \right) + \dots \dots\end{aligned} \tag{B.15}$$

### B.5.2 Fehlerfortpflanzung bzgl. $\gamma$ und $\beta$

Zur Bestimmung der beitragenden Unsicherheit aus der anomalen Dimension wird der Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \exp \left\{ - \int dg f(g; \gamma(g), \beta(g)) \right\} \right) \\ &= -D \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \int dg f(g; \gamma(g), \beta(g)) \right\}\end{aligned} \tag{B.16}$$

benötigt. Da  $\gamma$  hier kein fester Parameter ist, sondern im Integralkern als Funktion der Integrationsvariablen  $g$  auftritt, ist die partielle Ableitung durch die Variationsableitung zu ersetzen bzw. auszuführen. Dies macht nur Sinn, solange man auch eine vernünftige Schätzung für die Unsicherheit  $\Delta \gamma$  der Funktion  $\gamma(g)$  selbst angeben kann. Das Funktional

$$S[\gamma] = \int dg \left( \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} - \frac{\gamma_0}{b_0 g} \right) \tag{B.17a}$$

geht mit  $\gamma(g) \rightarrow \gamma(g) + \delta\gamma(g)$  über in

$$S[\gamma + \delta\gamma] = \int dg \left( \frac{\gamma(g) + \delta\gamma(g)}{\beta(g)} - \frac{\gamma_0}{b_0 g} \right), \quad (\text{B.17b})$$

womit

$$\delta S = S[\gamma + \delta\gamma] - S[\gamma] = \int dg \frac{\delta\gamma(g)}{\beta(g)} \quad (\text{B.17c})$$

folgt. Unter dem hier verwendeten perturbativen Ansatz  $\gamma(g) = -g^2(\gamma_0 + \gamma_1 g^2)$  für die anomale Dimension erhält man

$$\delta\gamma = \gamma(g; \gamma_1 + \delta\gamma_1) - \gamma(g; \gamma_1) = -g^4 \delta\gamma_1. \quad (\text{B.18})$$

Nun ist die Variation unabhängig von  $g$ , so dass

$$\delta S = -\delta\gamma_1 \int dg \frac{g^4}{\beta(g)}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial D}{\partial \gamma} = -D \frac{\delta S}{\delta \gamma} = D \int \frac{g^4}{\beta(g)} dg \cdot \frac{\delta\gamma_1}{\delta \gamma}, \quad (\text{B.19})$$

gilt. Interpretiert man die Variationen  $\delta$  als Fehler  $\Delta$  der entsprechenden Größen, so folgt schließlich

$$\left( \frac{\partial D}{\partial \gamma} \right)^2 (\Delta\gamma)^2 = \left( D \int \frac{g^4}{\beta(g)} dg \cdot \frac{\Delta\gamma_1}{\Delta\gamma} \right)^2 (\Delta\gamma)^2 = \left( D \int \frac{g^4}{\beta(g)} dg \right)^2 (\Delta\gamma_1)^2. \quad (\text{B.20})$$

Dieselbe Prozedur ist nun auch für  $\beta(g) = -g^3(b_0 + b_1 g^2 + b_2 g^4)$  durchzuführen. Offensichtlich ist  $\partial D / \partial \beta = -D \cdot \delta S / \delta \beta$  mit  $S$  wie oben und

$$\delta\beta = \beta(g; b_2 + \delta b_2) - \beta(g; b_2) = -g^7 \delta b_2. \quad (\text{B.21})$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \delta S &= D \int dg \left( \frac{\gamma(g)}{\beta(g) + \delta\beta(g)} - \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} \right) \\ &= D \int dg \left( \gamma(g) \cdot \frac{-\delta\beta(g)}{\beta(g)(\beta(g) + \delta\beta(g))} \right) \\ &= D \int dg \left( \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} \frac{g^7}{\beta(g) - g^7 \delta b_2} \right) \delta b_2, \end{aligned} \quad (\text{B.22a})$$

oder

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = -D \frac{\delta S}{\delta \beta} = -D \int \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} \frac{g^7}{\beta(g) - g^7 \delta b_2} dg \cdot \frac{\delta b_2}{\delta \beta}. \quad (\text{B.22b})$$

Schreibt man wieder die Variationen als Fehler, so folgt entsprechend

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial D}{\partial \beta}\right)^2 (\Delta \beta)^2 &= \left(D \int \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} \frac{g^7}{\beta(g) - g^7 \Delta b_2} dg \cdot \frac{\Delta b_2}{\Delta \beta}\right)^2 (\Delta \beta)^2 \\ &= \left(D \int \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} \frac{g^7}{\beta(g) - g^7 \Delta b_2} dg\right)^2 (\Delta b_2)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Damit ergibt sich die gesamte Unsicherheit der RGI zu

$$\begin{aligned} \left(\Delta \left[ \frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi(2L_{\text{max}})} \right]\right)^2 &= \left(\frac{\Phi_{\text{RGI}}}{\Phi(2L_{\text{max}})}\right)^2 \left( \sum_{i=0}^5 \left( \left(\frac{\Delta \sigma_i}{\sigma_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u_i}{\sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial u_i}\right)^2 \right) + \right. \\ &\quad + \left(\frac{\gamma_0}{2b_0} \frac{1}{u_5} + \frac{f(\sqrt{u_5})}{2\sqrt{u_5}}\right)^2 (\Delta u_5)^2 + \\ &\quad + \left(\int \frac{g^4}{\beta(g)} dg\right)^2 (\Delta \gamma_1)^2 + \\ &\quad \left. + \left(\int \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} \frac{g^7}{\beta(g) - g^7 \Delta b_2} dg\right)^2 (\Delta b_2)^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

d.h. der nicht-quadratierten großen Klammer entspricht das Quadrat der relativen Unsicherheit von  $\Phi_{\text{RGI}}/\Phi(2L_{\text{max}})$ .

### B.5.3 Die Unsicherheit von $\gamma_1$ und $b_2$

Nach (4.23) gilt grundsätzlich

$$\gamma_1 = \frac{1}{(4\pi)^2} \{x + y \cdot N_f\} \Big|_{N_f=2}$$

mit den fehlerbehafteten Größen  $x$  und  $y$ . Es folgt unmittelbar

$$\Delta \gamma_1 = \frac{1}{(4\pi)^2} \sqrt{(\Delta x)^2 + N_f^2 \cdot (\Delta y)^2} \Big|_{N_f=2} \approx 0.000126.$$

Nach [5] ist

$$b_2 \Big|_{N_f=2} = 0.064(10) \times (4\pi)^{-3} \quad \text{und somit} \quad \Delta b_2 \Big|_{N_f=2} \approx 5.039302 \cdot 10^{-6}. \quad (\text{B.25})$$



---

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei allen Personen bedanken, die in direkter oder indirekter Weise zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben. Ich bedanke mich

- zunächst bei meinen Eltern, Gunter Fritzsch und Steffi Fritzsch, die mich in allen Lebenslagen unterstützen und mir dieses Studium erst ermöglicht haben,
- bei Prof. Gernot Münster und Dr. Jochen Heitger für die interessante und aktuelle Aufgabenstellung und
- nochmals bei Jochen Heitger für die viele Geduld und Unterstützung, insbesondere auf der Zielgeraden,
- für die vom DESY zur Verfügung gestellte Rechenzeit auf den dortigen APEmille-Rechnern, und insbesondere bei Ines Wetzorke für den Zugang und die Hilfestellung beim Arbeiten mit den dynamischen Fermionkonfigurationen,
- Michele Della Morte für die Bereitstellung des Hauptprogramms zur Berechnung der Korrelationsfunktionen,
- Thomas Bauer und Björn Baumeier für die interessante Zeit während des Studiums,
- Melanie Müller und Henning Jürgens für die angenehme Arbeitsatmosphäre im Raum 410,
- bei Thomas Bauer, Dirk Homeier und Jochen Heitger für das sorgfältige Korrekturlesen dieser Arbeit.



## Literatur

Die Literaturangaben sind alphabetisch nach den Namen der Autoren sortiert. Bei mehreren Autoren wird nach dem ersten Autor sortiert. Die Online zur Verfügung stehenden Artikel sind vom deutschen e-Print-Archiv <http://xxx.uni-augsburg.de/> abrufbar.

- [1] **Alpha-Collaboration.**  
Konsortium von theoretischen Physikern die an Gitter-QCD und numerischen Simulationen interessiert sind, siehe Homepage: <http://www-zeuthen.desy.de/alpha/>.
- [2] **Aoki, S. and others.**  
Non-perturbative determination of  $c_{sw}$  in three-flavor dynamical QCD.  
*Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 119:433–435, 2003.  
(hep-lat/0211034).
- [3] **Bochicchio, M. and Maiani, L. and Martinelli, G. and Rossi, G.C. and Testa, M.**  
Chiral Symmetry on the Lattice with Wilson Fermions.  
*Nucl. Phys.*, B262:331, 1985.
- [4] **Bode, A. and others.**  
First results on the running coupling in QCD with two massless flavors.  
*Phys. Lett.*, B515:49–56, 2001.  
(hep-lat/0105003).
- [5] **Bode, A. and Weisz, P. and Wolff, U.**  
Two Loop Computation of the Schrödinger Functional in Lattice QCD.  
*Nucl. Phys.*, B576:517–539, 2000.  
(hep-lat/9911018).
- [6] **Capitani, S. and Lüscher, M. and Sommer, R. and Wittig, Hartmut.**  
Non-perturbative quark mass renormalization in quenched lattice QCD.  
*Nucl. Phys.*, B544:669–698, 1999.  
(hep-lat/9810063).
- [7] **Chaichian, M. and Nelipa, N.F.**  
Introduction to Gauge Field Theories.  
*Texts and Monographs in Physics: Berlin, Springer-Verlag 332 Seiten*, 1984.
- [8] **Cheng, T.P. and Li, L.F.**  
Gauge Theory of Elementary Particle Physics.  
*Oxford, UK: Clarendon 536p. (Oxford Science Publications)*, 1985.
- [9] **Collins, J.**  
Renormalization.  
*Cambridge, UK: University Press, 380 pages (Cambridge monographs on mathematical physics)*, 1984.
- [10] **Della Morte, M. and others.**  
Simulating the Schrödinger functional with two pseudo-fermions.  
*Comput. Phys. Commun.*, 156:62–72, 2003.  
(hep-lat/0307008).
- [11] **Della Morte, M. and others.**  
Computation of the Strong Coupling in QCD with two dynamical Flavours.  
*DESY-04-217, MS-TP-04-31, ..., Nov 2004. 34pp.*, 2004.

- (hep-lat/0411025).
- [12] **Della Morte, M. and others.**  
Lattice HQET with exponentially improved statistical precision.  
*Phys. Lett.*, B581:93–98, 2004.  
(hep-lat/0307021).
- [13] **Della Morte, M. and others.**  
Static quarks with improved statistical precision.  
*Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 129:346–348, 2004.  
(hep-lat/0309080).
- [14] **Della Morte, M. and Sommer, R. and Shindler, A.**  
Persönliche Mitteilungen, 2004.  
Veröffentlichung in Vorbereitung.
- [15] **Ebert, D.**  
Eichtheorien: Grundlage der Elementarteilchenphysik.  
*Weinheim, VCH Verlagsgesellschaft 203 Seiten (Akademie-Verlag Berlin)*, 1989.
- [16] **Eichten, E.**  
Heavy Quarks on the Lattice.  
*Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 4:170, 1988.
- [17] **Eichten, E. and Hill, B.**  
An Effective Field Theory for the Calculation of Matrix Elements Involving Heavy Quarks.  
*Phys. Lett.*, B234:511, 1990.
- [18] **Eichten, E. and Hill, B.**  
Static effective field theory:  $1/m$  corrections.  
*Phys. Lett.*, B243:427–431, 1990.
- [19] **Gupta, R.**  
Introduction to lattice QCD.  
Published in *Les Houches 1997, Probing the standard model of particle interactions, Pt. 2*,  
pages 83–219, 1997.  
(hep-lat/9807028).
- [20] **Hasenfratz, A. and Knechtli, F.**  
Flavor Symmetry and the Static Potential with Hypercubic Blocking.  
*Phys. Rev.*, D64:034504, 2001.  
(hep-lat/0103029).
- [21] **Hashimoto, S.**  
Computation of the heavy - light decay constant using nonrelativistic lattice QCD.  
*Phys. Rev.*, D50:4639–4648, 1994.  
(hep-lat/9403028).
- [22] **Heitger, J.**  
Persönliche Mitteilungen, 2004.
- [23] **Heitger, J. and Juttner, A. and Sommer, R. and Wennekers, J.**  
Non-perturbative tests of heavy quark effective theory.  
*JHEP*, 11:048, 2004.  
(hep-ph/0407227).

- 
- [24] **Heitger, J. and Kurth, M. and Sommer, R.**  
Non-perturbative determination of  $Z_A^{\text{stat}}$  in quenched QCD.  
*Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 119:607–609, 2003.  
(hep-lat/0209078).
- [25] **Heitger, J. and Kurth, M. and Sommer, R.**  
Non-perturbative renormalization of the static axial current in quenched QCD.  
*Nucl. Phys.*, B669:173–206, 2003.  
(hep-lat/0302019).
- [26] **Heitger, J. and Sommer, R.**  
A strategy to compute the b quark mass with non- perturbative accuracy.  
*Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 106:358–360, 2002.  
(hep-lat/0110016).
- [27] **Heitger, J. and Sommer, R.**  
Non-perturbative heavy quark effective theory.  
*JHEP*, 02:022, 2004.  
(hep-lat/0310035).
- [28] **Jansen, K. and Sommer, R.**  
O(alpha) improvement of lattice QCD with two flavors of Wilson quarks.  
*Nucl. Phys.*, B530:185–203, 1998.  
(hep-lat/9803017 v3).
- [29] **Knechtli, F. and others.**  
Running quark mass in two flavor QCD.  
*Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 119:320–322, 2003.  
(hep-lat/0209025).
- [30] **Knechtli, F. and others.**  
Simulating the Schrödinger functional with two pseudo- fermions: Algorithmic study and the running mass.  
*Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 129:814–816, 2004.  
(hep-lat/0309074).
- [31] **Kogut, J.B. and Susskind, L.**  
Hamiltonian Formulation of Wilson’s Lattice Gauge Theories.  
*Phys. Rev.*, D11:395, 1975.
- [32] **Kugo, T.**  
Eichtheorie.  
*Berlin, Springer-Verlag 522 Seiten*, 1997.
- [33] **Kurth, M. and Sommer, R.**  
Renormalization and  $O(a)$ -improvement of the static axial current.  
*Nucl. Phys.*, B597:488–518, 2001.  
(hep-lat/0007002).
- [34] **Kurth, M. and Sommer, R.**  
Heavy quark effective theory at one-loop order: An explicit example.  
*Nucl. Phys.*, B623:271–286, 2002.  
(hep-lat/0108018).
- [35] **Lüscher, M.**

- Advanced lattice QCD.  
Published in *Les Houches 1998, Probing the standard model of particle interactions, Pt. 2*,  
pages 229–280, 1998.  
(hep-lat/9802029).
- [36] **Lüscher, M.**  
Exact chiral symmetry on the lattice and the Ginsparg-Wilson relation.  
*Phys. Lett.*, B428:342–345, 1998.  
(hep-lat/9802011).
- [37] **Lüscher, M.**  
Chiral gauge theories revisited.  
Publ. in *Erice 2000, Theory and experiment heading for new physics*, pages 41–89, 2000.  
(hep-th/0102028).
- [38] **Lüscher, M. and Narayanan, R. and Weisz, P. and Wolff, Ulli.**  
The Schrödinger Functional: A Renormalizable Probe for Non-Abelian Gauge Theories.  
*Nucl. Phys.*, B384:168–228, 1992.  
(hep-lat/9207009).
- [39] **Lüscher, M. and Sint, S. and Sommer, R. and Weisz, P.**  
Chiral symmetry and  $O(a)$  improvement in lattice QCD.  
*Nucl. Phys.*, B478:365–400, 1996.  
(hep-lat/9605038).
- [40] **Lüscher, M. and Sint, S. and Sommer, R. and Weisz, P. and Wolff, U.**  
Non-perturbative  $O(a)$  improvement of lattice QCD.  
*Nucl. Phys.*, B491:323–343, 1997.  
(hep-lat/9609035).
- [41] **Lüscher, M. and Sint, S. and Sommer, R. and Wittig, H.**  
Non-perturbative determination of the axial current normalization constant in  $O(a)$  improved  
lattice QCD.  
*Nucl. Phys.*, B491:344–364, 1997.  
(hep-lat/9611015).
- [42] **Lüscher, M. and Sommer, R. and Weisz, P. and Wolff, U.**  
A Precise Determination of the Running Coupling in the  $SU(3)$  Yang-Mills Theory.  
*Nucl. Phys.*, B413:481–502, 1994.  
(hep-lat/9309005).
- [43] **Lüscher, M. and Weisz, P.**  
 $O(a)$  improvement of the axial current in lattice QCD to one-loop order of perturbation  
theory.  
*Nucl. Phys.*, B479:429–458, 1996.  
(hep-lat/9606016).
- [44] **Lüscher, M. and Weisz, P. and Wolff, U.**  
A Numerical Method to compute the Running Coupling in Asymptotically Free Theories.  
*Nucl. Phys.*, B359:221–243, 1991.
- [45] **Maiani, L. and Martinelli, G.**  
Current Algebra and Quark Masses from a Monte Carlo Simulation with Wilson Fermions.  
*Phys. Lett.*, B178:265, 1986.

- 
- [46] **Martinelli, G. and Pittori, C. and Sachrajda, Christopher T. and Testa, M. and Vladikas, A.**  
A General method for nonperturbative renormalization of lattice operators.  
*Nucl. Phys.*, B445:81–108, 1995.  
(hep-lat/9411010).
- [47] **McNeile, C and Michael, C.**  
**Searching for chiral logs in the static-light decay constant.**  
*JHEP*, 01:011, 2005.  
(hep-lat/0411014).
- [48] **Montvay, I. and Münster, G.**  
Quantum fields on a lattice.  
*Cambridge, UK: University Press, 491 pages (Cambridge monographs on mathematical physics)*, 1994.
- [49] **Morningstar, C.J. and Shigemitsu, J.**  
One-loop matching of lattice and continuum heavy-light axial vector currents using NRQCD.  
*Phys. Rev.*, D57:6741–6751, 1998.  
(hep-lat/9712016).
- [50] **Münster, G. and Walzl, M.**  
Lattice gauge theory: A short primer.  
Published in *Zuoz 2000, Phenomenology of gauge interactions*, pages 127–160, 2000.  
(hep-lat/0012005).
- [51] **Neubert, M.**  
Heavy quark masses, mixing angles, and spin flavor symmetry.  
Published in *Boulder 1993, Proc., The building blocks of creation*, pages 125–206, 1994.  
(hep-ph/9404296).
- [52] **Neubert, M.**  
B physics and CP violation.  
*Int. J. Mod. Phys.*, A11:4173–4240, 1996.  
(hep-ph/9604412).
- [53] **Parisi, G. and Petronzio, R. and Rapuano, F.**  
A Measurement of the String Tension near the Continuum Limit.  
*Phys. Lett.*, B128:418, 1983.
- [54] **Press, W.H. and Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T. and Flannery, B.P.**  
Numerical Recipes in FORTRAN - The Art of Scientific Computing, 2nd Ed.  
*Cambridge, USA: University Press, 963p*, 1992.
- [55] **Ryder, L. H.**  
Quantum Field Theory.  
*Cambridge, UK: Univ. Press (1985) 443p*, 1985.
- [56] **Sheikholeslami, B. and Wohlert, R.**  
Improved Continuum Limit Lattice Action for QCD with Wilson Fermions.  
*Nucl. Phys.*, B259:572, 1985.
- [57] **Sint, S.**  
On the Schrödinger Functional in QCD.  
*Nucl. Phys.*, B421:135–158, 1994.  
(hep-lat/9312079).

- [58] **Sint, S.**  
 One Loop Renormalization of the QCD Schrödinger Functional.  
*Nucl. Phys.*, B451:416–444, 1995.  
 (hep-lat/9504005).
- [59] **Sint, S. and Sommer, R.**  
 The Running coupling from the QCD Schrödinger Functional: A One loop analysis.  
*Nucl. Phys.*, B465:71–98, 1996.  
 (hep-lat/9508012).
- [60] **Smit, J.**  
 Introduction to Quantum Fields on a Lattice.  
*Cambridge Lect. Notes Phys. 15, 271p.*, 2002.
- [61] **Sommer, R.**  
 Fermionic Correlation Functions in the SF.  
*CERN (unveröffentlicht)*, 1995.
- [62] **Sommer, R.**  
 Non-perturbative renormalization of HQET and QCD.  
*Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 119:185–197, 2003.  
 (physics/0209162).
- [63] **Sommer, R.**  
 Non-perturbative Renormalization of QCD.  
 In *Computing Particle Properties*, Proceedings, Schladming, Austria 1997.  
 (hep-ph/9711243).
- [64] **Sommer, R. and Wittig, H.**  
 Fundamental parameters of QCD.  
*DESY-02-030*, 13pp., 2002.  
 (physics/0204015).
- [65] **Symanzik, K.**  
 Cutoff Dependence in Lattice  $\phi^4$  in four-dimensions Theory.  
 DESY 79/76.
- [66] **Symanzik, K.**  
 Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories. 1. Principles and  $\phi^4$ -Theory.  
*Nucl. Phys.*, B226:187, 1983.
- [67] **Symanzik, K.**  
 Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories. 2.  $O(n)$  Nonlinear Sigma Model  
 in Perturbation Theory.  
*Nucl. Phys.*, B226:205, 1983.
- [68] **Wennekers, J.**  
 Nicht-perturbative Untersuchungen an einem System von leichten und schweren Quarks in  
 kleinem Volumen.  
*Institut für Theoretische Physik (ITP), Universität Münster*, 2003.  
 Diplomarbeit.
- [69] **Wilson, K.G.**  
 Confinement of Quarks.  
*Phys. Rev.*, D10:2445–2459, 1974.



[70] **Wilson, K.G.**

The origins of lattice gauge theory.

*Anniversary Talk on 'Confinement of Quarks' (LATTICE 2004)*, 2004.

(hep-lat/0412043).



## **Selbstständigkeitserklärung**

HIERMIT VERSICHERE ICH, DIESE DIPLOMARBEIT SELBSTSTÄNDIG ANGEFERTIGT UND KEINE ALS DIE ANGEgebenEN HILFSMITTEL VERWENDET ZU HABEN.

PATRICK FRITZSCH  
MÜNSTER, 09. FEBRUAR 2005