Bachelorarbeit

Äquivalenz von quasi-exakt lösbaren quantenmechanischen Potentialen

Equivalence of quasi-exactly solvable quantum mechanical potentials

Verfasser: Tobias Felkl

Betreuer und Erstgutachter: Prof. Dr. Gernot Münster

Zweitgutachter: Priv.-Doz. Dr. Jochen Heitger

Institut für Theoretische Physik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Münster, 11. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Thema der vorliegenden Bachelorarbeit sind quasi-exakt lösbare Potentiale, die sich dadurch auszeichnen, dass nur endlich viele Energieeigenfunktionen mit den zugehörigen Energieeigenwerten auf analytischem oder algebraischem Weg bestimmt werden können. Damit unterscheiden sie sich von exakt lösbaren Systemen wie dem harmonischen Oszillator oder dem Wasserstoffatom, bei denen sich das gesamte Spektrum und damit beliebig viele Lösungen der Schrödinger-Gleichung auffinden lassen.[1]
Begonnen wird mit so genannten Quasi-Eichtransformationen, durch welche der Hamilton-Operator der allgemeinen zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung eine Form erhält, welche derjenigen ähnelt, die bei quasi-exakter Lösbarkeit auftritt. Gruppentheoretisch sind die eingehenden Differentialoperatoren eine Darstellung der Generatoren der Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$. Schließlich ergibt sich die Notwendigkeit einer Koordinatentransformation für den Hamilton-Operator.
In den der Bachelorarbeit zugrunde liegenden Arbeiten von M. A. Shifman und A. González-López et al. ist jeweils ein Katalog quasi-exakt lösbarer Potentiale aufgeführt. Interessant ist dabei, dass sich die beiden Kataloge vordergründig nicht genau entsprechen, obwohl sicherlich beide mit dem Anspruch auf Vollständigkeit entstanden sind. Es wird daher im nächsten, zentralen Teil der Bachelorarbeit versucht, diese Potentiale ineinander zu überführen bzw. als Spezialfälle voneinander zu identifizieren, um auftretende Diskrepanzen aufzulösen. Zu diesem Zweck wird jeweils der Rechenweg nachvollzogen, der von den eingehenden Polynomen, die sich aus den Generatoren ergeben, zum Ausdruck für das Potential führt.
Der letzte Teil der Bachelorarbeit erhält eine Untersuchung zu den so genannten Möbius-Transformationen. Nach einer Überprüfung, dass diese die Axiome einer nicht-abelschen Gruppe erfüllen, wird anhand eines exponentiellen Potentials beispielhaft nachgerechnet, dass die Gestalt quasi-exakt lösbarer Potentiale unter Möbius-Transformationen erhalten bleibt.

[1] [Shi 99], S. 778-782

2 Theoretische Vorarbeit

2.1 Quasi-Eichtransformationen

Die allgemeine zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung lautet in der Ortsdarstellung

$$H\psi(x) = E\psi(x) \tag{1}$$

mit der ortsabhängigen Wellenfunktion $\psi(x)$, dem Energieeigenwert E und dem Hamilton-Operator H, der für ein gegebenes Potential $V(x)$ die Gestalt

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

hat, wobei aus Gründen der Einfachheit $\hbar = m = 1$ gesetzt wurde.[2] Im Folgenden wird das Konzept der *Quasi-Eichtransformationen* erläutert, mit denen der Hamilton-Operator in eine Form gebracht wird, an der man die Bedingungen für quasi-exakte Lösbarkeit unmittelbar ablesen kann.
Die Schrödinger-Gleichung ist invariant unter der „globalen" Transformation

$$\psi(x) \to \psi(x)e^{i\alpha},$$

mit einer reellen Konstante α, d.h. die „globale" Phase der Wellenfunktion ist unbestimmt. Unter der unitären Standard-Eichtransformation

$$\psi(x) \to \psi(x) = \hat{\psi}(x)e^{i\alpha(x)}$$

mit der von x abhängigen Funktion α ist die Schrödinger-Gleichung nicht invariant, aber zur Gleichung

$$\left(-\frac{1}{2}\Big(\frac{d}{dx} + iA(x)\Big)^2 + V(x)\right)\hat{\psi}(x) = E\hat{\psi}(x) \tag{2}$$

mit $A(x) = \frac{d\alpha(x)}{dx} = \alpha'(x)$ äquivalent.[3] Hierauf wird man durch Einsetzen der eichtransformierten Wellenfunktion in Gleichung 1 geführt, wie im Folgenden durch Ausrechnen der zweifachen Ableitung nach x verdeutlicht wird. Dabei gilt $\alpha''(x) = \frac{d^2\alpha(x)}{dx^2}$, $\hat{\psi}'(x) = \frac{d\hat{\psi}(x)}{dx}$ und $\hat{\psi}''(x) = \frac{d^2\hat{\psi}(x)}{dx^2}$.

[2] In dieser Bachelorarbeit wird nur eindimensionale Quantenmechanik diskutiert. Die Betrachtung in höherdimensionalen Räumen ist sehr viel komplizierter; vgl. [Gon 91], S. 6-10.

[3] [Shi 99], S. 784-785

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}\Big(\hat{\psi}(x)e^{i\alpha(x)}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\big(\hat{\psi}'(x) + i\alpha'(x)\hat{\psi}(x)\big)e^{i\alpha(x)}\Big) \\
= \; & \Big(\hat{\psi}''(x) + i\alpha''(x)\hat{\psi}(x) + i\alpha'(x)\hat{\psi}'(x)) + i\alpha'(x)\hat{\psi}'(x) - \big(\alpha'(x)\big)^2\hat{\psi}(x)\Big)\, e^{i\alpha(x)} \\
= \; & \Big(\hat{\psi}''(x) + iA'(x)\hat{\psi}(x) + 2iA(x)\hat{\psi}'(x) - A^2(x)\hat{\psi}(x)\Big)e^{i\alpha(x)} \\
= \; & \left(\frac{d^2}{dx^2}\hat{\psi}(x) + i\frac{d}{dx}\Big(A(x)\hat{\psi}(x)\Big) + iA(x)\frac{d}{dx}\hat{\psi}(x) - A^2(x)\hat{\psi}(x)\right) e^{i\alpha(x)} \\
= \; & \left(\Big(\frac{d}{dx} + iA(x)\Big)\Big(\frac{d}{dx} + iA(x)\Big)\hat{\psi}(x)\right) e^{i\alpha(x)} = \left(\Big(\frac{d}{dx} + iA(x)\Big)^2\hat{\psi}(x)\right) e^{i\alpha(x)}
\end{aligned}
$$

Die Unitarität der Transformation geht im Fall eines imaginären Anteils von $\alpha(x)$ verloren, da sich das asymptotische Verhalten der Wahrscheinlichkeitsdichte und damit auch die Rand- und Normierbarkeitsbedingungen ändern; die Äquivalenz der Gleichungen 1 und 2 bleibt jedoch erhalten. Im Folgenden wird der Fall einer rein imaginären Funktion $\alpha(x) = ia(x)$ mit einer reellen Funktion $a(x)$ diskutiert, die Wellenfunktion transformiert sich dann wie

$$\psi(x) \to \psi(x) = \hat{\psi}(x)e^{-a(x)}, \tag{3}$$

der Hamilton-Operator aus Gleichung 2 geht in

$$H_{\text{„G“}}(x) = -\frac{1}{2}\Big(\frac{d}{dx} - A(x)\Big)^2 + V(x)$$

mit $A(x) = \frac{da(x)}{dx}$ über. Die Anführungsstriche im Index von H sollen verdeutlichen, dass es sich aufgrund der Nichtunitarität nur um eine „Quasi“-Eichtransformation handelt (*engl.*: quasi-gauge).[4] Mit der Transformationsvorschrift 3 lässt sich leicht ein exponentieller Abfall der Wahrscheinlichkeitsdichte für große $|x|$ und damit die Normierbarkeit gewährleisten. Offenbar muss $a(x)$ sowohl für $x \to \infty$ als auch für $x \to -\infty$ sehr große positive Werte annehmen. Aus $\alpha(x) = ia(x)$ ergibt sich die Ersetzung $A(x) \to iA(x)$, womit der Klammerausdruck der obigen Rechnung folgende Gestalt erhält:

$$\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx}A(x) - 2A(x)\frac{d}{dx} + A^2(x)$$

Für den Hamilton-Operator liefert dies den allgemeinen Ausdruck

$$H_{\text{„G“}}(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + A(x)\frac{d}{dx} + \underbrace{V(x) + \frac{1}{2}A'(x) - \frac{1}{2}A^2(x)}_{:=\Delta V(x)} \tag{4}$$

mit $A'(x) = \frac{dA(x)}{dx}$,[5] der sich vor allem aufgrund des Auftretens der einfachen Ableitung nach x von der gewöhnlichen Form unterscheidet und damit dem

[4] [Shi 99], S. 785-786
[5] [Shi 99], S. 789

allgemeinen Ausdruck eines quasi-exakt lösbaren Hamilton-Operators bereits recht ähnlich ist, wie im übernächsten Unterkapitel deutlich werden wird.

2.2 Gruppentheoretischer Hintergund

In diesem Unterkapitel wird verdeutlicht, was quasi-exakte Lösbarkeit mit dem Konzept einer Lie-Algebra und der Darstellung von Generatoren als Differentialoperatoren zu tun hat, um dann schließlich den Zusammenhang mit den zuvor angestellten Überlegungen herstellen zu können.
Wesentlich für eine *Lie-Algebra* $\big(V, [\cdot,\cdot]\big)$ über einem Vektorraum V ist die Existenz einer *Lie-Klammer* $[\cdot,\cdot] : V \times V \longmapsto V$, d.h. einer Abbildung, die folgende Eigenschaften aufweist:[6]

- Sie ist bilinear: $\big[\sum_i k_i v_i, w\big] = \sum_i k_i \big[v_i, w\big],\ \big[w, \sum_i k_i v_i\big] = \sum_i k_i \big[w, v_i\big]$ $\forall k_i \in \mathbb{K}, v_i, w \in V$
- Sie ist schiefsymmetrisch: $[v, w] = -[w, v] \quad \forall v, w \in V$
- Sie erfüllt die Jacobi-Identität: $\big[[u, v], w\big] = \big[[w, u], v\big] = \big[[v, w], u\big]$ $\forall u, v, w \in V$

Unter einer *Darstellung* $\rho : G \mapsto \mathrm{End}(V)$ einer Gruppe G versteht man eine Abbildung der Elemente $g \in G$ in die Endomorphismen über einem Darstellungsraum V. Bei V handelt es sich typischerweise um einen reellen oder komplexen Vektorraum. Ist V endlich-dimensional, so sind diese Endomorphismen gerade die linearen Abbildungen über V.[7]
Werden r linear unabhängige Differentialoperatoren

$$T^a = \xi^a(x)\frac{d}{dx} + \eta^a(x), \quad a = 1, ..., r$$

erster Ordnung betrachtet, deren Koeffizienten ξ^a und η^a glatte Funktionen von x sind, so spannen diese eine endlich-dimensionale Lie-Algebra auf. Die Lie-Klammer ist in diesem Fall der Kommutator zweier Differentialoperatoren, der wieder auf eine Linearkombination von Differentialoperatoren führt. Ein Differentialoperator zweiter Ordnung heißt *Lie-algebraisch*, wenn er als quadratische Kombination von Differentialoperatoren erster Ordnung geschrieben werden kann:

$$H = \sum_{a,b} C_{ab} T^a T^b + \sum_a C_a T^a + C_0$$

Hierbei sind C_{ab}, C_a und C_0 reelle Konstanten. Eine von Differentialoperatoren erster Ordnung aufgespannte Lie-Algebra heißt *quasi-exakt lösbar*, wenn sie einen endlich-dimensionalen Darstellungsraum glatter Funktionen besitzt, d.h. dass die Anwendung eines der Differentialoperatoren, welche die Lie-Algebra

[6] [Fis 06], S. 249
[7] [Mod 11], S. 320

aufspannen, auf eine Funktion aus dem Darstellungsraum wieder eine Funktion aus dem Darstellungsraum ergibt. Dementsprechend gilt für einen quasi-exakt lösbaren Differentialoperator zweiter Ordnung, dass er als quadratische Kombination von Differentialoperatoren erster Ordnung, die eine quasi-exakt lösbare Lie-Algebra aufspannen, geschrieben werden kann.[8]
Besagte Differentialoperatoren haben als Darstellung der Generatoren der Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$, d.h. der Gruppe der 2×2-Matrizen mit reellen Koeffizienten und Determinante 1, folgende Gestalt:[9]

$$T^+ = 2j\xi - \xi^2 \frac{d}{d\xi} \qquad T^0 = -j + \xi \frac{d}{d\xi} \qquad T^- = \frac{d}{d\xi}$$

Im Folgenden wird unter Verwendung einer Testfunktion $f(\xi)$ explizit gezeigt, dass diese Differentialoperatoren die Kommutatorrelationen

$$[T^+, T^-] = 2T^0 \quad \text{und} \quad [T^\pm, T^0] = \mp T^\pm$$

erfüllen. Dabei gilt $\frac{df(\xi)}{d\xi} = f'(\xi)$ und $\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} = f''(\xi)$.

$$\begin{aligned}
[T^+, T^-]f(\xi) &= (T^+T^- - T^-T^+)f(\xi) \\
&= \left(\Big(2j\xi - \xi^2 \frac{d}{d\xi}\Big)\frac{d}{d\xi} - \frac{d}{d\xi}\Big(2j\xi - \xi^2 \frac{d}{d\xi}\Big)\right)f(\xi) \\
&= 2j\xi \frac{d}{d\xi}f(\xi) - \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2}f(\xi) - 2j\frac{d}{d\xi}\Big(\xi f(\xi)\Big) + \frac{d}{d\xi}\Big(\xi^2 \frac{d}{d\xi}f(\xi)\Big) \\
&= 2j\xi f'(\xi) - \xi^2 f''(\xi) - 2jf(\xi) - 2j\xi f'(\xi) + 2\xi f'(\xi) + \xi^2 f''(\xi) \\
&= 2\Big(-j + \xi \frac{d}{d\xi}\Big)f(\xi) = 2T^0 f(\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T^+, T^0]f(\xi) &= (T^+T^0 - T^0T^+)f(\xi) \\
&= \left(\Big(2j\xi - \xi^2 \frac{d}{d\xi}\Big)\Big(-j + \xi\frac{d}{d\xi}\Big) - \Big(-j + \xi\frac{d}{d\xi}\Big)\Big(2j\xi - \xi^2 \frac{d}{d\xi}\Big)\right)f(\xi) \\
&= -2j^2\xi f(\xi) + 2j\xi^2 \frac{d}{d\xi}f(\xi) + j\xi^2\frac{d}{d\xi}f(\xi) - \xi^2\frac{d}{d\xi}\Big(\xi\frac{d}{d\xi}f(\xi)\Big) \\
&\quad +2j^2\xi f(\xi) - j\xi^2\frac{d}{d\xi}f(\xi) - 2j\xi\frac{d}{d\xi}\Big(\xi f(\xi)\Big) + \xi\frac{d}{d\xi}\Big(\xi^2\frac{d}{d\xi}f(\xi)\Big) \\
&= -2j^2\xi f(\xi) + 2j\xi^2 f'(\xi) + j\xi^2 f'(\xi) - \xi^2 f'(\xi) - \xi^3 f''(\xi) \\
&\quad +2j^2\xi f(\xi) - j\xi^2 f'(\xi) - 2j\xi f(\xi) - 2j\xi^2 f'(\xi) + 2\xi^2 f'(\xi) + \xi^3 f''(\xi) \\
&= -\Big(2j\xi - \xi^2\frac{d}{d\xi}\Big)f(\xi) = -T^+ f(\xi)
\end{aligned}$$

[8] [Gon 91], S. 3

[9] Dies entspricht der Darstellung bei Shifman. Der Differentialoperator T^+ bei González-López et al. geht durch Vertauschung des Vorzeichens aus dem Differentialoperator T^+ bei Shifman hervor; vgl. [Gon 91], S. 10.

$$
\begin{aligned}
[T^-, T^0]f(\xi) &= (T^-T^0 - T^0T^+)f(\xi) \\
&= \left(\frac{d}{d\xi}\Big(-j+\xi\frac{d}{d\xi}\Big) - \Big(-j+\xi\frac{d}{d\xi}\Big)\frac{d}{d\xi}\right)f(\xi) \\
&= -j\frac{d}{d\xi}f(\xi) + \frac{d}{d\xi}\Big(\xi\frac{d}{d\xi}f(\xi)\Big) + j\frac{d}{d\xi}f(\xi) - \xi\frac{d^2}{d\xi^2}f(\xi) \\
&= -jf'(\xi) + f'(\xi) + \xi f''(\xi) + jf'(\xi) - \xi f''(\xi) \\
&= \frac{d}{d\xi}f(\xi) = T^-f(\xi)
\end{aligned}
$$

Der entsprechende endlich-dimensionale Darstellungsraum der $SL(2,\mathbb{R})$ ist ein Raum von Polynomen mit der Basis

$$
R_j = \{\xi^0, \xi^1, ..., \xi^{2j}\},
$$

wobei j einen festen halbzahligen, nichtnegativen Wert hat.[10] Die Eigenfunktionen zu H sind Elemente des Darstellungsraums oder einer beliebigen Menge eines dazu orthogonalen Raums.[11] $\psi(\xi)$ ist also ein Polynom in ξ vom Grad von höchstens $2j$. Die Anzahl algebraisch bestimmbarer Eigenwerte und Eigenfunktionen entspricht der Dimension des Darstellungsraums.[12] Mit Wahl des Parameters j ist diese somit auf $2j+1$ festgelegt.

2.3 Konstruktion quasi-exakt lösbarer Potentiale

Es muss nun eine Quasi-Eichtransformation gefunden werden, so dass sich der Hamilton-Operator als

$$
H_{\text{„G“}} = \sum_{a,b=\pm,0} C_{ab}T^aT^b + \sum_{a=\pm,0} C_aT^a + C_0
$$

schreiben lässt.[13] Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Koeffizienten C_{ab} symmetrisch gewählt werden, d.h. $C_{ab} = C_{ba}$. Einsetzen der Generatoren führt auf

$$
H_{\text{„G“}}(\xi) = -\frac{1}{2}P_4(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2} + P_3(\xi)\frac{d}{d\xi} + P_2(\xi), \tag{5}
$$

wobei die Koeffizienten C_{ab} und C_a in die Polynome $P_n(\xi)$ in ξ vom Grad von höchstens n eingehen. Ein Vergleich mit dem allgemeinen Ausdruck

$$
H_{\text{„G“}}(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + A(x)\frac{d}{dx} + \underbrace{V(x) + \frac{1}{2}A'(x) - \frac{1}{2}A^2(x)}_{=\Delta V(x)} \tag{6}
$$

[10] [Shi 99], S. 787-788
[11] [Shi 99], S. 783-784
[12] [Gon 91], S. 4
[13] [Shi 99], S. 788

für den quasi-eichtransformierten Hamilton-Operator ergibt, dass das Polynom $P_4(\xi)$ eliminiert werden muss, was mittels der Transformation

$$\xi \longmapsto x(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{P_4(\xi)}} \tag{7}$$

gelingt, denn es gilt offenbar

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi}\frac{d}{dx} = \frac{1}{\sqrt{P_4(\xi)}}\frac{d}{dx}$$

und

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{P_4(\xi)}}\frac{d}{dx}\right) = -\frac{1}{2}\frac{P_4'(\xi)}{\sqrt{P_4^3(\xi)}}\frac{d}{dx} + \frac{1}{P_4(\xi)}\frac{d^2}{dx^2}$$

mit $P_4'(\xi) = \frac{dP_4(\xi)}{d\xi}$. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} H_{\text{„G“}}(x) &= -\frac{1}{2}P_4\big(\xi(x)\big)\left(-\frac{1}{2}\frac{P_4'\big(\xi(x)\big)}{\sqrt{P_4^3\big(\xi(x)\big)}}\frac{d}{dx} + \frac{1}{P_4\big(\xi(x)\big)}\frac{d^2}{dx^2}\right) \\ &\quad + \frac{P_3\big(\xi(x)\big)}{\sqrt{P_4\big(\xi(x)\big)}}\frac{d}{dx} + P_2\big(\xi(x)\big) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\frac{P_4'\left(\xi(x)\right)}{4} + P_3\big(\xi(x)\big)}{\sqrt{P_4\big(\xi(x)\big)}}\frac{d}{dx} + P_2\big(\xi(x)\big) \end{aligned}$$

für den Hamilton-Operator. Da die Polynome P_n und ihre Ableitungen nun von x statt von ξ abhängen sollen, muss Gleichung 7 nach $\xi = \xi(x)$ aufgelöst werden. Dies kann allerdings schwer durchzuführen sein, da es sich auf der rechten Seite der Gleichung im Allgemeinen um eine elliptische Funktion handelt. Ein Vergleich mit Ausdruck 6 liefert:

$$\begin{aligned} A(x) &= \left.\frac{\frac{P_4'(\xi)}{4} + P_3(\xi)}{\sqrt{P_4(\xi)}}\right|_{\xi=\xi(x)} \\ a(x) &= \int A(x)dx = \int \left.\frac{\frac{P_4'(\xi)}{4} + P_3(\xi)}{P_4(\xi)}d\xi\right|_{\xi=\xi(x)} \\ \Delta V(x) &= P_2(\xi)\big|_{\xi=\xi(x)} \\ V(x) &= \Delta V(x) + \frac{1}{2}A^2(x) - \frac{1}{2}A'(x) \end{aligned}$$

Mit $A(x)$ und $\Delta V(x)$ ergibt sich $V(x)$ und damit der entsprechende quasi-exakt lösbare Hamilton-Operator, der das Auffinden von $2j+1$ Energieeigenfunktionen und -werten auf algebraischem Wege zulässt.[14] Zu beachten ist, dass beim Ermitteln von $A(x)$ vor dem Einsetzen von $\xi(x)$ zunächst die Differentiation von $P_4(\xi)$ ausgeführt werden muss.

2.4 Exakte Lösbarkeit

Wenn der Ausdruck für $H_{\text{„G“}}$ unabhängig von j ist, liegt exakte Lösbarkeit vor, da sich in diesem Fall Darstellungsräume von beliebiger Dimension und damit bei gegebener Normierbarkeit beliebig viele Energieeigenwerte und -funktionen auf algebraischem Weg auffinden lassen.[15] Für die j-Unabhängigkeit von $H_{\text{„G“}}$ lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen an die Koeffizienten C_{ab} und C_a formulieren, welche in die Polynome P_n eingehen. Der Hamilton-Operator reduziert sich dann zu

$$H_{\text{„G“}} = -\frac{1}{2}Q_2(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2} + Q_1(\xi)\frac{d}{d\xi}$$

mit den Polynomen Q_n vom Grad n. Eine Variablensubstitution wie mit der Formel 7 lässt sich auch hier durchführen und führt auf die entsprechenden Ausdrücke für $x(\xi)$ und $A(x)$. Durch geeignete Variation der in die Polynome eingehenden Koeffizienten ergeben sich verschiedene exakt lösbare Systeme.[16]

[14] [Shi 99], S. 802-804
[15] [Gon 91], S. 15
[16] [Shi 99], S. 804-805

3 Betrachtung konkreter Fälle

Jede beliebige Wahl der Koeffizienten C_{ab} und C_a für die Polynome $P_n(\xi)$ führt auf ein quasi-exakt lösbares Potential, die jeweilige assoziierte Wellenfunktion ist jedoch nicht notwendig normierbar.[17] Die im Folgenden behandelten Fälle sind alle zumindest eingeschränkt normierbar und der allgemeine Fall elliptischer Funktionen reduziert sich hier dahingehend, dass die Transformation 7 mittels elementarer Funktionen geschieht.
In [Shi 99] ist ein Katalog der folgenden quasi-exakt lösbaren Potentiale aufgeführt:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Exponentielles Potential:} & V(x) & = & \frac{1}{2}\big(ae^{x}+(b-2j)\big)^2+\frac{1}{2}\big(ce^{-x}+(b+1)\big)^2 \\ \text{Hyperbolische Potentiale:} & V(x) & = & \frac{a^2}{2}\sinh^2 x - a\left(2j+\frac{1}{2}\right)\cosh x \\ & V(x) & = & \frac{a^2}{2}\cosh^4 x - \frac{a}{2}(a+4j+2)\cosh^2 x \end{array}$$

Darüber hinaus werden noch das polynomiale Potential

$$V(x)=\frac{\nu^2}{8}x^6+\frac{\mu\nu}{4}x^4+\left(\frac{\mu^2}{8}-2\nu\left(j+\frac{3}{8}\right)\right)x^2$$

und das periodische Potential

$$V(x)=\frac{a^2}{2}\cos^2 x + a\left(2j+\frac{1}{2}\right)\sin x$$

sowie der allgemeine Fall quasi-exakt lösbarer Potentiale in Form elliptischer Funktionen diskutiert.[18] Diese sind jedoch nicht Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen. Der Katalog quasi-exakt lösbarer Potentiale bei González-López et al. umfasst folgende Fälle:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Exponentielles Potential:} & V(x) & = & Ae^{2\sqrt{\nu}x}+Be^{\sqrt{\nu}x}+Ce^{-\sqrt{\nu}x}+De^{-2\sqrt{\nu}x} \\ \text{Hyperbolische Potentiale:} & V(x) & = & A\sinh^2(\sqrt{\nu}x)+B\sinh(\sqrt{\nu}x) \\ & & & +C\tanh(\sqrt{\nu}x)\,\mathrm{sech}(\sqrt{\nu}x)+D\,\mathrm{sech}^2(\sqrt{\nu}x) \\ & V(x) & = & A\cosh^2(\sqrt{\nu}x)+B\cosh(\sqrt{\nu}x) \\ & & & +C\coth(\sqrt{\nu}x)\,\mathrm{csch}(\sqrt{\nu}x)+D\,\mathrm{csch}^2(\sqrt{\nu}x) \end{array}$$

Desweiteren werden noch die beiden polynomialen Potentiale

$$V(x)=Ax^6+Bx^4+Cx^2+\frac{D}{x^2}$$

[17] [Shi 99], S. 804
[18] [Shi 99], S. 790, 806-807

und

$$V(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$$

aufgeführt. Das zweite hyperbolische Potential hat im Fall $C + D \neq 0$ eine Singularität bei $x = 0$, das erste polynomiale Potential im Fall $D \neq 0$. Die periodischen Potentiale werden gesondert behandelt.[19]
Bei den nachfolgenden Betrachtungen wird von der Substitution $sx = y$ Gebrauch gemacht werden, wobei s eine reelle Konstante ist; somit wird nur die reelle Achse reskaliert, das physikalische Problem jedoch nicht wesentlich verändert. Zu beachten ist, dass sich dabei der gesamte Hamilton-Operator transformiert. Mit

$$\frac{d^2}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\right)^2 = \left(s\frac{d}{dy}\right)^2 = s^2\frac{d^2}{dy^2}$$

wird man von $H(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ auf

$$H\left(\frac{y}{s}\right) = -\frac{s^2}{2}\frac{d^2}{dy^2} + V\left(\frac{y}{s}\right) = s^2\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{s^2}V\left(\frac{y}{s}\right)\right) \tag{8}$$

geführt. Eine weitere gebräuchliche Transformation ist das Hinzufügen additiver Konstanten, die nur für eine entsprechende Verschiebung des Energiespektrums sorgen und somit unmittelbar in die Eigenwerte eingehen können. Folglich sind sie beim jeweils nächsten Rechenschritt nicht mehr von Bedeutung und werden mitunter weggelassen. Zudem kann der Hamilton-Operator natürlich mit einem konstanten Faktor multipliziert werden, da dies nichts an der Normierbarkeit der Wellenfunktion ändert und sich einfach in einer Multiplikation des Energiespektrums mit diesem Faktor äußert.
Die bei der unbestimmten Integration auftretende Konstante wird der Einfachheit halber stets weggelassen. Bei den auftretenden lateinischen Buchstaben handelt es sich um reelle, numerische Koeffizienten.

3.1 Exponentielles Potential

Werden die Koeffizienten so gewählt, dass die Polynome die Gestalt

- $P_4(\xi) = \xi^2$
- $P_3(\xi) = a\xi^2 + b\xi + c$
- $P_2(\xi) = -2aj\xi$

haben,[20] so ergibt sich für die Koordinatentransformation zunächst

$$x(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{P_4(\xi)}} = \int \frac{d\xi}{\xi} = \ln \xi,$$

[19] [Gon 91], S. 15
[20] [Shi 99], S. 806

was durch Exponentieren auf die Variable $\xi(x) = e^x$ führt. Desweiteren erhält man $P_4'(\xi) = 2\xi$ und damit

$$A(x) = \frac{\frac{2e^x}{4} + ae^{2x} + be^x + c}{\sqrt{e^{2x}}} = ae^x + \frac{1}{2} + b + ce^{-x}.$$

Das Auffinden der Phase mittels Integration gelingt sehr leicht und liefert:

$$a(x) = ae^x + \Big(\frac{1}{2} + b\Big)x - ce^{-x}$$

Es sei angemerkt, dass hier im Hinblick auf die Normierbarkeit der Wellenfunktion $a > 0$ und $c < 0$ gefordert werden sollte. $\Delta V(x) = -2aje^x$ und $A'(x) = ae^x - ce^{-x}$ liefern das Potential:

$$\begin{aligned}
V(x) &= -2aje^x + \frac{1}{2}\Big(ae^x + \frac{1}{2} + b + ce^{-x}\Big)^2 - \frac{1}{2}(ae^x - ce^{-x}) \\
&= -2aje^x - \frac{a}{2}e^x + \frac{c}{2}e^{-x} \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(a^2e^{2x} + ae^x + 2abe^x + \frac{1}{4} + b + b^2 + 2ac + ce^{-x} + 2bce^{-x} + c^2e^{-2x}\Big) \\
&= \frac{a^2}{2}e^{2x} + abe^x - 2aje^x + \frac{b^2}{2} - 2jb + 2j^2 + \frac{c^2}{2}e^{-2x} + bce^{-x} \\
&\quad + \frac{c}{2}e^{-x} + \frac{c}{2}e^{-x} + \frac{b^2}{2} + b + \frac{1}{2} + \underbrace{ac - \frac{b^2}{2} - \frac{b}{2} + 2jb - 2j^2 - \frac{3}{8}}_{=\,\mathrm{const.}\,=:\,C_0} \\
&= \frac{1}{2}(a^2e^{2x} + 2abe^x - 4aje^x + b^2 - 4jb + 4j^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(c^2e^{-2x} + 2bce^{-x} + 2ce^{-x} + b^2 + 2b + 1) + C_0 \\
&= \frac{1}{2}\big(a^2e^{2x} + 2a(b-2j)e^x + (b-2j)^2\big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\big(c^2e^{-2x} + 2c(b+1)e^{-x} + (b+1)^2\big) + C_0 \\
&= \frac{1}{2}\big(ae^x + (b-2j)\big)^2 + \frac{1}{2}\big(ce^{-x} + (b+1)\big)^2 + C_0
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck taucht (ohne die additive Konstante) in exakt dieser Form in Shifmans Katalog auf. Dass dieses Potential dem bei González-López et al. angegebenen Ausdruck

$$Ae^{2\sqrt{\nu}x} + Be^{\sqrt{\nu}x} + Ce^{-\sqrt{\nu}x} + De^{-2\sqrt{\nu}x}$$

für $\nu = 1$, $A = \frac{a^2}{2}$, $B = a(b-2j)$, $C = c(b+1)$, $D = \frac{c^2}{2}$ und unter Hinzunahme weiterer additiver Konstanten entspricht, ist dem vorletzten Ausdruck am besten zu entnehmen. Für die weiteren Betrachtungen ist es sinnvoll, diesen geeignet umzusortieren:

$$V(x) = \frac{1}{2}\Bigg(a^2 e^{2x} + (b+1)^2 + (b-2j)^2 + \tag{9}$$

$$c^2 e^{-2x} + 2a\,(b-2j)\,e^x + 2c\,(b+1)\,e^{-x}\Bigg)$$

3.2 Erstes hyperbolisches Potential

Mit den Polynomen[21]

- $P_4(\xi) = \xi^2 - 1$
- $P_3(\xi) = a\xi^2 - \frac{1}{2}\xi - a$
- $P_2(\xi) = -2aj\xi$

erhält man $P_4'(\xi) = 2\xi$ sowie die Transformation

$$x(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \operatorname{arcosh} \xi$$

und damit $\xi(x) = \cosh x$. Unter Ausnutzung der Identität

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{10}$$

ergibt sich darüber hinaus

$$A(x) = \frac{\frac{2\cosh x}{4} + a\cosh^2 x - \frac{1}{2}\cosh x - a}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = a \cdot \frac{\cosh^2 x - 1}{\sinh x} = a \cdot \sinh x$$

und damit die Phase $a(x) = a \cdot \cosh x$. Mit $\Delta V(x) = -2aj\cosh x$ und $A'(x) = a \cdot \cosh x$ kann nun das Potential bestimmt werden:

$$\begin{aligned} V(x) &= -2aj\cosh x + \frac{a^2}{2}\sinh^2 x - \frac{a}{2} \cdot \cosh x \\ &= \frac{a^2}{2}\sinh^2 x - a\Big(2j + \frac{1}{2}\Big)\cosh x \end{aligned} \tag{11}$$

In dieser Form wird das Potential bei Shifman aufgeführt. Um einen Vergleich mit der Katalogisierung bei González-López et al. ziehen zu können, muss das zweite Polynom zu $P_2(\xi) = -2aj\xi + \frac{\zeta}{1+\xi}$ mit einer reellen Konstante ζ erweitert werden. Zudem wird sich folgende Identität als nützlich erweisen:

[21] [Shi 99], S. 807

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cosh x+1} &= \frac{\cosh x-1}{(\cosh x+1)(\cosh x-1)} = \frac{\cosh x-1}{\cosh^2 x-1} = \frac{\cosh x-1}{\sinh^2 x} \\
&= \frac{\cosh x}{\sinh x}\frac{1}{\sinh x} - \frac{1}{\sinh^2 x} = \coth x \operatorname{csch} x - \operatorname{csch}^2 x
\end{aligned}$$

Man erhält somit $\Delta V(x) = -2aj\cosh x + \zeta \coth x \operatorname{csch} x - \zeta \operatorname{csch}^2 x$ sowie unter Ausnutzung von Identität 10 folgende Form des Potentials:

$$\begin{aligned}
V(x) &= -2aj\cosh x + \zeta \coth x \operatorname{csch} x - \zeta \operatorname{csch}^2 x + \frac{a^2}{2}\sinh^2 x - \frac{a}{2}\cosh x \\
&= \frac{a^2}{2}(\cosh^2 x - 1) - a\Big(2j + \frac{1}{2}\Big)\cosh x + \zeta \coth x \operatorname{csch} x - \zeta \operatorname{csch}^2 x \\
&= \frac{a^2}{2}\cosh^2 x - a\Big(2j + \frac{1}{2}\Big)\cosh x + \zeta \coth x \operatorname{csch} x - \zeta \operatorname{csch}^2 x - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

Bis auf die additive Konstante entspricht dies dem bei González-López et al. angegebenen Potential

$$A\cosh^2(\sqrt{\nu}x) + B\cosh(\sqrt{\nu}x) + C\coth(\sqrt{\nu}x)\operatorname{csch}(\sqrt{\nu}x) + D\operatorname{csch}^2(\sqrt{\nu}x)$$

für $\nu = 1$, $A = \frac{a^2}{2}$, $B = -a\Big(2j + \frac{1}{2}\Big)$, $C = -D = \zeta$ ohne Singularität bei $x = 0$.
Ein Vergleich der Phase $a(x) = a \cdot \cosh x$ mit derjenigen des exponentiellen Potentials, $a(x) = ae^x + \Big(\frac{1}{2} + b\Big)x - ce^{-x}$, legt nahe, die Form des exponentiellen Potentials für den speziellen Fall $a = -c = \frac{\eta}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ mit einer reellen Konstante η zu untersuchen. Einsetzen in Ausdruck 9 liefert:

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\eta^2}{4}e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-2j\right)^2 \\
&\quad + \frac{\eta^2}{4}e^{-2x} + \eta\left(-\frac{1}{2}-2j\right)e^x - \eta\left(-\frac{1}{2}+1\right)e^{-x}\Bigg)
\end{aligned}$$

Setzen von $j = 0$ und Umsortieren führt auf:

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\eta^2}{4}e^{2x} + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2}{4}e^{-2x} - \frac{\eta}{2}e^x - \frac{\eta}{2}e^{-x}\right) + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{\eta^2}{4}}_{=\text{const.}=:C_1} \\
&= \frac{\eta^2}{2}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{\eta}{2}\cdot\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C_1 = \frac{\eta^2}{2}\cosh^2 x - \frac{\eta}{2}\cosh x + C_1 \\
&= \frac{\eta^2}{2}\sinh^2 x - \frac{\eta}{2}\cosh x + \underbrace{\frac{\eta^2}{2} + C_1}_{=\text{const.}=:C_2}
\end{aligned}$$

Formal entspricht dies exakt Ausdruck 11 für $j = 0$. Somit kann dieses hyperbolische Potential offenbar als Spezialfall $a = -c = \frac{\eta}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $j = 0$ des exponentiellen Potentials konstruiert werden, wobei in Ausdruck 11 der Parameter j wieder Teil eines Vorfaktors ist. Diese nachträglich erscheinende Modifikation hat vermutlich den Hintergrund, dass exakte Lösbarkeit und damit ein anderer Sachverhalt vorläge, wenn $V(x)$ gänzlich unabhängig von j wäre.

3.3 Zweites hyperbolisches Potential

Ein weiteres hyperbolisches Potential ergibt sich aus:[22]

- $P_4(\xi) = (1-\xi^2)^2$
- $P_3(\xi) = a\xi - (2j-1)\xi(1-\xi^2)$
- $P_2(\xi) = j(j-a) - j(2j-1)\xi^2$

Die Koordinatentransformation lautet dann

$$x(\xi) = \int \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \operatorname{artanh} \xi$$

und es folgt $\xi(x) = \tanh x$. Mit $\frac{\tanh x}{1-\tanh^2 x} = \sinh x \cosh x$ und $P_4'(\xi) = -4\xi(1-\xi^2)$ sowie

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x \tag{12}$$

gilt desweiteren:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\frac{-4\tanh x(1-\tanh^2 x)}{4} + a\tanh x - (2j-1)\tanh x(1-\tanh^2 x)}{\sqrt{(1-\tanh^2 x)^2}} \\ &= -\tanh x + a \cdot \frac{\tanh x}{1-\tanh^2 x} - (2j-1)\tanh x \\ &= a \cdot \sinh x \cosh x - 2j \tanh x = \frac{a}{2}\sinh(2x) - 2j\tanh x \end{aligned}$$

Durch Integration und Ausnutzen der Identität

$$\cosh(2x) = 2\cosh^2(x) - 1 \tag{13}$$

erhält man

$$a(x) = \frac{a}{4}\cosh(2x) - 2j\ln\big(\cosh(x)\big) = \frac{a}{2}\cosh^2 x - \frac{a}{4} - \ln\big(\cosh^{2j} x\big)$$

[22] [Shi 99], S. 807

für die Phase. Exponentieren liefert dann die unbedeutende Konstante $e^{\frac{a}{4}}$ und den Faktor $\cosh^{2j} x$, der in die Wellenfunktion selbst eingeht. Mit

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

ergibt sich $A'(x) = a \cdot \cosh(2x) - 2j(1 - \tanh^2 x)$. Die Identitäten

$$\sinh x \cosh x \tanh x = \sinh x \cosh x \cdot \frac{\sinh x}{\cosh x} = \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$$

und

$$(\sinh x \cosh x)^2 = \left(\sqrt{\cosh^2 x - 1} \cdot \cosh x\right)^2 = \cosh^4 x - \cosh^2 x$$

sowie $\Delta V(x) = j(j-a) - j(2j-1)\tanh^2 x$ und Identität 13 liefern das Potential:[23]

$$\begin{aligned}
V(x) &= j(j-a) - j(2j-1)\tanh^2 x \\
&\quad + \frac{1}{2}(a \cdot \sinh x \cosh x - 2j \tanh x)^2 - \frac{1}{2}\Big(a \cdot \cosh(2x) - 2j(1 - \tanh^2 x)\Big) \\
&= j(j-a) - 2j^2 \tanh^2 x + j \tanh^2 x + \frac{a^2}{2}\cosh^4 x - \frac{a^2}{2}\cosh^2 x - 2aj\cosh^2 x \\
&\quad + 2aj + 2j^2 \tanh^2 x - a \cdot \cosh^2 x + \frac{a}{2} + j - j\tanh^2 x \\
&= \frac{a^2}{2}\cosh^4 x - \frac{a}{2}(a + 4j + 2)\cosh^2 x + \underbrace{\frac{a}{2} + j(j + a + 1)}_{= \text{const.} =: C_3}
\end{aligned}$$

Auch weil sich dieses Potential bei Shifman, nicht aber bei González-López et al. findet, liegt der Versuch nahe, einen Zusammenhang zwischen diesem und dem zuvor behandelten hyperbolischen Potential herzustellen. Mit den beiden Identitäten 10 und 12 lässt sich zunächst

$$\begin{aligned}
\cosh^4 x &= \cosh^2 x \cosh^2 x = (1 + \sinh^2 x)\cosh^2 x \\
&= \cosh^2 x + \left(\frac{1}{2}\sinh(2x)\right)^2 = \frac{\cosh(2x) + 1}{2} + \left(\frac{1}{2}\sinh(2x)\right)^2
\end{aligned}$$

begründen und das zweite hyperbolische Potential folgendermaßen umschreiben:

[23] [Shi 99], S. 806-807

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{a^2}{2}\cosh^4 x - \frac{a}{2}(a+4j+2)\cosh^2 x \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\cosh(2x)+1}{2} + \left(\frac{1}{2}\sinh(2x)\right)^2\right) - \frac{a}{2}(a+4j+2)\frac{\cosh(2x)+1}{2} \\ &= \frac{a^2}{8}\sinh^2(2x) - \frac{a}{2}(2j+1)\cosh(2x) - \frac{a}{4}\Big(4j+2\Big) \end{aligned}$$

Weiter lässt sich die Ersetzung $2x = y$ vornehmen. Mit der Vorschrift 8 ergibt sich dann

$$H\left(\frac{y}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{4}V\left(\frac{y}{2}\right)\right)$$

Der Vorfaktor 4 ist nicht weiter beachtlich; das transformierte Potential hat mit der zusätzlichen Ersetzung $a = 4\hat{a}$ unter der Berücksichtigung des Vorfaktors $\frac{1}{4}$ folgende Gestalt:

$$\tilde{V}(y) = \frac{\hat{a}^2}{2}\sinh^2(y) - \hat{a}\left(j+\frac{1}{2}\right)\cosh(y) - \underbrace{\frac{\hat{a}}{4}(4j+2)}_{=\,\text{const.}\,=:\,C_4}$$

Der Vorfaktor in der Klammer vor $\cosh y$ lässt offenbar die Werte $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, ...$ zu, da j nach Voraussetzung halbzahlig und nichtnegativ ist. Beim ersten hyperbolischen Potential mit dem Vorfaktor $(2j+\frac{1}{2})$ ergeben sich dagegen nur die ungeraden Werte $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, ...$ Damit stellt das erste hyperbolische Potential offenbar einen Spezialfall des soeben untersuchten dar, der nur die ungeraden Werte von j umfasst. Dies ist vermutlich der Grund, warum das zweite hyperbolische Potential bei González-López et al. nicht aufgeführt ist.

3.4 Drittes hyperbolisches Potential

Desweiteren lassen sich die Polynome

- $P_4(\xi) = \xi^2 + 1$
- $P_3(\xi) = a\xi^2 - \frac{1}{2}\xi + a$
- $P_2(\xi) = -2aj\xi$

betrachten, die auf die Koordinatentransformation

$$x(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+1}} = \operatorname{arsinh}\xi$$

sowie $\xi(x) = \sinh x$ und $P_4'(\xi) = 2\xi$ führen. Weiter ergibt sich

$$A(x) = \frac{\frac{2\sinh x}{4} + a\sinh^2 x - \frac{1}{2}\sinh x + a}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = a \cdot \frac{\sinh^2 x + 1}{\cosh x} = a \cdot \cosh x$$

und damit die Phase $a(x) = a \cdot \sinh x$, für die jedoch entweder (im Fall $a > 0$) $\lim\limits_{x\to-\infty} a(x) = -\infty$ oder (im Fall $a < 0$) $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = -\infty$ gilt, so dass die Wellenfunktion stets nur auf einem Intervall mit mindestens einer endlichen Grenze normierbar ist. Man erhält $A'(x) = a \cdot \sinh x$ und damit das Potential:

$$\begin{aligned} V(x) &= -2aj\sinh x + \frac{a^2}{2}\cosh^2 x - \frac{a}{2}\sinh x \\ &= \frac{a^2}{2}\cosh^2 x - a\left(2j + \frac{1}{2}\right)\sinh x \end{aligned}$$

Ergänzt man, ähnlich wie beim ersten hyperbolischen Potential, das zweite Polynom zu $P_2(\xi) = -2aj\xi + \gamma\frac{1+\xi}{1+\xi^2}$ mit einer reellen Konstante γ, so wird folgende Identität nützlich sein:

$$\frac{1+\sinh x}{1+\sinh^2 x} = \frac{1+\sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\sinh x}{\cosh x}\frac{1}{\cosh x} + \frac{1}{\cosh^2 x} = \tanh x \operatorname{sech} x + \operatorname{sech}^2 x$$

Das Potential lautet dann:

$$\begin{aligned} V(x) &= -2aj\sinh x + \gamma \cdot \frac{1+\sinh x}{1+\sinh^2 x} + \frac{a^2}{2}\cosh^2 x - \frac{a}{2}\sinh x \\ &= \frac{a^2}{2}(1+\sinh^2 x) - a\left(2j+\frac{1}{2}\right)\sinh x + \gamma(\tanh x \operatorname{sech} x + \operatorname{sech}^2 x) \\ &= \frac{a^2}{2}\sinh^2 x - a\left(2j+\frac{1}{2}\right)\sinh x + \gamma(\tanh x \operatorname{sech} x + \operatorname{sech}^2 x) + \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Dies entspricht bis auf eine additive Konstante dem bei González-López et al. angegebenen Ausdruck

$$A\sinh^2(\sqrt{\nu}x) + B\sinh(\sqrt{\nu}x) + C\tanh(\sqrt{\nu}x)\operatorname{sech}(\sqrt{\nu}x) + D\operatorname{sech}^2(\sqrt{\nu}x)$$

für $\nu = 1$, $A = \frac{a^2}{2}$, $B = -a\left(2j + \frac{1}{2}\right)$ und $C = D = \gamma$.
Ein Vergleich der Phase mit derjenigen des exponentiellen Potentials legt hier nahe, den Spezialfall $a = c = \frac{\vartheta}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ mit einer reellen Konstante ϑ zu untersuchen. Einsetzen in Ausdruck 9 liefert:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\vartheta^2}{4}e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-2j\right)^2 \\ &\quad + \frac{\vartheta^2}{4}e^{-2x} + \vartheta\left(-\frac{1}{2}-2j\right)e^x + \vartheta\left(-\frac{1}{2}+1\right)e^{-x}\Bigg) \end{aligned}$$

Setzen von $j = 0$ und Umsortieren führt auf:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta^2}{4}e^{2x} + \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^2}{4}e^{-2x} - \frac{\vartheta}{2}e^{x} + \frac{\vartheta}{2}e^{-x}\right) + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{\vartheta^2}{4}}_{=\text{const.}=:C_5} \\ &= \frac{\vartheta^2}{2}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{\vartheta}{2}\cdot\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C_5 = \frac{\vartheta^2}{2}\cosh^2 x - \frac{\vartheta}{2}\sinh x + C_5 \end{aligned}$$

Somit kann auch dieses hyperbolische Potential als Spezialfall des exponentiellen Potentials aufgefasst werden. Das Auftreten des Parameters j ist genauso zu interpretieren wie beim ersten hyperbolischen Potential. Überhaupt wird man von einem der beiden Potentiale unmittelbar auf das andere geführt, wenn die jeweils auftretenden hyperbolischen Winkelfunktionen durch diejenigen Funktionen ersetzt werden, die mit den jeweiligen Komplementärwinkeln assoziiert sind, d.h. unter den Ersetzungen sinh $\leftrightarrow$ cosh, tanh $\leftrightarrow$ coth und sech $\leftrightarrow$ csch. Vermutlich ist das soeben untersuchte Potential aufgrund dieser Symmetrie nicht bei Shifman aufgeführt. Ein weiterer Grund dürfte in der eingeschränkten Normierbarkeit bestehen.
Im Folgenden werden noch die Ergebnisse der einzelnen Rechenschritte zur Konstruktion des Ausdrucks für das polynomiale und das periodische Potential in Shifmans Katalog angegeben. Insbesondere sind die mit periodischen Potentialen assoziierten Wellenfunktionen nicht normierbar und stellen damit einen Sonderfall dar.[24]

- Polynomiales Potential:
  - $P_4(\xi) = 4\xi$, $P_3(\xi) = \nu\xi^2 + \mu\xi - 1$, $P_2(\xi) = -2\nu j\xi$
  - $x(\xi) = \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\xi} \quad \Rightarrow \quad \xi(x) = x^2$
  - $A(x) = \frac{1}{2}(\nu x^3 + \mu x)$, $a(x) = \frac{1}{8}(\nu x^4 + 2\mu x^2)$, $\Delta V(x) = -2\nu j x^2$
  - $V(x) = \frac{\nu^2}{8}x^6 + \frac{\mu\nu}{4}x^4 + \left(\frac{\mu^2}{8} - 2\nu(j + \frac{3}{8})\right)x^2$
- Periodisches Potential:
  - $P_4(\xi) = 1 - \xi^2$, $P_3(\xi) = -a\xi^2 + \frac{1}{2}\xi + a$, $P_2(\xi) = 2aj\xi$
  - $x(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin\xi \quad \Rightarrow \quad \xi(x) = \sin x$
  - $A(x) = a\cdot\cos x$, $a(x) = a\cdot\sin x$, $\Delta V(x) = 2aj\sin x$
  - $V(x) = \frac{a^2}{2}\cos^2 x + a(2j + \frac{1}{2})\sin x$

[24] [Shi 99], S. 806

4 Möbius-Transformationen

Thema des letzten Kapitels ist eine spezielle Symmetrie, die quasi-exakt lösbare Hamilton-Operatoren aufweisen. Deren allgemeine Form

$$H_{„\mathrm{G}“}(\xi) = -\frac{1}{2}P_4(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2} + P_3(\xi)\frac{d}{d\xi} + P_2(\xi)$$

ist nicht eindeutig, denn die Symmetriegruppe $GL(2,\mathbb{R})$ der 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

mit Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ und reellen Koeffizienten, deren Darstellung auf der Riemannschen Zahlenkugel durch so genannte *Möbius-Transformationen* („gebrochen lineare Funktionen“)

$$\xi \longmapsto w(\xi) = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} \tag{14}$$

gegeben ist, erhält die von den Generatoren der $SL(2,\mathbb{R})$ aufgespannte Lie-Algebra.[25] Zunächst lässt sich die Identität

$$\alpha - \gamma w = \alpha - \gamma\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} = \frac{\alpha(\gamma\xi + \delta) - \gamma(\alpha\xi + \beta)}{\gamma\xi + \delta} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma\xi + \delta} \tag{15}$$

begründen und damit die Ableitung der Möbius-Transformation sowie ihrer Inversen berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{dw(\xi)}{d\xi} &= \frac{\alpha(\gamma\xi + \delta) - (\alpha\xi + \beta)\gamma}{(\gamma\xi + \delta)^2} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma\xi + \delta)^2} = \frac{(\alpha - \gamma w)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma} \\ \frac{d\xi(w)}{dw} &= \frac{\delta(\alpha - \gamma w) + (\delta w - \beta)\gamma}{(\alpha - \gamma w)^2} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\alpha - \gamma w)^2} = \frac{(\gamma\xi + \delta)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma} \end{aligned} \tag{16}$$

So ergibt sich für die Transformation des Differentials $\frac{d}{d\xi}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &= \frac{dw}{d\xi}\frac{d}{dw} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}(\alpha - \gamma w)^2\frac{d}{dw} \\ \frac{d^2}{d\xi^2} &= (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}(\alpha - \gamma w)^2\frac{d}{dw}\left((\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}(\alpha - \gamma w)^2\frac{d}{dw}\right) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-2}(\alpha - \gamma w)^2\left((\alpha - \gamma w)^2\frac{d^2}{dw^2} - 2\gamma(\alpha - \gamma w)\frac{d}{dw}\right) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-2}(\alpha - \gamma w)^4\frac{d^2}{dw^2} - 2\gamma(\alpha\delta - \beta\gamma)^{-2}(\alpha - \gamma w)^3\frac{d}{dw} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Generatoren liefert:

[25] [Gon 91], S. 12

$$
\begin{aligned}
T^+ &= \xi^2 \frac{d}{d\xi} - 2j\xi = \left(\frac{\delta w - \beta}{\alpha - \gamma w}\right)^2 (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}(\alpha - \gamma w)^2 \frac{d}{dw} - 2j\frac{\delta w - \beta}{\alpha - \gamma w} \\
&= (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}(\delta w - \beta)^2 \frac{d}{dw} - 2j\frac{\delta w - \beta}{\alpha - \gamma w} \\
T^0 &= \left(\frac{\delta w - \beta}{\alpha - \gamma w}\right)(\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}(\alpha - \gamma w)^2 \frac{d}{dw} - j \\
&= (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}(\alpha - \gamma w)(\delta w - \beta)\frac{d}{dw} - j \\
T^- &= (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}(\alpha - \gamma w)^2 \frac{d}{dw}
\end{aligned}
$$

Der allgemeine quasi-exakt lösbare Hamilton-Operator hat bei González-López et al. folgende Gestalt:[26]

$$
\begin{aligned}
-H_{\text{„G“}} &= P(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(Q(\xi) - \frac{2j-1}{2}P'(\xi)\right)\frac{d}{d\xi} \\
&\quad + \left(R - jQ'(\xi) + \frac{2j(2j-1)}{12}P''(\xi)\right)
\end{aligned}
$$

Die irreduzible Multiplikatordarstellung $\rho_{n,i}$ von $GL(2,\mathbb{R})$ ist durch die Transformationsregel $\hat{\mathcal{P}} = \rho_{n,i}(\mathcal{P})$ definiert, wobei

$$
\hat{\mathcal{P}}(\xi) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^i(\gamma\xi + \delta)^n \mathcal{P}\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right) \tag{17}
$$

für ein Polynom $\mathcal{P}$ vom Grad von höchstens n gilt. Das im Allgemeinen quartische Polynom $P(\xi)$ transformiert sich dabei nach $\rho_{4,-2}$, das im Allgemeinen quadratische Polynom $Q(\xi)$ nach $\rho_{2,-1}$, R bleibt invariant.[27]

4.1 Gruppeneigenschaft

Dass die Möbius-Transformationen tatsächlich eine Gruppe bilden, wird zunächst durch Auflösen der Abbildungsvorschrift 14 nach $\xi(w)$ klar; die inverse Transformation

$$
w \longmapsto \xi(w) = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}
$$

hat wieder die Gestalt einer Möbius-Transformation. Für den Nachweis der Abgeschlossenheit sollen die beiden Matrizen

$$
\begin{pmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \iota & \kappa \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}
$$

[26] [Gon 91], S. 11
[27] [Gon 91], S. 12

mit den Determinanten $\varepsilon\vartheta - \eta\zeta \neq 0$ und $\iota\mu - \lambda\kappa \neq 0$ und den assoziierten Möbius-Transformationen

$$\xi \longmapsto u(\xi) = \frac{\varepsilon\xi + \zeta}{\eta\xi + \vartheta} \quad \text{und} \quad \xi \longmapsto v(\xi) = \frac{\iota\xi + \kappa}{\lambda\xi + \mu}$$

betrachtet werden. Werden die Transformationen hintereinander ausgeführt, so ergibt sich mit

$$\Phi(\xi) := v\big(u(\xi)\big) = \frac{\iota\frac{\varepsilon\xi+\zeta}{\eta\xi+\vartheta} + \kappa}{\lambda\frac{\varepsilon\xi+\zeta}{\eta\xi+\vartheta} + \mu} = \frac{\varepsilon\iota\xi + \zeta\iota + \kappa(\eta\xi + \vartheta)}{\varepsilon\lambda\xi + \zeta\lambda + \mu(\eta\xi + \vartheta)} = \frac{(\varepsilon\iota + \eta\kappa)\xi + (\zeta\iota + \vartheta\kappa)}{(\varepsilon\lambda + \eta\mu)\xi + (\zeta\lambda + \vartheta\mu)}$$

wieder eine Möbius-Transformation, die mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} \varepsilon\iota + \eta\kappa & \zeta\iota + \vartheta\kappa \\ \varepsilon\lambda + \eta\mu & \zeta\lambda + \vartheta\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota & \kappa \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta \end{pmatrix}$$

assoziiert ist. Die Determinante dieser Matrix ist gemäß dem Determinantenmultiplikationssatz gleich dem Produkt der Determinanten der einzelnen Matrizen und damit wie gefordert ungleich 0, da beide Faktoren nach Voraussetzung ungleich 0 sind. Die Verknüpfung der beiden Transformationen $u(\xi)$ und $v(\xi)$ kommutiert nicht, liefert in der umgekehrten Reihenfolge jedoch ein analoges Ergebnis:

$$\Psi(\xi) := u\big(v(\xi)\big) = \frac{\varepsilon\frac{\iota\xi+\kappa}{\lambda\xi+\mu} + \zeta}{\eta\frac{\iota\xi+\kappa}{\lambda\xi+\mu} + \vartheta} = \frac{\varepsilon(\iota\xi + \kappa) + \zeta(\lambda\xi + \mu)}{\eta(\iota\xi + \kappa) + \vartheta(\lambda\xi + \mu)} = \frac{(\varepsilon\iota + \zeta\lambda)\xi + (\varepsilon\kappa + \zeta\mu)}{(\eta\iota + \vartheta\lambda)\xi + (\eta\kappa + \vartheta\mu)}$$

Das neutrale Element der Gruppe ist offenbar durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Assoziativität der Verknüpfung von Möbius-Transformationen ergibt sich einfach aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation.

4.2 Anwendung auf das exponentielle Potential

Im Folgenden wird das exponentielle Potential herangezogen, um die Auswirkungen von Möbius-Transformationen auf quasi-exakt lösbare Potentiale zu untersuchen. Vor Einsetzen des Ausdrucks für die Differentialoperatoren hat der entsprechende Hamilton-Operator bei Shifman folgende Gestalt:[28]

$$H_{\text{„G“}} = -\frac{1}{2}T^0T^0 - aT^+ + cT^- + \left(b - j + \frac{1}{2}\right)T^0$$

[28] [Shi 99], S. 806

Durch die Ersetzung $T^+ \to -T^+$ geht die Darstellung bei Shifman in die Darstellung bei González-López et al. über:

$$H_{\text{„G"}} = -\frac{1}{2}T^0T^0 + aT^+ + cT^- + \left(b - j + \frac{1}{2}\right)T^0$$

Einsetzen der Differentialoperatoren liefert dann:

$$\begin{aligned}
H_{\text{„G"}} &= -\frac{1}{2}\xi^2\frac{d^2}{d\xi^2} + (a\xi^2 + b\xi + c)\frac{d}{d\xi} - 2aj\xi + \underbrace{2a\left(2j\xi - \xi^2\frac{d}{d\xi}\right)}_{=2aT^+} \\
&= -\frac{1}{2}\xi^2\frac{d^2}{d\xi^2} + (-a\xi^2 + b\xi + c)\frac{d}{d\xi} + 2aj\xi \\
\Rightarrow \quad -H_{\text{„G"}} &= \frac{1}{2}\xi^2\frac{d^2}{d\xi^2} + (a\xi^2 - b\xi - c)\frac{d}{d\xi} - 2aj\xi
\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem Ausdruck

$$\begin{aligned}
-H_{\text{„G"}} &= P(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(Q(\xi) - \frac{2j-1}{2}P'(\xi)\right)\frac{d}{d\xi} \\
&\quad + \left(R - jQ'(\xi) + \frac{2j(2j-1)}{12}P''(\xi)\right)
\end{aligned}$$

für den allgemeinen quasi-exakt lösbaren Hamilton-Operator bei González-López et al. ergibt für das exponentielle Potential:

$$\begin{aligned}
P(\xi) &= \frac{1}{2}\xi^2 \\
Q(\xi) - \frac{2j-1}{2}P'(\xi) &= a\xi^2 - b\xi - c \\
\Rightarrow \quad Q(\xi) &= a\xi^2 + \underbrace{\left(j - \frac{1}{2} - b\right)}_{=:s}\xi - c
\end{aligned}$$

Das Polynom R geht nur als additive Konstante ins Potential $V(x)$ ein und ist daher unbeachtlich. Die Transformation der Polynome $\hat{P}(\xi)$ und $\hat{Q}(\xi)$ nach Vorschrift 17 liefert:

$$\begin{aligned}
\hat{P}(\xi) &= (\gamma\xi + \delta)^4(\alpha\delta - \beta\gamma)^{-2}\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right)^2 = \frac{1}{2}(\alpha\delta - \beta\gamma)^{-2}(\alpha\xi + \beta)^2(\gamma\xi + \delta)^2 \\
\hat{Q}(\xi) &= (\gamma\xi + \delta)^2(\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}\left(a\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right)^2 + s\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right) - c\right) \\
&= (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}\left(a(\alpha\xi + \beta)^2 + s(\alpha\xi + \beta)(\gamma\xi + \delta) - c(\gamma\xi + \delta)^2\right)
\end{aligned}$$

Für die Ableitungen $\frac{d\hat{P}(\xi)}{d\xi} = \hat{P}'(\xi)$, $\frac{d^2\hat{P}(\xi)}{d\xi^2} = \hat{P}''(\xi)$ und $\frac{d\hat{Q}(\xi)}{d\xi} = \hat{Q}'(\xi)$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
\hat{P}'(\xi) &= (\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta)\,\big(\alpha\,(\gamma\xi+\delta)+\gamma\,(\alpha\xi+\beta)\,\big) \\
\hat{P}''(\xi) &= (\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,\Big(\alpha^2\,(\gamma\xi+\delta)^2+4\alpha\gamma\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta)+\gamma^2\,(\alpha\xi+\beta)^2\Big) \\
\hat{Q}'(\xi) &= (\alpha\delta-\beta\gamma)^{-1}\,\Big(2a\alpha\,(\alpha\xi+\beta)+s\big(\alpha\,(\gamma\xi+\delta)+\gamma\,(\alpha\xi+\beta)\,\big)-2c\gamma(\gamma\xi+\delta)\Big)
\end{aligned}$$

Das Potential ist bei González-López et al. allgemein gegeben durch:[29]

$$V(x) = \underbrace{-\frac{j(j+1)}{3}\left(P''-\frac{3}{4}\frac{P'^2}{P}\right)}_{:=V_1(x)}\underbrace{-\frac{2j+1}{4}\left(Q\frac{P'}{P}-2Q'\right)}_{:=V_2(x)}+\underbrace{\frac{Q^2}{4P}}_{:=V_3(x)}-R$$

Man erhält für die einzelnen Summanden des Potentials:

$$\begin{aligned}
V_1(\xi) &= -\frac{j(j+1)}{3}\Bigg((\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,\Big(\alpha^2\,(\gamma\xi+\delta)^2+4\alpha\gamma\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta)+\gamma^2\,(\alpha\xi+\beta)^2\Big) \\
&\quad -\frac{3}{4}\frac{\Big((\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta)\,\big(\alpha\,(\gamma\xi+\delta)+\gamma\,(\alpha\xi+\beta)\,\big)\Big)^2}{\frac{1}{2}\,(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,(\alpha\xi+\beta)^2\,(\gamma\xi+\delta)^2}\Bigg) \\
&= -\frac{j(j+1)}{3}\Bigg((\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,\Big(\alpha^2\,(\gamma\xi+\delta)^2+4\alpha\gamma\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta)+\gamma^2\,(\alpha\xi+\beta)^2\Big) \\
&\quad -\frac{3}{2}\,(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,\big(\alpha\,(\gamma\xi+\delta)+\gamma\,(\alpha\xi+\beta)\,\big)^2\Bigg) \\
&= -\frac{j(j+1)}{3}(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,\Big(-\frac{\alpha^2}{2}\,(\gamma\xi+\delta)^2+\alpha\gamma\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta)-\frac{\gamma^2}{2}\,(\alpha\xi+\beta)^2\Big) \\
&= -\frac{j(j+1)}{3}(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\Bigg(-\frac{\alpha^2}{2}\,\left(\gamma^2\xi^2+2\gamma\delta\xi+\delta^2\right) \\
&\quad +\alpha\gamma\big(\alpha\gamma\xi^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)\xi+\beta\delta\big)-\frac{\gamma^2}{2}\,\left(\alpha^2\xi^2+2\alpha\beta\xi+\beta^2\right)\Bigg) \\
&= -\frac{j(j+1)}{3}(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,\left(-\frac{1}{2}(\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2)+\alpha\delta\beta\gamma\right) \\
&= -\frac{j(j+1)}{3}(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,\left(-\frac{1}{2}(\alpha\delta-\beta\gamma)^2\right)=\frac{j(j+1)}{6}
\end{aligned}$$

[29][Gon 91], S. 11

$$
\begin{aligned}
V_2(\xi) &= -\frac{2j+1}{4}\Bigg((\alpha\delta-\beta\gamma)^{-1}\Big(a\,(\alpha\xi+\beta)^2 + s\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta) - c(\gamma\xi+\delta)^2\Big) \\
&\quad \cdot\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta)\,\big(\alpha\,(\gamma\xi+\delta)+\gamma\,(\alpha\xi+\beta)\big)}{\frac{1}{2}\,(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,(\alpha\xi+\beta)^2\,(\gamma\xi+\delta)^2} \\
&\quad -2\,(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-1}\Big(2a\alpha\,(\alpha\xi+\beta)+s\big(\alpha\,(\gamma\xi+\delta)+\gamma\,(\alpha\xi+\beta)\big)-2c\gamma(\gamma\xi+\delta)\Big)\Bigg) \\
&= -\frac{2j+1}{4}\,(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-1}\Bigg(\Big(a\,(\alpha\xi+\beta)^2 + s\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta) - c(\gamma\xi+\delta)^2\Big) \\
&\quad \cdot\frac{\alpha\,(\gamma\xi+\delta)+\gamma\,(\alpha\xi+\beta)}{\frac{1}{2}\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta)} - 2\Big(2a\alpha\,(\alpha\xi+\beta) \\
&\quad +s\big(\alpha\,(\gamma\xi+\delta)+\gamma\,(\alpha\xi+\beta)\big)-2c\gamma(\gamma\xi+\delta)\Big)\Bigg) \\
&= -\frac{2j+1}{2}\,(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-1}\Bigg(a\alpha(\alpha\xi+\beta)+a\gamma\frac{(\alpha\xi+\beta)^2}{\gamma\xi+\delta} \\
&\quad +s\big(\alpha(\gamma\xi+\delta)+\gamma(\alpha\xi+\beta)\big)-c\alpha\frac{(\gamma\xi+\delta)^2}{\alpha\xi+\beta}-c\gamma(\gamma\xi+\delta)-2a\alpha(\alpha\xi+\beta) \\
&\quad -s\big(\alpha(\gamma\xi+\delta)+\gamma(\alpha\xi+\beta)\big)+2c\gamma(\gamma\xi+\delta)\Bigg) \\
&= -\frac{2j+1}{2}\,(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-1}\Bigg(a(\alpha\xi+\beta)\left(\gamma\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}-\alpha\right)+c(\gamma\xi+\delta)\left(\gamma-\alpha\frac{\gamma\xi+\delta}{\alpha\xi+\beta}\right)\Bigg) \\
&= \frac{2j+1}{2}\left(a\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}+c\frac{\gamma\xi+\delta}{\alpha\xi+\beta}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_3(\xi) &= \frac{1}{4}\frac{\Big((\alpha\delta-\beta\gamma)^{-1}\Big(a\,(\alpha\xi+\beta)^2+s\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta)-c(\gamma\xi+\delta)^2\Big)\Big)^2}{\frac{1}{2}\,(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}\,(\alpha\xi+\beta)^2\,(\gamma\xi+\delta)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a\,(\alpha\xi+\beta)^2+s\,(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta)-c(\gamma\xi+\delta)^2}{(\alpha\xi+\beta)\,(\gamma\xi+\delta)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(a\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}+s-c\frac{\gamma\xi+\delta}{\alpha\xi+\beta}\right)^2
\end{aligned}
$$

$V_1(\xi)$ ist nur eine additive Konstante und damit nicht weiter von Interesse. Die Invarianz der Koordinatentransformation 7 unter Möbius-Transformationen zeigt sich mit der in 16 berechneten Ableitung:

$$
\begin{aligned}
x(\xi) &= \int \frac{d\xi}{\sqrt{\hat{P}_4(\xi)}} = \int \frac{\frac{d\xi}{dw}dw}{\sqrt{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-2}(\gamma\xi+\delta)^4 P_4\big(w(\xi)\big)}} \\
&= (\alpha\delta-\beta\gamma)\int \frac{\frac{(\gamma\xi+\delta)^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}dw}{(\gamma\xi+\delta)^2\sqrt{P_4\big(w(\xi)\big)}} = \int \frac{dw}{\sqrt{P_4\big(w(\xi)\big)}}
\end{aligned}
$$

Im Fall des exponentiellen Potentials ergibt sich wie zuvor

$$
x(\xi) = \int \frac{dw}{\sqrt{w^2(\xi)}} = \int \frac{dw}{w(\xi)} = \ln w(\xi)
$$

und so $w(\xi) = e^x$. In den Resultaten für $V_2(\xi)$ und $V_3(\xi)$ kann die Variable $w(\xi) = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$ daher durch e^x ersetzt werden:

$$
\begin{aligned}
V_2(x) &= \frac{2j+1}{2}\big(ae^x + ce^{-x}\big) \\
V_3(x) &= \frac{1}{2}\big(ae^x + s - ce^{-x}\big)^2
\end{aligned}
$$

Folglich ist die Summe der Resultate für $V_2(x)$ und $V_3(x)$ gleichsam eine Linearkombination von e^{2x}, e^x, e^{-x} und e^{-2x} und damit von derselben Gestalt wie das zuvor in Kapitel 3 ausgerechnete exponentielle Potential:

$$
V(x) = \frac{1}{2}\big(ae^x + (b-2j)\big)^2 + \frac{1}{2}\big(ce^{-x} + (b+1)\big)^2
$$

Mit diesem Ergebnis ist die Invarianz der von den Generatoren der $SL(2,\mathbb{R})$ aufgespannten Lie-Algebra unter Möbius-Transformationen beispielhaft nachgewiesen.

5 Einordnung und Ausblick

Der in Kapitel 3 dargestellte Versuch, bei gegebenen eingehenden Polynomen das gesuchte quasi-exakt lösbare Potential aufzufinden, verlief grundsätzlich erfolgreich. Das Beispiel des dritten hyperbolischen Potentials wurde dabei selbst konstruiert, um maximale Vergleichbarkeit der Arbeiten von Shifman und González-López et al. herzustellen. Das jeweilige Vorgehen zur Bestimmung des Ausdrucks für $V(x)$ entspricht dabei jeweils der Notation, die Shifman in seiner Arbeit verwendet. Diese deckt sich nicht vollständig mit der in der Arbeit von González-López et al. verwendeten Notation, so unterscheiden sich etwa die Generatoren der $SL(2,\mathbb{R})$ oder der allgemeine Ausdruck für den quasi-exakt lösbaren Hamilton-Operator geringfügig. Damit ist verständlich, dass sich etwa zusätzliche additive Konstanten oder einschränkende Bedingungen für die Parameter ergeben, welche in die Potentiale eingehen. In der Arbeit von González-López et al. sind in Bezug auf den Katalog von Potentialen solche Bedingungen für die Parameter angegeben, bei denen im Einzelfall überprüft werden müsste, ob diese äquivalent zu den Ergebnissen bei Shifman sind.[30] Die Formalismen sollten jedoch grundsätzlich identisch sein sollten, was in weitergehenden Untersuchungen festgestellt werden könnte.
Von den behandelten Potentialen findet sich das exponentielle Potential als einziges in nahezu äquivalenter Form bei Shifman und bei González-López et al.. Das erste hyperbolische Potential ist bei Shifman aufgeführt, der entsprechende Ausdruck bei González-López et al. ergibt sich erst, wenn eines der eingehenden Polynome erweitert wird. Das erste hyperbolische Potential ist sowohl ein Spezialfall des exponentiellen, als auch des zweiten hyperbolischen Potentials, welches sich nur bei Shifman findet. Dort ist wiederum das dritte hyperbolische Potential nicht aufgeführt, eine Erweiterung eines der eingehenden Polynome ermöglicht jedoch auch hier die Herleitung des bei González-López et al. angegebenen Ausdrucks. Diese Erweiterungen wurden jeweils selbst konstruiert und haben in den Rechnungen jeweils die Gestalt gebrochen-rationaler Funktionen und nicht die von Polynomen. Auch hier bietet sich der Versuch an, diesen zunächst asymmetrisch erscheinenden Aspekt bezüglich der Formalismen bei Shifman und bei González-López et al. aufzulösen. Das dritte hyperbolische Potential ist ebenfalls ein Spezialfall des exponentiellen Potentials und gleichsam „komplementär“ zum zweiten hyperbolischen Potential, die assoziierten Wellenfunktionen sind jedoch nur eingeschränkt normierbar.
Möglicherweise wollte Shifman nur solche Potentiale aufführen, bei denen die zugehörigen Wellenfunktionen auf der gesamten reellen Achse normierbar sind, und hat das periodische Potential aufgrund dessen Bedeutung etwa für die Festkörperphysik mit aufgenommen. Dessen Nicht-Normierbarkeit ist indes von anderer Art als die des dritten hyperbolischen Potentials.
Offenbar lassen sich zwei der hyperbolischen Potentiale auf das exponentielle Potential sowie auf das verbliebene hyperbolische Potential zurückführen, so dass das exponentielle Potential zusammen mit dem verbliebenen hyperbolischen Po-

[30] [Gon 91], S. 15

tential und einem polynomialen Potential offenbar einen in sich abgeschlossenen Satz von nicht-periodischen quasi-exakt lösbaren Potentialen darstellt.
In weitergehenden Untersuchungen könnte man sich, wie bereits angedeutet, um den Nachweis bemühen, dass die Ergebnisse bei Shifman und bei González-López bis auf Unterschiede bei den Benennungen von Parametern vollständig äquivalent sind. In diesem Sinne wäre zum Einen das zweite polynomiale Potential bei González-López et al. zu thematisieren, da es mit seinen geraden und ungeraden Potenzen vordergründig keine direkte Entsprechung bei Shifman zu haben scheint. Zum Anderen wäre die Fragestellung denkbar, warum das zweite hyperbolische Potential nicht bei González-López et al. aufgeführt ist, obwohl es einen allgemeineren Fall als das erste hyperbolische Potential darstellt. Darüber hinaus könnte die Suche nach einem Zusammenhang mit dem exponentiellen Potential noch einmal aufgenommen werden. Für diese Untersuchungen wären natürlich noch weitere Arbeiten zur Thematik der quasi-exakten Lösbarkeit heranzuziehen.
Im letzten Kapitel der Bachelorarbeit wurde die bei González-López et al. vorgebrachte Behauptung, dass Möbius-Transformationen die Lie-Algebra erhalten, die mit quasi-exakt lösbaren Hamilton-Operatoren assoziiert ist, beispielhaft belegt. Dieses Ergebnis könnte in weitergehenden Untersuchungen verallgemeinert werden, indem der entsprechende Nachweis für einen beliebigen quasi-exakt lösbaren Hamilton-Operator erbracht wird.

6 Literaturverzeichnis

- [Shi 99] Shifman, M. A.: *ITEP Lectures on Particle Physics and Field Theory*, Volume II, World Scientific Lecture Notes in Physics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore 1999

- [Gon 91] González-López, A.; Kamran, N.; Olver, P. J.: *Quasi-exact Solvability*, Comtemp. Math. 160 (1991), S. 113-140

- [Fis 06] Fischer, H.; Kaul, H.: *Mathematik für Physiker, Band 3*, 2. Auflage, B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2006

- [Mod 11] Modler, F.; Kreh, M.: *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*, 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2011

Erklärung des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel

Äquivalenz von quasi-exakt lösbaren quantenmechanischen Potentialen

selbstständig verfasst habe, und dass ich keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Ort, Datum: ______________________

Unterschrift: ______________________