Stephan Eule

Renormierung der Instanton-Übergangsamplitude im Abel'schen Higgs-Modell

Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Februar 2004

Renormierung der Instanton-Übergangsamplitude im Abel'schen Higgs-Modell

als Diplomarbeit vorgelegt von

Stephan Eule

Februar 2004

Institut für Theoretische Physik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Diese korrigierte Version unterscheidet sich geringfügig von der dem Prüfungssekretariat vorgelegten.

Münster, den 13.03.2004

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Seit dem Jahr 1930, in dem *P. A. M. Dirac* die Existenz von Antimaterie postuliert hat, ist klar, dass Teilchen und Antiteilchen symmetrisch zueinander sein sollten. Ein System, das nur aus Teichen besteht, sollte sich genauso verhalten wie ein System, bei dem man Teilchen durch Antiteilchen ersetzt. Die Annahme, dass sich Teilchen und Antiteilchen symmetrisch verhalten, steht jedoch im krassen Widerspruch zu der Beobachtung, dass unser Universum fast nur aus normaler Materie aufgebaut ist.
Man hat bisher noch keinen Beweis dafür erbringen können, dass irgendwo im Universum große Mengen an Antimaterie vorhanden sind. Würden diese auf Materie treffen, müsste es aufgrund der Vernichtungsprozesse von Materie und Antimaterie zu gewaltigen Ausbrüchen von Gammastrahlung kommen. Diese sind bisher allerdings noch nicht beobachtet worden. Daher kann man annehmen, dass das Universum, bis auf kleine Ausnahmen bei hochenergetischen Reaktionen, die die Erzeugung von Antiteilchen zur Folge haben können, ausschließlich aus Materie besteht.
Im frühen Universum müssen also baryonenzahlverletzende Prozesse stattgefunden haben, die die Symmetrie zwischen Materie und Antimaterie brachen. Eine mögliche Erklärung liefern die sogenannten "Großen vereinheitlichten Theorien". Ihr Grundgedanke ist, dass über einer gewissen Energie die innere Symmetriegruppe durch ein G gegeben ist, die sich dann bei niedrigeren Energien durch eine Reihe von spontanen Symmetriebrechungen auf die Gruppe des Standardmodells reduziert. Eine irreduzible Darstellung einer solchen Gruppe G kann sowohl Quarks als auch Leptonen enthalten, so dass hier baryonenzahlverletzende Prozesse möglich sind.
Eine andere Möglichkeit wurde 1976 von *G. 't Hooft* vorgeschlagen [23]. Er fand heraus, dass eine Baryonenzahlverletzung im elektroschwachen Standardmodell aufgrund topologischer Prozesse möglich ist. Dabei verknüpfte er die Anomaliestruktur des elektroschwachen Standardmodells mit der Topologie der zugehörigen Eichfelder.
Berechnungen zu baryonenzahlverletzenden Prozessen im elektroschwachen Standardmodell sind allerdings äußerst kompliziert und schwierig. Daher wird auf ein einfacheres "Spielzeugmodell" zurückgegriffen, in dem sich manche Rechnungen sogar analytisch durchführen lassen.
Das zweidimensionale Abel'sche Higgs-Modell besitzt einige Gemeinsamkeiten mit dem elektroschwachen Standardmodell. So sind aufgrund der nichttrivialen Vakuumstruktur des zweidimensionalen Higgs-Modells und derselben Anomalie im baryonischen Strom auch hier baryonenzahlverletzende Prozesse möglich.
In der Vakuumstruktur unterscheiden sich die Minima um eine topologische Größe, die man

Pontryagin-Klasse nennt. Klassische Lösungen der Feldgleichungen, die eine ganzzahliges Vielfaches der Pontryagin-Klasse als topologische Ladung besitzen, können also Tunnelprozesse von einem Vakuum in ein anderes beschreiben. Solche Lösungen, die gleichzeitig auch ein Minimum der euklidischen Wirkung sind, nennt man Instantonen. Ihre Existenz wurde erstmals von *Belavin et al.* in vierdimensionalen Yang-Mills-Theorien gezeigt [2]. In zwei Dimensionen ist eine solche Instanton-Lösung durch den Vortex gegeben. Diese radialsymmetrische Lösung wurde von *Nielsen* und *Olesen* konstruiert [14].
Wie *'t Hooft* zeigen konnte, entspricht die Verletzung der Erhaltung des axialen Stromes, die angibt, um wie viel sich die Baryonenzahl verändern kann, aber gerade der Pontryagin-Klasse. So kann ein Instantonübergang eine Baryonenzahlverletzung induzieren.
Die Instantonübergangsamplitude ist proportional zu e^{-S} (s. z.B. [5], [20] oder [15]). Um Ein-Loop-Korrekturen zur Instantonübergangsamplitude zu berücksichtigen ersetzt man die klassische durch die effektive Wirkung (siehe [6] oder in die Quantenfeldtheorie einführende Bücher). Diese Ein-Loop-Korrektur ist aber divergent, so dass die effektive Wirkung renormiert werden muss. Die Isolation der Divergenzen mittels der Methode der dimensionellen Regularisation und die anschließende Renormierung der effektiven bis zur Ein-Loop-Ordnung war Aufgabe dieser Diplomarbeit. Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen der U(1)-Eichtheorie besprochen und der Higgs-Mechanismus eingeführt. Außerdem wird der Vortex als eine Soliton-Lösung in zwei Dimensionen erläutert. Die klassische Wirkung des Vortex wird im Anhang A für den Spezialfall gleicher Higgs- und Eichfeldmasse berechnet.
Im zweiten Kapitel wird das Konzept der Instantonen dargestellt und eine Formel für die Tunnelamplitude hergeleitet. Im Anhang B werden die Grundzustandseigenschaften des harmonischen Oszillators mit den im Kapitel zwei besprochenen Methoden berechnet.
Im dritten Kapitel wird der Vortex als eine Instanton-Lösung im Abel'schen zweidimensionalen Higgs-Modell erläutert, die eine Baryonenzahlverletzung induzieren kann. Weiterhin wird eine nichtpertubative Methode zur Berechnung der Ein-Loop-Korrektur zur effektiven Wirkung vorgestellt, die von *J. Baacke* entwickelt wurde [1]. Im Anhang C ist eine Rechnung zu diesem Verfahren angegeben, die im Kapitel 3 übersprungen wurde.
Im 4. Kapitel werden zunächst die divergenten Anteile der effektiven Wirkung isoliert, bevor diese dann renormiert wird.

Kapitel 1

U(1)-Eichtheorie und der Higgsmechanismus

1.1 Globale und lokale Eichsymmetrien

Untersucht man Eichtheorien mit einer Lagrangedichte $\mathcal{L}$, so stellt man fest, dass diese unter bestimmten Transformationen der Felder invariant bleibt. Werden nur Transformationen der Felder selbst, die die Raum-Zeit-Koordinaten invariant lassen, betrachtet, so nennt man diese Eichtransformationen. Man spricht in dem Zusammenhang von Eichsymmetrien oder auch inneren Symmetrien.
Als Beispiel für das Eichprinzip soll ein komplexes Skalarfeld dienen, dessen klassische Lagrangedichte die Form

$$\mathcal{L}_0\left(\phi(x), \partial^\mu \phi(x)\right) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \tag{1.1}$$

besitzt, die unter globalen Phasentransformationen der Art

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) e^{-i\varphi} \tag{1.2}$$

offensichtlich invariant ist. Hierbei ist α eine beliebige reelle Konstante, die nicht von x abhängen, also global denselben Wert besitzen soll. Zu dieser Symmetrie gibt es nach dem Theorem von *Noether* einen divergenzlosen, also erhaltenen Strom der Form:

$$j^\mu = const.\left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*\right). \tag{1.3}$$

Nun möchte man erreichen, dass man sich nicht auf globale Transformationen beschränken muss, sondern auch Raum-Zeit-abhängige Phasenfaktoren zulassen darf:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) e^{-i\varphi(x)}. \tag{1.4}$$

Allerdings transformiert sich $\partial^\mu \phi$ nicht mehr wie ϕ, wie es noch bei den globalen Transformationen der Fall war:

$$\partial^\mu \phi(x) \longrightarrow \partial^\mu \phi'(x) = \partial^\mu(\phi(x)) e^{-i\varphi(x)} + \partial^\mu(e^{-i\varphi(x)})\phi(x), \tag{1.5}$$

sondern erhält einen zusätzlichen Term. $\mathcal{L}$ ist somit nicht invariant unter einer lokalen Eichtransformation. Da dieses aber erstrebenswert ist, muss $\mathcal{L}$ geeignet erweitert werden, so dass sich $\partial^\mu \phi$ wieder genauso transformiert wie ϕ.
Definiert man ein Vektorfeld A^μ, das sich nach der Regel

$$A^\mu(x) \longrightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \frac{1}{e}\partial^\mu \varphi(x) \tag{1.6}$$

transformiert, so kann man eine "kovariante Ableitung" durch

$$D^\mu \phi(x) \equiv (\partial^\mu + ieA^\mu)\,\phi(x) \tag{1.7}$$

definieren, die sich genauso transformiert wie $\phi(x)$. Die Skalierung von ϕ zu A^μ wird durch e festgelegt.
Die neue Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, D^\mu\phi)$ ist nun unter lokalen Transformationen invariant, enthält allerdings das Eichfeld A^μ als externes Feld. Um ein geschlossenes dynamisches System zu definieren, muss man also noch einen Term zur Lagrangedichte hinzufügen, der die Dynamik des Eichfeldes festlegt. Hierfür eignet sich ein Term proportional zu $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, wobei

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \tag{1.8}$$

der elektro-magnetische Feldstärketensor ist.
Insgesamt gelangt man also zu einer Lagrangedichte, die ein geschlossenes dynamisches System beschreibt und invariant unter lokalen Eichtransformationen ist:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_0(\phi, D^\mu\phi). \tag{1.9}$$

Die Bewegungsgleichungen, die sich aus dieser Lagrangedichte ergeben, sind gerade die der skalaren Elektrodynamik.
Schreibt man die Eichtransformationen als:

$$\phi(x) \quad\longrightarrow\quad e^{-ie\omega(x)}\phi(x) \tag{1.10}$$
$$A^\mu(x) \quad\longrightarrow\quad A^\mu(x) + \partial^\mu\omega(x), \tag{1.11}$$

erkennt man, dass es sich um eine U(1)-Symmetrie mit dem Generator e handelt.
In der Lorentz-Eichung ($\partial_\mu A^\mu = 0$) lauten die Bewegungsgleichungen für das Eichfeld $\Box A^\mu = j^\mu$. Nimmt man nun an, dass $\phi = 0$ der niedrigste Zustand des Systems ist ($<\phi>= 0$ in einer quantisierten Theorie), geht diese Gleichung über in $\Box A^\mu = 0$. Die Lösungen hierzu sind ebene Wellen, was masselosen Photonen in der Quantentheorie entspricht. Diese Situation ändert sich allerdings, wenn der Vakuumerwartungswert $<\phi>\neq 0$ ist und somit nicht mehr um 0 entwickelt werden darf. Man spricht dann von einer "spontanen Symmetriebrechung" oder einer "versteckten Symmetrie".

1.2 Spontane Symmetriebrechung

Eine Symmetrie wird "spontan gebrochen" genannt, wenn der Zustand niedrigster Energie nicht mehr invariant unter den zu dieser Symmetrie gehörenden Transformationen ist.

Zunächst soll der Fall einer gebrochenen globalen Symmetrie diskutiert werden. Als Beispiel hierfür möge wieder die Lagrangedichte (1.1) dienen. Das Potential habe hierbei die spezielle Form

$$V(\phi^*\phi) = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2. \tag{1.12}$$

Sucht man nun nach den Minima des Potentials, also den Grundzuständen der Theorie, erkennt man, dass sie entscheidend von der Wahl der Vorzeichen der Parameter m^2 und λ abhängen (m^2 wird als reiner Parameter betrachtet und nicht wie üblich als Massequadrat).

Wählt man $m^2 > 0$ und $\lambda > 0$, so hat man wieder ein Potential, dessen Grundzustand bei $\phi = 0$ liegt und somit invariant unter Phasentransformationen der Felder ist. Das ändert sich aber für $m^2 < 0$. Dann erhält man nämlich einen neuen Grundzustand bei $\phi_0^2 = -\frac{m^2}{2\lambda}$. Dieser ist unendlichfach entartet, da die Minima des Potentials auf einem Kreis liegen[1]. Das Potential (1.12) lässt sich hiermit auch schreiben als:

$$V(\phi^*\phi) = \lambda(\phi^*\phi - \phi_0^2)^2. \tag{1.13}$$

Um nun die energetisch niedrigsten Zustände der zugehörigen quantisierten Theorie zu bestimmen, muss man die niedrigsten klassischen Moden untersuchen. Dazu wird das Feld um einen der Grundzustände entwickelt:

$$\phi(x) = [\phi_0 + \zeta(x)]e^{i\varphi(x)}, \tag{1.14}$$

so dass man, anstatt eines komplexen jetzt zwei reelle Felder zu untersuchen hat. Die Lagrangedichte hat nun die Form:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial^\mu\zeta\partial_\mu\zeta - \lambda(\phi_0+\zeta)^2\zeta^2 + (\phi_0+\zeta)^2\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi. \tag{1.15}$$

Nimmt man an, dass ζ klein ist, kann man die Terme, die höher als die zweite Ordnung sind, vernachlässigen. Man erhält:

$$\mathcal{L}_0 \cong \frac{1}{2}\partial^\mu\zeta\partial_\mu\zeta - 2\lambda\phi_0^2\zeta^2 + \frac{1}{2}\phi_0^2\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \mathcal{O}(\zeta^3). \tag{1.16}$$

Die ersten beiden Terme beschreiben ein freies skalares Teilchen der Masse $2\phi_0\sqrt{\lambda}$, der dritte ein masseloses Skalarteilchen. Die vernachlässigten Terme beschreiben die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen.

Allgemein kann man zeigen, dass die spontane Brechung einer globalen Symmetrie die Existenz eines masselosen Spin-0-Teilchens erfordert. Dieses Theorem geht auf *Goldstone* zurück und ist als der Goldstonemechanismus bekannt.

Man kann die obige Aussage auf beliebige Symmetriegruppen erweitern und muss sich nicht auf die U(1) beschränken. Ist $\mathcal{L}$ invariant unter einer beliebigen Gruppe G und ist das Vakuum gebrochen bis auf eine Untergruppe H von G, so manifestieren sich die gebrochenen Symmetrien in der Existenz von Goldstone-Bosonen. Allgemein kann man zeigen, dass die Anzahl der Goldstone-Bosonen durch dim G/H gegeben ist. Hierauf möchte ich aber nicht weiter eingehen, da ich mich im Folgenden auf die U(1)-Symmetrie beschränken werde.

---

[1] Für den Fall $m^2 < 0$ und $\lambda < 0$ gibt es zwar auch ein lokales Potentialminimum, allerdings ist das Potential nach unten nicht beschränkt. In einer solchen Theorie können keine stabilen Teilchen existieren (vgl. [10]).

1.3 Der Higgsmechanismus

Die Situation ändert sich nun, wenn man untersucht, wie sich eine lokale Symmetrie verhält, wenn sie gebrochen wird. Als Beispiel soll die Lagrangedichte (1.9) dienen:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - V(\phi^*\phi), \tag{1.17}$$

wobei $V(\phi^*\phi)$ durch (1.13) gegeben sei. Die lokale Eichsymmetrie, die diese Lagrangedichte besitzt, ist allerdings gebrochen, wenn $\phi_0 \neq 0$, da $\mathcal{L}$ in diesem Fall nicht mehr invariant unter den lokalen Transformationen (1.10) und (1.11) ist.
Die Lösung mit der niedrigsten Energie ist für das skalare Feld durch (1.14) mit $\zeta(x) = 0$ gegeben und für das Vektorfeld durch

$$A^\mu = 0 \tag{1.18}$$

Bei dem komplexen Skalarfeld kann man die Phase nun durch eine kontinuierliche Eichtransformation wegeichen, so dass das Skalarfeld überall reell ist. Diese Eichung nennt man die "unitäre Eichung". Entwickelt man ϕ wieder um seinen Vakuumwert:

$$\phi(x) = \phi_0 + \zeta(x), \tag{1.19}$$

erhält man für die Lagrangedichte in unitärer Eichung:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e^2\phi_0^2 A^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\partial^\mu\zeta\partial_\mu\zeta - 2\lambda\phi_0^2\zeta^2 + h.o.\,. \tag{1.20}$$

(h.o. steht hier für Terme höherer Ordnung) Diese Lagrangedichte besteht dann aus zwei Feldern, dem Vektorfeld mit Spin 1 und dem reellen Skalarfeld mit Spin 0, die beide massiv sind. Das zum Vektorfeld gehörige Photon hat die Masse ev und das Spin-0-Teilchen die Masse $\sqrt{2\lambda}v$, wobei v jetzt der Vakuumwert sein soll.
In dem Teilchenspektrum ist das Goldstone-Boson nicht enthalten. Es verschwindet durch die Wahl der Eichung. Dafür ist das Photon, das vorher noch masselos war, jetzt massiv geworden.
Dieses Phänomen wird "Higgsmechanismus" genannt. Man beachte, dass die Zahl der Freiheitsgrade bei diesem Mechanismus natürlich erhalten bleibt. Das Goldstonefeld verschwindet zwar, aber dafür hat das Vektorfeld durch seine Masse eine longitudinale Polarisationsrichtung erhalten.

1.4 Der Vortex

Es ist nun interessant nach Lösungen der klassischen Feldgleichungen zu suchen, die eine endliche Energie besitzen. Lösungen, deren Energiedichte im Unendlichen hinreichend schnell gegen null geht, nennt man Solitonen. Die Frage, ob solche Solitonlösungen überhaupt stabil sind, lässt sich mit Hilfe topologischer Argumente beantworten.
Als erstes soll überlegt werden, welche Bedingungen an die Felder gestellt werden müssen, damit Lösungen endlicher Energie möglich sind. Im Folgenden wird der zweidimensionale

Fall betrachtet, da dieser für den weiteren Verlauf dieser Arbeit interessant ist.
Die Lagrangedichte sei wieder (1.17), die Lagrangedichte des Abel'schen Higgsmodells. Aus der Bedingung, dass die zugehörige Hamiltondichte endlich sein soll, folgt (in zwei Dimensionen):

$$\int d^2x(\vec{B}^2 + \vec{E}^2) < \infty \tag{1.21}$$

$$\int d^2x V(\phi^*\phi) < \infty. \tag{1.22}$$

Aus (1.21) ergibt sich, dass $F^{\mu\nu}$ sich asymptotisch wie x^{-2} verhalten sollte, was bedeutet, dass

$$A^\mu \longrightarrow \partial^\mu \varphi + \mathcal{O}(x^{-1}) \ \ (|\vec{r}| \to \infty). \tag{1.23}$$

A^μ muss also im Unendlichen gegen eine pure Eichform streben.
Die zweite Bedingung (1.22) beinhaltet, dass $\phi(x)$ gegen seinen Vakuumswert streben muss:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi_0(x)e^{-i\varphi(x)} \ \ (|\vec{r}| \to \infty). \tag{1.24}$$

Geht man zur temporären Eichung über, d.h. $A^0 = 0$, werden die Randbedingungen im Unendlichen zu

$$\vec{A}(\vec{x}) \ \stackrel{\vec{x}\to\infty}{\longrightarrow} \ \frac{1}{e}\nabla\varphi(\vec{x}) \tag{1.25}$$

$$\phi(\vec{x}) \ \stackrel{\vec{x}\to\infty}{\longrightarrow} \ \phi_0 e^{i\varphi(\vec{x})}. \tag{1.26}$$

Die Felder sind auf einem Kreis K mit sehr großem Radius somit allein durch die Angabe eines Winkels θ bestimmt. Weiterhin muss $\phi(\theta)$ als Lösung einer Differentialgleichung stetig sein, woraus

$$\phi(2\pi) = \phi(0) \tag{1.27}$$

folgt. Diese Bedingung impliziert

$$\varphi(2\pi) - \varphi(0) = 2\pi n. \tag{1.28}$$

Der magnetische Fluss durch K lässt sich somit leicht berechnen:

$$\Phi = \int_K d\vec{f} \cdot \vec{B} = \oint_K d\vec{s} \cdot \vec{A}. \tag{1.29}$$

Hierbei ist $d\vec{f}$ ein orientiertes Flächenelement der Kreisfläche, die von K umschlossen wird, und $d\vec{s}$ ist ein Linienelement des Kreisbogens um K.
Mit (1.25), (1.26) und (1.28) erhält man schließlich:

$$\Phi = \frac{2\pi n}{e} \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{1.30}$$

Der Fluss durch K muss also notwendigerweise quantisiert sein, damit man Lösungen endlicher Energie erhält.
In drei räumlichen Dimensionen ist $n = 0$ zu wählen, da sonst die bis ins Unendliche laufenden $\vec{B}$-Feld-Linien die Bedingung (1.21) verletzen würden. In zwei Dimensionen

ist aber jedes ganzzahlige n zugelassen. Dieser Fall kann als eine dreidimensionale Lösung aufgefasst werden, die unabhängig von der z-Richtung konstante Energie pro Einheitslänge entlang der z-Achse hat.
Für den zweidimensionalen Fall kann man sich überlegen, dass die Randbedingungen nur davon abhängen, welchen spezifischen Wert n annimmt. Schreibt man nämlich $\varphi(\theta)$ als $\varphi(\theta) = n\theta + \alpha(\theta)$ mit $\alpha(2\pi) - \alpha(0) = 0$, so lässt sich α als kontinuierliche Funktion durch eine kontinuierliche Eichtransformation wegeichen. Dann gehen die Randbedingungen über in

$$\vec{A}(\vec{x}) \overset{\vec{x}\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}\nabla(n\theta) = \hat{\vec{\theta}}\frac{n}{er} \tag{1.31}$$

$$\phi(\vec{x}) \overset{\vec{x}\to\infty}{\longrightarrow} \phi_0 e^{in\theta}. \tag{1.32}$$

Eine Frage, die sich jetzt natürlich stellt, ist, warum solche Lösungen überhaupt stabil sind. Die Gründe sind, wie schon weiter oben erwähnt, topologischer Natur.
Auf dem Rand ($r \to \infty$) wird ϕ durch die Gleichung (1.32) beschrieben. In zwei Dimensionen ist dieser Rand gerade ein Kreis S^1 (ein Kreis mit unendlichem Radius). Gleichung (1.32) ist auch eine Darstellung der Symmetriegruppe U(1). Der Gruppenraum der U(1) ist aber auch gerade ein Kreis S^1.
ϕ beschreibt also eine Abbildung des Randes S^1 des physikalischen Raumes in den Gruppenraum S^1 der U(1):

$$\phi : S^1 \mapsto S^1, \tag{1.33}$$

wobei diese Abbildung durch ein $n \in \mathbb{Z}$ festgelegt ist. Eine Lösung, die durch ein n charakterisiert ist, kann nicht kontinuierlich in eine Lösung mit anderem n überführt werden. Daher sind Vortexlösungen in zwei Dimensionen stabil. Mathematisch ausgedrückt ist die erste Homotopiegruppe $\pi_1(S^1)$ des S^1 nichttrivial. Man sagt auch, dass durch n verschiedene Eichklassen klassifiziert werden, die nicht durch kontinuierliche Eichtransformationen ineinander überführt werden können.
Es gibt also unendlich viele Grundzustände, da n nicht beschränkt ist. Die Vakuumstruktur des Abel'schen Higgsmodells ist daher nichttrivial.
Die Bewegungsgleichungen, die sich aus (1.17) ergeben, lauten:

$$D^\mu(D_\mu\phi) = -2m^2\phi - 4\lambda\phi^2\phi^* \tag{1.34}$$

$$\frac{1}{2}ie(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) + e^2 A_\mu\phi^*\phi = \partial^\nu F_{\mu\nu}. \tag{1.35}$$

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass diese Gleichungen Lösungen mit den Randbedingungen (1.31) und (1.32) zulassen. Für $n \neq 0$ ist magnetischer Fluss vorhanden, so dass das A-Feld nicht überall einer puren Eichung entsprechen kann. A und ϕ ändern also ihre Werte für $r \to 0$. Es ist sinnvoll zu Polarkoordinaten überzugehen, da die Vortexlösung offensichtlich zylindersymmetrisch ist. Aufgrund der Randbedingungen muss $\vec{A}(\vec{r})$ von der Form:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\hat{e}_\varphi\frac{A(r)}{r} \tag{1.36}$$

und ϕ von der Form:

$$\phi(\vec{r}) = f(r)e^{-in\varphi} \tag{1.37}$$

sein. Die statischen Bewegungsgleichungen ergeben sich so zu:

$$\frac{d^2A}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dA}{dr} - e(n+eA)f^2 = 0 \tag{1.38}$$

$$\frac{d^2f}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{df}{dr}\frac{(n+eA)^2}{r^2}f + 2m^2f + 4\lambda f^3 = 0. \tag{1.39}$$

Zu diesem nichtlinearen gekoppelten Differentialgleichungssystem wurde bisher keine exakte analytische Lösung gefunden. Für die Näherung $f \cong \phi_0$ (d.h. für $r \to \infty$) konnten *Nielsen* und *Olesen* eine Lösung angeben [14]:

$$A(r) = -\frac{n}{e} - \frac{cr}{e}K_1(|e|ar) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{n}{e} - \frac{c}{e}\left(\frac{\pi}{2|e|a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-|e|ar} + \dots . \tag{1.40}$$

Hierbei ist K_1 eine modifizierte Besselfunktion und c eine Integrationskonstante.
Für die Variation des Higgsfeldes erhält man:

$$f(r) = \phi_0 + e^{-\sqrt{-m^2}r}. \tag{1.41}$$

Für den Spezialfall, dass die Kopplungen die Relation $e^2 = 8\lambda$ erfüllen (das entspricht einer Äquivalenz der Higgs- und Eichfeldmasse), fanden *de Vega* und *Schaposnik* 1976 sogar eine exakte Lösung [25]. Diese ist im Anhang A angegeben.

Kapitel 2

Instantonen

Als Instantonen bezeichnet man lokalisierte Lösungen von euklidischen Feldgleichungen mit endlicher Wirkung. Instantonen spielen in der modernen Quantenfeldtheorie eine wichtige Rolle, weil man mit ihnen auch einige Prozesse beschreiben kann, deren Amplitude exponentiell klein ist, und die deswegen nicht durch die Störungstheorie erfasst werden können. Man hat somit eine Menge neuer Lösungen, die bisher verborgen waren. Der Name Instanton wurde von *'t Hooft* eingeführt, da die Lösung sowohl in der Zeit als auch im Raum lokalisiert ist. Eine andere gebräuchliche Bezeichnung ist Pseudopartikel.
Zur euklidischen Version einer Theorie gelangt man, indem man die Zeit um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn zur negativen imaginären Achse rotiert. Das entspricht einem Übergang von der minkowskischen Metrik $\eta^{\mu\nu}$ mit der Signatur $(+,-,-,-)$ zur euklidischen Metrik $\delta^{\mu\nu}$, die die Signatur $(+,+,+,+)$ besitzt. Diese analytische Fortsetzung zu imaginärer Zeit ist unter dem Namen Wick-Rotation bekannt. Nach einer Wick-Rotation geht die Lorentzinvarianz in eine $O(4)$-Invarianz über. Da es sich bei der Metrik nun um $\delta_{\mu\nu}$ handelt, muss man im Euklidischen nicht mehr obere und untere Indizes unterscheiden. Wie sich die Koordinaten und Feldkomponenten unter einer Wick-Rotation im einzelnen transformieren, kann man z.B. in [10] finden. Das Entscheidene für die noch folgenden Rechnungen ist der Übergang der minkowskischen Wirkung S zur euklidischen Wirkung S_{euk}:

$$S \longrightarrow S_{euk} = -iS. \tag{2.1}$$

Der Übergang in die euklidische Raum-Zeit ist nützlich, da sich bestimmte Eigenschaften von Minkowskischen Quantenfeldtheorien viel praktischer untersuchen lassen, wenn man von euklidischen Wirkungsfunktionalen ausgeht. Ein Beispiel hierfür ist das Tunneln zwischen verschiedenen entarteten Vakuumzuständen, das im nächsten Abschnitt ausführlich beschrieben wird.
Es besteht nun ein enger Zusammenhang zwischen den Instantonen und Solitonen, wie den in Kapitel 1 besprochenen Vortices. Wie man noch sehen wird, hat die euklidische Wirkung dieselbe Struktur wie die Energie einer statischen Feldkonfiguration in einer um eins höheren Dimension. Der Vortex kann also im zweidimensionalen (euklidischen) Abel'schen Higgs-Modell die Rolle eines Instantons übernehmen.
In der Quantenfeldtheorie werden die Instantonen in einer semiklassischen Approximation entwickelt. Die Feldkonfiguration, um die die Entwicklung beginnt, ist die klassische

Lösung.
Im nächsten Abschnitt soll zunächst die quantenmechanische Übergangsamplitude in semiklassischer Näherung (d.h. im Grenzwert für kleine $\hbar$) besprochen werden. Als Beispiel für diesen Formalismus werden im Anhang [B] die Grundzustandseigenschaften des harmonischen Oszillators berechnet. Danach werden dann Instantonen als semiklassische Näherung für Tunnelprozesse erläutert, wobei die Rechnungen anhand des anharmonischen Oszillators erklärt werden. Als Ergebnis wird sich eine Gleichung für die Übergangsamplitude von Instantonen ergeben, die sich dann ohne Probleme auf Prozesse in der Quantenfeldtheorie übertragen lässt.

2.1 Die quantenmechanische Übergangsamplitude in semiklassischer Näherung

Im Euklidischen[1] ist die Feynman'sche Pfadintegralformel gegeben durch:

$$< x_f|e^{\frac{-Ht_0}{\hbar}}|x_i >= N \int [dx] e^{-\frac{S}{\hbar}}. \tag{2.2}$$

Hierbei sind $|x_f >$ und $|x_i >$ Ortseigenzustände, H der Hamiltonoperator und t_0 eine positive Zahl. Auf der linken Seite kann man einen vollständigen Satz von Energieeigenzuständen einfügen:

$$< x_f|e^{\frac{-Ht_0}{\hbar}}|x_i >= \sum_n e^{\frac{-E_n t_0}{\hbar}} < x_f|n >< n|x_i > . \tag{2.3}$$

Für große t_0 ist auf der rechten Seite nur noch der Energiegrundzustand relevant. Der Limes $t_0 \to \infty$ gibt also Aufschluss über den Energiegrundzustand und die zugehörige Wellenfunktion.
Auf der rechten Seite der Pfadintegralformel ist N ein Normierungsfaktor und S die euklidische Wirkung:

$$S = \int_{-\frac{t_o}{2}}^{+\frac{t_o}{2}} dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x(t)) \right]; \tag{2.4}$$

$[dx]$ bezeichnet die Integration über alle Pfade, die die Randbedingungen $x(-\frac{t}{2}) = x_i$ und $x(+\frac{t}{2}) = x_f$ erfüllen. Man beachte, dass sich beim Übergang von der minkowskischen zur euklidischen Wirkung das Vorzeichen beim Potential geändert hat. Daher hat die euklidische Wirkung auch dieselbe Struktur wie die Energie einer statischen Feldkonfiguration.
Man möchte jetzt das Integrationsmaß genauer definieren, um das Pfadintegral berechnen zu können. Eine beliebige Funktion, die die Randbedingungen erfüllt, kann man nach einem vollständigen Satz reeller orthonormaler Funktionen entwickeln, die an den Rändern verschwinden:

$$x(t) = X(t) + \sum_n c_n x_n(t), \tag{2.5}$$

[1] Ab jetzt wird der Index $_{euk}$ zur Kennzeichnung des Euklidischen weggelassen.

wobei $X(t)$ die Randbedingungen erfüllen muss. Damit ergibt sich für die rechte Seite von (2.2):

$$N \int [dx] e^{-\frac{S}{\hbar}} = N \int \prod_{0}^{\infty} \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{S(X(t),[c_n])}{\hbar}}. \tag{2.6}$$

Das komplizierte Pfadintegral geht also in ein unendliches Produkt "einfacher" Integrale über.

In der semiklassischen Näherung[2] kann man das Pfadintegral nun in ein unendliches Produkt von Gauß'schen Integralen überführen und so auswerten. In diesem Fall wird die rechte Seite von (2.2) von den stationären Punkten von S dominiert.

Sei $X(t)$ jetzt ein Pfad mit minimaler Wirkung, der zu einem stationären Punkt von S gehört[3], dann gilt mit exponentieller Genauigkeit:

$$N \int [dx] e^{-\frac{S(x(t))}{\hbar}} \sim e^{-\frac{S_0}{\hbar}}, \tag{2.7}$$

wobei $S_0 \equiv S(X(t))$ die minimale Wirkung ist. $X(t)$ bestimmt man nun aus der Bedingung, dass die Wirkung extremal werden soll:

$$\frac{\delta S}{\delta X} = -\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{d}{dx} V(X) = 0. \tag{2.8}$$

Die Lösung dieser "euklidischen Bewegungsgleichung" muss natürlich wieder die Randbedingungen $x(-\frac{t}{2}) = x_i$ und $x(+\frac{t}{2}) = x_f$ erfüllen[4].

Um die Übergangsamplitude genauer zu bestimmen, entwickelt man die Wirkung bis zur zweiten Ordnung um das Minimum. Dazu benötigt man die zweite funktionale Ableitung am Minimum der Wirkung:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta X^2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2} V(X) \right]. \tag{2.9}$$

Die Entwicklung der Wirkung um das Minimum ist somit:

$$S(X(t) + \delta x(t)) = S_0 + \int_{-\frac{t}{2}}^{-\frac{t}{2}} dt \delta x(t) \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2} V(X) \right] \delta x(t). \tag{2.10}$$

Bei dem Term in der eckigen Klammer in (2.9) handelt es sich um eine quadratische Form, die diagonalisiert werden kann. Als geeignetes vollständiges Orthonormalsystem kann man die Funktionen $x_n(t)$ aus (2.5) verwenden:

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2} V(X) \right] x_n(t) = \lambda_n x_n(t). \tag{2.11}$$

Damit lässt sich die Wirkung (bis zur zweiten Ordnung) schreiben als:

$$S = S_0 + \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n^2 c_n. \tag{2.12}$$

---

[2]Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der "Sattelpunktsnäherung", obwohl es sich eigentlich um ein Minimum der Wirkung handelt und nicht um einen Sattelpunkt.

[3]Es kann auch mehrere stationäre Punkte geben, aber im Moment möge es nur einer sein.

[4]Man beachte, dass es sich bei der euklidischen Bewegungsgleichung um eine Newton'sche Bewegungsgleichung in einem Potential mit negativen Vorzeichen handelt.

Setzt man dieses nun in (2.2) ein, erhält man:

$$N \int [dx] e^{-\frac{S}{\hbar}} = N e^{-\frac{S_0}{\hbar}} \int \prod_{n=0}^{\infty} \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2\hbar}\sum_n \lambda_n^2 c_n}, \tag{2.13}$$

also ein unendliches Produkt von Gauß'schen Integralen, deren Lösung leicht anzugeben ist:

$$\int \frac{dc}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2\hbar}\lambda^2 c} = \lambda^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.14}$$

Das Produkt der Eigenwerte[5] kann auch aufgefasst werden als die Determinante der quadratischen Form:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \lambda_n = Det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2} V(X)\right]. \tag{2.15}$$

Als Ergebnis für die Übergangsamplitude in semiklassischer Näherung erhält man hiermit schließlich:

$$< x_f | e^{\frac{-Ht_0}{\hbar}} | x_i >= N e^{-\frac{S_0}{\hbar}} Det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2} V(X)\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.16}$$

Die reziproke Wurzel aus der Determinante wird manchmal auch der Präexponent genannt [20]. Nun muss noch die Frage beantwortet werden, wie man den Normierungsfaktor bestimmt. Dazu schaut man sich das Verhältnis

$$\frac{< x_f | e^{-\frac{t_o H}{\hbar}} | x_i >}{< x_f | e^{-\frac{t_o H_{frei}}{\hbar}} | x_i >} \tag{2.17}$$

an. Man normiert also auf ein schon bekanntes System[6]. Im Anhang B sind als Beispiel für das in diesem Abschnitt angegebene Verfahren die Grundzustandseigenschaften des Harmonischen Oszillators berechnet worden.

2.2 Instantonen als semiklassische Näherung für Tunnelprozesse

Die Formel (2.16) kann man nun auch dazu verwenden, um Tunnelprozesse zu beschreiben. Tunnelprozesse sind ein Beispiel für Prozesse, die nicht durch die Störungstheorie beschreibbar sind, da ihre Amplitude exponentiell klein ist. Als Beispiel soll hier der anharmonische Oszillator dienen, dessen Potential:

$$V(x) = \lambda(x^2 - a^2)^2 \tag{2.18}$$

ist. Das Potential möge so gewählt sein, dass es bei den Minima verschwindet, und die Oszillatorfrequenz an den Minima sei:

$$\frac{d^2}{dx^2} V(x)|_{x=\pm a} = \omega^2. \tag{2.19}$$

[5] Man geht erstmal davon aus, dass alle Eigenwerte positiv sind. Auf den Fall nichtpositiver Eigenwerte komme ich im nächsten Abschnitt zurück.

[6] Meistens wird, wie in diesem Fall, auf das freie System normiert.

Außerdem soll ab diesem Abschnitt $\hbar = 1$ gesetzt werden. Für den Fall $\lambda \to \infty$ einer unendlichen hohen Barriere, existieren nur zwei Lösungen für die euklidischen Bewegungsgleichungen (2.8), nämlich, dass ein Teilchen entweder auf der Spitze des einen oder des anderen Hügels bleibt[7]. Wenn $\lambda \neq 0$ ist, existiert aber noch die Möglichkeit, dass sich das Teilchen von der Spitze des einen Hügels zur Spitze des anderen bewegt. Diesen Pfad minimaler Wirkung kann man als Instanton auffassen. Diese Lösung existiert nur im Euklidischen. Eine analoge Lösung zur Newton'schen Bewegungsgleichung gibt es nicht, da man ohne Energie nicht von der einen Mulde zur anderen gelangen kann.
Die explizite Form der Instanton-Trajektorie kann als Lösung von (2.8) bestimmt werden. Erfolgt der Übergang von $-a$ nach a, ergibt sich für die Instanton-Trajektorie:

$$X_I(t) = a \tanh\left(\frac{\omega(t-t_c)}{2}\right), \tag{2.20}$$

wobei t_c das Zentrum des Instantons genannt wird. Es ist zu beachten, dass diese Lösung nur für den Grenzwert $t_0 \to \infty$ exakt ist. Den Übergang von a nach $-a$ kann man dann als Anti-Instanton $X_{\bar{I}}$ auffassen, dessen Trajektorie

$$X_I = -X_{\bar{I}} \tag{2.21}$$

ist. Die Wirkung der Instanton-Trajektorie lässt sich berechnen zu:

$$S_0 \equiv S(X_I(t)) = \frac{\omega^3}{12\lambda}, \tag{2.22}$$

womit sich dann für die Tunnelamplitude in exponentieller Genauigkeit (2.2):

$$< a|e^{-t_0 H}| - a > \sim e^{-S_0} = e^{-\frac{\omega^3}{12\lambda}} \tag{2.23}$$

ergibt. Zur Bestimmung des Präexponenten geht man jetzt wieder über zu (2.16):

$$< a|e^{-Ht_0}| - a > = N e^{-S_0} Det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2}V(X_I)\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.24}$$

Um die Normierungskonstante N zu bestimmen klammert man die schon bekannte Determinante des Harmonischen Oszillators (B.11) aus und erhält für die rechte Seite von (2.24):

$$N Det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{Det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2}V(X_I)\right]}{Det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right]}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-S_0}. \tag{2.25}$$

Wird nun (2.20) in $V(X)$ eingesetzt, erhält man für die Eigenwertgleichung der quadratischen Form:

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\left(1 - \frac{3}{2}\frac{1}{\cosh^2(\omega\frac{t}{2})}\right)\right] x_n(t) = \lambda_n x_n(t), \tag{2.26}$$

mit den Randbedingungen $x_n(\pm\frac{t_0}{2}) = 0$ und $t_0 \to \infty$. Diese Eigenwertgleichung wird in diversen Standardwerken der Quantenmechanik ausführlich besprochen (z.B. [12]). Es

[7] Das Doppelmuldenpotential wird durch den Vorzeichenwechsel beim Übergang zum Euklidischen zu einem Potential mit zwei Hügeln.

existiert jetzt eine Lösung von (2.26) zu dem Eigenwert $\lambda_0 = 0$. Solche zum Eigenwert 0 korrespondierenden Lösungen nennt man Nullmoden. Der physikalische Grund für das Auftreten solcher Nullmoden hängt damit zusammen, dass die euklidische Wirkung unter gewissen Transformationen invariant sein kann. Das Minimum der Wirkung kann also "entartet" sein.

Im Beispiel des anharmonischen Oszillators ist die Wirkung unabhängig vom Zentrum des Instantons t_c:

$$S(X_I(t,t_c)) = S(X_I(t,t_c+\delta t_c)). \tag{2.27}$$

Die Eigenfunktion der Nullmode $\lambda_0 = 0$ ist:

$$x_0(t) = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \cdot \frac{\partial}{\partial t_c} X_I(t,t_c). \tag{2.28}$$

Das Auftreten der Nullmode führt in (2.24) offensichtlich zu einer unendlichen Übergangsamplitude. Aus diesem Grund versucht man das Integral über die Nullmode in (2.13) vor die Determinante zu schreiben und dann in der Determinante die Nullmode wegzulassen. Dazu hilft die Überlegung, dass dc_0 proportional zu dt_c ist und somit

$$\int \frac{dc_0}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{S_0} \int \frac{dt_c}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.29}$$

gilt[8]. Das Determinantenverhältnis lässt sich dann schreiben als:

$$\left(\frac{Det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2}V(X_I)\right]}{Det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right]} \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{S_0}{2\pi}} \omega dt_c \cdot \left(\frac{Det'\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2}V(X_I)\right]}{\omega^{-2} Det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right]} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.30}$$

Der Strich an der Determinante bedeutet, dass die Nullmoden[9] weggelassen werden sollen[10]. Den Faktor ω klammert man aus, um das Determinantenverhältnis bestimmen zu können. Dieses kann man ausrechnen zu (s. [20]):

$$\left(\frac{Det'\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2}V(X_I)\right]}{\omega^{-2} Det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right]} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}. \tag{2.31}$$

Mithilfe von (2.24), (2.25), (2.30) und (2.31) ist man schließlich in der Lage, den "Ein-Instanton-Beitrag" zur Tunnelamplitude pro Zeit anzugeben.

$$< a|e^{-Ht_0}| - a >= \left(\sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega t_0}{2}} \right) \left(\sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{S_0} e^{-S_0} \right) \omega dt_c \tag{2.32}$$

Die gesamte Amplitude für ein Zeitintervall ergibt sich dann durch Integration über dt_c. Da man sich für große Zeiten t_0 interessiert, muss man in Betracht ziehen, dass nicht nur

[8] Dieses Ausnutzen der Proportionalität und dem damit verbundenen Übergang zur Integration über dt_0 nennt man in der Literatur manchmal auch die Einführung von sog. kollektiven Koordinaten [20].

[9] Es können auch mehrere Nullmoden auftreten

[10] Diese Methode im Umgang mit Nullmoden beschränkt sich nicht nur auf dieses Beispiel, sondern kann allgemein angewendet werden (s. z.B. [5] oder [20] für Nullmoden bei Instantonen in der QCD).

ein Instanton zur Tunnelamplitude beiträgt, sondern auch Superpositionen von Instantonen und Anti-Instantonen[11].
Durch geeignete Wahl des Parameters λ, durch den die Höhe der Barriere bestimmt ist, kann man nun erreichen, dass die Dichte der Instantonen, also der Tunnelereignisse, klein wird. In einem solchen Fall sind Instantonen im Durchschnitt wohlsepariert, d.h. man kann die Wechselwirkung zwischen den Instantonen vernachlässigen. Diese Näherung ist bekannt unter dem Namen "dilute gas approximaton".
Hätte man nun nicht die schmalen Übergangsregionen, würde man dasselbe Ergebnis wie beim Harmonischen Oszillator erwarten. Die Übergangsregionen liefern dann eine Korrektur hierzu:

$$\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}e^{-\frac{\omega t_0}{2}} \longrightarrow \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}e^{-\frac{\omega t_0}{2}}\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}\sqrt{S_0}e^{-S_0}\right)^n \prod_1^n(\omega dt_0). \tag{2.33}$$

Um zu dem Betrag zu gelangen, den eine solche Konfiguration zur Übergangsamplitude beiträgt, muss man jetzt noch über die n Zentren der Instantonen integrieren:

$$\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}e^{-\frac{\omega t_0}{2}}d^n\int_{-\frac{t_0}{2}}^{+\frac{t_0}{2}}\omega dt_n\int_{-\frac{t_0}{2}}^{t_n}\omega dt_{n-1}\cdots\int_{-\frac{t_0}{2}}^{t_2}\omega dt_1 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}e^{-\frac{\omega t_0}{2}}d^n\frac{(\omega t_0)^n}{n!}, \tag{2.34}$$

wobei d die Instanton-Dichte bedeutet:

$$d = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\sqrt{S_0}e^{-S_0}. \tag{2.35}$$

Die gesamten Übergangsamplituden erhält man jetzt, wenn man über die einzelnen Beiträge für n Instantonen summiert. Hierbei muss beachtet werden, dass beim Übergang von $-a$ nach a, (bzw. a nach $-a$) nur die Übergänge mit einer ungeraden Anzahl von Instantonen beitragen, während bei einem Übergang von a nach a (bzw. $-a$ nach $-a$) die Anzahl der Instantonen gerade sein muss.
Für die gesamten Übergangsamplituden folgt somit schließlich:

$$\begin{aligned} < a|e^{-Ht_0}|-a> &= \sum_{n=1,3,\cdots}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}e^{-\frac{\omega t_0}{2}}d^n\frac{(\omega t_0)^n}{n!} && (2.36)\\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}e^{-\frac{\omega t_0}{2}}\sinh(\omega t_0 d), && (2.37)\\ < a|e^{-Ht_0}|a> &= \sum_{n=0,2,\cdots}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}e^{-\frac{\omega t_0}{2}}d^n\frac{(\omega t_0)^n}{n!} && (2.38)\\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}e^{-\frac{\omega t_0}{2}}\cosh(\omega t_0 d). && (2.39)\end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass dieses Ergebnis im Grenzwert $t_0 \to \infty$ die Grundzustandseigenschaften reproduziert, die man mit Standardmethoden der Quantenmechanik berechnen kann.
Die Formel (2.24) für die Übergangsamplitude wird zusammen mit den Methoden zur Berechnung des präexponentiellen Faktors und dem Umgang mit den Nullmoden im Verlauf der Arbeit noch eine wichtige Rolle spielen.

[11] Instantonen sind nur für $t_0 \to \infty$ exakte Lösungen der euklidischen Bewegungsgleichung. Für endliche t_0 ist diese Lösung nur noch näherungsweise gültig.

Kapitel 3

Der Ein-Loop-Beitrag zur effektiven Wirkung

In diesem Kapitel wird eine Gleichung zur Bestimmung des Ein-Loop-Beitrags zur effektiven Wirkung hergeleitet. Dazu wird zunächst das Abel'sche Higgs-Modell vorgestellt und die effektive Wirkung eingeführt.
Mit Hilfe der effektiven Wirkung ist man in der Lage, die (unrenormierte) Instanton-Übergangsrate bis zur Ein-Loop-Ordnung anzugeben:

$$\Gamma = \frac{S(\phi_{cl})}{2\pi} \exp(-S_{eff}^{1loop}) \exp(-S(\phi_{cl})). \tag{3.1}$$

Diese Gleichung ist die direkte Verallgemeinerung der im vorherigen Kapitel hergeleiteten Gleichung (2.24), wobei $\exp(-S_{eff}^{1loop})$ dem präexponentiellen Faktor entspricht. Der Faktor $\frac{S(\phi_{cl})}{2\pi}$ berücksichtigt die Integration über die kollektiven Koordinaten.[1]
Die effektive Wirkung muss noch renormiert werden, was im nächsten Kapitel geschehen soll.

3.1 Das klassische Modell

In diesem Abschnitt wird zunächst das um einen fermionischen Sektor erweiterte euklidische Abel'sche Higgs-Modell erläutert und es wird beschrieben, welche Form die Vortex-Lösung besitzt. Dabei wird sich zeigen, dass dieses Instanton eine topologische Ladung besitzt, wodurch baryonenzahlverletzende Prozesse möglich sind.
Das euklidische Abel'sche Higgs-Modell wird beschrieben durch die Lagrangedichte (s. z.B. [17] oder [5])

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}|D_\mu\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}\left(|\phi|^2 - v^2\right)^2 + \mathcal{L}_f, \tag{3.2}$$

[1] Es existieren also zwei Parameter unter deren Änderung die Wirkung invariant bleibt.

mit

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu && (3.3)\\
D_\mu &= \partial_\mu - igA_\mu && (3.4)\\
\mathcal{L}_f &= i\sum_{i=1}^{n_f} \overline{\Psi}_L^{(i)} \hat{D}_L \Psi_L^{(i)} + i\sum_{j=1}^{n_f} \overline{\Psi}_R^{(j)} \hat{D}_R \Psi_R^{(j)} && (3.5)\\
\hat{D}_{L(R)} &= \gamma_\mu \left(\partial_\mu \mp igA_\mu\right) \ . && (3.6)
\end{aligned}
$$

Der Grundzustand liegt bei $v^2 = \frac{-m^2}{\lambda}$ und das Teilchenspektrum besteht aus Eichbosonen der Masse $m_W = g^2v^2$, Higgsbosonen der Masse $m_H = 2\lambda v^2$ und masselosen rechts- und linkshändigen Fermionen. Im eichinvarianten fermionischen Strom

$$J_\mu = \sum_{i=1}^{n_f} \overline{\Psi}_L^{(i)} \gamma_\mu \Psi_L^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_f} \overline{\Psi}_R^{(j)} \gamma_\mu \Psi_R^{(j)} \tag{3.7}$$

tritt eine Anomalie auf, die gegeben ist durch (s. z.B. [4]):

$$\partial_\mu J_\mu = 2n_f \left(\frac{g}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right). \tag{3.8}$$

Wird nun über diese Divergenz integriert, ergibt sich eine Verletzung der Erhaltung der axialen Ladung F

$$\Delta F = 2n_f \left(\frac{g}{4\pi}\int d^2x\, \varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) \equiv 2n_f q, \tag{3.9}$$

wobei q gerade der Pontryagin-Klasse in zwei Dimensionen entspricht (s. z.B. [17]). Durch diese Verletzung sind Zerfälle möglich, die die Leptonen- und Baryonenzahl ändern [23].[2]
Ein Eichfeld mit nichtverschwindender topologischer Ladung q kann somit eine Baryonenzahlverletzung induzieren. Sind die Parameter des Modells geeignet gewählt, so lassen sich die Instanton-Übergänge durch die in Kapitel 2 erwähnte "dilute gas approximation" beschreiben.
Im weiteren wird nur noch der bosonische Teil des Modells betrachtet. Zur Bestimmung der Instantonrate ist es nicht notwendig, Fermionen einzubeziehen.
Wie in Kap. 1 erwähnt, ist der Vortex eine Struktur, die eine topologische Ladung besitzt und die Bewegungsgleichungen des Abel'schen Higgs-Modells erfüllt. Sie hat die Gestalt[3]:

$$
\begin{aligned}
A_\mu^{cl}(x) &= \frac{\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu}{gr^2}A(r) && (3.10)\\
\phi^{cl}(x) &= vf(r)e^{i\varphi(x)}. && (3.11)
\end{aligned}
$$

Man geht nun zur unitären Eichung über, damit das Higgsfeld rein reell wird. Die Eichtransformationen

$$
\begin{aligned}
\phi &\to e^{-i\varphi}\phi && (3.12)\\
A_\mu &\to A_\mu - \partial_\mu\varphi/g && (3.13)\\
\Psi_{L(R)} &\to e^{\mp i\varphi}\Psi_{L(R)} && (3.14)
\end{aligned}
$$

[2] Leptonen- und Baryonenzahl sind keine Eichsymmetrien.
[3] Es ist zu beachten, dass diese Lösung eine andere Skalierung hat, als die in Kap.1 beschriebene.

führen zu:

$$A_\mu^{cl}(x) = \frac{\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu}{gr^2}(A(r)+1) \tag{3.15}$$

$$\phi^{cl}(x) = vf(r). \tag{3.16}$$

Wird dieser Ansatz in (3.2) eingesetzt, erhält man für die klassische Wirkung:

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \pi v^2 \int_0^\infty dr \left(\frac{1}{rm_W^2}\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)^2 + r\left(\frac{df(r)}{dr}\right)^2 + \frac{f^2(r)}{r}(A(r)+1)^2 \right. \\ &+ \left. \frac{rm_H^2}{4}\left(f^2(r)-1\right)^2 \right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Damit diese Wirkung endlich ist, fordert man die Randbedingungen:

$$\begin{array}{ccccccc} A(r) & \stackrel{r\to 0}{\longrightarrow} & 0 & , & A(r) & \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} & -1 \\ f(r) & \stackrel{r\to 0}{\longrightarrow} & 0 & , & f(r) & \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} & 1. \end{array} \tag{3.18}$$

Die Pontryagin-Klasse des Vortex berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} q &= \frac{g}{4\pi}\int d^2x\, \epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int r\, dr\, d\varphi \frac{1}{r}\frac{dA(r)}{dr} \\ &= 1\,, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Randbedingungen ausgenutzt wurden.
Im Abel'schen Higgs-Modell existiert also eine Instanton-Lösung, die eine topologische Ladung trägt und somit Prozesse ermöglicht, die die Baryonenzahl verletzen können.
Bis zu dieser Stelle waren die Überlegungen in diesem Kapitel rein klassisch. Im nächsten Abschnitt wird die effektive Wirkung betrachtet, womit dann auch Quantenkorrekturen bis zur Ein-Loop-Ordnung berücksichtigt werden.

3.2 Der Fluktuationsoperator

Um Quantenkorrekturen einzubeziehen, ist das Prinzip der "effektiven Wirkung" nützlich. Dies ist eine Entwicklung der Wirkung um das Minimum bei ϕ_{cl} nach Ordnungen von $\hbar$. Ausgangspunkt ist die klassische Wirkung, zu der man dann die Quantenkorrekturen in Form von Loopbeiträgen[4] addiert. Bis zur Ein-Loop-Ordnung gilt für die effektive Wirkung Γ (s. z.B. [17]):

$$\Gamma[\phi_{cl}] = S[\phi_{cl}] + \frac{1}{2}\ln\,\det\, \underbrace{\left.\frac{\delta^2 S}{\delta\phi_i^*(x)\delta\phi_j(y)}\right|_{\phi=\phi_{cl}}}_{\equiv\mathcal{M}_{ij}(x,y)}, \tag{3.19}$$

wobei die ϕ_i die fluktuierenden Felder um das klassische Hintergrundfeld ϕ_{cl} sind.
Im klassischen Limes geht die effektive Wirkung natürlich in die klassische Wirkung über.

[4]Eine Entwicklung in $\hbar$ entspricht einer Entwicklung nach Loops (s. z.B. [5])

Der zweite Summand entspricht den Ein-Loop-Korrekturen und $\mathcal{M}_{ij}(x,y)$ bezeichnet man als Fluktuationsoperator. Für diesen soll im Folgenden eine explizite Form angegeben werden. Dazu entwickelt man zunächst die Felder um die klassischen Lösungen, welche in diesem Fall den Instanton- und Vakuumkonfigurationen entsprechen:

$$A_\mu = A_\mu^{cl} + a_\mu \tag{3.20}$$
$$\phi = \phi^{cl} + \varphi. \tag{3.21}$$

Entwickelt man gleichermaßen die Lagrangedichte, so besteht die folgende Beziehung zwischen dem Fluktuationsoperator und der Lagrangedichte in zweiter Ordnung:

$$\mathcal{L}^{II} = \frac{1}{2}\phi_i^*(x)\mathcal{M}_{ij}\phi_j(x), \tag{3.22}$$

wobei für ϕ_i die Quantenfelder einzusetzen sind.
Um die nichtphysikalischen Freiheitsgrade des Eichfeldes zu eliminieren, führt man die Background-Eichung ein:

$$\mathcal{F}(A) = \partial_\mu A_\mu + \frac{ig}{2}\left((\phi^{cl})^*\phi - \phi^{cl}\phi^*\right), \tag{3.23}$$

die in zweiter Ordnung den eichfixierenden Term

$$\mathcal{L}_{GF}^{II} = \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}^2(A)\right)^{II} \tag{3.24}$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu a_\mu)^2 - \frac{ig}{2}a_\mu(\varphi\partial_\mu\phi^{cl} + \phi^{cl}\partial_\mu\varphi - \varphi^*\partial_\mu\phi^{cl} - \phi^{cl}\partial_\mu\varphi^*) - \frac{g^2}{8}(\phi^{cl})^2(\varphi - \varphi^*)^2 \tag{3.25}$$

in der Lagrangedichte ergibt. Beim Schritt von (3.24) nach (3.25) wurde partiell integriert und ausgenutzt, dass sich das Hintergrundeichfeld in der Coulomb-Eichung befindet[5] und das klassische Skalarfeld reell ist.
Die zu dieser Eichfixierung gehörige Fadeev-Popov-Determinante lautet[6]:

$$\frac{\delta\mathcal{F}(\mathcal{A})}{\delta\varphi} = -\frac{1}{g}(-\partial^2 + g^2(\phi^{cl})^2) \equiv \det M. \tag{3.26}$$

Diese lässt sich in einen Exponentialfaktor umschreiben:

$$\det M \to \exp\Big[-\int d^2x \underbrace{\left(\eta^*(-\partial^2 + g^2(\phi^{cl})^2)\eta\right)}_{\mathcal{L}_{\mathcal{FP}}^{II}}\Big], \tag{3.27}$$

den man als Beitrag zur Lagrangedichte ansehen kann, der aber völlig von den Quantenfluktuationen der anderen Felder entkoppelt ist.

[5] Bei der sog. "Backgroundfield-Methode" ist es erlaubt, das Hintergrundfeld anders zu eichen als die Quantenfluktuationen um diesen Hintergrund (s. z.B. [27]).

[6] Die Probleme, die bei der Quantisierung von Eichfeldern auftreten, und eine der Lösungen durch die Fadeev-Popov-Prozedur werden in jedem einführenden Buch über Quantenfeldtheorie behandelt.

Insgesamt gelangt man so zu der Lagrangedichte in zweiter Ordnung (der Index $_{cl}$ zur Kennzeichnung des Hintergrundfeldes wird von nun an unterdrückt):

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}+\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP})^{II} &= \frac{1}{2}a_\mu\left(-\partial^2+g^2\phi^2\right)a_\mu \\
&+ \frac{1}{4}\varphi^*\left(-D^2+\frac{g^2}{2}\phi^2+\lambda(2\phi^2-v^2)\right)\varphi \\
&+ \frac{1}{4}\varphi\left(-(D^*)^2+\frac{g^2}{2}\phi^2+\lambda(2\phi^2-v^2)\right)\varphi^* \\
&+ \varphi\left(\left(\lambda-\frac{g^2}{2}\right)\frac{\phi^2}{4}\right)\varphi+\varphi^*\left(\left(\lambda-\frac{g^2}{2}\right)\frac{\phi^2}{4}\right)\varphi^* \\
&+ a_\mu(-igD^*_\mu\phi)\phi+a_\mu(-igD_\mu\phi)\phi^* \\
&+ \eta^*(-\partial^2+g^2(\phi^{cl})^2)\eta.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Es ist nun sinnvoll, die Lagrangedichte so umzuschreiben, dass sie nur noch reelle Größen enthält. Dazu spaltet man das komplexe Skalar- und das komplexe Fadeev-Popov-Feld in Real- und Imaginärteil auf:

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_1+i\varphi_2 \\
\eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1+i\eta_2).
\end{aligned}
$$

Mit diesen reellen Feldern lautet die Lagrangedichte dann:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}+\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP})^{II} &= a_\mu\frac{1}{2}\left(-\partial^2+g^2\phi^2\right)a_\mu \\
&+\varphi_1\frac{1}{2}\left(-\partial^2+g^2A_\mu^2+\lambda\left(3\phi^2-v^2\right)\right)\varphi_1 \\
&+\varphi_2\frac{1}{2}\left(-\partial^2+g^2A_\mu^2+g^2\phi^2+\lambda\left(\phi^2-v^2\right)\right)\varphi_2 \\
&+\varphi_2(gA_\mu\partial_\mu)\varphi_1+\varphi_1(-gA_\mu\partial_\mu)\varphi_2 \\
&+a_\mu(2g^2A_\mu\phi)\varphi_1+\ a_\mu(2g\partial_\mu\phi)\varphi_2 \\
&+\eta_1\frac{1}{2}\left(-\partial^2+g^2\phi^2\right)\eta_1+\eta_2\frac{1}{2}\left(-\partial^2+g^2\phi^2\right)\eta_2.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Mit Hilfe von (3.22) ist man jetzt in der Lage, den Fluktuationsoperator $\mathcal{M}$ anzugeben. Die nichtverschwindenden Komponenten lauten:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{11} &= -\partial^2+g^2\phi^2 & \mathcal{M}_{22} &= -\partial^2+g^2\phi^2 \\
\mathcal{M}_{13} &= 2g^2A_1\phi & \mathcal{M}_{14} &= 2g\partial_1\phi \\
\mathcal{M}_{23} &= 2g^2A_2\phi & \mathcal{M}_{24} &= 2g\partial_2\phi \\
\mathcal{M}_{33} &= -\partial^2+g^2A_\mu^2+\lambda(3\phi^2-v^2) & \mathcal{M}_{34} &= -gA_\mu\partial_\mu \\
\mathcal{M}_{44} &= -\partial^2+g^2A_\mu^2+g^2\phi^2+\lambda(\phi^2-v^2) & \mathcal{M}_{43} &= gA_\mu\partial_\mu \\
\mathcal{M}_{55} &= -\partial^2+g^2\phi^2.
\end{aligned}
$$

Mit Gleichung (3.22) erhält man so die Lagrangedichte in zweiter Ordnung, wobei für ϕ die Quantenfelder einzusetzen sind:

$$\phi=(a_1,a_2,\varphi_1,\varphi_2,\eta_{12}).$$

Setzt man hier nun für ϕ und A_μ (3.16) bzw. (3.15) ein, erhält man den Fluktuationsoperator für das Instantonhintergrundfeld. Weiterhin ist es nützlich, ein Potential $\mathcal{V}$ über die Relation

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^0 + \mathcal{V} \tag{3.30}$$

zu definieren, wobei $\mathcal{M}^0$ der Fluktuationsoperator für das Vakuum ist.
Die Ein-Loop-Korrektur in der effektiven Wirkung (3.19) lässt sich mit Hilfe dieser beiden Operatoren darstellen als:

$$S_{eff}^{1loop} = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\det' \mathcal{M}}{\det \mathcal{M}^0} \right\}. \tag{3.31}$$

Man normiert die Determinante also auf den freien Operator. Der Strich im Zähler soll bedeuten, dass die Nullmoden in der Determinante nicht berücksichtigt werden sollen.[7]
Dieser Ausdruck ist nun explizit zu berechnen. *J. Baacke* hat dafür ein nichtpertubartives Verfahren entwickelt [1]. Bei diesem Verfahren muss zunächst eine Partialwellenzerlegung durchgeführt werden, die im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

3.3 Die Partialwellenzerlegung

Der Fluktuationsoperator $\mathcal{M}$ ist in Partialwellen zerlegbar, wobei die Determinante sich gleichermaßen zerlegt:

$$\ln \det \mathcal{M} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \det \mathbf{M}_n. \tag{3.32}$$

Man führt an dieser Stelle die folgende Partialwellenzerlegung für die Quantenfelder ein:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(r) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} + ic_n(r) \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} && (3.33)\\
\varphi_1 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n(r) \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} && (3.34)\\
\varphi_2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_n(r) \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} && (3.35)\\
\eta_{12} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(r) \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}. && (3.36)
\end{aligned}$$

Werden diese Ausdrücke in die Lagrangedichte eingesetzt, zeigt sich, dass die folgenden Kombinationen der Felder reell sind und den Fluktuationsoperator symmetrisieren:

$$\begin{aligned}
F_1^n(r) &= \frac{1}{2}(b_n(r) + c_n(r))\\
F_2^n(r) &= \frac{1}{2}(b_n(r) - c_n(r))\\
F_3^n(r) &= \tilde{h}_n(r)\\
F_4^n(r) &= ih_n(r)\\
F_5^n(r) &= g_n(r).
\end{aligned}$$

[7] Der Grund für dieses Vorgehen ist im vorherigen Kapitel angegeben.

Zerlegt man $\mathcal{M}$ wieder wie in (3.30) (der Index n für die Partialwellen wird von jetzt an unterdrückt):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 + \mathbf{V}, \tag{3.37}$$

werden die freien Operatoren $\mathbf{M^0}$ Diagonalmatrizen mit den Elementen:

$$M_{ii}^0 = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{n_i^2}{r^2} + m_i^2, \tag{3.38}$$

wobei $(n_i) = (n-1, n+1, n, n, n)$ und $(m_i) = (m_W, m_W, m_W, m_H, m_W)$ ist. Das Potential hat die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{lcllcl}
\mathbf{V}_{11}^n & = & m_W^2\left(f^2-1\right) & \mathbf{V}_{12}^n & = & 0 \\
\mathbf{V}_{13}^n & = & \sqrt{2}m_W f' & \mathbf{V}_{14}^n & = & \sqrt{2}m_W f\dfrac{A+1}{r} \\
\mathbf{V}_{22}^n & = & \mathbf{V}_{11}^n & \mathbf{V}_{23}^n & = & \mathbf{V}_{13}^n \\
\mathbf{V}_{24}^n & = & -\mathbf{V}_{14}^n & \mathbf{V}_{33}^n & = & \dfrac{(A+1)^2}{r^2} + \dfrac{m_H^2}{2}\left(f^2-1\right) + m_W^2\left(f^2-1\right) \\
\mathbf{V}_{34}^n & = & -2\dfrac{A+1}{r^2}n & \mathbf{V}_{44}^n & = & \dfrac{(A+1)^2}{r^2} + \dfrac{3}{2}m_H^2\left(f^2-1\right) \\
\mathbf{V}_{55}^n & = & m_W^2\left(f^2-1\right) & \mathbf{V}_{i5}. & = & 0
\end{array}$$

Im Anhang C ist die Rechnung angegeben, die zeigt, dass die Lagrangedichte, die sich hieraus ergibt, dieselbe ist, wie vor der Partialwellenzerlegung.

3.4 Der Ein-Loop-Beitrag zur effektiven Wirkung

In diesem Abschnitt wird eine von *J. Baacke* entwickelte Methode zur Bestimmung des Ein-Loop-Beitrages zur effektiven Wirkung vorgestellt [1].
Mit den Eigenwerten $-\lambda_\alpha^2$ von $\mathcal{M}$ und $-(\lambda_\alpha^0)^2$ von $\mathcal{M}^0$ lässt sich (3.31) ausdrücken als:

$$S_{eff}^{1loop} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \ln\frac{\lambda_\alpha^2}{(\lambda_\alpha^0)^2}. \tag{3.39}$$

Dieser Term kann in ein Integral umgeschrieben werden:

$$S_{eff}^{1loop} = -\sum_\alpha \int_0^\infty \nu\, d\nu \left(\frac{1}{\lambda_\alpha^2+\nu^2} - \frac{1}{(\lambda_\alpha^0)^2+\nu^2}\right). \tag{3.40}$$

Die Beiträge der Nullmoden, die bei der Bestimmung der Determinanten weggelassen werden sollten, können anhand dieses Integrals bestimmt und am Ende der Berechnung subtrahiert werden. Die Eigenwerte lassen sich leider nicht direkt bestimmen, da sie im Kontinuum liegen. Aus diesem Grund fügt man in (3.40) ein vollständiges System orthonormaler Funktionen ein, die Eigenfunktionen der Operatoren $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ zu den oben eingeführten Eigenwerten sein sollen:

$$S_{eff}^{1loop} = -\sum_\alpha \int_0^\infty \nu\, d\nu \int d^2x \left(\frac{\chi_{\alpha i}(x)\chi_{\alpha i}^\dagger(x)}{\lambda_\alpha^2+\nu^2} - \frac{\psi_{\alpha i}(x)\psi_{\alpha i}^\dagger(x)}{(\lambda_\alpha^0)^2+\nu^2}\right). \tag{3.41}$$

Bei den so erhaltenen Summanden handelt es sich um Greensche Funktionen zu den Operatoren $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^0$:

$$(-\nu^2 + \mathcal{M})_{ij} \underbrace{\sum_\alpha \frac{\chi_{\alpha j}(x)\chi^\dagger_{\alpha k}(x)}{\lambda^2_\alpha + \nu^2}}_{\equiv \mathcal{G}_{jk}(x,x',\nu)} = -\delta(x-x')\delta_{ik} \tag{3.42}$$

$$(-\nu^2 + \mathcal{M}^0)_{ij} \underbrace{\sum_\alpha \frac{\psi_{\alpha j}(x)\psi^\dagger_{\alpha k}(x)}{\lambda^2_\alpha + \nu^2}}_{\equiv \mathcal{G}^0_{jk}(x,x',\nu)} = -\delta(x-x')\delta_{ik}. \tag{3.43}$$

Die Berechnung des Ein-Loop-Beitrags zur effektiven Wirkung ist somit zurückgeführt auf die Berechnung der Spur der Differenz zweier Greenscher Funktionen:

$$S^{1loop}_{eff} = -\int_0^\infty \nu\, d\nu \int d^2x \left(\mathcal{G}_{jj}(x,x,\nu) - \mathcal{G}^0_{jj}(x,x,\nu)\right). \tag{3.44}$$

Mit der Partialwellenzerlegung aus dem vorherigen Abschnitt lauten die Bestimmungsgleichungen für die Greenschen Funktionen:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{n_i^2}{r^2} - \nu^2 - m_i^2 - \mathcal{V}^n_{ij}\right)\mathcal{G}^n_{ij}(r,r',\nu) = -\frac{1}{r}\delta(r-r') \tag{3.45}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{n_i^2}{r^2} - \nu^2 - m_i^2\right)\mathcal{G}^{0n}_{ij}(r,r',\nu) = -\frac{1}{r}\delta(r-r') \tag{3.46}$$

Die Gleichung für $\mathcal{G}^0$ ist sogar analytisch exakt lösbar. Sie setzt sich zusammen aus modifizierten ganzzahligen Besselfunktionen:

$$\mathcal{G}^{0n}_{ij}(r,r',\nu) = I_{ni}((\nu^2 + m_i^2)r_k)K_{ni}((\nu^2 + m_i^2)r_g), \tag{3.47}$$

wobei $r_k = \min(r,r')$, $r_g = \max(r,r')$ und über i nicht summiert werden soll. Die Gleichung für $\mathcal{G}^n_{ij}$ ist analytisch nicht lösbar, da schon die Profilfunktionen, die über das Potential in die Gleichung eingehen, nur nummerisch lösbar sind.
Wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, lässt sich die Greensche Funktion nach Ordnungen des Potentials entwickeln. Somit ist man in der Lage einen klaren Zusammenhang zwischen den Beiträgen zum Integral und den Feynmangraphen herzustellen. Insbesondere lässt sich so der divergente Anteil von (3.44) isolieren. Daher eignet sich dieses Verfahren besonders gut zur Renormierung.

Kapitel 4

Renormierung der effektiven Wirkung

Wäre die effektive Wirkung endlich, hätte man schon das gewünschte Ergebnis in Ein-Loop-Ordnung. Doch (3.31) ist ein divergenter Ausdruck, der renormiert werden muss.
Das Abel'sche Higgs-Modell ist super-renormierbar, d.h. es genügt, die Massen des Higgs- und des Eichfeldes und den Vakuumerwartungswert durch ihre renormierten Größen auszudrücken. Durch die Wahl des Vakuumerwartungswertes als zu renormierende Größe ergeben sich allerdings Probleme in der unitären Eichung, die hier benutzt werden soll. Aus diesem Grund verwendet man stattdessen die Higgs-Kopplung. Auf dieses Problem wird im Laufe der Renormierung noch eingegangen.
Die divergenten Anteile der effektiven Wirkung können mit den entsprechenden Feynman-Regeln bestimmt werden, wobei man um den Vakuumerwartungswert entwickelt[1]. Dabei ergibt sich, dass ausschließlich die sog. "Tadpole"-Graphen divergent sind. Das sind die Graphen, die nur eine oder zwei externe Linien und einen geschlossen Loop besitzen (s. z.B. [7]). Die Schleife kann dabei entweder das Higgs-, das Eich- oder das Fadeev-Popov-Feld sein. Die Tadpole-Graphen, die die Propagation des Eichfeldes beschreiben, heben sich gegen die der nächsthöheren Ordnung auf. Außerdem heben sich die Graphen mit Fadeev-Popov-Loops, wie üblich, gegen die korrespondierenden Graphen mit Eichfeld-Loop auf. Bei der Renormierung müssen also nur die Tadpole-Graphen berücksichtigt werden, die ausschließlich aus Higgsfeld-Propagatoren bestehen.
Die effektive Wirkung ist in einer geschlossenen Form nicht anzugeben, da schon die klassische Wirkung für allgemeine Massenverhältnisse nur nummerisch berechenbar ist. Im weiteren Verlauf beschränkt man sich daher auf den Spezialfall gleicher Massen des Higgs- und Eichfeldes. In diesem Fall ist, wie schon erwähnt, die klassische Wirkung analytisch berechenbar. Außerdem kann ausgenutzt werden, dass einige Integrale über die Profilfunktionen bekannt sind.
Um die effektive Wirkung zu renormieren, müssen zunächst die Divergenzen isoliert werden. Dieser Vorgang heißt Regularisierung.

[1] Die Vorgehensweise ist bei einem Hintergrundfeld analog zu der Herleitung im Vakuum.

4.1 Regularisierung

Die Regularisierung ist notwendig, da bei unendlichen Größen die üblichen Rechenmanipulationen ihre Bedeutung verlieren. Daher führt man bei der Regularisierung einen Parameter ein, der in einem gewissen Grenzwert wieder die ursprüngliche Form der Theorie liefert. Bevor dieser Grenzwert betrachtet wird, sind die Ausdrücke mit diesem Parameter allerdings endlich, und man kann mit ihnen wie üblich rechnen (s. z.B. [13], [22] oder jedes andere einführende Buch in die Quantenfeldtheorie).
Zur Isolierung von Divergenzen gibt es mehrere Möglichkeiten. Bei Feynman-Integralen kann man zum Beispiel einen Impuls-Cut-Off Λ einführen und später den Grenzwert $\lim \Lambda \to \infty$ betrachten.
In dieser Arbeit soll die dimensionelle Regularisierung verwendet werden. Bei dieser Methode betrachtet man die divergenten Ausdrücke in D Dimensionen, wobei D eine beliebige komplexe Zahl sein darf. Es zeigt sich dann, dass die Divergenzen als Pole im Grenzwert $D \to N$ erscheinen, wobei N die ursprüngliche Anzahl der Dimensionen ist.
Im Folgenden soll der Ein-Loop-Beitrag zur effektiven Wirkung dimensionell regularisiert werden.
Wie im vorherigen Kapitel erwähnt, lässt sich die Greensche Funktion $\mathcal{G}$ nach Ordnungen des Potentials entwickeln. Dazu schaut man sich zuerst die freie Greensche Funktion $\mathcal{G}^0$ an. Diese ist, wie im letzten Kapitel erläutert, durch (3.43) definiert:

$$\mathcal{G}^0 = -(-\nu^2 + \mathcal{M}^0)^{-1}. \tag{4.1}$$

Durch die Zerlegung in einen freien Anteil und eine Potentialmatrix ist die komplette Greensche Funktion durch $\mathcal{G} = -(-\nu^2 + \mathcal{M}^0 + \mathcal{V})^{-1}$ gegeben. $\mathcal{G}$ kann man folgendermaßen nach Ordnungen des Potentials entwickeln:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= -(-\nu^2 + \mathcal{M}^0 + \mathcal{V})^{-1} \\
&= -\left[-\nu^2 + \mathcal{M}^0 \cdot \left(\mathbf{1} + \left(\mathcal{M}^0\right)^{-1} \mathcal{V}\right)\right]^{-1} \\
&= \left(\mathbf{1} + \mathcal{G}^{\mathbf{0}}\mathcal{V}\right)^{-1} \mathcal{G}^0 \\
&= \left(\mathbf{1} - \mathcal{G}^0\mathcal{V} + \mathcal{G}^0\mathcal{V}\mathcal{G}^0\mathcal{V} - \cdots\right) \mathcal{G}^0 \\
&= \mathcal{G}^0 - \underbrace{\mathcal{G}^0\mathcal{V}\mathcal{G}^0}_{1.\,\mathrm{Ord.}\,\mathcal{V}} + \underbrace{\mathcal{G}^0\mathcal{V}\mathcal{G}^0\mathcal{V}\mathcal{G}^0}_{2.\,\mathrm{Ord.}\,\mathcal{V}} - \cdots .
\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Differenz der gesamten und der freien Greenschen Funktion:

$$\mathcal{G} - \mathcal{G}^0 = -\mathcal{G}^0\mathcal{V}\mathcal{G}^0 + \mathcal{G}^0\mathcal{V}\mathcal{G}^0\mathcal{V}\mathcal{G}^0 - \cdots . \tag{4.2}$$

Wie oben erwähnt, sollen hier nur die Divergenzen bestimmter Tadpole-Graphen mit einem Loop isoliert werden. Diese Graphen sind komplett in dem ersten Summanden der Entwicklung (4.2) enthalten. Die folgenden Terme sind entweder endlich oder enthalten Divergenzen einer höheren Ordnung. Es muss also nur der erste Term regularisiert werden. Um die Methode der dimensionellen Regularisierung anwenden zu können, muss man wissen, welche Form der divergente Anteil in D Dimensionen hat. Dazu schaut man sich die Fouriertransformation an. Für $G^0_{ij}(x,y)$ gilt:

$$G^0_{ij}(x,y) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{ij}}{p^2 + \tilde{m}_i^2} e^{-ip(x-y)}. \tag{4.3}$$

Von nun an bedeute $\tilde{m}_i^2$ die Summe $m_i^2 + \nu^2$ (Das ν^2 hat seinen Ursprung in der Definition der Greenschen Funktionen (3.42) bzw. (3.43)). Die Fouriertransformation des Potentials $V_{ij}(x)$ ist durch

$$V_{ij}(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{V}_{ij}(p) e^{-ipx} \tag{4.4}$$

gegeben. Hierbei bezeichnet $\tilde{V}_{ij}$ die Fouriertransformierte von V_{ij}. Zwischen den beiden besteht der Zusammenhang:

$$\tilde{V}(0) = \int V(x) d\,x. \tag{4.5}$$

Da das Potential lokal sein soll, gilt:

$$V(x,y) = V(x)\delta(x-y). \tag{4.6}$$

Insgesamt ergibt sich dann für den divergenten Anteil von (4.2):

$$\begin{aligned}
\left(G^0 V G^0\right)_{il} &= \int dz_1\, dz_2\, G^0_{ij}(x,z_1) V_{jk} \delta(z_1 - z_2) G^0_{kl}(z_2, y) \\
&= \int dz\, G^0_{ij}(x,z) V_{jk}(z) G^0_{kl}(z,y) \\
&= \int dz \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[e^{-ip(x-z)} \frac{\delta_{ij}}{p^2 + \tilde{m}_i^2} \right] \tilde{V}_{jk}(r) e^{-ipz} \left[e^{-iq(z-y)} \frac{\delta_{kl}}{q^2 + \tilde{m}_l^2} \right] \\
&= \int dz \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[e^{-ipx} \frac{\delta_{ij}}{p^2 + \tilde{m}_i^2} \right] \tilde{V}_{jk}(r) \left[e^{iqy} \frac{\delta_{kl}}{q^2 + \tilde{m}_l^2} \right] e^{-i[r-(p-q)]z} \\
&= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[\frac{\delta_{ij}}{p^2 + \tilde{m}_i^2} \right] \tilde{V}_{jk}(r) \left[\frac{\delta_{kl}}{q^2 + \tilde{m}_l^2} \right] (2\pi)^D \delta(r - (p-q)) e^{-ipx} e^{iqy} \\
&= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[\frac{\delta_{ij}}{p^2 + \tilde{m}_i^2} \right] \tilde{V}_{jk}(p-q) \left[\frac{\delta_{kl}}{q^2 + \tilde{m}_l^2} \right] e^{-ipx} e^{iqy}.
\end{aligned}$$

Aus Gleichung (3.44) ist zu ersehen, dass für die effektive Wirkung nur das Verhalten bei $x = y$ interessant ist.

$$\left(G^0 V G^0\right)_{il}(x,x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[\frac{\delta_{ij}}{p^2 + \tilde{m}_i^2} \right] \tilde{V}_{jk}(p-q) \left[\frac{\delta_{kl}}{q^2 + \tilde{m}_l^2} \right] e^{-i(p-q)x} \tag{4.7}$$

Das Integral über die Spur dieses Terms ist:

$$\begin{aligned}
\int d^2x Tr\left(\mathcal{G}^0\mathcal{V}\mathcal{G}^0\right)(x,x) &= \int dx\,\left(G^0VG^0\right)_{ii}(x,x)\\
&= \int dx \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\left[\frac{\delta_{ij}}{p^2+\tilde{m}_i^2}\right]\tilde{V}_{jk}(p-q)\left[\frac{\delta_{ki}}{q^2+\tilde{m}_i^2}\right]e^{-i(p-q)x}\\
&= \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\left[\frac{\delta_{ij}}{p^2+\tilde{m}_i^2}\right]\tilde{V}_{jk}(p-q)\left[\frac{\delta_{ki}}{q^2+\tilde{m}_i^2}\right](2\pi)^D\delta(p-q)\\
&= \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\left[\frac{\delta_{ij}}{p^2+\tilde{m}_i^2}\right]\tilde{V}_{jk}(0)\left[\frac{\delta_{ki}}{p^2+\tilde{m}_i^2}\right]\\
&= \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{\tilde{V}_{ii}(0)}{(p^2+\tilde{m}_i^2)^2}.
\end{aligned}$$

Wird dieser Ausdruck nun in (3.44) eingesetzt, erhält man für den divergenten Anteil der effektiven Wirkung in D Dimensionen:

$$S_{eff}|_{div}^{D.R.} = \int \nu\, d\nu \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{\tilde{V}_{ii}(0)}{(p^2+m_i^2+\nu^2)^2}. \tag{4.8}$$

Um dieses Integral auszuwerten, ist die folgende Formel für die Integration in D Dimensionen hilfreich (s. z.B. [17]):

$$\int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{(p^2)^\alpha}{(p^2+m^2)^\beta} = \frac{\Gamma\left(\beta-\alpha-\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\frac{D}{2})}\frac{(m^2)^{\alpha-\beta+\frac{D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}}, \tag{4.9}$$

mit der Gammafunktion Γ. Somit folgt:

$$\int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{\tilde{V}_{ii}(0)}{(p^2+m_i^2+\nu^2)^2} = \tilde{V}_{ii}(0)\frac{\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(2)}\frac{(m_i^2+\nu^2)^{-2+\frac{D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}}. \tag{4.10}$$

Der divergente Anteil der effektiven Wirkung ist also:

$$S_{eff}|_{div}^{D.R.} = \int \nu\, d\nu \tilde{V}_{ii}(0)\frac{\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(2)}\frac{(m_i^2+\nu^2)^{-2+\frac{D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}}. \tag{4.11}$$

Wird hier wie üblich[2] $D = 2-2\epsilon$ eingesetzt, erhält man:

$$S_{eff}|_{div}^{D.R.} = \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\Gamma(2)}\frac{\tilde{V}_{ii}(0)}{(4\pi)^{1-\epsilon}}\int \nu\, d\nu \frac{1}{(m_i^2+\nu^2)^{1+\epsilon}}. \tag{4.12}$$

Unter Ausnutzung der Gleichung (4.5),

$$\tilde{V}_{ii}(0) = 2\pi\int r\, dr\, V_{ii}(r),$$

[2]Durch diese Wahl muss man später den Limes $\epsilon \to 0$ betrachten, um wieder zu zwei Dimensionen zu gelangen. Das hat den Vorteil, dass man Terme die ϵ enthalten um $\epsilon = 0$ entwickeln kann.

ergibt sich ($\Gamma(2) = 1$):

$$\begin{aligned} S_{eff}|^{D.R.}_{div} &= \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\Gamma(2)} \frac{\tilde{V}_{ii}(0)}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \int \nu d\nu \frac{1}{(m_i^2+\nu^2)^{1+\epsilon}} \\ &= \Gamma(1+\epsilon) \frac{1}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \, 2\pi \int r\,dr\, V_{ii}(r) \int \nu d\nu \frac{1}{(m_i^2+\nu^2)^{1+\epsilon}} \\ &= \frac{\Gamma(1+\epsilon)\pi}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \int \nu\, d\nu \int r\, dr \frac{V_{ii}(r)}{(m_i^2+\nu^2)^{1+\epsilon}}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Wird nun über die Diagonalelemente der Potentialmatrix summiert, folgt:

$$\begin{aligned} S_{eff}|^{D.R.}_{div} &= 2\pi \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \int \nu\, d\nu \left(m_W^2 + m_W^2 + \frac{m_H^2}{2} + m_W^2 - 2m_W^2 \right) \int r\, dr (f^2-1) \frac{1}{(m_W^2+\nu^2)^{1+\epsilon}} \\ &+ \frac{3}{2} m_H^2 \int r\, dr (f^2-1) \frac{1}{(m_H^2+\nu^2)^{1+\epsilon}} \\ &= \frac{\Gamma(1+\epsilon)\pi}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \int \nu\, d\nu \int r\, dr (f^2-1) \left(\frac{3m_H^2}{(m_H^2+\nu^2)^{1+\epsilon}} + \frac{2m_W^2+m_H^2}{(m_W^2+\nu^2)^{1+\epsilon}} \right). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Hierbei wurde in der ersten Zeile der V_{55}-Term mit einem negativen Vorzeichen bedacht, da es sich um den Fadeev-Popov-Anteil handelt.[3] Der Faktor zwei tritt auf, weil es sich eigentlich um zwei Felder handelt[4].
Das Integral der Art

$$\int \frac{\nu d\nu}{(m^2+\nu^2)^{1+\epsilon}}$$

lässt sich noch weiter auswerten:

$$\begin{aligned} \int \frac{\nu d\nu}{(m^2+\nu^2)^{1+\epsilon}} &= \frac{1}{2} \int \frac{da}{(m^2)+a)^{1+\epsilon}} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon} \left[\frac{1}{(m^2)+a)^{\epsilon}} \right]_{a=0}^{a=\infty} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon} \left(-\frac{1}{(m^2)^{\epsilon}} \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \frac{1}{m^{2\epsilon}}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich schließlich für den dimensionell regularisierten divergenten Anteil der effektiven Wirkung

$$S_{eff}|^{D.R.}_{div} = \frac{\Gamma(1+\epsilon)\pi}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \int r\, dr (f(r)^2-1) \left(\frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{3m_H^2}{\left(m_H^2\right)^{\epsilon}} + \frac{2m_W^2+m_H^2}{\left(m_W^2\right)^{\epsilon}} \right) \right), \tag{4.15}$$

wobei hier der Grenzwert $\lim \epsilon \to 0$ beachtet werden muss. Um diesen Ausdruck jetzt noch weiter zu vereinfachen, entwickelt man die Ausdrücke, die ein ϵ enthalten, und betrachtet

[3] Dies hängt damit zusammen, dass die Fadeev-Popov-Felder graßmannwertig sind, also antikommutieren.

[4] Die beiden Fadeev-Popov-Felder wurde zu einem zusammengefasst (vgl Kapitel 3).

dann den Grenzfall kleiner ϵ. Für die beiden Komponenten des Bruches vor dem Integral gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma(1+\epsilon) &= 1+\epsilon\Gamma' \approx 1\\ (4\pi)^{1-\epsilon} &= 4\pi(1-\epsilon\ln(4\pi)) \approx 4\pi,\end{aligned}$$

so dass sich für den Bruch

$$\frac{\Gamma(1+\epsilon)\pi}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \approx \frac{1}{4}$$

ergibt.
Die Summanden in dem Bruch, der die Massen enthält, lassen sich für $\epsilon \to 0$ folgendermaßen entwickeln:

$$\frac{1}{2\epsilon}\frac{3m_H^2}{m_H^{2\epsilon}} = \frac{3m_H^2}{2\epsilon}e^{-\epsilon\ln(m_H^2)} = \frac{3m_H^2}{2\epsilon}(1-\epsilon\ln(m_H^2)) = \frac{3m_H^2}{2\epsilon} - \frac{3m_H^2}{2}\ln(m_H^2),$$

und gleichermaßen ist

$$\frac{1}{2\epsilon}\frac{2m_W^2+m_H^2}{m_W^{2\epsilon}} = \frac{2m_W^2+m_H^2}{2\epsilon} - \frac{2m_W^2+m_H^2}{2}\ln(m_W^2).$$

Für den Spezialfall gleicher Massen lässt sich das Integral in (4.15) ebenfalls berechnen:

$$\begin{aligned}\int r\,dr(f(r)^2-1) &= \frac{1}{m_H^2}\int_0^\infty \frac{dA}{dr}\\ &= \frac{1}{m_H^2}(A(\infty)-A(0))\\ &= -\frac{1}{m_H^2}.\end{aligned}$$

Hierbei wurden beim ersten Schritt die Relation (A.8) und beim Übergang zur letzten Zeile die Randbedingungen ausgenutzt.
Insgesamt erhält man:

$$\begin{aligned}S_{eff}|_{div}^{D.R.} &= -\frac{1}{4m_H^2}\left(\frac{4m_H^2+2m_W^2}{2\epsilon} - T\right)\\ &= -\frac{v^2}{4m_H^2}\left(\frac{4\lambda+g^2}{\epsilon} - \frac{1}{v^2}T\right),\end{aligned} \tag{4.16}$$

wobei die Massen eingesetzt wurden und

$$T = \frac{3m_H^2}{2}\ln(m_H^2) + \frac{2m_W^2+m_H^2}{2}\ln(m_W^2) \tag{4.17}$$

endlich ist.

4.2 Renormierung

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, besitzt die Ein-Loop-Korrektur zur effektiven Wirkung divergente Terme. Um trotzdem zu einer endlichen effektiven Wirkung zu gelangen, muss die Theorie renormiert werden. Dazu drückt man die nackten Größen in der klassischen Wirkung durch ihre renormierten Größen aus. Als Parameter wird zunächst das Quadrat des Vakuumerwartungswertes v^2 und das Verhältnis der Massen des Higgs- und des Eichteilchens $R = \frac{m_H}{m_W}$ gewählt:

$$v^2 \quad \rightarrow \quad v_R^2 = v^2 - \delta v^2 \tag{4.18}$$

$$R = 1 \quad \rightarrow \quad R_R = 1 - \delta R. \tag{4.19}$$

Der Vakuumerwartungswert besitzt eine unendliche Renormierung, d.h. δv^2 ist divergent, wohingegen R endlich renormierbar ist. Drückt man die nackten Größen v^2 und R jetzt durch ihre renormierten Größen aus, sollten sich die Divergenzen von δv^2 und S_{eff}^{1loop} wegheben.

Die klassische Wirkung ist nur für $R = 1$ exakt bekannt. Durch die Renormierung von R weicht der Wert jetzt aber um einen Term δR von 1 ab.

Somit wird zunächst eine Näherungsgleichung der klassischen Wirkung benötigt, die die Variationen $R = 1 \rightarrow 1 + \delta R$ berücksichtigt. Diese soll nun hergeleitet werden.

Im Folgenden ist es vorteilhaft, den dimensionslosen Parameter $\rho = rm_W$ einzuführen, damit in der klassischen Wirkung explizit der Parameter R auftaucht. Die klassische Wirkung lässt sich dann schreiben als:

$$S_{cl} = \left\{ \pi v^2 \int d\rho \, \frac{1}{\rho} \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \rho \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho} f^2 (A+1)^2 + R^2 \frac{\rho}{4} (f^2 - 1)^2 \right\}. \tag{4.20}$$

Die Bewegungsgleichungen für die Profilfunktionen lauten mit der Variablen ρ:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - f^2 \right) (A+1) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} (A+1)^2 - \frac{R}{2} (f^2 - 1) \right) f = 0.$$

Die klassische Wirkung S_{cl} wurde als ein Minimum der Wirkung S bestimmt, wobei S jetzt von den Feldern $A(\rho)$, $f(\rho)$ und R abhängt:

$$\frac{\delta S(A(\rho), f(\rho), R)}{\delta (A, f)} = 0. \tag{4.21}$$

Diese Gleichung ist für alle R gültig.

Man betrachtet nun eine Variation von R:

$$R \rightarrow R + \delta R.$$

Die Variationen der Profilfunktionen sind dann:

$$\begin{aligned} f(\rho, R) \rightarrow f(\rho, R + \delta R) &= f(\rho, R) + \delta f(\rho, R) \\ A(\rho, R) \rightarrow A(\rho, R + \delta R) &= A(\rho, R) + \delta A(\rho, R). \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Variation der Wirkung:

$$\delta S_{cl} = \int d\rho \; \underbrace{\frac{\delta S_{cl}(A(\rho), f(\rho), R)}{\delta(A(\rho), f(\rho))}\delta(A(\rho), f(\rho))}_{=0} + \frac{\partial S(A(\rho), f(\rho), R)}{\partial R}\delta R. \tag{4.22}$$

Der erste Term verschwindet aufgrund der Bedingung (4.21). Die durch δR hervorgerufene Änderung der klassischen Wirkung ist somit:

$$\begin{aligned}
\delta S_{cl} &= \int d\rho \; \frac{\partial S(A(\rho), f(\rho), R)}{\partial R}\delta R \\
&= \pi v^2 \int d\rho 2R\delta R \frac{\rho}{4}(f^2-1)^2 \\
&= \pi v^2 \frac{1}{2}\delta R \int \rho \, d\rho (f^2-1)^2.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Mit den renormierten Größen ausgedrückt lautet die klassische Wirkung schließlich:

$$S_{cl} = \pi(v_R^2 + \delta v^2)(1 + \delta R \int \rho \, d\rho \, (f^2-1)^2) \tag{4.24}$$

$$= \pi v_R^2 + \pi\delta v^2 + \pi v_R^2 \delta R \int \rho \, d\rho \, (f^2-1)^2 \tag{4.25}$$

$$+ \underbrace{\pi\delta v^2 \delta R \int \rho \, d\rho \, (f^2-1)^2}_{Term\ 2.Ordnung}. \tag{4.26}$$

Der letzte Term ist schon von zweiter Ordnung und soll hier nicht weiter beachtet werden, da bei dieser Renormierung nur die Ein-Loop-Ordnung, also die erste Ordnung betrachtet wird.
Insgesamt ist die effektive Wirkung bis zur ersten Ordnung $\hbar$ somit gegeben durch:

$$S_{eff} = \pi v_R^2 + \pi\delta v^2 + \pi v_R^2 \delta R \int \rho \, d\rho \, (f^2-1)^2 + S_{eff}^{1loop}, \tag{4.27}$$

wobei der erste und der dritte Summand endlich sind, der zweite und der vierte Summand aber divergent sind. Die Divergenzen dieser beiden Terme sollten sich neutralisieren, so dass sich am Ende ein endliches Ergebnis für die effektive Wirkung angeben lässt.
Berechnet man nun δv^2 und setzt es in die obige Gleichung ein, erkennt man, dass sich die Divergenzen nicht aufheben. Die Ursache dieses Problems ist in der Tatsache zu finden, dass es sich bei v^2 nicht um eine physikalische Größe handelt. Dieser Aspekt führt in der unitären Eichung (die in dieser Diplomarbeit betrachtet werden sollte) zu Problemen, da die Divergenzen der Massen und des Vakuumerwartungswertes in Ein-Loop-Ordnung nicht gleich sind. Dieses Problem kann man auch bei der von *E. Scholz* vorgenommenen Ein-Loop-Renormierung des zweidimensionalen Abel'schen Higgs-Modells [18] erkennen. Drückt man hier den renormierten Vakuumerwartungswert v_R^2 mit dem nackten v^2 aus, ergibt sich[5]:

$$v_R^2 = v^2 + \delta v^2 = v^2 \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\pi m_H^2 \epsilon} + \frac{g^2}{2\pi m_H^2 \epsilon} + endliche\ Terme \right\}. \tag{4.28}$$

[5] Dieses lässt sich mit den Gleichungen (5.9) bzw. (5.41) bei *Scholz* berechnen. Man beachte, dass bei *Scholz* die Higgs-Kopplung anders skaliert ist.

Bei der Massenrenormierung erhält man allerdings:

$$m_{H,R}^2 = m_H^2 + \delta m_H^2 = m_H^2 \left\{ 1 + \frac{2\lambda}{\pi m_H^2 \epsilon} + \frac{g^2}{2\pi m_H^2 \epsilon} + endliche\ Terme \right\}. \tag{4.29}$$

Wie sich an dieser Stelle erkennen lässt, unterscheiden sich die Divergenzen hier bei der Higgs-Kopplung.
Deshalb ersetzt man bei der Renormierung von v^2 diesen Parameter durch $v^2 = \frac{m_H^2}{2\lambda}$. Die Renormierung lautet dann:

$$\frac{m_H^2}{2\lambda} = \frac{m_{H,R}^2}{2\lambda_R} + \frac{\delta m_H^2}{2\lambda_R}.$$

Für λ wählt man ein Renormierungsschema, in dem das renormierte λ_R dem nackten λ entspricht. Das ist möglich, da λ in Ein-Loop-Ordnung eine endliche Renormierung besitzt. Das obige Schema würde dann einer "minimalen Subtraktion" entsprechen (s. z.B. [4]).
Wird in Gleichung (4.16) v^2 durch $\frac{m_H^2}{2\lambda}$ ersetzt, ergibt sich für den divergenten Anteil der effektiven Wirkung:

$$\begin{aligned} S_{eff}|_{div}^{D.R.} &= -\frac{1}{8\lambda}\left(\frac{4\lambda + g^2}{\epsilon} - \frac{1}{v^2}T\right) \\ &= -\frac{1}{2\epsilon} - \frac{g^2}{8\lambda\epsilon} + \frac{1}{4m_H^2}T. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Der divergente Anteil in der klassischen Wirkung ist nach der Renormierung durch *Scholz* (4.29):

$$\begin{aligned} \pi\frac{\delta m_H^2}{2\lambda} &= \pi\frac{m_H^2}{2\lambda}\left\{\frac{2\lambda}{\pi m_H^2\epsilon} + \frac{g^2}{2\pi m_H^2 \epsilon} + endliche\ Terme\right\} \\ &= \frac{1}{\epsilon} + \frac{g^2}{4\lambda\epsilon} + endliche\ Terme. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Wie hier nun zu sehen ist, löschen sich die Divergenzen nicht aus, da sich die Pole um einen Faktor $\frac{1}{2}$ unterscheiden. Eigentlich sollte das der Fall sein, da die Renormierung in einem Hintergrundfeld dieselbe sein sollte, wie im Vakuum.
Benutzt man das δm_H^2, das *Baacke* und *Daiber* aus den divergenten Feynmangraphen im Hintergrundfeld berechnet haben ((6.2) in [1]), heben sich die Divergenzen aber auf. Für gleiche Massen gilt nämlich nach [1] für δm_H^2 in nichtregularisierter Form:

$$\delta m_H^2 = (g^2 + 4\lambda)\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2 + m_H^2}. \tag{4.32}$$

In dimensioneller Regularisierung geht dieser Ausdruck über in:

$$\delta m_H^2 = (g^2 + 4\lambda)\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{1}{k^2 + m_H^2}. \tag{4.33}$$

Setzt man jetzt $D = 2 - 2\epsilon$ und nutzt (4.9) aus, folgt:

$$\delta m_H^2 = (g^2 + 4\lambda)\frac{\Gamma(\epsilon)}{4\pi^{1-\epsilon}}m^{-\epsilon}. \tag{4.34}$$

Entwickelt man diese Ausdrücke nun, wie oben, für kleine ϵ, wobei

$$\Gamma(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon} - \gamma \tag{4.35}$$

(s. z.B. [17]) und γ die Euler-Mascheroni Konstante ist, sieht man, dass

$$\delta m_H^2 = (g^2 + 4\lambda)(\frac{1}{4\pi\epsilon}) + finit\ . \tag{4.36}$$

Somit folgt, dass die Polterme:

$$\pi\frac{\delta m^2}{2\lambda} = \pi\frac{1}{2\lambda}\frac{(g^2+4\lambda)}{4\pi\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon} + \frac{g^2}{8\lambda\epsilon} \tag{4.37}$$

sich gegen die divergenten Terme von (4.30) wegheben.
Nach der Renormierung ist die effektive Wirkung

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \pi\frac{m_{H,R}^2}{2\lambda} + \pi\frac{\delta m_H^2}{2\lambda} + \pi\frac{m_{H,R}^2}{2\lambda}\delta R \int \rho\, d\rho\, (f^2-1)^2 \\ &+ S_{eff}^{1loop,div.} + S_{eff}^{1loop,end.} \end{aligned} \tag{4.38}$$

also endlich.
Abschließend sollen nun noch einige Erläuterungen zu den einzelnen Termen der effektiven Wirkung bis zur Ein-Loop-Ordnung gegeben werden.
Der erste Term ist endlich und bekannt, da er nur von den Parametern abhängt, die in das Modell eingegeben werden müssen.
Bei dem zweiten Term bleibt mit (4.34) und (4.35) nur noch der endliche Teil

$$-\frac{g^2+4\lambda}{4\pi}\gamma$$

übrig.
Im dritten Term sind δR und das Integral unbekannt. Das Integral lässt sich analytisch auch für R=1 nicht bestimmen. Es müsste simuliert werden. Aufgrund der Randbedingungen ist aber zu erkennen, dass dieses Integral endlich ist.
Der Faktor δR entspricht der Abweichung des Verhältnisses der renormierten Massen von dem Fall $R = 1$:

$$\begin{aligned} R = 1 \quad &\to R_R = & 1 + \delta R \\ \Leftrightarrow \frac{m_H}{m_W} = 1 \quad &\to \tfrac{m_{H,R}}{m_{W,R}} = & \frac{m_H}{m_W}\left(1 + \delta\frac{m_H}{m_W}\right). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Mit den Gleichungen (5.9) und (5.23) in [18] kann dieser Faktor bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass in der Ein-Loop-Ordnung nur die Terme der Ordnung λ und g^2 im Ergebnis zu berücksichtigen sind.
Der endliche Anteil von $S_{eff}^{1loop,div.}$ ist durch (4.30) und (4.17) gegeben.
Der Anteil der Ein-Loop-Korrektur zur effektiven Wirkung in dimensioneller Regularisierung, der a priori als konvergent angenommen wurde, kann aus einem Vergleich mit dem von *Baacke* und *Daiber* simulierten endlichen Anteil der Ein-Loop-Korrektur zur effektiven Wirkung bestimmt werden [1]. Tatsächlich entspricht der von *Baacke* und *Daiber*

angegebene Term für den divergenten Anteil der effektiven Wirkung (s. (6.4) in [1])[6] dem in dieser Arbeit berechneten divergenten Anteil der effektiven Wirkung. Somit ist man in der Lage, den endlichen Anteil der Ein-Loop-Korrektur zur effektiven Wirkung direkt aus Fig. 4 in [1] zu entnehmen.
Insgesamt ist die effektive Wirkung in Ein-Loop-Ordnung somit gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \pi\frac{m_{H,R}^2}{2\lambda} - \frac{\gamma}{8}\left(\frac{g^2+4\lambda}{\lambda}\right) + \pi\frac{m_{H,R}^2}{2\lambda}\delta R\int \rho\, d\rho\, (f^2-1)^2 \\ &+ \frac{1}{4m_H^2}\left(\frac{3m_H^2}{2}\ln(m_H^2) + \frac{2m_W^2+m_H^2}{2}\ln(m_W^2)\right) + S_{eff}^{1loop,end.}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

[6]Man beachte, dass in dieser Formel zwei Druckfehler sind. Es fehlt ein Faktor $\frac{1}{4}$ vor dem Integral und bei dem m_W^2 im Zähler fehlt ein Faktor 2.

Zusammenfassung und Ausblick

Thema dieser Arbeit war, das von *J. Baacke* entwickelte Verfahren zur Bestimmung der effektiven Wirkung bis zur ersten Ordnung $\hbar$ zu benutzen, um dann die Divergenzen, die hierbei auftreten, mittels der Methode der dimensionellen Regularisierung zu isolieren. Dann sollte die Renormierung des Abel'schen zweidimensionalen Higgs-Modells, die von *E. Scholz* im Rahmen einer Diplomarbeit [18] berechnet wurde, benutzt werden, um die effektive Wirkung zu renormieren.
Dazu wurde zunächst eine Einführung in die Theorie geliefert, die zum Verständnis des Verfahrens von *Baacke* notwendig ist. Dabei wurden auch Rechnungen angegeben, die bei *Baacke* und *Daiber* [1] nicht explizit ausgeführt sind. Weiterhin wurden der Ein-Loop-Beitrag zur effektiven Wirkung dimensionell regularisiert und die Pole isoliert. Bei der Renormierung mit den von *Scholz* im Vakuum renormierten Größen ergaben sich leider Probleme, da sich die Divergenzen nicht auflösten. Eigentlich sollte das der Fall sein, da sich die Renormierung in einem Hintergrundfeld nicht von der im Vakuum unterscheiden sollte. Mit dem von *Baacke* und *Daiber* in [1] angegebenen Massencounterterm war die Renormierung allerdings erfolgreich.

Es stellt sich nun die Frage, warum sich die in dieser Arbeit berechneten Divergenzen nicht mit den von *E.Scholz* renormierten Größen auflösen lassen. Aufschluss könnte hier eine Berechnung der kompletten Propagatoren im Instanton-Hintergrundfeld geben.
Wenn dieses Problem gelöst ist, wäre man auch in der Lage die endlichen Terme, die sich mit der in [18] berechneten Renormierung in der effektiven Wirkung ergeben, aufzusummieren. Die somit ermittelte Form der effektiven Wirkung könnte man dann mit den von *Baacke* und *Daiber* in [1] nummerisch bestimmten Werten in Beziehung setzen, so dass explizite Aussagen über die Größe der effektiven Wirkung möglich sind.
Die Instantonübergangsamplitude, die sich so berechnen ließe, wäre dann mit den Ergebnissen zu vergleichen, die *J. Heitger* in [9] mit Gittersimulationen erzielt hat.

Anhang A

Die Vortex-Lösung für $R = 1$

In diesem Anhang soll die klassische Wirkung des Instantons für den Spezialfall gleicher Massen berechnet werden. Die hier angegebene Lösung geht auf *de Vega* und *Schaposnik* [25] zurück.
Die euklidische Lagrangedichte des Abelschen Higgsmodells ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}|F_{\mu\nu}|^2 + \frac{1}{2}(|(\partial_\mu - igA_\mu)\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}\left(|\phi|^2 - v^2\right) \tag{A.1}$$

mit $v^2 = \frac{-m^2}{\lambda}$. Die Vortexlösung hat die folgende Form:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{e}_\varphi \frac{A(r)}{gr} \tag{A.2}$$

$$\phi(\vec{r}) = vf(r)e^{in\varphi}. \tag{A.3}$$

Ab jetzt sei $n = 1$. Mit den Massen $m_H^2 = 2\lambda v^2$ und $m_W^2 = g^2 v^2$ lauten die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - m_W^2 f^2\right) A = m_W^2 f^2 \tag{A.4}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{(A+1)^2}{r^2} - \frac{m_H^2}{2}(f^2-1)^2\right) f = 0. \tag{A.5}$$

Die Lagrangedichte in Polarkoordinaten ist:

$$\mathcal{L} = v^2\left(\frac{1}{2r^2 m_W^2}\left(\frac{dA}{dr^2}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{df}{dr^2} + \frac{f^2}{r^2}(A+1)^2\right] + \frac{m_H^2}{8}(f^2-1)^2\right). \tag{A.6}$$

Man kann jetzt die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung einführen:

$$\frac{df}{dr} = (A+1)\frac{f}{r} \tag{A.7}$$

$$\frac{1}{r}\frac{dA}{dr} = e\sqrt{\frac{\lambda}{2}}v^2(f^2-1). \tag{A.8}$$

Quadriert man diese beiden Gleichungen, erhält man:

$$\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = (A+1)^2\frac{f^2}{r^2} \tag{A.9}$$

$$\frac{1}{(m_W r)^2}\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 = \frac{m_H^2}{4}(f^2-1)^2. \tag{A.10}$$

Mit Hilfe einer kleinen Rechnung lässt sich zeigen, dass jede Lösung der Gleichungen (A.7) und (A.8) auch Lösungen der Bewegungsgleichungen (A.4) und (A.5) sind, wenn das Verhältnis R des Quadrates der beiden Massen 1 ist, also

$$m_H^2 = m_W^2 \tag{A.11}$$

gilt. Die Gleichungen (A.7) und (A.8) sind in diesem Falle also äquivalent zu den Gleichungen (A.4) und (A.5).
Löst man die Gleichung (A.8) nach f^2 auf und nutzt (A.11) aus, ergibt sich:

$$f^2 = \frac{2}{m_W^2}\frac{1}{r}\frac{dA}{dr} + 1. \tag{A.12}$$

Leitet man (A.8) nach r ab und nutzt die Beziehungen (A.7), (A.11) und (A.12), erhält man:

$$\frac{d^2A}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dA}{dr} - 2(A+1)\left(\frac{1}{r}\frac{dA}{dr} + \frac{m_W^2}{2}\right) = 0. \tag{A.13}$$

Die Gleichungen (A.12) und (A.13) bilden jetzt ein System nichtlinearer Gleichungen, in dem die Gleichung für $A(r)$ entkoppelt ist. Außerdem hängt das System wegen (A.11) nur noch von zwei unabhängigen Parametern ab. In diesem Fall kann man die klassische Wirkung S_{cl} des Vortex genau bestimmen. Setzt man (A.9), (A.10) und (A.12) in (A.6) ein, erhält man für die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = v^2\left(\frac{1}{(m_W r)^2}\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 + \frac{(A+1)^2}{r^2}\left(1 + \frac{2}{m_W^2 r}\frac{dA}{dr}\right)\right). \tag{A.14}$$

Die Gleichung (A.13) lässt sich umformen zu:

$$\frac{(A+1)}{m_W^2 r^2}\left(\frac{d^2A}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dA}{dr}\right) = \frac{(A+1)^2}{r^2}\left(1 + \frac{2}{m_W^2 r}\frac{dA}{dr}\right). \tag{A.15}$$

Hiermit kann man $\mathcal{L}$ umschreiben zu:

$$\mathcal{L} = v^2\left(\frac{1}{(m_W r)^2}\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 + \frac{(A+1)}{m_W^2 r^2}\left(\frac{d^2A}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dA}{dr}\right)\right). \tag{A.16}$$

Die klassische Wirkung des Vortex ist nun das Integral über diese Lagrangedichte:

$$S_{cl} = \int r\,dr\,d\varphi\,\mathcal{L} = \frac{v^2}{m_W^2}\left[\int \frac{1}{r}\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 + \frac{(A+1)}{r}\left(\frac{d^2A}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dA}{dr}\right)\right]. \tag{A.17}$$

Partielle Integration des ersten Summanden liefert:

$$\int \frac{1}{r}\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 = \underbrace{A \cdot \frac{1}{r}\frac{dA}{dr}\bigg|_0^\infty}_{=0} - \int \frac{A}{r}\left(\frac{d^2A}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dA}{dr}\right) dr. \tag{A.18}$$

Der erste Term verschwindet aufgrund der Randbedingungen, die man an den Vortex stellt. Setzt man das obige Ergebnis in $\mathcal{L}$ ein, folgt:

$$
\begin{aligned}
S_{cl} = \int r\,dr\,d\varphi\,\mathcal{L} &= \frac{v^2}{m_W^2}\left[\int \frac{1}{r}\left(\frac{d^2A}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dA}{dr}\right) dr\right] && \text{(A.19)} \\
&= \frac{v^2}{m_W^2}\left[\frac{1}{r}\frac{dA}{dr}\right]_0^\infty && \text{(A.20)} \\
&= \frac{v^2}{m_W^2}\left(-\frac{1}{r}\frac{dA}{dr}\right)\Bigg|_{r=0} . && \text{(A.21)}
\end{aligned}
$$

Beim letzten Schritt nutzt man wieder die Randbedingungen aus. Verwendet man jetzt noch (A.8) und nutzt aus, dass $f(0) = 0$, folgt:

$$
S_{cl} = \int r\,dr\,d\varphi\,\mathcal{L} = 2\pi \frac{v^2}{m_W^2} \cdot \underbrace{e\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}_{\frac{e^2}{2}} v^2 = \pi v^2. \tag{A.22}
$$

Somit hat man die klassische Wirkung des Vortex für den Spezialfall $R = 1$ bestimmt.

Anhang B

Die Grundzustandseigenschaften des harmonischen Oszillators im Pfadintegralformalismus

Als Beispiel für das in Abschnitt 2.1 vorgestellte Verfahren sollen in diesem Anhang die Grundzustandseigenschaften des Harmonischen Oszillators berechnet werden.
Für den Harmonischen Oszillator gilt:

$$V(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2} \qquad \frac{d^2}{dx^2} V(x) = \omega^2. \tag{B.1}$$

Sei nun $x_i = x_f = 0$, dann ist der Pfad minimaler Wirkung durch $X(t) = 0$ gegeben und die zugehörige Wirkung ist $S_0 = 0$. Setzt man das in (2.16) ein, erhält man:

$$< 0|e^{-Ht_0}|0 >= N Det \left[-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{B.2}$$

Diagonalisiert man diese quadratische Form wieder:

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2} V(X) \right] x_n(t) = \lambda_n x_n(t), \tag{B.3}$$

erkennt man, dass für die Eigenfunktionen

$$x_n \sim \cos \left(\frac{n\pi t}{t_o} \right), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{B.4}$$

gelten muss, woraus folgt, dass die Eigenwerte

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{t_0^2} + \omega^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{B.5}$$

sind. Bei der Determinante kann man nun die Amplitude für das freie Teilchen "ausklammern":

$$N Det \left[-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = N \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 n^2}{t_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega^2 t_0^2}{\pi^2 n^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{B.6}$$

Die Amplitude für das freie Teilchen kann man ohne weiteres berechnen:

$$< 0|e^{-t_0\frac{\hat{p}^2}{2}}|0 >= \int_{\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{\frac{-t_0 p^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi t_0}}. \tag{B.7}$$

Der zweite nichttriviale Faktor in (B.6) lässt sich mit Hilfe der Produktentwicklung des sinh (s. z.B.[21])

$$\sinh(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{B.8}$$

berechnen zu:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega^2 t_0^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sinh(\omega t_0)}{\omega t_0}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{B.9}$$

Zusammengefasst ergibt sich somit für die Übergangsamplitude:

$$< 0|e^{-Ht_0}|0 > \quad = \quad NDet\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{B.10}$$

$$= \quad \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (2\sinh(\omega t_0)^{-\frac{1}{2}}. \tag{B.11}$$

Der Grenzwert großer t_0 liefert, wie in Abschnitt 2.1 erwähnt, die Grundzustandseigenschaften des Systems. Für $t_0 \to \infty$ ist:

$$< 0|e^{-Ht_0}|0 >\sim \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega t_0}{2}}. \tag{B.12}$$

Die Energie des Grundzustandes ist somit gegeben durch:

$$E_0 = \frac{\omega}{2}, \tag{B.13}$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen am Ursprung befindet ist:

$$| < x = 0|n = 0 > |^2 = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{B.14}$$

Somit reproduziert die semiklassische Näherung die Grundzustandseigenschaften des Harmonischen Oszillators.

Anhang C

Die Symmetrisierung der Potentialmatrix

In diesem Anhang ist die explizite Rechnung angegeben, die zur Symmetrisierung der Potentialmatrix führt.
Hierzu berechnet man zunächst die Lagrangedichte, die sich ergibt, wenn die Partialwellenzerlegung

$$\vec{a} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(r) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} + ic_n(r) \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \tag{C.1}$$

$$\varphi_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n(r) \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \tag{C.2}$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_n(r) \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \tag{C.3}$$

$$\eta_{12} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(r) \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \tag{C.4}$$

für die Quantenfelder eingesetzt wird.
Dazu ist die Bestimmung der folgenden Komponenten zweckmäßig:

$$A = a_1(M_{11})a_1 + a_2(M_{22})a_2 \tag{C.5}$$

$$B = a_1(M_{13})\varphi_1 + a_2(M_{23})\varphi_1 \tag{C.6}$$

$$C = a_1(M_{14})\varphi_2 + a_2(M_{24})\varphi_2 \tag{C.7}$$

$$D = \varphi_1(M_{34})\varphi_2 + \varphi_2(M_{43})\varphi_1 \tag{C.8}$$

$$E = \varphi_1(M_{33})\varphi_1 \tag{C.9}$$

$$F = \varphi_2(M_{44})\varphi_2 \tag{C.10}$$

$$G = \eta_{12}(M_{55})\eta_{12}. \tag{C.11}$$

Die Summe der Komponenten ergibt dann die komplette Lagrangedichte.
Bevor diese Komponenten berechnet werden, sollen noch Relationen hergeleitet werden,

die sich aus der Forderung nach der Realität der Quantenfelder $\vec{a}$, $\varphi_{1,2}$ und η_{12} ergeben. Zuerst schaut man sich die Kombinationen $a_1 + ia_2$ und $a_1 - ia_2$ der Eichfeldfluktuationen an:[1]

$$\begin{aligned}
a_1 + ia_2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \cos\varphi \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} - ic_n \sin\varphi \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ib_n \sin\varphi \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} - c_n \cos\varphi \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{=e^{i\varphi}} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} - c_n \underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{=e^{i\varphi}} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (b_n - c_n) \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 - ia_2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \cos\varphi \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} - ic_n \sin\varphi \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -ib_n \sin\varphi \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} + c_n \cos\varphi \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \underbrace{(\cos\varphi - i\sin\varphi)}_{=e^{-i\varphi}} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} + c_n \underbrace{(\cos\varphi - i\sin\varphi)}_{=e^{-i\varphi}} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (b_n + c_n) \frac{e^{i(n-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Da gefordert wird, dass a_1 und a_2 reell sind, muss gelten:

$$(a_1 + ia_2) = (a_1 - ia_2)^* \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (b_n - c_n) \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (b_n^* + c_n^*) \frac{e^{-i(n-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{(C.12)}$$

und

$$(a_1 - ia_2) = (a_1 + ia_2)^* \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (b_n + c_n) \frac{e^{i(n-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (b_n^* - c_n^*) \frac{e^{-i(n+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}. \qquad \text{(C.13)}$$

Mit $F_1^n = \frac{1}{2}(b_n + c_n)$ und $F_2^n = \frac{1}{2}(b_n - c_n)$ folgen dann aus (C.12) und (C.13) die Realitätsbedingungen

$$F_1^n = (F_2^{-n})^* \qquad \text{(C.14)}$$
$$F_2^n = (F_1^{-n})^*. \qquad \text{(C.15)}$$

Die Bedingungen für die Realität von $\varphi_{1,2}$ lauten:

$$h^n = (h^{-n})^*,$$

[1]Die Abhängigkeit der Profilfunktionen von r wird ab jetzt nicht mehr explizit ausgeschrieben.

bzw.

$$\tilde{h}^n = (\tilde{h}^{-n})^*.$$

Mit $F_3^n = \tilde{h}_n$ und $F_4^n = ih_n$ ausgedrückt, heißen die Realitätsbedingungen:

$$-F_4^{-n} = (F_4^n)^*, \tag{C.16}$$

bzw.

$$F_3^n = (F_3^{-n})^*. \tag{C.17}$$

Schließlich muss für die Realität von $g_n = F_5^n$ gelten:

$$F_5^n(r) = (F_5^{-n})^*. \tag{C.18}$$

Im Folgenden werden die Terme (C.5) bis (C.11) der Lagrangedichte einzeln berechnet.

$$\begin{aligned} A &= a_1(M_{11})a_1 + a_2(M_{22})a_2 \\ &= \frac{1}{2}(a_1 - ia_2)(-\partial^2 + g^2\phi^2)(a_1 - ia_2) + \frac{1}{2}(a_1 + ia_2)(-\partial^2 + g^2\phi^2)(a_1 - ia_2) \end{aligned}$$

Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten ist ausgeschrieben:

$$-\partial^2 = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{C.19}$$

Mit den Realtitätsbedingungen (C.12) und (C.13) folgt für A:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\sum_{n,n'}(b_{n'}^* - c_{n'}^*)\frac{e^{-i(n'+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + g^2\phi^2\right)(b_n - c_n)\frac{e^{i(n+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n,n'}(b_{n'}^* + c_{n'}^*)\frac{e^{-i(n'-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + g^2\phi^2\right)(b_n + c_n)\frac{e^{i(n-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Da man sich für die Wirkung interessiert, d.h. für das Integral über die Lagrangedichte, wird an dieser Stelle schon die φ-Integration durchgeführt. Hierbei lässt sich die Orthogonalität der komplexen Exponentialfunktion ausnutzen:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{-in'\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \delta_{n,n'}.$$

Somit ergibt sich für den ersten (schon über φ-integrierten) Summanden der Lagrangedichte[2]:

$$\begin{aligned} A &\cong \frac{1}{2}\sum_n(b_n^* - c_n^*)\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(n-1)^2}{r^2} + g^2\phi^2\right)(b_n - c_n) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_n(b_n^* + c_n^*)\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(n+1)^2}{r^2} + g^2\phi^2\right)(b_n + c_n). \end{aligned}$$

[2]Das Zeichen "$\cong$" möge ab jetzt bedeuten, dass bei dem Term auf der rechten Seite schon die φ-Integration ausgeführt wurde.

Mit $F_1^n = \frac{1}{2}(b_n + c_n)$ und $F_1^n = \frac{1}{2}(b_n - c_n)$ folgt:

$$\begin{aligned} A &\cong 2\sum_n (F_1^n)^* \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(n-1)^2}{r^2} + g^2\phi^2\right) F_1^n \\ &+ 2\sum_n (F_2^n)^* \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(n+1)^2}{r^2} + g^2\phi^2\right) F_2^n. \end{aligned}$$

Setzt man hier noch $g^2\phi^2 = g^2 f^2 v^2 = f^2 m_W^2 = m_W^2(f^2 - 1) + m_W^2$ ein, ergibt sich schließlich:

$$A \cong 2\sum_n (F_1^n)^* (\mathbf{M}_{11}^0 + \mathbf{V}_{11}^0) F_1^n + 2\sum_n (F_2^n)^* (\mathbf{M}_{22}^0 + \mathbf{V}_{22}^0) F_2^n, \tag{C.20}$$

wobei die in Kapitel 3 angegebenen Operatoren ersetzt wurden.

$$\begin{aligned} B &= a_1(M_{13})\varphi_1 + a_2(M_{23})\varphi_1 \\ &= a_1(2g^2 A_1\phi)\varphi_1 + a_2(2g^2 A_2\phi)\varphi_1 \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + ia_2)(2g^2\phi(A_1 - iA_2))\varphi_1 + \frac{1}{2}(a_1 - ia_2)(2g^2\phi(A_1 + iA_2))\varphi_1. \end{aligned}$$

Die Komponenten des A-Feldes $A_{1,2}$ sind:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\epsilon_{12}x_2}{gr^2}(A+1) = \frac{A+1}{rg}\sin\varphi \\ A_2 &= \frac{\epsilon_{21}x_1}{gr^2}(A+1) = -\frac{A+1}{rg}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$A_1 + iA_2 = i\frac{A+1}{rg}e^{-i\varphi} \tag{C.21}$$

$$A_1 + iA_2 = -i\frac{A+1}{rg}e^{i\varphi}. \tag{C.22}$$

Werden (C.21) und (C.22) in B eingesetzt und (C.12) und (C.13) genutzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}(a_1 - ia_2)^* \left(2g^2\phi i\frac{A+1}{rg}\right) \sum_n h_n \frac{e^{i(n-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\ &+ \frac{1}{2}(a_1 + ia_2)^* \left(-2g^2\phi i\frac{A+1}{rg}\right) \sum_n h_n \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sum_{n,n'} (F_1^{n'})^* \frac{e^{-i(n'-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left(2g^2\phi\frac{A+1}{rg}\right) F_4^n \frac{e^{i(n-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\ &+ \sum_{n,n'} (F_2^{n'})^* \frac{e^{-i(n'+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left(-2g^2\phi\frac{A+1}{rg}\right) F_4^n \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Integriert man über φ, nutzt die Orthogonalität der Exponentialfunktion aus und beachtet, dass $2g^2\phi\frac{A+1}{rg} = 2m_W f\frac{A+1}{r}$, ergibt sich für B:

$$B \cong \sum_n (F_1^n)^* \underbrace{\left(2m_W f\frac{A+1}{r}\right)}_{=\sqrt{2}\mathbf{V}_{14}} F_4^n + \sum_n (F_1^n)^* \underbrace{\left(-2m_W f\frac{A+1}{r}\right)}_{=\sqrt{2}\mathbf{V}_{24}} F_4^n. \tag{C.23}$$

$$
\begin{aligned}
C &= a_1(M_{14})\varphi_2 + a_2(M_{24})\varphi_2 \\
&= a_1(2g\partial_1\phi)\varphi_2 + a_2(2g\partial_2\phi)\varphi_2 \\
&= \frac{1}{2}(a_1 + ia_2)(2g(\partial_1 - i\partial_2)\phi)\varphi_2 + \frac{1}{2}(a_1 - ia_2)(2g(\partial_1 + i\partial_2)\phi)\varphi_2
\end{aligned}
$$

Setzt man hier $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}$ bzw. $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r}$ ein[3], ergibt sich mit

$$
\begin{aligned}
(\partial_1 - i\partial_2\phi &= vf'(\cos\varphi - i\sin\varphi) = vf'e^{-i\varphi} \\
(\partial_1 + i\partial_2\phi &= vf'(\cos\varphi + i\sin\varphi) = vf'e^{i\varphi}
\end{aligned}
$$

für C:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2}(a_1 + ia_2)^* \left(2gvf'\right) \sum_n \tilde{h}_n \frac{e^{i(n-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\
&+ \frac{1}{2}(a_1 + ia_2)^* \left(2gvf'\right) \sum_n \tilde{h}_n \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sum_{n,n'} (F_1^{n'})^* \frac{e^{-i(n'-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left(2gvf'\right) F_3^n \frac{e^{i(n-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\
&+ \sum_{n,n'} (F_2^{n'})^* \frac{e^{-i(n'+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left(2gvf'\right) F_3^n \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}
$$

Integriert man über φ, nutzt die Orthogonalität der Exponentialfunktion aus und beachtet, dass $2gvf' = 2m_W f'$, ergibt sich für C:

$$
C \cong \sum_n (F_1^n)^* \underbrace{\left(2m_W f'\right)}_{=\sqrt{2}\mathbf{V}_{13}} F_3^n + \sum_n (F_2^n)^* \underbrace{\left(2m_W f'\right)}_{=\sqrt{2}\mathbf{V}_{23}} F_3^n \tag{C.24}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \varphi_1(M_{34})\varphi_2 + \varphi_2(M_{43})\varphi_1 \\
&= \varphi_1(-gA_\mu\partial_\mu)\varphi_2 + \varphi_2((-gA_\mu\partial_\mu))\varphi_1
\end{aligned}
$$

Zu dieser Berechnung sind einige Vorbemerkungen nötig. Der Term in der Klammer hat die folgende Gestalt:

$$
\begin{aligned}
gA_\mu\partial_\mu &= \frac{A+1}{r^2}\epsilon_{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu \\
&= \frac{A+1}{r^2}(x_2\partial_1 - x_1\partial_2).
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
x_2\partial_1 - x_1\partial_2 &= r\sin\varphi\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\right) - r\cos\varphi\left(-\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\right) \\
&= -\sin\varphi^2\frac{\partial}{\partial\varphi} - \cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
&= -\frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{aligned}
$$

[3]Die Ableitung nach φ wurde hier weggelassen, da f nur von r abhängt.

erhält man:

$$gA_\mu\partial_\mu = -\frac{A+1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Unter Ausnutzung der obigen Gleichung, den Realitätsbedingungen und anschließender φ-Integration erhält man schließlich für D:

$$D \cong \sum_n (F_4^n)^* \underbrace{\left(-2\frac{A+1}{r^2}n\right)}_{=\mathbf{V}_{34}} F_3^n. \qquad \text{(C.25)}$$

$$\begin{aligned} E &= \varphi_1(M_{33})\varphi_1 \\ &= \varphi_1(-\partial^2 + g^2A\mu^2 + \lambda(3\phi^2 - v^2))\varphi_1 \\ &= \sum_{n,n'}(h_{n'})^*\frac{e^{-in'\varphi}}{\sqrt{2\pi}}(-\partial^2 + g^2A\mu^2 + \lambda(3\phi^2 - v^2))h_n\frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Setzt man hier (C.19) ein, fügt $-i^2 = 1$ ein und integriert über φ, dann folgt:

$$E \cong (F_4^n)^*\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{n^2}{r^2} + g^2A_\mu^2 + \lambda(3\phi^2 - v^2)\right)F_4^n.$$

In der Klammer kann man nun die Felder ϕ und A_μ einsetzen. Mit der Masse $m_H = 2\lambda v^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{n^2}{r^2} + g^2A_\mu^2 + \lambda(3\phi^2 - v^2) \\ = & -\underbrace{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{n^2}{r^2} + m_H^2}_{M_{44}^0} + \underbrace{\frac{(A+1)^2}{r^2} + \frac{3}{2}m_H^2(f^2-1)}_{=V_{44}}, \end{aligned}$$

und somit ist

$$E = \sum_n (F_4^n)^*(\mathbf{M}_{44}^0 + \mathbf{V}_{44})F_4^n. \qquad \text{(C.26)}$$

$$\begin{aligned} F &= \varphi_2(M_{44})\varphi_2 \\ &= \varphi_2(-\partial^2 + g^2A_\mu^2 + g^2\phi^2 + \lambda(\phi^2 - v^2))\varphi_2. \end{aligned}$$

Unter Nutzung von (C.19), Ausführung der zweifachen Ableitung nach φ und anschließender Integration über φ erhält man:

$$\begin{aligned} F &\cong \sum_n (F_3^n)^*(\mathbf{M}_{33}^0 + \frac{(A+1)^2}{r^2} + g^2v^2f^2 + \lambda(v^2f^2 - v^2) - g^2v^2)F_3^n \\ &= \sum_n (F_3^n)^*(\mathbf{M}_{33}^0 + \underbrace{\frac{(A+1)^2}{r^2} + m_W^2(f^2-1) + \frac{1}{2}m_H^2(f^2-1)}_{\mathbf{V}_{33}})F_3^n. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man für F also:

$$F \cong \sum_n (F_3^n)^* (\mathbf{M}_{33}^0 + \mathbf{V}_{33}) F_3^n \tag{C.27}$$

Die Rechnungen für G sind denen für A und B sehr ähnlich. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} G &= \eta_{12}(M_{55})\eta_{12} \\ &\cong \sum_n (F_5^n)^* (\mathbf{M}_{55}^0 + \underbrace{m_W^2(f^2-1)}_{\mathbf{V}_{55}}) F_5^n . \end{aligned} \tag{C.28}$$

Somit erhält man letztlich:

$$G \cong \sum_n (F_5^n)^* (\mathbf{M}_{55}^0 + \mathbf{V}_{55}) F_5^n . \tag{C.29}$$

Addiert man schließlich diese Komponenten, ist das Ergebnis die, schon über φ-integrierte,

Lagrangedichte. Werden die Quantenfelder F_1^n und F_2^n mit einem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ umskaliert, erhält man dieselbe Lagrangedichte, wie die, die sich aus (3.37) und (3.38) mit der in Kapitel 3 angegebenen Potentialmatrix ergibt.
Zum Schluss soll noch erwähnt werden, dass sich mit den Realitätsbedingungen zeigen lässt, dass die Profilfunktionen F_1^n und F_2^n nicht voneinander unabhängig sind. Unter Ausnutzung der Hermitizität der Potentialmatrixelemente kann F_1^n (bzw.F_2^n) zugunsten F_2^n (bzw. F_1^n) eliminiert werden.

Literaturverzeichnis

[1] J.Baacke, T. Daiber *Physical Review* **D51**, 1994

[2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Y. S. Tyupin, *Physical Letters*, **B59**, 1975

[3] C. G. Callan, R. Dashen, D. J. Gross, *Physical Review*, **D17**, 1978

[4] T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford University Press, Oxford 1984

[5] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, 1985

[6] S. Coleman, E. Weinberg, *Physical Review* **D7**, 1973

[7] T. Daiber, *Baryonenzahlverletzende Prozesse im 1+1 dimensionalen abelschen Higgsmodell*, Diplomarbeit, Universität Dortmund, 1993

[8] M. Guidry *Gauge Field Theories, An Introduction with Applications*, 1980

[9] J.Heitger *Numerical Simulations of Gauge-Higgs Models on the Lattice*, Dissertation, Universität Münster, 1997

[10] K. Huang, *Quarks, Leptons and Gauge Fields*, World Scientific, 1992

[11] J. Kripfganz, A. Ringwald, *Modern Physics Letters* **A5**, 1990

[12] L. D. Landau, E. M. Lifschitz *Quantenmechanik*, Harri Deutsch, 1997

[13] G. Leibbrandt, *Reviews of Modern Physics*, **47**, 1975

[14] H. Nielsen, P. Olesen *Nuclear Physics*, **D14**, 1973

[15] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, 1982

[16] P. Ramond, *Field Theory*, Benjamin/Cummings, 1981

[17] L. Ryder, *Quantum Field Theory Second edition*, Cambridge University Press, 1996

[18] E. Scholz *Das Abelsche Higgs-Modell in zwei Dimensionen*, Diplomarbeit, Universität Münster, 2002

[19] A.-S. Schwarz, *Quantum Field Theory and Topology* Springer 1993

[20] M. A. Shifman, *Particle Physics and Field Theory Vol.1*, World Scientific, 1999

[21] H. Stöcker, *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*, Harri Deutsch, 1999

[22] G. 't Hooft, M. Veltman *Nuclear Physics*, **B44**, 1972

[23] G. 't Hooft, *Physical Review Letters* **37**, 1976

[24] G. 't Hooft, *Monopoles, Instantons and Confinement* Vorlesung, Saalburg, 1999

[25] H. de Vega, F. Schaposnik, *Physical Review*, **D14**, 1976

[26] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields Vol.I*, Cambridge University Press, 1995

[27] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields Vol.II*, Cambridge University Press, 1995

[28] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford, 1989

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen und den Personen meinen Dank aussprechen, die zur Vollendung dieser Diplomarbeit beigetragen haben:

- Herrn Prof. Dr. Gernot Münster für das interessante Thema, das meinen Wünschen entsprach, sowie seiner ständigen Bereitschaft, sich von meinen Fragen "löchern" zu lassen und mich bei der Anfertigung dieser Arbeit mit zahlreichen Hinweisen und Ratschlägen zu unterstützen,
- Herrn Prof. Dr. Manfred Stingl für die Bereitschaft, die Zweitkorrektur dieser Arbeit zu übernehmen,
- Holger Schmalle für eine angenehme, entspannte Zeit im Raum 408, Hilfe bei Computerfragen, sowie interessanten Diskussionen und Nachforschungen teils physikalischer aber überwiegend meist anderer Natur,
- Katharina Slotty für das Korrekturlesen dieser Arbeit und ihre aufmunternden Worte während der Anfertigung,
- Katha, Künnsen, Holgi, Silja und Kai fürs "Abäsen",
- Till Hagedorn, Michael Krutschke und nochmals Holger Schmalle für erholsame Mittagspausen in der Mensa,
- der Kaffeemaschine im Raum 408, die wohl von dem Ende dieser Diplomarbeit gewusst haben muss und jetzt leider ihren letzten Kaffee gekocht hat.

Abschließend möchte ich mich noch besonders bei meinen Eltern bedanken, die mich während des Studiums ständig unterstützt haben und immer hinter mir gestanden haben.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im Februar 2004