

WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER

# Confinement-Kriterium für dynamische Materiefelder bei endlichen Temperaturen

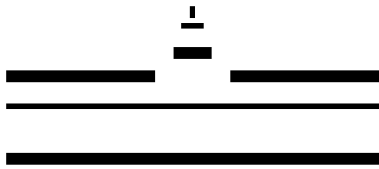
Masterarbeit im Studiengang Physik  
vorgelegt von **Kevin Eckert**  
im September 2014

Betreuer: Prof. Dr. Gernot Münster  
Zweiter Betreuer: PD Dr. Jochen Heitger









WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER

# Confinement-Kriterium für dynamische Materiefelder bei endlichen Temperaturen

Masterarbeit im Studiengang Physik  
vorgelegt von **Kevin Eckert**  
im September 2014

Betreuer: Prof. Dr. Gernot Münster  
Zweiter Betreuer: PD Dr. Jochen Heitger







# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>Kapitel 1      Standardmodell, Higgs-Mechanismus und Pfadintegralformalismus</b>	<b>17</b>
<b>1.1      Fundamentale Teilchen des Standardmodells</b>	<b>19</b>
<b>1.2      Lagrangeformalismus und Wirkungsprinzip</b>	<b>20</b>
<b>1.3      Wechselwirkende Eichtheorien</b>	<b>23</b>
1.3.1    Abelsche Eichtheorie	23
1.3.2    Nichtabelsche Eichtheorien	25
<b>1.4      Goldstone-Theorem und Higgs-Mechanismus</b>	<b>27</b>
1.4.1    Spontane Brechung einer globalen $U(1)$ -Symmetrie	27
1.4.2    Lokale $U(1)$ -Symmetrie	30
<b>1.5      Pfadintegralformalismus</b>	<b>33</b>
1.5.1    Feldtheorie bei endlichen Temperaturen	36
<b>Kapitel 2      Quantenfeldtheorie auf dem Gitter</b>	<b>39</b>
<b>2.1      Endliche Temperaturen auf dem Gitter</b>	<b>43</b>



<b>Kapitel 3</b>	<b>Das <math>SU(2)</math>-Higgs-Modell</b>	<b>45</b>
<b>3.1</b>	<b>Das <math>SU(2)</math>-Higgs-Modell bei <math>T = 0</math></b>	<b>49</b>
<b>3.2</b>	<b>Das <math>SU(2)</math>-Higgs-Modell bei endlichen Temperaturen</b>	<b>50</b>
<b>Kapitel 4</b>	<b>Confinement-Mechanismus und Ordnungsparameter</b>	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>Der Wilson-Loop als Confinement-Kriterium</b>	<b>56</b>
<b>4.2</b>	<b>Der Fredenhagen-Marcu-Operator</b>	<b>58</b>
<b>Kapitel 5</b>	<b>Monte-Carlo Verfahren und wichtige Messgrößen</b>	<b>61</b>
<b>5.1</b>	<b>Gitterausdehnung und räumliche Operatoren</b>	<b>67</b>
<b>5.2</b>	<b>Datenanalyse mit Jackknife-Binning</b>	<b>68</b>
<b>Kapitel 6</b>	<b>Ergebnisse der numerischen Simulationen</b>	<b>71</b>
<b>6.1</b>	<b>Programmkorrektheit und Thermalisierungszeiten des Systems bei endlichen Temperaturen</b>	<b>77</b>
<b>6.2</b>	<b>Räumliche Operatoren</b>	<b>78</b>
<b>6.3</b>	<b>Plateaumessungen des FM-Operators</b>	<b>80</b>
<b>6.4</b>	<b>Asymptotisches Verhalten von <math>\rho_{FM,s}</math></b>	<b>82</b>
<b>6.5</b>	<b>Betrachtungen bei kleinem <math>\kappa</math></b>	<b>87</b>
<b>Kapitel 7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>93</b>
<b>Anhang</b>		<b>97</b>



<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>100</b>
<b>Erklärung zur Masterarbeit</b>	<b>107</b>







Gegenüber der am 24.09.2014 im Prüfungsamt abgegebenen Version der Masterarbeit wurden Tippfehler und Fehler in einigen Latex-Formeln verbessert, sowie minimale inhaltliche Veränderungen vorgenommen.







## Einleitung

Eine wissenschaftliche Theorie wird gemeinhin als eine gute akzeptiert, wenn sie folgende Kriterien erfüllt: Sie beschreibt ein physikalisches System mit hinreichender Genauigkeit, gibt Hinweise auf die zugrunde liegenden Mechanismen und macht experimentell überprüfbare Vorhersagen zu zuvor unbekannten oder unerklärten Phänomenen. Die beiden großen Säulen der modernen Physik, die Allgemeine Relativitätstheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik beschreiben die vier bekannten Grundkräfte der Natur, die Gravitation, sowie den Elektromagnetismus und die starken und schwachen Kernkräfte mit erstaunlicher Präzision. Zudem sagten diese Theorien eine Fülle von später experimentell bestätigten Phänomenen vorher, beispielsweise die Ablenkung von Licht in einem Gravitationsfeld [1] und ermöglichten die präzise Beschreibung zuvor nicht verstandener Effekte, beispielsweise des anomalen magnetischen Moments des Elektrons [2].

Die Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt als klassische Theorie das Verhalten masse-reicher Körper auf großen Skalen, wohingegen das Standardmodell die elektromagnetische Kraft und die schwache und starke Kernkraft auf subatomaren Skalen im Rahmen von Quantenfeldtheorien beschreibt. Bis heute ist es nicht gelungen, eine allgemein akzeptierte Quantenfeldtheorie der Gravitation zu formulieren. Da jedoch die Gravitation im Vergleich zu den anderen Kräften eine extrem schwache Kraft ist, spielt sie in den allermeisten Situationen (als Ausnahme seien hier der Urknall und schwarze Löcher genannt) auf atomaren und subatomaren Dimensionen praktisch keine Rolle und kann in sehr guter Näherung vernachlässigt werden.

Obwohl Protonen und Neutronen, welche den Atomkern konstituieren und daher als Nukleonen bezeichnet werden, lange Zeit als fundamentale Teilchen angesehen wurden, zeigte sich in den 1960er Jahren experimentell, dass sich das Verhalten von hochenergetischen, tief-inelastischen Elektron-Nukleon-Streuprozessen (englisch: deep-inelastic scattering) am besten durch die Annahme beschreiben ließ, die Elektronen würden mit schwach miteinander wechselwirkenden Konstituenten *innerhalb* der Nukleonen wechselwirken [3].

Parallel hierzu entwickelten Murray Gell-Mann [4] und Yuval Ne'eman unabhängig vonein-



ander Modelle, welche viele Eigenschaften der Hadronen (dies sind die Teilchen, welche der starken Kernkraft unterliegen) unter der Annahme zu beschreiben vermochten, diese seien aus fundamentalen Teilchen, den sogenannten Quarks aufgebaut. Gell-Mann gelang es die damals bekannten Hadronen in Multiplets der Baryonen und Mesonen einzuteilen, indem er voraussetzte, die Baryonen seien aus drei Quarks aufgebaut, die Mesonen hingegen aus zweien. Zudem vermochte er aus nicht besetzten Stellen der Multiplets weitere Hadronen und deren Quantenzahlen korrekt vorherzusagen. Für die Arbeiten an seinem Quarkmodell wurde Gell-Mann im Jahre 1969 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet [5].

Es wurde jedoch schnell klar, dass das Quarkmodell nicht die endgültige Beschreibung der starken Kernkraft sein konnte. Beispielsweise besitzen Hadronen wie das  $\Delta^{++}$ -Baryon, welches aufgrund des parallelen Spins der drei konstituierenden Quarks einen Gesamtspin von  $3/2$  aufweist und sich somit wie ein Fermion verhalten muss (Fermionen sind Teilchen mit halbzahligem Spin und unterliegen der Fermi-Dirac-Statistik), laut dem Quarkmodell eine symmetrische Gesamtwellenfunktion und verhielten sich entsprechend als Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin, welche der Bose-Einstein-Statistik unterliegen). Diese offensichtliche Verletzung des Spin-Statistik-Theorems [6] konnte durch die Postulierung eines zusätzlichen internen Freiheitsgrades und der dazu gehörigen Quantenzahl, welche als Color (englisch: Farbe) bezeichnet wurde, gelöst werden. Die Color-Wellenfunktion ist hierbei antisymmetrisch unter Vertauschung der Quarks und führt in Kombination mit den Wellenfunktionen der restlichen Freiheitsgrade auf eine antisymmetrische Gesamtwellenfunktion. Unter dieser Bedingung war die Entwicklung einer widerspruchsfreien Quantenfeldtheorie der starken Kernkraft, der Quantenchromodynamik (QCD) möglich. Die Hadronen werden hierbei aus den farbgeladenen Quarks konstituiert, die starke Wechselwirkung wird von den Austauschteilchen, den sogenannten Gluonen vermittelt. Diese werden auch als Eich- oder Vektorbosonen bezeichnet und tragen selbst Farbladungen.

Interessanterweise werden im Experiment unter normalen Bedingungen keine freien Farbladungen beobachtet, vielmehr sind farbgeladene Teilchen stets zu farbneutralen Zuständen (Farbsingulets) gebunden. Dieses Phänomen wird als Confinement (englisch: Einschluss) bezeichnet und rührt von der Selbstwechselwirkung der Gluonen her. Bis heute ist es nicht gelungen, das Phänomen des Confinement streng mathematisch aus den Gleichungen der QCD zu beweisen, jedoch zeigte sich in den letzten Jahren in Beschleunigerexperimenten des europäischen Kernforschungszentrums CERN und dem RHIC in Brookhaven, Vereinigte Staaten, dass bei hohen Energien (äquivalent zu hohen Temperaturen) von etwa  $O(100)\text{MeV}$  der Einschluss von Quarks in Hadronen aufgehoben wird [7]. Das System durchläuft bei einer kritischen Temperatur  $T_c$  einen Phasenübergang zur sogenannten Deconfinement-Phase, in der Quarks und Gluonen in einem Plasma von schwach wechselwirkenden freien Farb-



ladungen vorliegen (auch als Quark-Gluon-Plasma bezeichnet).

Da es bisher nicht möglich war, rein analytisch zu unterscheiden, ob sich ein physikalisches System bei einer gegebenen Parameterkombination in der Confinement- oder Deconfinement-Phase befindet, ist es wünschenswert Ordnungsparameter zu konstruieren, welche diese Unterscheidung vornehmen können. Ferner bedarf es eines nicht-perturbativen Formalismus, um auch niedrige Energien und kleine Quark-Massen simulieren zu können. Wie Gross, Politzer und Wilczek in ihren Arbeiten zeigten [8] [9], nimmt die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung  $\alpha_s$  bei zunehmenden Energien (äquivalent zu abnehmenden Distanzen) ab, so dass bei hohen Energien störungstheoretische Rechnungen zu präzisen Ergebnissen gelangen. Bei kleinen Energien (und Distanzen die etwa denen der Hadronen entsprechen) versagt die Störungstheorie jedoch, da  $\alpha_s$  hier so groß wird, dass sie als Entwicklungsparameter völlig ungeeignet ist. Die Abnahme von  $\alpha_s$  mit zunehmender Energie wird auch als asymptotische Freiheit bezeichnet (englisch: Asymptotic Freedom). Für die Entdeckung der asymptotischen Freiheit in der Theorie der starken Wechselwirkung wurden Gross, Politzer und Wilczek im Jahre 2004 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet [10].

Eine Methode um auch den Niedrigenergiebereich der QCD berechnen zu können schlug Wilson im Jahre 1974 vor [11]. Im sogenannten Gitterformalismus wird die vierdimensionale Raumzeit diskretisiert und auf ein euklidisches Gitter übertragen. Die Materiefelder werden als klassische Variablen auf den Gitterpunkten behandelt, während die Eichfelder Verbindungen (Links) zwischen den Gitterpunkten darstellen. Beiträge durch Quantenkorrekturen tragen durch Verwendung (euklidischer) Pfadintegrale zur Bildung von Erwartungswerten bei. Enthält die Theorie nur statische (unendlich schwere) Quarks in der fundamentalen Darstellung der Eichgruppe als Testladungen, ist das von Wilson erdachte Wilson-Loop-Kriterium ausreichend um zwischen Confinement- und Deconfinement-Phase zu unterscheiden. Werden jedoch auch dynamische Materiefelder in Fundamentaldarstellung zugelassen, greift das Wilson-Loop-Kriterium nicht mehr. Um diesem Manko abzuhelpfen, schlugen Fredenhagen und Marcu im Jahre 1986 einen Operator vor [12], welcher gemeinhin als Fredenhagen-Marcu-Operator (kurz FM-Operator) bezeichnet wird und theoretisch auch in der Anwesenheit dynamischer Materiefelder in der Lage sein sollte, zwischen Confinement- und Deconfinement-Phase zu unterscheiden. Da jedoch die numerische Simulation von Fermionen, insbesondere von leichten Quarks äußerst aufwendig ist, wurde ein simpleres System vorgeschlagen, um den FM-Operator zu testen.

Der zweite große Sektor des Standardmodells neben der QCD ist die Theorie der elektroschwachen Kraft. Nachdem es in den 1940er Jahren gelang, den Elektromagnetismus als erste Quantenfeldtheorie, die sogenannte Quantenelektrodynamik (QED) zu formulieren, gab es berechtigte Hoffnungen, diesen Formalismus auch auf die schwache Kernkraft zu übertra-



gen, deren widerspruchsfreie Beschreibung bis dato nicht gelungen war. Durch die Arbeiten von Glashow, Salam und Weinberg [13] [14] [15] gelang es die elektromagnetische und die schwache Kraft in einer einzigen Quantenfeldtheorie (oft kurz als GSW-Modell bezeichnet) zu vereinen. Für diese Leistung erhielten sie im Jahre 1979 den Nobel Preis für Physik [16]. Ein integraler Bestandteil des GSW-Modells ist der Higgs-Mechanismus, welcher erklärt, auf welche Weise die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung eine nicht verschwindende Masse erlangen können, ohne die Eichinvarianz der Theorie explizit zu brechen [17] [18]. Des weiteren sagt der Higgs-Mechanismus die Existenz eines massiven Teilchens mit Spin 0 voraus (skalares Higgs-Boson). Ein Teilchen mit den erwarteten Eigenschaften wurde im Juli 2012 am CERN simultan in den Beschleunigerexperimenten ATLAS und CMS entdeckt [19]. Englert und Higgs erhielten für ihre Arbeiten im Jahre 2013 den Nobel Preis für Physik [20].

Das SU(2)-Higgs-Modell ist ein Modell, welches die Wechselwirkung des Higgs-Feldes mit den Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung beschreibt und aus dem GSW-Modell durch die Vernachlässigung einiger Kopplungen an andere Teilchen entwickelt wurde. Obwohl es ein einfaches Modell ist, hat das SU(2)-Higgs-Modell mehrere Vorteile, die es attraktiv für numerische Simulationen machen: Zum einen tragen die skalaren Teilchen in der Fundamentaldarstellung der Eichgruppe SU(2) Farbladungen und simulieren somit skalare Quarks, welche wesentlich einfacher zu handhaben sind als Fermionen. Des weiteren existiert im SU(2)-Higgs-Modell eine Phase, welche Color-Confinement aufweist und somit einer der Phasen der QCD ähnelt [21]. Darüber hinaus wurde das System ausführlich untersucht und das Phasendiagramm am absoluten Temperaturnullpunkt  $T = 0$  ist recht gut verstanden.

Aufgrund dieser Vorzüge wurde die Eignung des FM-Operators als Confinement-Kriterium von Frau Anja Teuber in ihrer Diplomarbeit aus dem Jahre 2011 [22] im Rahmen des SU(2)-Higgs-Modells bei  $T = 0$  ausführlich getestet. Bewerkstelligt wurde dies durch sogenannte Monte-Carlo-Simulationen, welche mit Hilfe eines von ihr erstellten C++-Programms durchgeführt wurden. Monte-Carlo-Simulationen erlauben die Berechnung quantenmechanischer Erwartungswerte auf dem Gitter unter Verwendung statistischer Methoden. Es zeigte sich, dass der FM-Operator in den beiden Phasen des Systems ein deutlich unterschiedliches Verhalten aufwies und sich Phasengrenzen klar identifizieren ließen.

Diese Masterarbeit basiert auf der Diplomarbeit von Frau Teuber, soll diese jedoch um Aspekte von endlichen Temperatureffekten erweitern. Die Motivation der Untersuchung des SU(2)-Higgs-Systems bei  $T \neq 0$  rührt daher, dass das Phasendiagramm bei  $T = 0$  keine echte Deconfinement-Phase aufweist. Vielmehr sind die beiden Phasen analytisch miteinander verbunden und sind streng genommen nur zwei Regionen einer einzelnen Phase. Da



das Systemverhalten jedoch in beiden Regionen stark unterschiedlich ist, wird gemeinhin von zwei Phasen gesprochen. Im Gegensatz dazu besitzt das  $SU(2)$ -Higgs-Modell bei endlichen Temperaturen eine echte Deconfinement-Phase [23] und erlaubt daher den Test des FM-Operators über die bereits bestätigte Verwendbarkeit als Ordnungsparameter bei  $T = 0$  hinaus.

Im ersten Kapitel sollen zunächst die theoretischen Grundlagen des Standardmodells, wie etwa das Eichprinzip, der Higgs-Mechanismus und der Pfadintegralformalismus erläutert werden. Zudem soll aufgezeigt werden, wie endliche Temperatureffekte im Rahmen des Letzteren realisiert werden können.

Darauf aufbauend wird in Kapitel 2 der Gitterformalismus eingeführt und aufgezeigt werden, wie auf dem Gitter endliche Temperaturen simuliert werden können.

In Kapitel 3 soll zunächst das Phasendiagramm des  $SU(2)$ -Higgs-Modells ausführlich erläutert werden. Anschließend wird das erweiterte Phasendiagramm mit dem zusätzlichen Freiheitsgrad der endlichen Temperatur  $T \neq 0$  betrachtet.

Das vierte Kapitel erläutert den Mechanismus, welcher zum Confinement in nicht-abelschen Eichtheorien führt, betrachtet den Wilson-Loop als Ordnungsparameter in Abwesenheit von dynamischen Materiefeldern und zeigt auf, weshalb der Wilson-Loop in deren Anwesenheit als Ordnungsparameter unzureichend ist. Anschließend sollen der Aufbau des FM-Operators und seine Wirkungsweise als Ordnungsparameter dargelegt werden.

Im fünften Kapitel wird das Prinzip von Monte-Carlo-Algorithmen zur numerischen Simulation und die statistische Auswertung der gewonnenen Daten erläutert. Der Aufbau von Frau Teubers Programm wird dargelegt und wichtige Messgrößen und Operatoren werden definiert. Zusätzlich soll aufgezeigt werden, inwiefern Modifikationen an Programm und Operatoren durchgeführt werden mussten, um endliche Temperatureffekte simulieren und auswerten zu können.

In Kapitel 6 werden die Ergebnisse, die im Rahmen der numerischen Simulationen gewonnen werden konnten präsentiert, miteinander verglichen und interpretiert.

Abschließend wird in Kapitel 7 eine Zusammenfassung der Arbeit und ihrer Ergebnisse gegeben. Des weiteren soll ein kurzer Ausblick aufzeigen, mit welchen Fragestellungen sich zukünftige Arbeiten im Rahmen dieses Modells auseinander setzen könnten.

Im Anhang schließlich findet sich eine Auflistung von Eigenschaften der  $SU(2)$ -Eichgruppe.



"Was meinen wir mit etwas 'verstehen?' Wir können uns vorstellen, dass dieses komplizierte Gebilde der sich bewegenden Dinge, welche die 'Welt' darstellen, so etwas ist wie ein großes Schachspiel, das die Götter spielen, und wir sind die Beobachter des Spieles. Wir kennen die Spielregeln nicht; uns ist nur gestattet, dem Spiel *zuzusehen*. Natürlich, wenn wir lange genug beobachten, werden wir schließlich einige Regeln verstehen. Es sind die *Spielregeln*, die wir mit *Grundlagenphysik* bezeichnen. Jedoch, selbst wenn wir jede Regel wüssten, würden wir vielleicht nicht verstehen, warum ein bestimmter Zug gemacht wurde, einfach weil er zu kompliziert und unser Geist begrenzt ist. Wenn Sie Schach spielen, muss ihnen bekannt sein, dass die Regeln leicht zu lernen sind, dass es jedoch oft sehr schwierig ist, den richtigen Zug auszuführen oder zu verstehen, warum ein Spieler so zieht, wie er es tut. So ist es auch in der Natur, nur in viel größerem Maße; aber wir werden vielleicht wenigstens in der Lage sein, alle Spielregeln zu finden. In der Tat kennen wir bis jetzt nicht alle Spielregeln. (Hin und wieder beobachten wir so etwas wie eine Rochade, was wir nicht verstehen). Neben unserer Unkenntnis der gesamten Spielregeln sind die Möglichkeiten zur Erklärung der Dinge anhand dieser Regeln begrenzt, weil fast alle Situationen so außerordentlich kompliziert sind, dass wir den Spielzügen anhand der Spielregeln nicht folgen können; viel weniger können wir vorhersagen, was als Nächstes geschieht. Darum müssen wir uns auf die mehr grundsätzlichen Fragen bezüglich der Spielregeln beschränken. Wenn wir die Regeln verstehen, dann nehmen wir an, dass wir die Welt 'verstehen'."

- Richard P. Feynman, *Feynman-Vorlesungen über Physik, Band 1, Seite 15*



**Standardmodell,  
Higgs-Mechanismus  
und Pfadintegralfor-  
malismus**

**Kapitel 1**







In diesem Kapitel sollen zunächst die Teilchen des Standardmodells mit ihren Eigenschaften kurz vorgestellt werden, bevor wesentliche Aspekte wie Lagrangeformalismus, abelsche und nichtabelsche Eichtheorien und das Prinzip der spontanen Symmetriebrechung erläutert werden. Anschließend wird die Feldquantisierung im Pfadintegralformalismus besprochen und aufgezeigt, auf welche Weise endliche Temperatureffekte mit Hilfe von Pfadintegralen beschrieben werden können.

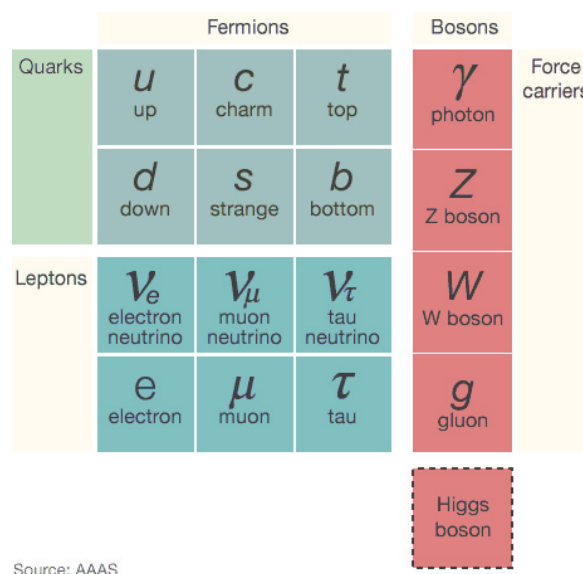
## 1.1 Fundamentale Teilchen des Standardmodells

Das Standardmodell beschreibt die starke und elektroschwache Wechselwirkung im Rahmen von Quantenfeldtheorien. Die Bausteine des Standardmodells sind hierbei die diversen Elementarteilchen, welche im Rahmen der Theorie als nicht weiter in kleinere Konstituenten zerlegbare fundamentale Teilchen gelten. Aufgrund von internen Symmetrien der QCD und des GSW-Modells besitzen die diversen Teilchenfamilien zusätzliche interne Freiheitsgrade. Dies hat zur Folge, dass die Lagrangedichten der QCD und des GSW-Modells invariant unter Transformationen der zugehörigen Symmetriegruppe sind, welche auch als Eichtransformationen bezeichnet werden. Die Symmetriegruppe des Standardmodells ist  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  und entspricht den drei Farbfreiheitsgraden der starken Wechselwirkung, dem schwachen linkshändigen Isospin der schwachen Wechselwirkung, sowie der Hyperladung  $Y$  [24]. Eine Übersicht der Elementarteilchen des Standardmodells findet sich in Abbildung (1.1). Es handelt sich hierbei um die sechs Quarks der Flavours up, down, charm, strange, top und bottom, welche sowohl elektromagnetische Ladungen als auch Farbladungen besitzen. Zudem gibt es drei elektrisch geladene Leptonen, das Elektron, das Myon und das Tauon und die drei elektrisch neutralen Leptonen (Elektron-Neutrino, Myon-Neutrino und Tauon-Neutrino). Leptonen tragen keine Farbladungen, unterliegen jedoch genau wie die Quarks der schwachen Wechselwirkung. Die Fermionen können in drei Generationen angeordnet werden, wobei die zweite und dritte Generation im wesentlichen massereichere Varianten der ersten Generation (up- und down-Quark, Elektron und Elektron-Neutrino) darstellen.

Wechselwirkungen werden in Quantenfeldtheorien durch den Austausch virtueller Bosonen vermittelt und können beispielsweise auf der Basis ihrer Reichweite charakterisiert werden. Die elektromagnetische Kraft, welche eine unendliche Reichweite besitzt konnte bereits in den 1940er Jahren als Quantenfeldtheorie formuliert werden (QED) und wird durch den Austausch des masselosen Photons  $\gamma$  vermittelt. Die großen Massen der Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung führen in der Natur dazu, dass die Reichweite der schwachen



Wechselwirkung etwa in der Größenordnung von  $\approx 10^{-18}\text{m}$  liegt. Man unterscheidet bei den Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung zwischen den elektrisch geladenen  $W^+$  und  $W^-$ , sowie dem elektrisch neutralen  $Z^0$ . Die Wechselwirkung der starken Kernkraft schließlich wird von acht masselosen Gluonen  $g$  vermittelt, welche selbst Farbladungen tragen und aufgrund dessen die Quarks in Hadronen einschließen. Dies führt zu einer effektiven Reichweite der starken Wechselwirkung von  $\approx 10^{-15}\text{m}$ .



**Abbildung 1.1:** Die Elementarteilchen des Standardmodells (entnommen aus [25])

Ein weiterer integraler Bestandteil des Standardmodells ist der Higgs-Mechanismus, welcher erklärt, wie schwache Eichbosonen und Fermionen eine Masse erlangen, und sich physikalisch in der Existenz des skalaren Higgs-Bosons  $H$  niederschlägt.

## 1.2 Lagrangeformalismus und Wirkungsprinzip

In den folgenden Abschnitten soll eine knappe Zusammenfassung der wichtigsten Prinzipien der Quantenfeldtheorie gegeben werden. Hierzu werden die Gedankengänge der Standardliteratur (beispielsweise [24] [26] [27]) in kompakter Form wiedergegeben.

Zudem folgt diese Arbeit der üblichen Konvention, Rechnungen im Rahmen der Quantenfeldtheorie in natürlichen Einheiten mit  $\hbar = c = 1$  auszuführen. Dies führt dazu, dass nicht nur Energien in eV (Elektronenvolt) ausgedrückt werden, sondern beispielsweise auch Massen und inverse Längenskalen. Um Ergebnisse von natürlichen Einheiten ins SI-System um-



zurechnen, müssen diese mit einer geeigneten Kombination von  $c$  und  $\hbar$  multipliziert beziehungsweise dividiert werden, bis die richtige SI-Einheit erreicht ist. Des weiteren gilt die einsteinsche Summenkonvention, welche besagt, dass über paarweise ko- und kontravariant auftretende Indizes unter Beachtung der Minkowski-Metrik  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  summiert wird. Das Minkowski-Skalarprodukt wird daher definiert als  $x_\mu y^\mu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$ .

Die nichtrelativistische Quantenmechanik operiert stets auf Hilberträumen mit einer fixen Anzahl von Teilchen  $N$ . Aufgrund der Äquivalenz von Masse und Energie  $E = mc^2$  entstehen bei hohen Energien Teilchen und Antiteilchen durch Paarerzeugung, einem Umstand dem die Quantenmechanik nicht Rechnung tragen kann. Dieses Problem bleibt aufgrund von Vakuumfluktuationen, also der Erzeugung von virtuellen Teilchen-Antiteilchen-Paaren, auch bei niedrigen Energien bestehen. Darüber hinaus ergeben sich weitere Inkonsistenzen, falls man relativistische Gleichungen wie die Klein-Gordon-Gleichung oder die Dirac-Gleichung zur Beschreibung von Einteilchensystemen verwendet. In diesem Fall treten Lösungen mit negativer Energie auf, zudem zeigt sich, dass es zu Kausalitätsverletzungen kommen kann.

All diese Probleme können gelöst werden, indem man den Übergang von einzelnen Teilchen mit Koordinaten  $x_i(t)$  und Impulsen  $\dot{x}_i(t)$  hin zu Feldern  $\Phi(x)$  und  $\partial_\mu \Phi(x)$  vollzieht (später muss zudem die Quantisierung der Theorie mittels geeigneter Methoden erfolgen). Die Rolle der Zeit  $t$  übernimmt hierbei das Argument des Feldes  $x = (x^\mu)$ .

Ein eleganter Mechanismus zur Beschreibung eines physikalischen Systems findet sich zudem im Hamilton'schen Prinzip der klassischen Mechanik. Für ein System, welches durch die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 - V(\mathbf{q}) \quad (1.1)$$

beschrieben wird, lässt sich das Verhalten des Systems aus einem Variationsprinzip ableiten. Ein Teilchen, das sich von  $\mathbf{q}(t_0)$  nach  $\mathbf{q}(t_1)$  bewegt, nimmt genau denjenigen Pfad für den die Wirkung

$$S = \int dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \quad (1.2)$$

unter infinitesimalen Variationen



$$\mathbf{q}(t)' = \mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t) \quad (1.3)$$

stationär wird. Aus der Bedingung  $\delta S = 0$  lassen sich die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen des Systems errechnen, für die gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (1.4)$$

Das Hamilton'sche Variationsprinzip lässt sich gleichermaßen auf Felder  $\Phi(t)$  übertragen, welche hier zunächst als reell angenommen werden. Aus der Wirkung

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) \quad (1.5)$$

ergeben sich durch Variation der Felder  $\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi + \delta\Phi$  und der Koordinaten  $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$  die Euler-Lagrange-Feldgleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi(x))} = 0. \quad (1.6)$$

Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  ist hierbei definiert über  $L = \int d^3x \mathcal{L}$ . Aus dieser Beziehung lässt sich das Noether-Theorem ableiten, welches besagt, dass ein System, dessen Lagrangedichte invariant unter einer kontinuierlichen Symmetrietransformation ist, einen erhaltenen Viererstrom  $j^\mu$  besitzt [28]. Für interne Symmetrietransformationen ( $\delta x^\mu = 0$ ) ergibt sich unter Verwendung von  $\delta \partial_\mu \Phi = \partial_\mu \delta \Phi$  die Relation

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \partial_\mu \Phi \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi - \left( \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \delta \Phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$



Unter Beachtung von Gleichung (1.6) ergibt sich somit:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi = 0. \quad (1.8)$$

$\delta\Phi$  ist hierbei die infinitesimale Abweichung des Feldes von der ursprünglichen Konfiguration und muss für eine gegebene Symmetrietransformation aus deren infinitesimaler Darstellung abgeleitet werden.  $j^\mu$  wird auch als erhaltener Noether-Strom bezeichnet und ist ein praktisches Werkzeug zur Identifizierung von Erhaltungsgrößen in physikalischen Systemen.

## 1.3 Wechselwirkende Eichtheorien

### 1.3.1 Abelsche Eichtheorie

Die Lagrangedichte der freien (nichtwechselwirkenden) QED hat die folgende Gestalt:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

$\Psi(x)$  ist ein Spinor mit vier komplexwertigen Komponenten und beschreibt das Fermionenfeld,  $\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger \gamma^0$  ist das konjugierte Feld ( $\gamma^\mu$  ist ein vierkomponentiger Lorentzvektor, bestehend aus den Dirac-Gammamatrizen). Der vordere Teil der QED-Lagrangedichte beschreibt das Verhalten freier Fermionen (Elektronen) und Anti-Fermionen (Positronen), während der zweite Teil, bestehend aus dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.10)$$

den kinetischen Term der Eichfelder  $A_\mu$  darstellt und somit die Kinetik des Photons festlegt. Es treten in der Lagrangedichte keine Terme der Form  $m_A^2 A_\mu A^\mu$  auf, da diese die Eichsymmetrie explizit brechen würden. Aus diesem Grund sind die Eichbosonen einer jeden Eichtheorie zunächst masselos. Neben der manifesten Lorentz-Invarianz der QED-Lagrangedichte, weist diese zudem eine Invarianz unter globalen  $U(1)$  Transformationen



der Form

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\rightarrow \Psi'(x) = e^{-iq\alpha}\Psi(x), \\ \bar{\Psi}(x) &\rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{iq\alpha}\end{aligned}\tag{1.11}$$

auf. Hier stellt  $\alpha$  einen beliebigen globalen Phasenfaktor dar.

Fordert man zusätzlich die Invarianz der Lagrangedichte unter lokalen Eichtransformationen der Form

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\rightarrow \Psi'(x) = e^{iq\alpha(x)}\Psi(x), \\ \bar{\Psi}(x) &\rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{-iq\alpha(x)}\end{aligned}\tag{1.12}$$

so muss zusätzlich das sogenannte Prinzip der minimalen Kopplung angewandt werden. Dies bedeutet folgendes: Da das Eichfeld  $A_\mu$  unter lokalen Eichtransformationen gemäß

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha(x)\tag{1.13}$$

transformiert, muss die partielle Ableitung  $\partial_\mu$  durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu\tag{1.14}$$

ersetzt werden. Auf diese Weise heben sich alle überzähligen Terme gegenseitig heraus und es gilt  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ . Interessanterweise entsteht durch den Übergang zur kovarianten Ableitung ein Term proportional zu  $q\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu$ . Durch die Kopplung des erhaltenen Noether-Stroms der QED

$$j^\mu = -q\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\tag{1.15}$$

an das Eichfeld  $A_\mu$  entsteht eine Theorie, welche die Wechselwirkung der Fermion-Felder



mit den Eichbosonen beschreibt. Die volle, wechselwirkende QED mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.16)$$

entsteht somit auf natürliche Weise allein aus der Forderung nach lokaler Eichinvarianz gegenüber einer bestimmten Symmetrietransformation.

### 1.3.2 Nichtabelsche Eichtheorien

Das am Beispiel der QED erläuterte Prinzip des Aufbaus von wechselwirkenden Theorien aus der Forderung nach Invarianz gegenüber lokalen Eichtransformationen lässt sich auch auf nichtabelsche Theorien übertragen. Im allgemeinen Fall einer  $SU(N)$ -Eichsymmetrie sind die Konstituenten der Theorie Fermionen-Felder  $\Psi(x)$  mit  $N$  komplexwertigen Komponenten, sowie die Eichfelder  $A_\mu^a(x)$ . Der Gruppenindex  $a$  zählt die Anzahl der Eichfelder ab und läuft von 1 bis  $N^2 - 1$ , dies ist die Anzahl der Generatoren der  $SU(N)$ -Eichgruppe. Die lokale Symmetrietransformation  $U(x)$  ist gegeben als

$$U(x) = e^{ig\theta^a(x)T^a} \quad (1.17)$$

mit der Kopplungskonstante  $g$ , beliebigen reellen Phasenwinkeln  $\theta^a(x)$  und den Generatoren  $T^a$  der Eichgruppe. Eine Summation über den Gruppenindex  $a$  ist hier impliziert.  $U$  ist eine unitäre  $N \times N$ -Matrix mit den Eigenschaften  $U^\dagger U = \mathbb{1}$ , sowie  $\det(U) = 1$ . Die Eichfelder, der Feldstärketensor und die kovariante Ableitung lassen sich in einer Matrixdarstellung kompakt ausdrücken als

$$\begin{aligned} A_\mu &= A_\mu^a T^a, \\ F_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}^a T^a, \\ D_\mu &= \partial_\mu - igA_\mu^a T^a \end{aligned} \quad (1.18)$$

Aus Analogieüberlegungen zur QED lässt sich der Feldstärketensor explizit darstellen als Kommutatorrelationen der kovarianten Ableitung:



$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] \quad (1.19)$$

Aufgrund der nicht kommutierenden Generatoren der Gruppe ist auch der obige Kommutator ungleich Null. Die Transformationseigenschaften der diversen Objekte unter  $SU(N)$ -Transformationen seien im Folgenden ohne Beweis angegeben (für Details sei auf die Standardliteratur verwiesen):

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi'(x) = U(x)\Psi(x), \\ D_\mu &\rightarrow D'_\mu = U(x)D_\mu U^{-1}(x), \\ F_{\mu\nu} &\rightarrow F'_{\mu\nu} = U(x)F_{\mu\nu}U^{-1}(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Dies ist ein wichtiges Ergebnis, da es zeigt, dass die Fermionen der Theorie gemäß der Fundamentaldarstellung der  $SU(N)$  transformieren, die Eichbosonen jedoch gemäß der adjungierten Darstellung. In Kapitel 4 wird näher auf diesen Umstand und die Konsequenzen für das Confinement eingegangen werden.

Ein weiterer interessanter Aspekt nichtabelscher Eichtheorien wird offenbar, wenn man den Feldstärketensor mittels der Darstellung

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] \quad (1.21)$$

explizit ausschreibt. Dieser Ausdruck kann mit Hilfe der Lie-Algebra der  $SU(N)$ -Gruppe

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (1.22)$$

und der zugehörigen Strukturkonstante  $f^{abc}$  ausgewertet werden. Aus der expliziten Darstellung des Feldstärketensors



$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu^a T^a - \partial_\nu A_\mu^a T^a - ig A_\mu^a A_\nu^b [T^a, T^b] \\
&= \partial_\mu A_\nu^a T^a - \partial_\nu A_\mu^a T^a + g A_\mu^a A_\nu^b f^{abc} T^c \\
\Rightarrow F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c
\end{aligned} \tag{1.23}$$

ergeben sich im kinetischen Term, der in Matrizendarstellung die Form  $-\frac{1}{4}Sp(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$  annimmt (die Spurbildung  $Sp$  garantiert hierbei die Eichinvarianz der Theorie), kubische und quartische Terme in den Eichfeldern  $A_\mu^a$ . Diese Terme führen zu nicht-trivialen Selbstwechselwirkungen der Eichbosonen und führen schließlich dazu, dass die farbgeladenen Bosonenfelder in nichtabelschen  $SU(N)$ -Eichtheorien die Fermionen der Theorie in Farbsingulets einschließen. Auf den genauen Mechanismus des Confinements wird in Kapitel 4 noch einmal ausführlich eingegangen.

## 1.4 Goldstone-Theorem und Higgs-Mechanismus

In diesem Abschnitt soll auf den für diese Arbeit äußerst wichtigen Higgs-Mechanismus und seine Bedeutung für das Standardmodell der Teilchenphysik eingegangen werden. Zunächst soll anhand einer globalen abelschen Eichsymmetrie das Grundprinzip der spontanen Symmetriebrechung erläutert werden, anschließend erfolgen Betrachtungen im Rahmen von lokalen Eichsymmetrien.

### 1.4.1 Spontane Brechung einer globalen $U(1)$ -Symmetrie

Gegeben sei eine Lagrangedichte  $\mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x))$  mit einem klassischen komplexen Skalarfeld  $\Phi(x)$ , parametrisiert durch die reellen Skalarfelder  $\Phi_1(x)$  und  $\Phi_2(x)$ :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)) \tag{1.24}$$

Die zugehörige Lagrangedichte



$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^* \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^* \Phi)^2 \quad (1.25)$$

ist invariant unter der globalen  $U(1)$ -Eichtransformation

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{i\alpha} \Phi(x). \quad (1.26)$$

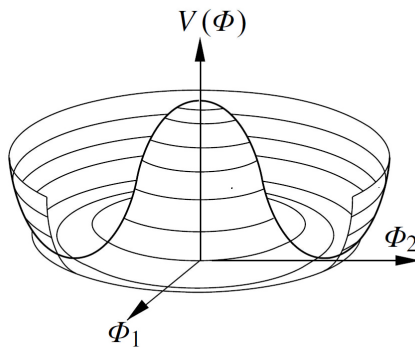
Für  $\mu^2 > 0$  steigt das Potential

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^* \Phi + \lambda (\Phi^* \Phi)^2 \quad (1.27)$$

in radialer Richtung streng monoton an, es gibt genau ein Minimum des Potentials und der Vakuumerwartungswert des Feldes ist

$$\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = 0 \quad (1.28)$$

Wird der Wert von  $\mu^2$  jedoch negativ, bildet sich das 'Mexikanerhut-Potential' aus, veranschaulicht in Abbildung (1.2):



**Abbildung 1.2:** Potential  $V(\Phi)$  des Higgs-Feldes, aufgetragen über der komplexen  $\Phi$ -Ebene (entnommen aus [27])



Die physikalische Situation ist hier vollkommen anders. Es gibt nun nicht mehr nur ein einzelnes Minimum sondern einen Ring von unendlich oft degenerierten Minima, von denen eines zufällig als Zustand minimaler Energie ausgewählt werden wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  so gewählt, dass das ausgewählte Minimum auf der  $\Phi_1$ -Achse liege. Somit wird der Vakuumerwartungswert (auch *vev* genannt) reell und es gilt:

$$\langle 0|\Phi|0\rangle = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (1.29)$$

Diesen Vorgang bezeichnet man als spontane Symmetriebrechung (SSB). Zwar ist die Lagrangedichte des Systems weiterhin invariant unter  $U(1)$ -Eichtransformationen der Form (1.26), das Vakuum der Theorie ist es jedoch nicht [30]. Eine Entwicklung des radialen Feldes um den Vakuumerwartungswert  $v$  herum und ein Übergang zu 'Polarkoordinaten' ergibt

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x) + i\theta(x)) \quad (1.30)$$

Eingesetzt in die Lagrangedichte ergibt sich:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho^2) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta^2) - \lambda v^2 \rho^2 - \lambda v(\rho^3 + \rho\theta^2) - \frac{\lambda}{4}(\rho^2 + \theta^2)^2 \quad (1.31)$$

Das Feld  $\rho(x)$ , welches Anregungen des radialen Freiheitsgrades entspricht, wird durch die spontane Symmetriebrechung massiv, die Masse  $m_\rho^2$  ergibt sich aus dem nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert  $v$  zu

$$m_\rho^2 = 2\lambda v^2 = 2|\mu^2| \quad (1.32)$$

Zusätzlich erscheint im Spektrum der Theorie mit  $\theta(x)$  ein masseloses skalares Teilchen, welches Anregungen entlang der tangentialen Richtung entspricht.

Das sogenannte Goldstone-Theorem erweitert diesen Befund und besagt, dass für jeden Generator einer kontinuierlichen globalen Symmetriegruppe, der spontan gebrochen wird, ein masseloses skalares Teilchen im Spektrum der Theorie auftauchen muss [31].



### 1.4.2 Lokale $U(1)$ -Symmetrie

Um die Lagrangedichte aus Gleichung (1.25) invariant unter lokalen Eichtheorien der Form

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\Phi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x)\end{aligned}\quad (1.33)$$

zu machen, erfolgt gemäß Abschnitt (1.3.2) der Übergang von der partiellen zur kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (1.34)$$

und es wird ein kinetischer Term für die Bosonfelder der Theorie eingeführt. Es folgt:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\Phi^*(x))(D^\mu\Phi(x)) - V(\Phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.35)$$

Nun wird erneut angenommen, dass  $\mu^2$  negativ wird und die  $U(1)$ -Symmetrie des Systems spontan gebrochen wird. Eine Entwicklung um das (reelle) Minimum des Potentials und die Umschreibung auf Polarkoordinaten  $\rho, \theta$  führt auf die folgende Darstellung des reellen, komplexen Feldes  $\Phi(x)$ :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x))e^{i\frac{\theta(x)}{v}}. \quad (1.36)$$

Wird dieser Ausdruck in die kovariante Ableitung  $D_\mu\Phi(x)$  eingesetzt, nimmt der erste Term der Lagrangefunktion die Form

$$|D_\mu|^2 \propto \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho(x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\theta(x))^2 - \lambda v^2\rho(x)^2 + qvA_\mu\partial^\mu\alpha(x) + \frac{1}{2}q^2v^2A_\mu A^\mu \quad (1.37)$$



an. Erneut erlangt das Feld  $\rho(x)$  eine Masse  $m_\rho^2 = 2\lambda v^2$ , zusätzlich hierzu ergibt sich ein Massenterm für die Eichbosonen der Form  $m_A = qv$ . Führt man nun eine Eichtransformation der Form

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{-i\frac{\theta(x)}{v}} \Phi(x) \quad (1.38)$$

aus, um die masselosen Goldstone-Bosonen, repräsentiert durch den exponentiellen Faktor in Gleichung (1.36), aus der Theorie zu entfernen (dies ist der Übergang zum sogenannten 'unitary-gauge'), so muss zusätzlich die Eichtransformation des Bosonfeldes

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{qv} \partial_\mu \theta(x) =: \tilde{A}_\mu(x) \quad (1.39)$$

ausgeführt werden. In dieser Form verschwindet das Feld  $\theta(x)$ , welcher das Goldstone-Boson repräsentiert, aus der Lagrangedichte, allerdings muss hierbei beachtet werden, dass der Freiheitsgrad des Goldstone-Bosons nicht einfach verschwinden kann. Die Euler-Lagrange-

Gleichungen für das neue Eichfeld  $\tilde{A}_\mu(x)$  ergeben sich nun zu

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \tilde{A}_\nu(x) - \partial_\nu \partial^\mu \tilde{A}_\mu(x) &= -q^2 v^2 \tilde{A}_\nu(x) \\ \Leftrightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + q^2 v^2) \tilde{A}_\nu(x) - \partial_\nu \partial^\mu \tilde{A}_\mu(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Diese Bewegungsgleichung beschreibt die freie Bewegung eines *massiven* Bosonfeldes und es wird klar, dass der verschwundene Freiheitsgrad des Goldstone-Bosons in einen longitudinalen Freiheitsgrad des Eichfeldes umgewandelt wurde. Wird das Prinzip der spontanen Symmetriebrechung auf eine lokale Eichtheorie angewandt, so erlangt das zugehörige Bosonfeld eine Masse!

Dieser Sachverhalt lässt sich auch auf kompliziertere Eichgruppen, beispielsweise die  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichgruppe des elektroschwachen Sektors des Standardmodells anwenden. In diesem Fall werden jedoch nur die drei Generatoren der  $SU(2)_L$  gebrochen, während die  $U(1)_Y$ -Symmetrie überlebt. Im Spektrum der Theorie zeigt sich nun ein massives skalares Boson, das Higgs-Boson. Die drei Freiheitsgrade der drei Goldstone-Bosonen werden in longitudinale Freiheitsgrade der Eichfelder  $W_\mu^a$ ,  $a = 1, 2, 3$  absorbiert, welche zusammen mit



dem Eichfeld  $B_\mu$  der  $U(1)_Y$ -Symmetrie zu den physikalischen Feldern

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \\ Z_\mu &:= \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \\ A_\mu &:= \frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{aligned} \quad (1.41)$$

kombiniert werden. Hierbei sind  $g$  und  $g'$  die Kopplungskonstanten der  $SU(2)_L$ - und  $U(1)_Y$ -Eichgruppe. Mit Hilfe des Weinberg-Winkels  $\theta_W$ , definiert über

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (1.42)$$

können die physikalischen Felder des  $Z^0$ -Bosons  $Z_\mu$  und des Photons  $A_\mu$  als Mischung der Felder  $B_\mu$  und  $W_\mu^3$  dargestellt werden via

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Auf diese Weise generiert der Higgs-Mechanismus die Massen der schwachen Eichbosonen, ohne die  $SU(2)_L$ -Symmetrie des Standardmodells explizit zu brechen.

In der Lagrangedichte des Standardmodells können zudem Terme der Form

$$Y_f \bar{\Psi}(x) \Phi(x) \Psi(x) \quad (1.44)$$

mit den Fermionfeldern  $\Psi(x)$  und  $\bar{\Psi}(x)$  und dem Higgs-Feld  $\Phi(x)$  eingefügt werden, welche durch den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes auch den Fermion-Feldern Massenterme beifügen, ohne die zugehörigen Eichsymmetrien explizit zu brechen. Die Größe  $Y_f$  bezeichnet man auch als Yukawa-Kopplungskonstante. Sie ist allerdings ein freier Parameter des Standardmodells und muss experimentell bestimmt werden. Obwohl dies sicherlich ein Manko der Theorie darstellt, kann der Higgs-Mechanismus aber



augenscheinlich auch den Ursprung der Massen der Fermionen des Standardmodells erklären. Aus diesem Grund ist der Higgs-Mechanismus ein fundamental wichtiger Bestandteil des Standardmodells.

## 1.5 Pfadintegralformalismus

Der Pfadintegralformalismus wurde in den 1940er Jahren entwickelt, maßgeblich von Richard Feynman. Er stellt einen alternativen Weg der Quantisierung von Feldtheorien dar, welche für gewöhnlich durch die kanonische Quantisierung behandelt werden. In der kanonischen Quantisierung werden die Felder der Theorie zu Feldoperatoren erklärt, welche auf Zustände im Fock-Raum der Theorie wirken. Im Gegenzug dazu stellen Pfadintegrale Funktionale auf den klassischen Feldern der Theorie dar.

Dieser Abschnitt soll in knappen Worten die Ergebnisse der Standardliteratur (vgl. [24] [32]) und von Abschnitt 2.4 in [22] wiedergeben.

Die quantenmechanische Übergangsamplitude für die Bewegung eines Teilchens vom Ort  $y(t)$  zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  zu einem Ort  $x(t)$  zum Zeitpunkt  $t = T$  kann geschrieben werden als

$$\langle x, T | y, 0 \rangle = \langle x | e^{-i\hat{H}T} | y \rangle \quad (1.45)$$

mit dem Hamiltonoperator des Systems  $\hat{H}$ .  $U(t) = e^{-i\hat{H}t}$  bezeichnet man auch als Zeitentwicklungsoperator. Der Erwartungswert  $\langle x, T | y, 0 \rangle$  kann jedoch auch als Funktionalintegral dargestellt werden. Es gilt [21]:

$$\langle x, T | y, 0 \rangle = \int \mathcal{D}x e^{iS[x]}. \quad (1.46)$$

$S[x]$  bezeichnet hier das klassische Wirkungsfunktional

$$S[x(t)] = \int dt L(x(t), \dot{x}(t)) \quad (1.47)$$

des Systems, das Integrationsmaß ergibt sich zu



$$\mathcal{D}x = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n dx(t_i). \quad (1.48)$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch auf Felder  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  übertragen:

$$\langle \Phi_f(\mathbf{x}), t_f | \Phi_i(\mathbf{x}), t_i \rangle = \int_{\Phi_i(\mathbf{x})}^{\Phi_f(\mathbf{x})} \mathcal{D}\Phi e^{i \int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)} =: Z[\Phi]. \quad (1.49)$$

Hier bezeichnet  $\Phi_f$  den Zustand des Feldes zur Zeit  $t_f$  (f: final),  $\Phi_i$  den zum Startzeitpunkt  $t_i$ . Das Integrationsmaß ist als Maß über alle möglichen Feldkonfigurationen zu verstehen:  $\mathcal{D}\Phi = \prod_x d\Phi(x)$ . Entsprechend lässt sich der Erwartungswert einer Observable  $O(\Phi)$  darstellen als

$$\langle O(\Phi) \rangle = \frac{1}{Z[\Phi]} \int \mathcal{D}\Phi O(\Phi) e^{iS[\Phi]}. \quad (1.50)$$

Im Gegensatz zur klassischen Physik, bei der ein Teilchen genau denjenigen Pfad von einem Ort  $\mathbf{x}$  zu einem anderen Ort  $\mathbf{y}$  beschreitet für den die klassische Wirkung  $S$  minimal wird, zeichnet der Pfadintegralformalismus ein anderes Bild der Realität: Hier beschreitet ein Teilchen *alle* klassisch erlaubten Pfade (diese müssen kontinuierlich, aber nicht notwendigerweise differenzierbar sein), deren Beiträge werden im Pfadintegral mit einer komplexen Phase  $\propto e^{iS}$  gewichtet. Die Pfade weitab des Minimums weisen stärker variierende Phasen auf und destruktive Interferenz sorgt dafür, dass diese Pfade nur sehr wenig zum Erwartungswert einer Observable beitragen. Pfade in der Nähe des Wirkungsminimums hingegen sorgen für nennenswerte Beiträge im Pfadintegral und entsprechen den Quantenkorrekturen des Systems.

Eine interessante Analogie zwischen dem Pfadintegralformalismus und der Physik eines klassischen statistischen Systems zeigt sich, wenn man euklidische Pfadintegrale betrachtet. Dies geschieht durch den Übergang von der Minkowski-Metrik  $g_{\mu\nu}$  zur euklidischen Metrik  $\delta_{\mu\nu}$  durch die sogenannte Wick-Rotation der realen Zeit  $t$  zur imaginären Zeit  $i\tau$ :

$$t \rightarrow i\tau. \quad (1.51)$$



In Vierernotation lässt sich die Auswirkung der Wick-Rotation auf Orte und Impulse kompakt zusammenfassen als

$$\begin{aligned}x^4 &= -ix^0, \\p^4 &= -ip^0\end{aligned}\tag{1.52}$$

während die räumlichen Komponenten gleich bleiben.  $x^4$  bezeichnet hier die euklidische Zeitrichtung,  $x^0$  die Minkowski-Zeitrichtung. Im Euklidischen unterscheiden sich kovariante Vektoren nicht von kontravarianten Vektoren, daher wird im Folgenden die Konvention übernommen, euklidische Raumzeitindizes stets unten zu schreiben (beispielsweise würde der Feldstärketensor eines Eichfeldes im Euklidischen notiert als  $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ ). Die wichtigste Konsequenz der Wick-Rotation ist der Zusammenhang zwischen der bisher betrachteten Wirkung  $S$ , welche der Minkowski-Metrik unterliegt und der euklidischen Wirkung  $S_E$ . Es gilt:

$$S = iS_E\tag{1.53}$$

Aus diesem Grund haben die Erwartungswerte von Observablen  $O(\Phi)$  im Euklidischen die Form

$$\begin{aligned}\langle O(\Phi) \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Phi O(\Phi) e^{-S_E[\Phi]} \quad \text{mit} \\Z[\Phi] &= \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_E[\Phi]}\end{aligned}\tag{1.54}$$

Euklidische Pfadintegrale haben einige Vorteile. Beiträge von Konfigurationen  $\Phi$  weitab vom euklidischen Wirkungsminimum sind nun exponentiell gedämpft und lassen sich durch endliche Summen approximieren. Dies erlaubt eine numerische Handhabung von quantenfeldtheoretischen Fragestellungen auf endlichen Gittern, worauf im nächsten Kapitel genauer eingegangen werden soll.

Ein weiterer Vorteil des euklidischen Pfadintegralformalismus zeigt sich, wenn man Korrelatorfunktionen betrachtet. Bei der Berechnung von Erwartungswerten taucht normalerweise das Problem auf, dass die Propagatoren der Theorie Polstellen besitzen, deren Handhabung



mathematisch aufwendig werden kann. Euklidische Propagatoren besitzen im allgemeinen keine Polstellen, was die Berechnung von Korrelatorfunktionen erleichtert.

Eine darüber hinaus gehende, besonders für diese Arbeit wichtige Eigenschaft euklidischer Pfadintegrale soll im folgenden Unterabschnitt besprochen werden.

### 1.5.1 Feldtheorie bei endlichen Temperaturen

Im vorigen Abschnitt wurde auf die formale Analogie zwischen dem euklidischen Pfadintegral und einem statistischen System hingewiesen. Diese Korrespondenz erlaubt die Formulierung von Feldtheorien bei endlichen Temperaturen, eine Anwendung welche vor allem für die Physik des frühen Universums oder hochenergetische Kollisionen in Schwerionenbeschleunigern von Interesse ist. Für ein statistisches System mit Hamiltonoperator  $\hat{H}$  in einem Wärmebad der Temperatur  $T$  ergibt sich mit  $\beta' = \frac{1}{k_B T}$  für den Erwartungswert einer Observable  $O$  der Zusammenhang

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z(\beta')} \text{Sp}(e^{-\beta' \hat{H}} O) \quad (1.55)$$

mit der Zustandssumme (abhängig von der inversen Temperatur  $\beta'$ )

$$Z(\beta') = \text{Sp}(e^{-\beta' \hat{H}}). \quad (1.56)$$

Vergleicht man Ausdruck (1.56) mit Gleichung (1.54) so wird klar, dass sich endliche Temperaturen im euklidischen Pfadintegralformalismus auf einfache Weise realisieren lassen, indem man die Ausdehnung der Integration in der euklidischen Zeitrichtung beschränkt:

$$\begin{aligned} Z[\Phi](\beta') &= \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_E(\beta')} \\ &= \int \mathcal{D}\Phi \exp \left( - \int_0^{\beta'} dx^4 \int d^3x \mathcal{L} \right). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Hierbei sei zu beachten, dass die Felder  $\Phi(x)$  periodischen Randbedingungen in euklidischer Zeitrichtung (mit Einheitsvektor  $\hat{4}$ ) genügen müssen [21]:



$$\Phi(x + \beta' \hat{4}) = \Phi(x) \quad (1.58)$$







# Quantenfeldtheorie auf dem Gitter

## Kapitel 2







Die Formulierung von Quantenfeldtheorien mittels des Pfadintegralformalismus erlaubt eine nichtperturbative Beschreibung physikalischer Systeme und stellt insbesondere bei Betrachtungen nichtabelscher Eichgruppen eine große Hilfe dar. Trotz der Entwicklung zahlreicher Formalismen und mathematischer Hilfsmittel, ist es jedoch in vielen Situationen nicht möglich, die auftretenden Funktionalintegrale in exakter Weise zu lösen. Die numerische Simulation der zugrundeliegenden Systeme und die näherungsweise Berechnung von Erwartungswerten verschiedenster Größen sind daher in der modernen Physik wichtige Hilfsmittel. Gerade die euklidische Formulierung des Pfadintegrals stellt einen numerisch gut handhabbaren Zugang dar, da wie bereits in Kapitel 1 angemerkt, Feldkonfigurationen  $\Phi(x)$ , welche weitab vom Wirkungsminimum liegen, exponentiell gedämpft werden. Dies stellt die Grundlage des sogenannten Importance Sampling dar, bei dem das Pfadintegral durch eine endliche Summe von Messwerten angenähert wird. In Kapitel 5 wird diese Methode im Kontext von Monte-Carlo-Simulationen näher erläutert.

Der geeignete Rahmen für derartige Berechnungen ist die Übertragung einer Quantenfeldtheorie auf ein vierdimensionales Gitter mit euklidischer Metrik, bei der die Raumzeit diskretisiert wird. Hier sollen zunächst kurz die wichtigsten Aspekte aus [22] mit Ergänzungen aus [21] und [32] wiedergegeben werden, bevor im zweiten Abschnitt des Kapitels kurz die Realisierung endlicher Temperaturen auf dem Gitter vorgestellt werden soll.

Im Folgenden wird ein diskretes, vierdimensionales Gitter  $\Lambda$  mit euklidischer Metrik eingeführt, wobei der Abstand zweier benachbarter Punkte als Gitterkonstante  $a$  bezeichnet wird. Es gilt somit:

$$\Lambda = a\mathbb{Z} = \{x \mid \frac{x_\mu}{a} \in \mathbb{Z}\} \quad (2.1)$$

Materiefelder in der Fundamentaldarstellung existieren nur auf den diskreten Gitterpunkten. Da der fermionische Sektor des Standardmodells in dieser Arbeit außer Acht gelassen wird (näheres hierzu siehe Kapitel 3), sind die einzigen Materiefelder die Higgs-Felder  $\Psi(x)$ . Die korrekte Einführung der Eichfelder erfolgt durch eine Korrespondenzüberlegung zum Kontinuum. Der sogenannte Paralleltransporter  $U(P)$  ermöglicht die eichinvariante Verschiebung eines Teilchens von  $x$  nach  $y$  entlang des Pfades  $P$  in Anwesenheit eines Eichfeldes  $A_\mu$ .  $U(P)$  ist hierbei gegeben als

$$U(P) = P e^{ig \int_x^y A_\mu dx^\mu} \quad (2.2)$$



wobei  $P$  die Wegordnung entlang des entsprechenden Pfades bedeutet. Die Paralleltransporter sollen nun auch auf dem Gitter implementiert werden. Hier ist die kürzeste Entfernung der Abstand zwischen zwei Punkten  $x$  und  $x + a\hat{\mu}$  (mit dem Einheitsvektor in  $\mu$ -Richtung  $\hat{\mu}$ ) und wird als Link bezeichnet. Die Paralleltransporter werden nun als Verbindungen zwischen den Gitterpunkten definiert und als Linkvariablen bezeichnet. Eine Linkvariable  $U_{x\mu}$  hat ihren Ursprung am Ort  $x$  und zeigt in Richtung  $\mu$ , wobei die Beziehung zwischen Linkvariablen und Eichfeldern  $A_\mu^c$  gegeben ist als

$$U_{x\mu} = e^{-iagA_\mu^c T^c} \quad (2.3)$$

mit den Generatoren  $T^c = \frac{\sigma^c}{2}$  der  $SU(2)$  und es gilt  $U \in SU(2)$ . Die Verschiebung entlang eines beliebigen Weges  $\mathcal{C}_{x,y}$  erfolgt durch Multiplikation aller Linkvariablen entlang dieses Weges:

$$U(x, y) = \prod_{(x, \mu) \in \mathcal{C}_{x,y}} U_{x\mu}. \quad (2.4)$$

Ist  $\mathcal{C}$  ein geschlossener Weg, so ist die Größe

$$W(\mathcal{C}) = \text{Sp}U(\mathcal{C}) \quad (2.5)$$

eichinvariant und wird als Wilson-Loop bezeichnet. Die sogenannte Plakettvariable  $U_P$  bezeichnet hier das Produkt der Linkvariablen entlang des kleinsten auf dem Gitter möglichen Weges  $\mathcal{C}$  und es gilt

$$U_P = U_{x\mu} U_{x+a\hat{\mu}, \nu} U_{x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}, -\mu} U_{x+a\hat{\nu}, -\nu} \quad (2.6)$$

$$= U_{x\mu} U_{x+a\hat{\mu}, \nu} U_{x+a\hat{\nu}, \mu}^\dagger U_{x\nu}^\dagger, \quad (2.7)$$

wobei die Beziehung  $U_{x, -\mu} = U_{x-a\hat{\mu}, \mu}^\dagger$  verwendet wurde. Die freie euklidische Wirkung für reine  $SU(2)$ -Theorie ist im Kontinuum gegeben als



$$S[A_\mu] = \int d^4x \frac{1}{4} Sp(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}). \quad (2.8)$$

Es kann gezeigt werden [32], dass die führende Ordnung der sogenannten Wilson-Wirkung

$$S[U] = \beta \sum_x \sum_{0 \leq \nu < \mu \leq 3} \left( 1 - \frac{1}{2} Sp U_P \right) \quad (2.9)$$

im Kontinuumslimites  $a \rightarrow 0$  der Wirkung  $S[A_\mu]$  entspricht und somit die korrekte Physik reproduziert, falls für die sogenannte Gitterkopplung  $\beta$  gilt:

$$\beta = \frac{4}{g} \quad (2.10)$$

Die Summe in Gleichung (2.9) ist so konstruiert, dass jede Plakette nur in einer Orientierung in die Summe eingeht. Mit der Summe über alle Orte wird die Wilson-Wirkung zu einer Summe aller Linkvariablen und es wird anschaulich klar, dass dies der Gesamtheit aller Eichfelder auf dem Gitter entspricht.

Generell müssen Ergebnisse von Gitterrechnungen stets im Kontinuumslimites  $a \rightarrow 0$  betrachtet werden. Darüber hinaus sind die Lösungen im Rahmen des euklidischen Pfadintegrals nicht die Lösungen der physikalischen Realität, vielmehr muss man sie per analytischer Fortsetzung in ihre Minkowski-Pendants umwandeln.

## 2.1 Endliche Temperaturen auf dem Gitter

Wie bereits in Abschnitt 1.5.1 erläutert, korrespondieren endliche Temperaturen mit einer endlichen zeitlichen Ausdehnung des Systems und es gilt für die 'Zustandssumme'  $Z[\Phi](\beta')$  mit der inversen Temperatur  $\beta' = \frac{1}{k_B T}$  die Beziehung



$$\begin{aligned}
Z[\Phi](\beta') &= \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_E(\beta')} \\
&= \int \mathcal{D}\Phi \exp \left( - \int_0^{\beta'} dx^4 \int d^3x \mathcal{L} \right). \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Dies ist im Gitterformalismus äquivalent zu einer endlichen Ausdehnung des Gitters in der Zeitrichtung. Anstatt eines hyperkubischen Gitters der Ausdehnung  $a^4 N^4$  werden bei der Simulation endlicher Temperaturen die Anzahl der Gitterpunkte in räumlicher Richtung  $N_s$  und derer in zeitlicher Richtung  $N_t$  unterschiedlich gewählt. Man identifiziert nun die inverse Temperatur  $\beta'$  mit der Ausdehnung der zeitlichen Dimension:

$$\begin{aligned}
\beta' &= a N_t \\
\Leftrightarrow a N_t &= \frac{1}{k_B T}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Die räumliche Ausdehnung  $a N_s$  soll jedoch immer noch gegen unendlich gehen und man wählt in der Praxis sowohl für die räumliche als auch die zeitliche Richtung des Gitters periodische Randbedingungen um dies auch auf kleineren Gittern zu simulieren. Um merkliche Temperatureffekte zu beobachten muss hierbei  $N_t \ll N_s$  gelten. In der vorliegenden Arbeit wurde die Ausdehnung in zeitlicher Richtung  $N_t$  variiert und es konnten somit gewisse Temperaturbereiche diskret gescannt werden.



# Das SU(2)-Higgs-Modell

## Kapitel 3







Im folgenden sollen das  $SU(2)$ -Higgs-Modell im Kontinuum und auf dem Gitter formuliert werden, anschließend wird die Phasenstruktur am Temperaturnullpunkt  $T = 0$  und bei endlichen Temperaturen  $T \neq 0$  erläutert.

Das  $SU(2)$ -Higgs-Modell ist eine vereinfachte Version des elektroschwachen Sektors des Standardmodells, welcher die Eichgruppe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  besitzt. Die Kopplungskonstanten der schwachen Wechselwirkung  $g$  und die der Hyperladung  $g'$  können wie bereits in Abschnitt 1.4.3 dargelegt über die Gleichung (1.43) mit dem Weinbergwinkel  $\theta_W$  in Relation gesetzt werden. Experimentell wurde gefunden, dass  $\theta_W$  relativ klein ist [33]:

$$\sin^2 \theta_W \approx 0.23 \quad (3.1)$$

Aufgrund dessen ist es gerechtfertigt, die Kopplung des Higgs-Feldes an die Eichfelder der  $U(1)_Y$ -Gruppe in erster Näherung zu vernachlässigen. In Abschnitt 1.4.3 wurde zudem dargelegt, dass das Higgs-Feld über Yukawa-Kopplungen  $Y_f$  an den fermionischen Sektor des Standardmodells koppelt. Die Stärken der Kopplungen sind dabei freie Parameter des Standardmodells und müssen experimentell bestimmt werden. Aus einer Vielzahl an Experimenten wurde ersichtlich, dass die Yukawa-Kopplungen zumeist sehr schwach sind, so dass auch der fermionische Sektor des Standardmodells in Rahmen des  $SU(2)$ -Higgs-Modells außer Acht gelassen wird. Daher besteht dieses nur aus zwei Komponenten, nämlich dem Higgs-Feld und den Eichfeldern der reinen  $SU(2)_L$ . Im Folgenden sollen die wichtigsten Punkte aus [22] und [21] zusammen gefasst werden.

Die volle Wirkung des  $SU(2)$ -Higgs-Modells lautet daher im Kontinuum

$$S[A_\mu, \Phi] = \int d^4x \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) + m'^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda' (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right) \quad (3.2)$$

Hierbei bezeichnet  $\Phi(x)$  das  $SU(2)$ -Doublet des Higgs-Feldes. Dieses lässt sich mittels

$$\tilde{\Phi}_{x,a} = i\sigma_{2,ab} \Phi_{x,b}^* \quad (3.3)$$

auch zu einer  $2 \times 2$ -Matrix umschreiben



$$\phi(x) := \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{x,1} & \Phi_{x,1} \\ \tilde{\Phi}_{x,2} & \Phi_{x,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\sigma(x) + i\pi^a(x)T^a) ,$$

mit dem physikalischen Higgs-Feld  $\sigma(x)$  und den Goldstone-Bosonen  $\pi^a$ . Mittels der Zerlegung des  $\phi$ -Feldes in einen radialen Anteil  $\rho_x \geq 0$  und einem Winkel-Anteil  $\alpha_x \in SU(2)$  und der Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{a} \Phi_x , \\ \lambda' &= \frac{\lambda}{\kappa^2} \quad \text{und} \\ m'^2 &= \frac{m_0^2}{a^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

zwischen kontinuierlichen Größen und Gittergrößen sowie

$$V_{x\mu} = \alpha_{x+\hat{\mu}}^\dagger U_{x\mu} \alpha_x \tag{3.5}$$

lässt sich der skalare Anteil der Gitterwirkung des  $SU(2)$ -Higgs-Modells schreiben als [21]

$$S_\phi[V, \rho] = \sum_x \left( \rho_x^2 + \lambda(\rho_x^2 - 1)^2 - \kappa \sum_\mu \rho_{x+\hat{\mu}} \rho_x Sp V_{x\mu} \right) .$$

Der reine Eichterm  $S_g[V]$  ist gegeben durch die Wilson-Wirkung Gleichung (2.9) und die gesamte Gitterwirkung ergibt sich zu

$$S[V, \rho] = S_g[V] + S_\phi[V, \rho]. \tag{3.6}$$

Aufgrund der Eichinvarianz des Haar-Maßes der  $SU(2)$  (siehe Anhang) ergibt sich das Integrationsmaß



$$\prod_{x,\mu} \int_{SU(2)} dU_{x\mu} \cdot \prod_{x,s} \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_s(x) \quad (3.7)$$

mit  $\phi_1 = \sigma$ ,  $\phi_k = \pi_k$  zu

$$\prod_{x,\mu} \int_{SU(2)} dV_{x\mu} \cdot \prod_x \int_0^\infty \rho_x^3 d\rho_x. \quad (3.8)$$

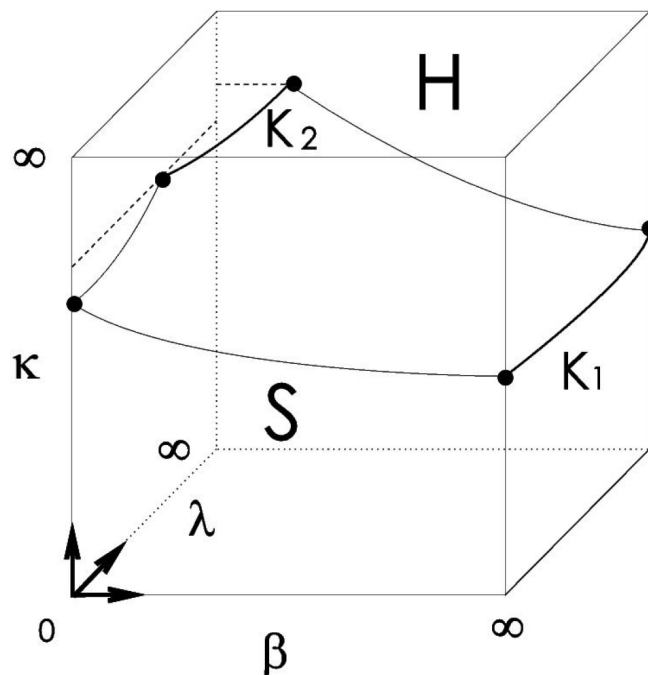
Dieser Umstand wird bei der numerischen Simulation ausgenutzt um auf einfache Weise neue Zufallskonfigurationen erzeugen zu können.

### 3.1 Das $SU(2)$ -Higgs-Modell bei $T = 0$

Die freien Parameter des auf dem Gitter formulierten  $SU(2)$ -Higgs-Modells sind die Gitterkopplung  $\beta$ , die skalare quartische Kopplung  $\lambda$  und der Hopping-Parameter  $\kappa$ . Sie spannen das in der folgenden Abbildung gezeigte Phasendiagramm auf. Es besitzt zwei deutlich voneinander verschiedene Regionen, die symmetrische Phase  $S$  und die Higgs-Phase  $H$ . Man spricht hier zwar von verschiedenen Phasen, aber wie bereits in der Einleitung erwähnt gibt es bei großen Werten von  $\lambda$  und kleinen  $\beta$  eine analytische Verbindung zwischen diesen und es existiert streng genommen nur eine Phase. Allerdings sind die Teilchenspektren in den beiden Bereichen sehr unterschiedlich und auch viele andere physikalische Größen unterscheiden sich sehr. Während in der symmetrischen Phase vier massive skalare Teilchen gleicher Masse, die Freiheitsgrade des ungebrochenen Feldes  $\phi$ , und masselose Eichbosonen existieren, zeigt sich in der Higgs-Phase nur mehr ein massiver Skalar, das Higgs-Boson. Die drei weiteren Freiheitsgrade des skalaren Feldes wurden in longitudinale Freiheitsgrade der Eichbosonen absorbiert, wodurch diese massiv werden. Für  $\beta \rightarrow \infty$  geht das Modell in das skalare  $\phi^4$ -Modell über, welches ebenfalls eine symmetrische und eine gebrochen Phase aufweist, getrennt durch den Phasenübergang bei K1. Aufgrund der Beziehung  $m_0^2 = \frac{1-2\lambda}{\kappa} - 8$  für die nicht renormierte Masse des skalaren Feldes entkoppelt dieses für  $\kappa = 0$  vollständig von den Eichfeldern, da es unendlich schwer wird und es liegt reine  $SU(2)$ -Eichtheorie vor. Bei Werten von  $0 < \kappa < \kappa_c$ , wobei  $\kappa_c$  den Wert bezeichnet, bei dem der Phasenübergang zwischen den beiden Phasen stattfindet, befindet sich das System in der symmetrischen Phase. Hier werden die farbgeladenen skalaren Teilchen durch die masselosen Eichbosonen



zu farbneutralen Gebilden ('skalare' Hadronen) gebunden. Diese Phase besitzt daher Eigenschaften der QCD und macht dieses Modell zum idealen Testbett für die Beantwortung von Fragestellungen im Bereich Confinement und Ordnungsparametern.

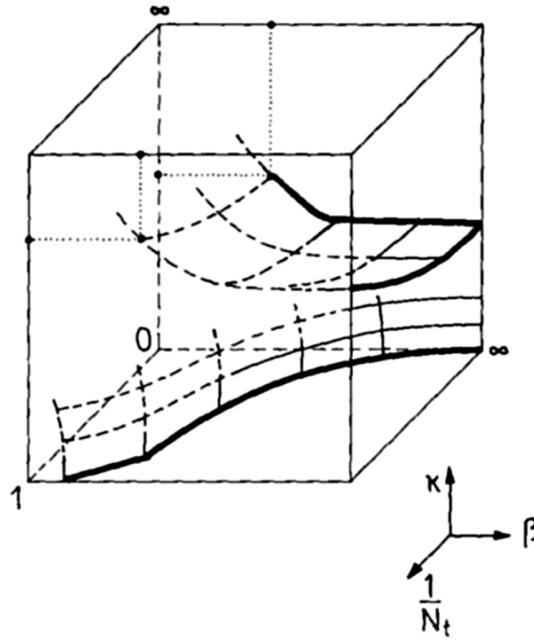


**Abbildung 3.1:** Das Phasendiagramm des  $SU(2)$ -Higgs-Modells bei Temperatur  $T = 0$ , abhängig von den Parametern  $\beta$ ,  $\kappa$  und  $\lambda$  (entnommen aus [22])

## 3.2 Das $SU(2)$ -Higgs-Modell bei endlichen Temperaturen

Die Motivation für eine Untersuchung des bei  $T = 0$  gut bekannten  $SU(2)$ -Higgs-Modells bei endlichen Temperaturen besteht darin, dass aus diversen theoretischen Überlegungen und Störungsrechnungen erwartet wird, dass das System bei hohen Temperaturen eine echte Deconfinement-Phase mit freien Farbladungen aufweist. Dies konnte von mehreren Arbeitsgruppen bestätigt werden (siehe beispielsweise [23]). In der folgenden Abbildung ist das qualitative Phasendiagramm des  $SU(2)$ -Higgs-Modells bei endlicher Temperatur aus [34] dargestellt.





**Abbildung 3.2:** Das Phasendiagramm des  $SU(2)$ -Higgs-Modells bei endlichen Temperaturen und fixem Wert von  $\lambda$ . Die Temperatur ist aufgetragen in Gittereinheiten mit  $T = \frac{1}{N_t}$ ,  $N_t$  ist hier die Anzahl der Gitterpunkte in zeitlicher Richtung (entnommen aus [34])

Um ein dreidimensionales Phasendiagramm zeichnen zu können wurde die quartische Selbstkopplung  $\lambda$  auf einen festen Wert gesetzt, die drei Parameter des Phasendiagramms bei endlicher Temperatur sind daher die Gitterkopplung  $\beta$ , der Hoppingparameter  $\kappa$  und die Temperatur  $T = \frac{1}{N_t a}$ . In der obigen Abbildung wurde die Gitterkonstante auf  $a = 1$  gesetzt, die Temperatur ergibt sich somit in Gittereinheiten. Man unterscheidet nun drei Phasen, welche jedoch analytisch miteinander verbunden sind und daher keine Phasen im mathematischen strengen Sinne sind. Vielmehr ist die Bezeichnung wie im vorigen Abschnitt zu verstehen, die physikalische Situation ist in allen Bereichen stark unterschiedlich. Die Grenzfälle des Systems in Hinsicht auf die Temperatur sind zum einen natürlich der Grenzfall verschwindender Temperatur  $T = 0$  mit dem bereits bekannten Phasendiagramm und zum anderen der Fall  $T = 1$ , was einer zeitlichen Ausdehnung des Gitters auf einen einzelnen Gitterpunkt darstellt. Man erkennt hier, dass geeignete dreidimensionale Modelle die Hochtemperaturlimits von Gittereichtheorien darstellen. Die weiteren Grenzfälle sind bereits aus dem Phasendiagramm bei  $T = 0$  bekannt, von Interesse ist hier jedoch der Grenzfall  $\kappa = 0$ , der das System auf die reine  $SU(2)$ -Eichtheorie reduziert. Es ist schon länger bekannt, dass für die reine  $SU(2)$ -Eichtheorie (genauso wie für generelle  $SU(N)$ ) eine kritische Temperatur  $T_c$  existiert, in der zwangsläufig Deconfinement vorliegt [35]. Borgs und Seiler zeigten weiterhin, dass es für hinreichend hohe Temperaturen stets ein Gebiet schwacher Eichkopp-



lung gibt, so dass die physikalische Situation einem Plasma von schwach wechselwirkenden, effektiv freien Farbladungen entspricht [36]. Dies ist eine weitere Formulierung der Deconfinement-Phase. Im Falle der  $SU(2)$  ist der Phasenübergang zwischen Confinement- und Deconfinement-Phase exakt, sie entspricht der durchgezogenen Linie des Phasendiagramms in der  $\kappa = 0$  Ebene. Diese setzt sich auch in das Gebiet mit  $\kappa > 0$  fort, eine scharf abgegrenzte Linie von Phasenübergängen liegt jedoch nicht mehr vor. Vielmehr spricht man hier von einem Crossover, die physikalischen Observablen des Systems ändern ihr Verhalten nicht mehr sprunghaft, sondern kontinuierlich über einen größeren Parameterbereich (laut [23] kann nicht zwischen echten Crossovers und sehr schwachen Phasenübergängen höherer Ordnung unterschieden werden und der Begriff des Crossovers umfasst beide Definitionen). Für größeres  $\kappa$  wird das Crossover schwächer und die Änderung von Observablen erfolgt langsamer mit variierenden Parametern. Auch der Higgs-Phasenübergang wird für endliche Temperaturen zu einem Crossover, dessen Stärke mit zunehmender Temperatur abnimmt. Zudem gibt es Hinweise darauf, dass das  $SU(2)$ -Higgs-Modell auch in der Higgs-Phase eine Wiederherstellung der Symmetrie erfahren könnte, da argumentiert wird, dass für Temperaturen oberhalb des Vakuumerwartungswertes  $v$  des Systems der Higgs-Mechanismus nicht mehr greift [37].

In dieser Arbeit soll nun versucht werden den von Fredenhagen und Marcu vorgeschlagenen Ordnungsparameter, kurz FM-Operator genannt, als Confinement-Kriterium im Rahmen des Systems bei endlicher Temperatur zu testen. Eine genaue Definition des Operators soll im nächsten Kapitel erfolgen.



**Confinement-  
Mechanismus und  
Ordnungsparameter**

**Kapitel 4**







Im folgenden Abschnitt soll erläutert werden aus welchem Grund es in nichtabelschen Eichtheorien wie der QCD oder dem  $SU(2)$ -Higgs-Modell zum Einschluss von Farbladungen in farbneutrale Zustände kommt. Des weiteren soll kurz auf den Wilson-Loop als Confinement-Kriterium eingegangen und erläutert werden, warum dieser in Anwesenheit dynamischer Materiefelder nicht mehr ausreichend ist, um zwischen Confinement und Deconfinement zu unterscheiden.

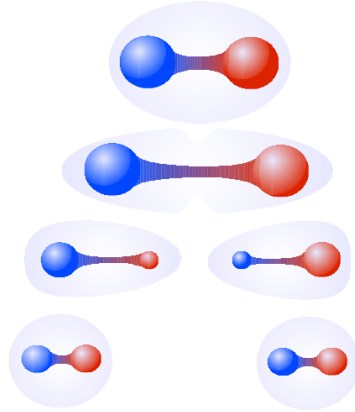
Den Schlüssel zum Verständnis des Confinement-Phänomens liefern die Betrachtungen zu nichtabelschen Eichtheorien in Abschnitt 1.3.2. Es wurde dargelegt, dass aufgrund der Form des kinetischen Terms (siehe Gleichung 1.23) im nichtabelschen Fall die Eichbosonen selbst Farbladungen tragen und somit Selbstwechselwirkungen unterliegen. Betrachtet man nun beispielsweise ein Meson, aufgebaut aus einem Quark und einem Antiquark in der Fundamentaldarstellung einer nichtabelschen Eichgruppe, so hat das zugehörige Eichfeld, welches die Wechselwirkung des Quark-Antiquark-Paares vermittelt, für kleine räumliche Abstände der Quarks eine Form, welche dem elektromagnetischen Feld der QED ähnelt. Klassisch betrachtet kann man hier an weit in den Raum reichende Feldlinien denken. Versucht man jedoch Quark und Antiquark um einen großen räumlichen Abstand  $R$  zu separieren zieht sich das Bosonfeld aufgrund der Selbstwechselwirkung zu einer äußerst dünnen Flussröhre zusammen, welche man auch als 'string' bezeichnet. Wird angenommen, dass es sich um statische Quarks mit unendlicher Masse handelt, steigt das zugehörige Potential  $V(R)$  (auch statisches Potential genannt) in Abwesenheit von dynamischen Eichfeldern linear mit dem Abstand  $R$  an:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} V(R) \propto \alpha \cdot R. \quad (4.1)$$

Da die Quarks in der Fundamentaldarstellung existieren, die Eichbosonen hingegen in der adjungierten Darstellung, transformieren die Felder völlig unterschiedlich (siehe Gleichung 1.20) und es ist unmöglich, ein farbgeladenes Quark durch ein Eichboson abzuschirmen.

Enthält die Theorie hingegen dynamische Quarks, so ergibt sich ein anderes Bild. Das Potential wächst zunächst linear an und die in der Flussröhre gespeicherte Energie nimmt zu. Ist diese ausreichend groß wird ein leichtes Quark-Antiquark-Paar aus dem Vakuum erschaffen, welches nun an die statischen Quarks binden und diese abschirmt. Diesen Vorgang bezeichnet man auch als string-breaking. Zur Veranschaulichung ist dieser in der Abbildung (4.1) dargestellt.





**Abbildung 4.1:** Veranschaulichung des string-breaking-Vorgangs. Die Separation eines statischen Quark-Antiquark-Paares erzeugt ein leichtes Quark-Antiquark-Paar, welches das statische abschirmt (entnommen aus [38]).

Tritt string-breaking auf, so flacht das statische Potential bei einem Wert ab, der der Masse des leichten Quark-Antiquark-Paars  $2\mu$  entspricht. Das statische Potential ähnelt somit für große räumliche Abstände dem Potential zweier schwach miteinander wechselwirkender Mesonen:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} V(R) = 2\mu \quad (4.2)$$

## 4.1 Der Wilson-Loop als Confinement-Kriterium

Der Wilson-Loop ist wie bereits in Kapitel 2 dargelegt, das eichinvariante Produkt von Linkvariablen entlang eines geschlossenen Weges  $\mathcal{C}$ . Im Kontinuum ist dieser definiert als

$$W(\mathcal{C}) = Sp \left( P \cdot e^{i \oint_{\mathcal{C}} A_{\mu} dx^{\mu}} \right) \quad (4.3)$$

Der Einfachheit halber werden im Folgenden nur rechteckige Wege  $\mathcal{C}_{R,T}$  entlang von Gitterachsen betrachtet. Für den Vakuum Erwartungswert des Wilson-Loops ergibt sich nun im Falle sehr großer zeitlicher Ausdehnungen (siehe [22])



$$\langle 0|W(\mathcal{C}_{R,T})|0\rangle \stackrel{\lim_{T \rightarrow \infty}}{=} OL \cdot e^{-V(R)T} \quad (4.4)$$

mit dem Überlapp

$$OL = Sp|\langle n_0|P \cdot e^{i \int_0^R dx A_1(t=0,x)}|0\rangle|^2 \quad (4.5)$$

welcher den Zustand  $|P \cdot e^{i \int_0^R dx A_1(t=0,x)}|0\rangle$  auf den Grundzustand  $|n_0\rangle$  des Systems projiziert. Mit dem asymptotischen Verhalten des statischen Potentials (Gleichung 4.1) erhält man in Abwesenheit dynamischer Materiefelder für den Erwartungswert des Wilson-Loops das Verhalten

$$\langle 0|W(\mathcal{C}_{R,T})|0\rangle \stackrel{\lim_{T \rightarrow \infty}}{=} OL \cdot e^{-\alpha RT}, \quad (4.6)$$

falls sich das System in einer Confinement-Phase befindet. Dieses Verhalten wird aufgrund des exponentiellen Abfalls des Erwartungswertes mit der Fläche  $RT$  des Wilson-Loops auch als Flächengesetz bezeichnet. Ist das System jedoch in einer Deconfinement-Phase, so existieren keine langreichweitigen Wechselwirkungen zwischen den Quarks und das statische Potential nähert sich für große räumliche Abstände einer Konstante  $2\mu$  an [39]. Somit ergibt sich das Verhalten des Wilson-Loops zu

$$\langle 0|W(\mathcal{C}_{R,T})|0\rangle \stackrel{\lim_{T \rightarrow \infty}}{=} OL \cdot e^{-2\mu(R+T)}. \quad (4.7)$$

Aufgrund des exponentiellen Abfalls mit dem Umfang  $2(R+T)$  spricht man hier vom Umfanggesetz. Die Summe aus  $R+T$  ergibt sich aus der Symmetrie des Gitters selbst, da im Falle eines isotropen Gitters die Bezeichnung von Raum- und Zeitachsen beliebig ist.

Werden nun dynamische Quarks zugelassen, tritt ab einer kritischen Distanz  $R_c$  string-breaking auf, falls sich das System in einer Confinement-Phase befindet, und das asymptotische Verhalten des Wilson-Loops folgt auch hier dem Umfanggesetz. Aufgrund dessen kann der Wilson-Loop in Anwesenheit dynamischer Materiefelder nicht mehr als Confinement-Kriterium verwendet werden.



## 4.2 Der Fredenhagen-Marcu-Operator

Der von Klaus Fredenhagen und Mihail Marcu im Jahre 1986 vorgeschlagene Operator, der im folgenden abgekürzt als FM-Operator bezeichnet und mit  $\rho_{FM}$  notiert werden soll, stellt einen zusammengesetzten Operator dar, der in der Theorie auch bei Anwesenheit dynamischer Materiefelder zwischen Confinement- und Deconfinement-Phasen eines Systems unterscheiden können sollte. Im weiteren Verlauf werden die Grundgedanken aus [12] mit Ergänzungen aus [39] dargelegt.

Der Wilson-Loop misst im Prinzip die Antwort des Eichfeldes auf die räumliche Separation eines externen Quark-Antiquark-Paares. Fredenhagen und Marcu fragten sich wie die Antwort eines gekoppelten Systems aus Eich- und Materiefeldern auf solch ein externes Paar aussehen könnte, würde man an den Positionen der externen Quarks dynamische Quarkfelder einführen, verbunden durch Linkvariablen  $U$ . Im Prinzip modellierten sie somit die physikalische Situation des string-breakings. Ein naiver Ansatz hierfür wäre eine Reihe von Dipolzuständen der Form

$$|\Phi_{x,y}\rangle = \sum_i \bar{\Psi}_i(x) U(\mathcal{C}_{x,y}) \Psi_i(y) |0\rangle \quad (4.8)$$

mit den Materiefeldern  $\Psi_i(x)$  und dem Flavourindex  $i$  und der bekannten Darstellung der Linkvariablen  $U(\mathcal{C}_{x,y})$  welche die beiden Materiefelder verbindet. Analog zum Wilson-Loop würde der Erwartungswert von  $|\Phi_{x,y}\rangle$  im Limes  $R \rightarrow \infty$  in dieser Form divergieren, es bedarf einer Entwicklung des Systems in der euklidischen Zeitrichtung, um den Grundzustand des Systems zu approximieren. Unter Verwendung der Transfermatrix  $T^n$ , welche das System um  $n$  Schritte in die euklidische Zeitrichtung entwickelt und das Gitterpendant zum Zeitentwicklungsoperator ist, lässt sich  $|\Phi_{x,y}\rangle$  umschreiben zu

$$|\Phi_{x,y}^n\rangle = \sum_i \bar{\Psi}_i(x) U^n(\mathcal{C}_{x,y}) \Psi_i(y) |0\rangle \quad \text{mit} \quad U^n(\mathcal{C}_{x,y}) = T^n U(\mathcal{C}_{x,y}) T^{-n} \quad (4.9)$$

und der Zustand  $|\Phi_{x,y}^n\rangle$  bleibt endlich, falls zusätzlich gefordert wird  $n = \text{const.} \cdot R$  (mit  $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ). Die Konvention ist hier  $n = \frac{R}{2}$ . Aus einem allgemeinen Theorem folgt zudem, dass das asymptotische Verhalten von  $|\Phi_{x,y}^n\rangle$  dem Flächengesetz gehorcht [40].



Ein Ansatz zur Konstruktion eines Ordnungsparameters ist der Operator

$$\rho^\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|\langle 0 | \Phi_{x,y}^n \rangle|^2}{|\Phi_{x,y}^n|^2}. \quad (4.10)$$

In dieser Form divergiert jedoch der Nenner im Kontinuumslimit, da Materiefelder an gleichen Orten ausgewertet werden. Fredenhagen und Marcu umgingen dieses Problem, indem sie den Nenner durch den Wilson-Loop entlang des Weges  $\mathcal{C}_{x,y} \cdot \theta \mathcal{C}_{x,y}$  ersetzen. Hierbei bezeichnet  $\theta \mathcal{C}_{x,y}$  den an der  $t = 0$ -Hyperebene gespiegelten Pfad. Der entgültige FM-Operator hat daher auf dem Gitter die Form

$$\rho_{FM}^\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|\sum_i \langle 0 | \bar{\Psi}_i(x) U^n(\mathcal{C}_{x,y}) \Psi_i(y) | 0 \rangle|^2}{\langle W(\mathcal{C}_{x,y} \cdot \theta \mathcal{C}_{x,y}) \rangle} \quad (4.11)$$

In der folgenden Abbildung ist der FM-Operator in grafischen Elementen dargestellt, hierbei bezeichnen Punkte die Materiefelder, die Linien symbolisieren die Eichfelder.

$$\rho_{FM} = \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \frac{\sum_i \left\langle \begin{array}{c} \text{Quark at } i \text{ connected by a path to } \\ \text{Antiquark at } i \end{array} \right\rangle^2}{\left\langle \begin{array}{c} \text{Wilson Loop} \end{array} \right\rangle}$$

**Abbildung 4.2:** Grafische Darstellung des Fredenhagen-Marcu Operators  $\rho_{FM}^\infty$  (entnommen aus [22])

Physikalisch gesehen simuliert der Zähler des FM-Operators den Versuch ein Quark an einem Ort  $x$  festzuhalten, während das Antiquark ins Unendliche verschoben wird. Befindet sich das System in der Confinement-Phase wird der Erwartungswert des Nenners exponentiell mit dem Umfang abfallen, ebenso wie der Zähler. Nenner und Zähler fallen somit mit der gleichen Rate ab und es gilt



$$\rho_{FM}^{\infty} \neq 0 \quad (4.12)$$

Befindet sich das System hingegen in der Deconfinement-Phase, ist es möglich, das Anti-quark unter Aufbringung einer endlichen Energie ins Unendliche zu verschieben, und der Operator  $|\Phi_{x,y}^n\rangle$  approximiert den Zustand eines einzelnen freien Quarks an der Stelle  $x$ . Aufgrund der freien Farbladung des Quarks wird der Zustand  $|\Phi_{x,y}^n\rangle$  in diesem Fall orthogonal zum ungeladenen Grundzustand, welcher sich im hadronischen Sektor der Theorie befindet. Man erwartet daher, dass der Zähler in diesem Fall schneller mit  $R$  abfällt als der Nenner, woraus folgt:

$$\rho_{FM}^{\infty} = 0 \quad (4.13)$$

Der FM-Operator unterscheidet Confinement- und Deconfinement-Phase also aufgrund des Kriteriums der Farbabschirmung.



**Monte-Carlo  
Verfahren und  
wichtige  
Messgrößen**

**Kapitel 5**







Wie bereits in Abschnitt 1.5 heraus gestellt wurde, hat der Formalismus der euklidischen Pfadintegrale mehrere Vorteile. Der für die numerische Anwendung wichtigste ist ohne Zweifel der Zusammenhang (hier wird aus Gründen der Übersichtlichkeit zunächst nur von der Wilson-Wirkung  $S[U]$  ausgegangen)

$$\begin{aligned}\langle O(U) \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U O(U) e^{-S[U]} \quad \text{mit} \\ Z[U] &= \int \mathcal{D}U e^{-S[U]}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Im folgenden sollen die wesentlichen Inhalte aus [32] und [22] zusammengefasst werden. Aufgrund der exponentiellen Dämpfung von Feldkonfigurationen  $U$ , welche weitab vom Wirkungsminimum liegen, kann das Funktionalintegral über eine endliche Summe von  $N$  Feldkonfigurationen  $U_n$  approximiert werden, falls diese mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung proportional zu  $e^{-S[U_n]}$  erzeugt werden:

$$\langle O \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{U_n \propto e^{-S[U_n]}} O[U_n]\tag{5.2}$$

Dadurch, dass die Erzeugung von neuen Feldkonfigurationen proportional zu  $e^{-S[U_n]}$  erfolgt, werden die Feldkonfigurationen nahe des Wirkungsminimums öfter erzeugt, während diejenigen, die aufgrund einer großen euklidischen Wirkung geringe Beiträge zum Erwartungswert beitragen würden, von vornherein unterdrückt sind. Dies ist das Grundprinzip der Monte-Carlo-Simulationen.

Der Erwartungswert einer Funktion  $f(x)$  mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\rho(x)$  ergibt sich zu

$$\langle f \rangle_\rho = \frac{\int_a^b dx \rho(x) f(x)}{\int_a^b dx \rho(x)}.\tag{5.3}$$

Der Erwartungswert  $\langle f \rangle_\rho$  lässt sich ebenfalls durch eine Summe approximieren, falls die Generierung von  $x_n \in (a, b)$  mit Gewichtung der normierten Wahrscheinlichkeitsdichte



$$dP(x) = \frac{\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)} \quad (5.4)$$

erfolgt. Aufgrund der Korrespondenz der Gleichungen (5.2) und (5.3) zeigt sich, dass die Generierung der  $U_n$  mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$dP(U) = \frac{e^{-S[U]} \mathcal{D}U}{\int \mathcal{D}U e^{-S[U]}} \quad (5.5)$$

erfolgen muss unter Beachtung der Normalisierung

$$\int \mathcal{D}U' P_{[U] \rightarrow [U']} = 1. \quad (5.6)$$

Gilt ferner

$$0 \leq P_{[U] \rightarrow [U']} \leq 1 \quad (5.7)$$

so werden sogenannte Markov-Ketten erzeugt. Eine wesentliche Eigenschaft von Markov-Ketten besteht darin, dass eine aktuelle Konfiguration  $[U']$  stets nur von der vorhergehenden Konfiguration  $[U]$  abhängt, nicht jedoch von weiter zurück liegenden Konfigurationen. Es ist zudem wichtig, dass der gesamte Konfigurationsraum in endlich vielen Schritten erreicht werden können muss, anderenfalls ergeben sich Fehler durch eine künstliche Einschränkung bei der Auswahl neuer Konfigurationen.

Es gibt verschiedene Update-Algorithmen, die für eine Monte-Carlo-Simulation in Betracht gezogen werden können, ein für die  $SU(2)$ -Eichgruppe besonders geeigneter Algorithmus ist der sogenannte Wärmebad-Algorithmus (englisch: heatbath). Hierbei wird immer nur eine Eichvariable  $U_{x\mu}$  erneuert, jedoch braucht es hierfür keinen Akzeptanz-Verweigerungsschritt, wie er sich beispielsweise im Metropolis-Algorithmus findet. Neue Konfigurationen sollen nun gemäß der Wahrscheinlichkeitsverteilung



$$dp(U) \propto e^{-S(U)} dU \quad (5.8)$$

erzeugt werden. Betrachtet man zwei Konfigurationen die sich nur in einem einzelnen Link  $U_{x\mu}$  unterscheiden, so reduziert sich die Wirkung (bis auf Proportionalitätskonstanten) auf

$$S(U_{x\mu}) = -\frac{1}{2} Sp(U_{x\mu} V_{x\mu}) \quad (5.9)$$

wobei  $V_{x\mu} = \beta \sum_{staples} U_{staple}$  die Produkte derjenigen drei Linkvariablen sind, welche mit  $U_{x\mu}$  eine Plakette ergeben. Wird das Eichfeld über die Darstellung

$$U = a\mathbb{1} + ia_r\sigma_r \quad (5.10)$$

mit der Bedingung  $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$  parametrisiert, so folgt mit

$$V = \beta \sum_{staples} U_{staple} = \sqrt{\det V} \bar{U} \quad (5.11)$$

zusammen mit dem Haar-Maß der  $SU(2)$ :

$$dp(U\bar{U}^{-1}) = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{1 - a_0^2} e^{ka_0} da_0 d\Omega. \quad (5.12)$$

Ein neuer Link  $U'$  wird via

$$U' = U_{neu} \cdot \bar{U}^{-1} \quad (5.13)$$

erzeugt. Für die Parameter  $a_k$  von  $U_{neu}$  gilt



$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0, \\
a_1 &= R \sin \theta \cos \varphi, \\
a_2 &= R \sin \theta \sin \varphi, \\
a_3 &= R \cos \theta
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Aufgrund von Gleichung (5.12) erfolgt die Berechnung von  $\varphi$  und  $\theta$  via Verknüpfung mit einer Zufallszahl  $RAN$ , welche mit Hilfe eines aus [41] entnommenen Zufallszahlengenerators erzeugt wurden, gemäß

$$\begin{aligned}
\varphi &= 2\pi RAN, \\
\theta &= \arccos(1 - 2RAN),
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$R = \sqrt{1 - a_0^2} \tag{5.16}$$

falls für  $a_0$  gilt:

$$p(a_0) \propto \sqrt{1 - a_0^2} e^{ka_0}. \tag{5.17}$$

Hierfür werden zwei gleichverteilte Zufallszahlen  $y, z$  erzeugt mit  $e^{-2k} < y < 1$  und  $0 < z < 1$ . Die Bedingung

$$a_0 = 1 + \frac{1}{k} \ln y \tag{5.18}$$

liefert ein exponentiell verteiltes  $a_0$ , die Bedingung

$$z^2 \leq 1 - a_0^2 \tag{5.19}$$

schließlich erzeugt eine Verteilung  $\propto \sqrt{1 - a_0^2}$ . Dies komplettiert die geforderten Bedingungen und ermöglicht das korrekte Update der Eichfelder. Für die technische Implementierung



des Wärmebad-Updates des Higgs-Feldes verweise ich auf die Arbeit von Frau Teuber. Dies gilt ebenso für die Definition der Messgrößen, welche sich in Kapitel 5.5 von [22] finden, mit der wichtigen Ausnahme der nun einzuführenden räumlichen Operatoren.

## 5.1 Gitterausdehnung und räumliche Operatoren

Um endliche Temperaturen auf dem Gitter simulieren zu können, muss die Anzahl der zeitlichen Gitterpunkte  $N_t$  frei gewählt werden können. Da das gesamte vierdimensionale Gitter in einem einzelnen Array gespeichert wurde (genauer: separate Arrays für Eich- und Higgs-Felder, aber analoge Durchläufe) musste für die Anpassung auf variable zeitliche Ausdehnungen  $N_t$  lediglich der Durchlaufalgorithmus im zugrundeliegenden  $C++$ -Programm angepasst werden. Es ist jedoch im folgenden darauf zu achten, dass ausgedehnte Operatoren wie etwa der Wilson-Loop oder der FM-Operator bei der Verringerung der zeitlichen Ausdehnung aufgrund der Periodizität des Gitters Störungen und Unregelmäßigkeiten aufgrund von Selbstwechselwirkungen zeigen können. In den meisten zugrundeliegenden Quellen (vergleiche beispielsweise [42] und [43]) welche auch zum Teil mit dem FM-Operator arbeiten, beschränken sich die Berechnungen auf räumliche Ausdehnungen der Operatoren auf  $R \leq \frac{N_s}{2}$ . Da der FM-Operator per Definition eine zeitliche Ausdehnung hat, musste dieser für die Untersuchung von kleinen zeitlichen Ausdehnungen  $N_t$  angepasst werden. In [22] wird der FM-Operator notiert als

$$\begin{aligned} \rho_{FM}^\infty &= \lim_{R \rightarrow \infty} \rho_{FM} \left( R, T = \frac{R}{2} \right) \\ &= \frac{G^2(R, T)}{WL(R \times R)} \\ &= \frac{|\langle \frac{1}{2} Sp \Phi_x^\dagger U^n(\mathcal{C}_{x,y}) \Phi_y \rangle|^2}{\langle \frac{1}{2} Sp \prod_{\mathcal{C}_{\mathcal{R} \times \mathcal{R}}} U \rangle}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Um eine größere Statistik zu erreichen, wird allerdings im Programm auch für den FM-Operator eine Mittelung über alle Hyperbenen gemäß

$$\rho_{FM}(R, T) = \frac{1}{N^4} \sum_x \frac{1}{6} \sum_{0 \leq \mu < \nu \leq 3} \rho_{FM, \mu\nu}(R, T) \quad (5.21)$$



durchgeführt, wobei  $\rho_{FM,\mu\nu}(R, T)$  für den in der  $\mu$ - $\nu$ -Ebene liegenden FM-Operator steht. Operatoren mit Ausdehnungen in rein räumlicher Richtung können hierdurch leicht erreicht werden, indem der Startindex der Summation verändert wird. Es gilt:

$$\rho_{FM,s}(R, T) = \frac{1}{N_s^3 N_t} \sum_x \frac{1}{3} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 3} \rho_{FM,\mu\nu}(R, T). \quad (5.22)$$

Auf diese Weise werden nur Operatoren gemessen welche in den  $x$ - $y$ -,  $x$ - $z$ - oder  $y$ - $z$ -Ebenen liegen. Das gleiche Prinzip wurde auch auf den räumlichen Wilson-Loop  $WL_s(R \times R)$  angewendet.

Diese Größen wurden vornehmlich in dieser Arbeit verwendet. Zwar ist die physikalische Interpretation der Ausdehnung von  $G(R, T)$  als Zeitentwicklung in diesen Fällen nicht mehr gegeben, formal gesehen sollte sich jedoch nichts an der Wirksamkeit der Operatoren als Ordnungsparameter ändern. Weder der Heatbath-Algorithmus, noch die Durchlaufalgorithmen nehmen eine Festlegung der Achsen vor. Dies ist anschaulich besonders klar im Fall des isotropen Gitters mit  $N_s = N_t$ .

## 5.2 Datenanalyse mit Jackknife-Binning

Aufgrund der Erzeugung einer neuen Feldkonfiguration aus einer alten heraus (heatbath-Algorithmus) sind die im Monte-Carlo-Verfahren ermittelten Daten untereinander korreliert. Wie in [22] dargelegt, ergibt sich für den Erwartungswert einer Größe im Falle unkorrelierter Daten die Beziehung

$$\langle A \rangle = \bar{A} \pm \Delta A \quad (5.23)$$

mit dem Schätzer

$$\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A_n. \quad (5.24)$$

Der Fehler ist in diesem Fall durch die Varianz gegeben:



$$\Delta A = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}. \quad (5.25)$$

Hierbei gilt zudem:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (A_n - \bar{A})^2. \quad (5.26)$$

Bei korrelierten Daten ergibt sich aus einer Betrachtung der Autokorrelationsfunktionen einer Serie von Computerzeitschritten ein Ausdruck [32], der die scheinbare Anzahl unabhängiger Messwerte  $N_{eff}$  reduziert. Es gilt hier

$$N_{eff} = \frac{N}{2\tau_{x,int}}. \quad (5.27)$$

und die integrierte Autokorrelationszeit  $\tau_{x,int}$  muss aus den vorhandenen Daten bestimmt werden. Typischerweise verringern sich Autokorrelationen zwischen einzelnen Messwerten exponentiell zur Computerzeit  $t$ , die zwischen den Messungen vergangen ist. Daher hat beispielsweise ein Datensatz aus der Anfangszeit einer Simulation wenig bis sehr wenig Korrelationen mit Daten die gegen Ende der Simulation gewonnen wurden. Diesen Umstand macht man sich beim Jackknife-Binning zunutze, indem man den gesamten Datensatz mit  $N$  Messungen in  $N_B$  Blöcke der Länge  $b$  unterteilt. Anschließend wird für jeden Block der Blockmittelwert

$$\bar{B}_i = \frac{1}{b} \sum_{A_n \in B_i} A_n \quad \text{mit } i = 1, \dots, N_B \quad (5.28)$$

gebildet und üblicherweise durch den Mittelwert aller anderen Blöcke

$$\bar{B}'_i = \frac{1}{N_B - 1} \sum_{j \neq i} \bar{B}_j \quad (5.29)$$



ersetzt. Der Fehler  $\Delta A$  lässt sich nun durch die Ersetzung  $\sigma \rightarrow \sigma_{Jackknife}^2 = (N_B - 1) \sum_i (\bar{B}'_i - \bar{B})^2$  berechnen. Hierdurch lässt sich der Fehler  $\Delta A$  besser abschätzen, ohne zusätzlichen Rechenaufwand betreiben zu müssen. Es müssen lediglich die gewonnen Daten aufbereitet werden.



**Ergebnisse der  
numerischen  
Simulationen**

**Kapitel 6**







In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse, die durch Monte-Carlo-Simulationen auf Gittern variabler zeitlicher Ausdehnung  $N_t$  durchgeführt wurden, zusammengetragen und erläutert werden. Es ist in diesem Rahmen sinnvoll die Anzahl der freien Parameter des Modells zu begrenzen und die quartische Selbstkopplung  $\lambda$  auf den Wert  $\lambda = 0.5$  festzulegen. Der Vorteil dieser Festlegung besteht darin, dass der Higgs-Phasenübergang bei  $T = 0$  von schwacher erster oder höherer Ordnung ist. Dies bedeutet, dass die Massen physikalischer Teilchen in der Umgebung des Higgs-Phasenübergangs klein sind (in Gittereinheiten) und die Gitterkonstante  $a$  somit klein wird [34]. Hieraus folgt wiederum eine große physikalische Temperatur in Gittereinheiten, da gilt

$$T = \frac{1}{N_t a} . \quad (6.1)$$

Der geschilderte Sachverhalt ist zudem wichtig im Zusammenhang mit Tests des asymptotischen Verhaltens von  $\rho_{FM,s}$ .

Zunächst sei hier jedoch ein prinzipielles Problem dargelegt, welches mit der Implementierung der statistischen Auswertung aufgrund der Jackknife-Methode für den FM-Operator zusammen hängt. In der Simulation wird zunächst ein Startzustand der Eich- und Higgs-Felder eingestellt. Dies sind entweder geordnete Konfigurationen der Felder (auch als Kaltstart bezeichnet) oder zufällige Konfigurationen (Heißstart). Anschließend wird für jeden Gitterpunkt  $x_\mu \in \Lambda$  eine Messung der gewünschten Größe (beispielsweise des FM-Operators) vorgenommen, die erhaltenen Werte aller Punkte und Orientierungen (erhöht die Statistik bei kaum vergrößertem Rechenaufwand) werden aufsummiert und als Messwert in einem Array gespeichert (die ersten Iterationen werden verworfen, um dem System Zeit zum thermalisieren zu geben). Dieses wird nach Durchlauf aller Iterationsschritte an die Routine der statistischen Auswertung übergeben und mit der Methode des Jackknife-Binnings behandelt. Definitionsgemäß ergibt sich der Erwartungswert des FM-Operators zu

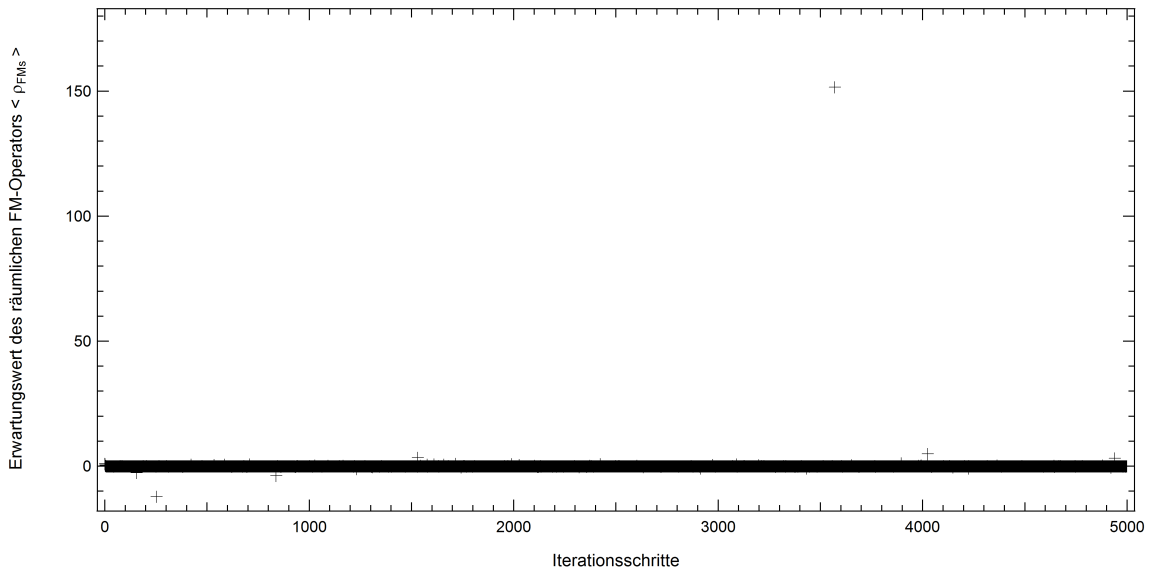
$$\begin{aligned} \rho_{FM}^\infty &= \lim_{R \rightarrow \infty} \rho_{FM} \left( R, T = \frac{R}{2} \right) \\ &= \frac{G^2(R, T)}{WL(R \times R)} \\ &= \frac{|\langle \frac{1}{2} Sp \Phi_x^\dagger U^n(\mathcal{C}_{x,y}) \Phi_y \rangle|^2}{\langle \frac{1}{2} Sp \prod_{\mathcal{C}_{R \times R}} U(\mathcal{C}) \rangle} . \end{aligned} \quad (6.2)$$



Der FM-Operator ist also der Quotient zweier Erwartungswerte. Offenbar kam es jedoch bei der Erstellung des Programms zu einem Irrtum bei der Implementierung. Es wurden für jeden Durchlauf des Programms die Quotienten aus  $G^2(R, T)$  und  $WL(R \times R)$  gebildet, abschließend erfolgte die statistische Auswertung, sodass gilt:

$$\rho_{FM,impl.} \left( R, T = \frac{R}{2} \right) = \left\langle \frac{|\frac{1}{2} Sp \Phi_x^\dagger U^n(\mathcal{C}_{x,y}) \Phi_y|^2}{\frac{1}{2} Sp \prod_{\mathcal{C}_{R \times R}} U(\mathcal{C})} \right\rangle. \quad (6.3)$$

Dieser Umstand blieb lange unentdeckt, da er im Grenzfall hyperkubischer Gitter nur sehr geringe Auswirkungen hatte. Bei kleineren zeitlichen Gitterausdehnungen jedoch traten des öfteren unrealistisch große Fehler und deutliche Abweichungen vom Mittelwert vergleichbarer Messungen häufig auf. Ein Beispiel sei in der folgenden Abbildung gegeben.

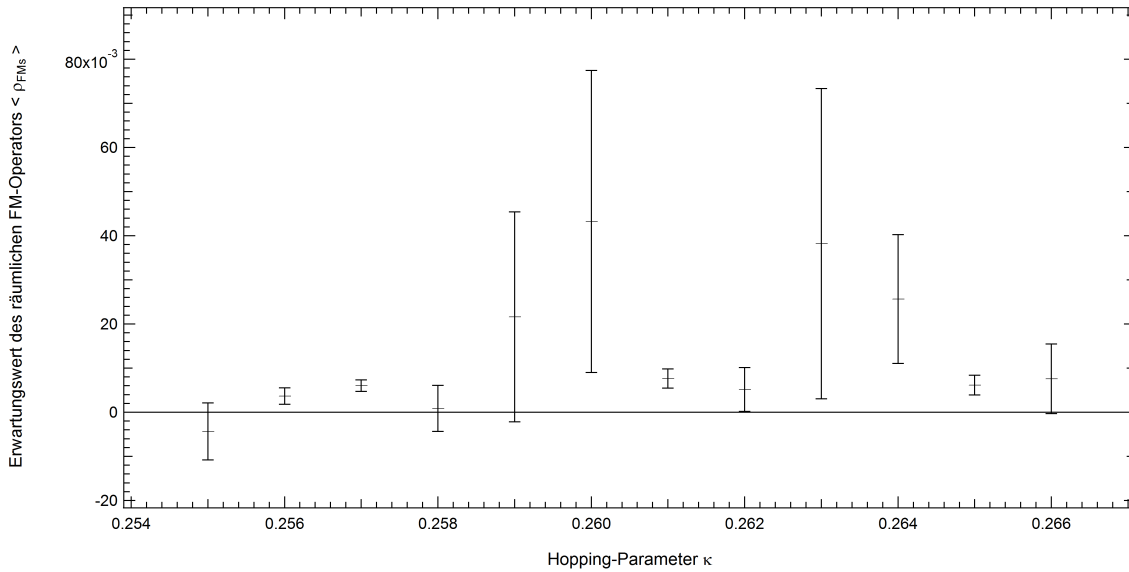


**Abbildung 6.1:** Erwartungswert des räumlichen FM-Operators  $\rho_{FM,s}(4, 2)$  aufgetragen gegen die Iterationsschritte bei  $N_t = 2$ ,  $\beta = 2.4$  und  $\kappa = 0.259$ .

Man erkennt bei etwa 3600 Iterationsschritten einen Wert, der weitab aller anderen Werte liegt. Statistische Fluktuationen sind aufgrund des verwendeten Monte-Carlo-Algorithmus zu erwarten, jedoch keine Abweichungen vom Durchschnittswert im Bereich von drei Größenordnungen. Leider traten solche scheinbar unsinnigen Werte gerade für kleine  $N_t$  und für Parameterkombinationen, bei denen sich das System in der Nähe eines Phasenübergangs befand häufig auf. Es wurden verschiedene Ursachen untersucht, letztendlich fand sich die Erklärung, dass für räumliche Ausdehnungen des Wilson-Loops  $R$  und Parameterkombina-



tionen  $(\beta, \kappa, N_t)$ , bei denen der Erwartungswert des Wilson-Loops nahe bei Null lag, statistische Fluktuationen ausreichten, um Konfigurationen zu erzeugen, bei denen der Erwartungswert  $\langle WL(R \times R) \rangle$  des Wilson-Loops gegen Null ging. Typische Größenordnungen bei denen stark irreguläres Verhalten beobachtet werden kann, sind Erwartungswerte von etwa  $\langle WL(R \times R) \rangle \leq 10^{-5}$ .



**Abbildung 6.2:** Erwartungswert des räumlichen FM-Operators  $\langle \rho_{FM,s}(4, 2) \rangle$  aufgetragen gegen den Hopping-Parameter  $\kappa$  bei  $N_t = 2$  und  $\beta = 2.4$

Die Datenreihe aus Abbildung(6.1) wurde benutzt, um mittels der Jackknife-Methode den Erwartungswert des räumlichen FM-Operators zu berechnen. Sie entspricht dem Wert bei  $\kappa = 0.259$  und es zeigt sich, dass der einzelne extreme Wert einen äußerst großen Fehler auch für den Erwartungswert von  $\rho_{FM,s}$  erzeugt.

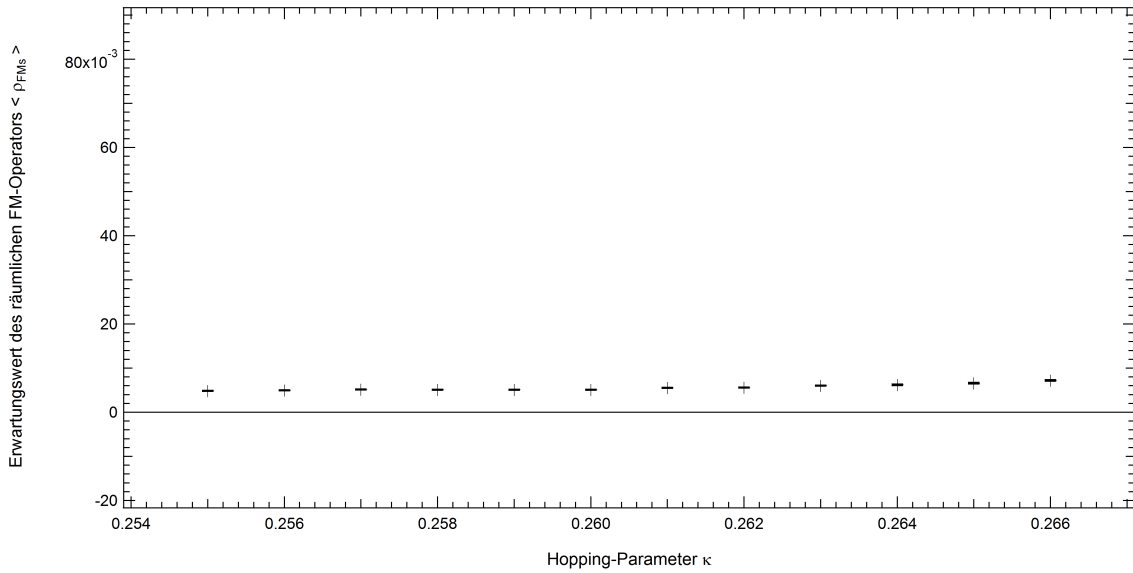
Das verwendete C++-Programm wurde in der Folge modifiziert,  $G^2(R, T)$  und  $WL(R \times R)$  wurden separat mit der Jackknife-Methode behandelt und anschließend der Quotient gebildet. In der Folge wurden Zähler und Nenner in ersten Näherung als unkorreliert betrachtet und als Fehlerabschätzung eine Gaußsche Fehlerfortpflanzung durchgeführt. Für den Fehler  $\Delta \rho_{FM,s}$  des räumlichen FM-Operators  $\rho_{FM,s} = \frac{G^2(R, T)}{WL(R \times R)}$  gilt danach:

$$\Delta \rho_{FM,s} = \sqrt{\left( \frac{\Delta G^2(R, T)}{WL(R \times R)} \right)^2 + \left( \frac{G^2(R, T) \cdot \Delta WL(R \times R)}{(WL(R \times R))^2} \right)^2} \quad (6.4)$$

Allerdings kann diese Fehlerabschätzung nur in erster Näherung verwendet werden, da es



sehr wahrscheinlich Korrelationen zwischen  $G^2(R, T)$  und  $WL(R \times R)$  gibt, da die in  $G^2(R, T)$  eingehenden Linkvariablen die Hälfte des Wilson-Loops  $WL(R \times R)$  ausmachen. Derartigen Korrelationen kann mit solch einer einfachen Behandlung nicht Rechnung getragen werden. Da jedoch die auf diese Weise bestimmten Fehler größenordnungsmäßig konsistent mit denen aus der alten Berechnungsformel waren, vorausgesetzt das System befand sich in einem nicht kritischen Bereich des Phasendiagramms, erscheint die neue statistische Behandlung gerechtfertigt. Zur Anschaulichkeit ist in der folgenden Abbildung der Erwartungswert von  $\rho_{FM,s}(4, 2)$  bei der gleichen Parameterkombination wie in Abbildung (6.2) dargestellt, ausgewertet mit der neu implementierten statistischen Behandlung.



**Abbildung 6.3:** Erwartungswert des räumlichen FM-Operators  $\rho_{FM,s}(4, 2)$  aufgetragen gegen den Hopping-Parameter ,  $\kappa$  bei  $N_t = 2$  und  $\beta = 2.4$ ; verbesserte statistische Auswertung

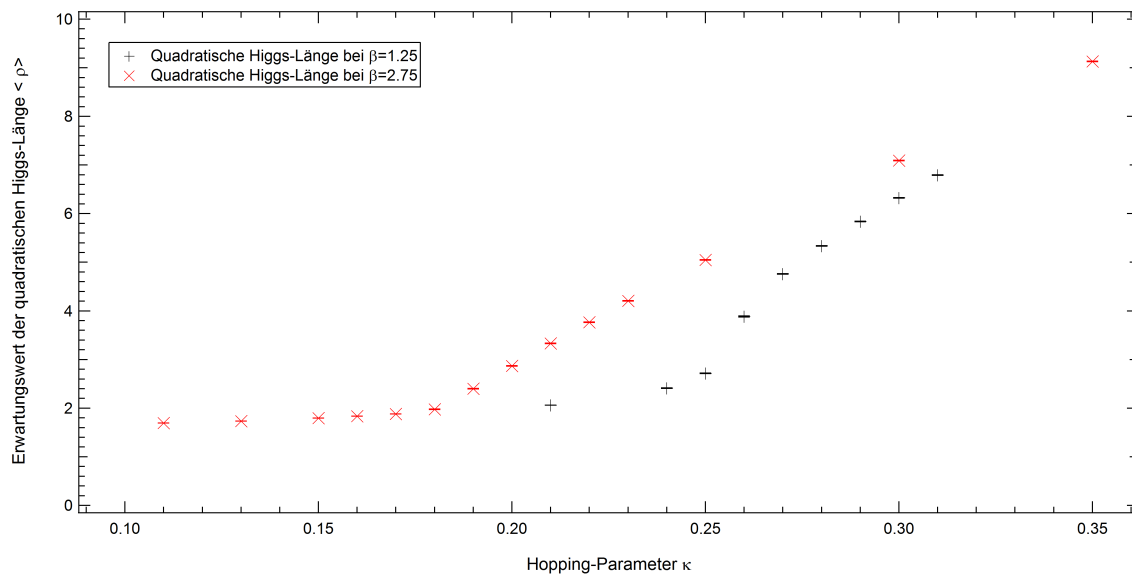
Die Skalierung der beiden Abbildungen wurde gleich gewählt, um die drastischen Unterschiede zwischen den beiden Methoden der statistischen Auswertung aufzuzeigen, welche in kritischen Bereichen des Phasendiagramms auftreten können.

Eine komplexere Behandlung des Problems konnte leider aus Zeitmangel nicht erfolgen, da der Fehler erst zu sehr fortgeschrittener Zeit während der Masterarbeit gefunden werden konnte. Aufgrund dessen ist die weitere Datenlage äußerst spärlich, es konnten nur wenige Simulationen mit der neuen Fehlerbehandlungsmethode durchgeführt werden. Dennoch sollen diese Ergebnisse hier vorgestellt werden.



## 6.1 Programmkorrektheit und Thermalisierungszeiten des Systems bei endlichen Temperaturen

Nach der Anpassung des  $C++$ -Programms an variable Anzahlen zeitlicher Gitterpunkte  $N_t$  erfolgte zunächst eine Überprüfung der Programmkorrektheit anhand der Literatur. Hierfür wurde eine Simulation auf einem  $8^3 \times 4$ -Gitter durchgeführt und der Erwartungswert der quadratischen Higgs-Länge  $\langle \rho^2 \rangle$  für  $\beta = 1.25$  und  $\beta = 2.75$  für diverse Werte des Hopping-Parameters  $\kappa$  berechnet. Das Ergebnis findet sich in der folgenden Abbildung.

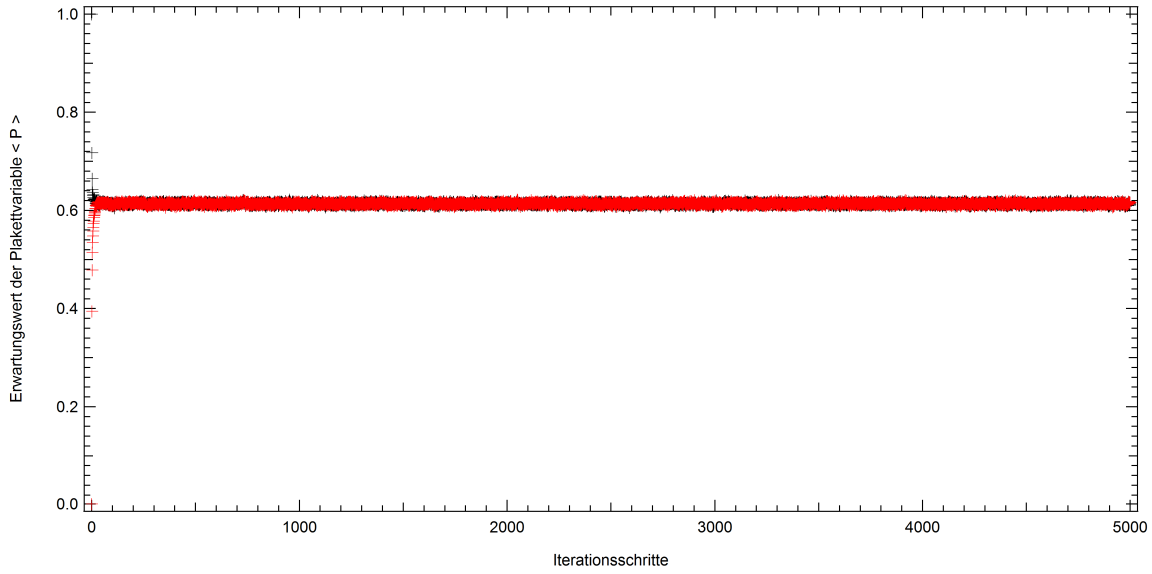


**Abbildung 6.4:** Erwartungswert der quadratischen Higgs-Länge  $\rho$  aufgetragen gegen den Hopping-Parameter  $\kappa$  für  $N_s = 8$ ,  $N_t = 4$  für  $\beta = 1.25$  (schwarz) und  $\beta = 2.75$  (rot).

Die gefundenen Ergebnisse stimmen sehr gut mit den Werten aus [23] überein und es kann davon ausgegangen werden, dass das Programm an sich korrekt arbeitet.

Analog zu Frau Teubers Betrachtungen zur Thermalisierung des Systems nahe an einer Phasengrenze (mit den physikalischen Parametern  $\beta = 2.25$ ,  $\kappa = 0.27$ ,  $N_t = N_s = 16$ ) wurde für die gleiche Parameterkombination bei  $N_t = 2$ ,  $N_s = 16$  eine Untersuchung der Thermalisierungszeiten des Systems anhand des zeitlichen Verlaufs des Erwartungswertes der Plakettvariablen  $\langle P \rangle$  durchgeführt.





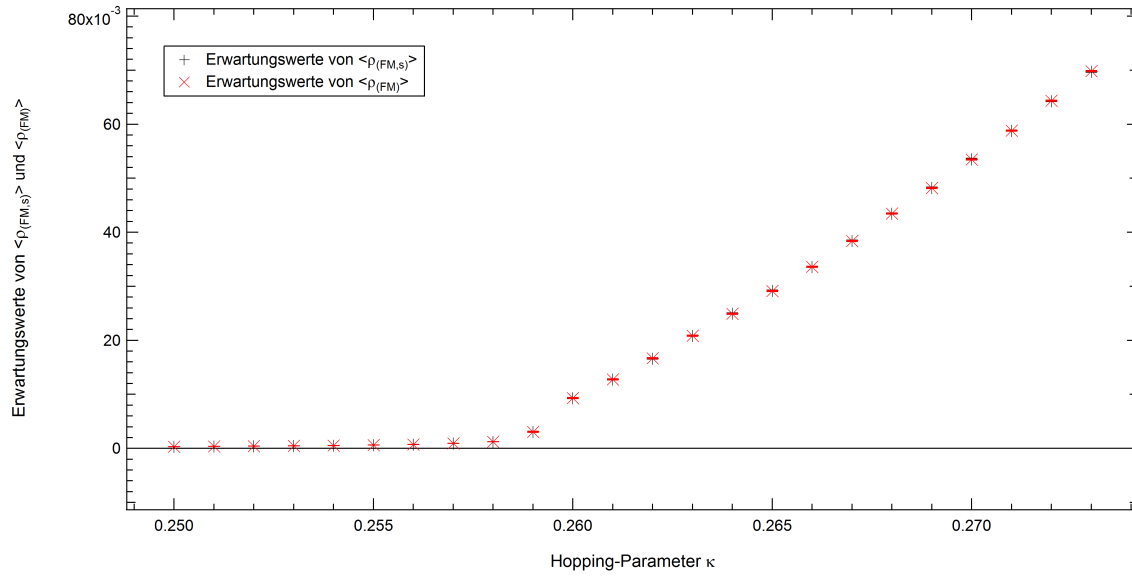
**Abbildung 6.5:** Erwartungswert der Plakettvariablen  $\langle P \rangle$  aufgetragen gegen die Iterationsschritte

Hier ist klar zu erkennen, dass die Thermalisierungszeit anders als auf dem hyperkubischen Gitter, welches eine Thermalisierungsanzahl von etwa 600 Schritten aufweist, sehr gering ausfällt. Um jedoch Simulationen mit verschiedenen Gitterausdehnungen  $N_t$  konsistent zu halten, wurden im Folgenden stets 600 Schritte zur Thermalisierung verwendet. Aufgrund der geringeren Statistik des verkleinerten Gitters mussten jedoch etwa 5000 Iterationen durchgeführt werden, um die gleiche numerische Genauigkeit von Erwartungswerten bei  $N_t = 2$  zu erreichen wie bei 1000 Iterationsschritten auf dem hyperkubischen Gitter. Unter diesen Bedingungen berechnete Erwartungswerte stimmen innerhalb der Fehlergrenzen überein, egal ob geordnete oder chaotische Startzustände gewählt wurden.

## 6.2 Räumliche Operatoren

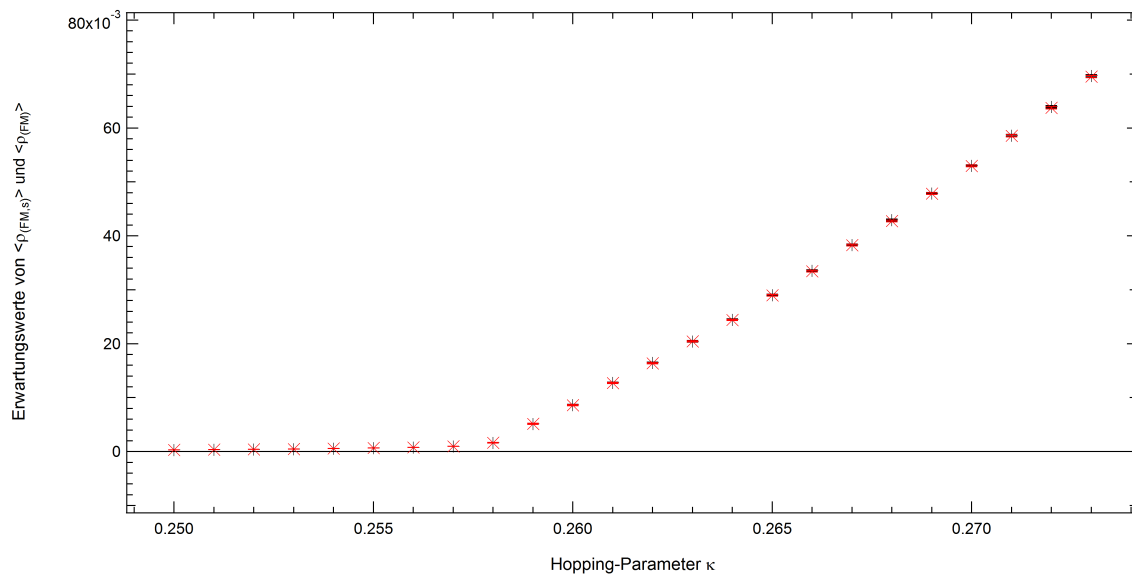
Als nächstes soll demonstriert werden, dass auch der räumliche FM-Operator  $\rho_{FM,s}(R, T_1, T_2)$  ein geeigneter Ordnungsparameter des Systems ist. Die angepasste Bezeichnung bezieht auch ungerade räumliche Abstände mit ein und bezeichnet  $\rho_{FM,s}(R, T_1, T_2) = \frac{G(R, T_1)G(R, T_2)}{WL(R \times R)}$  mit  $T_1 + T_2 = R$  und  $|T_1 - T_2| \leq 1$ . Auf dem hyperkubischen Gitter sollten die Erwartungswerte von  $\rho_{FM}(R, T_1, T_2)$  und  $\rho_{FM,s}(R, T_1, T_2)$  trivialerweise innerhalb der Messunsicherheit übereinstimmen. In der Tat zeigt sich im Fall  $N_s = N_t = 16$  eine sehr gute Übereinstimmung der Messerwerte.





**Abbildung 6.6:** Erwartungswerte des räumlichen FM-Operators  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  und des normalen FM-Operators  $\rho_{FM}(3, 2, 1)$  aufgetragen gegen den Hopping-Parameter  $\kappa$  bei  $N_s = N_t = 16$ ,  $\beta = 2.4$ .

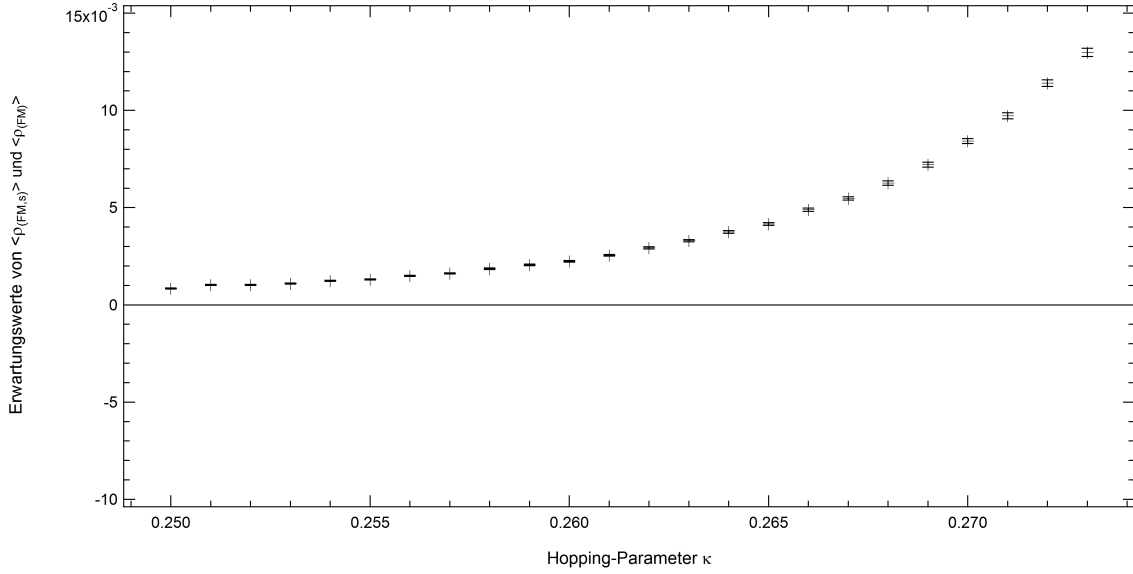
Die plötzliche Änderung des Verhaltens des FM-Operators bei  $\kappa \approx 2.59$  zeigt hier den Higgs-Phasenübergang an. Für  $N_t = 8$  und alle anderen Parameter unverändert ergibt sich der folgende Graph:



**Abbildung 6.7:** Erwartungswerte des räumlichen FM-Operators  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  und des normalen FM-Operators  $\rho_{FM}(3, 2, 1)$  aufgetragen gegen den Hopping-Parameter  $\kappa$  bei  $N_s = 16$ ,  $N_t = 8$ ,  $\beta = 2.4$ .



Auch bei kleineren Gittern zeigt sich, dass der räumliche FM-Operator ein ebenso guter Ordnungsparameter ist wie der ursprünglich verwendete. Ein Vergleich auf noch kleineren Gittern ist aufgrund der Bedingung  $T \leq \frac{N_t}{2}$  schwierig, der zeitartige FM-Operator läuft Gefahr durch Selbstwechselwirkungen gestört zu werden. Abschließend soll noch der Erwartungswert von  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  auf einem Gitter der Ausdehnung  $N_t = 2$  betrachtet werden.



**Abbildung 6.8:** Erwartungswerte des räumlichen FM-Operators  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  aufgetragen gegen den Hopping-Parameter  $\kappa$  bei  $N_s = 16$ ,  $N_t = 2$ ,  $\beta = 2.4$ .

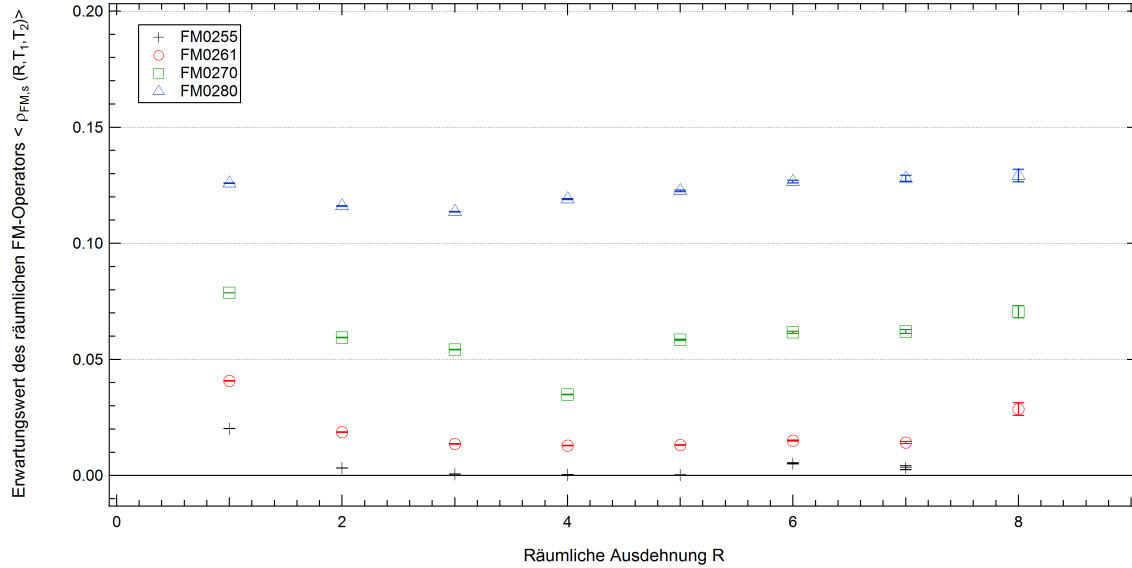
Hier zeigen sich einige qualitative Unterschiede. Zum einen sei auf die unterschiedliche Skalierung der Abbildungen hingewiesen, im Falle von  $N_t = 2$  ist das Signal des räumlichen FM-Operators deutlich schwächer. Darüber hinaus ändert sich der Erwartungswert deutlich langsamer, der Verlauf ist glatter. Ein derartiges Verhalten erwartet man auch für große Temperaturen, da hier der Higgs-Phasenübergang zu einem schwachen Crossover werden sollte.

### 6.3 Plateaumessungen des FM-Operators

Da der asymptotische Wert  $\rho_{FM,s}^\infty$  der physikalisch interessante Parameter ist, dieser jedoch auf endlichen Gittern bei weitem nicht realisiert werden kann, sollen analog zu Frau Teubers Betrachtungen die Erwartungswerte von  $\rho_{FM,s}(R, T_1, T_2)$  für verschiedene räumliche Ausdehnungen  $R$  des FM-Operators auch bei endlichen Temperaturen betrachtet werden. Zunächst wurden jedoch für die Parameter  $\beta = 2.4$  und  $N_t = 16$  für vier verschiedene Werte des Hopping-Parameters  $\kappa$  die räumlichen Ausdehnungen des FM-Operators variiert. Das



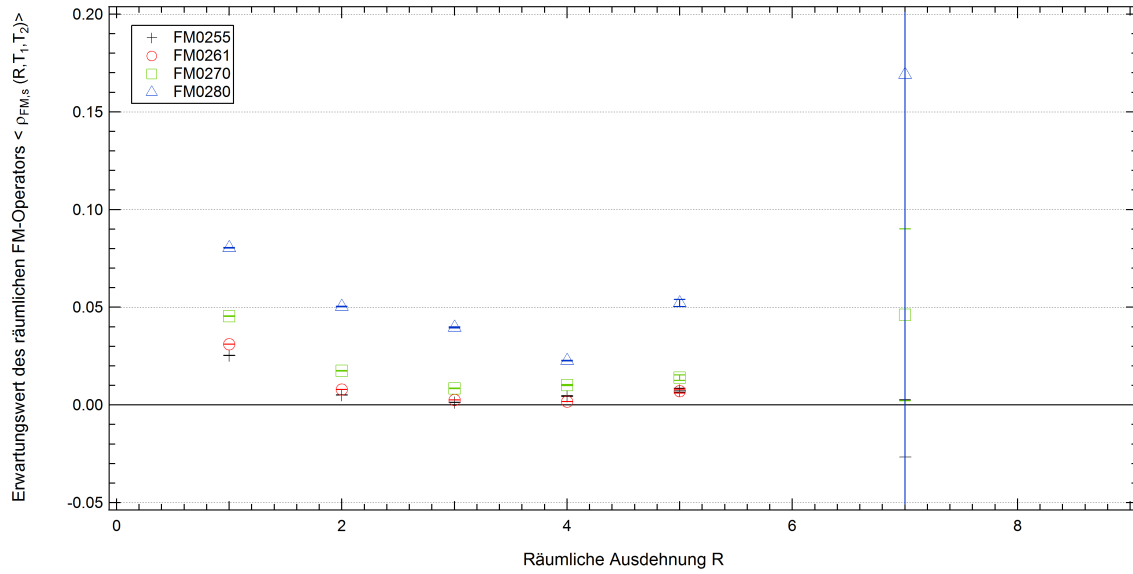
Ergebnis zeigt die folgende Abbildung.



**Abbildung 6.9:** Der FM-Operator  $\rho_{FM,s}(R, T_1, T_2)$  als Funktion des räumlichen Abstands  $R$  bei  $\beta = 2.4$  und  $N_t = 16$ .

Es zeigt sich hier eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus [22], allerdings besitzen die Erwartungswerte des FM-Operators bei  $R = 7$  größere Fehler als in dieser Abbildung. Eine Ausnahme ist der Erwartungswert für  $R = 8$ ,  $\kappa = 0.255$ . Dieser Messpunkt hat einen Erwartungswert von  $\rho_{FM,s}(8, 4, 4) \approx -1 \pm 5$ . Die Daten zeigen, dass dessen Wilson-Loop einen sehr kleinen, negativen Erwartungswert hat und auf diese Weise das deutlich irreguläre Verhalten erzeugt. Aus der theoretischen Beschreibung des Wilson-Loops ist sein exponentieller Abfall mit  $R$  bekannt und das Ergebnis erscheint daher nicht verwunderlich. In [22] wurden hauptsächlich FM-Operatoren der Länge  $R = 5$  oder  $R = 6$  verwendet. Hierbei wurde die Wichtigkeit des asymptotischen Grenzwertes  $\rho_{FM}^\infty$  betont und zudem argumentiert, dass die Werte für  $R = 5$  und  $R = 6$  für alle vier Werte von  $\kappa$  etwa ein Plateau bildeten. Im Fall endlicher Temperaturen wurde jedoch  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  als primärer Ordnungsparameter gewählt, da Abbildung (6.10)





**Abbildung 6.10:** Der FM-Operator  $\rho_{FM,s}(R, T_1, T_2)$  als Funktion des räumlichen Abstands  $R$  bei  $\beta = 2.4$  und  $N_t = 2$ . (Die Messwerte für  $R = 6$  und  $R = 8$  liegen außerhalb des betrachteten Intervalls.)

zeigt, dass große räumliche FM-Operatoren instabil und unzuverlässig als Messgröße werden. Man erkennt zudem, dass es ein Minimum bei  $R = 4$  gibt, so wie auch bei  $N_t = 16$  für die meisten Werte von  $\kappa$ . Es zeigte sich jedoch, dass auch  $\rho_{FM,s}(4, 2, 2)$  in manchen Bereichen des Phasenraums irreguläres Verhalten zeigte, insbesondere bei kleinen Werten der Gitterkopplung  $\beta$  und kleinen zeitlichen Ausdehnungen  $N_t$ . Der FM-Operator  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  erwies sich in den meisten Parameterbereichen als am stabilsten und zeigte nur sehr selten unregelmäßiges Verhalten. Dieses Verhalten zeigte sich auch in der alten Form der statistischen Behandlung und erlaubte damit, die Erkenntnisse aus einigen Regionen des Phasendiagramms in begrenztem Maße auf die neue Formulierung zu übertragen.

## 6.4 Asymptotisches Verhalten von $\rho_{FM,s}$

Es ist hinreichend bekannt, dass der FM-Operator ein geeigneter Operator ist um den Übergang von der Confinement-Phase zur Higgs-Phase durch eine plötzliche Veränderung seines Erwartungswertes anzuzeigen. Wie bereits demonstriert, ist er in der Confinement-Phase nahezu gleich Null, während er in der Higgs-Phase einen nicht verschwindenden Erwartungswert annimmt. Interessanterweise ist dies jedoch nicht das theoretisch erwartete Verhalten.



Vielmehr wurde in Kapitel 4 argumentiert, dass der Operator in der Confinement-Phase einen nichtverschwindenden Erwartungswert besitzen sollte. Wie in mehreren Publikationen angemerkt (siehe beispielsweise [29]) ist dies auf den Mechanismus des string-breaking selbst zurück zu führen. Für räumliche Abstände der statischen Quarks, bei denen noch kein string-breaking aufgetreten ist, die Quarks sich jedoch schon etwas voneinander entfernt haben, erscheinen diese wie teilweise freie farbgeladene Zustände. Die fadenartigen Zustände unterhalb der string-breaking-Distanz  $R_{sc}$  haben zudem einen großen Überlapp mit dem Wilson-Loop. In der Folge ist der Erwartungswert des FM-Operators unterhalb der string-breaking Distanz nahezu gleich Null. Oberhalb der string-breaking-Distanz nimmt der Erwartungswert des FM-Operators einen nichtverschwindenden Wert an. Die Größe, die wirklich zwischen Confinement- und Deconfinement-Phase unterscheiden kann ist somit der asymptotische Grenzwert des FM-Operators  $\rho_{FM}^\infty$ . Zudem ist es in den meisten Bereichen des Phasendiagramms nicht möglich, den asymptotischen Grenzwert des FM-Operators zu berechnen, da in beinahe allen Bereichen der Confinement-Phase die string-breaking-Distanz  $R_{sc}$  weitaus größer ist als die gegenwärtig realisierbaren Gittergrößen [44]. Dies hat den einfachen Grund, dass die nicht renormierte Masse des dynamischen Higgs-Feldes gegeben ist durch

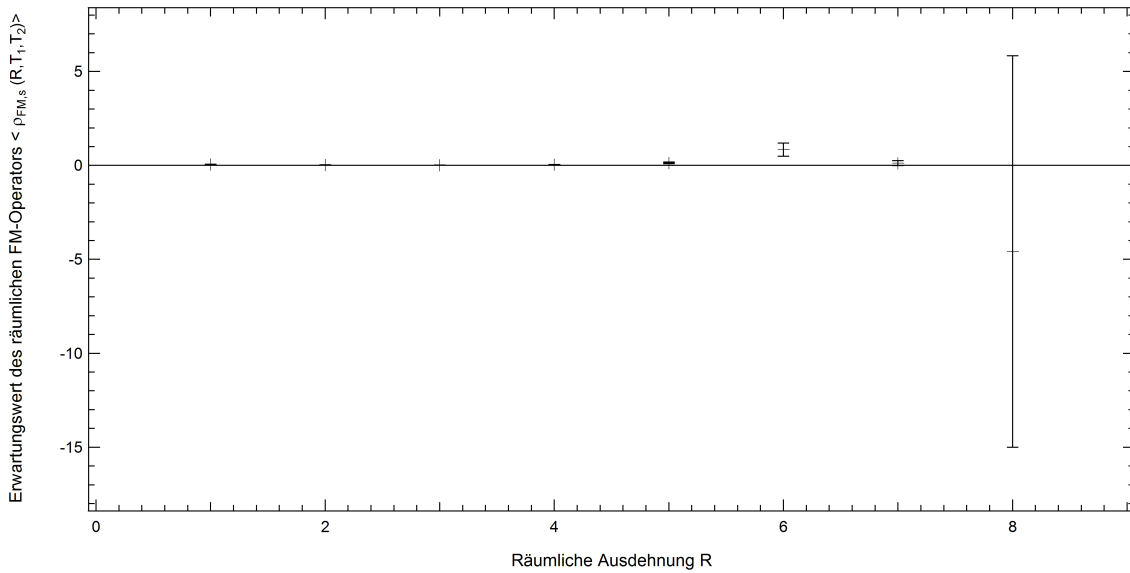
$$m_0^2 = \frac{1 - 2\lambda}{\kappa} - 8. \quad (6.5)$$

Bei zunehmendem  $\kappa$  bewegt sich das System auf den Higgs-Phasen-Übergang zu und in dessen unmittelbarer Umgebung gibt es eine Region, in der string-breaking auch auf numerisch handhabbaren Gittern sichtbar wird. Diese Region hat jedoch nur eine Ausdehnung von 0.007 in  $\kappa$ -Richtung [43], während der Higgs-Phasenübergang etwa in der Mitte der Region liegt. Aus exponentiellen Fits der Funktionen  $G^2(R, T)$  und  $WL(R \times R)$  konnten somit in der Literatur auch in der Confinement-Phase asymptotische Grenzwerte berechnet werden. Für eine besonders günstige Parameterkombination wurde nun im Rahmen der Arbeit versucht, string-breaking auf dem Gitter zu beobachten. Der grundlegende Gedanke war es eine Parameterkombination im Confinement-Bereich der Theorie zu finden, bei der ein nichtverschwindender Erwartungswert des FM-Operators vorliegt. Durch die Reduzierung der Ausdehnung des Gitters in zeitlicher Richtung sollte anschließend der Übergang zu endlichen Temperaturen erfolgen. Der Übergang zur Deconfinement-Phase sollte gekennzeichnet sein durch einen Abfall des Erwartungswertes von  $\rho_{FM,s}$  auf nahezu Null. Aus einer Berechnung der string-breaking-Distanz eines ähnlichen Parametertupels mit einer unterschiedlichen Methode, konnte in der Literatur bereits gezeigt werden, dass in der Tat string-breaking



auf endlichen Gittern beobachtet werden kann. Für die Parameterkombination ( $\beta = 2.2$ ,  $\kappa = 0.274$ ,  $\lambda = 0.5$ ) konnte die string-breaking Distanz bestimmt werden zu  $R_{sc} \approx 5$  Gitterabstände [29].

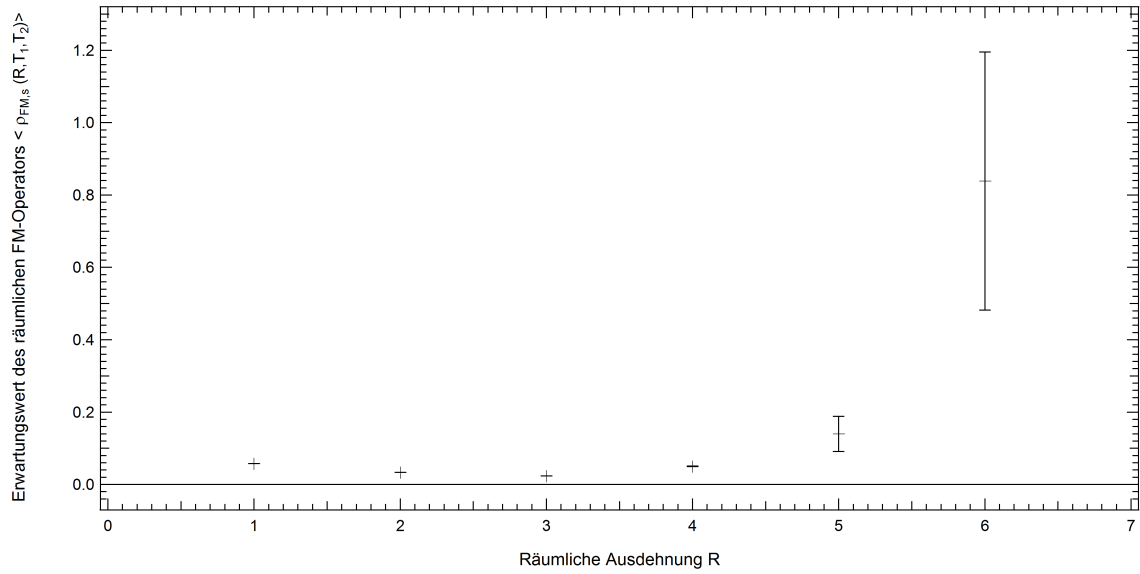
In dieser Arbeit wurde nun versucht mit der Parameterkombination ( $\beta = 2.1$ ,  $\kappa = 0.2866$ ) das string-breaking direkt zu beobachten, signalisiert durch einen nichtverschwindenden Erwartungswert des FM-Operators. Zu diesem Zweck wurde bei dieser Parameterkombination der Erwartungswert von  $\rho_{FM,s}(R, T_1, T_2)$  gegen den räumlichen Abstand aufgetragen. Zudem wurde zur Erhöhung der statistischen Genauigkeit die Anzahl der Iterationen auf 50000 erhöht. Die Resultate der Monte-Carlo-Simulationen auf einem hyperkubischen Gitter der Ausdehnung  $N_s = N_t = 16$  sind in der folgenden Abbildung dargestellt:



**Abbildung 6.11:** Der FM-Operator  $\rho_{FM,s}(R, T_1, T_2)$  als Funktion des räumlichen Abstands  $R$  bei  $\beta = 2.1$ ,  $\kappa = 0.2866$  und  $N_t = 16$ .

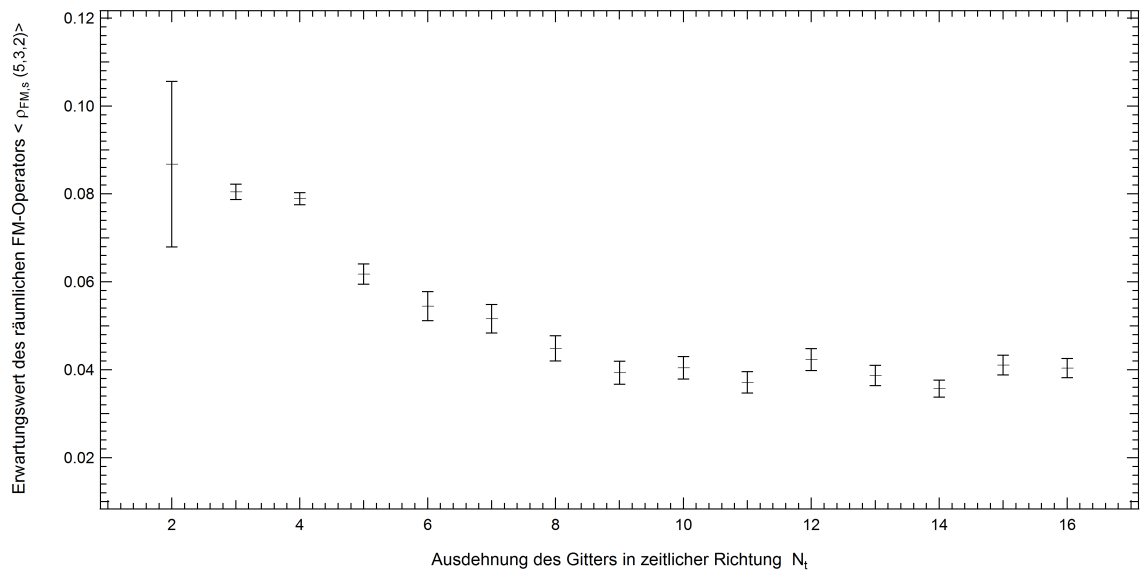
Wie bereits dargelegt werden die Operatoren  $\rho_{FM,s}(R, T_1, T_2)$  mit zunehmender räumlicher Ausdehnung  $R$  instabil und verhalten sich zunehmend irregulär. Der Datenpunkt bei  $R = 8$  zeigt dies nur zu deutlich. Dennoch erkennt man einen schwachen Anstieg des Erwartungswertes bei  $R = 6$ . In der folgenden Abbildung sind die Daten von  $R = 1, \dots, 6$  erfasst:





**Abbildung 6.12:** Der FM-Operator  $\rho_{FM,s}(R, T_1, T_2)$  als Funktion des räumlichen Abstands  $R \leq 6$  bei  $\beta = 2.1$ ,  $\kappa = 0.2866$  und  $N_t = 16$ .

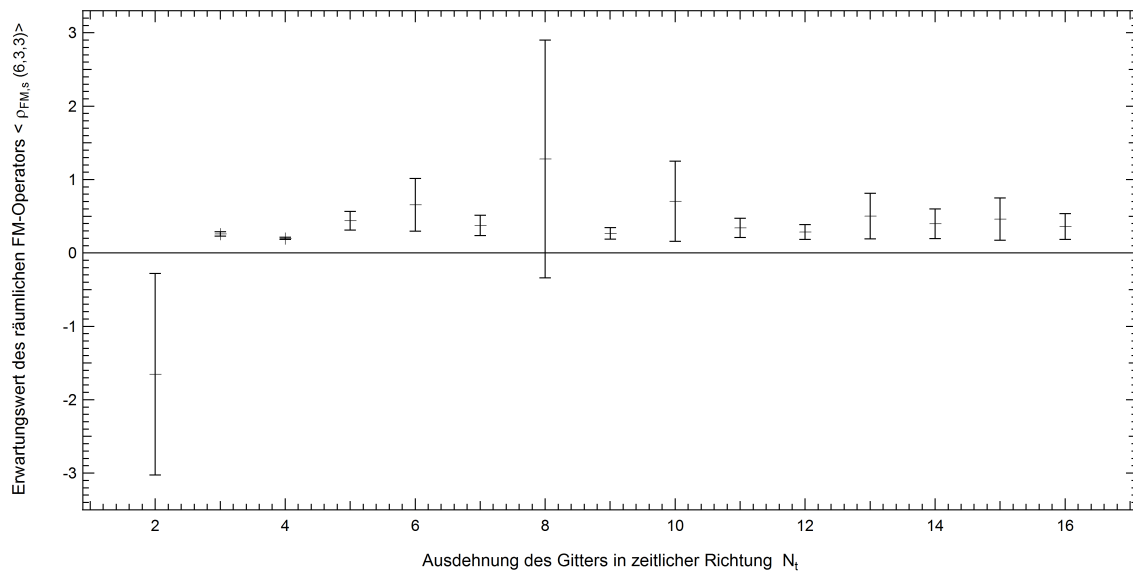
Da die Datenlage aufgrund der großen Unsicherheit des Erwartungswertes bei  $R = 8$  und des abfallenden Erwartungswertes bei  $R = 7$  nicht eindeutig war, wurden nun endliche Temperatureffekte simuliert, indem die Ausdehnung des Gitters in zeitlicher Richtung reduziert wurde. Es wurden sowohl Messungen von  $\rho_{FM,s}(5, 3, 2)$  als auch von  $\rho_{FM,s}(6, 3, 3)$  ausgeführt.



**Abbildung 6.13:** Der FM-Operator  $\rho_{FM,s}(5, 3, 2)$  als Funktion der zeitlichen Ausdehnung des Gitters  $N_t$  bei  $\beta = 2.1$  und  $\kappa = 0.2866$ .



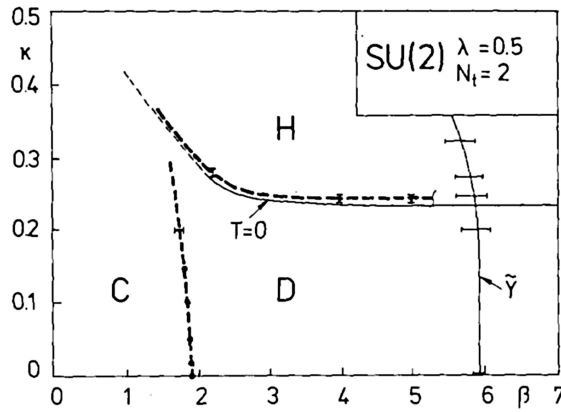
Das theoretisch erwartete Verhalten, bei kleineren zeitlichen Gitterausdehnungen und somit höheren Temperaturen abfallende Erwartungswerte zu beobachten tritt hier nicht ein. Vielmehr steigt der Erwartungswert des FM-Operators für kleinere Gittergrößen stark an. Zum Vergleich ist in der nächsten Abbildung das analoge Ergebnis mit  $\rho_{FM,s}(6, 3, 3)$  dargestellt.



**Abbildung 6.14:** Der FM-Operator  $\rho_{FM,s}(6, 3, 3)$  als Funktion der zeitlichen Ausdehnung des Gitters  $N_t$  bei  $\beta = 2.1$  und  $\kappa = 0.2866$ .



Leider zeigt sich hier, dass der Operator  $\rho_{FM,s}(6, 3, 3)$  für die gewählte Parameterkombination keine verlässlichen Daten liefert, was jedoch aufgrund der Plateaumessungen bei  $N_t = 2$  bereits erwartet werden konnte. Anhand der Datenlage kann nicht gefolgert werden, dass das System zwischen  $N_t = 16$  und  $N_t = 2$  einen Phasenübergang zum Deconfinement-Bereich der Theorie passiert hat. Dass diese zumindest für diese Parameterkombination existieren könnte, zeigt das zweidimensionale Phasendiagramm



**Abbildung 6.15:** Phasendiagramm des  $SU(2)$ -Higgs-Modells bei  $N_t = 2$ .

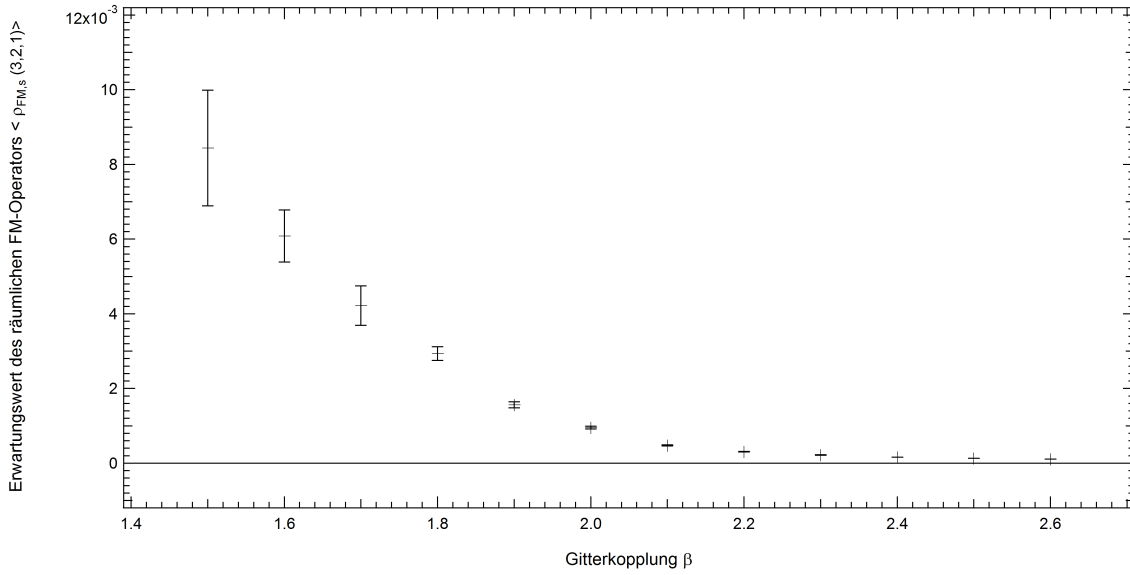
entnommen aus [34]. Dargestellt ist das Phasendiagramm für festes  $\lambda = 0.5$  und festes  $N_t = 2$ . Hier sind deutlich die verschiedenen Regionen des Confinement (C), Deconfinement (D) und der Higgs-Phase (H) zu erkennen. Allerdings sind die Phasen analytisch miteinander verbunden und die Phasenübergänge wurden durch Crossovers in die endliche Temperaturrichtung fortgesetzt. Die annähernd waagerechte Linie beschreibt den Higgs-Phasenübergang, die eher senkrechte gestrichelte Linie setzt die Phasenübergangslinie der reinen  $SU(2)$ -Eichtheorie fort. Da es nicht möglich war aufgrund von asymptotischen Erwartungswerten zwischen Confinement- und Deconfinement-Phase zu unterscheiden, soll im letzten Abschnitt der Auswertung überprüft werden, ob der FM-Operator auch unterhalb des asymptotischen Grenzwertes zwischen den beiden Phasen unterscheiden kann.

## 6.5 Betrachtungen bei kleinem $\kappa$

Aus [34] geht hervor, dass der Confinement-Deconfinement-Übergang der reinen  $SU(2)$ -Eichtheorie bei  $\beta_c = 1.89 \pm 0.01$  stattfindet. Darüber hinaus zeigen die Untersuchungen der Arbeitsgruppe, dass das Crossover, welches den Phasenübergang fortsetzt, bis zu einem



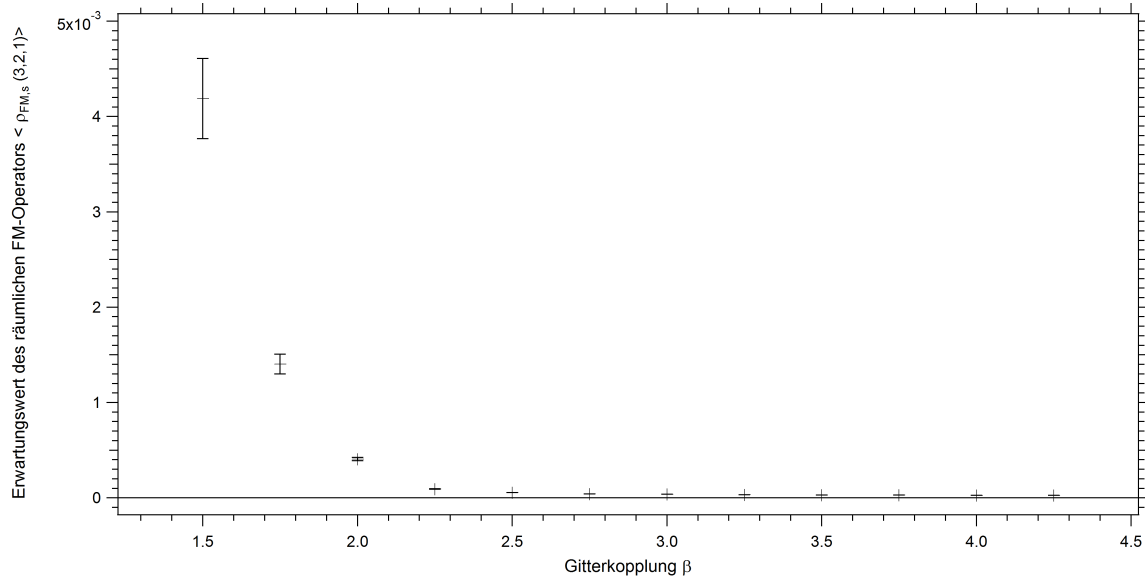
Wert von  $\kappa \approx 0.05$  sehr scharf begrenzt bleibt. Klare Signale von geeigneten Ordnungsparametern sollten daher gerade in diesen Bereichen auftauchen. Da  $\beta_c$  bekannt ist, soll zunächst in der  $N_t = 2$ -Ebene die Gitterkopplung variiert werden, um zu sehen, ob der Operator  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  ein klares Signal zeigt. Die Resultate der Simulation finden sich in der nächsten Abbildung.



**Abbildung 6.16:** Der FM-Operator  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  als Funktion der Gitterkopplung  $\beta$  bei  $N_t = 2$  und  $\kappa = 0.01$

Es zeigt sich ein deutlicher Abfall des Erwartungswertes des FM-Operators mit zunehmendem  $\beta$ . In der Deconfinement-Phase sollte der Erwartungswert des Operators gegen Null gehen und es scheint sich hier tatsächlich ein ähnliches Verhalten einzustellen. Allerdings besitzt der Operator schon bei etwa  $\beta \approx 2.0$  einen Wert, der erkennbar über den Werten bei großem  $\beta$  liegt. Falls der annähernd lineare Anstieg des Erwartungswertes zu kleinen  $\beta$  tatsächlich den Confinement-Deconfinement-Übergang anzeigt, so scheint die Position des Phasenübergangs nicht korrekt angezeigt zu werden. Eine weitere Möglichkeit ist jedoch, dass auch schon bei derart kleinen Werten von  $\beta$  das Crossover spürbar schwächer geworden ist und somit eine eher kontinuierliche Änderung von Ordnungsparametern verursachen würde. Ist das Verhalten des FM-Operators jedoch eher von den physikalischen Parametern bestimmt, so würde man erwarten auch bei anderen Werten von  $N_t$  ein ähnliches Verhalten bei  $\beta \approx 2.0$  zu finden. Es wurde daher eine Messung bei  $N_t = 3$  vorgenommen. Da hier die Phasengrenze nicht bekannt ist, wurde ein größerer Bereich von  $\beta$  mit einer größeren Schrittweite durchscannt. Die Ergebnisse finden sich in der folgenden Abbildung.



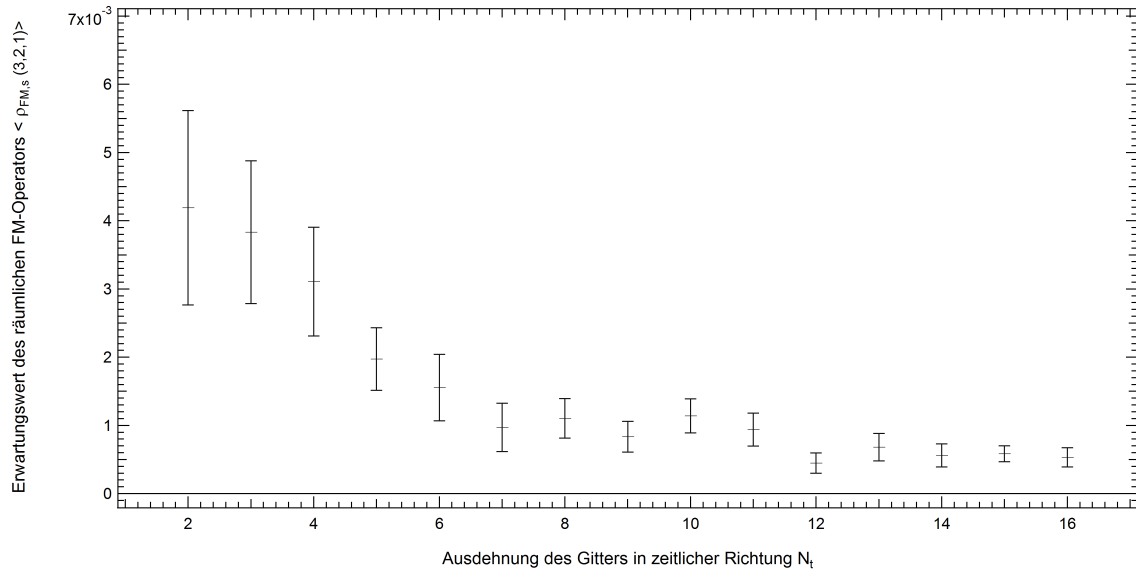


**Abbildung 6.17:** Der FM-Operator  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  als Funktion der Gitterkopplung  $\beta$  bei  $N_t = 3$  und  $\kappa = 0.01$

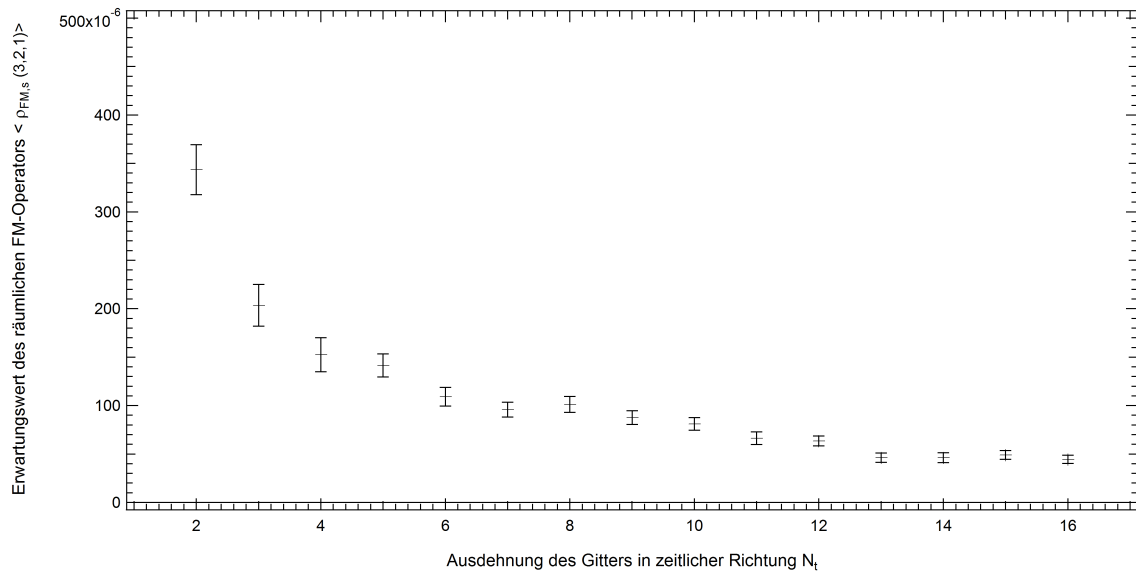
Auch hier zeigt sich ein qualitativ ähnliches Verhalten in ähnlichen Parameterbereichen. Zwar ist die Auflösung des Plots aufgrund der größeren Schrittweite von  $\beta$  geringer als zuvor, doch kann man auch hier den Beginn des Anwachsens der Messwerte auf etwa  $\beta \approx 2.1 \pm 0.1$  einschränken. Es ist somit keine große Verschiebung des kritischen Bereiches erkennbar, was sich nur begrenzt mit dem Phasendiagramm (3.2) vereinen lässt.

Eine letzte Betrachtung soll zeigen, ob der FM-Operator qualitativ unterschiedliches Verhalten in den beiden Phasen bei Variation der Temperatur zeigt. Hierzu wird erneut  $\kappa = 0.01$  gesetzt, um eventuelle Vergleichbarkeiten mit den vorangehenden Betrachtungen ziehen zu können. In den beiden folgenden Diagrammen sind die Simulationsergebnisse zu  $\beta = 1.6$  und  $\beta = 2.1$ ,  $N_t = 2$ ,  $\kappa = 0.01$  dargestellt.





**Abbildung 6.18:** Der FM-Operator  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  als Funktion der zeitlichen Ausdehnung des Gitters  $N_t$  bei  $\beta = 1.6$  und  $\kappa = 0.01$ .



**Abbildung 6.19:** Der FM-Operator  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  als Funktion der zeitlichen Ausdehnung des Gitters  $N_t$  bei  $\beta = 2.1$  und  $\kappa = 0.01$ .

Qualitativ gesehen verhält sich der FM-Operator in den beiden Phasen durchaus ähnlich, für kleinere zeitliche Gitterausdehnungen  $N_t$  steigt der Erwartungswert des Operators stark an. Zwar fluktuiert der Operator bei  $\beta = 1.6$  mehr, dies liegt jedoch vor allem daran, dass



der Wilson-Loop mit kleinerem  $\beta$  abzunehmen scheint. Abgesehen von den deutlich unterschiedlichen Größenordnungen der Erwartungswerte zeigt  $\rho_{FM,s}(3, 2, 1)$  kein klar unterschiedliches Verhalten bei den beiden gewählten Werten von  $\beta$ . Die Frage ob der FM-Operator auch unterhalb der string-breaking-Distanz einen Phasenübergang anzeigen kann, ist somit nicht eindeutig zu beantworten; vielmehr müssten weitere Parameterbereiche abgetastet werden, vorzugsweise mit unterschiedlichen räumlichen Ausdehnungen des FM-Operators.







**Zusammenfassung  
und Ausblick**

**Kapitel 7**







Im Rahmen des  $SU(2)$ -Higgs-Modells wurden Simulationen sowohl auf hyperkubischen Gittern, als auch auf Gittern mit reduzierter zeitlicher Ausdehnung  $N_t$  durchgeführt. Physikalisch betrachtet bedeutet dies die Betrachtung des Systems bei endlichen Temperaturen. Die zentrale Fragestellung dieser Arbeit war, ob der Fredenhagen-Marcu-Operator genutzt werden kann, um den Übergang eines Systems von einer Confinement-Phase mit Farbabschirmung und Einschluss aller farbgeladenen Teilchen in Hadronen und Glueballs hin zu einer Deconfinement-Phase mit freien, schwach miteinander wechselwirkenden farbgeladenen Teilchen anzuzeigen. Das  $SU(2)$ -Higgs-Modell bietet sich für solche Betrachtungen an, da es nicht nur leichter zu handhaben als eine fermionische Theorie ist, sondern vor allem auch eine echte Deconfinement-Phase für bestimmte Parameterbereiche und große Temperaturen besitzt.

Aufgrund der Reduzierung der Ausdehnung des Gitters in zeitlicher Richtung musste der Fredenhagen-Marcu-Operator in eine rein räumlich ausgedehnte Variante umgeschrieben werden. Obwohl sich an dem Operator formal gesehen wenig ändert, muss die physikalische Interpretation der Entwicklung in Zeitrichtung für räumliche Operatoren eventuell überdacht werden.

Es konnte jedoch gezeigt werden, dass der rein räumliche Fredenhagen-Marcu-Operator einen ebenso guten Ordnungsparameter darstellt, und es konnte zudem demonstriert werden, dass sich der Higgs-Phasenübergang bei hohen Temperaturen tatsächlich in ein ausgedehntes Crossover verwandelt.

Da es in den meisten Parameterbereichen der Confinement-Phase mit heutigen Mitteln nicht möglich ist, Gitter zu realisieren, auf denen string-breaking beobachtet werden kann, wurde versucht, in der äußerst scharf begrenzten string-breaking-Phase einen asymptotischen Grenzwert des Fredenhagen-Marcu-Operators zu realisieren. Probleme hierbei stellen nicht nur die nötige Feinabstimmung der Parameter, sondern auch die unmittelbare Nachbarschaft des Higgs-Phasenüberganges dar, in dessen Nähe physikalische Größen oft ein fluktuierendes Verhalten zeigen. Obwohl für einige räumliche Ausdehnungen  $R$  ein Anwachsen des Erwartungswerts des Fredenhagen-Marcu-Operators beobachtet werden konnte, so konnte dies nicht für Operatoren der Ausdehnung  $R \geq 6$  beobachtet werden. Für größere physikalische Temperaturen wird auch dieser Operator instabil und zeigt irreguläres Verhalten.

Generell zeigt sich jedoch, dass die Erwartungswerte der Operatoren für zunehmende Temperaturen anwachsen. Dieses Verhalten wurde theoretisch nicht erwartet und seine physikalische Interpretation ist weitgehend unklar. Aufgrund der Kenntnis des kritischen Wertes der Gitterkopplung  $\beta$  konnten zudem einige Rechnungen bei festem  $N_t = 2$  vorgenommen werden. Es zeigt sich, dass der Erwartungswert des Fredenhagen-Marcu-Operators in der Nähe der bekannten Phasengrenze in der Tat abnimmt, jedoch ist dies nicht zwangsläufig



ein Signal, dass auch Operatoren mit kleiner Ausdehnung einen Deconfinement-Übergang anzeigen können, zumal sich das Verhalten des Operators bei Variation der zeitlichen Gitterausdehnung in den Confinement- und Deconfinement-Bereichen qualitativ nicht wesentlich voneinander unterscheidet.

Um diese Fragestellungen zu klären, müsste eine Vielzahl an zusätzlichen Simulationen durchgeführt und die Statistik zu diesen Problemen deutlich erhöht werden. Ob die Instabilität ausgedehnter Operatoren bei kleinen zeitlichen Gitterausdehnungen auf endliche Temperatureffekte oder auf Selbstwechselwirkungen aufgrund der Periodizität des Gitters zurück gehen, sollte ebenfalls geklärt werden. Falls Letzteres der Fall sein sollte, könnte zu einer besseren Untersuchung des Systems zu einem Gitter mit verschiedenen großen Gitterkonstanten in räumlicher und zeitlicher Richtung übergegangen werden. Auf diese Weise wären gleichzeitig die Simulation hoher Temperaturen, als auch große Gitter mit reduzierten Selbstwechselwirkungen realisierbar.

Es wäre darüber hinaus von Interesse gewesen, weitere Daten im Rahmen dieser Arbeit anzusammeln und zusätzliche Parameterbereiche zu untersuchen. Dies war jedoch aufgrund des im vorigen Kapitels geschilderten Irrtums bei der ursprünglichen Konstruktion des  $C++$ -Programms nicht möglich, da der Großteil der gesammelten Datensätze aufgegeben werden musste.

Obwohl keine konkreten Aussagen darüber getroffen werden konnten, ob der Fredenhagen-Marcu-Operator im  $SU(2)$ -Higgs-Modell als Confinement-Deconfinement-Kriterium verwendet werden kann, bin ich davon überzeugt, dass sich auch zukünftige Arbeiten intensiv mit diesem spannenden Modell beschäftigen werden.



## Anhang

### Eigenschaften der $SU(2)$ -Gruppe

Aufgrund ihrer Struktur als einfachste nichtabelsche Eichtheorie des Standardmodells sind die Strukturkonstanten  $f^{abc}$  der  $SU(2)$ , definiert über die Lie-Algebra

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (7.1)$$

gegeben als  $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ , hierbei bezeichnet  $\epsilon^{abc}$  den total antisymmetrischen Tensor dritter Stufe, auch bekannt als Levi-Civita-Tensor. Die  $SU(2)$ -Gruppe besitzt  $N^2 - 1 = 3$  reelle Freiheitsgrade und daher 3 Generatoren und eine mögliche Darstellung dieser verwendet die Pauli-Matrizen  $\sigma^a$  mit  $a = 1, 2, 3$ , es gilt dann:

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2}. \quad (7.2)$$

Eine lokale  $SU(2)$ -Eichtransformation eines zweikomponentigen Feldes  $\Phi(x)$  hat folglich die Form

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = U(x)\Phi(x), \text{ mit} \\ U(x) &= e^{ig\theta^a(x)\frac{\sigma^a}{2}}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

wobei  $\theta^a(x)$  beliebige ortsabhängige reelle Drehwinkel sind. Für eine Matrix  $U \in SU(2)$  kann ferner aufgrund der Unitaritätsbedingungen  $U^\dagger U = \mathbb{1}$  und  $\det(U) = 1$  für den allge-



meinen Ansatz

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

gefolgt werden, dass gelten muss:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Daher ist es möglich die Transformationsmatrix  $U$  mittels vier reeller Parameter  $a_k$ ,  $k = 0, \dots, 3$  zu parametrisieren [22], solange zusätzlich gefordert wird, dass  $\sum_k a_k^2 = 1$  gilt. Die Matrix  $U$  lässt sich somit schreiben als

$$U = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & +a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Mit Hilfe der Pauli-Matrizen  $\sigma^k$  kann dies auf die sogenannte quaternionische Darstellung umgeschrieben werden:

$$U = a_0 \mathbb{1} + ia_k \sigma^k \quad (7.7)$$

Eine weitere Besonderheit der  $SU(2)$  besteht darin, dass ihre komplex konjugierte Darstellung äquivalent zur fundamentalen Darstellung ist. Für eine Matrix  $U \in SU(2)$  bedeutet dies

$$(i\sigma^2)^{-1}U(i\sigma^2) = U^* \quad (7.8)$$

mit der zweiten Pauli-Matrix  $\sigma^2$  [29].

Eine weitere Eigenschaft der  $SU(2)$ -Eichgruppe ist die Tatsache, dass ein Element der Gruppe immer proportional zu einer Summe aus anderen Elementen der Gruppe ist:



$$V = \sum_i U_i = \sqrt{\det V} U' \quad (7.9)$$

Die Integration über alle Feldkonfigurationen  $U$  eines Gitters  $\Lambda$  kann darüber hinaus geschrieben werden als

$$\int \mathcal{D}U = \prod_{x \in \Lambda} \prod_{\mu} \int dU_{\mu}(x) \quad (7.10)$$

und die definierenden Eigenschaften des Haar-Maßes sind die Invarianz unter  $SU(2)$ -Transformationen

$$\int O(U) dU_{\mu}(x) = \int O(UV) dU_{\mu}(x) = \int O(VU) dU_{\mu}(x) \quad (7.11)$$

für alle  $V \in SU(2)$  und die Normierung

$$\int dU_{\mu}(x) = 1 \quad (7.12)$$



## Literaturverzeichnis

- [1] Einstein, A.: *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*. Ann. Phys. **35** 898, 1911
- [2] Schwinger, J.: *On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron*. Phys. Rev. **73**(4) 416, 1948
- [3] Bjorken, J.D. und Paschos, E.A.: *Inelastic Electron-Proton and  $\gamma$ -Proton Scattering and the Structure of the Nucleon*. Phys. Rev. **185** 1975, 1969
- [4] Gell-Mann, M.: *A Schematic Model of Baryons and Mesons*. Phys. Lett. **8** 214, 1964
- [5] Internetauftritt des Nobelpreis-Komitees: *The Nobel Prize in Physics 1969*  
[http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1969/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1969/)  
 Stand: 21.09.2014
- [6] Pauli, W.: *The Connection Between Spin and Statistics*. Phys. Rev. **58** 716, 1940
- [7] Levkova, L. und DeTar, C.: *Quark-Gluon Plasma in an External Magnetic Field*. Phys. Rev. Lett. **112** 012002, 2014
- [8] Gross, D.J. und Wilczek, F.: *Asymptotically free gauge theories*. Phys. Rev. D **8** 3633, 1973
- [9] Politzer, H. D.: *Asymptotic freedom: An Approach to strong interactions*. Phys. Rep. **14** 129, 1974
- [10] Internetauftritt des Nobelpreis-Komitees: *The Nobel Prize in Physics 2004*  
[http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/2004/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2004/)  
 Stand: 21.09.2014
- [11] Wilson, K. G.: *Confinement of quarks*. Phys. Rev. D **10** 2445, 1974



- [12] Fredenhagen, K. und Marcu, M.: *Confinement criterion for QCD with dynamical quarks*. Phys. Rev. Lett. **56**(3) 223, 1986
- [13] Glashow, S.: *Partial Symmetries of Weak Interactions*. Nucl. Phys. **22** 579, 1961
- [14] Salam, A.: *Weak and Electromagnetic Interactions*. Conf. Proc. **C680519** 367, 1968
- [15] Weinberg, S.: *A Model of Leptons*. Phys. Rev. Lett. **19** 1264, 1967
- [16] Internetauftritt des Nobelpreis-Komitees: *The Nobel Prize in Physics 1979*  
[http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1979/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1979/)  
 Stand: 21.09.2014
- [17] Higgs, P.W.: *Broken symmetries and the masses of gauge bosons*. Phys. Rev. Lett. **13** 508, 1964
- [18] Englert, F. und Brout, R.: *Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons*. Phys. Rev. Lett. **13** 321, 1964
- [19] Internetauftritt des europäischen Kernforschungsinstituts CERN: *CERN experiments observe particle consistent with long-sought Higgs boson*.  
<http://press-archived.web.cern.ch/press-archived/PressReleases/Releases2012/PR17.12E.html>  
 Stand: 21.09.2014
- [20] Internetauftritt des Nobelpreis-Komitees: *The Nobel Prize in Physics 2013*  
[http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/2013/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2013/)  
 Stand: 21.09.2014
- [21] Montvay, I. und Münster, G.: *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1994
- [22] Teuber, A.: *Numerische Untersuchung eines Confinement-Kriteriums für Theorien mit dynamischen Materiefeldern*, Diplomarbeit, Westfälische-Wilhelms-Universität Münster, 2011
- [23] Damgaard, P.H. und Heller, U.M.: *The fundamental SU(2) Higgs model at finite temperature*. Nucl. Phys. B **294** 253, 1987
- [24] Peskin, M.E. und Schroeder, D.V.: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995



- [25] Internetauftritt der BBC: *Ultra-rare decay confirmed in LHC*  
<http://www.bbc.com/news/science-environment-23431797>  
 unter Berufung auf die American Association for the Advancement of Science (AAAS)  
 Stand: 21.09.2014
- [26] Aitchison, I.J.R. und Hey, A.J.G.: *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction*. CRC Press, 2012
- [27] Rebhan, E.: *Theoretische Physik: Relativistische Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie und Elementarteilchentheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, Berlin Heidelberg, 2010
- [28] Noether, E.: *Invariante Variationsprobleme*. Gött. Nachr. **1918** 235, 1918
- [29] Knechtli, F.: *The Static Potential in the  $SU(2)$  Higgs Model*. Doktorarbeit, Humboldt-Universität Berlin, 1999
- [30] Cheng, T.-P. und Li, L.-F.: *Gauge Theory of elementary particle physics*. Oxford University Press, 1988
- [31] Goldstone, J., Salam, A. und Weinberg, S.: *Broken symmetries*. Phys. Rev. **127** 965, 1962
- [32] Gattringer, C. und Lang, C.: *Quantum Chromodynamics on the Lattice - an Introductory Presentation*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 2010
- [33] Particle Data Group: *Constants, Units, Atomic and Nuclear Properties*. Phys. Lett. B **667** 103, 2008
- [34] Evertz, H.G., Jersak, J. und Kanaya, K.: *Finite temperature  $SU(2)$  Higgs model on a lattice*. Nucl. Phys. B **285** 229, 1987
- [35] Tomboulis, E.T. und Yaffe, L.G.: *Finite temperature  $SU(2)$  lattice gauge theory*. Commun. Math. Phys. **100** 313, 1985
- [36] Borgs, C. und Seiler, E.: *Lattice Yang-Mills theory of non-zero temperature and the confinement problem*. Commun. Math. Phys. **91** 329, 1983
- [37] Kirzhnits, D.A. und Linde, A.D.: *Symmetry Behaviour in Gauge Theories*. Ann. Phys. **101** 195, 1976



- [38] Internetauftritt des John von Neumann-Instituts für Computing (NIC): *Aufbrechen des Strings in der QCD*  
<http://webarchiv.fz-juelich.de/nic/Publikationen/Broschuere/elementarteilchenphysik-d.html#quark-confinement>  
 Stand: 21.09.2014
- [39] Evertz, K. et al. : *Monte Carlo analysis of gauge invariant two-point functions in an  $SU(2)$  Higgs model*. Phys. Lett. B **175** 335, 1986
- [40] Seiler, E.: *Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*. Springer Lecture Notes in Physics **159**, 1982
- [41] Press, W.H.: *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007
- [42] Azcoiti, V., und Tarancon, A.: *Monte Carlo study of confinement in the  $U(1)$  gauge Higgs model with Higgs charge two*. Phys. Lett. B **176** 153, 1986
- [43] Bock, W. et al.: *Screening of the confinement potential in the  $SU(2)$  lattice gauge theory with scalar matter*. Z. Phys. C. **45**, 597, 1990
- [44] Kastrup, H.A.: *Wilson Loops and gauge invariant 2-point functions in lattice higgs models*. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **4** 390, 1988
- [45] Knechtli, F.: *Static potential in the  $SU(2)$  Higgs model*. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **73** 584, 1999







# Danksagung

Ich möchte mich an erster Stelle bei meinen Betreuern Herrn Prof. Dr. Münster und Herrn Dr. Heitger bedanken für eine kompetente und stets äußerst motivierte Betreuung.

Zudem möchte ich mich bei den Angestellten der WWU und des ZIV bedanken, für ihre aufopferungsvolle Arbeit und stets freundliche Beratung.

Darüber hinaus danke ich Sebastian, Michi, Daniel, Martin, Massl und auch sonst noch allen, die das Studium zu einem in retrospektive gesehen fröhlichen und recht kurzweiligen Abschnitt meines Lebens gemacht haben.

Ein spezieller Dank gebührt Anja Teuber für eine große Menge Geduld und Ausdauer bei der Beantwortung einer Unsumme an dummen Fragen.

Mein größter Dank geht jedoch an Johnny und Engel für das wohl witzigste, kürzeste und beste Studienjahr meiner Universitätslaufbahn. Danke für eine Menge interessanter und amüsanter Gespräche über Physik, Kaffee, das Leben an sich und Lightsheets. Zum Teufel mit Flanders!







## **Erklärung zur Masterarbeit**

Hiermit versichere ich, die vorliegende Masterarbeit selbstständig angefertigt, Zitate kenntlich gemacht und außer den angegebenen keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, den 10. Oktober 2014