

## Diplomarbeit

---

# Numerische Anwendungen des Pfadintegralformalismus in hydrodynamischer Turbulenz

---

vorgelegt von  
Peter Dominik Düben

Münster, 7. Januar 2009

Betreuer: Prof. Dr. Gernot Münster



Diese korrigierte Version unterscheidet sich nur geringfügig von der am 7. Januar 2009 im Prüfungssekretariat eingereichten Arbeit. Die Verbesserungen sind hauptsächlich orthographischer und stilistischer Natur.

Münster, den 2. März 2009



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Turbulenz . . . . .	3
2.1.1	Grundlagen der Hydrodynamik . . . . .	3
2.1.2	Kolmogorov-1941-Theorie . . . . .	5
2.2	Theorie der Renormierungsgruppengleichungen (RGG) . . . . .	7
2.2.1	Bildung von Blockspins nach Kadanoff . . . . .	7
2.2.2	Exakte Renormierungsgruppe (RG) . . . . .	11
	Transformation der Felder . . . . .	13
	Reskalierung . . . . .	14
	Zusammengesetzter Renormierungsgruppen-Schritt . . . . .	14
	Approximationen der Wirkung . . . . .	17
	Renormierungsgruppenfluss und Fixpunkte . . . . .	17
	Skalierung der Fixpunkte . . . . .	19
2.2.3	Perturbative Renormierungsgruppe . . . . .	21
2.3	Theorie zu den Monte-Carlo-Simulationen der Burgers-Gleichung . . . . .	23
2.3.1	Burgers-Gleichung . . . . .	23
2.3.2	Funktionalintegralformalismus angewendet auf die Burgers-Gleichung . . . . .	26
2.3.3	Monte-Carlo-Simulationen . . . . .	27
2.3.4	Heatbath-Monte-Carlo-Algorithmus . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Renormierungsgruppengleichung nach Wegner und Houghton in <math>Z(2)</math>-Symmetrie</b>	<b>31</b>
3.1	Aufstellung der Renormierungsgruppengleichung . . . . .	31
3.1.1	Loopterm . . . . .	32
3.1.2	Linkterm . . . . .	35
3.1.3	Reskalierungsterm . . . . .	37
3.1.4	Vollständige Renormierungsgruppengleichung . . . . .	40
3.1.5	Numerische Umsetzung der Renormierungsgruppengleichung . . . . .	41
3.1.6	Gleichung nach Wilson und Polchinski . . . . .	42
3.2	Ergebnisse der Renormierungsgruppengleichung . . . . .	43
3.2.1	Renormierungsgruppenfluss . . . . .	43
3.2.2	$\beta$ -Funktion und Wilson-Fisher-Fixpunkt . . . . .	44
3.2.3	Kritische Exponenten der $\phi^4$ -Theorie . . . . .	47
3.2.4	Untersuchungen der $\phi^4$ -Theorie in höherer Ordnung . . . . .	53

<b>4</b>	<b>Renormierungsgruppengleichung nach Wegner und Houghton in <math>O(3)</math>-Symmetrie</b>	<b>57</b>
4.1	Aufstellung der Renormierungsgruppengleichung . . . . .	57
4.1.1	Loopterm . . . . .	58
4.1.2	Linkterm . . . . .	60
4.1.3	Numerische Umsetzung der Renormierungsgruppengleichung . . . . .	62
4.2	Ergebnisse der Renormierungsgruppengleichung . . . . .	63
4.2.1	Renormierungsgruppenfluss . . . . .	63
4.2.2	$\beta$ -Funktion und Wilson-Fisher-Fixpunkt . . . . .	63
4.2.3	Kritische Exponenten der $\phi^4$ -Theorie . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Monte-Carlo-Simulationen der Burgers-Gleichung</b>	<b>71</b>
5.1	Einbau der Wirkung und Stabilitätskriterien . . . . .	71
5.1.1	Monte-Carlo-Gitter . . . . .	71
5.1.2	Diskretisierung der Wirkung . . . . .	74
5.2	Simulationen und Ergebnisse . . . . .	75
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>83</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>84</b>

# 1 Einleitung

Gase und Flüssigkeiten, die mit hohen Geschwindigkeiten fließen, zeigen starke Verwirbelungen in scheinbar allen Größenordnungen. Diese chaotischen und nicht vorhersagbaren Strömungen bezeichnet man als Turbulenz. Man weiß bis Heute nur relativ wenig über die Eigenschaften turbulenter Systeme.

In dieser Diplomarbeit, die sich im Wesentlichen in zwei große Bereiche aufteilen lässt, wird die hydrodynamische Turbulenz mit Hilfe des Pfadintegralformalismus untersucht.

Im ersten Teil wird die Methode der exakten Renormierungsgruppe (RG) verwendet. Das Ziel ist es, eine Renormierungsgruppengleichung (RGG), die von Dirk Homeier in seiner Doktorarbeit aufgestellt worden ist [Hom06], numerisch auszuwerten. Die Besonderheit dieser RGG ist es, dass in ihr die Physik der Navier-Stokes-Gleichung mit Hilfe des Martin-Siggia-Rose-Formalismus eingebaut worden ist. Die Nichtlokalitäten der Gleichung konnten mit Hilfe der Faddeev-Popov-Methode behoben werden. Es soll vor allem der RG-Fluss der hergeleiteten RGG untersucht werden. Hat der Fluss zum Beispiel einen nichttrivialen Fixpunkt, so ist es vielleicht möglich, dass Skalenverhalten turbulenter Systeme zu untersuchen.

Der Versuch, die Gleichung direkt in all ihren Eigenschaften und mit Approximationen wie der Ableitungsentwicklung zu simulieren, würde vermutlich nicht zum Erfolg führen, da bei einer solchen Vorgehensweise aufgrund der vielen Fehlerquellen unvorhersagbare Probleme auftauchen würden. Selbst wenn man über solche Untersuchungen zu Ergebnissen kommen würde, wären diese nicht durch bereits bekannte Ergebnisse auf ihre Richtigkeit überprüfbar. Die gewählte Vorgehensweise ist es daher, die Methode der exakten RGG auf Systeme anzuwenden, deren Eigenschaften mit Ergebnissen der Störungstheorie verglichen werden können. Mit der Erfahrung der überprüften Ergebnissen kann dann eine weitere Verfeinerung des Programms durchgeführt werden. In diesem Sinne wird in dieser Arbeit eine RGG für die skalare  $\phi^4$ -Theorie in  $O(3)$ - und  $Z(2)$ -Symmetrie hergeleitet und ausgewertet.

Im zweiten Teil geht es um meine Arbeiten in einem Projekt, das in einer Kooperation zwischen der Universität Münster und dem Forschungszentrum des Deutschen Elektronen-Synchrotron (DESY) in Zeuthen durchgeführt wird. Hier wird mit Hilfe des Martin-Siggia-Rose-Formalismus eine Wirkung aufgestellt, die die angetriebene Burgers-Gleichung simulieren soll. Die Simulationen werden unter Benutzung von Monte-Carlo-Algorithmen durchgeführt. Zu dem Zeitpunkt, an dem ich der Kooperation beigetreten bin, existierte bereits ein Programm, mit dem Heathbath-Monte-Carlo-Simulationen der hergeleiteten Wirkung durchgeführt werden konnten [HJMU08]. Die Stabilität der Simulationen war aber noch nicht gewährleistet und ausreichend verstanden.

Das Ziel des Projektes ist es, stabile Simulationen der Wirkung zu erzeugen und aus den berechneten Konfigurationen durch Mittelwertbildung Größen wie die Strukturfunktionen zu berechnen. So könnten es die Monte-Carlo-Simulationen ermöglichen, einen Einblick in die

Bildung von turbulenten Strukturen der angetriebenen Burgers-Gleichung zu erhalten, und zum Beispiel das Skalenverhalten der Strukturfunktionen zu untersuchen. Im Rahmen der Arbeiten an diesem Thema kam es innerhalb der Kooperation bereits zu einer Veröffentlichung [DHJ<sup>+</sup>08].

Die vorliegende Arbeit ist in vier Kapitel unterteilt. Da sich die Theorie der beiden oben erläuterten Teile der Arbeit teilweise überschneidet, wird die Theorie im ersten Kapitel vorgestellt. So ist zum Beispiel die Einführung in die Turbulenz und die Einführung in den Funktionalintegralformalismus für beide Teile der Arbeit interessant. Zunächst wird ein kurzer Einblick in die Turbulenz gegeben, dann wird die Theorie der RGG erläutert und im letzten Abschnitt wird die Theorie der Burgers-Gleichung und der Monte-Carlo-Simulationen behandelt. Hier wird auch auf die Theorie des Funktionalintegralformalismus eingegangen.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit werden die Untersuchungen der RGG nach Wegner und Houghton in  $Z(2)$ -Symmetrie vorgestellt. Im ersten Abschnitt wird zunächst die Herangehensweise erläutert, im zweiten Abschnitt werden dann die Ergebnisse präsentiert.

Im dritten Kapitel werden die Ergebnisse der Arbeiten mit der RGG nach Wegner und Houghton in  $O(3)$ -Symmetrie vorgestellt. Wie im vorherigen Kapitel wird zunächst die Herangehensweise dargestellt und dann werden die Ergebnisse präsentiert.

Im vierten Kapitel werden die entsprechenden Arbeiten zu den Monte-Carlo-Simulationen zur Untersuchung der Burgers-Gleichung vorgestellt. Im ersten Abschnitt wird erläutert, wie das Monte-Carlo-Gitter aufgebaut wurde, wie die Wirkung auf dem Gitter diskretisiert worden ist und welche Bedingungen sich dadurch für die Simulation ergeben. Im zweiten Abschnitt werden dann die Ergebnisse der Simulationen vorgestellt und interpretiert.



## 2 Theorie

In diesem Kapitel wird die Theorie erläutert, die für das Verständnis der Inhalte der späteren Kapitel notwendig ist. So wird die Theorie der Turbulenz, die Theorie der exakten RGG, sowie die Theorie der Monte-Carlo-Simulationen und des Pfadintegralformalismus thematisiert werden. Die Erklärung der jeweiligen Themen wird relativ kurz gehalten, ausführlichere Einführungen können aber in der Literatur gefunden werden, auf die in jedem Abschnitt verwiesen wird.

### 2.1 Turbulenz

Als Turbulenz bezeichnet man das Verhalten von Flüssigkeiten oder Gasen, wenn diese bei hohen Geschwindigkeiten scheinbar ungeordnet verwirbeln. Obwohl jeder Mensch ständig mit turbulenten Fluiden zu tun hat (sei es bei der täglichen Autofahrt oder beim Umrühren des Kaffeebechers), ist eine Beschreibung der turbulenten Ströme bis heute noch immer nicht in zufriedenstellendem Maße gelungen. Diese Tatsache scheint insbesondere deshalb unbegreiflich, weil die hydrodynamische Turbulenz schon seit Jahrhunderten von Wissenschaftlern erforscht worden ist, sie mit den Methoden der klassischen Physik untersucht werden kann und kein Wissen über unbekannte Quanteneffekte oder Elementarteilchen notwendig ist, um die elementaren Gleichungen, die ebenfalls bekannt sind, zu lösen. Schon Leonardo da Vinci hat sich mit dem Zerfall turbulenter Wirbel beschäftigt.

Im folgenden Abschnitt wird eine kurze Einführung in die wissenschaftliche Betrachtung der Turbulenz gegeben. Auch wenn eine umfassende Beschreibung im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich ist, soll an dieser Stelle das nötige Handwerkszeug vorgestellt werden, das in den späteren Kapiteln benötigt wird. Eine weitaus umfassendere Theorie der Turbulenz findet der Leser in den Büchern von U. Frisch [Fri95] und S. B. Pope [Pop00].

#### 2.1.1 Grundlagen der Hydrodynamik

Man kann Strömungen von Fluiden in zwei große Bereiche einteilen. Im Bereich hoher Viskosität und niedriger Flussgeschwindigkeiten verhält sich eine Strömung laminar. Das Fluid strömt dabei ohne Verwirbelungen in Schichten, die sich nicht miteinander mischen. Arbeitet man mit niedrigen Viskositäten und hohen Geschwindigkeiten, befindet man sich im turbulenten Bereich, und es kommt zu starken, chaotischen Verwirbelungen.

Während laminare Strömungen im Allgemeinen gut vorhersagbar sind, sind turbulente Strömungen heute noch im wahrsten Sinne des Wortes ‘unberechenbar’. Man kann zwar vorhersagen, ob ein Fluss turbulente Eigenschaften haben wird, aber nicht, wie sich diese im

Spezialfall äußern werden.

Um ein Maß für den Grad der Turbulenz zu finden, wurde die so genannte Reynolds-Zahl eingeführt. Diese ist dimensionslos und wird definiert als:

$$\text{Re} = \frac{v \cdot l}{\nu}. \quad (2.1)$$

Hierbei steht  $v$  für eine charakteristische Geschwindigkeit und  $l$  für eine charakteristische Längenskala des Systems. Bei  $\nu$  handelt es sich um die kinematische Viskosität. Steigert man die Reynolds-Zahl eines laminaren Systems immer weiter, so geht dieses irgendwann abrupt in ein turbulentes System über.

Verallgemeinert man die newtonschen Gleichungen für das Kontinuum, so kann man die Navier-Stokes-Gleichung herleiten:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.2)$$

Diese und die folgenden Gleichungen werden in der Standard-Summenkonvention angegeben. Die Navier-Stokes-Gleichung gilt als die Grundgleichung der Strömungsdynamik und beschreibt laminare Strömungen sehr gut; sie sollte auch turbulente Strömungen beschreiben können. Die Navier-Stokes-Gleichung ist ein Satz von drei Gleichungen. Diese reichen nicht aus, um die Koordinaten der Geschwindigkeit und des Drucks eindeutig festzulegen. Man benötigt eine zusätzliche Bedingung, die man gewöhnlich in der Inkompressibilität findet. Wenn man in der Kontinuitätsgleichung die Änderung der Dichte gleich Null setzt, erhält man für inkompressible Systeme die folgende Bedingung:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.3)$$

Bei näherer Betrachtung der Navier-Stokes-Gleichung fällt auf, dass bei hohen Geschwindigkeiten vor allem der nichtlineare Konvektionsterm  $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ , bei hohen Viskositäten vor allem der Diffusionsterm  $\nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$  ins Gewicht fallen wird. Der erste Term wird somit eher bei turbulenten, der zweite Term wird eher bei laminaren Strömungen in den Vordergrund treten. Verdeutlicht wird dies durch die Annahme, dass die Reynoldszahl proportional zu dem Konvektionsterm dividiert durch den Diffusionsterm ist.

Man kann die Navier-Stokes-Gleichung auch als durch eine Kraft  $f_i$  angetrieben betrachten. Die Kraft wird zumeist als zufällige Kraft eingebaut, mit der auf großen Skalen Energie in das System gebracht wird.

Für die Navier-Stokes-Gleichung gilt dann:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = f_i. \quad (2.4)$$

Leitet man diese Gleichung noch einmal unter Berücksichtigung von Gleichung 2.3 nach  $x_i$  ab, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.5)$$

Nach einer Fouriertransformation könnte man die zweifache Ableitung in dieser Gleichung einfach als Multiplikation mit dem Faktor  $k^2$  auffassen. Betrachtet man dann die Rücktransformation in den Ortsraum, so erhält man nichtlokale Terme.

Man kann also durch die Eliminierung des Druckterms mit Hilfe der Inkompressibilitätsbedingung den nichtlokalen Charakter der Navier-Stokes-Gleichung deutlich machen. Diese ist eine nichtlineare, nichtlokale Differenzialgleichung zweiter Ordnung und eine nichttriviale Lösung der Gleichung ist bis heute noch nicht gefunden worden und scheint auch in naher Zukunft nicht greifbar. Die Nichtlokalitäten führen dazu, dass jedes Teilchen mit jedem Teilchen in Bezug gesetzt werden muss. Die direkte Simulation eines turbulenten Systems mit vielen mikroskopischen Teilchen wird nur mit einem riesigen numerischen Aufwand zu verwirklichen sein. An die Simulation eines makroskopischen Systems ist daher auch mit den schnellsten existierenden Supercomputern nicht zu denken. Es bleibt aber die Hoffnung, die Turbulenz statistisch beschreiben zu können. Die Vorgehensweise, über die statistische Verteilung mikroskopischer Zustände durch Mittelung makroskopische Größen berechnen zu können, funktioniert in der Thermodynamik ja bekannterweise ausgezeichnet. Ein ähnliches Vorgehen könnte auch bei der Turbulenz zu Ergebnissen führen. Man nimmt dabei an, dass bei stark turbulenten Strömungen alle möglichen Symmetrien, die normalerweise durch die Ausbildung der Turbulenz gebrochen werden, im statistischen Sinne wieder hergestellt werden. Man benötigt zunächst geeignete Messgrößen für das turbulente System, die mit der Temperatur oder dem Druck in der Thermodynamik vergleichbar sind. Diese makroskopisch messbaren Größen sollten mit der mikroskopischen Theorie über Statistik in Verbindung gebracht werden können.

### 2.1.2 Kolmogorov-1941-Theorie

Kolmogorov präsentierte 1941 die erste Theorie der Turbulenz, die heute unter dem Namen K41-Theorie bekannt ist [Kol41]. Um turbulente Systeme über messbare Größen beschreiben zu können, führte er die sogenannten Strukturfunktionen ein:

$$S_p(x) \equiv \langle [(\vec{v}(\vec{r} + x\vec{e}) - \vec{v}(\vec{r})) \cdot \vec{e}]^p \rangle. \quad (2.6)$$

Hierbei wird über alle Orte gemittelt.  $\vec{e}$  ist ein beliebiger Einheitsvektor und  $x$  ist ein Element der reellen Zahlen. Die Strukturfunktionen sind somit eine Art Korrelationsfunktion der Geschwindigkeiten. Sie mitteln über die Differenz zwischen den Geschwindigkeiten an zwei um einen festen Vektor verschobenen Orten. Damit eine solche Größe Sinn macht, müssen die Mittelungen über ausreichend viele Messpunkte verlaufen und man muss von Isotropie und Homogenität ausgehen können.

Wenn einem turbulenten System auf einer großen Längenskala Energie hinzugefügt wird, so ist bekannt, dass die großen Wirbel, die entstehen, in kleinere Wirbel zerfallen. Diese zerfallen wiederum in noch kleinere Wirbel. In einer solchen Kaskade wird Energie von Impulsen

mit großen Wellenlängen zu Impulsen mit kleineren Wellenlängen geleitet. Im Bereich mikroskopischer Wellenlängen wird schließlich die Energie in Wärme umgesetzt und verlässt das System. Kolmogorov unterscheidet in diesem Sinne in seiner Theorie drei verschiedene Längenskalen:

1. In einer makroskopischen Längenskala  $L$  wird Energie in das System gepumpt. Man kann sich das vorstellen, als würde man das System “umrühren” und dadurch große Wirbel erzeugen.
2. Die großen Wirbel, über die die Energie ins System gebracht wird, zerfallen in kleinere Wirbel, die weiter zerfallen. Kolmogorov geht nun davon aus, dass der Zerfall der Wirbel in einem großen Längenbereich, dem Bereich der intermediären Längenskalen, selbstähnlich ist, dass die Wirbel also auf jeder Skala auf dieselbe Art und Weise zerfallen. Dementsprechend sollte sich die Physik in jeder Längenskala gleich verhalten.
3. Im Bereich mikroskopischer Längenskalen gibt es pro Einheitsmasse eine nicht verschwindende Energiedissipation  $\epsilon$ . Hier wird die kinetische Energie der Wirbel in Wärmeenergie umgewandelt. Kolmogorov definiert eine mikroskopische Länge als:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.7)$$

$\eta$  kann als mikroskopisch angenommen werden, da sehr hohe Reynoldszahlen und somit kleine Viskositäten betrachtet werden sollen.

Kolmogorov nimmt an, dass der intermediäre Bereich weder von der makroskopischen noch von der mikroskopischen Längenskala abhängig sein kann. Die Strukturfunktion sollte daher weder von  $L$  noch von  $\eta$ , sondern nur noch von der Länge  $x$  und der Energiedissipation  $\epsilon$  abhängen. Auf der Suche nach selbstähnlichen Funktionen stellt man fest, dass nur Potenzgesetze exakt selbstähnlich sind. Betrachtet man die Differenz  $\delta v$  der Geschwindigkeiten an zwei Orten, deren Abstand durch den Vektor  $\lambda \vec{r}_0$  gegeben ist, so ergibt sich:

$$\delta \vec{v}(\vec{r}, \lambda \vec{r}_0) = \lambda^h \delta \vec{v}(\vec{r}, \vec{r}_0). \quad (2.8)$$

Hierbei handelt es sich bei  $h \in \mathbb{R}$  um den Skalierungsexponenten und es gilt:  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Nach Dimensionsanalysen schlug Kolmogorov für die Strukturfunktion das folgende Skalenverhalten, im Grenzfall unendlicher Reynoldszahlen, vor:

$$S_p(x) = C_p \epsilon^{\frac{p}{3}} x^{\frac{p}{3}}. \quad (2.9)$$

Bei  $C_p$  handelt es sich um eine dimensionslose Konstante, die für jede Ordnung  $p$  der Strukturfunktion unterschiedlich sein kann.

Aus Experimenten konnte bei hoher Reynoldszahl auf einem großen Skalenbereich das Skalierungsverhalten der Strukturfunktion zweiter Ordnung bestimmt werden. Es gilt:

$$S_2(x) \propto x^{\frac{2}{3}}. \quad (2.10)$$

Daraus kann für die Zerfalskaskade der kinetischen Energie die folgende Relation ermittelt werden:

$$E(k) \propto \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}. \quad (2.11)$$

Bei  $k$  handelt es sich um die Wellenzahl nach Fouriertransformation in den Impulsraum. Das Skalenverhalten der Strukturfunktion ist demnach mit Gleichung 2.9 für die zweite Ordnung richtig vorhergesagt. Leider konnten die Exponenten für höhere Ordnungen nicht bestätigt werden. Die K41-Theorie sagt anscheinend noch nicht das richtige Skalenverhalten für turbulente Strömungen voraus und es ist bis heute noch nicht bekannt, wie die Strukturfunktion wirklich skaliert.

Landau war der Erste, der anmerkte, dass die Konstanten  $C_p$  für  $p \neq 3$  nicht konstant sein können, da sie von der detaillierten Geometrie und der Herkunft der turbulenten Strömung abhängen. Dieser Einwand war zunächst nur als Fußnote in seinem Lehrbuch der theoretischen Physik enthalten [LL52].

Als Folge dieser Einsicht haben sich neue Modelle entwickelt. So wurden zum Beispiel im bifraktalen Modell die intermediären Längenskalen in zwei jeweils selbstähnliche Bereiche mit unterschiedlichen Skalierungsexponenten aufgespalten. Wir werden im Abschnitt 2.3.1 erneut auf dieses Modell zu sprechen kommen.

## 2.2 Theorie der Renormierungsgruppengleichungen (RGG)

Das Verfahren der exakten RGG stammt aus der statistischen Physik und hat zum Ziel, die Skalenabhängigkeit der Kopplungen eines Systems zu untersuchen. Hierbei wird das alte System auf ein neues System abgebildet, wobei durch Mittelwertbildung im mikroskopischen Bereich die Abhängigkeiten der kleinsten Skalen des Systems wegfallen. Das neue System hängt dann nicht mehr von den mikroskopischen Längenskalen ab, auf denen die Mittelung durchgeführt wurde. Im folgenden Abschnitt wird die Theorie der RG vorgestellt.

Zunächst wird das Blockspinverfahren nach Kadanoff erklärt, da dieses als der Vorgänger der exakten RG angesehen werden kann, und an ihm die Prinzipien der RG sehr anschaulich vorgestellt werden können. Dann wird ein Überblick über die exakten RGGen gegeben und ihre Eigenschaften erläutert. Zuletzt wird auch noch ein sehr kurzer Einblick in die Theorie der perturbativen RG gegeben.

### 2.2.1 Bildung von Blockspins nach Kadanoff

Im Rahmen der K41-Theorie gilt für turbulente Systeme, dass die Anzahl  $N$  an Freiheitsgraden, die nötig ist, um auch die kleinsten Wellenlängen eines Systems noch gut auflösen zu können, mit  $N \propto Re^{\frac{9}{4}}$  skaliert. Will man ein System mit hoher Reynolds-Zahl beschreiben,

so wird aufgrund der enormen Anzahl an Freiheitsgraden eine direkte Simulation nahezu unmöglich.

In der statistischen Physik betrachtet man ebenfalls Systeme, die aufgrund der riesigen Anzahl an Freiheitsgraden (wenigstens  $10^{23}$  für makroskopische Systeme) eine exakte Betrachtung über die Gesetze der klassischen Mechanik unmöglich machen. Um für solche Systeme dennoch makroskopische Größen berechnen zu können, scheint daher eine Reduktion der Anzahl an Freiheitsgraden unumgänglich.

Man hilft sich in der statistischen Physik durch die Bildung von Zustandssummen, in denen man das makroskopische System in mikroskopisch identische Systeme aufteilt. Man schaut sich nicht mehr jedes mikroskopische System an, sondern betrachtet in einer Summe, wie oft ein möglicher mikroskopischer Zustand auftritt. Arbeitet man zum Beispiel mit klassischen Teilchen, die kontinuierliche Zustände einnehmen können, bei einer vorgegebenen Temperatur, so verwendet man die kanonische Zustandssumme:

$$Z(T) = \int \frac{1}{h^{3N} N!} e^{-\frac{H(q,p)}{k_B T}} d^{3N}q \, d^{3N}p. \quad (2.12)$$

In der Formel ist  $h$  das plancksche Wirkungsquantum und  $H(q, p)$  die Hamiltonfunktion des Systems. Bei  $q$  handelt es sich um die Orts- und bei  $p$  um die Impulskoordinaten.  $k_B$  ist die Boltzmann-Konstante und  $N$  ist die Anzahl der Teilchen. Aufgrund der kontinuierlichen Zustände wird aus der Summe ein Integral.

Aus einer Zustandssumme kann man dann ein thermodynamisches Potenzial berechnen, aus dem man die makroskopischen Zustandsgrößen bestimmen kann. Man benötigt also nicht mehr die genauen Informationen des Zustands jedes mikroskopischen Systems an jedem Ort des makroskopischen Systems, sondern die Verteilung der mikroskopischen Systeme auf die möglichen Zustände.

Solange die thermodynamischen Potenziale sich nicht ändern, führen Veränderungen an der Zustandssumme nicht zur Verschiebung der makroskopischen Größen. Kadanoff führte in diesem Sinne 1966 das neue Konzept des Blockspins ein [Kad66]. Die Vorgehensweise ist die Grundlage der RGGen und wird daher an dieser Stelle genauer erläutert.

Kadanoff bildete ein statistisches System in der Nähe von oder an einem kritischen Punkt, unter Reduktion der auftretenden Freiheitsgrade, auf sich selbst ab. Als Beispiel betrachte man ein  $d$ -dimensionales Gitter, bei dem jeder Gitterpunkt mit einem Ising-Spin gekennzeichnet ist. Ein Ising-Spin kann nur zwei mögliche Werte annehmen,  $+1$  oder  $-1$ . Für die Hamiltonfunktion eines solchen Systems gilt:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \lambda_1 s_i s_j + \sum_j h s_j. \quad (2.13)$$

Die erste Summe läuft über die nächsten Nachbarn jedes Gitterpunktes und stellt die Wechselwirkungen der einzelnen Spins untereinander dar, wobei  $\lambda_1$  die Stärke der Kopplungen angibt. Die zweite Summe geht über alle Gitterpunkte und beschreibt die Wechselwirkungen der Spins im System mit einem äußeren magnetischen Feld  $h$ , das hier als konstant angenommen wird.

Egal welche Veränderungen an der Zustandssumme vorgenommen werden, sie müssen auf eine Art und Weise geschehen, in der sich die makroskopischen Größen nicht verändern. Somit muss zum einen das thermodynamische Potenzial und zum anderen die Kopplung an das äußere Feld (diese ist eine messbare Größe) konstant bleiben. Die von Kadanoff vorgestellte Reduktion der Freiheitsgrade findet in drei Schritten statt:

1. Das Gitter wird in Blöcke  $L \times L \times \dots$  mit der Kantenlänge  $L = b \cdot a$  eingeteilt.  $a$  ist hierbei die Gitterkonstante, die über das gesamte Gitter konstant sein soll,  $b$  ist eine natürliche Zahl. Jeder Block enthält demnach  $b^d$  Spins.
2. Abhängig von den enthaltenen Spins wird jetzt jedem Block ein einzelner Blockspin zugeordnet. Dies kann auf mehrere Arten geschehen. Der Blockspin könnte zum Beispiel so gebildet werden, dass er den Zustand der Mehrzahl der Zustände im Block annimmt:  $S = \text{sign}(\sum_i s_i)$ . Die Blockspins wären wieder Ising-Spins. Eine andere Möglichkeit wäre es zum Beispiel, den Blockspin kontinuierlich zu wählen:  $S = \frac{1}{b^d} \sum_i s_i$ .

Nach diesem Schritt befinden sich in jedem Block nicht mehr  $b^d$  Spins, sondern ein einziger. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems hat sich also um den Faktor  $b^d$  verringert.

3. Im nächsten Schritt wird reskaliert. Zum einen werden die räumlichen Koordinaten verändert:  $\vec{x}' = \frac{\vec{x}}{b}$ , wobei die gestrichelten die Koordinaten des neuen Systems sind. Die Gitterkonstante  $a$  muss dem neuen System natürlich ebenfalls angepasst werden, um die räumliche Ausdehnung des makroskopischen Systems nicht zu verändern:  $a' = a \cdot b$ . Zum anderen müssen die Kopplungskonstanten der Hamiltonfunktion so verändert werden, dass die makroskopischen Größen, die aus der Zustandssumme berechnet werden, gleich bleiben.

Beim Versuch, einen solchen Schritt durchzuführen, stellt man fest, dass das alte System nur dann über das neue System exakt beschreibbar ist, wenn man dem Hamiltonoperator weitere Wechselwirkungen (zum Beispiel mit den nächsten und übernächsten Nachbarn, zwischen zwei, aber auch zwischen mehreren Spins) hinzufügt [Kad66]. Der Grund hierfür liegt in der Nichtlokalität im Auswahlkriterium für den Blockspin. Je öfter man das System auf sich selbst abbildet, desto mehr Terme müssen dem Hamiltonoperator hinzugefügt werden. Der Hamiltonoperator aus Gleichung (2.13) nimmt dann die folgende Form an:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \lambda_1 s_i s_j + \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \lambda_2 s_i s_j + \sum_{\langle\langle\langle i,j,n,m \rangle\rangle\rangle} \lambda_3 s_i s_j s_n s_m + \dots + \sum_j h s_j. \quad (2.14)$$

Bei doppelten Klammern wird über die übernächsten Nachbarn summiert. Die Reduzierung der Freiheitsgrade birgt also mit jedem Schritt das Problem, dass die Wechselwirkungen an sich immer komplizierter werden.

Eine interessante Größe, um ein statistisches System zu charakterisieren, ist die Korrelationsfunktion:

$$G(r) = \langle s_i(R) s_j(R+r) \rangle. \quad (2.15)$$

$R$  ist ein konstanter Ort,  $\langle . \rangle$  steht für eine statistische Mittelung. Bei großen Temperaturen stellt man fest, dass die Korrelationsfunktion dem folgenden Gesetz genügt:

$$G(r) \propto \frac{\exp\left(-\frac{r}{\xi}\right)}{r^\theta}. \quad (2.16)$$

Hierbei ist  $\theta$  ein kritischer Exponent, der von der Dimension abhängt.  $\xi$  ist die Korrelationslänge. Betrachtet man in einem Ising-System Abstände für die gilt:  $r \ll \xi$ , so sind die Spins gewöhnlich in hohem Maße korreliert. Wie allgemein bekannt, gilt in der Nähe des kritischen Punktes das Potenzgesetz:

$$\xi \propto (T - T_c)^{-\nu}, \quad (2.17)$$

hierbei ist  $T_c$  die kritische Temperatur und  $\nu$  ein kritischer Exponent. Man sieht, dass die Korrelationslänge am kritischen Punkt divergiert. Alle Spins haben am kritischen Punkt denselben Wert. Ein System in einem solchen Zustand ist offensichtlich selbstähnlich.

Kadanoff untersuchte die Veränderungen der Temperatur  $t$  und des äußeren Feldes  $h$  während eines Reskalierungs-Schrittes. Wählt man die Temperatur oder das Feld gleich Null, so sollte sich an diesem Zustand während des Schrittes nichts ändern.

Kadanoff folgerte, dass das Verhalten der Temperatur<sup>1</sup> und des Feldes in der Nähe eines kritischen Punktes ebenfalls über Exponenten beschrieben werden muss:

$$t' = b^{-\omega} t \quad \text{und} \quad h' = b^\lambda h. \quad (2.18)$$

Für die Temperatur gilt:  $t = \frac{|T - T_c|}{T_c}$ . Daraufhin konnten zusätzliche Relationen zwischen den kritischen Exponenten (die Scaling Laws) gefunden werden, die für alle exakt lösbaren Modelle mit  $d < 4$  gültig sind.

Es ist leicht verständlich, wie die Bildung von Blockspins funktioniert. Dies führt oft zu der Illusion, man könnte einen Kadanoff-Schritt tatsächlich auf ein physikalisches System anwenden. Man sollte sich aber immer wieder vor Augen führen, dass dies aufgrund der enormen Anzahl an mikroskopischen Freiheitsgraden in einem makroskopischem System unmöglich ist. In der Realität kann man einen Schritt nach diesem Konzept nicht ausführen, und es wäre auch nicht sinnvoll, auf diese Art und Weise vorzugehen. Wäre die Durchführung möglich, so könnte man auch direkt das ganze System berechnen, ohne überhaupt Blockspins bilden zu müssen. Der Rechenaufwand würde sich in derselben Größenordnung befinden. Wir können das Verfahren also nur nutzen, indem wir die Veränderungen, die ein Schritt am System bewirkt, untersuchen, und daraus Informationen über das System an sich ermitteln.

---

<sup>1</sup>Die Veränderung der Temperatur erscheint zunächst nicht begründet, ist aber eine logische Konsequenz, da eine Reskalierung der räumlichen Koordinaten auch immer eine Veränderung der Korrelationslänge zur Folge hat, die wiederum direkt mit der Temperatur verknüpft ist.



Was man betrachtet, sind die nötigen Veränderungen, um die Einflüsse der kleinsten Längenskalen auf das System durch ein neues System beschreiben zu können, in dem diese Längenskalen nicht mehr auftauchen.

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist dies das Prinzip der RG nach Wilson.

### 2.2.2 Exakte Renormierungsgruppe (RG)

Das Ausmaß der Veränderungen eines Kadanoff-Schrittes hängt von der Wahl der Blockgröße ab. Bei großen Blöcken wird sich das System entsprechend stärker verändern als bei kleinen. Da man aber nur an Tendenzen der Veränderung interessiert ist, liegt es nahe, sehr kleine Blöcke zu betrachten. Es ist sogar möglich, infinitesimale Kadanoff-Schritte zu untersuchen und den Schritt vom Gitter zum Kontinuum zu vollziehen. Das ist genau der Fall, der in der Exakten RG umgesetzt wird.

Ein solcher Schritt kann nicht nur im Orts- sondern auch im Impulsraum ausgeführt werden. Der Impulsraum erscheint für RG-Schritte sogar günstiger, da das Ausintegrieren von kleinen Abständen einfach durch die Ausintegration kleiner Wellenlängen, also großer Impulse, durchgeführt werden kann.

In dieser Arbeit wird nur ein Überblick über die Theorie der exakten RG gegeben, eine weitaus ausführlichere Übersicht über das Verfahren und seinen Ursprung erhält man zum Beispiel in einem Artikel von M.E. Fisher [Fis98].

Im Folgenden werden wir die Physik als Feldtheorie im Impulsraum betrachten. Hierbei gehen wir von einem skalarem Feld  $\phi(\vec{x})$  aus und führen eine Fouriertransformation durch:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \int \phi(\vec{p}) \exp\{i\vec{p}\vec{x}\} d^d p. \quad (2.19)$$

Man benötigt nun das erzeugende Funktional:

$$Z[J] = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi \exp\{-S[\phi] + J \cdot \phi\}. \quad (2.20)$$

Dieses ist die mit der Zustandssumme vergleichbare Größe der Feldtheorie, wobei anzumerken ist, dass die Integration beim erzeugenden Funktional als Pfadintegral aufzufassen ist.  $J(\vec{x})$  ist die externe Quelle, die man zumeist nur benötigt, um Mittelwerte der Felder einfach als Funktionalableitung des erzeugenden Funktional darzustellen zu können. Der Quellterm in der obigen Formel ist zu verstehen als:  $J \cdot \phi = \int d^d x J(\vec{x}) \phi(\vec{x})$ . Über:  $Z_0 = \int \mathcal{D}\phi \exp\{-S[\phi]\}$  wird das erzeugende Funktional für den quellenlosen Fall  $Z[0] = 1$  normiert. Die Wirkung  $S$  steht für die Integration über die Hamiltonfunktion:

$$S[\phi] = \sum_{n=2}^{\infty} \int \prod_{j=1}^n (d^d p_j) \lambda_n(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n) \phi(\vec{p}_1) \dots \phi(\vec{p}_n) \delta(\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n). \quad (2.21)$$

Bei den  $\lambda_n$  handelt es sich um die Kopplungen des Systems.

Im Ortsraum werden bei einem Kadanoff-Schritt die kleinen Abstände aus der Zustandssumme ausintegriert, so dass das erzeugende Funktional nach dem Schritt nur noch von Längen, die größer sind als die ausintegrierte Skala, abhängt. Im Impulsraum führt man einen solchen Schritt durch, indem man Impulse mit kleinen Wellenlängen, also großem Impulsvektor  $p$ , ausintegriert. Man kann sich leicht vorstellen, dass man Impulse auf der Planck-Skala ausintegrieren kann, ohne dass sich die Physik auf der Massenskala verändert. Man führt also im mikroskopischen Bereich eine Art Mittelung durch, ohne dass dies im makroskopischen Bereich zu Veränderungen führt.

Hat ein System den größten Impuls  $\Lambda$ , so integriert man die Impulse zwischen  $\Lambda$  und einem etwas kleinerem Impuls  $\Lambda'$  aus. Bei einem RG-Schritt wird, wie oben erwähnt, nur eine infinitesimale Impulsveränderungen vorgenommen:  $\Lambda' = \Lambda - d\Lambda$ .

Nach dem RG-Schritt wird  $\Lambda'$  zur neuen größten Skala, die mit dem nächsten Schritt ausintegriert wird.

Führt man mehrere RG-Transformationen durch, so ist es sinnvoll, die sogenannte RG-Zeit zu definieren. Diese ist ein Maß für die Anzahl und die Schrittweite der durchgeführten Schritte. Sie ist definiert über:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda}. \quad (2.22)$$

Man darf die RG-Zeit nicht mit der physikalischen Zeit verwechseln. Schreitet die RG-Zeit voran, so werden zwar Veränderungen an dem erzeugenden Funktional vorgenommen, das makroskopische System bleibt jedoch unverändert.

Will man die Veränderungen am erzeugenden Funktional betrachten, so ist es zunächst sinnvoll, das Feld  $\phi_p$  aufzuteilen in ein Feld, dessen Impulse größer ( $\phi_{gr}$ ) und ein Feld, dessen Impulse kleiner ( $\phi_{kl}$ ) als eine Impulsskala  $\Lambda'$  ist, bis zu der ausintegriert wird. Man schreibt das erzeugende Funktional folgendermaßen:

$$Z[J] = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi \exp\{F[\phi, \lambda_i, \Lambda]\} = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi_{gr} \mathcal{D}\phi_{kl} \exp\{F[\phi_{gr}, \phi_{kl}, \lambda_i, \Lambda]\}. \quad (2.23)$$

Hier gilt:  $F[\phi, \lambda_i, \Lambda] = -S[\phi] + J \cdot \phi$ , wobei die Kopplungen  $\lambda_i$  der Wirkung als Parameter betrachtet werden.

Bei einem RG-Schritt wird die Integration über  $\phi_{gr}$  durchgeführt. Wir erhalten das erzeugende Funktional :

$$Z[J] = \frac{1}{Z'_0} \int \mathcal{D}\phi_{kl} \exp\{F[\phi_{kl}, \lambda'_i, \Lambda']\}. \quad (2.24)$$

Das erzeugende Funktional hängt nun nicht mehr von den ausintegrierten Wellenlängen ab. Seine Form ist gleich geblieben, nur die Werte der Kopplungen haben sich verändert. Diese Veränderungen der Wirkung sollen untersucht werden. Wie bereits beim Kadanoff-Verfahren klar geworden ist, wird ein Schritt in zwei Stufen durchgeführt. Zuerst wird auf neue Feldvariablen transformiert und dann wird das System in einem weiteren Schritt reskaliert und

renormiert. Eine genaue Herleitung einer RGG würde an dieser Stelle zu sehr ins Detail gehen, wird aber zum Beispiel im Artikel von Wilson und Kogut [WK74] beschrieben, der auch als Ursprung der exakten RG gesehen werden kann. Es soll in den folgenden beiden Unterpunkten aber kurz dargestellt werden, wie Manipulationen an der Wirkung durch ganz allgemeine Veränderungen an Feldern und Skalen beschrieben werden können. Die Veränderungen eines RG-Schrittes an der Wirkung werden in einem Artikel von Bagnuls und Bervillier sehr anschaulich hergeleitet [BB01]. Die Darstellung in den nächsten beiden Abschnitten hält sich im Wesentlichen an diese Herleitung.

An dieser Stelle sollte noch angemerkt werden, dass der Name Renormierungsgruppe eigentlich nicht ganz passend ist. Mit jedem Schritt werden Informationen auf kleinen Längenskalen ausintegriert. Ob man einen Impulsbereich auf einmal ausintegriert, oder nacheinander in zwei Schritten, ist für das Ergebnis egal. Eine der Bedingungen für eine mathematische Gruppe ist also auf jeden Fall erfüllt. Wie später noch erläutert wird, ist eine Arbeit mit RG-Gen aber nur dann möglich, wenn die Wirkung ab einer gewissen Ordnung der Kopplungen abgebrochen oder approximiert wird. In diesem Fall kann man die RG-Schritte aber nicht wieder rückgängig machen, da mehrere Ausgangszustände denselben Endzustand haben können. Bei sinkender RG-Zeit ist das ursprüngliche System nicht mehr eindeutig bestimmbar. Dies widerspricht der Definition einer Gruppe. Man könnte daher eher von einer Halbgruppe sprechen.

### Transformation der Felder

Nehme man an, dass man eine ganz allgemeine Transformation der Felder vornimmt:

$$\phi'(\vec{p}) = \phi(\vec{p}) + \sigma \Psi[\phi, \vec{p}]. \quad (2.25)$$

$\sigma$  soll infinitesimal klein sein, und  $\Psi$  soll von den Feldern  $\phi$  und deren Impulsen  $\vec{p}$  abhängen. Man erhält eine neue Wirkung, die von den neuen Feldern abhängt:

$$S[\phi'] = S[\phi] + \sigma \int \Psi[\phi, \vec{p}] \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(\vec{p})} d^d p. \quad (2.26)$$

Außerdem gilt für das Integralmaß:

$$\int \mathcal{D}\phi' = \int \mathcal{D}\phi \frac{\partial \phi'}{\partial \phi}. \quad (2.27)$$

Die Zustandssumme soll in jedem Fall konstant bleiben. Man schreibt:

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi' \exp\{-S[\phi']\} = \int \mathcal{D}\phi \exp\{-S[\phi] - \sigma \underline{T_T[\Psi]S[\phi]}\}. \quad (2.28)$$

Hierbei ist  $T_T$  der Operator, der auf die Wirkung  $S$  wirkt, und die Veränderungen an der Wirkung und dem Integralmaß, die durch die Transformation der Felder entstehen, durchführt. Man kann zeigen ([BB01]), dass gilt:

$$\underline{T_T[\Psi]S[\phi]} = \int d^d p \left\{ \Psi[\phi, \vec{p}] \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(\vec{p})} - \frac{\delta \Psi[\phi, \vec{p}]}{\delta \phi(\vec{p})} \right\}. \quad (2.29)$$

Da an dieser Stelle nur infinitesimale Transformationen betrachtet werden, kann man schreiben:

$$\frac{dS}{d\sigma} = T_T S. \quad (2.30)$$

### Reskalierung

In diesem Unterkapitel soll die betrachtete Impulsskala infinitesimal geändert und die Auswirkungen auf die Wirkung untersucht werden. Wir betrachten die Transformation:

$$p' = (1 + \sigma)p, \quad (2.31)$$

wobei  $\sigma$  infinitesimal klein ist. Die Zustandssumme muss auch an dieser Stelle konstant bleiben, und die Veränderungen sollen wieder über einen Operator  $T_R$  beschrieben werden, der auf die Wirkung wirkt:

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi' \exp\{-S[\phi']\} = \int \mathcal{D}\phi \exp\{-S[\phi] - \sigma \underline{T_R S[\phi]}\}. \quad (2.32)$$

Für die Wirkung gilt dann:

$$S' = S + \sigma T_R S, \quad \text{also} \quad \frac{dS}{d\sigma} = T_R S. \quad (2.33)$$

Ändert man die betrachtete Impulsskala, so wird die Wirkung gleich an mehreren Stellen beeinflusst. Man beachte:

- Das Integrationsvolumen ändert sich.
- Die einzelnen Kopplungen verändern sich.
- Die Deltafunktionen, die in jedem Term enthalten sind, werden verändert.
- Die Felder selbst werden reskaliert.

### Zusammengesetzter Renormierungsgruppen-Schritt

Man kann jetzt eine allgemeine Form einer RGG entwerfen. Diese wird als Ableitung nach der oben definierten RG-Zeit berechnet und setzt sich aus den beiden oben beschriebenen Schritten zusammen. Es gilt:

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = -\Lambda \frac{dS}{d\Lambda} = T_T S + T_R S. \quad (2.34)$$

Bis hierhin wurde im Impulsraum immer nur ein scharfer 'Cutoff' betrachtet. Die Impulse wurden in einem RG-Schritt also immer bis zu einem festem Impulswert ausintegriert. Wie allgemein bekannt ist, führt eine scharfe Kante im Impulsraum aber zu einer sehr ausgeschmierten Kante im Ortsraum. Es erscheint also sinnvoll, einen scharfen Cutoff zu vermeiden, und eine weiche Cutoff-Funktion einzuführen. Diese gibt bei einem RG-Schritt an, in welchem Maße die Impulse ausintegriert werden, und sollte möglichst stetig sein. Die Cutoff-Funktion kann prinzipiell jede beliebige Form annehmen, wichtig ist aber, dass die größten Impulse nahezu vollständig ausintegriert werden, die kleinsten Impulse aber nicht beeinflusst werden.

Für unterschiedliche Cutoff-Funktionen erhält man unterschiedliche RGGen. Das Vorgehen bei der Suche nach gültigen Gleichungen wurde in den letzten beiden Unterpunkten bereits angedeutet. Man betrachtet die Änderungen an der Wirkung und hält die Zustandssumme (das erzeugende Funktional) konstant.

Wilson war der erste, der eine solche Gleichung aufgestellt hat. Wählt man die Cutoff-Funktion in der Form:

$$C(p) = e^{-2p^2}, \quad (2.35)$$

und reskaliert außerdem das Feld folgendermaßen:

$$\phi \rightarrow e^{-p^2} \phi, \quad (2.36)$$

so kann man die RGG nach Wilson schreiben als:

$$\dot{S} = \int (1 - \frac{\eta}{2} + 2\vec{p}^2) \left\{ \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(-\vec{p})\delta\phi(\vec{p})} - \frac{\delta S}{\delta\phi(\vec{p})} \frac{\delta S}{\delta\phi(-\vec{p})} + \phi(\vec{p}) \frac{\delta S}{\delta\phi(\vec{p})} \right\} d^d p + T_R S. \quad (2.37)$$

Bei  $\eta$  handelt es sich um die sogenannte anomale Dimension. Diese gibt die Skalierung der Felder in den Impulsen an. Aufgrund der Tatsache, dass die Gleichungen der exakten RG reparametrisierungsinvariant in Bezug auf die Felder sind, erhält man für unterschiedliche anomale Dimensionen unterschiedliche Fixpunkte und auf diese Weise eine Linie von Fixpunkten, die mit  $\eta$  parametrisiert wird. Um den physikalischen Fixpunkt identifizieren zu können, braucht man zusätzliche Informationen. Diese findet man zum Beispiel in den kanonischen Dimensionen der Felder.

Ursprünglich wurde die RGG nach Wilson in dem bekannten Artikel von K. Wilson und J. Kogut [WK74] vorgestellt. Eine ausführliche Erläuterung der Gleichung findet sich zusätzlich in einem Buch von Y. Ivanchenko und A. Lisyansky [IL95]. Der Zusammenhang mit der anomalen Dimension  $\eta$  wird in einem Artikel von C. Bervillier [Ber04] hergestellt.

Wie aus Gleichung (2.21) ersichtlich ist, besteht die Wirkung aus verschiedenen Termen der Form:  $\lambda_i \phi^i$ . Diese Terme kann man sich als Vertex mit  $i$  Propagatoren veranschaulichen. In Abbildung (2.1) wurde in diesem Sinne der Achtervertex bildlich dargestellt.

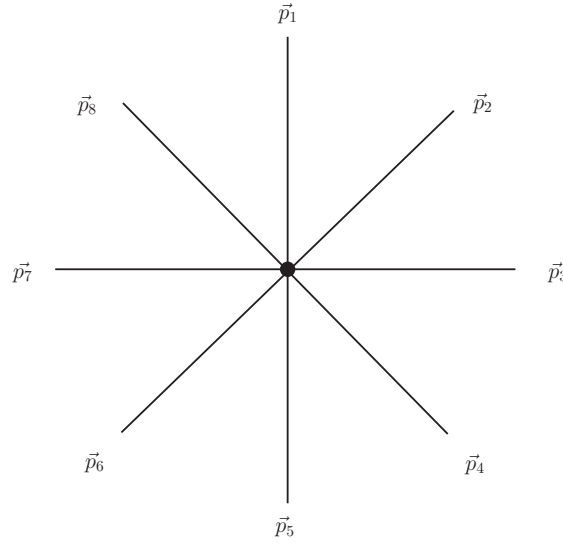


Abbildung 2.1: Achtervertex.

Wird die Wirkung nach einem Feld abgeleitet, nimmt die Anzahl der Felder bzw. der Propagatoren in jedem Term um eins ab. Der Term  $\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{p})} \frac{\delta S}{\delta\phi(-\vec{p})}$  wird allgemein als Loopterm bezeichnet. Es verschwinden jeweils zwei Felder eines Vertex, und man kann der Formel entnehmen, dass diese je einen Impuls vom Betrag  $p$  mit unterschiedlichem Vorzeichen tragen. Man sagt, dass die Impulse zwischen den beiden Feldern ausintegriert werden.

Wenn die abgeleitete Wirkung mit sich selbst multipliziert wird, erhält man Terme der Form:  $\lambda_i \phi^{(i-1)} \cdot \lambda_j \phi^{(j-1)} = \lambda'_{(i+j-2)} \phi^{(i+j-2)}$ . Diese kann man sich als Verknüpfung von zwei Vertices veranschaulichen. Die Verknüpfung wird durchgeführt, indem man die entgegengesetzten Impulse von jeweils einem Feld der Vertices miteinander ausintegriert. In der RGG nach Wilson trägt daher der Term:  $\frac{\delta S}{\delta\phi(\vec{p})} \frac{\delta S}{\delta\phi(-\vec{p})}$  den Namen Linkterm.

Da die Impulse der ausintegrierten Propagatoren jeweils ein entgegengesetztes Vorzeichen tragen, wird die Impulserhaltung eines jeden neuen Vertex der Wirkung, die durch die Deltafunktion garantiert wird, nicht verletzt. Es ist anzumerken, dass bei einem RG-Schritt nur diejenigen Propagatoren ausintegriert werden, deren Impuls im auszuintegrierenden Bereich liegen.

Wegner und Houghton haben den Fall eines scharfen Cutoffs untersucht. Sie erhielten eine RGG der folgenden Form:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \int' \left\{ -\frac{\delta S}{\delta\phi(\vec{p})} \left( \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(\vec{p})\delta\phi(-\vec{p})} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta\phi(-\vec{p})} + \text{Tr} \left( \ln \left( \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(\vec{p})\delta\phi(-\vec{p})} \right) \right) \right\} d^d p + T_T S. \quad (2.38)$$

Der natürliche Logarithmus ist auf die Wahl des scharfen Cutoffs zurückzuführen. Das Integral wird nur im betrachteten Impulsbereich ausgeführt und ist daher mit einem  $\prime$  gekennzeichnet.

Die genannten RGGen sind nichtlineare Funktionaldifferentialgleichungen zweiter Ordnung und als solche nicht direkt lösbar. Ein Ausweg ist der Versuch, die Gleichungen numerisch zu lösen.

### Approximationen der Wirkung

Die vollständige Wirkung besteht streng genommen aus unendlich vielen Termen mit unendlich vielen Kopplungen. Dass ein exaktes Rechnen nicht möglich ist, erscheint einleuchtend. Eine Approximation der Wirkung lässt sich nicht vermeiden und ist in ihrer Notwendigkeit und ihrem Ausmaß mit dem Abbruch der Entwicklung in Feynman-Graphen in der perturbativen RG, auf die später noch eingegangen wird, zu vergleichen.

Es ist naheliegend, die Wirkung einfach nach einer gewissen Ordnung der Kopplung abzuschneiden. Terme, die im Rahmen eines RG-Schrittes entstehen und eine zu hohe Potenz der Felder haben, werden ignoriert. Eine weitere Möglichkeit ist die sogenannte Ableitungsentwicklung, die eine Betrachtung von allen Ordnungen der Felder erlaubt. Man betrachtet die Wirkung:

$$S[\phi] = \int d^d x \{ V(\phi) + \frac{1}{2} Z(\phi) (\partial\phi)^2 + O(\partial^4) \}. \quad (2.39)$$

Hier ist  $V(\phi)$  ein beliebiges Potenzial.

Betrachtet man die Entwicklung nur bis zur zweiten Ordnung in den Ableitungen, und geht man davon aus, dass der Koeffizient des kinetischen Terms der Wirkung nicht explizit feldabhängig ist ( $Z(\phi) = 1$ ), so gelangt man zu einem Spezialfall der Ableitungsentwicklung, der sogenannten lokalen Potenzial Approximation. Hier reduziert sich die Wirkung auf:

$$S[\phi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + V(\phi) \right\}. \quad (2.40)$$

Für das Potenzial wird an dieser Stelle angenommen:

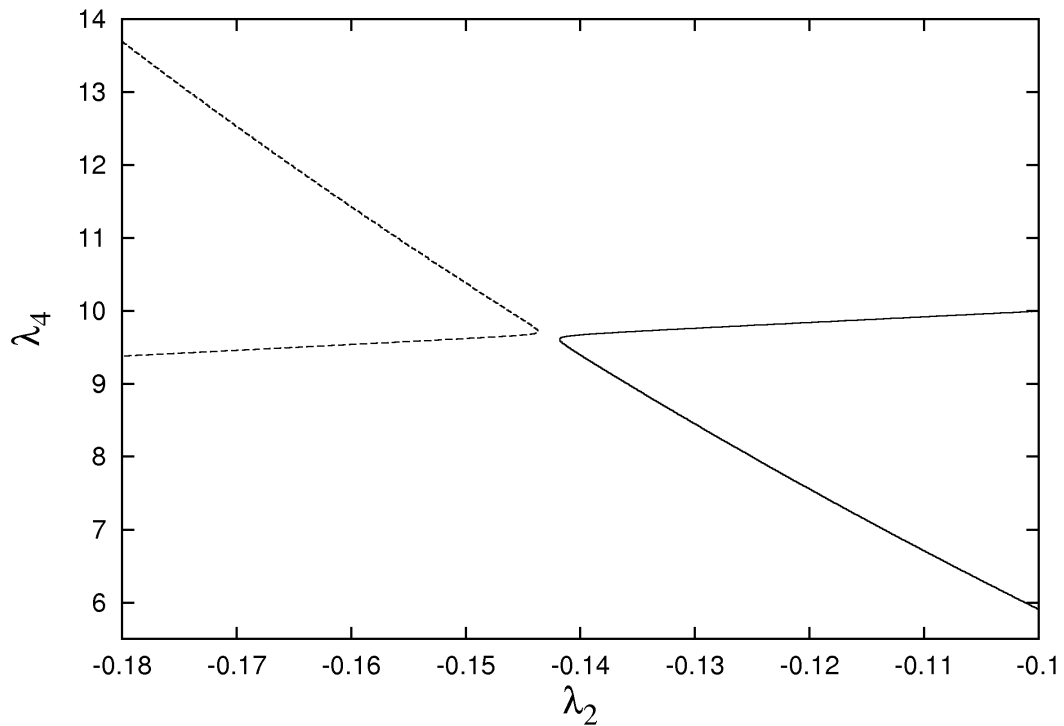
$$V(\phi) = \sum_{n=2}^{\infty} \int \prod_{j=1}^n (d^d p_j) \lambda_n \phi_1 \dots \phi_n \delta(\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n). \quad (2.41)$$

Durch die Approximationen der Wirkung wird im Allgemeinen die Reparametrisierungsinvarianz gebrochen. Dies führt dazu, dass die anomale Dimension in der lokalen Potenzial Approximation immer gleich Null ist.

### Renormierungsgruppenfluss und Fixpunkte

Grundsätzlich kann jedes physikalische System mit der exakten RG untersucht werden, dessen Wechselwirkungen bekannt und in eine Wirkung gefasst sind. Wie bereits erwähnt, verändern sich die Kopplungen mit fortschreitender RG-Zeit. Diese Veränderungen kann man im Raum der Kopplungskonstanten beobachten. Hier werden die Kopplungskonstanten als Koordinaten

aufgetragen; man kann sich die Veränderungen der Wirkung als “Fluss” im Raum deutlich machen. Bleiben die Kopplungen einer Wirkung im Rahmen eines RG-Schrittes unverändert, so spricht man von einem Fixpunkt des RG-Flusses an dieser Stelle. Verändert man hier die betrachtete Skala, so bleibt die Physik identisch. Es leuchtet schnell ein, dass die Korrelationslänge hier entweder Null oder unendlich sein muss. Aus der statistischen Physik ist bekannt, dass die Korrelationslänge an kritischen Punkten divergiert. Auf diese Weise kann man sich klar machen, dass ein kritischer Punkt auch zu einem Fixpunkt im Kopplungsraum führen muss.



**Abbildung 2.2:** Fixpunkt mit zwei attraktiven und zwei repulsiven Flussrichtungen.

Der RG-Fluss nähert sich dem Fixpunkt häufig aus besonderen Richtungen, die demnach attraktiv genannt werden und entfernt sich in anderen Richtungen, die demnach repulsiv genannt werden. Bewegt man sich in attraktiver Richtung auf den Fixpunkt zu, so skaliert die Geschwindigkeit des RG-Flusses linear mit dem Abstand, wird also in der Nähe des Fixpunktes immer langsamer. Dieses Verhalten wird im nächsten Unterkapitel genauer untersucht. Ist die Korrelationslänge kleiner als unendlich, so wird sie mit jedem RG-Schritt verkürzt. Auch wenn der Fluss dem Fixpunkt immer näher kommt, so wird das System immer weniger kritisch, wird irgendwann seine Richtung ändern und auf einer repulsiven Richtung den Bereich des Fixpunktes verlassen. Anders verhält es sich, wenn man einen Punkt auf der sogenannten kritischen Fläche betrachtet. Hier ist die Korrelationslänge per Definition unendlich. Der Fluss kann die kritische Fläche nicht verlassen, wird sich einem Fixpunkt annähern, aber immer langsamer werden. In beiden Fällen wird der Fluss den Fixpunkt nie erreichen, obwohl er sich dem Fixpunkt beliebig weit nähern kann.



Der Gaußsche Fixpunkt liegt im Ursprung des Kopplungsraumes und existiert immer. Hier sind alle Kopplungen gleich Null. Die Anzahl und Art der Fixpunkte in einer physikalischen Theorie hängt nicht nur von der betrachteten Approximation, sondern auch von der betrachteten Dimension und der Symmetrie ab. Die Dimension wird in der skalaren Theorie zumeist dynamisch eingeführt. Dies geschieht in Form der sogenannten  $\epsilon$ -Entwicklung, die von Wilson vorgeschlagen wurde. Hier beschreibt man Räume mit der Dimension  $d = 4 - \epsilon$  und infinitesimal kleinem  $\epsilon$ . Perturbative Rechnungen legen nahe, dass es in der skalaren Theorie bei  $d = 4$  nur einen und zwar den Gaußschen Fixpunkt gibt. Man ist nun an der Situation in drei Dimensionen interessiert und benutzt die  $\epsilon$ -Entwicklung, um bekannte Eigenschaften bei  $d = 4$  für den Raum mit  $d = 3$  zu entwickeln. Heute geht man davon aus, dass sich bei Dimensionen unter  $d = 4$  aus dem Gaußschen Fixpunkt ein zweiter Fixpunkt heraus bildet. Dieser trägt den Namen Wilson-Fisher-Fixpunkt und entfernt sich mit sinkender Dimension immer weiter vom Gaußschen Fixpunkt. Sinkt die Dimension unter  $d = 3$  und weiter, so bilden sich auch noch weitere Fixpunkte aus dem Gaußschen Fixpunkt heraus.

Da sich die Topologie im Kopplungsraum bei infinitesimaler Änderung der Dimension nicht schlagartig verändert, können sich Fixpunkte im Allgemeinen nur aus bestehenden Fixpunkten herausbilden. Eine andere Möglichkeit wäre, dass sich in unmittelbarer Nähe mindestens zwei Fixpunkte gleichzeitig bilden.

Jeder Punkt im Kopplungsraum repräsentiert ein physikalisches System mit charakteristischen Wechselwirkungen. Einem Fixpunkt können sich in der attraktiven Richtung sehr unterschiedliche Systeme nähern. Die Wirkungen dieser Systeme scheinen mit fortschreitender RG-Zeit immer ähnlicher zu werden, solange sich der Fluss dem Fixpunkt annähert. Dieses Phänomen ist geeignet, um das Auftreten verschiedener Universalitätsklassen, wie man sie aus der Landau-Theorie kennt, zu verstehen. Flüsse, die sich demselben Fixpunkt annähern, gehören derselben Universalitätsklasse an. Wie aus der Landau-Theorie bekannt, hängen die Universalitätsklassen von den Symmetrien und der Dimension des betrachteten physikalischen Systems ab und besitzen charakteristische Skalierungsexponenten. So skaliert, wie bereits in Kapitel 2.2.1 erwähnt, bei einem Ising-Modell die Korrelationslänge in der Nähe der kritischen Temperatur mit dem kritischen Exponent  $\nu$ :

$$\xi \propto (T - T_C)^{-\nu}. \quad (2.42)$$

Diese Exponenten kann man auch an den Fixpunkten wiederfinden und sogar messen. Hierauf wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

Eine ausführlichere Beschreibung über den RG-Fluss, über dessen Eigenschaften und über das Skalenverhalten der Fixpunkte kann man in einem Artikel von B. Delamotte [Del07] finden.

### Skalierung der Fixpunkte

Eine der wichtigsten Größen, die benutzt wird, um einen RG-Fluss zu beschreiben, ist die sogenannte  $\beta$ -Funktion. Diese gibt die Veränderung einer einzelnen Kopplung  $\lambda_i$  mit der RG-Zeit an und ist folgendermaßen definiert:

$$\beta_i(\vec{\lambda}) = -\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \quad (2.43)$$

Bei  $\vec{\lambda}$  handelt es sich um einen Vektor mit  $D$  Komponenten im  $D$ -dimensionalen Kopplungsraum. In der exakten RG werden die kleinen Wellenlängen, also die großen Impulse, ausintegriert, die Impulsskala wird demnach kleiner. Wie später noch näher erläutert, wird die Skalenabhängigkeit in der perturbativen RG aber mit aufsteigenden Impulsen betrachtet. Um eigene Ergebnisse besser mit den Ergebnissen der perturbativen RG vergleichen zu können, wurde die  $\beta$ -Funktion im Sinne der perturbativen Theorie und im Verhältnis zu der von uns definierten RG-Zeit mit einem negativen Vorzeichen versehen (siehe Gleichung (2.43)). Am Fixpunkt sollte sich der Fluss, und damit die Kopplungen, nicht mehr verändern. Hier gilt offensichtlich:

$$\beta_i(\vec{\lambda}^*) = 0 \quad (2.44)$$

für alle  $i$ . Man betrachte jetzt einen Punkt  $\vec{\lambda}$  in unmittelbarer Nähe zu einem Fixpunkt  $\vec{\lambda}^*$  mit der Differenz  $a_i = \tilde{\lambda}_i - \lambda_i^*$  in jeder Komponente. Die  $\beta$ -Funktion kann linearisiert werden, solange der Abstand zum Fixpunkt klein genug ist:

$$\beta_i(\vec{\lambda}) = \sum_j \frac{d\beta_i}{d\lambda_j} \Big|_{\vec{\lambda}^*} \cdot a_j + O(a_j^2). \quad (2.45)$$

Definiert man jetzt eine Matrix mit den Komponenten:

$$M_{ij} = \frac{d\beta_i}{d\lambda_j} \Big|_{\vec{\lambda}^*}, \quad (2.46)$$

und geht man davon aus, dass diese Matrix diagonalisierbar ist, mit reellen Eigenwerten  $l_i$  und einer vollständigen Basis aus Eigenvektoren  $\vec{e}_i$ , so kann man den Abstand vom Fixpunkt über die Eigenvektoren beschreiben:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^N s_i \vec{e}_i. \quad (2.47)$$

Setzt man diese Bedingungen in Gleichung (2.45) ein, so folgt in erster Ordnung:

$$\vec{\beta}(\vec{\lambda}) = \sum_{i=1}^N l_i s_i \vec{e}_i. \quad (2.48)$$

Betrachtet man RG-Schritte mit einer Schrittweite  $b$ , so gilt:

$$b \frac{d\vec{a}}{db} = \sum_{i=1}^N s_i(b) \mathbf{M} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^N l_i s_i(b) \vec{e}_i \quad \text{und somit} \quad b \frac{ds_i(b)}{db} = l_i s_i(b). \quad (2.49)$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist trivial und ergibt:

$$s_i(b) = s_i(1)b^{l_i}. \quad (2.50)$$

Die Eigenvektoren der Matrix werden die Eigenrichtungen des Fixpunktes genannt und geben die Hauptachsen des RG-Flusses an. In den Eigenrichtungen skaliert der Fluss offensichtlich mit den Eigenwerten als Exponenten, solange die  $\beta$ -Funktion linearisiert werden kann. Da die Flussgeschwindigkeit in der Nähe des Fixpunktes aber immer weiter abnimmt, erscheint die Näherung sinnvoll. Man teilt die Flussrichtungen der Eigenvektoren und ihre Eigenwerte in drei Gruppen ein:

- Gilt:  $l_i > 0$ , so spricht man von einer relevanten Flussrichtung und einer relevanten Kopplung. Der Fluss läuft aus dem Fixpunkt heraus.
- Gilt:  $l_i < 0$ , so spricht man von einer irrelevanten Flussrichtung und einer irrelevanten Kopplung. Der Fluss läuft in den Fixpunkt hinein.
- Gilt:  $l_i = 0$ , so spricht man von einer marginalen Flussrichtung. Die lineare Näherung reicht hier offensichtlich noch nicht aus, um zu entscheiden, ob der Fluss in den Fixpunkt hinein, oder aus dem Fixpunkt heraus läuft.

Ist der erhaltene Eigenwert komplex, so erhält man einen spiralförmigen Fluss in den Fixpunkt bzw. aus dem Fixpunkt heraus.

Über die Skalierung des Flusses in der Nähe eines Fixpunktes kann man die Exponenten berechnen. Da die kritischen Punkte im Phasenraum einen Fixpunkt darstellen, sind die Exponenten, die man erhält, mit den kritischen Exponenten der statistischen Physik (zum Beispiel aus der Landau-Theorie) vergleichbar. An dieser Stelle erhält man also über die exakte RG zum ersten Mal Ergebnisse, die man mit Mess- und Literaturwerten vergleichen kann.

Gibt es mehrere Fixpunkte, so wird jeder Fixpunkt auf seine eigene Art skalieren. Entfernt sich ein RG-Fluss von einem Fixpunkt und nähert sich einem anderem Fixpunkt an, wie es zum Beispiel beim Fluss vom Gaußschen in den Wilson-Fisher-Fixpunkt der Fall ist, so ändert sich auch die Art, in der er skaliert, und die Universalitätsklasse des physikalischen Systems.

Da die Skalierung entscheidend von der Lage des Fixpunktes abhängt, ist es wichtig, dass man bei der Bestimmung der Exponenten die Lage des Fixpunktes richtig bestimmt hat. Anderenfalls wird man für die Exponenten keine eindeutigen Ergebnisse erhalten. Man muss außerdem darauf achten, dass der Abstand zum Fixpunkt nicht zu groß gewählt wird, da ansonsten die verwendete Näherung nicht mehr gültig ist.

### 2.2.3 Perturbative Renormierungsgruppe

Mit Hilfe der perturbativen oder auch feldtheoretischen RG werden in dieser Arbeit keine Ergebnisse erzielt, da ausschließlich mit der exakten RG gearbeitet wird. Da bei der Auswertung der hergeleiteten RGGen aber des öfteren eigene Ergebnisse mit Ergebnissen der

perturbativen RG verglichen werden, wird in diesem Unterkapitel eine kurze Einführung gegeben.

In der Quantenfeldtheorie führt die Entwicklung in Feynman-Graphen bekannterweise zu divergenten Integralen, die renormiert werden müssen. Dieser Prozess ist entscheidend, wenn man sinnvolle physikalische Ergebnisse erzielen will. Man fügt den Kopplungen der Theorie Gegenterme hinzu, die die divergenten Integrale aufheben. Die Kopplungen der auf diese Art und Weise neu entstandenen Theorie werden renormierte Kopplungen, die ursprünglichen Kopplungen werden nackte Kopplungen genannt. Um den Gegenterm sinnvoll zu wählen, muss der Wert der Kopplung auf einer bestimmten Skala  $M$  bekannt sein. Der Gegenterm wird auf diese Art und Weise abhängig von der Skala, auf der man den Wert der Kopplung definiert hat. Letztlich werden daher auch die renormierten Kopplungen, im Gegensatz zu den nackten Kopplungen, skalenabhängig.

Es liegt nahe, dass die perturbative RG benutzt wird, um die Veränderungen physikalischer Systeme, also der Kopplungen  $\lambda_i$  und Felder  $\phi$ , zu untersuchen, wenn die Skala  $M$  verschoben wird. Bei infinitesimaler Änderung der Skala:

$$M \rightarrow M + \delta M, \quad (2.51)$$

kommt es zu infinitesimalen Änderungen der Kopplungen und Felder:

$$\lambda_i \rightarrow \lambda_i + \delta \lambda_i, \quad (2.52)$$

$$\phi \rightarrow (1 + \delta \eta) \phi. \quad (2.53)$$

Die  $\beta$ -Funktion, die schon in der Theorie der exakten RG betrachtet wurde (siehe Gleichung (2.43)), spielt auch in der perturbativen RG eine entscheidende Rolle. Die Änderung der renormierten Kopplung  $\lambda_i$  bei infinitesimaler Änderung der betrachteten Skala  $M$  wird über die  $\beta$ -Funktion  $\beta_i$  beschrieben:

$$\beta_i(\vec{\lambda}) = M \frac{d\lambda_i}{dM}. \quad (2.54)$$

Bei  $\lambda_i$  handelt es sich um eine spezielle Kopplung; die  $\beta$ -Funktionen können grundsätzlich von allen Kopplungen der betrachteten Theorie ( $\vec{\lambda}$ ) abhängen.

Betrachtet man die Veränderungen aller skalenabhängigen Kopplungen einer Theorie, so erhält man die Callan-Symanzik-Gleichung, die als Grundgleichung der perturbativen RG gesehen werden kann. Sie lautet:

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta_1(\vec{\lambda}) \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \beta_2(\vec{\lambda}) \frac{\partial}{\partial \lambda_2} + \dots + n \gamma(\vec{\lambda}) \right] G^n(\vec{x}; M, \vec{\lambda}) = 0 \quad (2.55)$$

Bei  $n$  handelt es sich um die Anzahl der Felder,  $G^n(\vec{x}; M, \vec{\lambda})$  ist die Greensche-Funktion der Ordnung  $n$  und  $\gamma$  ist definiert als:

$$\gamma = -M \frac{\partial \eta}{\partial M}. \quad (2.56)$$

Die perturbative RG kommt, wie erwähnt, vor allem in der Quantenfeldtheorie zum Einsatz, um die Ergebnisse, die mit der Hilfe von Renormierung aus divergenten Entwicklungen in Feynman-Graphen erhalten werden, auf beliebigen Skalen betrachten zu können. Die Renormierung der divergenten Reihen hat zu völlig neuen Anschauungen in der Physik geführt. In der exakten RG tauchen die divergenten Reihen nicht auf. Der Grund dafür ist, dass hier immer nur über einen infinitesimalen Impulsbereich integriert wird. Die Probleme der exakten RG liegen vor allem in der Approximation (siehe Abschnitt 2.2.2), die notwendig ist, da schon ein einziger RG-Schritt zu einer unendlichen Anzahl an Kopplungen führt, die nicht alle betrachtet werden können. Die Fehler, die durch die Wahl der Approximation gemacht werden, sind anscheinend von ähnlicher Natur und Problematik wie die Fehler, die in der perturbativen RG gemacht werden, wenn die Entwicklungen in Feynman-Graphen ab einer gewissen Ordnung abgebrochen werden.

## 2.3 Theorie zu den Monte-Carlo-Simulationen der Burgers-Gleichung

Im folgenden Abschnitt wird die Theorie erläutert, die für die Untersuchung der Burgers-Gleichung mit Hilfe des Pfadintegralformalismus und Monte-Carlo-Simulationen benötigt wird. Zunächst wird die Burgers-Gleichung mit ihren Eigenschaften vorgestellt. Dann wird mit Hilfe des Funktionalintegralformalismus eine Wirkung hergeleitet, mit der die angetriebene Burgers-Gleichung simuliert werden soll. Im letzten Unterpunkt wird der Heatbath-Monte-Carlo-Algorithmus kurz erläutert und dessen Funktionsweise erklärt.

### 2.3.1 Burgers-Gleichung

Ende der dreißiger Jahre stellte der niederländische Physiker J.M. Burgers eine Differenzialgleichung vor, die eindimensionale hydrodynamische Systeme beschreiben sollte. Die Gleichung ist heute als Burgers-Gleichung bekannt und soll in diesem Abschnitt kurz vorgestellt werden. Eine ausführlichere Übersicht über die Untersuchungen der Burgers-Gleichung findet man zum Beispiel in einem Artikel von U. Frisch und J. Bec [FB00] sowie von J. Bec und K. Khanin [BK07].

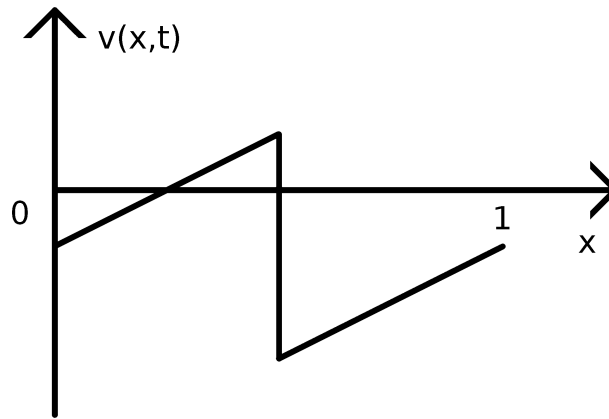
Die Burgers-Gleichung hat die folgende Form:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = 0. \quad (2.57)$$

Bei der Burgers-Gleichung betrachtet man die Dynamik eines Gases, dessen Druck verschwindet. Man arbeitet also mit einem vollständig kompressiblen Fluid. Die Gleichung hat vielerlei Anwendungen gefunden. So lässt sich das Universums nach dem Urknall sehr gut über Teilchen beschreiben, die nicht kollidieren, sondern nur über Gravitation wechselwirken. In einem

solchen System ist kein Druck vorhanden. Neben der Kosmologie finden sich aber auch noch weitere Anwendungen der Gleichung, so zum Beispiel in der nichtlinearen Akustik oder der Festkörperphysik.

Die Burgers-Gleichung ist der Navier-Stokes-Gleichung sehr ähnlich und sollte daher auch ähnliche Eigenschaften haben. Wie in Abschnitt 2.1.1 gezeigt, wird der nichtlokale Charakter der Navier-Stokes-Gleichung gerade durch den Druckterm verursacht, der in der Burgers-Gleichung nicht vorhanden ist. Die Burgers-Gleichung ist lokal. Die Lösungen der Burgers-Gleichung sind im Grenzfalle verschwindender Viskosität bekannt. So ist ein Schema der Schocks, die im eindimensionalen Raum mit periodischer Ortskoordinate die Lösung der Burgers-Gleichung bilden, in Abbildung 2.3 abgebildet. Die Lage der Schocks ist zufällig. Die Steigung der Rampen ist aber überall gleich. Wird keine neue Energie in das System gebracht, so ist die Steigung proportional zu  $\frac{1}{t}$ . Eine gute Übersicht über die Herleitung und die Eigenschaften der Lösung der Burgers-Gleichung findet man in der Arbeit von U. Frisch und J. Bec [FB00].



**Abbildung 2.3:** Lösung der Burgers-Gleichung mit periodischer Ortskoordinate und verschwindender Viskosität.

Auch die Form der Strukturfunktion wurde bereits erfolgreich untersucht. Im Folgenden wird ein kurzer Einblick über den Stand der Untersuchungen zur Strukturfunktion gegeben. Eine ausführlichere Beschreibung findet sich in der Arbeit von J. Bec und K. Khanin [BK07]. Wirkt die antreibende Kraft nur auf die großen Skalen eines begrenzten Systems, so sollte die Strukturfunktion für kleine  $x$  in guter Näherung die folgende Form einnehmen:

$$S_p(x) = C_p x^p + C'_p x. \quad (2.58)$$

In dieser Formel wurde dieselbe Nomenklatur wie in Gleichung (2.9) verwendet; Die Formel gilt für  $p > 0$ . Der erste Summand  $C_p x^p$  hat seinen Ursprung in der konstanten Steigung der Rampen in der Lösung der Burgers-Gleichung und ergibt sich sofort, wenn man den linearen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Ort in diesem Bereich betrachtet. Der zweite Term lässt sich über die Wahrscheinlichkeit, einen Schock im Intervall  $x$  anzutreffen, erklären. Diese ist von der Ordnung  $O(x)$ . Für die Näherung der Strukturfunktion sollte das System

endlich sein, damit die Höhe der Schocks beschränkt bleibt.

Für kleine Ordnungen der Strukturfunktion ( $0 < p < 1$ ) kann man davon ausgehen, dass der erste Term das Verhalten in Gleichung 2.58 dominiert. Für größere Ordnungen ( $p > 1$ ) wird vor allem der zweite Term dominieren. Geht man von sehr kleinen  $x$  aus, so kann man in erster Ordnung für die Strukturfunktion die folgende Regel formulieren:

$$S_p(x) \approx C_p (\epsilon x)^a \quad \text{wobei} \quad a = \min(p, 1). \quad (2.59)$$

$\epsilon$  ist die Energiedissipation, die in der Theorie der Turbulenz (Abschnitt 2.1) beschrieben worden ist. Die Strukturfunktion scheint also allgemein nicht selbstähnlich zu sein. Sie lässt sich aber in zwei Bereiche unterteilen, in denen sie sich selbstähnlich verhält. Man bezeichnet dieses Skalenverhalten als bifraktal.

Da die Burgers-Gleichung der Navier-Stokes-Gleichung sehr ähnlich ist, wurde sie als Testgleichung für die Untersuchung turbulenter Systeme verwendet. In den fünfziger Jahren zeigten Hopf [Hop50] und Cole [Col51], dass die Burgers-Gleichung nach einer Transformation der Felder linearisiert und ausintegriert werden kann und man somit Lösungen der Gleichung erhält. Eine der wichtigsten Eigenschaften der Navier-Stokes-Gleichung, die nichtlineare Abhängig von kleinsten Störungen der Anfangsbedingungen, die zu einer chaotischen Dynamik führt, ist demnach in der Burgers-Gleichung nicht mehr enthalten. Sie kann also nicht genutzt werden, um eine der grundlegenden Eigenschaften turbulenter Systeme, die spontane Entstehung von zufälligem Verhalten aus chaotischen Dynamiken, untersuchen zu können.

Dennoch gibt es heute Versuche mit der Burgers-Gleichung, deren Lösung man kennt, Rückschlüsse auf die turbulenten Eigenschaften der Navier-Stokes-Gleichung führen zu können. Die Zufälligkeit wird dann als die antreibende Kraft  $f$  in das System eingebunden.  $f$  kann zum Beispiel als weißes Rauschen eingeführt werden:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = f. \quad (2.60)$$

Da die Form der Strukturfunktion der Burgers-Gleichung sehr gut untersucht und verstanden ist, versucht man gewonnene Erkenntnisse auch auf das unbekannte Skalenverhalten der Strukturfunktion der Navier-Stokes-Gleichung zu übertragen. Die Form der Strukturfunktion der Burgers-Gleichung wird von der antreibenden Kraft des Systems beeinflusst werden.

So kann man zum Beispiel ein eindimensionales System, das periodisch im Ort ist, mit einem zufälligen, aber gaußverteilter Antrieb  $f(k, t)$  der folgenden Form versehen:

$$\langle f(k_1, t_1) f(k_2, t_2) \rangle = 2A |k|^\beta \delta(t_1 - t_2) \delta(k_1 - k_2), \quad (2.61)$$

wobei  $A$  die Amplitude ist. Der Mittelwert der Zufallskraft  $f$  sollte die folgende Form haben:

$$\langle f(x, t) \rangle = 0. \quad (2.62)$$

Wählt man nun  $\beta < -3$ , so wirkt die Kraft vor allem im Bereich großer Wellenlängen. Man kann aus den Lösungen der Burgers-Gleichung den Skalierungsexponenten  $a$  aus Gleichung

(2.59) folgern:  $a = \min(p, 1)$ . Für den Fall:  $-3 < \beta < 0$  ergibt sich aufgrund einer höheren Dichte an Schocks und aus dimensionellen Gründen eher:

$$a = \min\left(-\frac{p\beta}{3}, 1\right). \quad (2.63)$$

Wirkt die Kraft vor allem auf die kleinen Wellenlängen ( $\beta > 0$ ), so sollte das Skalenverhalten einfach linear sein ( $a = p$ ). Die Abhängigkeit der Strukturfunktion vom Antrieb der Burgers-Gleichung ist noch nicht hinreichend gut untersucht, und es gibt bis heute offene Fragen. Einen guten Überblick über den Stand der Forschung findet man in dem Artikel von J. Bec und K. Khanin [BK07].

### 2.3.2 Funktionalintegralformalismus angewendet auf die Burgers-Gleichung

In diesem Unterkapitel wird die Anwendung des Pfadintegralformalismus nach Martin-Siggia-Rose [MSR73] für die Untersuchungen der Burgers-Gleichung erläutert. Auf ähnliche Weise wurde auch die zu untersuchende RGG der Navier-Stokes-Gleichung hergeleitet. Hier müssen jedoch zusätzlich die Nichtlokalitäten mit Hilfe der Faddeev-Popov-Methode beseitigt werden. Es sei noch erwähnt, dass die Anwendung von Pfadintegralen, also die Anwendung von feldtheoretischen Verfahren zur Untersuchung der Burgers-Gleichung, bereits sehr erfolgreich durchgeführt wurde. Als Beispiel sei die Interpretation der Schocks der Burgers-Gleichung als Instanton-Lösungen von G. Falkovich *et. al.* ([FKLM96] und [BFKL97]) erwähnt.

Es soll die eindimensionale Burgers-Gleichung mit zufälligem, aber gaußverteilterm Antrieb betrachtet werden:

$$B(v) = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} = f. \quad (2.64)$$

Man fasst die Zustandssumme als Summe über die Mittelung der feinkörnigen Verteilung auf:

$$Z = \int \mathcal{D}v < \delta(v - B^{-1}(f)) >_f = \int \mathcal{D}v \int \mathcal{D}f \delta(v - B^{-1}(f)) p(f). \quad (2.65)$$

$p(f)$  ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallskraft. Diese soll gaußverteilt sein und es ergibt sich daher:

$$Z \propto \int \mathcal{D}v \int \mathcal{D}f \delta(v - B^{-1}(f)) \exp\left(-\frac{1}{2} \int dx dt f \chi^{-1} f\right), \quad (2.66)$$

wobei  $\chi$  definiert ist als:

$$\chi(x, x', t, t') = < f(x, t) f(x', t') >, \quad (2.67)$$



und die Korrelation der Kraft auf den betrachteten Längenskalen angibt.  $\chi$  kann grundsätzlich frei gewählt werden, für die Untersuchungen der Burgers-Gleichung ist es aber sinnvoll die stochastische Kraft so zu wählen, dass sie hauptsächlich auf die großen Skalen des Systems wirkt. Insgesamt ergibt sich für das erzeugende Funktional:

$$Z = \int \mathcal{D}v \int \mathcal{D}f \delta(v - B^{-1}(f)) \exp \left( -\frac{1}{2} \int dx dt f \chi^{-1} f \right). \quad (2.68)$$

Die Deltafunktion kann aber für den nichtinvertierten Fall auf die folgende Art und Weise umgeschrieben werden:

$$\delta(v - B^{-1}(f)) = \delta(f - B(v)) \det \left( \frac{\delta B_i(v)}{\delta v_j} \right). \quad (2.69)$$

Bei  $\det \left( \frac{\delta B_i(v)}{\delta v_j} \right)$  handelt es sich um die Funktionaldeterminante. Da die Burgers-Gleichung lokal ist, brauchen wir die Funktionaldeterminante nicht weiter zu beachten<sup>2</sup>. Die Nichtlokalität des Drucktermes in der Navier-Stokes-Gleichung würde an dieser Stelle zu Problemen führen, die man nur mit Hilfe der Faddeev-Popov-Methode lösen kann. Auf diese Art und Weise wurde die zu untersuchende RGG von D. Homeier hergeleitet [Hom06].

Für die Burgers-Gleichung erhält man letztlich die zu betrachtende Wirkung:

$$S(v) = \frac{1}{2} \int dx dx' dt B(v(x, t)) \chi^{-1} B(v(x', t)). \quad (2.70)$$

Die Wirkung soll mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen untersucht werden und das Skalenverhalten der Strukturfunktionen ermittelt werden. Bei einer Strukturfunktion handelt es sich um eine Invariante unter Galilei-Transformationen. Würde man nicht-invariante Größen berechnen wollen, so müsste man eine Eichfixierung vornehmen [BH07]. Bei invarianten Größen ist eine Fixierung jedoch nicht notwendig.

### 2.3.3 Monte-Carlo-Simulationen

In diesem Abschnitt soll eine kurze Einführung in Monte-Carlo-Simulationen gegeben werden. Eine umfassendere Einführung in das Thema findet sich zum Beispiel in den Büchern von I. Montvay und G. Münster [MM94] und M. E. J. Newman und G. T. Barkema [NB99]. Monte-Carlo-Simulationen werden vor allem auf physikalische und mathematische Probleme angewendet und erfolgen mit Hilfe von Computern. Man simuliert ein System, dessen Zustand sich durch einen zufällig gewählten Schritt ändert. Diese zufällige Änderung findet aber mit den für das System charakteristischen Wahrscheinlichkeiten statt und hängt immer nur vom aktuellen Zustand des Systems ab. Man erhält letztlich eine Kette möglicher Zustände des Systems. Auf diese Weise können komplexe Theorien, die mit analytischen Rechnungen oder direkten Simulationen nicht mehr behandelbar sind, untersucht werden.

---

<sup>2</sup>Die Funktionaldeterminante liefert für lokale Theorien keinen Beitrag. Dies wird unter anderen in folgender Veröffentlichung gezeigt: [HMPPMV99].

Der Name Monte-Carlo wurde zum ersten Mal 1949 von Nicolas Metropolis in diesem Zusammenhang verwendet. Die Idee der Statistik von Stichproben stammt aber bereits aus dem vorletzten Jahrhundert. Die Geschichte der Monte-Carlo-Simulationen ist dementsprechend um einiges älter als die Geschichte des Computers.

Das Ziel der Monte-Carlo-Simulationen ist es, Erwartungswerte von Messgrößen und mögliche Gleichgewichtszustände zu bestimmen. Im Allgemeinen gilt für den Erwartungswert einer Messgröße  $O(\phi)$ :

$$\langle O(\phi) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi O(\phi) \exp(-S(\phi))}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S(\phi))}. \quad (2.71)$$

$S$  ist die betrachtete Wirkung. In numerischen Simulationen wird man für ein System viele mögliche Zustände generieren, die gesuchten Messgrößen für die einzelnen Zustände ermitteln und den Mittelwert dieser Zustände berechnen:

$$\bar{O} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N O(\phi_n). \quad (2.72)$$

Bei genügend hoher Statistik hofft man, den Erwartungswert mit dem Mittelwert der Zustände annähern zu können. Wobei beachtet werden muss, dass die Mittelwertbildung erst stattfindet, wenn sich das simulierte System im Gleichgewicht befindet.

Bevor man die Theorie der Monte-Carlo-Simulationen näher betrachtet, ist es sinnvoll, sich zunächst mit Übergangswahrscheinlichkeiten und Markov-Prozessen zu beschäftigen. Man betrachtet ein statistisches System, das über ein erzeugendes Funktional beschrieben wird, und bei dem die Wahrscheinlichkeit  $P(\phi \leftarrow \phi')$ , dass ein Zustand  $\phi'$  in einen Zustand  $\phi$  übergeht, bekannt ist.

Da wir im erzeugenden Funktional nicht mehr einzelne Zustände im Speziellen, sondern immer nur die Gesamtheit an Zuständen betrachten und für den quellenlosen Fall auf eins normieren, betrachtet man im Allgemeinen die Zustandsdichte  $W(\phi)$ , für die gilt:

$$\int \mathcal{D}\phi W(\phi) = 1. \quad (2.73)$$

Die Änderung der Zustandsdichte eines speziellen Zustandes ist von der Übergangswahrscheinlichkeit  $P(\phi' \leftarrow \phi)$  abhängig:

$$W'(\phi') = \int \mathcal{D}\phi P(\phi' \leftarrow \phi) W(\phi). \quad (2.74)$$

Es ist klar, dass die Übergangswahrscheinlichkeit nicht negativ werden darf. Will man ein ergodisches System betrachten, so gilt für die Übergangswahrscheinlichkeit sogar:

$$P(\phi' \leftarrow \phi) > 0. \quad (2.75)$$

Auch wenn nicht jeder Zustand von jedem Zustand direkt erreichbar ist, so muss der Übergang zumindest über Zwischenzustände möglich sein.

In einer Markov-Kette betrachtet man eine Reihe von Zuständen, wobei der Übergang zwischen zwei Zuständen immer nur vom aktuellen Zustand und nicht von der Vergangenheit des Systems abhängt. Eine Markov-Kette hat sozusagen kein Gedächtnis.

Ein Prozess, der die oben dargestellten Bedingungen für die Übergangswahrscheinlichkeiten und die Zustandsdichte erfüllt, ist ein Markov-Prozess. Berechnet man aus einem gegebenen Zustand über die Übergangswahrscheinlichkeiten einen neuen Zustand, aus dem man dann wieder neue Zustände berechnet, die jeweils nur vom aktuellen Zustand abhängen, so erhält man eine Markov-Kette. Beginnt man eine solche Markov-Kette mit einer beliebigen Anfangsverteilung der Zustandsdichte, so sollte sich das System nach unendlich vielen Iterationen im Gleichgewichtszustand befinden. Die Übergangsraten zwischen zwei Zuständen sind dann in beiden Richtungen gleich. In diesem Fall spricht man von „detailed balance“.

Betrachtet man ein physikalisches System, das man simulieren will, so sind die verbleibenden Fragen, wie die Übergangswahrscheinlichkeiten richtig gewählt werden können und nach welchen Regeln das System mit jedem Schritt verändert werden soll. Hat man eine Antwort auf diese Fragen gefunden, so kann man die Markov-Kette simulieren. Die Simulation ist laut Definition ergodisch, und man wird nach ausreichend vielen Iterationen den Gleichgewichtszustand erreichen, kann also die Eigenschaften des Gleichgewichtszustandes untersuchen und Mittelwerte und somit auch Erwartungswerte physikalischer Observablen berechnen. Ein Vorgehen dieser Art ist bekannt als Monte-Carlo-Simulation.

### 2.3.4 Heatbath-Monte-Carlo-Algorithmus

Beim Heatbath-Monte-Carlo-Algorithmus werden die Übergangswahrscheinlichkeiten während der Simulation nicht angepasst. Sie nehmen von Anfang an die Werte an, die für den Gleichgewichtszustand angenommen werden. Man setzt die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\phi' \leftarrow \phi) = \frac{1}{Z_0} \exp(-S(\phi')). \quad (2.76)$$

$Z_0$  normiert das erzeugende Funktional, wie bereits aus Gleichung (2.20) bekannt. Aus der Definition des erzeugenden Funktionals folgt:

$$\int \mathcal{D}\phi' P(\phi' \leftarrow \phi) = 1. \quad (2.77)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gleich den Zustandsdichten im Gleichgewicht gewählt worden. Die gewählten Wahrscheinlichkeiten erfüllen offensichtlich alle Bedingungen für einen Markov-Prozess.

Wird auf einem zweidimensionalen Gitter (i,j) eine Wirkung der Form:

$$S(v_{ij}) = A_{ij} [v_{ij} - C_{ij}]^2 + B_{ij}, \quad (2.78)$$

mit  $A_{ij} > 0$  behandelt, wobei  $A_{ij}$ ,  $C_{ij}$  und  $B_{ij}$  während eines Monte-Carlo-Schrittes konstant gehalten werden und lediglich  $v_{ij}$  zufällig variiert wird, so folgt aus Gleichung 2.76, dass die definierte Übergangswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Parameter  $v_{ij}$  eine Gaußverteilung ist. Eine solche Wirkung wird bei den Arbeiten bezüglich der Burgers-Gleichung in Kapitel 5 untersucht werden.

Betrachtet man ein System auf einem Gitter, wie es in den numerischen Simulationen getan wird, so betrachtet man die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht global, da eine viel zu große Anzahl an Endzuständen möglich wäre. Es werden vielmehr die Übergänge einzelner Gitterpunkte mit lokaler Ergodizität betrachtet. Innerhalb eines Monte-Carlo-Schrittes werden nacheinander alle Gitterpunkte einzeln aufgegriffen und verändert, während die anderen Gitterpunkte konstant gehalten werden. Veranschaulicht bringt man die einzelnen Gitterpunkte nacheinander in Kontakt mit einem unendlich großen Wärmebad, daher der Name Heatbath-Algorithmus.

### 3 Aufstellung einer Renormierungsgruppengleichung nach dem Prinzip von Wegner und Houghton in $Z(2)$ -Symmetrie

Im folgenden Kapitel werde ich eine RGG nach Wegner und Houghton in  $Z(2)$ -Symmetrie herleiten und die Wirkung der  $\phi^4$ -Theorie mit Hilfe dieser Gleichung untersuchen.

Zunächst wird die RGG aufgestellt und erläutert, wie diese numerisch ausgewertet werden kann. Im zweiten Teil wird die RGG ausgewertet. Die Ergebnisse werden diskutiert und mit den bekannten Ergebnissen der perturbativen RG verglichen.

#### 3.1 Aufstellung der Renormierungsgruppengleichung

In diesem Abschnitt wird die RGG von Wegner und Houghton, die in Abschnitt 2.2.2 schon einmal erwähnt worden ist, in skalarer Feldtheorie behandeln. Warum ich mich für die Gleichung von Wegner und Houghton entschieden haben, wird im letzten Unterpunkt dieses Abschnittes (3.1.6) erklärt werden. Die RGG lautet:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \int' \left\{ -\frac{\delta S}{\delta \phi} \left( \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \phi} + \text{Tr} \left( \ln \left( \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} \right) \right) \right\} d^d p, \quad (3.1)$$

wobei hier nur renormiert und noch nicht reskaliert wird. Wir integrieren über die größten Impulse  $\Lambda$ , die wir nach jedem Schritt wieder auf  $\Lambda = 1$  reskalieren. Die Wirkung, die wir betrachten wollen, besteht aus einem kinetischen Teil und einem Teil, der die Wechselwirkungen enthält. Im Impulsraum schreiben wir:

$$S = S_{ww} + S_{kin}, \quad (3.2)$$

$$S_{kin} = \frac{1}{2} \int d^d p \vec{p}^2 \phi(\vec{p}) \phi(-\vec{p}), \quad S_{ww} = \sum_{i=2}^{\infty} S_{ww,i} = \sum_{i=2}^{\infty} \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d^d p_j \phi(\vec{p}_j) \right) \delta \left( \sum_{j=1}^i \vec{p}_j \right). \quad (3.3)$$

Wir legen an dieser Stelle fest, dass  $S_{ww}$  nur Terme mit einer geraden Anzahl an Feldern besitzt. Die Deltafunktion des Terms sichert die Impulserhaltung der Vertizes. Da wir, wie

oben bereits erwähnt, einen scharfen Cutoff betrachten und wir mit jedem RG-Schritt immer nur den größten Impuls  $\Lambda$  ausintegrieren, setzen wir im kinetischen Teil der Wirkung  $\vec{p}^2 = \Lambda^2$ .

Analog zur RGG nach Wilson wollen wir im Folgenden den ersten Term der Gleichung (3.1) als Linkterm und den zweiten Term als Loopterm bezeichnen. Die einzelnen Kopplungen der Wirkung werden durch drei Beiträge verändert: Einem Beitrag aus dem Loopterm  $\dot{\lambda}_{Lo,i}$ , einem aus dem Linkterm  $\dot{\lambda}_{Li,i}$  und einem Beitrag aus dem Reskalierungsschritt  $\dot{\lambda}_{Re,i}$ . In den folgenden drei Unterkapiteln sollen diese Beiträge näher erläutert und berechnet werden.

$$\dot{\lambda}_i = \dot{\lambda}_{Lo,i} + \dot{\lambda}_{Li,i} + \dot{\lambda}_{Re,i}. \quad (3.4)$$

### 3.1.1 Loopterm

Genau wie bei der RGG nach Wilson kann man sich den Loopterm wieder als Vertex vorstellen, bei dem man zwei Felder mit demselben Impulsbetrag, aber unterschiedlichem Vorzeichen ausintegriert. Für die doppelte Ableitung der einzelnen Komponenten der Wirkung gilt:

$$\frac{\delta S_{kin}}{\delta\phi(\vec{p})\delta\phi(-\vec{p})} = \Lambda^2, \quad \frac{\delta S_{ww,i}}{\delta\phi(\vec{p})\delta\phi(-\vec{p})} = i(i-1) \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^{i-2} d^d p_j \phi(p_j) \right) \delta\left(\left(\sum_{j=1}^{i-2} \vec{p}_j\right) + \vec{p} - \vec{p}\right). \quad (3.5)$$

In der RGG werden nur die Impulse vom Betrag  $\Lambda$  ausintegriert. Es verschwinden also nur diejenigen Terme der Wirkung nicht, in denen je ein Feld mit dem Impuls  $+\Lambda$  und ein Feld mit dem Impuls  $-\Lambda$  enthalten sind. Da die Impulse vom Betrag her gleich sind, ihr Vorzeichen aber unterschiedlich ist, heben sie sich in der Deltafunktion gerade heraus. Das garantiert auch nach dem RG-Schritt die Impulserhaltung des neuen Vertex.

Betrachtet man jetzt den Logarithmus, so kann man die folgenden Umformungen vornehmen:

$$\text{Tr} \left( \ln \left( \frac{\delta S}{\delta\phi(\vec{p})\delta\phi(-\vec{p})} \right) \right) = \text{Tr} \left( \ln \left( \Lambda^2 + 2\lambda_2 + 4 \cdot 3\lambda_4\phi^2 + 6 \cdot 5\lambda_6\phi^4 + \dots \right) \right) \quad (3.6)$$

$$= \text{Tr} \left( \ln \left( \left( \Lambda^2 + 2\lambda_2 \right) \left( 1 + \frac{4 \cdot 3\lambda_4\phi^2 + 6 \cdot 5\lambda_6\phi^4 + \dots}{\Lambda^2 + 2\lambda_2} \right) \right) \right) \quad (3.7)$$

$$= \text{Tr} \left( \ln \left( \Lambda^2 + 2\lambda_2 \right) + \ln \left( 1 + \frac{4 \cdot 3\lambda_4\phi^2 + 6 \cdot 5\lambda_6\phi^4 + \dots}{\Lambda^2 + 2\lambda_2} \right) \right). \quad (3.8)$$

In dieser Formel wurden die Integrale und die Deltafunktionen weggelassen, um die Übersicht nicht zu verlieren.

Wie in Gleichung (2.20) zu sehen, wird das erzeugende Funktional immer normiert. Der erste Logarithmus aus Formel (3.8) ist nicht abhängig von den Feldern und hebt sich bei der Normierung heraus. Er spielt daher keine Rolle und braucht nicht weiter beachtet zu werden.

Den zweiten Logarithmus aus Formel (3.8) können wir nach Taylor entwickeln in der Form:

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i}, \quad (3.9)$$

und erhalten die Gleichung:

$$\text{Tr} \left( \ln \left( \frac{\delta S}{\delta \phi(\vec{p}) \delta \phi(-\vec{p})} \right) \right) = \text{Tr} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \left( \frac{4 \cdot 3\lambda_4 \phi^2 + 6 \cdot 5\lambda_6 \phi^4 + \dots}{\Lambda^2 + 2\lambda_2} \right)^i \right). \quad (3.10)$$

Die Konvergenz dieser Reihe zu zeigen ist nicht trivial. Es bleibt anzumerken, dass es dann sinnvoll ist, die Reihe zu verwenden, wenn auch eine sinnvolle Approximation der Wirkung gewählt wurde, da beim Abbruch der Reihe genau die Terme wegfallen, die auch durch die Approximation unterdrückt werden. Die Frage, ob die Approximation letztlich sinnvoll ist, stellt den Anwender vor dieselben Konvergenzprobleme, die auch in der perturbativen Theorie auftauchen. Dies gilt auch für die geometrische Reihe, mit der wir im folgenden Abschnitt den Linkterm entwickeln werden.

Die Beiträge von Gleichung (3.10) kann man sich sehr schön mit Feynman-Graphen verdeutlichen, wobei wir zunächst einen neuen Propagator einführen:

$$\text{Prop} = \frac{1}{\Lambda^2 + 2\lambda_2}. \quad (3.11)$$

Wir können den Propagator umschreiben und mit der geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (3.12)$$

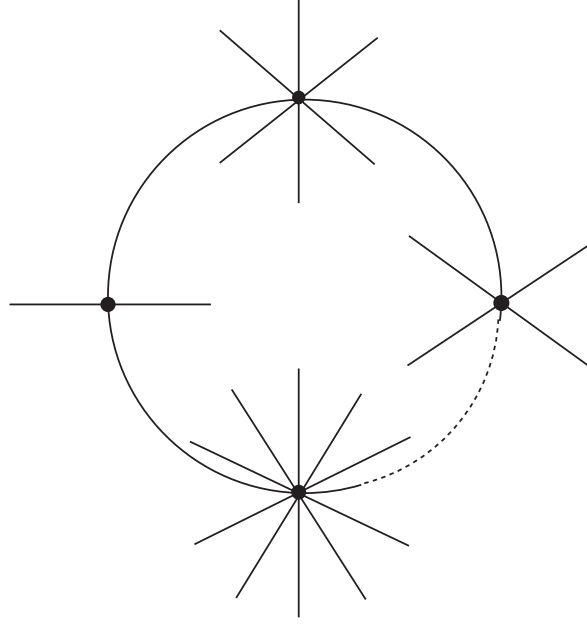
entwickeln. Wir erhalten:

$$\text{Prop} = \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{1 + \frac{2\lambda_2}{\Lambda^2}} = \frac{1}{\Lambda^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2\lambda_2}{\Lambda^2} \right)^k. \quad (3.13)$$

Mit dem Propagator  $\frac{1}{\Lambda^2}$  müssten wir bei jeder Verlinkung von zwei Vertices immer beachten, dass man zwischen die Vertices immer noch eine beliebige Anzahl an Zweivertices mit dem Impulsbetrag  $\Lambda$  einfügen könnte. Aus der Entwicklung in Gleichung (3.13) wird deutlich, dass wir die zusätzlichen Graphen alle schon in unserem renormierten Propagator zusammengefasst haben, und diese nicht gesondert betrachten müssen.

Man kann sehen, dass die Summe auf der rechten Seite von Gleichung (3.10) aus Summanden besteht, die jeweils  $i$  Vertices und  $i$  Propagatoren besitzen. Die zugehörigen Feynman-Graphen sind Loops über alle Vertices, die in einem Term vorkommen. Anschaulich dargestellt verlinken die Propagatoren die  $i$  Vertices in einer Reihe; die Spur und der letzte Propagator führen letztlich dazu, dass die beiden äußeren Vertices miteinander verbunden werden

und auf diese Weise der Loop geschlossen wird. Die Form der Graphen ist in Abbildung 3.1 dargestellt.



**Abbildung 3.1:** Schema eines Loop-Graphen

Glücklicherweise müssen in den RGGen nur Loops erster Ordnung mit identischen Impulsen betrachtet werden, wie Wegner und Houghton im Anhang ihrer Veröffentlichung bewiesen haben [WH73]. Feynman-Graphen, die mehrere Loops mit unterschiedlichen Impulsen haben, werden in mehreren RG-Schritten berechnet. In diesem Fall werden daher auch höhere Ordnungen beachtet.

Wie aus Gleichung (3.10) ersichtlich wird, hängen die jeweiligen Beiträge der Loops nicht von der Reihenfolge der Vertizes im Diagramm, sondern nur von der Anzahl der vorkommenden Vertizes ab. Man kann also die Zahl der Summanden beträchtlich verringern, indem man den Beitrag eines Loops, in dem bestimmte Vertizes vorkommen, nur einmal berechnet und dann den Beitrag mit der Zahl  $z$  multipliziert, die die Anzahl der identischen Beiträge angibt.  $z$  ergibt sich aus der Anzahl der möglichen Permutationen von  $N$  Elementen, die aus  $m$  Gruppen mit jeweils  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$  Elementen bestehen. Die Gruppen werden hierbei aus den vorkommenden Vertizes gebildet, die Anzahl der Elemente ist jeweils die Häufigkeit mit der ein Vertex vorkommt. Es gilt:

$$z = \frac{N!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_m!}. \quad (3.14)$$

Es werden alle möglichen Graphen berechnet, da die Spiegelungssymmetrie der Graphen bereits in dem Vorfaktor  $\frac{1}{2}$  in der RGG nach Wegner und Houghton beachtet worden ist. Der Faktor  $\frac{1}{i}$  aus Gleichung (3.10) sorgt dafür, dass die Drehsymmetrie des geschlossenen Loops berücksichtigt wird.



Um den Beitrag des Loopterms direkt hinschreiben zu können, müssen noch die Integrale über die Impulse ausgeführt werden. Die Integrale sind Oberflächenintegrale über eine  $d$ -dimensionale Kugel mit dem Radius  $\Lambda$ . Aus der Integration ergibt sich daher der Faktor:  $S_d = R^{d-1} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ . Zusätzlich erhalten wir aus der Fouriertransformation noch einen Faktor:  $\frac{1}{(2\pi)^d}$ .

Alles in allem gilt damit für den Beitrag des Loopterms:

$$\dot{\lambda}_{Lo} = \sum_{\text{alle möglichen Graphen}} \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \Lambda^{d-1} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{(-1)^{N+1}}{N} \text{Prop}^N \frac{N!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_m!} \prod_{i=1}^N (i(i-1)\lambda_i)^{k_i}. \quad (3.15)$$

### 3.1.2 Linkterm

Den Linkterm kann man sich analog zur RGG nach Wilson als Verknüpfung zwischen zwei Vertizes vorstellen, indem man jeweils zwei Propagatoren verbindet, bei denen die Impulse der Felder jeweils den Betrag  $\Lambda$ , in entgegengesetzter Richtung haben. Die Ableitungen, die im Linkterm der RGG nach Wegner und Houghton auftauchen, kann man folgendermaßen ausführen:

$$\frac{\delta S_{kin}}{\delta \phi(\vec{p})} = \int d^d p \Lambda^2 \phi(-\vec{p}), \quad \frac{\delta S_{ww,i}}{\delta \phi(\vec{p})} = i \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^{i-1} d^d p_j \phi(\vec{p}_j) \right) \delta\left(\left(\sum_{j=1}^{i-1} \vec{p}_j\right) + \vec{p}\right), \quad (3.16)$$

$$\frac{\delta S_{ww,i}}{\delta \phi(\vec{p})} \frac{\delta S_{ww,j}}{\delta \phi(-\vec{p})} = i \cdot j \int \lambda_i \left( \prod_{n=1}^{i-1} d^d p_n \phi(\vec{p}_n) \right) \delta\left(\left(\sum_{n=1}^{i-1} \vec{p}_n\right) + \vec{p}\right) \cdot \int \lambda_j \left( \prod_{m=1}^{j-1} d^d p_m \phi(\vec{p}_m) \right) \delta\left(\left(\sum_{m=1}^{j-1} \vec{p}_m\right) - \vec{p}\right). \quad (3.17)$$

In der unteren Gleichung kann man nun die beiden Deltafunktionen umschreiben:

$$\delta\left(\left(\sum_{n=1}^{i-1} \vec{p}_n\right) + \vec{p}\right) \cdot \delta\left(\left(\sum_{m=1}^{j-1} \vec{p}_m\right) - \vec{p}\right) = \delta\left(\left(\sum_{n=1}^{i-1} \vec{p}_n\right) + \left(\sum_{m=1}^{j-1} \vec{p}_m\right)\right) \cdot \delta\left(\left(\sum_{m=1}^{j-1} \vec{p}_m\right) - \vec{p}\right). \quad (3.18)$$

In der umgeschriebenen Form wird deutlich, dass die erste Deltafunktion die Impulserhaltung des neuen zusammengesetzten Vertex garantiert. Die zweite Deltafunktion muss später noch genauer betrachtet werden. Sie führt zu Problemen, da die Betrachtung der Abhängigkeiten der Kopplungen von den Impulsen im numerischen Programm nicht umgesetzt werden konnte. Dies wird in Abschnitt 3.1.5 näher erläutert.

Die doppelte Ableitung wurde bereits in Gleichung (3.5) berechnet. Für den Linkterm müssen wir diese Gleichung jetzt noch invertieren und vereinfachen. Hierzu bedienen wir uns eines

Tricks, der auch in der Störungstheorie angewendet wird. Wir betrachten die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}. \quad (3.19)$$

Mit Gleichung (3.5) und der Schreibweise aus Gleichung (3.8) ergibt sich:

$$\left( \frac{\delta S}{\delta \phi(\vec{p}) \delta \phi(-\vec{p})} \right)^{-1} = \frac{1}{\Lambda^2 + 2\lambda_2 + 4 \cdot 3\lambda_4 \phi^2 + 6 \cdot 5\lambda_6 \phi^4 + \dots} \quad (3.20)$$

$$= \frac{1}{\Lambda^2 + 2\lambda_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4 \cdot 3\lambda_4 \phi^2 + 6 \cdot 5\lambda_6 \phi^4 + \dots}{\Lambda^2 + 2\lambda_2}} \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{\Lambda^2 + 2\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4 \cdot 3\lambda_4 \phi^2 + 6 \cdot 5\lambda_6 \phi^4 + \dots}{\Lambda^2 + 2\lambda_2} \right)^k. \quad (3.22)$$

Wie im Unterkapitel über den Loopbeitrag wird auch hier der renormierte Propagator  $\text{Prop} = \frac{1}{\Lambda^2 + 2\lambda_2}$  identifiziert. Jetzt wird jeweils von links und von rechts die einfache Ableitung der Wirkung multipliziert und man erhält:

$$\begin{aligned} S_{\text{Li}} &= \frac{1}{2} \int_p' \left( - \left[ \Lambda^2 \phi + 2\lambda_2 \phi + 4\lambda_4 \phi^3 + 6\lambda_6 \phi^5 + \dots \right] \times \right. \\ &\quad \times \frac{1}{\Lambda^2 + 2\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4 \cdot 3\lambda_4 \phi^2 + 6 \cdot 5\lambda_6 \phi^4 + \dots}{\Lambda^2 + 2\lambda_2} \right)^k \times \\ &\quad \times \left. \left[ \Lambda^2 \phi + 2\lambda_2 \phi + 4\lambda_4 \phi^3 + 6\lambda_6 \phi^5 + \dots \right] \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Diese Gleichung kann man mit Feynman-Graphen folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} S_{\text{Li}} &= \frac{1}{2} \int_p' \left\{ - \left[ 2 \text{---} \bullet \text{---} + 4 \text{---} \bullet \text{---} + 6 \text{---} \bullet \text{---} + 8 \text{---} \bullet \text{---} + \dots \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{Prop}^{k+1} \left( 4 \cdot 3 \text{---} \bullet \text{---} + 6 \cdot 5 \text{---} \bullet \text{---} + 8 \cdot 7 \text{---} \bullet \text{---} + \dots \right)^k \right] \times \\ &\quad \times \left. \left[ 2 \text{---} \bullet \text{---} + 4 \text{---} \bullet \text{---} + 6 \text{---} \bullet \text{---} + 8 \text{---} \bullet \text{---} + \dots \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Wenn man die Gleichung ausmultipliziert erhält man Feynman-Graphen der Form, wie sie in Abbildung (3.2) zu sehen ist. Jede Kombination an Vertizes ist in einer Reihe über Links verbunden.

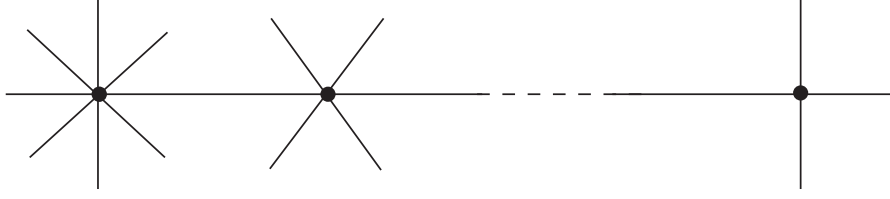


Abbildung 3.2: Schema eines Link-Graphen.

Nach Gleichung (3.23) werden auch Graphen erzeugt, bei denen als äußere Vertizes Zweier-Vertizes stehen. Aufgrund der Impulserhaltung haben diese zwei Impulse mit dem gleichen Betrag. Die genannten Diagramme haben nach dem RG-Schritt immer noch Enden mit einem Impuls vom Betrag  $|\Lambda|$ , der dann außerhalb des betrachteten Impulsbereichs liegt. Daher müssen diese Graphen in späteren RG-Schritten nicht mehr beachtet werden und wir können die Terme  $\Lambda^2\phi + 2\lambda_2\phi$  in Gleichung (3.23) weglassen.

Die Integration über die Impulse fällt mit Hilfe der zweiten Deltafunktion aus Gleichung (3.18) weg, und auch der Vorfaktor aus der Fouriertransformation hebt sich mit dem Vorfaktor auf, der in der Deltafunktion enthalten ist.

Schreiben wir nun  $S'_{Li}$  auf der linken Seite von Gleichung (3.23) als Summe aus, so sehen wir, dass für den Beitrag des Linkterms für die veränderten Kopplungen gilt:

$$\dot{\lambda}_{Li} = \sum_{\text{alle möglichen Graphen}} \frac{1}{2} (-\text{Prop})^{N-1} l \lambda_l \dots m(m-1) \lambda_m \dots n \lambda_n. \quad (3.25)$$

Hierbei ist  $l$  der Index des äußersten linken,  $m$  der Index eines mittleren und  $n$  der Index des äußersten rechten Vertex. An Graphen sind alle Kombinationen an Vertizes möglich, die in einer Reihe verbunden werden. Wie wir bereits beim Loopterm gesehen haben, muss die Spiegelung dabei nicht beachtet werden, da diese im Faktor  $\frac{1}{2}$  in der RGG berücksichtigt ist.

### 3.1.3 Reskalierungsterm

Im letzten Teilschritt müssen die Größen des Systems noch reskaliert werden, sodass wir im nächsten Schritt wieder den Impuls  $\Lambda$  als größten Impuls betrachten und ausintegrieren können. Die hergeleiteten Reskalierungsterme wurden auf diese Art und Weise schon in der Dissertation von Dirk Homeier [Hom06] verwendet und wurden auch schon in den Veröffentlichungen von C. Bervillier [Ber04] und G. R. Goldner [Gol98] aufgestellt.

Zunächst muss eine Abhängigkeit der Impulsskala von der ursprünglichen Impulsskala zu Beginn der RG-Zeitrechnung festgelegt werden:

$$\Lambda = \Lambda_0 \exp\{-t\}. \quad (3.26)$$

Wird die gesamte Impulsskala reskaliert, so liegt es auf der Hand, dass das Verhältnis zwischen zwei Impulsen konstant bleiben muss. Es gilt also:

$$\frac{p}{\Lambda} = \text{konst.} \quad (3.27)$$

Wird  $\Lambda'$  auf den Wert  $\Lambda$  verschoben, so muss auch der Impuls  $p$  verschoben werden, damit die dimensionslose Größe aus Gleichung (3.27) konstant bleibt. Die Impulsskala wird nach oben verschoben und somit werden die Impulse künstlich erhöht. Um die makroskopischen Größen, die sich aus der Wirkung berechnen lassen, konstant zu halten, muss man der RGG Terme hinzufügen, die den Reskalierungsschritt ausgleichen. Die Impulse sollten auf folgende Art skalieren:

$$\dot{p} = -p. \quad (3.28)$$

Die üblichen Terme der von uns betrachteten Wirkung haben die Form:

$$\int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d^d p_j \phi(\vec{p}_j) \right) \delta\left(\sum_{j=1}^i \vec{p}_j\right). \quad (3.29)$$

Reskaliert man die Impulsskala, so wird auch das Integrationsmaß reskaliert und man muss als Ausgleich einen entsprechenden Term in die RGG einbauen. Dieser hängt offensichtlich direkt mit der Anzahl der Felder zusammen, da die Anzahl der Integrationen über  $p$  gleich der Anzahl der im Term enthaltenen Felder ist. Es muss noch beachtet werden, dass in jedem Term eine Integration über die Deltafunktion gelöst und daher nicht umskaliert wird. Eine  $d$ -dimensionale Integration über  $p$  skaliert offensichtlich mit  $d$ . Wir können jetzt den aus dem Integrationsmaß resultierenden Term in der RGG schreiben als:

$$+ dS - d \left( \int \phi \frac{\delta S}{\delta \phi} d^d p \right). \quad (3.30)$$

Mit dem ersten Term wird die Deltafunktion ausgeglichen. Der Operator  $\phi \frac{\delta S}{\delta \phi}$  zählt die Anzahl der Felder in den Termen der Wirkung.

Um sicherzustellen, dass die Kopplung an ein mögliches äußeres Feld konstant bleibt, müssen auch die Felder sowohl renormiert als auch reskaliert werden. Zunächst wollen wir für den Beitrag der Renormierung definieren:

$$\phi = \mu(l) \phi'. \quad (3.31)$$

Die gestrichenen sollen dabei immer die renormierten Größen sein.  $l$  ist definiert als:  $l = \frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ . Wir schauen uns zunächst das Skalierungsverhalten der Zweipunktfunktion an. Skaliert das Feld mit der kanonischen Dimension  $D_\phi$ , so gilt:

$$G(p, S) = \langle \phi \phi \rangle(p) = \mu \mu \langle \phi' \phi' \rangle(p) = \mu^2 l^{-D_\phi} l^{-D_\phi} \langle \phi' \phi' \rangle(lp) = G(lp, S'). \quad (3.32)$$

In der Nähe eines Fixpunktes bleibt die Wirkung annähernd konstant, das Skalieren der Zweipunktfunktion ist aber bekannt:

$$G(p, S) = l^{\{-D_\phi - D_\phi + \frac{\eta_\phi}{2} + \frac{\eta_\phi}{2}\}} G(lp, S). \quad (3.33)$$

Es gilt also offensichtlich:

$$\mu(l) = l^{+\frac{\eta_\phi}{2}}. \quad (3.34)$$

Die dimensionslose Größe, die bei der Kombination von Renormierung und Reskalierung konstant bleiben soll, ist gegeben als:

$$\phi'' = l^{-D_\phi + \frac{\eta_\phi}{2}} \phi \Lambda_0^{-D_\phi + \frac{\eta_\phi}{2}}. \quad (3.35)$$

An dieser Stelle kann man also direkt ablesen, auf welche Weise die Felder skalieren sollen:

$$\dot{\phi} = -(D_\phi - \frac{\eta_\phi}{2})\phi. \quad (3.36)$$

Analog zum Vorgehen beim Integralmaß, müssen wir auch hier wieder einen Term zur RGG hinzufügen. Dieser lautet:

$$-(D_\phi - \frac{\eta_\phi}{2}) \left( \int \phi \frac{\delta S}{\delta \phi} d^d p \right). \quad (3.37)$$

Jetzt muss nur noch ein weiterer Term der RGG eingebaut werden. Dieser Term kümmert sich um die direkte Renormierung der Impulse  $\vec{p}$  und ist direkt von den Potenzen der Impulse in den einzelnen Termen der Wirkung abhängig. Eine Ableitung nach den Feldern und eine innere Ableitung nach den Impulsen bestimmt die Potenz der Impulse. Der Term lautet:

$$- \int \phi \vec{p} \frac{\partial'}{\partial \vec{p}} \frac{\delta S}{\delta \phi} d^d p. \quad (3.38)$$

Hierbei bedeutet  $\partial'$ , dass die Ableitung nach den Impulsen nicht auf die Deltafunktionen wirkt. Mit den Gleichungen (3.30), (3.37) und (3.38) können wir jetzt die RGG im Sinne der Reskalierung vervollständigen und erhalten:

$$\begin{aligned} \dot{S} = & \frac{1}{2} \int' \left\{ -\frac{\delta S}{\delta \phi} \left( \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \phi} + \text{Tr} \left( \ln \left( \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} \right) \right) \right\} d^d p - d \left( \int \phi \frac{\delta S}{\delta \phi} d^d p \right) + dS \\ & - (D_\phi - \frac{\eta_\phi}{2}) \left( \int \phi \frac{\delta S}{\delta \phi} d^d p \right) - \int \phi \vec{p} \frac{\partial'}{\partial \vec{p}} \frac{\delta S}{\delta \phi} d^d p. \end{aligned} \quad (3.39)$$

In unserem Fall betrachten wir eine lokale Potenzial Approximation, in der die anomalen Dimensionen der Felder verschwinden. Es gilt also:

$$\eta_\phi = 0. \quad (3.40)$$

Die kanonischen Dimensionen der Felder kann man sich über eine Dimensionsanalyse des kinetischen Terms der Wirkung herleiten. In unserem Fall gilt:

$$D_\phi = \frac{-d-2}{2}. \quad (3.41)$$

Es ergibt sich für den Beitrag der Reskalierung in einem RG-Schritt an den einzelnen Kopplungen:

$$\dot{\lambda}_{Re,i} = i\lambda_i \frac{-d+2}{2} + d\lambda_i. \quad (3.42)$$

Damit erhalten wir zum Beispiel für die ersten Vertizes bei  $d = 4$  die Reskalierungsterme:

$$\lambda_{2,Re} = +2\lambda_2, \quad \lambda_{4,Re} = 0, \quad \lambda_{6,Re} = -2\lambda_6, \quad \lambda_{8,Re} = -4\lambda_8. \quad (3.43)$$

Dies entspricht den Erwartungen, da die höheren Kopplungen irrelevant sein sollten und nach vielen RG-Schritten über die Reskalierung zerfallen, die Vierer-Kopplung durch die Reskalierung aber unverändert bleibt.

### 3.1.4 Vollständige Renormierungsgruppengleichung

Wir können jetzt die in den letzten drei Unterkapiteln ausgearbeiteten Terme der RGG zusammenführen. Die Kopplungen verändern sich im Rahmen eines RG-Schrittes wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i = & \sum_{\text{Lo}} \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \Lambda^{d-1} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{(-1)^{N+1}}{N} \left( \frac{1}{\Lambda^2 + 2\lambda_2} \right)^N \frac{N!}{k_1!k_2!k_3!\dots k_m!} \prod_{j=1}^N (j(j-1)\lambda_j)^{k_j} \\ & + \sum_{\text{Li}} \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\Lambda^2 + 2\lambda_2} \right)^{N-1} l\lambda_l \dots m(m-1)\lambda_m \dots n\lambda_n + i\lambda_i \frac{-d+2}{2} + d\lambda_i. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Hierbei geht die Summe der Loops und die Summe der Links über alle im oben beschriebenen Rahmen möglichen Feynman-Graphen, die zu einem Vertex mit  $i$  Propagatoren führen.

Es hat sich herausgestellt, dass die Werte der großen Kopplungen bei Rechnungen schnell wachsen. Daher werden wir im weiteren Verlauf die Kopplungen wie folgt normieren:

$$\lambda_i = \frac{\lambda'_i}{i!}. \quad (3.45)$$

Dies ist auch die gängige Definition der Kopplungen in der Literatur. Die Gleichung (3.44) wird dann zu:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i = & i! \sum_{\text{Lo}} \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \Lambda^{d-1} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{(-1)^{N+1}}{N} \left( \frac{1}{\Lambda^2 + \lambda_2} \right)^N \frac{N!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_m!} \prod_{j=1}^N \left( j(j-1) \frac{\lambda_j}{j!} \right)^{k_j} \\ & + i! \sum_{\text{Li}} \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{\Lambda^2 + \lambda_2} \right)^{N-1} l \frac{\lambda_l}{l!} \dots m(m-1) \frac{\lambda_m}{m!} \dots n \frac{\lambda_n}{n!} + i\lambda_i \frac{-d+2}{2} + d\lambda_i. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Für den Propagator gilt damit:

$$\text{Prop} = \frac{1}{\Lambda^2 + \lambda_2}. \quad (3.47)$$

Gleichung (3.46) lässt sich für niedrige Kopplungen analytisch behandeln, für Kopplungen mit höheren Potenzen der Felder wird dies aufgrund der steigenden Anzahl an Termen aber schnell sehr mühselig. Hier ist es sinnvoll, die Terme numerisch zu berechnen. Ich habe daher ein C++ Programm erstellt, das im nächsten Abschnitt näher erläutert wird.

Veranschaulicht man Gleichung (3.46) mit Hilfe von Feynman-Graphen, so ergibt sich für die ersten beiden Vertizes nach einem RG-Schritt:

$$\lambda'_2 = \lambda_2 + \left( 4 \cdot 3 \text{---} \text{---} \text{---} + 2\lambda_2 \right) \cdot \Delta t, \quad (3.48)$$

$$\lambda'_4 = \lambda_4 + \left( 6 \cdot 5 \text{---} \text{---} \text{---} - (4 \cdot 3)^2 \text{---} \text{---} \text{---} + (4-d) \lambda_4 \right) \Delta t. \quad (3.49)$$

### 3.1.5 Numerische Umsetzung der Renormierungsgruppengleichung

Um die RGG und den RG-Fluss genauer untersuchen zu können, habe ich ein C++ Programm geschrieben, das im Wesentlichen die Gleichung (3.46) simuliert. Als Vorlage wurde hierbei ein bestehendes C++ Programm von Dirk Homeier verwendet, das zur Untersuchung der Wilson-Fisher-RGG entworfen worden ist. In meinem Programm ist die maximale Ordnung der Wirkung beliebig einstellbar, sodass auch sehr komplexe Systeme betrachtet werden können. Die möglichen Graphen werden automatisch erstellt und ihr Beitrag zum RG-Fluss berechnet. Das Programm hat die Besonderheit, dass die Dimension als reelle Zahl frei wählbar ist. Somit ist auch  $\epsilon$  dynamisch einstellbar. Das Programm ist also sehr gut dazu geeignet, die  $\epsilon$ -Entwicklung zu untersuchen.

Numerisch kann die RG-Zeit nicht in infinitesimalen Schritten verändert werden, sondern schreitet in endlichen Schritten voran. Die Schrittweite wird vor dem Start des Programms

gewählt. Das Programm kann die Schrittweite auch automatisch anpasst, je nachdem, ob der RG-Fluss sich gerade stark oder nur schwach verändert. Die Schrittweitenanpassung wird nach den Regeln des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens Nullter Ordnung durchgeführt.

Die Kopplungen  $\lambda_i$  der Wirkung sind bekanntermaßen impulsabhängig:  $\lambda_i = \lambda_i(p_1, p_2, \dots, p_i)$  und sollten für unterschiedliche Impulskombinationen unterschiedliche Werte annehmen können. Hierfür habe ich den Fall betrachtet, dass die Impulsskala in siebzig äquidistante Impulse (fünfunddreißig positive und fünfunddreißig negative Impulse) aufgeteilt wird. Zwei Kopplungen, die von denselben Impulsen abhängen, sollten gleich groß sein, unabhängig von der Reihenfolge, mit der die Impulse auf die Felder verteilt werden. Somit reicht es aus, die Impulse der Kopplungen der Größe nach geordnet zu betrachten, wenn die Kopplungen noch mit einem Symmetriefaktor gewichtet werden, der die Permutationen der Impulse berücksichtigt. Leider erhielt ich selbst unter Verwendung dieser Einschränkung und unter Berücksichtigung der Impulserhaltung über  $10^9$  verschiedene Kombinationen, die Impulse auf einen Achtervertex zu verteilen. Jede dieser Kombinationen steht für eine Kopplung, die im RG-Fluss betrachtet werden muss. Es leuchtet unmittelbar ein, dass dies alle zur Verfügung stehenden Rechen- und Speicherkapazitäten weit übersteigen würde. Erschwerend kommt hinzu, dass das Programm mit sogenannten „Linked Lists“ arbeitet, die zwar den benötigten Speicher und die benötigte Rechenzeit stark verringern, eine sinnvolle Parallelisierung aber unmöglich machen. Aus diesem Grund wollen wir im Folgenden nur Kopplungen betrachten, die nicht von jedem Impuls der Felder abhängen.

Um eine Auswertung des RG-Flusses zu erleichtern, habe ich zwei weitere C++ Programme geschrieben. Mit dem ersten Programm kann man das RG-Programm für verschiedene Startwerte der Kopplungen starten. Die Startwerte, die berechnet werden, werden vor dem Start angegeben und es ist möglich, alle oder einzelne Kopplungen systematisch durchzufahren. Die Ergebnisse des RG-Flusses werden in einem Ordner ausgegeben, wobei jede Startkombination eine eigene Ausgabedatei erhält. Das zweite Programm erstellt einen Plotfile. Hier kann ausgewählt werden, welche Parameter der Ausgabedateien in einem Plot gegeneinander dargestellt bzw. aus welchen Dateien die Parameter eingelesen werden sollen. Auch hier können die Startwerte einzelner oder aller Kopplungen durchgefahen werden.

Die beiden Programme ermöglichen es, den RG-Fluss mit z.B. mehreren hundert Startwerten automatisch zu berechnen und ohne Aufwand mit Diagrammen untersuchen zu können. So kann der RG-Fluss auch in mehrdimensionalen Systemen nach Fixpunkten etc. untersucht werden.

Um sicher zu gehen, dass das RG-Programm die richtigen Ergebnisse liefert, habe ich zusätzlich ein Programm mit Maple geschrieben, das einen einzelnen RG-Schritt mit beliebigen Startwerten bis maximal zur Achterkopplung berechnen kann. Die Ergebnisse für zufällig ausgewählte Schritte des C++ Programms stimmten mit den Ergebnissen des Kontrollprogramms exakt überein.

#### 3.1.6 Gleichung nach Wilson und Polchinski

Auch die Gleichung nach Wilson und Polchinski, wie sie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben wurde, hätte sich zur Untersuchung der RG-Flüsse angeboten. Der Unterschied zur RGG von



Wegner und Houghton ist, dass die Cutoff-Funktion, die bei Wilson als stetige, impulsabhängige Funktion eingeführt wird, bei Wegner und Houghton als scharfer Cutoff gewählt wird. Die Impulse werden hier nur zwischen der größten Skala  $\Lambda$  und der intermediären Skala  $\Lambda'$  ausintegriert, bei Wilson geht das Integral über den gesamten Impulsbereich, ist aber mit der Cutoff-Funktion gewichtet, so dass die großen Impulse fast vollständig ausintegriert werden, die kleinen Impulse aber nicht. Die RGG von Wegner und Houghton geht als Spezialfall aus der RGG nach Wilson und Polchinski hervor, wenn die Cutoff-Funktion als scharfer Cutoff eingeführt wird.

Zunächst wurde auch die RGG nach Wilson und Polchinski untersucht. Es kam aber bei der Einführung der Cutoff-Funktion zu Problemen. Diese sollte von den Impulsen abhängen. Wie im vorherigen Abschnitt 3.1.5 aber bereits erläutert, ist eben die Betrachtung der Impulse im Rahmen der numerischen Möglichkeiten nicht realisierbar. Bei der Einführung eines scharfen Cutoffs kommt es nicht zu derartigen Problemen, da hier die Impulsabhängigkeit wegfällt. Daher habe ich mich für die Arbeit mit der RGG nach Wegner und Houghton entschieden.

Auch für die RGG nach Wilson und Polchinski wurde eine RGG aufgestellt und ein numerisches Programm für die Auswertung der Gleichung geschrieben. Die Cutoff-Funktion konnte aber nur als scharfer Cutoff in das Programm eingeführt werden.

## 3.2 Ergebnisse der Renormierungsgruppengleichung

### 3.2.1 Renormierungsgruppenfluss

Um die eigenen Ergebnisse gut mit der Literatur vergleichen zu können, habe ich zunächst eine Wirkung der skalaren  $\phi^4$ -Theorie untersucht. Diese besteht nur aus der Zweier- und der Vierer-Kopplung. Der resultierende zweidimensionale Kopplungsraum lässt sich noch relativ einfach untersuchen, und Fixpunkte und kritische Exponenten lassen sich deutlich einfacher bestimmen als im mehrdimensionalen Fall.

In Abbildung 3.3 ist der RG-Fluss im Kopplungsraum gezeigt. Jede Linie ist eine Flusslinie mit unterschiedlichen Startwerten. Wie erwartet ist im Ursprung deutlich der Gaußsche Fixpunkt zu sehen, aus dem der RG-Fluss herausfließt. Der Wilson-Fisher-Fixpunkt hat sich bei  $d = 3.0$  bereits weit vom Gaußschen Fixpunkt entfernt und besonders der Wert der Vierer-Kopplung ist gestiegen. Er hat zwei attraktive und zwei repulsive Richtungen. Von einer kritischen Trajektorie aus dem Gaußschen Fixpunkt und von großen Werten der Vierer-Kopplung nähert sich der RG-Fluss dem Wilson-Fisher-Fixpunkt. Mit zunehmender und abnehmender Zweier-Kopplung entfernt sich der Fluss von dem Fixpunkt.

Ein weiterer Fixpunkt ist bei  $\lambda_2 = -1.0$  zu sehen. Dieser Fixpunkt entsteht, da der Propagator Prop für  $\Lambda = 1.0$  und  $\lambda_2 = -1.0$  divergiert. Er existiert also nur aufgrund unserer Wahl des Propagators.

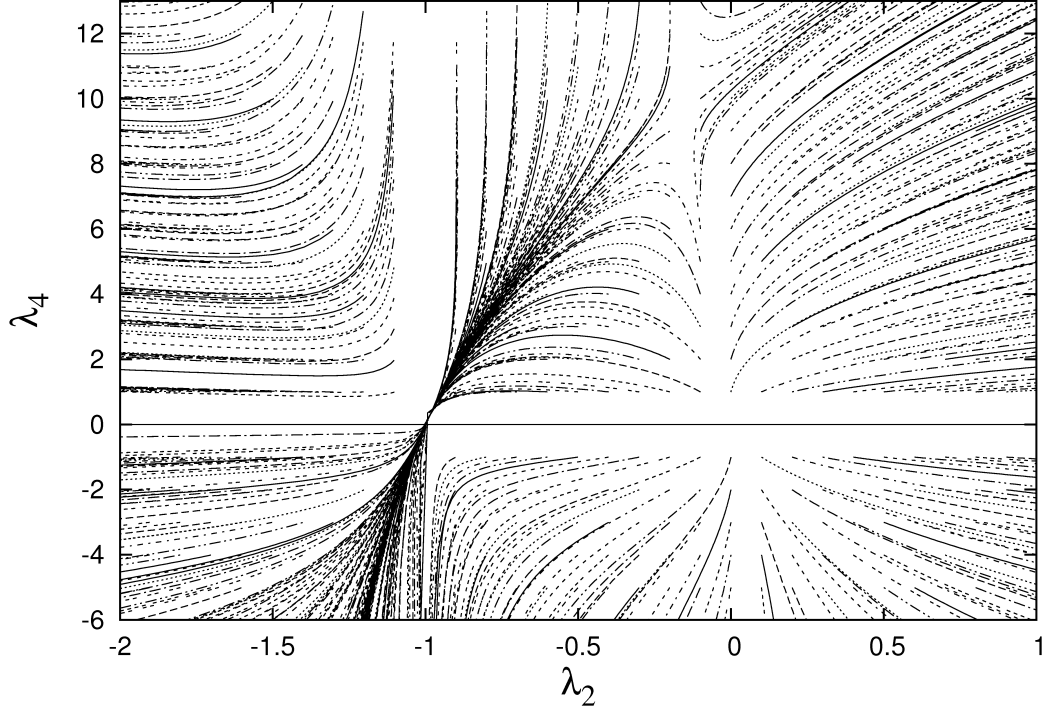


Abbildung 3.3: RG-Fluss bei  $d = 3.0$  und  $\Lambda=1.0$ .

### 3.2.2 $\beta$ -Funktion und Wilson-Fisher-Fixpunkt

In diesem Unterkapitel wollen wir die  $\beta$ -Funktion der Vierer-Kopplung berechnen. Aus unserer RGG folgt nach einem RG-Schritt:

$$\lambda'_4 = \lambda_4 + \left[ -\frac{1}{2} \cdot 72 \frac{2\Lambda^{n-1}(\pi)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})(2\pi)^d} \left( \frac{1}{\Lambda^2 + \lambda_2} \right)^2 \frac{(\lambda_4)^2}{24} + 4\lambda_4 \frac{-d+2}{2} + d\lambda_4 \right] dt. \quad (3.50)$$

In  $\phi^4$ -Theorie ist dies also die Gleichung mit der das numerische Programm die Vierer-Kopplung im Rahmen eines RG-Schrittes verändert. Die  $\beta$ -Funktion von  $\lambda_4$  kann daher für eine infinitesimale Schrittweite direkt abgelesen werden. Es gilt offensichtlich für  $\Lambda = 1.0$ :

$$\beta_4(\vec{\lambda}) = -\frac{\partial \lambda_4}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial \lambda_4}{\partial \Lambda} = + \frac{3}{\Gamma(\frac{d}{2})} \cdot \frac{1}{2^d(\pi)^{\frac{d}{2}}} \left( \frac{1}{1 + \lambda_2} \right)^2 (\lambda_4)^2 - (4-d)\lambda_4. \quad (3.51)$$

Wir wollen nun den Fall  $d \approx 4.0$  betrachten. Zusätzlich wollen wir von einer masselosen Theorie ausgehen, also  $\lambda_2$  gleich Null setzen. Diese Bedingung ist in der Nähe des Gaußschen und des Wilson-Fisher-Fixpunktes in guter Näherung erfüllt. Für die  $\beta$ -Funktion ergibt sich:

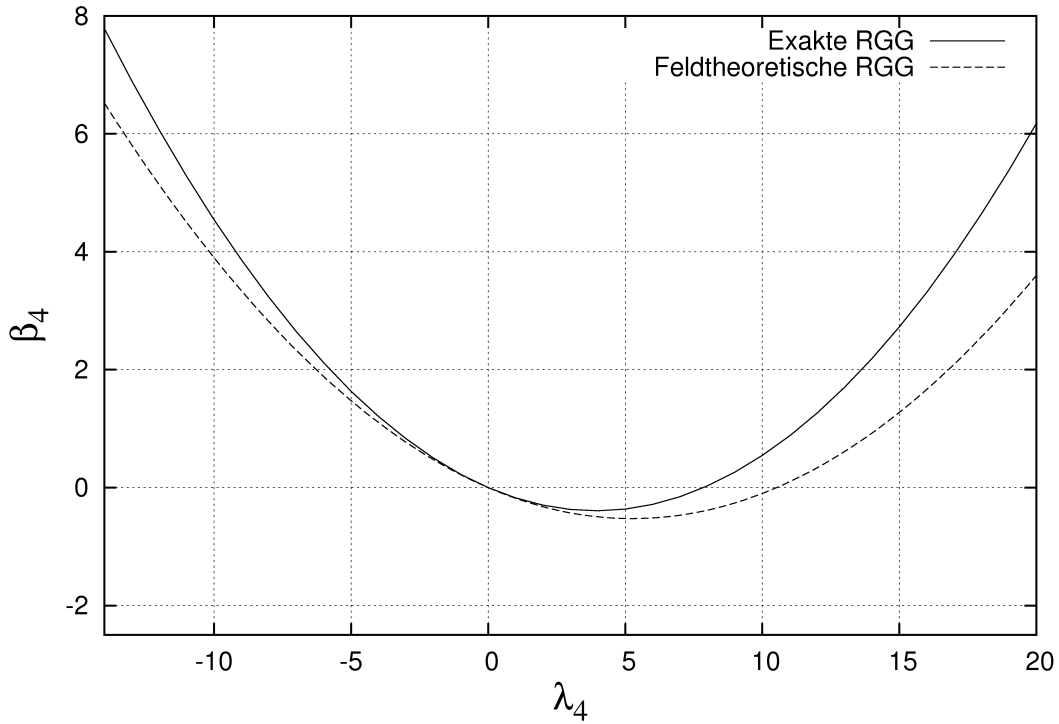
$$\beta_4(\vec{\lambda}) = + \frac{3\lambda_4^2}{16\pi^2} - (4-d)\lambda_4. \quad (3.52)$$

Die Ergebnisse des numerischen Programms stimmen hiermit exakt überein. Im Rahmen der  $\phi^4$ -Theorie konnte also die richtige Funktionsweise des Programms mit positivem Ergebnis kontrolliert werden.

In der Literatur findet man Werte für die  $\beta$ -Funktion [PS95] des Vierervertex in skalarer  $\phi^4$ -Theorie, die im Rahmen der feldtheoretischen RG berechnet worden sind. Hierbei wurde die  $\beta$ -Funktion für den Fall  $d = 4.0$  über einer Störungsrechnung aus der Callan-Symanzik-Gleichung bestimmt und dann für Dimensionen  $d \approx 4$  linear genähert. Es gilt demnach:

$$M \frac{d\lambda_4}{dM} = \beta \approx + \frac{3\lambda_4^2}{16\pi^2} - (4 - d) \lambda_4, \quad (3.53)$$

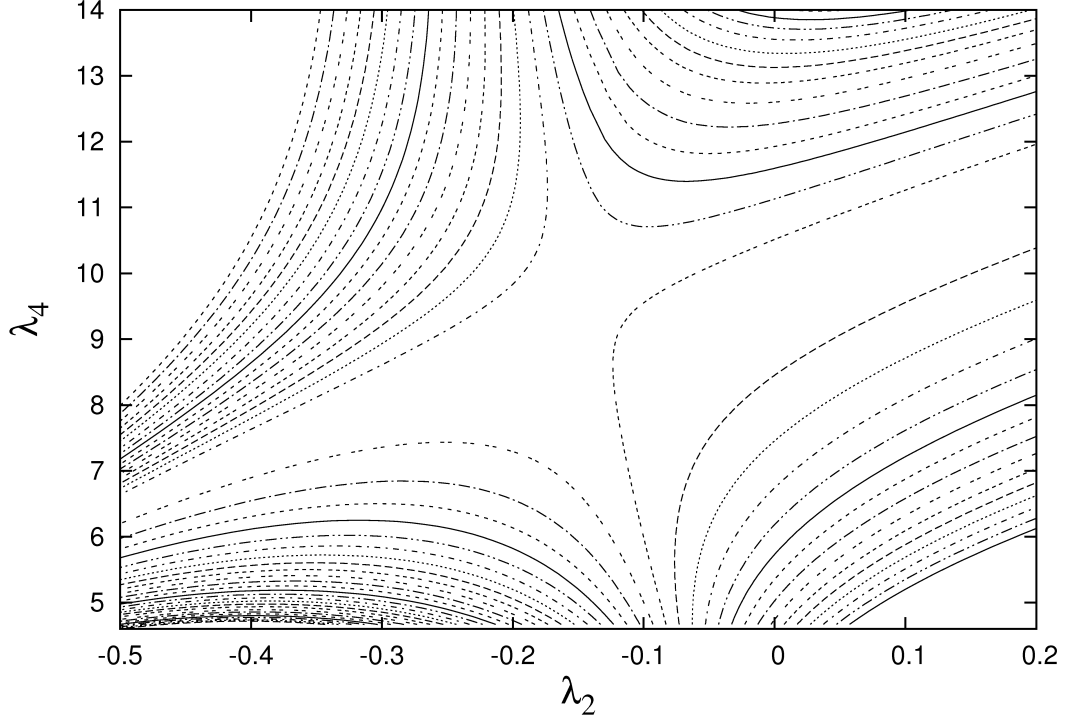
wobei M die betrachtete Impulsskala ist. Die Ergebnisse sind offensichtlich mit unseren identisch und die von uns berechnete  $\beta$ -Funktion wird somit bestätigt.



**Abbildung 3.4:**  $\beta$ -Funktionen bei  $d = 3.8$ .

In Abbildung 3.4 sieht man die  $\beta$ -Funktionen aufgetragen, die sich aus meinem numerischen RG-Programm und der Näherung in Störungstheorie ergeben. In meinem Programm wurde Gleichung (3.51) in masseloser Theorie benutzt. Beide  $\beta$ -Funktionen schneiden zweimal die Nullachse. Für  $\beta_4(\vec{\lambda}) = 0$  verändert sich die Kopplung nicht mehr. Hier liegen offensichtlich der Gaußsche und der Wilson-Fisher-Fixpunkt.

In Abbildung 3.5 ist noch einmal der Wilson-Fisher-Fixpunkt gezeigt. Wie bereits in der Theorie beschrieben, läuft der Wilson-Fisher-Fixpunkt aus dem Gaußschen Fixpunkt heraus,



**Abbildung 3.5:** Wilson-Fisher-Fixpunkt bei  $d = 3.0$ .

wenn man die Dimension  $d$  unter  $d = 4$  senkt. Sinkt die Dimension weiter, so entfernt sich der Wilson-Fisher-Fixpunkt weiter vom Gaußschen Fixpunkt. Dieses Verhalten lässt sich über das numerische Programm bestätigen.

Wie bereits erwähnt, verschwindet die  $\beta$ -Funktion am Fixpunkt. Setzt man nun Gleichung (3.51) mit der Näherung  $\lambda_2 = 0$  gleich Null, so erhält man für die Lage des nichttrivialen Fixpunktes  $\lambda_4^*$ :

$$\lambda_4^* = \frac{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}} \Gamma(\frac{4-\epsilon}{2})}{3} \epsilon. \quad (3.54)$$

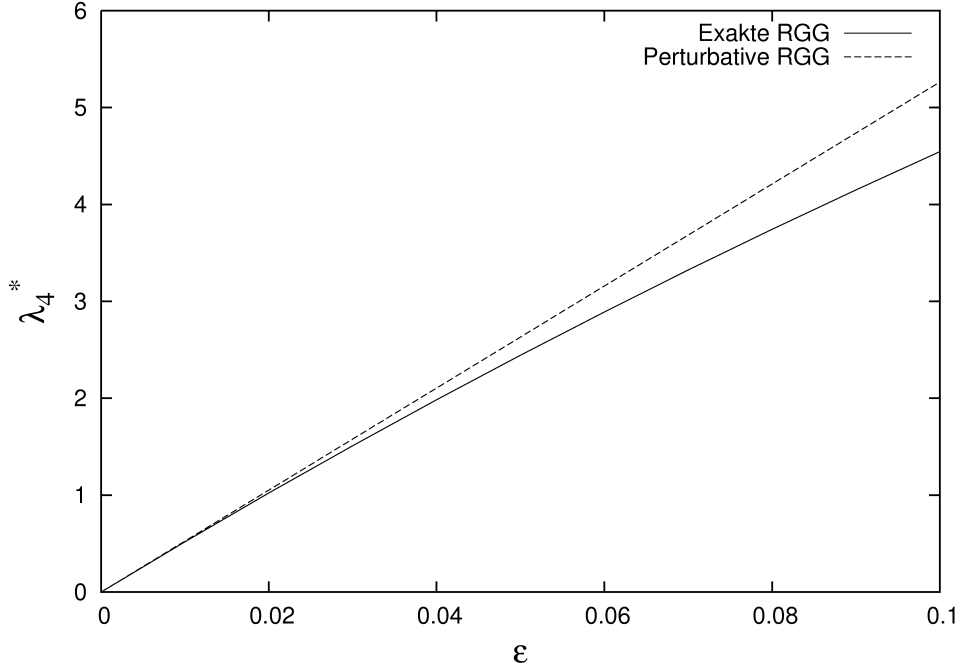
Es gilt hierbei die übliche Definition:  $\epsilon = 4 - d$ .

Aus der feldtheoretischen RG erhält man die Lage des Fixpunktes ebenfalls aus der  $\beta$ -Funktion. Hier gilt in erster Ordnung in  $\epsilon$  und zweiter Ordnung in  $\lambda_4$  für kleine  $\epsilon$  [KSF01]:

$$\lambda_4^* = \frac{16\pi^2}{3} \epsilon \quad (3.55)$$

In Abbildung 3.6 ist die Lage des Wilson-Fisher-Fixpunktes für kleine  $\epsilon$  für beide Methoden aufgetragen. Man sieht, dass die Näherungen für sehr kleine  $\epsilon$  übereinstimmen, für größere  $\epsilon$  aber auseinanderlaufen. In Abbildung 3.7 ist die Lage für große  $\epsilon$  aufgetragen. Hier ist im Vergleich zu der Näherung der perturbativen Theorie nicht mehr viel Ähnlichkeit zu erkennen.

Der Grund dafür ist die unterschiedliche Herangehensweise der Näherung. Die Näherung der  $\beta$ -Funktion, die sich aus unserer RGG ergibt, findet mit der Wahl der Approximation statt.  $\epsilon$  ist als Parameter in der Gleichung enthalten. Bei der  $\beta$ -Funktion, die aus der perturbativen Rechnung erhalten wurde, wird das Ergebnis der  $\beta$ -Funktion in erster Ordnung für  $\epsilon \neq 0$  genähert. Daher stimmen die Näherungen auch gerade für kleine  $\epsilon$  so gut überein. Die Werte der  $\beta$ -Funktion der exakten RGG, die in den Abbildungen verwendet wurden, sind mit dem numerischen Programm berechnet worden.



**Abbildung 3.6:** Wanderung des Wilson-Fisher-Fixpunktes in Abhängigkeit von  $\epsilon$ .

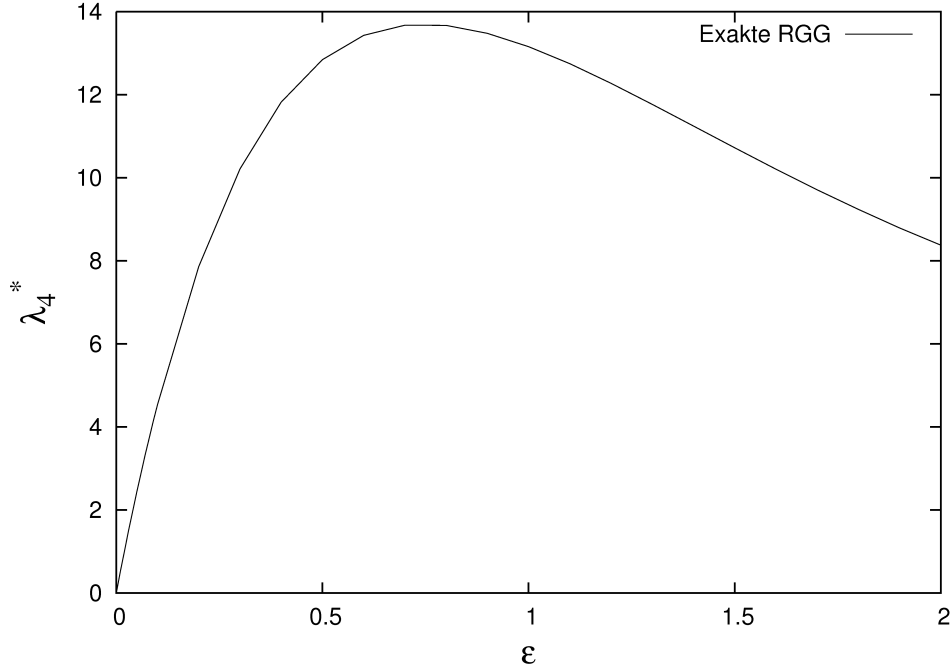
Auch bei der Betrachtung des renormierten Propagators  $P = \frac{1}{\Lambda^2 + \lambda_2}$  kann man die Lage des nicht trivialen Fixpunktes analytisch bestimmen. In diesem Fall kann man aber  $\lambda_4^*$  nur noch berechnen, wenn auch  $\lambda_2^*$  bekannt ist. Für die Lage des nichttrivialen Fixpunktes ergibt sich mit  $\Lambda = 1$ :

$$\lambda_2^* = -\frac{1 + \frac{\epsilon}{3}}{1 + \frac{\epsilon}{6}} + \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{\epsilon}{3}}{1 + \frac{\epsilon}{6}}\right)^2 - \frac{\epsilon}{6(1 + \frac{\epsilon}{6})}}, \quad \lambda_4^* = \frac{(\lambda_2^{*2} + 2\lambda_2^* + 1) \epsilon (4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}} \Gamma(\frac{4-\epsilon}{2})}{3}. \quad (3.56)$$

Auch diese Ergebnisse konnte ich nutzen, um die Funktionsweise des numerischen Programms zu kontrollieren.

### 3.2.3 Kritische Exponenten der $\phi^4$ -Theorie

Die kritischen Exponenten geben an, wie der RG-Fluss in der Nähe der Fixpunkte und entlang der Eigenrichtungen mit dem Abstand zu den Fixpunkten skaliert. Wir betrachten die



**Abbildung 3.7:** Wanderung des Wilson-Fisher-Fixpunktes in Abhängigkeit von  $\epsilon$ .

Exponenten in skalarer  $\phi^4$ -Theorie. Zunächst müssen die Eigenrichtungen des Wilson-Fisher-Fixpunktes bestimmt werden. Wie man schon in Abbildung 3.5 sehen kann hat der Wilson-Fisher-Fixpunkt zwei attraktive und zwei repulsive Richtungen. Sowohl die attraktiven als auch die repulsiven Richtungen liegen sich jeweils gegenüber. Da die RGG in der Nähe des Fixpunktes linearisiert werden kann, können wir davon ausgehen, dass die Exponenten der beiden attraktiven sowie der beiden repulsiven Richtungen jeweils gleich sind.

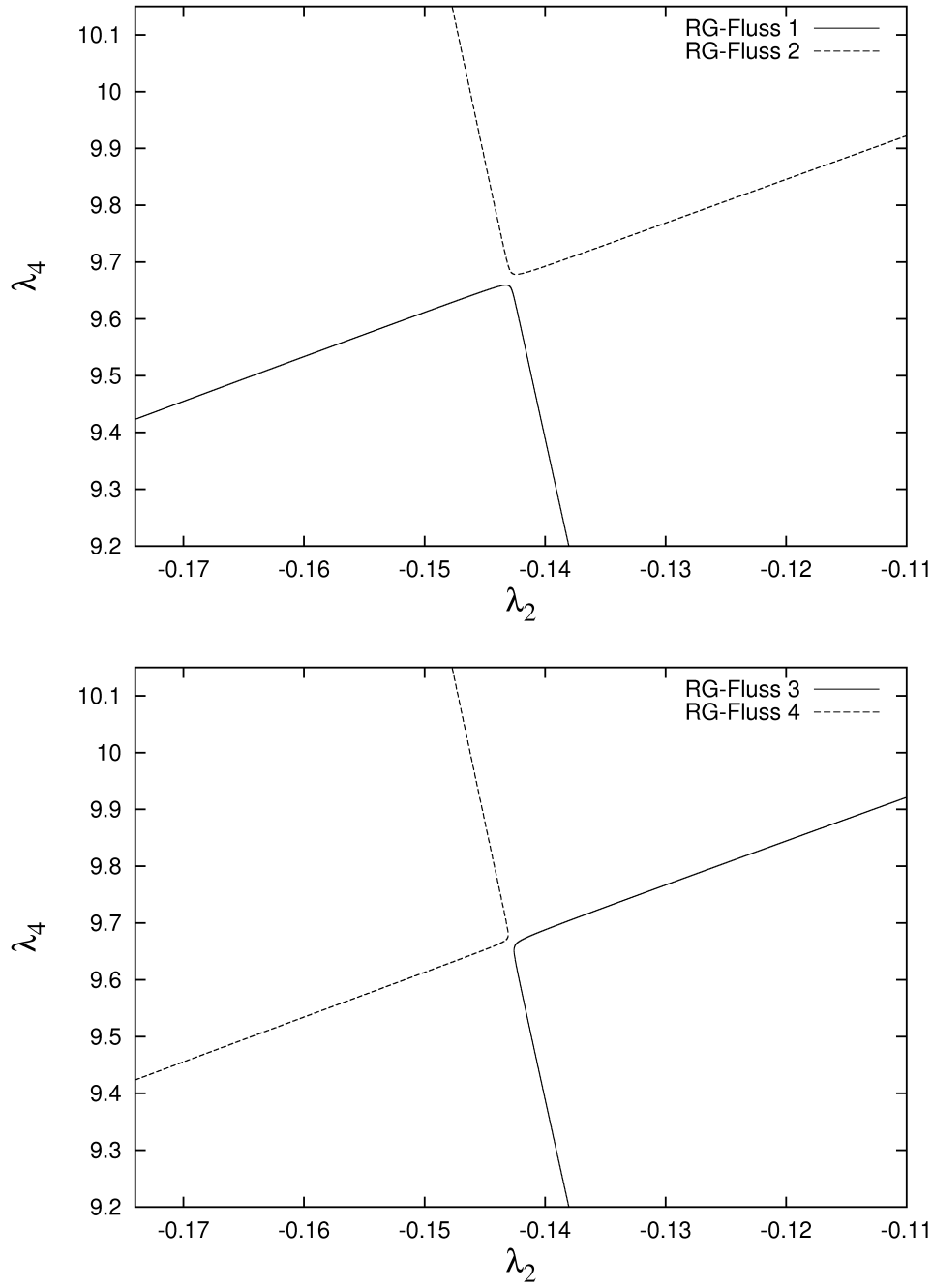
Wir wollen das Skalenverhalten der beiden Exponenten untersuchen. Die genauen Werte für den Fixpunkt können wir leicht über Gleichung (3.56) bestimmen. Es ergibt sich für  $d = 3$ :

$$\lambda_2^* \simeq -0.1429 \quad \text{und} \quad \lambda_4^* \simeq 9.6682. \quad (3.57)$$

Um die Eigenrichtungen zu bestimmen, sind die in Abschnitt 3.1.5 beschriebenen C++ Programme zur Auswertung des RG-Flusses sehr hilfreich. Man findet die Eigenrichtungen mit Hilfe der sogenannten “shooting method”.

Dazu wird das RG-Programm zunächst von unterschiedlichen Startwerten, die in einem Gitter um den Wilson-Fisher-Fixpunkt verteilt sind, gestartet. Um die Startwerte des Flusses, der sich dem Wilson-Fisher-Fixpunkt am weitesten annähert, wird ein neues feineres Gitter an Startwerten erstellt und so weiter. Die Eigenrichtungen lassen sich auf diese Art und Weise sehr genau bestimmen, wie man in Abbildung 3.8 sehen kann.

Wir wollen uns anschauen, wie die beiden Kopplungen entlang der Eigenrichtungen skalieren und betrachten:



**Abbildung 3.8:** Eigenrichtungen des RG-Flusses in der Umgebung des Wilson-Fisher-Fixpunktes mit  $d = 3.0$ .

$$\left. \frac{\partial(\lambda_2 - \lambda_2^*)}{\partial t} \right|_{\lambda_2 \approx \lambda_2^*; \lambda_4 = \lambda_4^*} = \omega_2 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial(\lambda_4 - \lambda_4^*)}{\partial t} \right|_{\lambda_2 = \lambda_2^*; \lambda_4 \approx \lambda_4^*} = \omega_4. \quad (3.58)$$

Es gilt allgemein:  $\frac{\partial(\lambda_i - \lambda_i^*)}{\partial t} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial t}$ , da  $\lambda_i^*$  konstant ist.

Man kann sich die beiden Exponenten  $\omega_2$  und  $\omega_4$  direkt aus dem RG-Programm ausgeben lassen. In Abbildung 3.9 sind für die RG-Flüsse aus dem oberen Diagramm von Abbildung 3.8 die Ergebnisse für die Exponenten gegen die RG-Zeit dargestellt.

Man kann ablesen, dass die Kopplung  $\lambda_2$  zunächst mit  $\omega_2 = 1.67$  skaliert. Der Wert bleibt konstant, bis der Fluss seine Richtung ändert, nachdem er den direkten Bereich um den Fixpunkt wieder verlassen hat. Fluss 1 nähert sich daraufhin dem Fixpunkt bei  $\lambda_2 = -1.0$ . Der Fluss divergiert und eine weitere Betrachtung der Exponenten macht keinen Sinn mehr. Fluss 2 läuft hinter dem Fixpunkt geradlinig weiter. Hier kann ein zweiter Exponent identifiziert werden als:  $\omega_2 = 2.0$ . Für Fluss 3 erhält man dieselben Exponenten wie mit Fluss 2 und mit Fluss 4 dieselben wie mit Fluss 1.

Man kann ablesen, dass  $\lambda_4$  in der Nähe des Fixpunktes mit  $\omega_4 = -1.0$  skaliert. Nachdem der Fluss den direkten Bereich um den Fixpunkt verlassen hat, pendelt sich die Skalierung nicht auf einen festen Wert ein.

Man kann die Gleichungen (3.58) umschreiben und erhält:

$$\left. \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \right|_{\lambda_2 \approx \lambda_2^*; \lambda_4 = \lambda_4^*} = \omega_2 (\lambda_2 - \lambda_2^*) \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial \lambda_4}{\partial t} \right|_{\lambda_2 = \lambda_2^*; \lambda_4 \approx \lambda_4^*} = \omega_4 (\lambda_4 - \lambda_4^*). \quad (3.59)$$

Leitet man diese Gleichung nach den Kopplungen ab und setzt die Definitionen der  $\beta$ -Funktionen ein, so ergibt sich:

$$-\left. \frac{\partial \beta_2(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_2} \right|_{\lambda_2 \approx \lambda_2^*; \lambda_4 = \lambda_4^*} = \omega_2 \quad \text{und} \quad -\left. \frac{\partial \beta_4(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_4} \right|_{\lambda_2 = \lambda_2^*; \lambda_4 \approx \lambda_4^*} = \omega_4. \quad (3.60)$$

Aus der RGG für die Kopplungen (3.46) erhalten wir für die Zweier-Kopplung:

$$-\left. \frac{\partial \beta_2(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_2} \right|_{\lambda_2 \approx \lambda_2^*; \lambda_4 = \lambda_4^*} = -\frac{\lambda_4}{2^d (\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} \left( \frac{1}{1 + \lambda_2} \right)^2 + 2. \quad (3.61)$$

Für die Vierer-Kopplung ergibt sich:

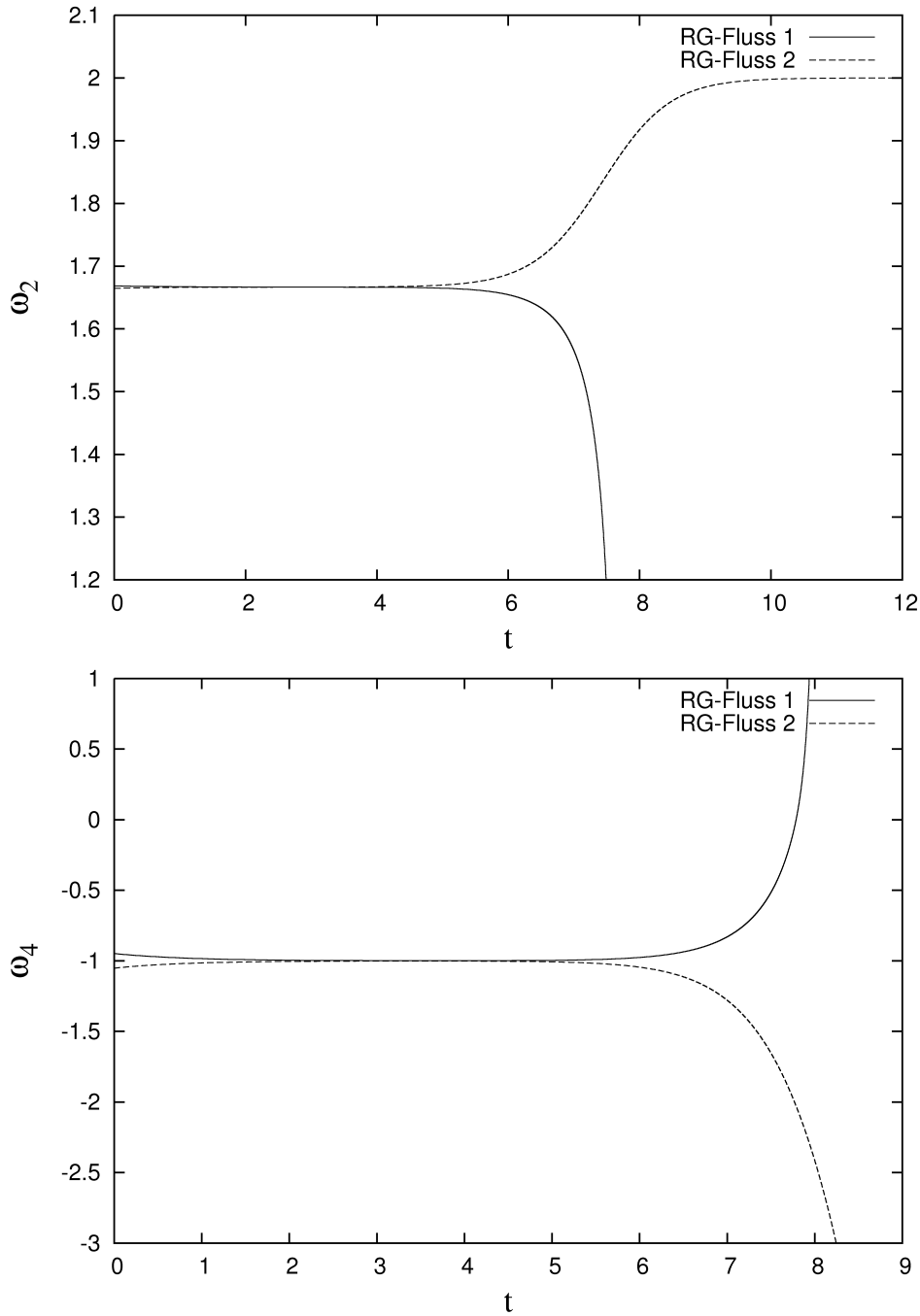
$$-\left. \frac{\partial \beta_4(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_4} \right|_{\lambda_2 = \lambda_2^*; \lambda_4 \approx \lambda_4^*} = -\frac{6\lambda_4}{2^d (\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} \left( \frac{1}{1 + \lambda_2} \right)^2 + (4 - d). \quad (3.62)$$

Wir betrachten den Fall:  $d = 3.0$  und setzen für die Kopplungen die Werte des Fixpunktes ein, die wir aus Gleichung (3.56) berechnen können. Wir erhalten für die Exponenten:

$$\omega_2 = 1.6\bar{6} \quad \text{und} \quad \omega_4 = -1.0. \quad (3.63)$$

Dies stimmt mit den Ergebnissen des numerischen Programms überein.





**Abbildung 3.9:** Skalierung der Kopplungen des RG-Flusses in der Umgebung des Wilson-Fisher-Fixpunktes mit  $d = 3.0$ .

Für unterschiedliche Dimensionen erhält man unterschiedliche Exponenten. In der folgenden Tabelle sind die Werte der kritischen Exponenten für einige Dimensionen angegeben. Un-

tersucht wurde dabei die Skalierung des RG-Flusses am Wilson-Fisher-Fixpunkt mit Hilfe des RG-Programms. Die Werte konnten analytisch über die Gleichungen (3.61) und (3.62) bestätigt werden.

d	$\omega_2$	$\omega_4$
3.8	$1.9\bar{3}$	$-0.2$
3.6	$1.8\bar{6}$	$-0.4$
3.3	$1.7\bar{6}$	$-0.7$
3.0	$1.6\bar{6}$	$-1.0$

Betrachtet man die Tabelle, so könnte man für die Exponenten die folgenden Regeln aufstellen:

$$\omega_2 = 2 - \frac{\epsilon}{3} \quad \text{und} \quad \omega_4 = -\epsilon. \quad (3.64)$$

Die erhaltenen Exponenten können mit Literaturwerten verglichen werden. Im Lehrbuch von Zinn-Justin [ZJ89] ergibt sich für den Exponenten, der mit  $\omega_4$  zu vergleichen ist:

$$\omega_4 = \epsilon + O(\epsilon^2). \quad (3.65)$$

Der Grund für das unterschiedliche Vorzeichen ist die unterschiedliche Richtung in der die Skalenveränderungen vorgenommen werden. In der exakten RG betrachtet man sinkende, in der perturbativen RG betrachtet man steigende Impulsskalen. Man kann sagen, dass sich die RG-Zeit beim Vergleich zwischen perturbativer und exakter RG in unterschiedliche Richtung bewegt ( $t \rightarrow -t$ ). Das Ergebnis der perturbativen RG bestätigt also unseren Messwert.

Auch für  $\omega_2$  findet sich ein Literaturwert. Bei dem entsprechenden Exponenten  $\eta_2$  ist allerdings die Reskalierung noch nicht berücksichtigt. Aus der Definition des Exponenten geht hervor, dass das Vorzeichen in diesem Fall mit unserem Vorzeichen identisch sein muss. Es gilt:

$$\eta_2 = \omega_2 - 2.0. \quad (3.66)$$

Laut Zinn-Justin [ZJ89] gilt für den Exponent  $\nu$ :

$$\nu = \frac{1}{\eta_2 + 2}. \quad (3.67)$$

Mit den Gleichungen (3.64), (3.66) und (3.67) erhalten wir, mit den Werten, die wir mit unserem numerischen Programm gemessen haben, für den Exponenten  $\nu$  die Relation:

$$2\nu = \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{6}}. \quad (3.68)$$

Entwickelt man den Bruch mit Hilfe der geometrischen Reihe, die in Gleichung (3.19) gegeben ist, so erhält man für  $\nu$ :

$$2\nu = 1 + \frac{\epsilon}{6} + O(\epsilon^2). \quad (3.69)$$

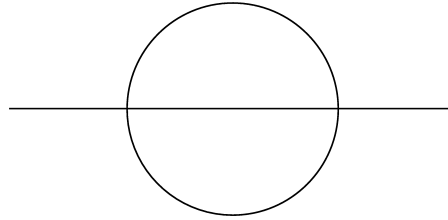
Der Wert für  $\nu$  stimmt damit mit dem Wert, den Zinn-Justin erhält, überein. Die berechneten Exponenten können also mit Literaturwerten bestätigt werden.

### 3.2.4 Untersuchungen der $\phi^4$ -Theorie in höherer Ordnung

Der Aufbau des numerischen Programms ermöglicht es, alle möglichen skalaren Theorien, in denen ausschließlich Kopplungen mit geraden Potenzen der Felder betrachtet werden, im Rahmen der lokalen Potenzial Approximation, zu untersuchen. Die Ordnung der Theorien kann prinzipiell beliebig gewählt werden, wird aber dadurch beschränkt, dass die benötigte Rechenzeit schnell ansteigt. In diesem Abschnitt wollen wir in  $\phi^4$ -Theorie arbeiten, aber die Kopplung  $\lambda_6$  mit berücksichtigen. Für alle Simulationen, die durchgeführt werden, gilt zu Anfang:

$$\lambda_6(t=0) = 0. \quad (3.70)$$

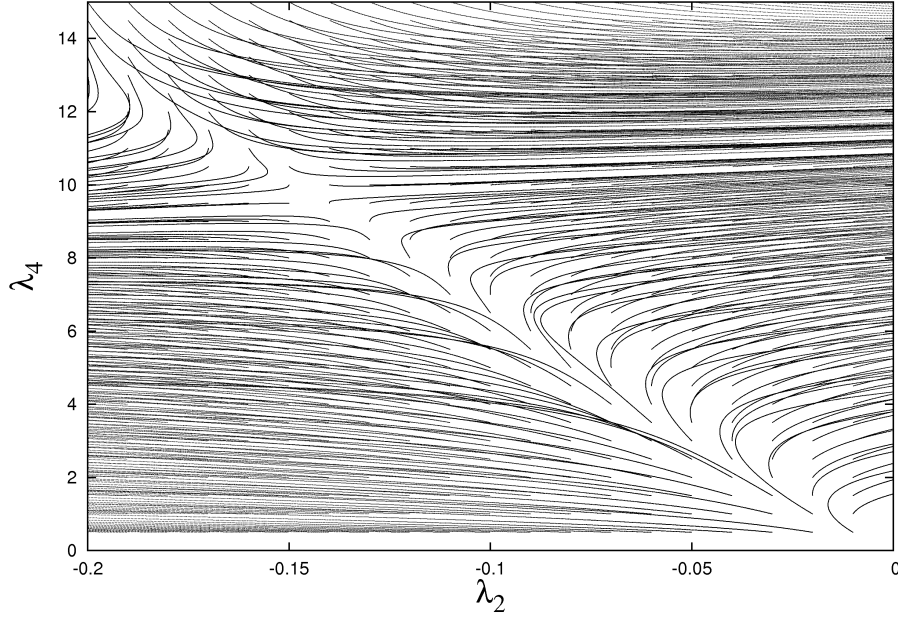
Die Sechser-Kopplung baut sich nur über den Zerfall der Vierer-Kopplung auf. Wir arbeiten daher trotz der Hinzunahme der zusätzlichen Kopplung immer noch in  $\phi^4$ -Theorie.



**Abbildung 3.10:** Der Sonnenaufgang-Graph wird in mehreren RG-Schritten erstellt.

Hat sich der Sechser-Vertex aufgebaut, so leistet er auch einen Beitrag zum Vierer-Vertex. Der sogenannte Sonnenaufgang-Graph in Abbildung 3.10 wird bei dem von uns betrachteten RG-Fluss mit berücksichtigt. Zunächst werden zwei Vierer-Vertizes als Linkterm verbunden und liefern einen Beitrag zum Sechser-Vertex. Der Sechser-Vertex liefert über den einfachen Loopterm einen Beitrag zum Vierer-Vertex. Schließlich liefert der Vierer-Vertex wiederum über den einfachen Loopterm einen Beitrag zum Zweier-Vertex. Betrachtet man einen Sechser-Vertex und führt die drei beschriebenen Verknüpfungen der Propagatoren durch, so baut man einen Sonnenaufgang-Graph zusammen und erhält schließlich einen Beitrag zum Zweier-Vertex. Der Graph kann also innerhalb von drei RG-Schritten gebildet werden und wird auf diese Weise berücksichtigt. So wie der Sonnenaufgang-Graph werden verschiedene Graphen höherer Ordnung im Fluss der exakten RG direkt mitberücksichtigt.

Dem Sonnenaufgang-Graphen kommt aber eine besondere Bedeutung zu, da er der erste Graph ist, der einen Beitrag zur Feldrenormierungskonstante  $Z_\phi$  der perturbativen Theorie liefert, und daher für die Bestimmung der anomalen Dimension  $\eta$  benötigt wird. Im Fall der lokalen Potenzial Approximation ist  $\eta$  immer gleich Null, arbeitet man aber zum Beispiel mit der Ableitungsentwicklung, so ist die Bestimmung von  $\eta$  unumgänglich.



**Abbildung 3.11:** Wilson-Fisher-Fixpunkt bei  $d = 3.0$ .

Das trotz der Hinzunahme des Sechser-Vertex sowohl der Gaußsche Fixpunkt, als auch der Fixpunkt, der aufgrund der Divergenz des Propagators entsteht, existieren muss, ist trivial und kann numerisch und analytisch bestätigt werden. Zu untersuchen ist aber, ob auch der Wilson-Fisher-Fixpunkt immernoch zu finden ist.

Die Suche nach dem Fixpunkt wird aufgrund der höheren Dimension des Kopplungsraumes erschwert. Im Allgemeinen müssen auch Rechnungen mit  $\lambda_6(t=0) \neq 0$  gestartet werden, um den Fixpunkt sicher identifizieren zu können. Erst nachdem man die Position des Fixpunktes bestimmt hat, kann man prüfen, ob der Fixpunkt auch im Rahmen der  $\phi^4$ -Theorie erreicht werden kann. Solche Untersuchungen sind zeitaufwendig, aber prinzipiell möglich.

Bei  $d = 3$  kann der Wilson-Fisher-Fixpunkt bereits im Rahmen der  $\phi^4$ -Theorie sicher identifiziert werden, da hier der Wert der Sechser-Kopplung am Wilson-Fisher-Fixpunkt gerade Null ist. Der Fixpunkt ist in Abbildung 3.11 dargestellt. Die RG-Flüsse in der Abbildung scheinen sich zu schneiden. Da der RG-Fluss im Kopplungsraum untersucht wird, sollte das Schneiden der Flusslinien grundsätzlich verboten sein. Zu beachten ist aber, dass wir in Abbildung 3.11 einen dreidimensionalen Kopplungsraum als zweidimensionales Diagramm abgebildet haben.

Betrachtet man den Kopplungsraum in einer dreidimensionalen Darstellung, so sieht man, dass sich die Flusslinien nicht schneiden.

Mit Hilfe des numerischen Programms kann die Lage des Fixpunktes relativ genau bestimmt werden:

$$\lambda_2^* = -0.1429 \quad , \quad \lambda_4^* = 9.6682 \quad \text{und} \quad \lambda_6^* = 0.0. \quad (3.71)$$

Die Werte für die Zweier- und Vierer-Kopplung am Fixpunkt sind demnach identisch mit den Werten, die bei der Betrachtung der  $\phi^4$ -Theorie ohne die Sechser-Kopplung berechnet worden sind (siehe Gleichung (3.57)). Die Sechser-Kopplung ist am Fixpunkt gleich Null. Bei der Bestimmung der Exponenten  $\omega_2$  und  $\omega_4$  sollte die Sechser-Kopplung ihren Fixpunktwert annehmen und demnach verschwinden. Wir erhalten bei der Bestimmung der Exponenten daher genau die gleichen Exponenten wie bei der Betrachtung ohne den Sechser-Vertex in Abschnitt 3.2.3. Sie lauten:

$$\omega_2 = 1.6\bar{6} \quad \text{und} \quad \omega_4 = -1.0. \quad (3.72)$$

Diese Exponenten konnten auch mit Hilfe des numerischen Programms gemessen werden.

Auf die in diesem Abschnitt dargestellte Art und Weise kann man durch Hinzunahme zusätzlicher Kopplungen, die beim Start der Simulation gleich Null gesetzt werden, mit dem numerischen Programm viele Graphen berechnen lassen. Die Untersuchungen im Kopplungsraum werden mit zunehmender Dimension natürlich immer komplizierter und bei hoher Ordnung nahezu aussichtslos; die Untersuchungen können aber ohne zusätzliche Arbeit am numerischen Programm durchgeführt werden.



## 4 Aufstellung einer Renormierungsgruppengleichung nach dem Prinzip von Wegner und Houghton in $O(3)$ -Symmetrie

In diesem Kapitel werde ich eine RGG in  $O(3)$ -Symmetrie für die skalare Feldtheorie in lokaler Potenzial Approximation herleiten und untersuchen.

Im Vergleich zu Kapitel 3 wird lediglich die Symmetrie geändert, so dass der Aufbau des Kapitels und die Vorgehensweise der Untersuchungen im Wesentlichen der von Kapitel 3 entspricht. Da viele Sachverhalte bereits aus früheren Kapiteln bekannt sind, werden die Erklärungen in diesem Kapitel eher kurz gehalten.

Im ersten Teil des Kapitels wird die RGG aufgestellt, die im zweiten Teil des Kapitels ausgewertet wird. Es werden die Ergebnisse diskutiert und mit den bekannten Ergebnissen der perturbativen RG verglichen.

### 4.1 Aufstellung der Renormierungsgruppengleichung

Wir wollen nun eine RGG für den Fall dreikomponentiger Felder aufstellen. Die Felder haben die Form:

$$\vec{\phi}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{p}) \\ \phi_2(\vec{p}) \\ \phi_3(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Die betrachtete Wirkung erhält somit die Form:

$$S_{kin} = \frac{1}{2} \int d\vec{p} \, \vec{p}^2 \vec{\phi}(\vec{p}) \vec{\phi}(-\vec{p}),$$

$$S_{ww} = \sum_i S_{ww,i} = \sum_i \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d\vec{p}_j \right) \left( \vec{\phi}(\vec{p}_1) \vec{\phi}(\vec{p}_2) \right) \dots \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-1}) \vec{\phi}(\vec{p}_i) \right) \delta \left( \sum_{j=1}^i \vec{p}_j \right). \quad (4.2)$$

Da immer nur eine gerade Anzahl an Feldern in der Wirkung erlaubt ist, und immer zwei Felder ein Skalarprodukt bilden, ist garantiert, dass die Wirkung immer eine skalare Größe ist.

Dass die Felder im Allgemeinen nicht vertauschbar sind, hat keinen Einfluss auf die Wirkung, da bei allen Feldern über alle möglichen Impulse integriert wird, sodass alle möglichen Kombinationen der Felder erreicht werden können. Wir wollen in diesem Kapitel den symmetrischen Fall betrachten. Für die Ableitung einer Feldkomponente nach einer anderen gilt somit:

$$\frac{\delta\phi_i(\vec{p})}{\delta\phi_j(\vec{p})} = \delta_{ij}. \quad (4.3)$$

Die RGG (3.1) nach Wegner und Houghton ändert sich insofern, dass die doppelte Ableitung als Matrix aufgefasst werden muss. Wir definieren uns die Matrix  $\mathbf{A}$  mit den Einträgen:

$$A_{ij} = \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_i(\vec{p})\delta\phi_j(-\vec{p})}. \quad (4.4)$$

Mit  $\mathbf{A}$  können wir die RGG nach Wegner und Houghton folgendermaßen schreiben:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \int_p' \left\{ - \begin{pmatrix} \frac{\delta S}{\delta\phi_1(\vec{p})} & \frac{\delta S}{\delta\phi_2(\vec{p})} & \frac{\delta S}{\delta\phi_3(\vec{p})} \end{pmatrix} (\mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\delta S}{\delta\phi_1(-\vec{p})} \\ \frac{\delta S}{\delta\phi_2(-\vec{p})} \\ \frac{\delta S}{\delta\phi_3(-\vec{p})} \end{pmatrix} + \text{Tr}(\ln(\mathbf{A})) \right\}. \quad (4.5)$$

In dieser Gleichung wurde wieder nur renormiert und noch nicht reskaliert. Auch hier kann man den ersten Summanden als Linkterm und den zweiten Summanden als Loopterm auffassen. Wie in Kapitel 3 werden die einzelnen Kopplungen der Wirkung im Rahmen eines RG-Schrittes wieder durch drei Beiträge verändert: Einem Beitrag aus dem Loopterm, einem aus dem Linkterm und einem Beitrag aus dem Reskalierungsterm. Mit dem Link- und dem Loopterm werden wir uns in den nächsten beiden Unterkapiteln beschäftigen.

Der Beitrag des Reskalierungsterms kann völlig analog zum Reskalierungsterm in Z(2)-Symmetrie hergeleitet werden (siehe Abschnitt 3.1.3), da die Beiträge unter der betrachteten Änderung der Symmetrie identisch bleiben. Daher wird der Reskalierungsterm in diesem Kapitel nicht weiter erläutert.

#### 4.1.1 Loopterm

Für die Ableitungen der Wirkung nach einer Feldkomponente gilt unter Beachtung von Gleichung (4.3):

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta\phi_k(\vec{p})} &= \int d\vec{p} \vec{p}^2 \phi_k(-\vec{p}) \\ &+ \sum_{i=2}^{\infty} i \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d\vec{p}_j \right) \left( \vec{\phi}(\vec{p}_1) \vec{\phi}(\vec{p}_2) \right) \dots \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-3}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-2}) \right) \phi_k(\vec{p}_{i-1}) \delta \left( \left( \sum_{j=1}^{i-1} \vec{p}_j \right) + \vec{p} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$



Die Ableitung nach zwei Feldkomponenten wird schon etwas komplizierter:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_k(\vec{p}) \delta \phi_l(-\vec{p})} = & \vec{p}^2 \delta_{kl} + \sum_{i=2}^{\infty} \left[ \delta_{kl} i \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d\vec{p}_j \right) \left( \vec{\phi}(\vec{p}_1) \vec{\phi}(\vec{p}_2) \right) \dots \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-3}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-2}) \right) \delta \left( \sum_{j=1}^{i-2} \vec{p}_j \right) \right. \\ & + i(i-2) \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d\vec{p}_j \right) \left( \vec{\phi}(\vec{p}_1) \vec{\phi}(\vec{p}_2) \right) \dots \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-5}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-4}) \right) \times \\ & \left. \times \phi_l(\vec{p}_{i-3}) \phi_k(\vec{p}_{i-1}) \delta \left( \sum_{j=1}^{i-2} \vec{p}_j \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Um die Formeln übersichtlich zu halten, definieren wir zunächst einen Platzhalter:

$$C = \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d\vec{p}_j \right) \left( \vec{\phi}(\vec{p}_1) \vec{\phi}(\vec{p}_2) \right) \dots \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-5}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-4}) \right) \delta \left( \sum_{j=1}^{i-2} \vec{p}_j \right). \quad (4.8)$$

Die Komponenten der Matrix können in die folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} A_{kl} = & \delta_{kl} \vec{p}^2 + \delta_{kl} \sum_{i=2}^{\infty} i C \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-3}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-2}) \right) + \sum_{i=2}^{\infty} i(i-2) C \phi_l(\vec{p}_{i-3}) \phi_k(\vec{p}_{i-1}) \\ = & (\vec{p}^2 + 2\lambda_2) \left[ \delta_{kl} + \frac{\delta_{kl} \sum_{i=4}^{\infty} i C \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-3}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-2}) \right) + \sum_{i=4}^{\infty} i(i-2) C \phi_l(\vec{p}_{i-3}) \phi_k(\vec{p}_{i-1})}{\vec{p}^2 + 2\lambda_2} \right] \\ = & (\vec{p}^2 + 2\lambda_2) \left[ \delta_{kl} + \frac{B_{ij}}{\vec{p}^2 + 2\lambda_2} \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Wir können jetzt die geometrische Reihe (siehe Gleichung (3.19)) benutzen und zusätzlich den Logarithmus entwickeln und schreiben:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln(\mathbf{A}) = & \text{Tr} \left( \ln(\vec{p}^2 + 2\lambda_2) + \ln(\mathbf{1} + \mathbf{B}) \right) \\ = & \text{Tr} \left( \ln(\vec{p}^2 + 2\lambda_2) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left( \frac{1}{\vec{p}^2 + 2\lambda_2} \right)^i \frac{\mathbf{B}^i}{i} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Der Term  $\ln(\vec{p}^2 + 2\lambda_2)$  kann, wie im Fall der Z(2)-Symmetrie, weggelassen werden, da das erzeugende Funktional renormiert wird. Für die Spur der Matrix erhalten wir:

$$\text{Tr} \ln(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{i+1}}{i} \left( \frac{1}{\vec{p}^2 + 2\lambda_2} \right)^i \text{Tr}(\mathbf{B}^i) \right). \quad (4.11)$$

Die Matrix  $\mathbf{B}$  hat die Komponenten:

$$B_{kl} = \delta_{kl} \sum_{i=4}^{\infty} iC \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-3}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-2}) \right) + \sum_{i=4}^{\infty} i(i-2)C\phi_l(\vec{p}_{i-3})\phi_k(\vec{p}_{i-1}). \quad (4.12)$$

Zu beachten ist, dass der erste Term aus kompletten Skalarprodukten besteht, und im zweiten Term noch jeweils zwei einzelne Komponenten der Felder auftauchen, die noch kontrahiert werden müssen. Betrachten wir eine Matrix  $\mathbf{M}$  mit der folgenden Struktur:

$$M_{kl} = \delta_{lk}M^* + M^{**}\phi_l\phi_k, \quad (4.13)$$

wobei  $M^*$  und  $M^{**}$  jeweils für Summen mit mehreren Termen stehen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\mathbf{MB})_{kl} &= \sum_{j=1}^3 M_{lj}B_{jk} = \sum_{j=1}^3 (\delta_{kj}M^*B_{jl} + M^{**}\phi_k\phi_jB_{jl}) \\ &= \delta_{kj}\delta_{jl}M^* \sum_{i=4}^{\infty} iC\vec{\phi}\vec{\phi} + M^* \sum_{i=4}^{\infty} i(i-2)C\phi_l\phi_k \\ &\quad + M^{**}\phi_l\phi_k \sum_{i=4}^{\infty} iC\vec{\phi}\vec{\phi} + \sum_{j=1}^3 M^{**}\phi_l\phi_j \sum_{i=4}^{\infty} i(i-2)C\phi_j\phi_k \\ &= \sum_{i=4}^{\infty} \left( \delta_{lk}M^*iC\vec{\phi}\vec{\phi} + M^*i(i-2)C\phi_l\phi_k + \sum_{j=1}^3 M^{**}i(i-1)C\phi_l\phi_k \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Man erhält wieder Terme, die entweder aus vollständigen Skalarprodukten bestehen oder zwei einzelne Komponenten der Felder beinhalten. Die Terme:  $\mathbf{B}^{i+1} = \mathbf{B}^i\mathbf{B}$  haben offensichtlich auch genau diese Form. Bildet man die Spur von Matrizen der Form:  $\mathbf{B}^i$ , so werden die Einträge der Hauptdiagonale summiert und die Terme mit den Komponenten der Felder können wieder als Skalarprodukt geschrieben werden. Man erhält letztlich die gewünschte skalare Größe.

Analog zu Abschnitt 3.1.1 muss auch in O (3)-Symmetrie jeder Beitrag zum Loopterm jeweils mit einem Faktor  $\frac{1}{(2\pi)^d}$  aus der Fouriertransformation und einem Faktor  $S_d = \Lambda^{d-1} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$  aus dem Oberflächenintegral über die Impulse multipliziert werden.

Mit diesen Faktoren, Gleichung (4.14) und Gleichung (4.11) ist der Loopbeitrag vollständig bestimmt.

#### 4.1.2 Linkterm

Für den Linkterm muss die Matrix  $\mathbf{A}$  invertiert werden. Mit den Gleichungen (4.4) und (4.7) folgt für die Komponenten der Matrix:

$$\begin{aligned}
 A_{kl} = & \delta_{kl} \left( \vec{p}^2 + \sum_{i=2}^{\infty} i \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d\vec{p}_j \right) \left( \vec{\phi}(\vec{p}_1) \vec{\phi}(\vec{p}_2) \right) \dots \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-3}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-2}) \right) \delta \left( \sum_{j=1}^{i-2} \vec{p}_j \right) \right) \\
 & + \sum_{i=2}^{\infty} i(i-2) \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d\vec{p}_j \right) \left( \vec{\phi}(\vec{p}_1) \vec{\phi}(\vec{p}_2) \right) \dots \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-5}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-4}) \right) \times \\
 & \times \phi_l(\vec{p}_{i-3}) \phi_k(\vec{p}_{i-1}) \delta \left( \sum_{j=1}^{i-2} \vec{p}_j \right). \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Um die Übersichtlichkeit zu bewahren definieren wir die Platzhalter:

$$\begin{aligned}
 C_1 = & \vec{p}^2 + \sum_{i=2}^{\infty} i \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d\vec{p}_j \right) \left( \vec{\phi}(\vec{p}_1) \vec{\phi}(\vec{p}_2) \right) \dots \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-3}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-2}) \right) \delta \left( \sum_{j=1}^{i-2} \vec{p}_j \right), \\
 C_2 = & i(i-2) \sum_{i=4}^{\infty} \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d\vec{p}_j \right) \left( \vec{\phi}(\vec{p}_1) \vec{\phi}(\vec{p}_2) \right) \dots \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-5}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-4}) \right) \delta \left( \sum_{j=1}^{i-2} \vec{p}_j \right), \\
 C_3 = & \sum_{i=2}^{\infty} i \int \lambda_i \left( \prod_{j=1}^i d\vec{p}_j \right) \left( \vec{\phi}(\vec{p}_1) \vec{\phi}(\vec{p}_2) \right) \dots \left( \vec{\phi}(\vec{p}_{i-3}) \vec{\phi}(\vec{p}_{i-2}) \right) \delta \left( \left( \sum_{j=1}^{i-2} \vec{p}_j \right) + \vec{p} \right). \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Jetzt können wir schreiben:

$$A_{kl} = \delta_{kl} C_1 + C_2 \phi_l(\vec{p}_{i-3}) \phi_k(\vec{p}_{i-1}). \quad (4.17)$$

Für die Komponenten der inversen Matrix erhalten wir nach längerer Rechnung:

$$\begin{aligned}
 (A)_{kl}^{-1} = & \frac{\delta_{kl}}{\det \mathbf{A}} \left( C_1 C_1 + \sum_{m=1; m \neq k}^3 C_1 C_2 \phi_m(\vec{p}_{i-3}) \phi_m(\vec{p}_{i-1}) \right) \\
 & + \frac{(1 - \delta_{kl})}{\det \mathbf{A}} (-C_1 C_2 \phi_l(\vec{p}_{i-3}) \phi_k(\vec{p}_{i-1})). \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Für die Determinante ergibt sich:

$$\det \mathbf{A} = C_1 C_1 C_1 + C_1 C_1 C_2 \vec{\phi}_{i-3} \vec{\phi}_{i-2}. \quad (4.19)$$

Schließlich erhalten wir für den Linkterm:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi_1(\vec{p})} \quad \frac{\delta S}{\delta \phi_2(\vec{p})} \quad \frac{\delta S}{\delta \phi_3(\vec{p})} \right) (\mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\delta S}{\delta \phi_1(-\vec{p})} \\ \frac{\delta S}{\delta \phi_2(-\vec{p})} \\ \frac{\delta S}{\delta \phi_3(-\vec{p})} \end{pmatrix} &= \frac{C_1 C_1 C_3 \phi(\vec{p}_{i-1}) C_3 \phi(\vec{p}_{i-1})}{C_1 C_1 C_1 + C_1 C_1 C_2 \vec{\phi}_{i-3} \vec{\phi}_{i-2}} \\ &= \frac{C_3 \phi(\vec{p}_{i-1}) C_3 \phi(\vec{p}_{i-1})}{C_1 + C_2 \vec{\phi}_{i-3} \vec{\phi}_{i-2}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Im Vergleich zum Loopterm hat dieses Ergebnis den Vorteil, dass alle Felder bereits als Vektoren vorliegen und es keine einzelnen Komponenten der Felder mehr gibt. Um eine bessere Übersichtlichkeit zu garantieren, lassen wir die Integrale und Deltafunktionen weg:

$$\begin{aligned} \frac{C_3 \phi(\vec{p}_{i-1}) C_3 \phi(\vec{p}_{i-1})}{C_1 + C_2 \vec{\phi}_{i-3} \vec{\phi}_{i-2}} &= \left[ \int d\vec{p} \vec{p}^2 \phi_k(-\vec{p}) + 2\lambda_2 + 4\lambda_4 \phi^3 + 6\lambda_6 \phi^5 + \dots \right] \times \\ &\times \left[ \frac{1}{\Lambda^2 + 2\lambda_2 + 4 \cdot 3\lambda_4 \phi^2 + 6 \cdot 5\lambda_6 \phi^4 + \dots} \right] \times \\ &\times \left[ \int d\vec{p} \vec{p}^2 \phi_k(-\vec{p}) + 2\lambda_2 + 4\lambda_4 \phi^3 + 6\lambda_6 \phi^5 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Beim Vergleich mit Gleichung (3.20) stellt man fest, dass wir den mittleren Term aus Gleichung (4.21) mit der geometrischen Reihe auf genau dieselbe Art und Weise entwickeln können, wie wir es bei der  $Z(2)$ -Symmetrie bereits getan haben. Mit derselben Begründung, wie im Fall der  $Z(2)$ -Symmetrie, können die Terme  $\int d\vec{p} \vec{p}^2 \phi_k(-\vec{p}) + 2\lambda_2$  weggelassen werden. Die Graphen, die diese Terme verursachen, befinden sich außerhalb des Impulsbereiches, der nach dem RG-Schritt noch betrachtet wird.

Wir erhalten somit für den Linkterm:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{Li}} &= \frac{1}{2} \int_p' \left( - \left[ 4\lambda_4 \vec{\phi}^3 + 6\lambda_6 \vec{\phi}^5 + \dots \right] \frac{1}{\vec{p}^2 + 2\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4 \cdot 3\lambda_4 \vec{\phi}^2 + 6 \cdot 5\lambda_6 \vec{\phi}^4 + \dots}{\vec{p}^2 + 2\lambda_2} \right)^k \right. \\ &\quad \left. \times \left[ 4\lambda_4 \vec{\phi}^3 + 6\lambda_6 \vec{\phi}^5 + \dots \right] \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Beim Vergleich mit Gleichung (3.23) fällt auf, dass wir für den Linkterm das gleiche Ergebnis wie in  $Z(2)$ -Symmetrie erhalten haben.

#### 4.1.3 Numerische Umsetzung der Renormierungsgruppengleichung

Wie in den vorherigen Abschnitten erläutert, bleiben sowohl die Beiträge des Linkterms als auch die Beiträge des Reskalierungsterms in der RGG in  $O(3)$ -Symmetrie die gleichen wie in  $Z(2)$ -Symmetrie. Demnach können die entsprechenden Komponenten des numerischen Programms zur Untersuchung des RG-Flusses übernommen werden. Neu eingebaut werden

muss allerdings der Loopbeitrag. Anders als im Fall der  $Z(2)$ -Symmetrie werden hier nicht mehr die möglichen Graphen erzeugt und deren Beiträge bestimmt, sondern es wird die Matrixmultiplikation nach Gleichung (4.14) durchgeführt und in Gleichung (4.11) mit den entsprechenden Vorfaktoren eingebaut. Auch in diesem Programm werden die Kopplungen wieder durch ihre Fakultät normiert in das Programm eingebaut:

$$\lambda_i = \frac{\lambda'_i}{i!}, \quad (4.23)$$

um eine Vergleichbarkeit mit den Literaturwerten zu gewährleisten.

Der grundsätzliche Aufbau des Programms bleibt unverändert. Die Schrittweitanpassung kann auf dieselbe Art und Weise durchgeführt werden wie zuvor, die Dimension bleibt als Parameter frei wählbar und auch das Problem der impulsabhängigen Kopplungen taucht erneut auf. Die Impulsabhängigkeit kann aufgrund des enormen numerischen Rechenaufwands auch hier leider nicht beachtet werden.

## 4.2 Ergebnisse der Renormierungsgruppengleichung

### 4.2.1 Renormierungsgruppenfluss

Analog zu Abschnitt 3.2 werde ich auch in diesem Abschnitt eine Wirkung der skalaren  $\phi^4$ -Theorie untersuchen, die nur aus der Zweier- und der Vierer-Kopplung besteht.

Die in Abbildung 4.1 dargestellte Übersicht über den RG-Fluss im Kopplungsraum erinnert sehr stark an die entsprechende Übersicht in  $Z(2)$ -Symmetrie (Abbildung 3.3). Sowohl der Gaußsche als auch der Wilson-Fisher-Fixpunkt mit zwei attraktiven und zwei repulsiven Eigenrichtungen sind wieder deutlich zu erkennen. Durch die Wahl unseres Propagators, der bei  $\Lambda^2 = -\lambda_2$  divergiert, ist im Diagramm auch der Fixpunkt bei  $\lambda_2 = -1$  wieder deutlich zu erkennen.

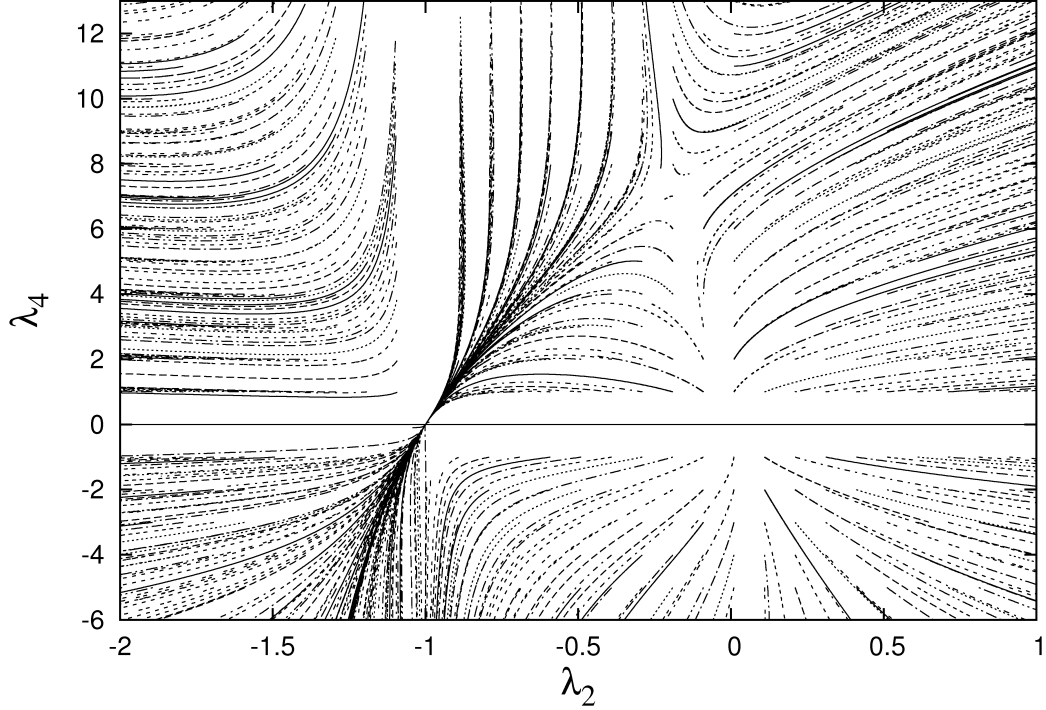
### 4.2.2 $\beta$ -Funktion und Wilson-Fisher-Fixpunkt

In diesem Abschnitt wird zunächst die  $\beta$ -Funktion der Vierer-Kopplung aus der RGG bestimmt und mit Literaturwerten verglichen. Aus der  $\beta$ -Funktion kann dann die Lage des Wilson-Fisher-Fixpunktes bestimmt werden.

Aus unserer RGG folgt nach einem RG-Schritt für die neue Kopplung  $\lambda'$ :

$$\lambda'_4 = \lambda_4 + \left[ -\frac{11}{3} \frac{\Lambda^{n-1}(\pi)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})(2\pi)^d} \left( \frac{1}{\Lambda^2 + \lambda_2} \right)^2 \lambda_4^2 + 4\lambda_4 \frac{-d+2}{2} + d\lambda_4 \right] dt. \quad (4.24)$$

In  $\phi^4$ -Theorie ist dies also die Gleichung, mit der das numerische Programm die Vierer-Kopplung im Rahmen eines RG-Schrittes verändert. Für die  $\beta$ -Funktion von  $\lambda_4$  ergibt sich mit  $\Lambda = 1.0$  und infinitesimalen Schrittweiten:


 Abbildung 4.1: RG-Fluss bei  $d = 3.0$  und  $\Lambda=1.0$ .

$$\beta_4(\vec{\lambda}) = -\frac{\partial \lambda_4}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial \lambda_4}{\partial \Lambda} = +\frac{11}{3\Gamma(\frac{d}{2})} \cdot \frac{1}{2^d(\pi)^{\frac{d}{2}}} \left( \frac{1}{1+\lambda_2} \right)^2 \lambda_4^2 - (4-d)\lambda_4. \quad (4.25)$$

Wir wollen nun den Fall  $d \approx 4.0$  betrachten und zunächst von einer masselosen Theorie ausgehen ( $\lambda_2 = 0$ ). Für die  $\beta$ -Funktion ergibt sich:

$$\beta_4(\vec{\lambda}) = +\frac{11}{3} \frac{\lambda_4^2}{16(\pi)^2} - (4-d)\lambda_4. \quad (4.26)$$

Die entsprechenden Literaturwerte der  $\beta$ -Funktion der skalaren  $\phi^4$ -Theorie in O (3)-Symmetrie, die mit Hilfe der perturbativen RG berechnet wurden, finden sich zum Beispiel in [ZJ89]. Es gilt demnach:

$$M \frac{d\lambda_4}{dM} = \beta \approx +\frac{11}{3} \frac{\lambda_4^2}{16\pi^2} - (4-d)\lambda_4 + O(\lambda_4^3, \lambda_4^2\epsilon), \quad (4.27)$$

wobei M die betrachtete Impulsskala ist. Die von uns berechnete  $\beta$ -Funktion wird also durch die Literaturwerte exakt bestätigt.

Betrachten wir jedoch Dimensionen, die von  $d = 4$  stärker abweichen, so wird sich die  $\beta$ -Funktion aus Gleichung (4.25) von Gleichung (4.27) unterscheiden, da diese für den Fall  $d \approx 4$  linear genähert worden ist.

Wie in Abschnitt 3.2.2 können wir jetzt aus der  $\beta$ -Funktion die Lage des Wilson-Fisher-Fixpunktes bestimmen, da diese am Fixpunkt gleich Null sein muss. Aus Gleichung (4.25) erhält man mit der Näherung  $\lambda_2 = 0$  für die Lage des nichttrivialen Fixpunkts  $\lambda_4^*$ :

$$\lambda_4^* = \frac{3}{11} (4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{4-\epsilon}{2}\right) \epsilon. \quad (4.28)$$

Es gilt wieder:  $\epsilon = 4 - d$ .

Auch in der perturbativen Theorie ist die Lage des Wilson-Fisher-Fixpunktes berechnet worden ([ZJ89]). Es gilt:

$$\lambda_4^* = \frac{3 \cdot 16\pi^2}{11} \epsilon. \quad (4.29)$$

Diese Gleichung lässt sich direkt aus Gleichung (4.27) herleiten.

In Abbildung 4.2 ist die Lage des Wilson-Fisher-Fixpunktes für kleine  $\epsilon$  für beide Methoden aufgetragen. Die Lage des Fixpunktes der exakten RGG wurde mit dem numerischen Programm berechnet. Man sieht, dass die Näherungen für sehr kleine  $\epsilon$  übereinstimmen, für größere  $\epsilon$  aber auseinanderlaufen. In Abbildung 4.3 ist die Lage für große  $\epsilon$  aufgetragen. Hier ist im Vergleich zu der Näherung der perturbativen Theorie nicht mehr viel Ähnlichkeit zu erkennen. Die Ergebnisse entsprechen somit den Ergebnissen der Betrachtungen in  $Z(2)$ -Symmetrie (siehe Abbildung 3.6 und Abbildung 3.7). Somit ist auch die Begründung für die Diskrepanzen zwischen den Ergebnissen der exakten und der perturbativen RG wieder die unterschiedliche Herangehensweise der Näherung, da die  $\beta$ -Funktion der perturbativen Theorie in erster Ordnung für  $\epsilon \neq 0$  genähert wird.

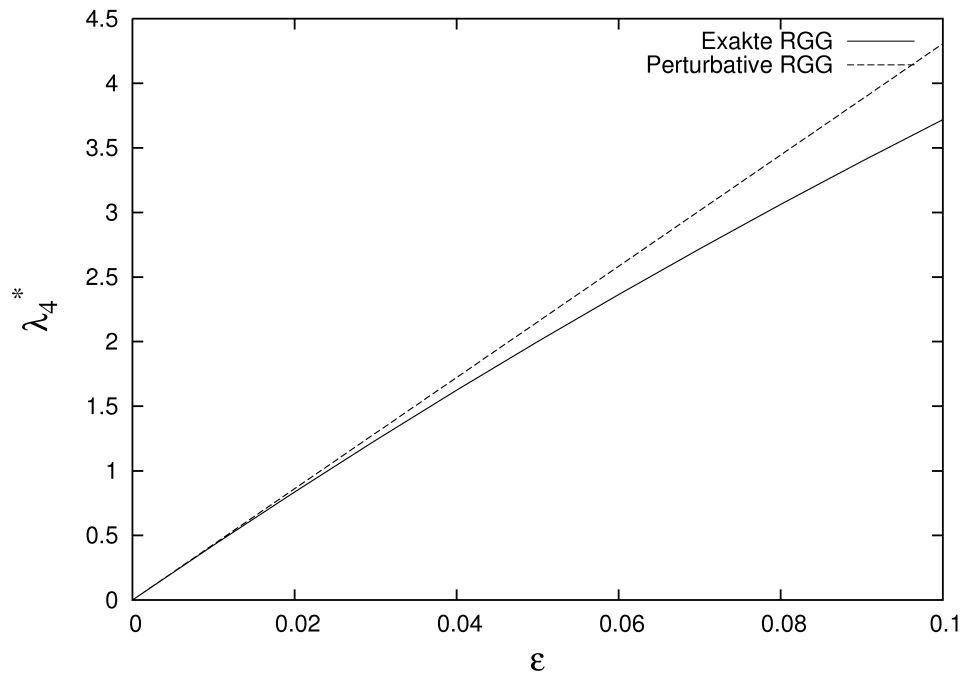
Auch bei der Betrachtung des renormierten Propagators  $P = \frac{1}{\Lambda^2 + \lambda_2}$  kann man die Lage des nicht trivialen Fixpunktes analytisch bestimmen. Um  $\lambda_4^*$  zu bestimmen, muss dann aber auch  $\lambda_2^*$  bekannt sein. Für die Lage des nichttrivialen Fixpunktes ergibt sich bei  $\Lambda = 1$ :

$$\lambda_2^* = -\frac{5\epsilon + 11}{5\epsilon + 22} + \sqrt{\left(\frac{5\epsilon + 11}{5\epsilon + 22}\right)^2 - \frac{5\epsilon}{5\epsilon + 22}}, \quad \lambda_4^* = \frac{3(\lambda_2^{*2} + 2\lambda_2^* + 1) \epsilon \Gamma\left(\frac{4-\epsilon}{2}\right) (4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}}{11}. \quad (4.30)$$

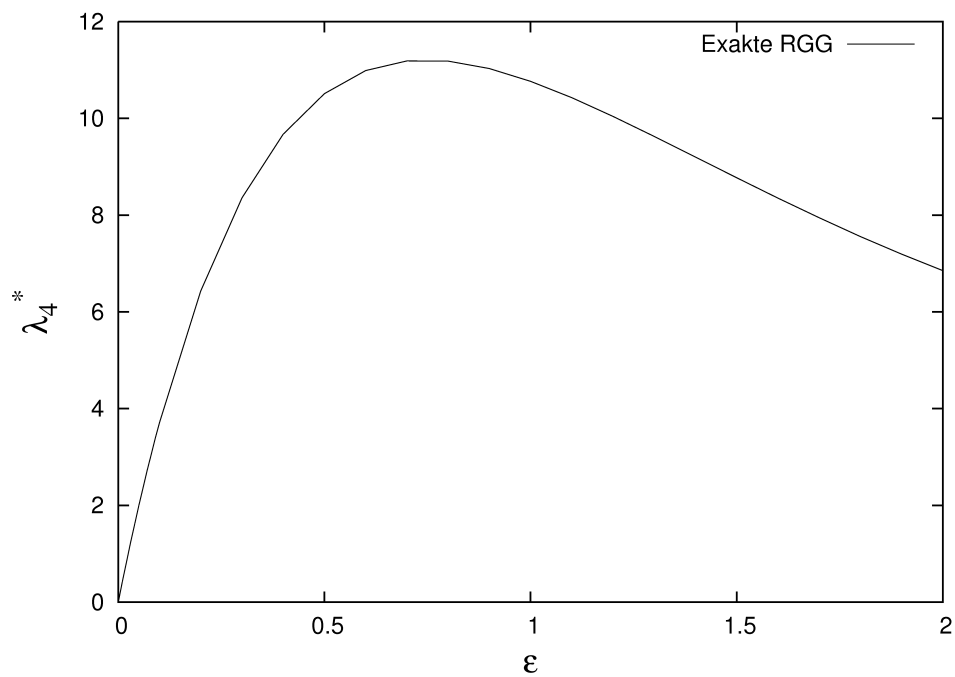
Mit Hilfe der analytisch hergeleiteten Gleichung aus diesem Abschnitt kann die richtige Funktionsweise des numerischen Programms überprüft werden. Es können alle berechneten Werte für die  $\beta$ -Funktion und die Lage des nichttrivialen Fixpunktes numerisch bestätigt werden.

### 4.2.3 Kritische Exponenten der $\phi^4$ -Theorie

In diesem Abschnitt werden wir die kritischen Exponenten der skalaren  $\phi^4$ -Theorie in  $O(3)$ -Symmetrie bestimmen, und dabei analog zu Abschnitt 3.2.3 vorgehen. Zunächst müssen die Eigenrichtungen des Wilson-Fisher-Fixpunktes bestimmt werden. Hierzu wird wieder die „shooting method“ verwendet. In Abbildung 4.4 kann man sehen, wie die Flusslinien



**Abbildung 4.2:** Wanderung des Wilson-Fisher-Fixpunktes in Abhängigkeit von  $\epsilon$ .



**Abbildung 4.3:** Wanderung des Wilson-Fisher-Fixpunktes in Abhängigkeit von  $\epsilon$ .

klar in den Eigenrichtungen des Wilson-Fisher-Fixpunktes verlaufen. Wie im Fall der  $Z(2)$ -



Symmetrie kann man deutlich die beiden attraktiven und die beiden repulsiven Eigenrichtungen erkennen, die sich jeweils gegenüber liegen.

Um das Skalenverhalten fehlerfrei bestimmen zu können, benötigt man die genaue Lage des Fixpunktes. Diese kann aus Gleichung (4.30) für die unterschiedlichen Dimensionen berechnet werden.

Die kritischen Exponenten sind wieder  $\omega_2$  und  $\omega_4$ :

$$\left. \frac{\frac{\partial(\lambda_2 - \lambda_2^*)}{\partial t}}{(\lambda_2 - \lambda_2^*)} \right|_{\lambda_2 \approx \lambda_2^*; \lambda_4 = \lambda_4^*} = \omega_2 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\frac{\partial(\lambda_4 - \lambda_4^*)}{\partial t}}{(\lambda_4 - \lambda_4^*)} \right|_{\lambda_2 = \lambda_2^*; \lambda_4 \approx \lambda_4^*} = \omega_4. \quad (4.31)$$

Wie in Abschnitt 3.2.3 können auch hier die kritischen Exponenten direkt aus dem RG-Programm ausgegeben oder analytisch berechnet werden. In Abbildung 4.5 sind die Ergebnisse für die Exponenten für die RG-Flüsse aus dem oberen Diagramm von Abbildung 4.4 gegen die RG-Zeit dargestellt, die mit dem numerischen Programm bestimmt wurden.

Der Fluss nähert sich dem Fixpunkt und skaliert mit dem Wert des jeweiligen Exponenten, der konstant bleibt, bis der Fluss die Umgebung des Fixpunktes wieder verlassen hat. Auch für Fluss 3 und Fluss 4 kann man ähnliche Diagramme erstellen, die auf die gleichen Exponenten hinweisen.

Mit der Gleichung (3.60), sowie der hergeleiteten RGG, findet man für die Zweier-Kopplung mit  $\Lambda = 1$ :

$$-\left. \frac{\partial \beta_2(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_2} \right|_{\lambda_2 \approx \lambda_2^*; \lambda_4 = \lambda_4^*} = \omega_2 = -\frac{5}{3} \frac{\lambda_4^*}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} \left( \frac{1}{1 + \lambda_2} \right)^2 + 2 \quad (4.32)$$

und für die Vierer-Kopplung:

$$-\left. \frac{\partial \beta_4(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_4} \right|_{\lambda_2 = \lambda_2^*; \lambda_4 \approx \lambda_4^*} = \omega_4 = -\frac{22}{3} \frac{\lambda_4}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} \left( \frac{1}{1 + \lambda_2^*} \right)^2 + (4 - d). \quad (4.33)$$

Betrachten wir  $d = 3.0$ , so ergibt sich aus diesen Gleichungen für die Exponenten am Fixpunkt:

$$\omega_2 \approx 1.545 \quad \text{und} \quad \omega_4 = -1.0. \quad (4.34)$$

Es wurden hierbei jeweils die Fixpunktwerte der Kopplungen ( $\lambda_2^*$  und  $\lambda_4^*$ ) eingesetzt. Genau diese Exponenten kann man auch in Abbildung 4.5 ablesen.

In der folgenden Tabelle sind die Werte der kritischen Exponenten für einige Dimensionen angegeben. Jeder Wert wurde analytisch nach den Formeln 4.32 bzw. 4.33 berechnet und mit Hilfe des numerischen Programms und der Skalierung des RG-Flusses in den Eigenrichtungen des Wilson-Fisher-Fixpunktes bestätigt:

d	$\omega_2$	$\omega_4$
3.8	$1.9\overline{09}$	-0.2
3.6	$1.8\overline{18}$	-0.4
3.3	$1.6\overline{81}$	-0.7
3.0	$1.5\overline{45}$	-1.0

Die erhaltenen Exponenten können mit Literaturwerten der perturbativen RG verglichen werden. Für den Exponenten, der mit  $\omega_4$  zu vergleichen ist, gilt laut Literatur([ZJ89]):

$$\omega_4 = \epsilon + O(\epsilon^2). \quad (4.35)$$

Der Grund für das unterschiedliche Vorzeichen ist wieder die unterschiedliche Richtung, in der die RG-Zeit zunimmt (siehe Abschnitt 3.2.3). Die Exponenten, die sich aus dieser Gleichung ergeben, sind mit den entsprechenden gemessenen Exponenten aus der obigen Tabelle exakt identisch.

Um auch die Werte für  $\omega_2$  mit Literaturwerten vergleichen zu können, müssen wir analog zu Abschnitt 3.2.3 zunächst den Exponenten  $\nu$  berechnen. Es gilt:

$$\nu = \frac{1}{\omega_2}. \quad (4.36)$$

Für den Exponenten  $\nu$  in skalarer  $\phi^4$ -Theorie in  $O(3)$ -Symmetrie erhält man mit Hilfe der perturbativen RG ([ZJ89]) die Gleichung:

$$\frac{1}{\nu} = 2 - \frac{5}{3} \frac{\lambda_4}{16\pi^2} + O(\lambda_4^2). \quad (4.37)$$

Setzt man in diese Gleichung den entsprechenden Literaturwert für die Lage des Fixpunktes aus Gleichung 4.29 ein, so erhält man:

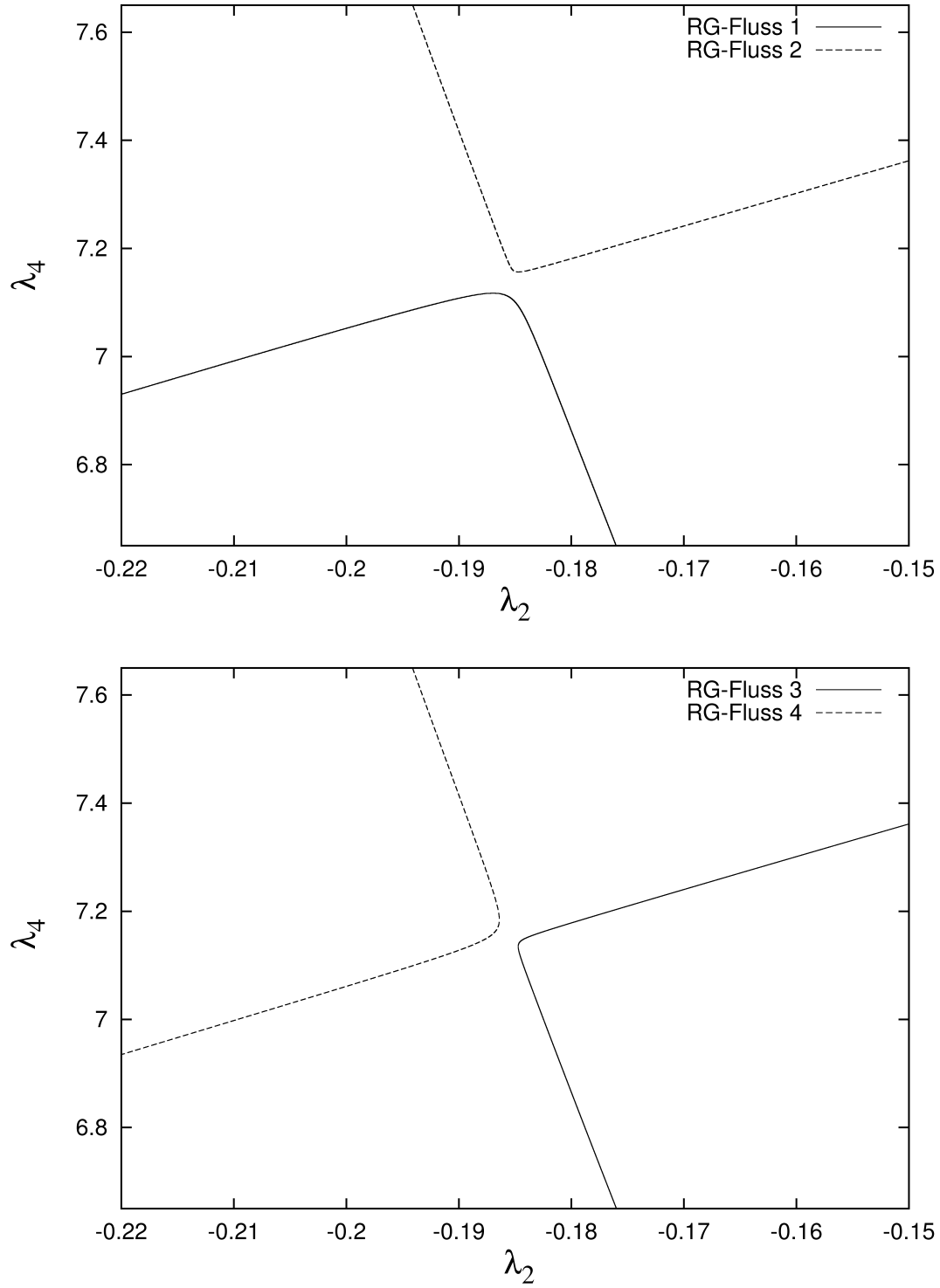
$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{5}{11}\epsilon} \quad (4.38)$$

und für  $\omega_2$  gilt dann:

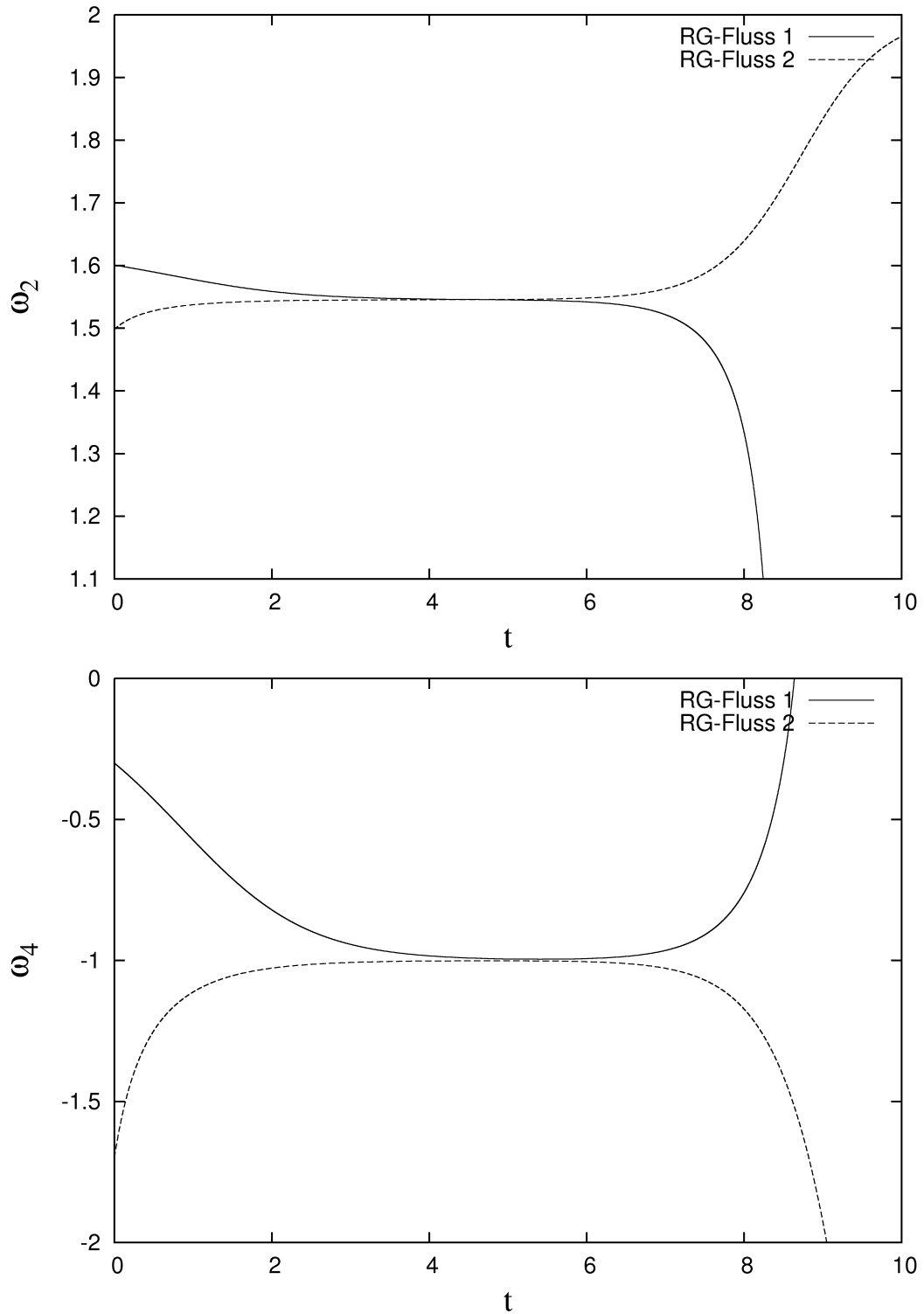
$$\omega_2 = 2 - \frac{5}{11}\epsilon. \quad (4.39)$$

Berechnet man aus dieser Formel die entsprechenden Werte für  $\omega_2$ , so erhält man die gleichen Exponenten, die wir in der obigen Tabelle berechnet haben.

Die ermittelten Exponenten können also mit den Literaturwerten der perturbativen RG bestätigt werden.



**Abbildung 4.4:** Eigenrichtungen des RG-Flusses in der Umgebung des Wilson-Fisher-Fixpunktes bei  $d = 3.0$ .



**Abbildung 4.5:** Skalierung der Kopplungen des RG-Flusses in der Umgebung des Wilson-Fisher-Fixpunktes bei  $d = 3.0$ .

## 5 Monte-Carlo-Simulationen der Burgers-Gleichung

Wie in Abschnitt 2.3.2 beschrieben, wurde mit Hilfe des Funktionalintegralformalismus nach Martin-Siggia-Rose eine Wirkung (siehe Gleichung (2.70)) hergeleitet, die die Physik der Burgers-Gleichung beschreiben soll. In diesem Kapitel soll die Wirkung nun mit einem Heatbath-Monte-Carlo-Algorithmus numerisch simuliert werden. Ziel der Simulationen ist es, die turbulenten Eigenschaften der mit einer Zufallskraft angetriebenen Burgers-Gleichung zu untersuchen. Es wird hierbei vor allem die Skalenabhängigkeit des turbulenten Zerfalls von Wirbeln zwischen der Korrelations- und der Dissipationslänge betrachtet. Die elementare Größe der Untersuchungen ist die Strukturfunktion, deren Skalenverhalten bestimmt werden soll.

Nach erfolgreicher Bestimmung der Strukturfunktionen auf dem Gitter soll der Kontinuums-limes durchgeführt werden. Hierzu werden Simulationen auf immer größeren Gittern durchgeführt, wobei die physikalische Größe des Gitters und die physikalischen Variablen auf dem Gitter immer gleich sein sollen. Der betrachtete Bereich wird somit mit immer feineren Gittern untersucht. Ziel ist es, aus den berechneten Werten mit den immer feiner werdenden Gittern im Limes den Wert für das Kontinuum zu erhalten.

Es wird zunächst der Aufbau des Monte-Carlo-Gitters erklärt, die Wirkung auf dem Gitter diskretisiert und in den Algorithmus eingebaut. Im zweiten Teil des Kapitels werden dann die Ergebnisse der Simulationen vorgestellt und diskutiert.

### 5.1 Einbau der Wirkung und Stabilitätskriterien

#### 5.1.1 Monte-Carlo-Gitter

Simuliert wird auf einem rechteckigen Gitter mit einer Zeit- und einer Raumdimension sowie  $N_t$  Gitterpunkten in Zeit- und  $N_x$  Gitterpunkten in Raumrichtung. Zwei benachbarte Gitterpunkte sind jeweils  $\Delta_x$  beziehungsweise  $\Delta_t$  voneinander entfernt. Die Größe des Gitters wird in unseren Simulationen in beiden Richtungen auf eins normiert:

$$N_t \cdot \Delta_t = 1 \quad \text{und} \quad N_x \cdot \Delta_x = 1. \quad (5.1)$$

Die Geschwindigkeiten, die bisher von den kontinuierlichen Parametern des Ortes  $x$  und der Zeit  $t$  abhängig waren, werden nun über ihre Position im Gitter beschrieben:

$$v(x, t) \rightarrow v(x_i, t_j) \rightarrow v_{ij}. \quad (5.2)$$

Ein Messwert  $O$  wird als Mittelwert der Werte von  $O$  in den simulierten Konfigurationen berechnet (siehe Abschnitt 2.3.3). Für die Mittelwerte gilt:

$$\langle O \rangle = \int \prod_{i=1}^{N_x} \prod_{j=1}^{N_t} dv_{ij} O(\{v_{ij}\}) \exp(-S(\{v_{ij}\})). \quad (5.3)$$

Hierbei ist  $S(v_{ij})$  die für das Gitter diskretisierte Wirkung am Gitterpunkt  $(i, j)$ . Da in einer Monte-Carlo-Simulation eine Konfiguration immer in eine andere Konfiguration übergeht, muss natürlich beachtet werden, dass benachbarte Zustände korreliert sein werden. Bei der Mittelwertbildung sollten die betrachteten Konfigurationen in der Monte-Carlo-Zeit weiter als die doppelte Autokorrelationszeit voneinander entfernt sein.

Als antreibende Kraft haben wir eine zufällige, aber gaußverteilte Kraft gewählt. Wir definieren ein  $\chi$  mit den folgenden Eigenschaften ( $\chi$  wurde bereits in Gleichung (2.67) eingeführt):

$$\chi(x, x', t, t') = \chi(0) \delta(t - t') \exp\left(-\frac{|x - x'|}{\Lambda}\right). \quad (5.4)$$

$\Lambda$  ist die Korrelationslänge des Systems.

Geht man davon aus, dass der Energiefluss zwischen den Skalen innerhalb des intermediären Bereichs unabhängig von der betrachteten Skala sein soll, und die Energie hier nicht absorbiert wird, sondern konstant bleibt, so kann man mit einer Dimensionsanalyse folgern, dass gilt:

$$\epsilon = \chi(0). \quad (5.5)$$

Der Umgang mit der Energiedissipation wird im Buch von U. Frisch [Fri95] ausführlich erläutert.

Die charakteristische Geschwindigkeit  $v_0$  des Systems kann über eine Dimensionsanalyse bestimmt werden. Hierbei wird angenommen, dass dem System im Gleichgewicht genausoviel Energie zugeführt wie abgeführt wird. Es kann daher die Energiedissipation pro Einheitsmasse  $\epsilon$  der Dimension  $\left[\frac{m^2}{s^3}\right]$  betrachtet und mit der Korrelationslänge in Bezug gesetzt werden. Es ergibt sich für die charakteristische Geschwindigkeit des Systems:

$$v_0 = (\epsilon \Lambda)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.6)$$

Nach der Definition der Reynoldszahl (Gleichung (2.1)) gilt dann:

$$\text{Re} = \left(\frac{\epsilon \Lambda^4}{\nu^3}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.7)$$

Die Energie soll auf den kleinsten Längenskalen dissipiert werden. Die Dissipationsskala  $\eta$  und die Korrelationslänge  $\Lambda$  müssen für die Untersuchung des turbulenten Zerfalls auf dem Gitter aufgelöst werden. Dieses Stabilitätskriterium hatte sich bereits in früheren Untersuchungen innerhalb der Kooperation herausgestellt [HJMU08]. So zeigt sich, dass Simulationen, in

denen die Dissipationsskala nicht aufgelöst wird, nicht stabil sind, da sich die Energie an den Kanten der Schocks sammelt und die Geschwindigkeit an den entsprechenden Gitterpunkten divergiert. Daher ergibt sich die Bedingung:

$$\Delta_x < \eta. \quad (5.8)$$

Der turbulente Zerfall der Wirbel wird im Bereich zwischen der Korrelations- und der Dissipationslänge untersucht ( $\eta < x < \Lambda$ ). Wir definieren die Dissipationsskala gemäß der K41-Theorie (siehe Gleichung 2.7). Bei endlicher Viskosität gilt:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (5.9)$$

wobei  $\nu > 0$ .

Mit den Gleichungen (5.7), (5.8) und (5.9) ergibt sich für die Reynoldszahl die Bedingung:

$$\text{Re} < \left( \frac{\Lambda}{\Delta_x} \right)^{\frac{4}{3}} = (\Lambda N_x)^{\frac{4}{3}}. \quad (5.10)$$

Da im Allgemeinen große Reynoldszahlen ( $\text{Re} > 1$ ) betrachtet werden sollen und  $\Lambda$  in etwa von der Größe des Gitters ist, ist Gleichung (5.10) auch eine Bedingung für die minimale Größe des Gitters in Ortsrichtung, wenn bestimmte Reynoldszahlen und Viskositäten betrachten werden sollen.

Betrachtet man den symmetrischen „random walk“ im eindimensionalen Fall und führt dann den Kontinuumsimes durch, so erhält man für die Diffusionskonstante  $F$ :

$$F = \frac{\Delta_x^2}{2\Delta_t}. \quad (5.11)$$

Die Herleitung dieser Gleichung findet sich zum Beispiel in einem Buch von G. Roepstorff [Roe94]. Die Diffusionskonstante lässt sich als Maß für die Beweglichkeit von Teilchen verstehen. In unserem Fall ist die Beweglichkeit der Teilchen gerade über die Viskosität gegeben, für die wir daher folgern:

$$\nu \propto \frac{(\Delta_x)^2}{\Delta_t}. \quad (5.12)$$

Wir definieren einen Parameter  $\alpha$ , für den gilt:

$$\nu = \alpha \frac{(\Delta_x)^2}{\Delta_t}. \quad (5.13)$$

In der Regel wird die Viskosität der simulierten Gitter vorgegeben,  $\alpha$  legt dann die Schrittweite der Zeitschritte bei fester Anzahl an räumlichen Gitterpunkten fest. Es wird sich später

herausstellen, dass die Wahl von  $\alpha$  für die Stabilität der Simulationen eine wichtige Rolle spielt.

### 5.1.2 Diskretisierung der Wirkung

In Abschnitt 2.3.2 wurde bereits die Wirkung hergeleitet, die wir mit einem Heatbath-Monte-Carlo-Programm untersuchen wollen. Sie hat die Form:

$$S(v) = \int dx dx' dt B(v(x, t)) \chi^{-1} B(v(x', t)) \quad \text{mit} \quad B(v) = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (5.14)$$

Die Integrale wandeln sich bei der Diskretisierung auf das Gitter in Summen über die Terme der Wirkung an den einzelnen Gitterpunkten, multipliziert mit den Schrittweiten, um. Es ergibt sich demnach für die Wirkung einer Konfiguration auf dem Gitter:

$$S_{\text{Konf.}} = \Delta_x^2 \Delta_t \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_t} B(v_{ij}) \left( \sum_{k=1}^{N_x} \chi_{ik}^{-1} B(v_{kj}) \right). \quad (5.15)$$

Jetzt muss noch entschieden werden, wie  $B(v_{kj})$  auf dem Gitter eingeführt wird. Die Ableitungen werden in der folgenden Art und Weise behandelt:

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial t} = \frac{v_{i(j+1)} - v_{ij}}{\Delta_t}, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial x} = \frac{v_{(i+1)j} - v_{(i-1)j}}{2\Delta_x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v_{ij}}{\partial x^2} = \frac{v_{(i+1)j} - 2v_{ij} + v_{(i-1)j}}{\Delta_x^2}. \quad (5.17)$$

Eingesetzt in  $B(v_{ij})$  ergibt sich:

$$B(v_{ij}) = \frac{v_{i(j+1)} - v_{ij}}{\Delta_t} + v_{ij} \frac{v_{(i+1)j} - v_{(i-1)j}}{2\Delta_x} - \nu \frac{v_{(i+1)j} - 2v_{ij} + v_{(i-1)j}}{\Delta_x^2}. \quad (5.18)$$

An den Rändern des Gitters erhält man Probleme, da die Werte der benachbarten Gitterpunkte nicht mehr definiert sind. Zunächst wollen wir das Gitter als periodisches Gitter in Raum und Zeit betrachten. Das Gitter wiederholt sich also sowohl in der Raum-, als auch in der Zeitrichtung und es tauchen keine Ränder mehr auf, die bei der Berechnung der lokalen Wirkungen zu Problemen führen.

Die Terme von  $B(v_{ij})$  sind bewusst so gewählt worden, dass sie höchstens linear von den Geschwindigkeiten  $v_{ij}$  abhängen. Die erhaltene Wirkung an einem einzelnen Gitterpunkt  $(i; j)$  hat in unserem Fall die Form:

$$S(v_{ij}) = I_{ij} [v_{ij} - J_{ij}]^2 + K_{ij}. \quad (5.19)$$



Hier gilt:  $I_{ij} > 0$ . Wenn wir uns Gleichung (5.15) und Gleichung (5.18) anschauen, so sehen wir, dass  $I_{ij}$ ,  $J_{ij}$  und  $K_{ij}$  nicht mehr von  $v$  am Gitterpunkt  $ij$  abhängen. Im Laufe des Algorithmus wird  $v_{ij}$  zufällig variiert. Die Wirkung  $S(v_{ij})$  wird offensichtlich dann minimal, wenn gilt:  $v_{ij} \approx J_{ij}$ . Die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $v_{ij}$  liefert immer einen positiven Beitrag und geht quadratisch in die Wirkung ein.  $v_{ij}$  wird also gaußverteilt sein, wenn man das Feld an allen anderen Gitterpunkten konstant hält. Eine solche Wirkung bietet sich für die Untersuchungen mit einem Heatbath-Monte-Carlo-Algorithmus an (siehe Abschnitt 2.3.4).

Die Wirkung einer kompletten Konfiguration auf dem Gitter kann jetzt berechnet werden. Sie ist die Summe über die lokalen Wirkungen der einzelnen Gitterpunkte, die jeweils nur lokal von den Werten der Geschwindigkeiten der benachbarten Gitterpunkte abhängen. Geht man jetzt nacheinander die einzelnen Gitterpunkte durch und verändert die lokalen Geschwindigkeiten im Rahmen eines Heatbath-Monte-Carlo-Schrittes, so erhält man eine neue Konfiguration. In dieser Weise kann eine Markov-Kette gebildet werden.

## 5.2 Simulationen und Ergebnisse

Zur Simulation der Wirkung wurde innerhalb der Kooperation von David Mesterházy ein Heatbath-Monte-Carlo-Programm in C++ geschrieben. Es hat sich herausgestellt, dass die Thermalisierungszeiten leider sehr hoch sind. Sie liegen bei einer Größenordnung von  $10^5$  bis  $10^6$  Monte-Carlo-Schritten. Bei der Durchführung der Simulationen hat sich außerdem eine zusätzliche Bedingung für stabile Simulationen mit sinnvollen Konfigurationen ergeben. Der Parameter  $\alpha$  zur Festlegung der Schrittweite in Zeitrichtung darf nicht zu groß gewählt werden, da es sonst zu Diskretisierungsschwierigkeiten auf dem Gitter kommt.

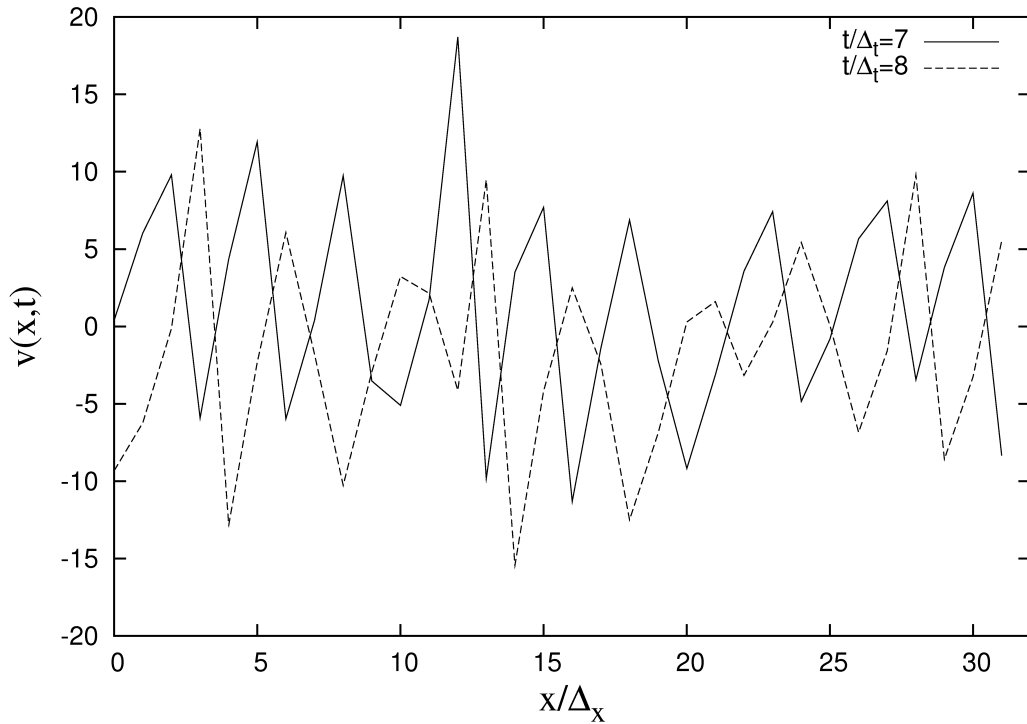
Zwei benachbarte Zeitscheiben einer Simulation, in der  $\alpha$  zu groß gewählt worden ist, sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Die Kurven der Geschwindigkeiten haben offensichtlich weder in Raum-, noch in Zeitrichtung einen glatten Verlauf und springen von Wert zu Wert. Die Ableitungen, die in den Gleichungen 5.16 und 5.17 definiert worden sind, sind dann nicht mehr sinnvoll. Hält man die Viskosität  $\nu$  konstant und variiert die Gittergröße und den Parameter  $\alpha$ , so sieht man mit Gleichung 5.13, dass bei steigendem  $\alpha$  die Schrittweite in Zeitrichtung im Verhältnis zur Schrittweite in Raumrichtung größer wird.

Offensichtlich darf die Schrittweite in Zeitrichtung nicht zu groß gewählt werden, da wir ansonsten keine sinnvollen Konfigurationen erhalten. Wie bereits erwähnt, darf auch die Schrittweite im Ort nicht zu groß gewählt werden (siehe Gleichung (5.8)). Aus den durchgeführten Simulationen kann folgende Bedingung für  $\alpha$  abgelesen werden:

$$\alpha < 0.5. \quad (5.20)$$

Solange man diese Bedingung und die Bedingungen, die in Abschnitt 5.1.1 erläutert worden sind, einhält, erhält man stabile Konfigurationen.

Die Größe der simulierten Gitter variiert zwischen dem kleinsten Gitter mit  $N_t = 4$  und  $N_x = 16$ , und dem größten Gitter mit  $N_t = 4096$  und  $N_x = 16$ . Aufgrund der langen Ther-



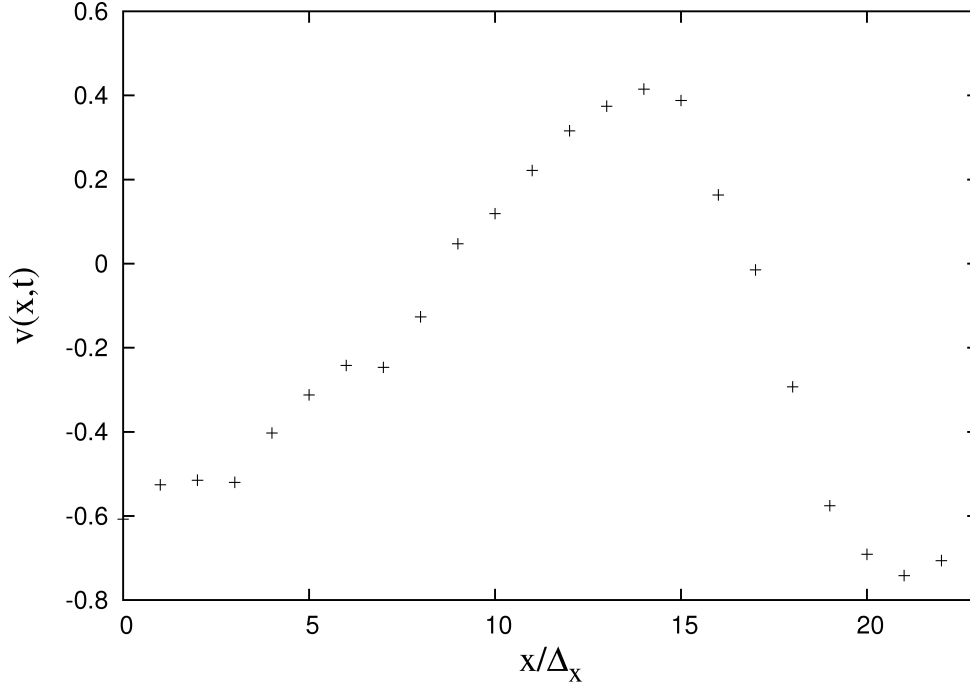
**Abbildung 5.1:** Zwei benachbarte Zeitscheiben mit zu groß gewähltem  $\alpha$ . Die Zeitscheiben stammen aus einer Simulation mit  $Re = 4$ ,  $\nu = \frac{1}{8}$ ,  $N_x = 32$ ,  $N_t = 128$  und  $\alpha = 1$ .

malisierungszeiten benötigt man für größere Gitter sehr lange Rechenzeiten. Um auch die größeren Gitter mit genügend hoher Statistik simulieren zu können, habe ich eine parallele Version des C++ Programms geschrieben, die auf dem Supercomputer IBM p690-Cluster JUMP im Forschungszentrum Jülich angewendet wurde. In der Regel wurden in einer Simulation  $5 \cdot 10^6$  Monte-Carlo-Schritte berechnet. Die betrachteten Reynoldszahlen wurden zwischen  $Re = 2$  und  $Re = 256$  variiert.

In den Simulationen konnten die typischen Schocks, die die Lösung der Burgers-Gleichung bilden, beobachtet werden. In Abbildung 5.2 sieht man eine typische Zeitscheibe einer berechneten Konfiguration, in der die Schocklösung sehr gut zu erkennen ist. In Abbildung 5.3 ist eine typische Konfiguration zu sehen, wobei hier das komplette Gitter dargestellt ist. Es konnte außerdem beobachtet werden, dass die Schocks in Zeitrichtung auf dem Gitter wandern (siehe Abbildung 5.4).

Es wurden auch Konfigurationen mit mehreren Schocks simuliert, wie in Abbildung 5.5 zu sehen ist. Auch hier erkennt man, wie die Schocks in Zeitrichtung gleichmäßig über das Gitter wandern.

Für die Bestimmung der Strukturfunktionen habe ich ein C++ Programm geschrieben. In der Kooperation wurde außerdem ein MATLAB Programm geschrieben, das die Strukturfunktion



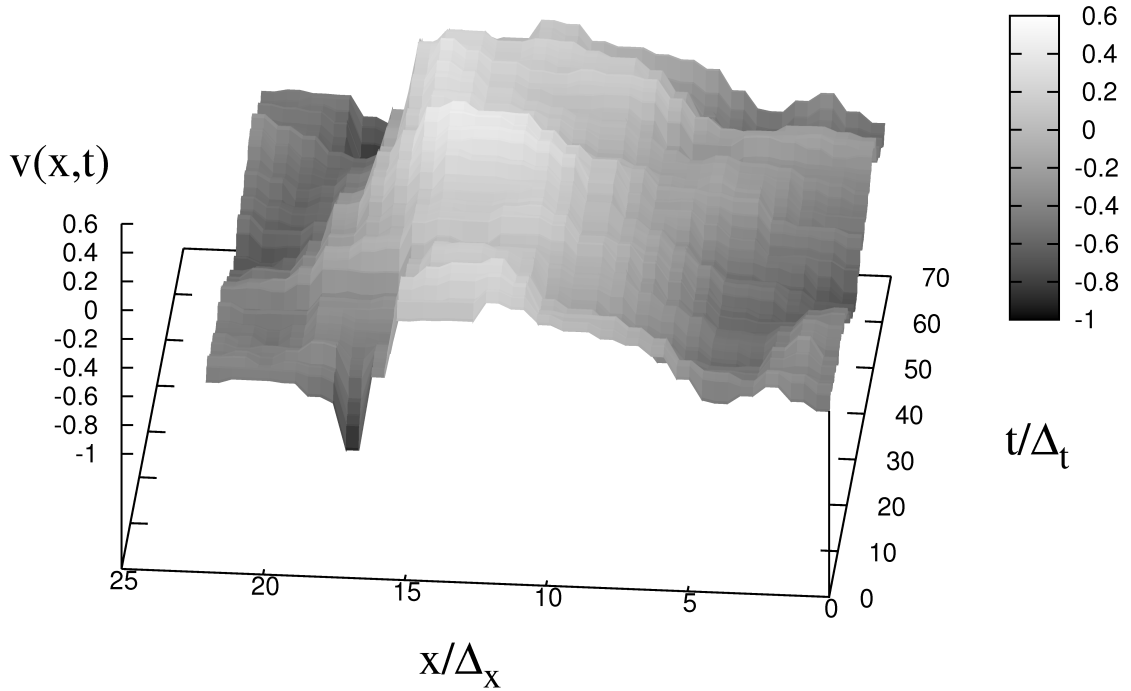
**Abbildung 5.2:** Einzelne Zeitscheibe mit typischem Schock. Die Zeitscheibe stammt aus einer Simulation mit  $Re = 4$ ,  $\nu = \frac{1}{128}$ ,  $N_x = 23$ ,  $N_t = 64$  und  $\alpha = \frac{1}{16}$ .

und den zugehörigen Fehler über einen Algorithmus von Uli Wolff [Wol03] berechnen kann.

In Abbildung 5.6 sieht man die Strukturfunktion dritter Ordnung ( $p = 3$ ). Aufgrund der Periodizität im Ort ist die Strukturfunktion symmetrisch zum Gittermittelpunkt. Für sehr kleine  $x$  befindet man sich noch im mikroskopischen Bereich, in dem die Energie in Wärme umgesetzt wird. Dieser Bereich sollte bei der Bestimmung der Strukturfunktion nicht betrachtet werden. Die Unstetigkeiten in Abbildung 5.6 für sehr kleine und sehr große  $x$  lassen sich durch das Verlassen des intermediären Bereichs erklären. Man sieht, dass die Strukturfunktion in etwa linear ansteigt. Sie skaliert also anscheinend mit dem von Kadanoff vorgeschlagenen Skalenverhalten (siehe Gleichung 2.9). Führt man eine Fouriertransformation der in Gleichung (5.4) definierten antreibenden Kraft durch, so ergibt sich unter der Annahme  $k \gg L^{-1}$ , dass bei der von uns betrachteten Kraft gilt:  $\beta = -2$ . Somit würde nach Gleichung (2.63) für unser Skalenverhalten gelten:  $a = \min(\frac{2p}{3}, 1)$ . Auch diesem bifraktalem Skalenverhalten würde die Strukturfunktion aus Abbildung 5.6 genügen, wenn man die lineare Steigung annimmt.

In Abbildung 5.7 sieht man die Strukturfunktion zweiter Ordnung. Es ist erkennbar, dass man die gemessene Strukturfunktion gut mit einer Potenzfunktion anpassen kann und es sich bei den gemessenen Strukturfunktionen offensichtlich wirklich um Potenzfunktionen handelt.

Der genaue Verlauf der Strukturfunktion konnte leider noch nicht eindeutig bestimmt werden, da das Skalenverhalten der Strukturfunktion aufgrund der zu großen Fehlerbalken nicht eindeutig ist. Beim Fitten der dargestellten Funktion sollten die ersten Messpunkte nicht

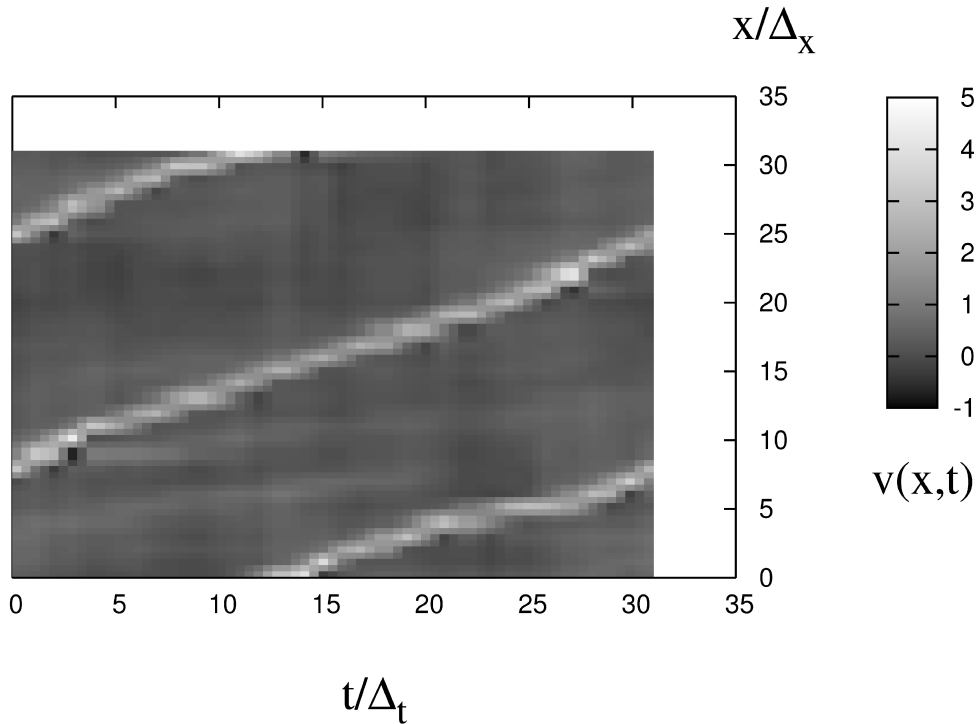


**Abbildung 5.3:** Einzelner Schock. Die Konfiguration stammt aus einer Simulation mit  $Re = 4$ ,  $\nu = \frac{1}{128}$ ,  $N_x = 23$ ,  $N_t = 64$  und  $\alpha = \frac{1}{16}$ .

beachtet werden, da die betrachteten Längen kleiner als die Dissipationslänge sind und sich in diesem Bereich keine Aussagen über das Skalenverhalten der Strukturfunktion machen lassen. Beachtet man diese Einschränkung, so passen sich alle drei im Diagramm dargestellten Funktionen in etwa gleich gut an die Messpunkte an. Die Exponenten der Funktionen variieren aber zwischen  $p = 0.3$  bis  $p = 0.5$ . Auch wenn damit zum Beispiel ein Skalieren nach Gleichung (2.63) ausgeschlossen werden kann (die Strukturfunktion müsste sich linear verhalten), so ist der mögliche Bereich doch für genaue Aussagen noch viel zu ungenau. Innerhalb der Fehlerbalken sind sogar noch viel stärkere Schwankungen der Exponenten möglich. Ähnliche Probleme bekommt man auch mit der Strukturfunktion in Abbildung 5.6. Für Strukturfunktionen kleinerer Ordnung tritt das Problem sogar noch deutlich stärker auf.

Die Auswertung der Strukturfunktion würde deutlich einfacher werden, wenn der Punkt, an dem die Strukturfunktionen die y-Achse schneidet, bekannt wäre. Da der Bereich kleiner Längenskalen aber außerhalb des intermediären Bereichs liegt, sind über diesen Wert keinerlei Aussagen möglich. Für eine genauere Untersuchung der Strukturfunktion wird eine größere Statistik und deutlich geringere Fehlerbalken notwendig sein.

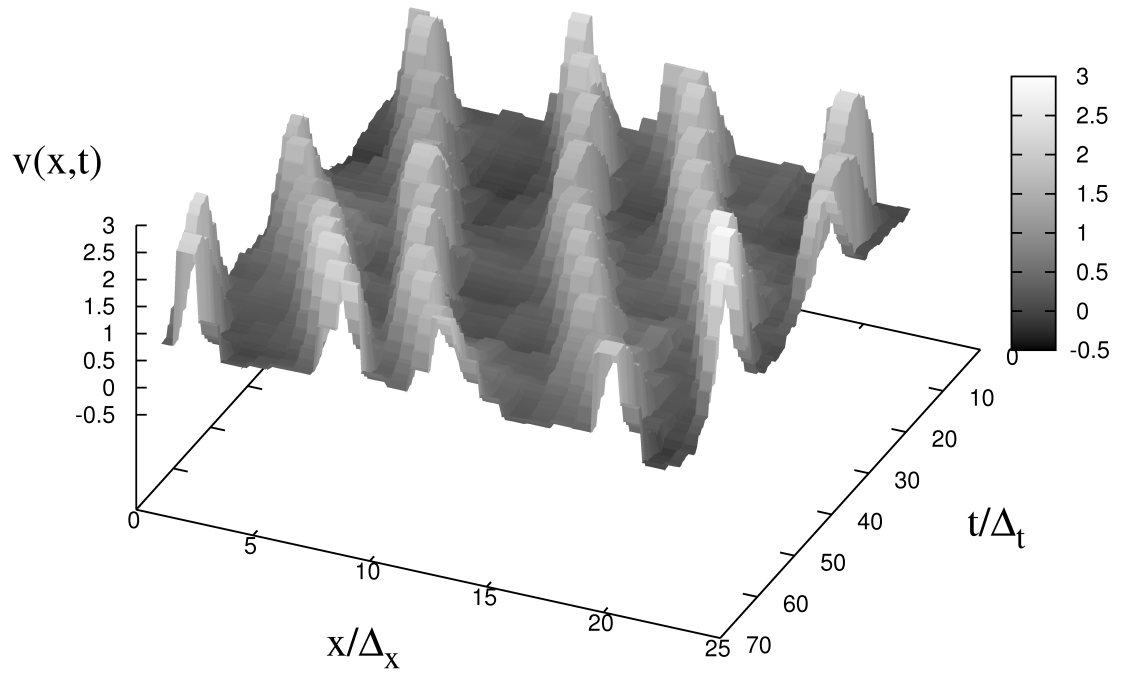
Als nächster Schritt werden zur Zeit Gitter mit nicht-periodischen Randbedingungen untersucht. Hierbei werden entweder die Randkoordinaten im Ort oder in der Zeit frei gewählt, die Simulation ansonsten aber auf die gleiche Art und Weise wie zuvor durchgeführt. Die Ableitungen an den Rändern der Gitter werden dann jeweils gleich Null gesetzt. Wir ha-



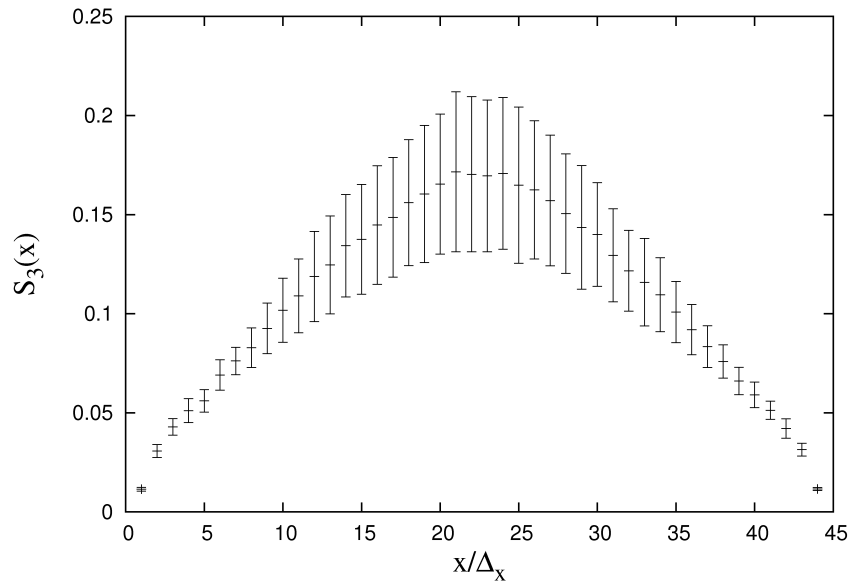
**Abbildung 5.4:** Wanderung der Schocks mit der Monte-Carlo-Zeit. Die Konfiguration stammt aus einer Simulation mit  $Re = 16$ ,  $\nu = \frac{1}{512}$ ,  $N_x = 32$ ,  $N_t = 32$  und  $\alpha = \frac{1}{8}$ .

ben bereits stabile Simulationen erhalten, in denen wieder die typischen Schocklösungen der Burgers-Gleichung zu beobachten waren, nur im unmittelbaren Randbereich der Gitter kommt es zu Abweichungen.

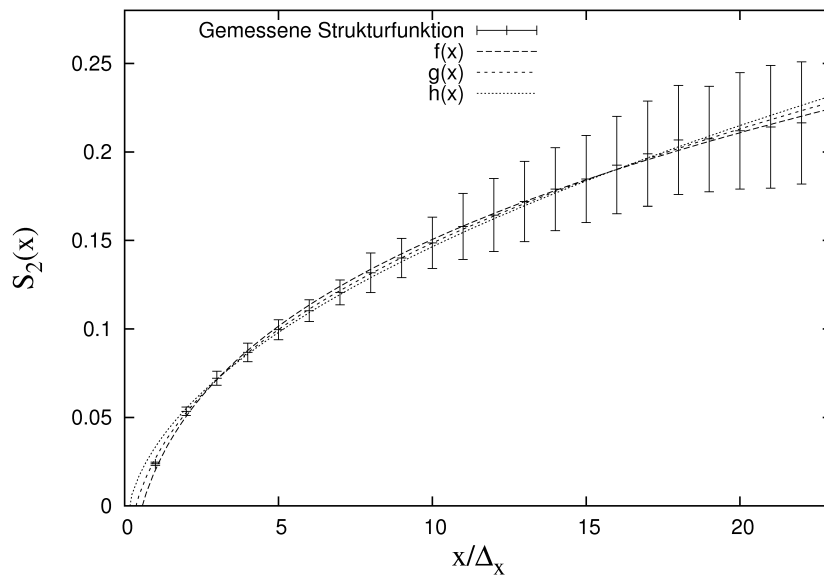
Für die periodischen Gitter werden auch die Strukturfunktionen untersucht. Die ersten Ergebnisse bei Gittern mit periodischen Randbedingungen in der Zeit und nicht-periodischen Randbedingungen im Ort lassen zwar auf ein lineares Skalenverhalten der Strukturfunktion dritter Ordnung schließen, die Exponenten für das Skalenverhalten von kleinen und großen Ordnungen konnten aber noch keinem der oben beschriebenen Skalenverhalten zugeteilt werden. Für genauere Aussagen wird auch hier noch mehr Statistik notwendig sein.



**Abbildung 5.5:** Mehrere mit der Monte-Carlo-Zeit wandernde Schocks. Die Konfiguration stammt aus einer Simulation mit  $Re = 16$ ,  $\nu = \frac{1}{512}$ ,  $N_x = 23$ ,  $N_t = 64$  und  $\alpha = \frac{1}{64}$ .



**Abbildung 5.6:** Strukturfunktion dritter Ordnung einer Monte-Carlo-Simulation mit  $Re = 16$ ,  $N_x = 45$ ,  $N_t = 256$ ,  $\nu = \frac{1}{512}$  und  $\alpha = \frac{1}{64}$ .



**Abbildung 5.7:** Strukturfunktion zweiter Ordnung einer Monte-Carlo-Simulation mit  $Re = 16$ ,  $N_x = 45$ ,  $N_t = 256$ ,  $\nu = \frac{1}{512}$  und  $\alpha = \frac{1}{64}$ . Zusätzlich abgebildet sind die Funktionen:  $f(x) = -0.110342 + 0.130773 \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{0.3}$ ,  $g(x) = -0.0533459 + 0.0803657 \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{0.4}$  und  $h(x) = -0.0188298 + 0.0522705 \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{0.5}$ .





# Zusammenfassung und Ausblick

Bei der Arbeit mit den RGGen konnte sowohl in  $O(3)$ - als auch in  $Z(2)$ -Symmetrie eine RGG nach Wegner und Houghton der skalaren Feldtheorie in lokaler Potenzial Approximation hergeleitet werden. Beide Gleichungen konnten mit Hilfe von numerischen Programmen untersucht und ausgewertet werden. In beiden Symmetrien wurde im Rahmen der  $\phi^4$ -Theorie der Wilson-Fisher-Fixpunkt gefunden und dessen Lage für unterschiedliche Dimensionen bestimmt. Auch die  $\beta$ -Funktion der Vierer-Kopplung und die Exponenten des Fixpunktes konnten gemessen werden. Die Ergebnisse wurden mit bekannten Ergebnissen der perturbativen Theorie verglichen und bestätigt. Man kann daher vermuten, dass die RGGen richtig hergeleitet worden sind. Teilweise konnten die numerisch bestimmten Werte analytisch nachgerechnet werden und wurden immer bestätigt. Hieraus kann man auf die korrekte Funktionsweise der numerischen Programme schließen.

Die erhaltenen Ergebnisse zeigen, dass es sich bei der exakten RG um ein sehr vielversprechendes Verfahren handelt, um statistische Systeme und Theorien zu untersuchen. Mit den hergeleiteten Gleichungen sind noch viele weitere Untersuchungen in höherer Ordnung in  $\phi^4$ -Theorie aber auch mit komplexeren skalaren Systemen denkbar. Einziges Problem ist die steigende Dimension im Kopplungsraum, die Untersuchungen erschwert.

Das eigentliche Ziel, den RG-Fluss der mit Hilfe des Pfadintegralformalismus hergeleiteten RGG zur Untersuchung der Navier-Stokes-Gleichung zu betrachten, konnte innerhalb dieser Diplomarbeit leider nicht mehr erreicht werden. Einige Probleme konnten in diesem Zusammenhang bis jetzt nicht gelöst werden, so zum Beispiel die enorme Rechenzeit, die notwendig wäre, um die Abhängigkeit der Kopplungen von den Impulsen eines jeden Feldes im numerischen Programm zu beachten. Die Ergebnisse, die in dieser Arbeit vorgestellt worden sind, liefern aber eine sehr gute Grundlage für weiterführende Untersuchungen zu diesem Thema.

Der nächste Schritt sollte die Herleitung einer RGG für den Fall gebrochener  $O(3)$ -Symmetrie sein. Außerdem muss langfristig eine komplexere Approximation gewählt werden, da die lokale Potenzial Approximation für die Untersuchungen der RGG der Navier-Stokes-Gleichung nicht ausreichend sein kann. Man wird auch um die Einführung der Impulsabhängigkeiten der Kopplungen nicht herumkommen. Wie zuvor erläutert, ist die direkte numerische Umsetzung leider nicht möglich. Vielleicht gelingt es aber, die Impulsabhängigkeit der Kopplungen über eine künstliche, fest definierte Funktion einzuführen. So wurden zu diesem Thema bereits Versuche mit Gaußlocken durchgeführt.

Bei den Simulationen der Burgers-Gleichung mit einem Heatbath-Monte-Carlo-Programm konnte gezeigt werden, dass man über die Auswertung der Burgers-Gleichung mit Hilfe des Pfadintegralformalismus die erwarteten Lösungen der Gleichung simulieren kann. Es konnten stabile Simulationen mit beliebig vielen Monte-Carlo-Iterationen durchgeführt werden, um eine gute Statistik zu erhalten. Die Betrachtung der Monte-Carlo-Gitter macht es möglich,

die Bildung der turbulenten Eigenschaften und das Skalenverhalten der Burgers-Gleichung direkt zu beobachten. Die Werte der Strukturfunktionen konnten über die Bildung von Mittelwerten gemessen werden. Die Strukturfunktionen haben, wie erwartet, den Verlauf von Potenzfunktionen. Da die bisherigen Simulationen immernoch zu große Fehlerbalken vorweisen, konnten die Exponenten der Strukturfunktionen aber noch nicht mit zufriedenstellender Genauigkeit gemessen werden.

In einem nächsten Schritt sollten weitere Simulationen durchgeführt werden, um mehr Statistik zu erhalten und die Fehlerbalken der Strukturfunktionen zu verringern, damit diese dann ohne große Unsicherheit bestimmt werden können. Es wäre dann interessant, auch die Strukturfunktionen von Gittern mit nicht-periodischen Randbedingungen weiter zu untersuchen und mit den Ergebnissen der periodischen Gitter zu vergleichen. In beiden Fällen sollte der Kontinuumslimit durchgeführt werden. Im nächsten Schritt sollte man versuchen, die Burgers-Gleichung auch in zwei oder sogar drei Dimensionen zu simulieren. Das langfristige Ziel ist es außerdem, auch die Navier-Stokes-Gleichung mit Monte-Carlo-Simulationen zu untersuchen, und auch hier das Skalenverhalten der Strukturfunktion zu bestimmen.

Die Ergebnisse lassen darauf schließen, dass die Burgers-Gleichung mit Hilfe des Pfadintegralformalismus sinnvoll untersucht werden kann. Die aufgetretenen Schwierigkeiten sind offenbar numerischer Natur und könnten vermutlich mit genügend hoher Statistik beseitigt werden. An dieser Stelle ist festzuhalten, dass der gewählte Ansatz für die Untersuchung hydrodynamischer Differentialgleichungen einen sehr guten Einblick in das Skalenverhalten turbulenter Systeme gibt und dementsprechend über ein sehr hohes Potenzial verfügt.

# Literaturverzeichnis

- [BB01] BAGNULS, C. und C. BERVILLIER: *Exact renormalization group equations: An introductory review*. Phys. Rept., 348:91, 2001.
- [Ber04] BERVILLIER, C.: *The Wilson-Polchinski exact renormalization group equation*. Phys. Lett., A332:93–100, 2004.
- [BFKL97] BALKOVSKY, E., G. FALKOVICH, I. KOLOKOLOV und V. LEBEDEV: *Intermittency of Burgers' Turbulence*. Phys. Rev. Lett., 78:1452–1455, 1997.
- [BH07] BERERA, A. und D. HOCHBERG: *Gauge symmetry and Slavnov-Taylor identities for randomly stirred fluids*. Phys. Rev. Lett., 99:254501, 2007.
- [BK07] BEC, J. und K. KHANIN: *Burgers Turbulence*. arXiv:0704.1611v1, 2007.
- [Col51] COLE, J.D.: *On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics*. Quart. Appl. Math., 9:225–236, 1951.
- [Del07] DELAMOTTE, B.: *An introduction to the nonperturbative renormalization group*. arXiv cond-mat/0702365, 2007.
- [DHJ<sup>+</sup>08] DÜBEN, P., D. HOMEIER, K. JANSEN, D. MESTERHAZY, G. MÜNSTER und C. URBACH: *Monte Carlo simulations of the randomly forced Burgers equation*. EPL, 84:40002(4pp), 2008.
- [FB00] FRISCH, U. und J. BEC: *Burgulence*. arXiv nlin/0012033, 2000.
- [Fis98] FISHER, M. E.: *Renormalization group theory: Its basis and formulation in statistical physics*. Rev. Mod. Phys., 70:653–681, 1998.
- [FKLM96] FALKOVICH, G., I. KOLOKOLOV, V. LEBEDEV und A. MIGDAL: *Instantons and intermittency*. Phys. Rev. E, 54(5):4896–4907, 1996.
- [Fri95] FRISCH, U.: *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Gol98] GOLNER, G. R.: *Exact renormalization group flow equations for free energies and N-point functions in uniform external fields*. arXiv hep-th/9801124, 1998.
- [HJMU08] HOMEIER, D., K. JANSEN, D. MESTERHAZY und C. URBACH: *Monte-Carlo Simulations of Stochastic Differential Equations at the Example of the Forced Burgers' Equation*. arXiv hep-lat 0808.3481, 2008.

- [HMPPMV99] HOCHBERG, D., C. MOLINA-PARIS, J. PEREZ-MERCADER und M. VIS-SER: *Effective action for stochastic partial differential equations*. Phys. Rev., E60:6343–6360, 1999.
- [Hom06] HOMEIER, D.: *Renormierungsgruppenflussgleichungen und hydrodynamische Turbulenz*. Doktorarbeit, Westfälische Wilhelms Universität Münster, 2006.
- [Hop50] HOPF, E.: *The partial differential equation  $u_t + uu_x = u_{xx}$* . Comm. Pure Appl. Math., 3:201–230, 1950.
- [IL95] IVANCHENKO, Y. M. und A. A. LISYANSKY: *Physics of Critical Fluctuations*. Springer, New York, 1995.
- [Kad66] KADANOFF, L. P.: *Scaling laws for Ising models near  $T(c)$* . Physics, 2:263–272, 1966.
- [Kol41] KOLMOGOROV, A. Dokl. Akad. Nauk SSSR 32, 1941.
- [KSF01] KLEINERT, H. und V. SCHULTE-FROHLINDE: *Critical properties of  $\phi^4$ -theories*. World Scientific, River Edge, USA, 2001.
- [LL52] LANDAU, L. D. und E. M. LIFSCHITZ: *Band VI - Hydrodynamik*. Lehrbuch der theoretischen Physik. Verlag Harri Deutsch, Thun, 5. (1991) Auflage, 1952.
- [MM94] MONTVAY, I. und G. MÜNSTER: *Quantum fields on a lattice*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [MSR73] MARTIN, P. C., E. D. SIGGIA und H. A. ROSE: *Statistical Dynamics of Classical Systems*. Phys. Rev. A, 8(1):423–437, 1973.
- [NB99] NEWMAN, M. E. J. und G. T. BARKEMA: *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. Oxford University Press, New York, 1999.
- [Pop00] POPE, S. B.: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [PS95] PESKIN, M. E. und D. V. SCHROEDER: *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [Roe94] ROEPSTORFF, G.: *Path integral approach to quantum physics: An Introduction*. Springer, Berlin, 1994.
- [WH73] WEGNER, F. J. und A. HOUGHTON: *Renormalization group equation for critical phenomena*. Phys. Rev., A8:401–412, 1973.
- [WK74] WILSON, K. G. und J. B. KOGUT: *The Renormalization group and the epsilon expansion*. Phys. Rept., 12:75–200, 1974.
- [Wol03] WOLFF, U.: *Monte Carlo errors with less errors*. arXiv:hep-lat/0306017, 2003.

- [ZJ89] ZINN-JUSTIN, J.: *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Monographs on Physics - 77. Oxford Science Publications, Oxford, 2. (1990) Auflage, 1989.



# Danksagungen

Zum Schluss möchte ich die Gelegenheit nutzen, den vielen Menschen zu danken, die sowohl direkt als auch indirekt zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben:

- Ich danke Prof. Dr. Gernot Münster für die sehr interessante Aufgabenstellung und die kontinuierliche Unterstützung bei der Entstehung dieser Arbeit.
- Dr. Dirk Homeier gilt besonderer Dank für seine sehr intensive Betreuung und der, wie ich finde, sehr angenehmen und fruchtbaren Zusammenarbeit. Sowohl die geduldige Beantwortung meiner vielen Fragen als auch die moralische Unterstützung, wenn mal etwas nicht geklappt hat, waren für das Gelingen dieser Arbeit von großer Bedeutung.
- Ich danke außerdem Dr. Karl Jansen und David Mesterházy für die vielen Diskussionen und Anregungen, die diese Arbeit wesentlich beeinflusst haben.
- Großer Dank gilt auch meinen Eltern, die mir mein Studium erst ermöglicht haben und mir immer mit Rat und Tat zur Seite standen.
- Auch meinen Kollegen und Freunden, die mich während meines Studiums begleitet haben, will ich meinen Dank aussprechen. Viele Sachverhalte kann man erst in der Diskussion verstehen und ohne moralische Unterstützung ist ein Studium wohl kaum zu schaffen. Besonderer Dank gilt hier natürlich der Kicker-Runde: Jan Giebel, Simon Papenkort und Martin Wilde.
- Nicht zuletzt will ich Michi danken, für ihre zuverlässige Unterstützung und Inspiration.





# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, den 07.01.2009