

Theoretische Physik

# **Renormierungsgruppenfunktionen des dreidimensionalen XY-Modells**

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
Christian Demmer  
aus Münster

2001

Dekan:	Prof. Dr. W. Lange
Erster Gutachter:	Prof. Dr. G. Münster
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. M. Stingl
Tag der mündlichen Prüfungen:	
Tag der Promotion:	

---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Universalität . . . . .	1
1.2	$\phi^4$ -Modell . . . . .	2
1.3	Ziele der Arbeit . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Renormierungsmethoden</b>	<b>5</b>
2.1	Das Modell . . . . .	5
2.2	Störungstheorie . . . . .	7
2.3	Regularisierung und Renormierung . . . . .	10
2.3.1	Renormierungsbedingungen . . . . .	11
2.3.2	Minimale Subtraktion . . . . .	15
2.3.3	Berechnung der $Z$ -Faktoren in $D = 4 - \epsilon$ im minimalen Schema . . . . .	16
2.4	Minimale Renormierung in $D = 3 - \epsilon$ nach Dohm . . . . .	18

2.4.1	Symmetrische Phase . . . . .	20
2.4.2	Unterhalb $T_C$ . . . . .	25
2.4.3	$\beta$ -Funktion . . . . .	29
2.4.4	Drei-Loop-Rechnungen ( $N = 1, T < T_C$ ) . . . . .	30
2.5	Renormierung unterhalb $T_C$ für $N > 1$ . . . . .	39
2.5.1	Renormierung durch renormierte Masse aus $v_\sigma$ gewonnen .	39
2.5.2	Ein-Loop-Rechnung mit der Masse $m_\sigma$ . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Zwei-Loop-Rechnung in <math>D = 3</math></b>	<b>45</b>
3.1	Methoden der Graphenberechnung . . . . .	47
3.1.1	Dimensionelle Regularisierung . . . . .	48
3.1.2	Behandlung des Infrarotproblems $h \rightarrow 0$ . . . . .	48
3.1.3	Behandlung von $D = 3 - \varepsilon$ . . . . .	49
3.2	Beispiel zum Limes $m_0 \rightarrow 0$ . . . . .	50
3.3	Einpunktfunktion, $T < T_C$ . . . . .	52
3.4	Zweipunktfunktion des massiven Feldes, $T < T_C$ . . . . .	53
3.4.1	Ein-Loop . . . . .	53
3.4.2	Zwei-Loop . . . . .	53
3.5	Zweipunktfunktion des masselosen Feldes, $T < T_C$ . . . . .	55
3.5.1	Ein-Loop . . . . .	55
3.5.2	Zwei-Loop . . . . .	55
3.6	Symmetrische Phase, $T > T_C$ . . . . .	56
3.6.1	Zweipunktfunktion, $T > T_C$ . . . . .	56
3.6.2	Vierpunktfunktion, $T > T_C$ . . . . .	57

<b>4</b>	<b>Ergebnisse mit minimaler Renormierung</b>	<b>58</b>
4.1	Bestimmung der Masse $m_\sigma$ . . . . .	58
4.2	Renormierter Vakuumerwartungswert $\hat{v}_R$ und Amplitudenfunktion $f_\phi$ . . . . .	60
4.3	Amplitudenfunktionen $f_{\chi T}$ und $G$ . . . . .	64
4.4	Beziehung zwischen $m_\sigma$ und $m_p$ . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Ergebnisse mit Renormierungsbedingungen</b>	<b>70</b>
5.1	Renormierung in der symmetrischen Phase, $T > T_C$ . . . . .	70
5.2	Renormierung in der Phase gebrochener Symmetrie, $T < T_C$ . . .	73
5.3	Berechnung der Renormierungsgruppenfunktionen . . . . .	75
5.3.1	Oberhalb $T_C$ . . . . .	75
5.3.2	Unterhalb $T_C$ . . . . .	76
5.4	Bestimmung der Amplitudenverhältnisse in der Kopplung $u_{R+}$ . .	78
5.5	Numerische Auswertung der Amplitudenverhältnisse . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Resümee</b>	<b>83</b>
<b>A</b>	<b>Graphen in der Phase gebrochener Symmetrie</b>	<b>86</b>
A.1	Einpunktfunktion . . . . .	86
A.1.1	Ein-Loop . . . . .	86
A.1.2	Zwei-Loop . . . . .	87
A.2	Zweipunktfunktion des massiven Feldes . . . . .	94
A.2.1	Ein-Loop . . . . .	94
A.2.2	Zwei-Loop . . . . .	96
A.3	Zweipunktfunktion des masselosen Feldes . . . . .	122

A.3.1	Ein-Loop . . . . .	122
A.3.2	Zwei-Loop . . . . .	123
<b>B</b>	<b>Graphen in der symmetrischen Phase, <math>T &gt; T_C</math></b>	<b>147</b>
B.1	Zweipunktfunktion . . . . .	147
B.1.1	Ein-Loop . . . . .	147
B.1.2	Zwei-Loop . . . . .	148
B.2	Vierpunktfunktion . . . . .	149
B.2.1	Ein-Loop . . . . .	149
B.2.2	Zwei-Loop . . . . .	150
<b>C</b>	<b>Integrale</b>	<b>152</b>
C.1	Ein-Loop-Integrale $J_1$ und $J_2$ ohne äußeren Impuls . . . . .	152
C.2	Zwei-Loop-Integrale ohne äußeren Impuls . . . . .	153
C.2.1	Integral $I_2$ . . . . .	153
C.2.2	Integral $D_2$ . . . . .	158
C.2.3	Integral $D_1$ . . . . .	160
C.3	Ein-Loop-Integrale mit äußerem Impuls . . . . .	162
C.3.1	Integral $I_1$ . . . . .	162
C.3.2	Integral $I_3$ . . . . .	164
C.4	Zwei-Loop-Integrale mit äußerem Impuls . . . . .	168
C.4.1	Integral $I_2$ mit äußerem Impuls . . . . .	168
C.4.2	Integral $I_6$ mit äußerem Impuls . . . . .	169
C.4.3	Die Ableitungen von $I_6$ . . . . .	175
C.4.4	Integral $I_7$ mit äußerem Impuls . . . . .	183

C.4.5	Integral $I_9$ mit äußerem Impuls . . . . .	185
<b>D</b>	<b>Hilfsformeln, spezielle Funktionen und Konstanten</b>	<b>189</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>192</b>





# KAPITEL 1

---

## Einleitung

---

Ein Gebiet, das statistischer Physik und Quantenfeldtheorie gemeinsam ist, ist die Beschreibung und Berechnung physikalischer Größen an kontinuierlichen Phasenübergängen. Die Feststellung, daß viele charakteristische Größen an Phasenübergängen nur von sehr wenigen Parametern und im wesentlichen nicht vom konkreten Modell oder Experiment abhängen, wurde unter dem Begriff „Universalität“ zusammengefaßt und von Wilson mit der sogenannten Renormierungsgruppe plausibel gemacht [WK74].

### 1.1 Universalität

Typische physikalische Größen, die sich am Phasenübergang (auch kritischer Punkt genannt) gemäß Potenzgesetzen mit sogenannten kritischen Exponenten verhalten, sind in Tabelle 1.1 aufgeführt. Diese Potenzgesetze werden mit der reduzierten Temperatur  $t = \frac{T-T_C}{T_C}$  relativ zum kritischen Punkt formuliert. Die auftretenden Exponenten sind universell, das heißt, sie hängen nur von der Universalitätsklasse ab, die durch die Dimension  $D$  des Raumes und die Dimension  $N$  des Ordnungsparameters gegeben ist. Von besonderem Interesse ist hier die  $(D = 3, N = 2)$ -Universalitätsklasse, das sogenannte XY-Modell, weil hier am  $\lambda$ -Übergang von

## 1 Einleitung

---

Korrelationslänge	$\xi \sim  t ^{-\nu}$	$H = 0$
Wärmekapazität	$C \sim  t ^{-\alpha}$	$H = 0$
Suszeptibilität	$\chi \sim  t ^{-\gamma}$	$H = 0$
Magnetisierung	$M \sim  t ^\beta$	$t < 0$
Korrelationsfunktion	$G_c^{(2)}(\mathbf{x}) \sim  \mathbf{x} ^{-D-2+\eta}$	$t = 0, H = 0$

Tabelle 1.1: Einige Potenzgesetze am kritischen Punkt, hier für magnetische Systeme notiert.

${}^4\text{He}$  besonders genaue Experimente möglich sind [LSN<sup>+</sup>96].

Will man das Verhalten in der Nähe des kritischen Punktes genauer beschreiben [PHA91], so kann man die sogenannten Amplitudenfunktionen und weitere Korrekturen berücksichtigen, zum Beispiel

$$\xi \sim f_{\pm} |t|^{-\nu} (1 + at^\theta + bt + \dots)$$

$$C \sim A_{\pm} |t|^{-\alpha} (1 + \dots) .$$

Die Amplituden sind im allgemeinen nicht universell und in beiden Phasen verschieden. Bestimmte Verhältnisse, die man aus den Amplituden bilden kann, sind jedoch universell. Dazu gehören neben anderen

$$\frac{f_+}{f_-}, \quad \frac{A_+}{A_-}, \quad R_{\xi}^+ = A_+^{1/D} f_+ .$$

Die Berechnung der Amplitudenverhältnisse bietet sich neben den Exponenten für einen weiteren Test der Universalität an. Eine aktuelle Zusammenstellung vieler Ergebnisse aus diesem Gebiet findet man in [PV01].

### 1.2 $\phi^4$ -Modell

Das  $\phi^4$ -Modell wird seit vielen Jahren in der Feldtheorie verwendet. Seine (euklidische) Wirkung für ein reelles Feld mit  $N$  Komponenten

$$S(\phi) = \int dx \left( \frac{1}{2} (\nabla \phi(x))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 + \frac{g}{4!} (\phi(x)^2)^2 \right)$$

kann man entweder im Rahmen einer euklidischen Quantenfeldtheorie als zu einer Wellengleichung der Gestalt

$$(\square - m^2)\phi(x) = \frac{g}{3!}(\phi(x))^2\phi(x)$$

gehörig auffassen oder auch heuristisch als Modell für ein statistisches System verstehen. Dann wäre  $\phi(x)$  zum Beispiel eine lokale Magnetisierung. Die Energie setzt sich dann aus dem Grad der Parallelität benachbarter Magnetisierungen  $(\nabla\phi(x))^2$  und einem lokalen Potential zusammen, das durch ein Polynom vierten Grades approximiert wird. Solange man keine Richtung auszeichnen will, können offensichtlich nur Potenzen von  $\phi^2$  auftreten.

Aufgrund der oben beschriebenen Universalität ist es ausreichend, ein einfaches Modell wie das  $\phi^4$ -Modell für die Berechnungen zu verwenden; die Universalitätsklasse kann durch die Wahl von  $N$  bestimmt werden. Für die Raumdimension wird in dieser Arbeit der in statistischen Systemen realistische Fall  $D = 3$  betrachtet.

## 1.3 Ziele der Arbeit

In dieser Arbeit geht es um die Fortsetzung der Berechnungen zum  $\phi^4$ -Modell in drei Dimensionen im Fall eines mehrkomponentigen Feldes  $\phi$  ( $N > 1$ ). In Tabelle 1.2 ist ein Überblick über einige andere Arbeiten gegeben, die mit dieser in unmittelbarem Zusammenhang stehen.

Im Mittelpunkt des Interesses in dieser Arbeit steht dabei die Berechnung von Amplitudenfunktionen der Magnetisierung, der transversalen Suszeptibilität, der Wärmekapazität und der verschiedenen Korrelationslängen in der Phase unterhalb des kritischen Punktes.

Eine zentrale Frage, die auch für den Aufwand der Rechnungen Bedeutung hat, ist, welche renormierte Masse man in der Phase gebrochener Symmetrie verwendet, wenn also eine ausgezeichnete Richtung für das Feld  $\phi$  vorhanden ist. In dem Fall kann die übliche renormierte Masse  $m_R$ , das Inverse der Korrelationslänge  $\xi_{2nd}$ , die als zweites Moment der Zweipunktfunktion definiert wird, nicht verwendet werden. Die Ursache dafür sind die transversalen Moden, die sogenannten Goldstone-Moden, die dafür sorgen, daß  $\xi_{2nd}$  divergiert. Wenn es zur Bestimmung einer Masse erforderlich ist, die Zweipunktfunktion mit äußerem Impuls zu berechnen, so entspricht das vom Aufwand her etwa einer Rechnung, die um eine Störungsordnung weiter geht, aber ohne äußeren Impuls auskommt. Dies zeigt sich auch in Tabelle 1.2 sowohl für  $N = 1$  als auch für  $N > 1$ , denn die Berück-

$N$	Ein-Loop	Zwei-Loop	Drei-Loop
1		[Hei93] $m_R$	[Küs95], [Gut95] $m_R$
	[Hei93] $m_{phys}$	[CHP99] $m_{phys}$	
beliebig	[SD90] Pseudomasse	[Str96] Pseudomasse	[SLD98] Pseudomasse
	[Luc95] $m_\sigma$	diese Arbeit $m_\sigma$	

Tabelle 1.2: Einige Arbeiten im Bereich  $T < T_C$  mit den jeweils dort verwendeten Massen

sichtigung des äußeren Impulses ist zur Berechnung der Massen  $m_{phys}$  bzw.  $m_\sigma$  erforderlich, die durch Nullstellen der Zweipunktfunktion als Funktion des Impulses definiert sind.

In Kapitel 2 werden daher zunächst verschiedene Renormierungsmethoden und verschiedene Massen betrachtet sowie die vorangehenden Arbeiten verglichen. Dann wird in Kapitel 3 eine vollständige Berechnung der Graphen der Ein- und Zweipunktfunktion in der Phase gebrochener Symmetrie und der Zwei- und Vierpunktfunktion in der symmetrischen Phase des dreidimensionalen  $\phi^4$ -Modells bei beliebigem  $N$  in zweiter Ordnung Störungstheorie durchgeführt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Phase gebrochener Symmetrie und der Berechnung der Zweipunktfunktion mit äußerem Impuls.

Aus den Betrachtungen in Kapitel 2 ergeben sich zwei Renormierungsschemata, die für die Berechnungen dieser Arbeit verwendet werden. Das erste, das im wesentlichen auf die Arbeiten von Dohm zurückgeht (entspricht in etwa den in der dritten Zeile in Tabelle 1.2 genannten Arbeiten), wird dann in Kapitel 4 angewendet, um mit der Masse  $m_\sigma$  an Stelle der Pseudomasse verschiedene Amplitudenfunktionen zu bestimmen. In Kapitel 5 wird ein zweites Renormierungsverfahren verwendet (entspricht in etwa dem Verfahren, das in den Arbeiten in Zeile eins und vier der Tabelle 1.2 verwendet wird) und ebenfalls verschiedene Amplitudenfunktionen sowie das universelle Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge berechnet.

### 2.1 Das Modell

Die zentrale Größe im  $\phi^4$ -Modell ist das Feld  $\phi$  mit seinen  $N$  reellen Komponenten. Dem Modell liegt ein  $D$ -dimensionaler Ortsraum zugrunde. Hier geht es im wesentlichen um das dreidimensionale Modell; das sogenannte XY-Modell entspricht  $N = 2$ .

Die Hamiltonfunktion des  $\phi^4$ -Modells, manchmal auch als Landau-Ginzburg-Hamiltonfunktion bezeichnet, lautet

$$H(\phi, J) := \int d^D x \left( \frac{1}{2} (\nabla \phi(x))^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi(x)^2 + \frac{1}{4!} g_0 (\phi(x)^2)^2 - J(x) \phi(x) \right) \quad (2.1)$$

$$Z(J) := \int \mathcal{D}\phi e^{-H(\phi, J)}, \quad (2.2)$$

wobei die Zustandssumme  $Z(J)$  durch die Summation über alle Feldkonfigurationen berechnet wird. Dabei bleibt unklar, was man genau darunter zu verstehen hat. Die Vielzahl von Problemen, die sich dahinter verbergen, soll aber nicht Ge-

genstand dieser Arbeit sein, sondern hier wird eine pragmatische Vorgehensweise gewählt, die sich nur auf störungstheoretische Berechnungsmethoden bezieht. Die im folgenden beschriebenen Methoden zur Berechnung von physikalischen Größen im Rahmen dieses Modells haben insgesamt definitorischen Charakter. Das bedeutet, der Sinn der obigen Zustandssumme ergibt sich erst im Zusammenhang mit den Rechenmethoden, die hierzu in den letzten Jahrzehnten entwickelt worden sind, und kann nicht mathematisch erschlossen werden.

Diese Methoden werden hier kurz beschrieben, soweit sie für diese Arbeit benötigt werden. Ausführliches dazu findet man in vielen Büchern und Arbeiten; beispielsweise in den Lehrbüchern [Ami78], [Bel91], [BDFN93]. Die Notation in dieser Arbeit orientiert sich weitgehend an [Hei93] und [Luc95].

Im Mittelpunkt der Berechnung stehen die  $n$ -Punkt- bzw. die verbundenen  $n$ -Punktkorrelationsfunktionen

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \rangle \\ &= \frac{1}{Z(0)} \cdot \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z(J=0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \rangle_c \\ &= \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \log Z(J=0) , \end{aligned} \quad (2.4)$$

die sich durch funktionale Ableitungen aus der Zustandssumme berechnen lassen.

Bezeichnet man mit  $W(J) = \log Z(J)$  das erzeugende Funktional der verbundenen  $n$ -Punktfunktionen, so ist die freie Energie (Helmholtz)

$$F(J) = -\log(Z(J)) = -W(J) . \quad (2.5)$$

Per Legendre-Transformation erhält man aus  $W(J)$  das erzeugende Funktional der Vertexfunktionen, welches zugleich der freien Energie (Gibbs) entspricht.<sup>1</sup>

$$\Gamma(\bar{\phi}) = - \int d^D x J(x) \bar{\phi}(x) + W(J) \quad (2.6)$$

mit  $\bar{\phi} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \log Z(J) = \langle \phi(x) \rangle$  und damit auch  $J = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\phi}}$ .

---

<sup>1</sup>Hier sind in der Literatur zwei verschiedene Vorzeichen gebräuchlich. Wenn man  $\Gamma(\bar{\phi})$  als Legendre-Transformierte von  $F$  definiert, wie es in der Statistischen Physik üblich ist, erhält man das entgegengesetzte Vorzeichen. Hier wird, um die Konsistenz mit den vorherigen Arbeiten (z. B. [Hei93]) zu wahren, der Zwischenschritt mit  $W(J)$  beibehalten.

Die funktionale Taylorentwicklung der freien Energie (Gibbs) nach den sogenannten Vertexfunktionen lautet

$$\Gamma(\bar{\phi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^D x_1 \cdots d^D x_n \bar{\phi}(x_1) \cdots \bar{\phi}(x_n) \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) . \quad (2.7)$$

Die fouriertransformierten Vertexfunktionen erhält man daraus mit

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \cdots \frac{d^D p_n}{(2\pi)^D} e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \\ &\quad (2\pi)^D \delta(p_1 + \dots + p_n) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) , \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei die aus der Translationsinvarianz der  $n$ -Punktvertexfunktionen im Ortsraum resultierende Impulserhaltung explizit berücksichtigt wurde.

Weil im folgenden nur im Impulsraum gerechnet wird, werden die Tilden meistens fortgelassen. Die Zweipunktvertexfunktion kann dann als

$$\Gamma^{(2)}(p) = \tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p) \quad (2.9)$$

geschrieben werden und es gilt

$$\Gamma^{(2)}(p) = - \left( G_c^{(2)}(p) \right)^{-1} . \quad (2.10)$$

## 2.2 Störungstheorie

Die  $n$ -Punktvertexfunktionen bzw. die Korrelationsfunktionen sind störungstheoretisch, das heißt als Potenzreihen in der Kopplung berechenbar. Für  $g_0 = 0$  erhält man in der Zustandssumme Gaußsche Funktionalintegrale mit dem sogenannten Propagator im Impulsraum

$$\Delta(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2} . \quad (2.11)$$

Eine Entwicklung in  $g_0$  liefert eine Reihe mit Integralen über Produkte des Propagators. Es stellt sich heraus, daß die Ordnung in  $g_0$  dabei mit der Anzahl der geschlossenen Schleifen in einer graphischen Darstellung dieser Integrale zusammenhängt. Genauer zur graphischen Darstellung findet sich in Kapitel 3.

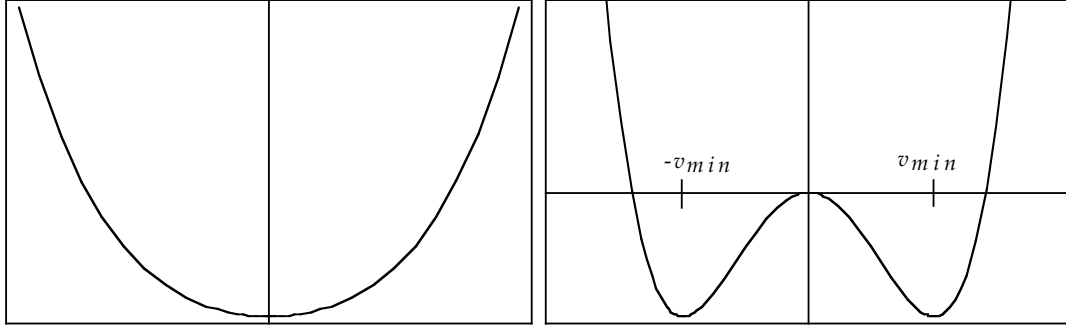


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung von  $V(\phi)$  im symmetrischen Fall (links) und in der Phase gebrochener Symmetrie (rechts)

Für die Zweipunktfunktion ergibt sich

$$G_c^{(2)}(p) = (\Delta(p)^{-1} - \Sigma(p))^{-1} \quad (2.12)$$

und damit

$$-\Gamma^{(2)}(p) = \Delta(p)^{-1} - \Sigma(p) , \quad (2.13)$$

wobei die sogenannte Selbstenergie  $\Sigma(p)$  die Summe aller einteilchenirreduziblen Zweipunktgraphen ohne Propagatoren an den äußeren Linien bezeichnet. Die übrigen  $n$ -Punktvertexfunktionen erhält man aus der Summe der einteilchenirreduziblen  $n$ -Punktgraphen ohne Propagatoren an den äußeren Linien. Man bezeichnet einen Graphen als einteilchenirreduzibel, wenn er sich durch Zerschneiden einer inneren Linie nicht in zwei unabhängige Teile dergestalt zerlegen läßt, daß die beiden Teile mit äußeren Linien verbunden sind.

**Oberhalb  $T_C$**  Die Situation oberhalb der kritischen Temperatur ist gekennzeichnet durch die Tatsache, daß

$$m_{0+}^2 := m_0^2 > 0 \quad (2.14)$$

positiv ist. Der potentielle Anteil von  $H$ ,  $V(\phi)$ , hat dann eine bezüglich des klassischen Grundzustandes symmetrische Gestalt, so daß  $V(\phi)$  ein Minimum bei  $\phi = 0$  hat (Abbildung 2.1).  $V(\phi)$  kann unter Verwendung des  $O(N)$ -symmetrischen Tensors

$$S_{ijkl} = \frac{1}{3} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.15)$$



mit Hilfe der Summenkonvention explizit aufgeschrieben werden.

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{1}{4!}g_0(\phi^2)^2 = \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{1}{4!}g_0S_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l \quad (2.16)$$

$\Gamma^{(2)}(p)$  besitzt die aus Symmetriegründen identischen Komponenten  $\Gamma_{ij}^{(2)}(p)$  und ist proportional zu  $\delta_{ij}$ , so daß diese ebenfalls mit  $\Gamma^{(2)}(p)$  bezeichnet werden können.  $\Gamma^{(4)}$  ist proportional zu  $S_{ijkl}$ ; deshalb können die Komponenten ebenso mit  $\Gamma^{(4)}$  bezeichnet werden.

**Unterhalb  $T_C$**  Wenn  $m_0^2 < 0$  ist, hat  $V$  ein Minimum auf einer verallgemeinerten Kugeloberfläche vom Radius  $v_{\min}$ . Man definiert

$$m_{0-}^2 := -2m_0^2 > 0 \quad (2.17)$$

und findet damit für das Minimum

$$v_{\min}^2 = -\frac{6m_0^2}{g_0} = \frac{3m_{0-}^2}{g_0}. \quad (2.18)$$

Daß der Parameter  $m_0^2$  in der Wirkung als Quadrat gewählt wurde, hat seinen Ursprung in der Feldtheorie und bedeutet nicht, daß  $m_0^2$  positiv ist. Weil  $m_0^2$  unterhalb  $T_C$  negativ ist, wird  $m_0^2$  manchmal auch als

$$r_0 := m_0^2 \quad (2.19)$$

bezeichnet.

Um diese Situation in der Störungsrechnung zu behandeln, wird das Feld um das Minimum verschoben. Dazu definiert man das Feld  $\phi_-$  mit den Komponenten

$$\phi_- = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_{N-1} \\ \sigma \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N - v_{\min} \end{pmatrix}.$$

Setzt man  $\phi_-$  in  $V$  ein, erhält man

$$V(\phi_-) = \frac{1}{2}m_{0-}^2\sigma^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g_0}{3}} \left( \sigma \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i^2 + \sigma^3 \right) + \frac{g_0}{4!} \left( \left( \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i^2 \right)^2 + \sigma^4 + 2\sigma^2 \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i^2 \right). \quad (2.20)$$

Die entsprechende Wirkung ist nun nicht mehr symmetrisch bezüglich des Grundzustandes, da man die Richtung der Magnetisierung ausgezeichnet hat. Dementsprechend tauchen auch ungerade Feldpotenzen in der Wirkung auf. Deshalb verschwinden  $n$ -Punktfunktionen mit ungeradem  $n$  nicht. Hier ist vor allem die Magnetisierung  $v_0$  wichtig.

$$v_0 := \langle \phi_N \rangle = v_{\min} + G_c^{(1)} = v_{\min} + \langle \sigma \rangle \quad (2.21)$$

Bei der Zweipunktfunktion müssen nun die Komponenten der ausgezeichneten Richtung  $\sigma$  von den transversalen Komponenten  $\pi_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  unterschieden werden.

$$\Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} \Gamma_{\pi_1 \pi_1}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{\pi_{N-1} \pi_{N-1}}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{\sigma \sigma}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Weil die  $\Gamma_{\pi_i \pi_i}^{(2)}$  alle identisch sind, kann man sie analog zum symmetrischen Fall zusammengefaßt mit  $\Gamma_{\pi\pi}^{(2)}$  bezeichnen, so daß  $\Gamma_{\pi_i \pi_j}^{(2)} = \Gamma_{\pi\pi}^{(2)} \delta_{ij}$  gilt.

### 2.3 Regularisierung und Renormierung

Wenn man mit dem  $\phi^4$ -Modell naiv rechnet, stößt man bald auf Divergenzen. Um diese systematisch zu behandeln, wurden sogenannte Regularisierungsmethoden entwickelt. Hier wird die dimensionelle Regularisierung [tV72] verwendet, das heißt, die Integrale, die Bestandteil der Korrelationsfunktionen sind, werden in allgemeiner Raumdimension  $D$  berechnet und dann in

$$D = 3 - \varepsilon$$

oder

$$D = 4 - e$$

entwickelt. Dabei können zumindest die Ultraviolettdivergenzen in Polen in  $\varepsilon$  bzw.  $e$  isoliert werden. Außer den Ultraviolettdivergenzen, die von der oberen

Grenze der Impulsintegration stammen, treten auch sogenannte Infrarotdivergenzen auf, die an der unteren Grenze der Impulsintegration erzeugt werden. Diese Pole werden nicht mittels der dimensionellen Regularisierung behandelt, und ihre Regularisierung wird später bei der konkreten Berechnung in Kapitel 3 beschrieben.

Nachdem man die Divergenzen isoliert hat, muß man sie in geeigneter Weise entfernen. Um physikalische Resultate aus der divergenten Theorie zu extrahieren, wurden die Renormierungsmethoden entwickelt. Zwei dieser Methoden werden hier verwendet.

### 2.3.1 Renormierungsbedingungen

Eine übliche Methode, die auch in den vorhergehenden Arbeiten von [Hei93], [Gut95], [Küs95] und [Luc95] verwendet wird und auf [Par80] zurückgeht, ist, geeignet gewählte Bedingungen an die Vertexfunktionen zu stellen, um von den Parametern der Wirkung  $\phi$ ,  $g_0$ ,  $m_0$ , mit denen man gestartet ist, zu renormierten Größen  $\phi_R$ ,  $g_R$ ,  $m_R$  überzugehen.

Dazu betrachtet man zunächst die Zweipunktkorrelationsfunktion in der symmetrischen Phase.

$$G_c^2(x_1, x_2) := \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle - \langle \phi(x_1) \rangle \langle \phi(x_2) \rangle$$

Weil  $G_c^{(2)}$  translationsinvariant ist, hängt  $G_c^{(2)}$  nur von  $x_2 - x_1$  ab. Für den Moment wird es mit  $\hat{G}_c(z)$ ,  $z := x_2 - x_1$  bezeichnet.

Die Korrelationslänge definiert man als zweites Moment von  $\hat{G}_c$ .

$$\xi^2 := \frac{1}{2D} \frac{\int d^D z \hat{G}_c^{(2)}(z) z^2}{\int d^D z \hat{G}_c^{(2)}(z)} \quad (2.22)$$

Nach Fouriertransformation erhält man

$$\xi^2 = \frac{\partial_{p^2} \tilde{G}_c^{(2)}(0)}{\tilde{G}_c^{(2)}(0)}. \quad (2.23)$$

Mit der Beziehung

$$-\Gamma^{(2)}(p) = \left( \tilde{G}_c^{(2)}(p) \right)^{-1}$$

## 2 Renormierungsmethoden

---

definiert man

$$m_R^2 := \frac{1}{\xi^2} = \frac{\Gamma^{(2)}(0)}{\partial_{p^2}\Gamma^{(2)}(0)} . \quad (2.24)$$

Um diese Korrelationslänge von anders definierten zu unterscheiden, wird sie auch als  $\xi_{2nd}$  bezeichnet.

Der Faktor  $Z_\phi$  nimmt die Divergenzen in der Normierung des Feldes auf.

$$\frac{1}{Z_\phi} := -\partial_{p^2}\Gamma^{(2)}(0) \quad (2.25)$$

Daß das sinnvoll ist, ergibt sich aus dem Verhalten von  $\Gamma^{(2)}(p)$  bei kleinen Impulsen.

$$-\Gamma^{(2)}(p) = \frac{1}{Z_\phi} (m_R^2 + p^2 + \mathcal{O}(p^4))$$

Für die renormierte Masse folgt

$$m_R^2 = -Z_\phi\Gamma^{(2)}(0) . \quad (2.26)$$

Das renormierte Feld und die renormierten Vertexfunktionen lauten damit

$$\phi_R = \frac{1}{\sqrt{Z_\phi}}\phi ; \quad \Gamma_R^{(n)} = Z_\phi^{n/2}\Gamma^{(n)} . \quad (2.27)$$

**Symmetrische Phase** Die renormierte Kopplung kann hier aus der Vierpunktfunktion gewonnen werden.

$$g_{R+} := -Z_\phi^2\Gamma^{(4)}(0) = g_0 \frac{Z_\phi^2}{Z_g} , \quad (2.28)$$

wobei

$$\frac{1}{Z_g} := -\frac{1}{g_0}\Gamma^{(4)}(0) \quad (2.29)$$

ist.

Größe	Dimension
$m_0$	$L^{-1}$
$g_0$	$[m_0]^{4-D} = L^{-(4-D)}$
$\phi$	$[m_0]^{(D-2)/2} = L^{(2-D)/2}$

Tabelle 2.1: Physikalische Dimensionen in Einheiten der Länge  $L$  in Abhängigkeit von der Raumdimension  $D$

Benötigt werden außerdem verschiedene dimensionslose Kopplungen, die für die Entwicklung der Störungsreihen zweckmäßig sind. In Tabelle 2.1 sind die physikalischen Dimensionen der Parameter der Wirkung aufgeführt.

$$u_0 := \frac{g_0}{m_0^{4-D}} \quad (2.30)$$

ist eine Kopplung, die in allen Raumdimensionen  $D$  dimensionslos ist. Auf dieselbe Weise definiert man die in Zwischenschritten benötigte Kopplung  $u_+$ ,

$$u_+ := \frac{g_0}{m_R^{4-D}} \quad (2.31)$$

und die dimensionslose renormierte Kopplung  $u_{R+}$ ,

$$u_{R+} := \frac{g_R}{m_R^{4-D}}. \quad (2.32)$$

**Unterhalb  $T_C$**  Hier muß obiges Schema etwas abgewandelt werden. Wegen der zusätzlichen Terme proportional zu  $\phi^3$  in der Wirkung gibt es zu viele Diagramme in  $\Gamma^{(4)}$ , und die Berechnung ist nicht mehr praktikabel. Deshalb wird die renormierte Kopplung hier mit der Magnetisierung, das heißt mit der Einpunktfunktion definiert. Außerdem ist die Definition der renormierten Masse nicht übertragbar, wenn die Anzahl der Feldkomponenten  $N > 1$  ist, weil dann  $(\Gamma^{(2)}(p))^{-1}$  bei  $p = 0$  einen Pol hat.

Hier bietet sich eine Definition einer Masse an, die für  $N = 1$  auch als physikalische Masse bezeichnet wird [LW89]. Sie ist bestimmt durch die dem Ursprung nächstgelegene komplexe Nullstelle der Zweipunktvertexfunktion  $\Gamma^{(2)}(p)$  mittels

$$\operatorname{Re} \Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}(\mathbf{p} = (im_\sigma, 0, 0, \dots)) = 0. \quad (2.33)$$

## 2 Renormierungsmethoden

---

Die zugehörige Korrelationslänge wird mit

$$\xi_\sigma = \frac{1}{m_\sigma} \quad (2.34)$$

bezeichnet.

Man definiert in Analogie zu  $Z_\phi$

$$Z_\pi := \left( -\partial_{p^2} \Gamma_{\pi\pi}^{(2)}(0) \right)^{-1}. \quad (2.35)$$

Damit kann man die Magnetisierung renormieren.

$$v_R := \frac{1}{\sqrt{Z_\pi}} v_0 \quad (2.36)$$

Die renormierte Kopplung definiert man dann als

$$g_{R-} := \frac{3m_\sigma^2}{v_R^2}. \quad (2.37)$$

Ebenso wie in der symmetrischen Phase werden die dimensionslosen Kopplungen definiert.

$$u_{0-} := \frac{g_0}{m_{0-}^{4-D}} \quad u_- := \frac{g_0}{m_\sigma^{4-D}} \quad u_{R-} := \frac{g_{R-}}{m_\sigma^{4-D}} \quad (2.38)$$

Für die transversalen Komponenten des Feldes kann man ebenfalls eine Korrelationslänge  $\xi_T$ , bzw. Masse  $m_T$  definieren. Weil für kleine  $p$  unter Verwendung der sogenannten Steifheitskonstanten  $\rho_s^{-1/(D-2)} = \xi_T$  gilt, daß

$$G_{\pi\pi}^{(2)}(p) \approx v_0^2 / (\rho_s p^2)$$

ist ([PHA91]), und andererseits  $G_{\pi\pi}^{(2)} \approx \frac{Z_\pi}{p^2}$  ist, folgt

$$\xi_T = v_R^{-2} \quad (2.39)$$

bzw.

$$m_T = \frac{1}{\xi_T} = v_R^2 = \frac{3m_\sigma^2}{g_{R-}} = 3 \frac{m_\sigma}{u_{R-}} \quad (2.40)$$

in drei Dimensionen.

### 2.3.2 Minimale Subtraktion

Eine andere Möglichkeit der Renormierung, die in  $D = 4 - \epsilon$  Dimensionen verwendet wird, ist die minimale Subtraktion. Hier werden keine zum Teil physikalisch motivierten Bedingungen gestellt, sondern die  $Z$ -Faktoren werden unmittelbar durch ihre Funktion, die Pole aufzunehmen, definiert. Diese Vorgehensweise ist technisch sehr bequem und ist die logische Konsequenz der dimensionellen Regularisierung. Während Renormierungsbedingungen auch mit anderen Regularisierungsmethoden kombiniert werden können, ist die minimale Subtraktion an die dimensionelle Regularisierung gebunden. Dieses Verfahren wurde von 't Hooft und Veltman entwickelt ([tV72], [tH73]), eine Einführung findet man zum Beispiel in [Col85].

Die Modellparameter  $m_0$ ,  $g_0$  und das Feld  $\phi$  werden gemäß dieser Definition ersetzt.<sup>2</sup>

$$m_0^2 = \hat{m}_R^2 \hat{Z}_m(\hat{g}_R) \quad (2.41)$$

$$g_0 = \hat{g}_R \mu^\epsilon \frac{\hat{Z}_g(\hat{g}_R)}{\hat{Z}_\phi^2(\hat{g}_R)} \quad (2.42)$$

$$\phi = \hat{\phi}_R \sqrt{\hat{Z}_\phi(\hat{g}_R)} \quad (2.43)$$

Dabei ist  $\mu$  eine Größe mit der Dimension einer Masse, die dazu dient, die renormierte Kopplung dimensionslos zu machen.  $\mu$  kann zunächst frei gewählt werden. Die Vertexfunktionen werden entsprechend renormiert durch

$$\hat{\Gamma}_R^{(n)} = \hat{Z}_\phi^{n/2} \Gamma^{(n)}. \quad (2.44)$$

Die  $Z$ -Faktoren sind dabei durch die Forderung definiert, daß sie folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_\phi(\hat{g}_R, \epsilon) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\hat{g}_R)}{\epsilon^n} \\ \hat{Z}_g(\hat{g}_R, \epsilon) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\hat{g}_R)}{\epsilon^n} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Die Renormierung der Masse wird manchmal ([ZJ96]) auch durch  $m_0^2 = \hat{m}_R^2 \frac{\hat{Z}_m(\hat{g}_R)}{\hat{Z}_\phi(\hat{g}_R)}$  definiert, so daß  $\hat{Z}_m$  sich um einen Faktor  $\hat{Z}_\phi$  unterscheidet. Die hier verwendete Definition entspricht der in [Doh85] gewählten.

$$\hat{Z}_m(\hat{g}_R, e) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\hat{g}_R)}{e^n}$$

und genau die Polterme ohne endliche additive Anteile der entsprechenden Vertexfunktionen aufnehmen. Genauer gesagt,

$$\hat{\Gamma}_R^{(n)}(p, \hat{g}_R, \mu, \hat{m}_R) = (\hat{Z}_\phi(\hat{g}_R))^{n/2} \Gamma^{(n)}(p, g_0(\hat{g}_R, \mu), m_0(\hat{m}_R))$$

muß endlich sein. Dabei ist  $\hat{g}_R$  ebenfalls noch von  $\mu$  abhängig.

Diese Forderungen sind durch eine Analyse der Polstruktur gerechtfertigt ([tH73]) und legen die  $Z$ -Faktoren eindeutig fest.

Weil in dieser Arbeit beide Renormierungsverfahren Verwendung finden, werden zur besseren Unterscheidung soweit erforderlich Größen, die im minimalen Subtraktionsschema definiert sind, mit einem Hut gekennzeichnet.

### 2.3.3 Berechnung der $Z$ -Faktoren in $D = 4 - e$ im minimalen Schema

Zur Veranschaulichung werden die  $Z$ -Faktoren im minimalen Renormierungsschema in einer  $\phi^4$ -Theorie mit  $N$ -komponentigem Feld und  $O(N)$ -symmetrischer Wirkung in erster Ordnung berechnet. Dazu werden die Zweipunktvertexfunktion und ihre Ableitung sowie die Vierpunktvertexfunktion benötigt. Wesentlich sind hier die divergenten Anteile in  $e$ , so daß es genügt, die Entwicklung in  $e$  bis zur nullten Ordnung aufzuschreiben. Die beiden dazu benötigten Integrale sind in Anhang C berechnet.

$$\begin{aligned} -\Gamma^{(2)}(p=0) &= m_0^2 + \frac{1}{2}g_0 \text{ (loop) } = m_0^2 + \frac{1}{2}g_0 J_1(D=4-e) \\ &= m_0^2 - \frac{N+2}{6} \left( \frac{m_0^{2-e}}{8\pi^2} \right) g_0 \left( \frac{1}{e} + \mathcal{O}(e^0) \right) + \mathcal{O}(g_0^2) \\ -\partial_{p^2} \Gamma^{(2)}(p=0) &= 1 + \mathcal{O}(g_0^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(p=0) &= -g_0 + \frac{1}{2}g_0^2 \text{ (box) } + \mathcal{O}(g_0^3) \\ &= -g_0 + \frac{8+N}{6} g_0^2 J_2(D=4-e) + \mathcal{O}(g_0^3) \\ &= -g_0 + \frac{8+N}{6} \left( \frac{m_0^{-e}}{8\pi^2} \right) g_0^2 \left( \frac{1}{e} + \mathcal{O}(e^0) \right) + \mathcal{O}(g_0^3) \end{aligned}$$



Weil die Ableitung von  $\Gamma^{(2)}$  in erster Ordnung keinen Beitrag liefert, erhält man sofort

$$\hat{Z}_\phi(\hat{g}_R) = 1 + \mathcal{O}(\hat{g}_R^2) .$$

Damit folgt aus (2.42)

$$g_0 = \hat{g}_R \mu^e \hat{Z}_g(\hat{g}_R) + \mathcal{O}(\hat{g}_R^2) .$$

Aus  $\Gamma^{(4)}$  kann man dann  $\hat{Z}_g$  berechnen.

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(0) &= -g_0 \left\{ 1 - \frac{8+N}{6} \left( \frac{m_0^{-e}}{8\pi^2} \right) g_0 \left( \frac{1}{e} + \mathcal{O}(e^0) \right) + \mathcal{O}(g_0^2) \right\} \\ &= -\hat{g}_R \mu^e \hat{Z}_g(\hat{g}_R) \\ &\quad \left\{ 1 - \frac{8+N}{6} \left( \frac{m_0^{-e}}{8\pi^2} \right) \hat{g}_R \mu^e \hat{Z}_g(\hat{g}_R) \left( \frac{1}{e} + \mathcal{O}(e^0) \right) + \mathcal{O}(\hat{g}_R^2) \right\} \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz  $\hat{Z}_g(\hat{g}_R) = 1 + \frac{b_1}{e} \hat{g}_R + \mathcal{O}(\hat{g}_R^2)$  erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(0) &= -\hat{g}_R \mu^e \left\{ 1 - \frac{8+N}{6} \frac{1}{8\pi^2} \hat{g}_R \left( \frac{\mu}{m_0} \right)^e \left( \frac{1}{e} + \mathcal{O}(e^0) \right) + \frac{b_1}{e} \hat{g}_R + \mathcal{O}(\hat{g}_R^2) \right\} . \end{aligned}$$

Der dimensionslose Ausdruck  $\left( \frac{\mu}{m_0} \right)^e$  kann in  $e$  um null entwickelt werden.

$$\left( \frac{\mu}{m_0} \right)^e = 1 + e \log \frac{\mu}{m_0} + \mathcal{O}(e^2)$$

Wesentlich ist, daß dieser Ausdruck zusammen mit dem Pol in  $e$  nur einen Beitrag der Ordnung  $e^0$  liefert, die Massen  $m_0$  und  $\mu$  also nicht in die  $Z$ -Faktoren, die durch die Subtraktion des Polterms definiert sind, eingehen. Das gilt auch allgemein in jeder Ordnung von  $\hat{g}_R$ . Dies eröffnet die Möglichkeit, verschiedene Massen zu wählen, ohne die Feld- und Kopplungsrenormierung explizit zu verändern. Der endliche Anteil des obigen Ausdrucks hängt hingegen von der Wahl von  $\mu$  ab. Nun kann man  $b_1$  ablesen und erhält

$$\hat{Z}_g = 1 + \frac{8+N}{48\pi^2} \frac{\hat{g}_R}{e} + \mathcal{O}(\hat{g}_R^2) .$$

Weil nach (2.41)  $m_0^2 = \hat{m}_R^2 \hat{Z}_m$  ist, kann man aus  $\Gamma^{(2)}$   $\hat{Z}_m$  berechnen. Mit dem

Ansatz  $\hat{Z}_m(\hat{g}_R) = 1 + \frac{c_1}{e} \hat{g}_R + \mathcal{O}(\hat{g}_R^2)$  erhält man

$$\begin{aligned}
 & -\Gamma^{(2)}(0) \\
 &= m_0^2 \left\{ 1 - \frac{N+2}{6} \left( \frac{m_0^{-e}}{8\pi^2} \right) g_0 \left( \frac{1}{e} + \mathcal{O}(e^0) \right) + \mathcal{O}(g_0^2) \right\} \\
 &= \hat{m}_R^2 \hat{Z}_m \left\{ 1 - \frac{N+2}{6} \left( \frac{m_0^{-e}}{8\pi^2} \right) \hat{g}_R \mu^e \hat{Z}_g(\hat{g}_R) \left( \frac{1}{e} + \mathcal{O}(e^0) \right) + \mathcal{O}(\hat{g}_R^2) \right\} \\
 &= \hat{m}_R^2 \left\{ 1 - \frac{N+2}{48\pi^2} \hat{g}_R \mu^e m_0^{-e} \frac{1}{e} + \frac{c_1}{e} \hat{g}_R + \mathcal{O}(e^0) + \mathcal{O}(\hat{g}_R^2) \right\} .
 \end{aligned}$$

Daraus folgt nach dem gleichen Verfahren wie oben

$$\hat{Z}_m(g_R) = 1 + \frac{N+2}{48\pi^2} \frac{\hat{g}_R}{e} + \mathcal{O}(\hat{g}_R^2) .$$

## 2.4 Minimale Renormierung in $D = 3 - \varepsilon$ nach Dohm

V. Dohm und seine Aachener Gruppe arbeiten seit längerem mit dem minimalen Renormierungsschema, das sie für die Anwendung in drei Dimensionen angepaßt haben. (Siehe unter anderem [Doh85], [SD89], [SD90], [HD92].) Zum Vergleich wird hier insbesondere die Arbeit von M. Strösser [Str96] verwendet. Weil im folgenden einige Rechnungen durchgeführt werden, um die Konsistenz der verschiedenen Methoden und Arbeiten zu überprüfen, tritt das unvermeidliche Problem auf, daß verschiedene Notationen und Konventionen in Übereinstimmung gebracht werden müssen. Eine Übersicht findet sich in Tabelle 2.2 (S. 24).

Die  $Z$ -Faktoren im minimalen Schema wurden unter Verwendung der Polstruktur in  $D = 4 - e$  konstruiert. Die Idee ist nun, diese  $Z$ -Faktoren in  $D = 3$  zu verwenden, was bedeutet, daß die  $Z$ -Faktoren nicht zur Aufnahme der Pole in  $D = 3$  dienen können, weil sie für  $e = 1$  endlich sind. Sie dienen also nur noch der endlichen Renormierung der Vertexfunktionen in  $D = 3$ . Die Aufnahme der Pole in den Vertexfunktionen, die in  $D = 3$  dimensional regularisiert erscheinen, muß also anders gelöst werden. Dazu verwendet Dohms Gruppe eine zusätzliche additive Massenrenormierung. Dies genügt aufgrund der Superrenormierbarkeit der dreidimensionalen  $\phi^4$ -Theorie bereits, um in  $D = 3$  alle dimensionellen Pole der Vertexfunktionen aufzunehmen. Dazu wird folgende Massenrenormierung definiert

$$r_0 - r_{0C} = \hat{Z}_m \hat{m}_R^2 \tag{2.45}$$

mit der kritischen Masse  $r_{0C}$ , die die Pole in  $D = 3$  aufnehmen soll.  $r_0 - r_{0C}$  ist proportional zur reduzierten Temperatur  $t$ . Die dimensionelle Polstruktur von  $r_{0C}$  ist bekannt.<sup>3</sup>

$$r_{0C} = \left(\frac{g_0}{24}\right)^{2/e} S(e) \quad (2.46)$$

$r_{0C}$  wird als eine nichtstörungstheoretische Größe bezeichnet, weil es nicht in ganzen Potenzen von  $g_0$  entwickelt werden kann.

Dabei ist  $S(e)$  eine dimensionslose Funktion, die für  $e > 0$  mit Ausnahme von Polen bei  $e = 2/l; l \in \mathbb{N}_{>1}$  endlich ist, das heißt, die Pole häufen sich gegen  $D = 4$ .

Die Renormierung des Feldes entspricht formal dem gewöhnlichen minimalen Schema.

$$\phi = \sqrt{\hat{Z}_\phi} \hat{\phi}_R \quad (2.47)$$

Die Kopplungsrenormierung

$$g_0 = \mu^e \frac{\hat{Z}_g(\hat{\lambda}_\mu)}{A_D \hat{Z}_\phi^2(\hat{\lambda}_\mu)} \hat{\lambda}_\mu, \quad A_D = \frac{\Gamma(3 - D/2)}{2^{(D-2)} \pi^{D/2} (D-2)}, \quad (2.48)$$

weist noch eine Besonderheit auf, nämlich den zusätzlichen Parameter  $A_D$ , der in  $D = 3$  den Wert

$$A_3 = \frac{1}{4\pi} \quad (2.49)$$

und in  $D = 4$  den Wert

$$A_4 = \frac{1}{8\pi^2} \quad (2.50)$$

annimmt. Durch die geschickte Wahl dieses geometrischen Faktors können einige Ausdrücke vereinfacht werden. Allerdings ist die renormierte Kopplung  $\hat{\lambda}_\mu$  damit explizit dimensionsabhängig geworden. Der Zusammenhang mit  $\hat{g}_R$  ist durch

$$\hat{\lambda}_\mu = A_D \hat{g}_R \quad (2.51)$$

---

<sup>3</sup>Die hier etwas unmotiviert auftretenden Faktoren 24 haben ihren Ursprung in der Definition der Kopplung bei Dohm. Sie unterscheidet sich um einen Faktor 24 von der hier verwendeten.

gegeben. Die funktionale Form der  $Z$ -Faktoren ist von der Wahl eines geometrischen, das heißt von  $D$  abhängigen, Faktors unabhängig, sofern der Faktor in  $D = 4$  den Wert  $A_4$  annimmt. [Doh85]

In diesem Schema ergeben sich folgende  $Z$ -Faktoren, die zum Beispiel in [LMSD98] bis zur fünften Ordnung berechnet wurden. In dieser Arbeit werden die  $Z$ -Faktoren bis zur dritten Ordnung benötigt. Es ist  $D = 4 - e$ . Mit  $\zeta(x)$  wird die Zetafunktion (D.17) bezeichnet.

$$\hat{Z}_\phi(\hat{\lambda}_\mu) = 1 - \frac{(N+2)}{144e} \hat{\lambda}_\mu^2 + \frac{1}{5184} (N+2)(N+8) \left( \frac{1}{e} - \frac{4}{e^2} \right) \hat{\lambda}_\mu^3 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\mu^4) \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \hat{Z}_g(\hat{\lambda}_\mu) = & 1 + \frac{(N+8)}{6e} \hat{\lambda}_\mu + \frac{1}{576} \left( \frac{(N+8)^2}{e^2} - \frac{5N+22}{e} \right) \hat{\lambda}_\mu^2 \\ & + \frac{1}{5184} \left( \frac{96\zeta(3)(5N+22) + 942N + 2992 + 35N^2}{e} \right. \\ & \left. - \frac{16(N+8)(17N+76)}{e^2} + \frac{24(N+8)^3}{e^3} \right) \hat{\lambda}_\mu^3 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\mu^4) \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \hat{Z}_m(\hat{\lambda}_\mu) = & 1 + \frac{(N+2)}{6e} \hat{\lambda}_\mu + \frac{(N+2)}{144} \left( \frac{4(N+5)}{e^2} - \frac{5}{e} \right) \hat{\lambda}_\mu^2 \\ & + \frac{(N+2)}{2592} \left( \frac{15N+111}{e} + \frac{-278-61N}{e^2} + \frac{12N^2+132N+360}{e^3} \right) \hat{\lambda}_\mu^3 \\ & + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\mu^4) \end{aligned} \quad (2.54)$$

### 2.4.1 Symmetrische Phase

Um die bisherigen Ergebnisse, die mit Renormierungsbedingungen berechnet wurden, und die in Dohms Schema zu vergleichen, werden einige Konsistenzrechnungen durchgeführt. Dabei ist dann auch Gelegenheit, Dohms Schema konkret zu veranschaulichen.

Zunächst beobachtet man, daß die Entwicklung der Vertexfunktionen in der Kopplung  $g_0$  ungünstig ist, weil diese Größe dimensionsbehaftet ist und die physikalische Dimension außerdem direkt von der Raumdimension abhängt. Insbesondere

in drei Dimensionen ist  $g_0$  nicht dimensionslos,  $D = 4$  ist ein Spezialfall (Tabelle 2.1, S. 13). Als Konsequenz davon treten in der Entwicklung in zweiter Ordnung Terme wie  $\log m_0$  auf. Außerdem treten von der dritten Ordnung an wesentliche Unterschiede zu den Ergebnissen aus Dohms Gruppe auf, die den Vergleich erschweren.<sup>4</sup> Dies liegt an den unterschiedlichen Termen in der Entwicklung in  $\varepsilon$ , die sich mit dem Pol in zweiter Ordnung zum ersten Mal in dritter Ordnung auch im endlichen Anteil zeigen.

Um diese unschönen Effekte zu vermeiden, empfiehlt es sich, einen dimensionslosen Entwicklungsparameter zu verwenden. Die dimensionslose Kopplung

$$u_0 = \frac{g_0}{m_0^{4-D}} = \frac{g_0}{m_0^{1+\varepsilon}}$$

bietet sich dafür an. Wenn man dann direkt bei der Auswertung der Integrale zur Kopplung  $u_0$  übergeht und darauf verzichtet, die  $\varepsilon$ -Abhängigkeit der Kopplung mit der  $\varepsilon$ -Entwicklung bei der Integration zu vermischen, kann man das Auftreten zusätzlicher Terme wie  $\log m_0$  ganz vermeiden.

In der Hochtemperaturphase ist die Korrelationslänge  $\xi_+$  durch die Ableitung der Zweipunktfunktion  $\xi_+^2 := \frac{\partial_{p^2} \Gamma^{(2)}(0)}{\Gamma^{(2)}(0)}$  definiert. Dies entspricht  $1/m_{R+}^2$ .  $\Gamma^{(2)}(p)$  wird störungstheoretisch (hier: bis zur zweiten Ordnung in der Kopplung) berechnet und daraus  $m_{R+}$  als Funktion von  $m_0$  gewonnen. Durch Inversion dieser Beziehung erhält man  $m_0$  als Funktion von  $m_{R+}$ .

Dies wird anhand der Resultate von [Hei93] am Beispiel der Zweipunktvertexfunktion für  $N = 1$  durchgeführt. Die Ergebnisse werden, wie oben beschrieben, hier abweichend von [Hei93] mit der Kopplung  $u_0$  notiert.

$$\Gamma^{(2)}(0) = -m_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{8\pi} u_0 + \frac{1}{64\pi^2} u_0^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} B \right) + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \quad (2.55)$$

$$B = \frac{1}{\varepsilon} + \log(4\pi) + 1 - \log 9 - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.56)$$

$$m_R^2 = m_0^2 \{ 1 + a u_0 + b u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \}$$

---

<sup>4</sup>Dies hat keinen Einfluß auf die Endergebnisse in [Gut95], [Küs95]. Weil die zusätzlichen Terme wie  $\log m_0$  usw. immer zusammen mit den Poltermen auftreten, die bei der Renormierung entfernt werden, verschwinden auch die zusätzlichen Terme in den renormierten Größen. Hier werden aber auch nichtrenormierte Ausdrücke verglichen, bei denen die Unterschiede sichtbar werden.

## 2 Renormierungsmethoden

---

mit den Abkürzungen

$$a = -\frac{1}{8\pi}; \quad b = \frac{1}{64\pi^2} \left( \frac{79}{162} - \frac{1}{3}B \right). \quad (2.57)$$

Für die Wurzel von  $m_R^2$  erhält man

$$m_R = m_0 \left\{ 1 + \frac{a}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_0 \left( \frac{-a^2}{4} + b \right) + \mathcal{O}(u_0^3) \right\}$$

Um  $m_0$  als Funktion von  $m_R$  zu erhalten, ist es geschickt,  $1/m_R$  als Funktion von  $1/m_0$  zu betrachten und die Reihe iterativ zu invertieren. Man erhält:

$$m_0 = m_R \left\{ 1 - \frac{a}{2} \frac{g_0}{m_R^{1+\varepsilon}} + \frac{a^2 - 4b}{8} \frac{g_0^2}{m_R^{2(1+\varepsilon)}} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{g_0}{m_R^{1+\varepsilon}} \right)^3 \right) \right\}$$

bzw.

$$m_0^2 = m_R^2 \left\{ 1 - a \frac{g_0}{m_R^{1+\varepsilon}} + \frac{a^2 - 2b}{2} \frac{g_0^2}{m_R^{2(1+\varepsilon)}} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{g_0}{m_R^{1+\varepsilon}} \right)^3 \right) \right\}. \quad (2.58)$$

Setzt man dies zusammen mit allen Konstanten in  $\Gamma^{(2)}$ , (2.55), ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(0) &= -m_R^2 + g_0^2 \left( -\frac{1}{5184\pi^2} \right) + \mathcal{O}(g_0^3) \\ &= -m_R^2 \left\{ 1 + \frac{1}{5184\pi^2} \frac{g_0^2}{m_R^2} + \mathcal{O} \left( \frac{g_0^3}{m_R^3} \right) \right\}, \end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon$  bereits auf null gesetzt wurde, weil der Polterm entfernt ist. Die Substitution der renormierten Masse  $m_R$  leistet also dasselbe wie die additive Massenrenormierung nach Dohm, sie entfernt bereits alle Pole in  $D = 3$ . Außerdem beobachtet man in zweiter Ordnung die bei [SD89] angegebene Struktur in  $D = 3$ .

$$\Gamma^{(2)}(0) = m_R^2 f_0^{(2)} \left( \frac{g_0}{m_R} \right)$$

Folgt man formal dem minimalen Renormierungsschema mit ((2.52), (2.53),  $N = 1$ ,  $e = 1$ ) :

$$\hat{\lambda}_\mu = \frac{\mu^{-1}}{4\pi} \frac{\hat{Z}_\phi^2}{\hat{Z}_g} g_0$$

$$\begin{aligned}
 \hat{Z}_\phi(\hat{\lambda}_\mu) &= 1 - \frac{1}{48}\hat{\lambda}_\mu^2 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\mu^3) \\
 \hat{Z}_g(\hat{\lambda}_\mu) &= 1 + \frac{3}{2}\hat{\lambda}_\mu + \frac{3}{2}\hat{\lambda}_\mu^2 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\mu^3) \\
 \hat{\Gamma}_R^{(2)}(m_R, \hat{\lambda}_\mu, \mu) &= \hat{Z}_\phi \Gamma^{(2)}(m_R, 4\pi\mu \frac{\hat{Z}_g}{\hat{Z}_\phi^2} \hat{\lambda}_\mu) ,
 \end{aligned}$$

so erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma}_R^{(2)}(\hat{\lambda}_\mu, m_R, \mu) &= -m_R^2 + \left(12m_R^2 - \frac{\mu^2}{324}\right) \hat{\lambda}_\mu^2 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\mu^3) \\
 &= -m_R^2 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{48} - \frac{1}{324} \frac{\mu^2}{m_R^2} \right) \hat{\lambda}_\mu^2 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\mu^3) \right\}
 \end{aligned}$$

für die renormierte Zweipunktfunktion.

Dasselbe leistet die additive Massenrenormierung  $r_0 - r_{0C}$  in Dohms Schema. Für die praktische Rechnung muß nicht die ganze Struktur von  $r_{0C}$  verwendet werden. Es genügt, den Pol in  $D = 3$  herauszugreifen. Über den endlichen Teil von  $S(e)$  kann man dann zur Vereinfachung der Rechnung frei verfügen. Anstelle von  $r_0 - r_{0C}$  benutzt man also

$$r'_0 := r_0 - \delta_{r_0} \quad (2.59)$$

mit

$$\delta_{r_0} := \left(\frac{g_0}{24}\right)^{2/e} \left(\frac{A_S}{e-1} + C_S\right) = \left(\frac{g_0}{24}\right)^2 \left(\frac{A_S}{\varepsilon} + C_S - 2A_S \log \frac{g_0}{24} + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) ,$$

wobei  $A_S$  durch den Polterm in der Störungsreihe festgelegt ist und  $C_S$  zweckmäßig gewählt wird. Als Resultat der Störungsreihe findet man

$$A_S = \frac{3}{\pi^2} . \quad (2.60)$$

Dies kann man am Term zweiter Ordnung in (2.58) ablesen, indem man den Vorfaktor von  $\frac{1}{\varepsilon}$ , der in  $b$  (2.57) enthalten ist, bestimmt.

Mittels der hier durchgeführten Konsistenzrechnungen erhält man durch Vergleich die explizite Form der Wahl von  $C_S$ .

$$C_S = \frac{3}{\pi^2} \left( 1 - \gamma + \log \frac{4\pi}{9} - 2 \log 24 \right) \quad (2.61)$$

Diese Arbeit	[Str96]	[Hei93]
$g_0$	$24u_0$	$g_0$
$m_0^2$	$r_0$	$m_0^2$
$m_{0-}^2$	$-2r_{0-}$	$m_{0-}^2$
$A_S$	$A$	$\frac{3}{\pi^2}$
$C_S = 1 - \gamma + \log \frac{4\pi}{9} - 2 \log 24$	$C$	-
$C_H = 4\pi(1 - \log 9)$	-	$C$
$B = \frac{1}{\varepsilon} + \log 4\pi + \frac{C_H}{4\pi} - \gamma$	-	$B(m_0) = \frac{1}{\varepsilon} + \log \frac{4\pi}{m_0^2} + \frac{C_H}{4\pi} - \gamma$
	$A_3$	$\frac{1}{4\pi}$
$v_0$	$M_0$	$v$

Tabelle 2.2: Konventionen und Konstanten für den Vergleich der verschiedenen Arbeiten

Durch die Verwendung von  $r'_0$  anstelle von  $r_0$  werden bereits alle Pole in  $D = 3$  entfernt.

Anschließend wird in Dohms Schema das Massenquadrat  $r'_0$  durch die renormierte Masse  $m_{R+}^2$  ausgedrückt

$$r'_0(m_{R+}, g_0) = m_{R+}^2 \left\{ 1 + \frac{3}{\pi} \frac{g_0}{24m_{R+}} + \frac{3}{\pi^2} \frac{g_0^2}{(24)^2 m_{R+}^2} \left[ \frac{1}{27} + 2 \log \frac{g_0}{m_{R+}} \right] + \mathcal{O} \left( \frac{g_0^3}{m_{R+}^3} \right) \right\}, \quad (2.62)$$

so daß insgesamt die Substitutionen  $r_0 \rightarrow r'_{0+} \rightarrow m_{R+}^2$  durchgeführt worden sind, um unrenormierte Störungsreihen als Funktionen von  $m_{R+}$  und  $g_0$  bzw.  $u_0$  polfrei in drei Dimensionen aufzuschreiben. Die minimal renormierte Masse  $\hat{m}_R$  wird in Dohms Schema nicht weiter verwendet, sondern die Vertexfunktionen werden durch die renormierte Masse  $m_{R+}$  ausgedrückt. Dies ist möglich, weil die minimale Renormierung von Feld und Kopplung massenunabhängig ist.

Diese an sich überflüssige Zerlegung der Substitution in zwei Schritte dient zur Vorbereitung, um die Methode der minimalen Renormierung in  $D = 3$  auch unterhalb  $T_C$  verwenden zu können. Dazu wird nämlich  $r'_0$  als Funktion von  $m_R$  und  $g_0$  benötigt und mit  $r'_{0+}(m_R, g_0)$  bezeichnet.



### 2.4.2 Unterhalb $T_C$

In der Tieftemperaturphase ist die oben verwendete Definition der Korrelationslänge bzw. der renormierten Masse  $m_R$  im allgemeinen nicht verwendbar, weil bei  $N > 1$  Komponenten des Feldes  $\phi$  zunächst einmal die longitudinale von den transversalen Komponenten unterschieden werden muß und eine entsprechend wie bei  $T > T_C$  definierte renormierte Masse divergiert.

Um trotzdem soweit wie möglich in Analogie zur Situation bei  $T > T_C$  vorzugehen, wird in Dohms Schema eine Pseudokorrelationslänge verwendet, die dadurch definiert wird, daß sie die gewünschten Eigenschaften besitzt. Der Nachteil ist natürlich, daß diese Pseudokorrelationslänge keine physikalische Bedeutung hat. Dieser Pseudokorrelationslänge entspricht eine Pseudomasse, die mit  $m_p$  bezeichnet wird.

Die Masse  $m_p$  wird implizit dadurch definiert, daß der Zusammenhang zwischen dem Massenquadrat

$$r_{0-} = m_0^2 = -\frac{1}{2}m_{0-}^2 \quad (2.63)$$

und der Masse  $m_p$  in der Form

$$r_{0-}(m_p, g_0) = r_{0+}(m_p, g_0) - \frac{3}{2}m_p^2 \hat{Z}_m(\hat{\lambda}_\mu(l)) \quad (2.64)$$

festgelegt wird ([SD89]).

Diese Wahl wird verständlicher, wenn man beachtet, daß sich dann

$$r_{0-}(m_p) = m_p^2 (1 + \mathcal{O}(g_0)) - \frac{3}{2}m_p^2 (1 + \mathcal{O}(g_0)) = -\frac{1}{2}m_p^2 (1 + \mathcal{O}(g_0))$$

ergibt, und somit

$$m_p^2 = m_{0-}^2 (1 + \mathcal{O}(g_0)) . \quad (2.65)$$

Analog kann man  $r'_{0-} = r_{0-} - \delta_{r_0}$  definieren, indem man auf beiden Seiten von (2.64)  $\delta_{r_0}$  abzieht.

$$r'_{0-}(m_p, g_0) = r'_{0+}(m_p, g_0) - \frac{3}{2}m_p^2 \hat{Z}_m(\hat{\lambda}_\mu(l)) \quad (2.66)$$

## 2 Renormierungsmethoden

---

$\hat{\lambda}_\mu(l)$  ist die laufende Kopplung, entwickelt in  $g_0$ , die man im minimalen Renormierungsschema erhält <sup>5</sup>

$$\hat{\lambda}_\mu(l) = \frac{1}{4\pi} m_p^{-e} g_0 - \frac{(N+8)m_p^{-2e}}{4\pi^2 e} g_0^2 + \mathcal{O}(g_0^3) . \quad (2.67)$$

Die Abhängigkeit des  $\hat{\lambda}_\mu$  von  $l$  wird durch die unten beschriebene Wahl von  $l$  bzw.  $\mu$  jedoch gleich wieder entfernt. Die Unabhängigkeit der renormierten Größen von  $\mu$ , dem Parameter, mit dem die renormierte Kopplung dimensionslos gemacht wird, ist der Startpunkt für die Renormierungsgruppendifferentialgleichung. (Vergleiche auch die Definition der  $\beta$ -Funktion im nächsten Abschnitt.)  $\mu$  wird in [Str96] als  $\mu(l) = \hat{\mu}l$  nochmals relativ zu einer beliebigen, aber festen Referenzskala  $\hat{\mu}$  parametrisiert. Um diese zusätzlichen Parameter zu entfernen, wird  $l\hat{\mu}\frac{1}{m_p} = 1$  gewählt, welches im Prinzip nichts anderes bedeutet, als daß  $\mu = m_p$  gesetzt wird. Der zusätzliche Parameter  $l$  wird nur zur Integration der Renormierungsgruppendifferentialgleichung benutzt. Die minimal renormierte Kopplung wird, nachdem in dieser Weise eine Masse (hier  $m_p$ ) gewählt worden ist, mit  $\hat{\lambda}_p$  bezeichnet.

Die Masse  $m_{0-}^2$  hängt mit  $r_{0-}$  zusammen, so daß

$$\begin{aligned} m_{0-}^2 &= -2r_{0-} = -2r_{0+}(m_p, g_0) + 3m_p^2 \hat{Z}_m(\hat{\lambda}_\mu(l)) \\ &= -2r'_{0+} - 2\delta r_0 + 3m_p^2 \hat{Z}_m(\hat{\lambda}_\mu(l)) \end{aligned}$$

als Funktion von  $m_p$ , in  $g_0$  entwickelt, berechnet werden kann, indem man hierin  $r'_{0+}(m_p)$  (2.62) aus der Hochtemperaturphase einsetzt. Man erhält für  $N = 1$

$$\begin{aligned} m_{0-}^2 &= m_p^2 \left\{ 1 + \frac{3}{\pi} \frac{g_0}{24m_p^{1+\varepsilon}} \right. \\ &\quad - \frac{3}{\pi^2} \frac{g_0^2}{(24)^2 m_p^{2(1+\varepsilon)}} \left( \frac{1385}{108} + 4 \log 24g_0 + \frac{2}{\varepsilon} - 4 \log 24g_0 + \frac{2}{3} \pi^2 C_S \right) \\ &\quad \left. + \mathcal{O} \left( \left( \frac{g_0}{m_p^{1+\varepsilon}} \right)^3 \right) \right\} . \end{aligned}$$

$$m_{0-} = m_p \left\{ 1 + \frac{3}{2\pi} \frac{g_0}{24m_p^{1+\varepsilon}} \right.$$

---

<sup>5</sup>Die in [Str96] angegebene Formel enthält kleine Fehler.

$$- \frac{3}{2\pi^2} \frac{g_0^2}{24^2 m_p^{2(1+\varepsilon)}} \left( \frac{1385}{108} + \frac{2}{\varepsilon} + \frac{2}{3} \pi^2 C_S + \frac{3}{4} \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{g_0}{24 m_p^{1+\varepsilon}} \right)^3 \right) \Bigg\}$$

Diese Beziehung kann man nun verwenden, um die Masse  $m_0$  zum Beispiel in Vertexfunktionen durch  $m_p$  zu ersetzen. Sie erfüllt dabei dieselbe Funktion wie die Masse  $m_R$ , nämlich die Aufnahme der Pole in  $D = 3$ .

Als konkretes Beispiel für dieses Verfahren wird die Massensubtraktion für  $N = 1$  mit den Ergebnissen aus [Hei93] nachvollzogen. Dazu werden die Beziehungen zwischen der Pseudomasse  $m_p$  der Masse  $m_{0-}$  und der renormierten Masse  $m_{R-}$  hergestellt. Entsprechend dem Vorgehen im symmetrischen Fall wird zunächst durch Invertieren der bei [Hei93] angegebenen Reihe <sup>6</sup>

$$m_{R-}^2 = m_{0-}^2 \left\{ 1 + \frac{3}{64\pi} u_0 + \frac{1}{64\pi^2} \left( \frac{3937}{5184} + \frac{2}{3} B \right) u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\}$$

$$B = \frac{1}{\varepsilon} + \log 4\pi + 1 - \log 9 - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{wie (2.56)})$$

die Masse  $m_{0-}$  in Abhängigkeit von der renormierten Masse ausgedrückt.

$$\begin{aligned} m_{0-} = m_{R-} & \left\{ 1 - \frac{3}{128\pi} \frac{g_0}{m_{R-}^{1+\varepsilon}} + \frac{g_0^2}{\pi^2 m_{R-}^{2(1+\varepsilon)}} \left( -\frac{15019}{2654208} - \frac{1}{192} B \right) \right. \\ & \left. + \mathcal{O} \left( \frac{g_0^3}{m_{R-}^{3(1+\varepsilon)}} \right) \right\} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} m_{0-}^2 = m_{R-}^2 & \left\{ 1 - \frac{3}{64\pi} \frac{g_0}{m_{R-}^{1+\varepsilon}} + \frac{g_0^2}{\pi^2 m_{R-}^{2(1+\varepsilon)}} \left( -\frac{7145}{663552} - \frac{1}{96} B \right) \right. \\ & \left. + \mathcal{O} \left( \frac{g_0^3}{m_{R-}^{3(1+\varepsilon)}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Da man nun  $m_{0-}(m_{R-})$  und  $m_{0-}(m_p)$  kennt, kann man für  $N = 1$  die polfreie Beziehung zwischen  $m_{R-}$  und  $m_p$  angeben. Man erhält in  $D = 3$

$$m_{R-}^2(m_p) = m_p^2 \left\{ 1 + \frac{33}{8\pi} \frac{g_0}{24 m_p} + \frac{g_0^2}{24^2 \pi^2 m_p^2} \left( -\frac{17251}{576} \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{g_0}{24 m_p} \right)^3 \right) \right\}.$$

---

<sup>6</sup>Der Koeffizient in zweiter Ordnung wurde nach [Küs95] korrigiert.

**Spontane Magnetisierung ( $N = 1$ )** Der Vakuumerwartungswert des Feldes  $\phi$  findet sich in [Gut95] Formel (5.26) in der folgenden Form.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \sqrt{g_0} + \frac{1}{\sqrt{3}(8\pi)^2} \frac{g_0^{3/2}}{m_{0-}} B \\ v_{\min} &= \sqrt{\frac{3m_{0-}^2}{g_0}} \\ v_0 &= v_{\min} + v_1 \end{aligned}$$

Daraus berechnet man  $v_0^2$ .

$$v_0^2(g_0, m_{0-}) = \frac{m_{0-}^2}{8} \frac{24}{g_0} + \frac{3}{4\pi} m_{0-} + \frac{3}{4\pi^2} \left( \frac{3}{2} + B \right) \frac{g_0}{24} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (2.68)$$

Zur Sicherheit wird dieses Resultat mit dem in [Str96] angegebenen verglichen. Dazu wird Gleichung (3.14) <sup>7</sup> aus [Str96] in eine Form gebracht, in der die Polterme wieder enthalten sind, indem man  $r'_0$  durch  $r_0 - \delta r_0$  ersetzt.

$$\begin{aligned} v_0^2(g_0, r'_0) &= \frac{1}{8} \frac{24}{g_0} \left\{ -2r'_0 + \frac{6}{\pi} \sqrt{-2r'_0} \frac{g_0}{24} + \frac{1}{\pi^2} \left( 9 - 6 \log \frac{-2r'_0}{\lambda_0^2} \right) \left( \frac{g_0}{24} \right)^2 + \mathcal{O}(g_0^3) \right\} \end{aligned}$$

Wenn man hier  $r'_0$  ersetzt hat, erhält man wie erwartet das obige Ergebnis (2.68).

Nun kann  $m_{0-}(m_p)$  eingesetzt werden, um  $v_0^2(g_0, m_p)$  zu erhalten.

$$v_0^2(g_0, m_p) = \frac{m_p^2}{8} \frac{24}{g_0} + \frac{9m_p}{8\pi} + \frac{1}{\pi^2} \left( -\frac{733}{288} \right) \frac{g_0}{24} + \mathcal{O}(g_0^2)$$

Im minimalen Renormierungsschema gilt für die Amplitudenfunktion

$$f_\phi = \frac{1}{m_p \hat{Z}_\phi(\hat{\lambda}_p)} v_0^2(g_0(\hat{\lambda}_p)) = \frac{3}{4\pi \hat{\lambda}_p} + \frac{13}{108\pi} \hat{\lambda}_p + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_p^2),$$

wobei  $\hat{\lambda}_p = \hat{\lambda}_\mu(l)$  in die  $Z$ -Faktoren eingesetzt wird. Dies entspricht dem in [Str96] angegebenen Ergebnis für  $N = 1$ .

---

<sup>7</sup>Der Exponent im Term erster Ordnung wurde korrigiert.

### 2.4.3 $\beta$ -Funktion

Die  $\beta$ -Funktion ist definiert als

$$\beta(\hat{\lambda}_\mu) := \mu \partial_\mu \hat{\lambda}_\mu(g_0, m_0, \mu)$$

bei festem  $g_0, m_0$ . Ihre nichttriviale Nullstelle bestimmt den Wert der kritischen Kopplung  $\hat{\lambda}^*$ . Weil  $\hat{Z}_\phi$  und  $\hat{Z}_g$  unabhängig von der Masse  $\mu$  sind und die  $\beta$ -Funktion im wesentlichen nur von den Z-Faktoren bestimmt wird, ist der Wert von  $\hat{\lambda}^*$  von der Wahl von  $\mu$  unabhängig und außerdem in beiden Phasen gleich.

Um dies zu zeigen, leitet man die Definition der renormierten Kopplung  $g_0 = 4\pi\mu \frac{\hat{Z}_g}{\hat{Z}_\phi^2} \hat{\lambda}_\mu$  nach  $\mu$  ab und beachtet, daß  $\hat{\lambda}_\mu$  eine Funktion von  $\mu$  ist. Es genügt, den Fall  $D = 3$  zu betrachten, weil durch die Massensubstitution keine Pole in  $D = 3$  mehr vorhanden sind, wenn die minimale Renormierung durchgeführt wird.

$$0 = 4\pi\hat{\lambda}_\mu \frac{\hat{Z}_g}{\hat{Z}_\phi^2} + 4\pi\mu \partial_\mu \left( \hat{\lambda}_\mu \frac{\hat{Z}_g}{\hat{Z}_\phi^2} \right)$$

Weil mit Verwendung der Definition von  $\beta$

$$\mu \partial_\mu \left( \hat{\lambda}_\mu \frac{\hat{Z}_g}{\hat{Z}_\phi^2} \right) = \mu \partial_{\hat{\lambda}_\mu} \left( \hat{\lambda}_\mu \frac{\hat{Z}_g}{\hat{Z}_\phi^2} \right) \cdot \partial_\mu \hat{\lambda}_\mu = \beta(\hat{\lambda}_\mu) \partial_{\hat{\lambda}_\mu} \left( \hat{\lambda}_\mu \frac{\hat{Z}_g}{\hat{Z}_\phi^2} \right)$$

ist, erhält man

$$\beta(\hat{\lambda}_\mu) = - \left( \partial_{\hat{\lambda}_\mu} \log \frac{\hat{\lambda}_\mu \hat{Z}_g}{\hat{Z}_\phi^2} \right)^{-1}.$$

Man sieht, daß die Abhängigkeit der  $\beta$ -Funktion von der renormierten Kopplung nicht explizit von der Wahl von  $\mu$  abhängt.

Entsprechend den Z-Faktoren sind auch die Werte von  $\hat{\lambda}^*$  zu hoher Ordnung bekannt. [LMSD98] geben folgende Werte für  $\hat{\lambda}^*$  als Ergebnis einer Fünf-Loop-Rechnung mit Borel-Resummation an (Tabelle 2.3).

$N$	$\hat{\lambda}^*$
1	$0.9696 \pm 0.0072$
2	$0.8688 \pm 0.0024$
3	$0.7848 \pm 0.0024$

Tabelle 2.3: Wert der renormierten Kopplung im minimalen Subtraktionsschema am Fixpunkt für verschiedene Dimensionen  $N$  des Ordnungsparameters in  $D = 3$  nach [LMSD98]

#### 2.4.4 Drei-Loop-Rechnungen ( $N = 1, T < T_C$ )

Nachdem auf Zwei-Loop-Niveau die Konsistenz der Verfahren hergestellt worden ist, sollen nun auch in Drei-Loop-Ordnung die Rechnungen verglichen werden. Dazu wird zunächst die Massensubtraktion nach Dohm am Beispiel der Magnetisierung durchgeführt, die für  $N = 1$  von [Gut95] und [Küs95] berechnet worden ist, damit man deren Ergebnisse mit den inzwischen verfügbaren Drei-Loop-Ergebnissen aus [SLD98] vergleichen kann. Anschließend wird dieselbe Magnetisierung mit der renormierten Masse ausgedrückt und die Amplitudenfunktion  $f_\phi$  damit ausgerechnet.

##### Massensubtraktion

In Drei-Loop-Ordnung lautet die Magnetisierung

$$v_0^2 = 3 \frac{m_0^{D-2}}{u_0} \left\{ 1 + 2 \frac{u_0}{8\pi} (1 + \varepsilon \epsilon_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) + \frac{u_0^2}{(8\pi)^2} \left[ \frac{2}{3} B + 1 \right] + \frac{u_0^3}{(8\pi)^3} \left[ 2f_1 + \frac{2}{3} B + \frac{2}{3} \epsilon_1 \right] + \mathcal{O}(u_0^4) \right\} \quad (2.69)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} f_1 &= -1 - \frac{1}{3} \log \frac{4}{3} - \frac{7}{2} \left( \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{8} \log^2 \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \log \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \text{Li}_2 \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{16} c^T \\ c^T &= 0,1739006 \\ B &= \frac{1}{\varepsilon} + \log 4\pi - \gamma + 1 - \log 9 + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \epsilon_1 &= 1 + \log \sqrt{\pi} - \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

$\text{Li}_2(y)$  bezeichnet die dilogarithmische Funktion (D.10). Dabei wurde wie oben die Kopplung durch die dimensionslose Kopplung  $u_0$  ersetzt und die richtigen Abhängigkeiten von  $\varepsilon$  explizit berücksichtigt. Dies ist in dritter Ordnung besonders wichtig, weil hier erstmals der lineare Term in  $\varepsilon$  in der ersten Ordnung von  $u_0$  zusammen mit dem Pol in  $\varepsilon$  in zweiter Ordnung  $u_0$  endliche Beiträge zur dritten Ordnung  $u_0$  liefern kann.

Um dieses Ergebnis mit den in [SLD98] angegebenen Reihen vergleichen zu können, muß nun zweierlei getan werden. Der Pol in  $D = 3$ , der sich durch Substitution der Masse entfernen läßt,  $r_0 = r'_0 + \delta r_0$ , ist nun auch implizit in der dimensionslosen Kopplung enthalten. Deshalb muß analog zur Masse  $r'_0$  auch eine Kopplung  $u'_0$  eingeführt werden, die mit der substituierten Masse definiert ist.

$$u'_0 := \frac{g_0}{m_0^{D-4}}; \quad m_0^2 = -2r_0; \quad m'_0 = \sqrt{-2r'_0} \quad (2.70)$$

Weil

$$\delta r_0 = \frac{3}{\pi^2} \left( \frac{g_0}{24} \right)^{2/e} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log \frac{4\pi}{9} - 2 \log 24 \right)$$

ist, erhält man mit  $\varepsilon$ -Entwicklung

$$\begin{aligned} m_0^2 &= -2(r'_0 + \delta r_0) \\ &= m_0'^2 - \frac{6m_0'^2}{\pi^2} \left( \frac{u_0}{24} \right)^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log \frac{4\pi}{9} - 2 \log u_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Also ist

$$m_0 = m'_0 \left\{ 1 - \frac{3}{\pi^2} \left( \frac{u_0}{24} \right)^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log \frac{4\pi}{9} - 2 \log u_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(u_0^4) \right\}.$$

Zum Einsetzen in  $v_0^2$  wird  $m_0^{D-2}$  benötigt.

$$m_0^{D-2} = m_0'^{D-2} \left\{ 1 - \frac{3}{\pi^2} \left( \frac{u_0}{24} \right)^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi}{9} - 2 \log u_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(u_0^4) \right\}$$

Damit erhält man

$$v_0^2 = 3m_0'^{D-2} \left\{ \frac{1}{u_0} + \frac{1}{4\pi} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{u_0}{\pi^2} \left[ \frac{1}{64} \left( \frac{2}{3} B + 1 \right) - \frac{3}{24^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi}{9} - 2 \log u_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right] \\ & + \frac{u_0^2}{\pi^3} \left[ \frac{1}{768} (3f_1 + 1 + 2 \log u_0) \right] + \mathcal{O}(u_0^3) \end{aligned} \right\}.$$

Nun muß noch die Kopplung  $u'_0$  berechnet werden. Dazu braucht man  $m_0(m'_0)$  als Funktion von  $u'_0$ ,

$$m_0 = m'_0 \left\{ 1 - \frac{3}{\pi^2} \left( \frac{u'_0}{24} \right)^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log \frac{4\pi}{9} - 2 \log u'_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(u_0'^4) \right\},$$

um dieses in die Definition von  $u_0$  einzusetzen.

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{g_0}{m_0^{1+\varepsilon}} \left\{ 1 - \frac{3}{\pi^2} \left( \frac{u'_0}{24} \right)^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log \frac{4\pi}{9} - 2 \log u'_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)^{-1-\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(u_0'^4) \right\} \\ &= u'_0 \left\{ 1 + \frac{3}{\pi^2} \left( \frac{u'_0}{24} \right)^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 2 - \gamma + \log \frac{4\pi}{9} - 2 \log u'_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(u_0'^4) \right\} \end{aligned}$$

Setzt man dies nun in  $v_0^2(u_0)$  ein, so erhält man

$$\begin{aligned} v_0^2 &\stackrel{D=3}{=} 3m'_0 \left\{ \frac{1}{u'_0} + \frac{1}{4\pi} + \frac{u'_0}{\pi^2} \left[ \frac{1}{96} \log u_0'^2 + \frac{1}{64} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_0'^2}{\pi^3} \left[ \frac{1}{768} (3f_1 + 1 + 2 \log u'_0) \right] + \mathcal{O}(u_0'^3) \right\}. \end{aligned}$$

Nun kann man mit [SLD98] Gleichung (22) bei  $N = 1$  vergleichen und stellt Übereinstimmung fest. Nachdem in diesem Fall die Konsistenz der nicht renormierten Berechnungen festgestellt worden ist, kann man nun die minimale Renormierung mit Dohms Pseudomasse  $m_p$  durchführen, wie es in [SLD98] gemacht wird. Eine Alternative dazu ist, die für  $N = 1$  bekannte renormierte Masse  $m_R$  zu verwenden, wie es im nächsten Abschnitt durchgeführt werden soll.



Größe	Definition
$g_0$	Wirkung: $\frac{g_0}{24}\phi^4$
$u_0$	$\frac{g_0}{m_0^{4-D}}$
$u'_0$	$\frac{g_0}{m_0'^{D-4}}$
$u$	$\frac{g_0}{m_R^{4-D}} = \frac{g_0}{m_R^{1+\varepsilon}}$
$\hat{\lambda}_\mu$	$\hat{\lambda}_\mu = \frac{1}{\mu} \frac{1}{4\pi} \frac{\hat{Z}_\phi^2}{\hat{Z}_g} g_0, (D = 3)$
$u$ in [Str96]	$\hat{\lambda}_\mu/24 (D = 3)$

Tabelle 2.4: Definition der verschiedenen Kopplungen

### Magnetisierung mit renormierter Masse

In den vorigen Abschnitten ist die Renormierung nach Dohm mit der Pseudomasse berechnet worden. Wie ebenfalls oben anhand der  $\beta$ -Funktion gezeigt, kann man in Dohms Schema die Masse bzw. die Korrelationslänge, mit der man die renormierte Kopplung definiert, austauschen, ohne die anderen Größen des minimalen Schemas explizit zu verändern. In einer Drei-Loop-Rechnung bei  $N = 1$  wird jetzt dafür die aus dem Schema der Renormierungsbedingungen bekannte renormierte Masse, die der Korrelationslänge des zweiten Moments entspricht, an Stelle der Pseudomasse verwendet.

Aus [Küs95] entnimmt man

$$\begin{aligned}
 m_{R-}^2 = m_0^2 & \left\{ 1 + \frac{3}{8} \left( \frac{u_0}{8\pi} \right) (1 - \varepsilon(\epsilon_1 - 6) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) + \left( \frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \left[ \frac{3973}{5184} + \frac{2}{3}B \right] \right. \\
 & \left. + \left( \frac{u_0}{8\pi} \right)^3 \left[ f_2 + \frac{1}{8} \left( B - \frac{\gamma}{2} + \log \sqrt{\pi} \right) \right] + \mathcal{O}(u_0^4) \right\} \quad (2.71)
 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 f_2 &= -\frac{101245}{41472} + \frac{21535}{2592} \log \frac{4}{3} - \frac{1723}{48} a - \frac{3345}{1024} c^T \\
 a &= \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{8} \log^2 \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \log \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \text{Li}_2 \frac{1}{4} = 0,032 \dots
 \end{aligned}$$

Im weiteren benötigt man  $m_0$  als Funktion von  $m_R$ . Deshalb zieht man die Wurzel

und invertiert die Reihe.

$$\begin{aligned}
 m_0 = m_R & \left\{ 1 - \frac{3}{16} \left( \frac{u_0}{8\pi} \right) (1 - \varepsilon(\epsilon_1 - 6) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \right. \\
 & + \left( \frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \left[ -\frac{3973}{10368} - \frac{1}{3}B + \frac{27}{512} \right] \\
 & + \left( \frac{u_0}{8\pi} \right)^3 \left[ -\frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{16} \left( B - \frac{\gamma}{2} + \log \sqrt{\pi} \right) + \frac{3973}{18432} + \frac{3}{16}B \right. \\
 & \left. \left. - \frac{19}{16}(\epsilon_1 - 6) - \frac{135}{8192} \right] + \mathcal{O}(u_0^4) \right\} \quad (2.72)
 \end{aligned}$$

$$=: m_R \{1 + \chi\} \quad (2.73)$$

Um alle echten Pole in drei Dimensionen zu entfernen, muß auch die dimensionslose Kopplung mittels  $m_R$  ausgedrückt werden. Dazu verwendet man

$$u = \frac{g_0}{m_R^{1+\varepsilon}} .$$

Die Beziehung zwischen  $u_0$  und  $u$  wird wie folgt hergestellt

$$\begin{aligned}
 u_0 & := \frac{g_0}{m_0^{1+\varepsilon}} = \frac{g_0}{m_R^{1+\varepsilon} \{1 + \chi\}^{1+\varepsilon}} = u \{1 + \chi\}^{-1} \{1 + \chi\}^{-\varepsilon} \\
 & = u \{1 + \chi\}^{-1} \left\{ 1 - \varepsilon \left( \chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{3} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\} ,
 \end{aligned}$$

wobei  $\chi$  in (2.73) definiert ist.

Konkret erhält man

$$\{1 + \chi\}^{-\varepsilon} = 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{u_0}{8\pi} \right) \varepsilon + \frac{1}{3} \left( \frac{u_0}{8\pi} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4) . \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned}
 u_0 = u & \left\{ 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{u_0}{8\pi} \right) (1 + \varepsilon - \varepsilon(\epsilon_1 - 6)) + \left( \frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \left[ \frac{28987}{41472} + \frac{B}{3} \right] \right. \\
 & \left. + \left( \frac{u_0}{8\pi} \right)^3 \left[ -\frac{15163}{221184} - \frac{B}{16} + \frac{B - \frac{\gamma}{2} + \log \sqrt{\pi}}{16} + \frac{\epsilon_1 - 6}{16} + \frac{f_2}{2} \right] + \mathcal{O}(u_0^4) \right\}
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man nun iterativ in sich selbst einsetzen, um  $u_0$  als Funktion

von  $u$  in der gewünschten Ordnung zu erhalten.

$$u_0 = u \left\{ 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{u}{8\pi} \right) (1 + \varepsilon(7 - \epsilon_1)) + \left( \frac{u}{8\pi} \right)^2 \left[ \frac{30445}{41472} + \frac{B}{3} \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{u}{8\pi} \right)^3 \left[ -\frac{16069}{27648} + \frac{B}{8} + \frac{B - \frac{\gamma}{2} + \log \sqrt{\pi}}{16} - \frac{2(\epsilon_1 - 6)}{16} + \frac{f_2}{2} \right] \right. \\ \left. + \mathcal{O}(u^4) \right\}$$

Das Quadrat der Magnetisierung ist durch Gleichung (2.69) gegeben. Weil die Massendimension von  $v_0^2 m_0^{D-2} = m_0^{1-\varepsilon}$  ist, muß zunächst die oben hergestellte Beziehung  $m_0(m_R)$ , (2.72), und die bei der Kopplung schon berechnete Entwicklung  $\{1 + \chi\}^{-\varepsilon}$ , (2.74), in  $v_0^2$  eingesetzt werden.

$$v_0^2 = \frac{3m_R^{1-\varepsilon}}{u_0} \left\{ 1 + \left( \frac{u_0}{8\pi} \right) \left[ \frac{29}{16} + \frac{3}{16} \varepsilon(\epsilon_1 - 5) + 2\varepsilon\epsilon_1 \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \left[ \frac{1553}{1536} - \frac{a}{2} + \frac{B}{3} \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{u_0}{8\pi} \right)^3 \left[ \frac{18811}{24576} - \frac{23}{32}a + \frac{B}{16} - \frac{B - \frac{\gamma}{2} + \log \sqrt{\pi}}{16} + \frac{1}{8} - \frac{3}{16}(\epsilon_1 - 6) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8}(\epsilon_1 - 6) - \frac{2}{3}\epsilon_1 - \frac{f_2}{2} + 2f_1 - \frac{1}{3}(\gamma + \log \pi) \right] + \mathcal{O}(u_0^4) \right\}$$

Jetzt kann man die Kopplung substituieren und erhält endlich

$$v_0^2 = \frac{3m_R}{u} \left\{ 1 + \frac{13}{8} \left( \frac{u}{8\pi} \right) - \frac{737}{10368} \left( \frac{u}{8\pi} \right)^2 \right. \\ \left. + \left( \frac{u}{8\pi} \right)^3 \left[ \frac{377833}{331776} + \frac{3217}{1024}c^T - \frac{23263}{2592} \log \frac{4}{3} + \frac{1387}{48}a \right] + \mathcal{O}(u^4) \right\}.$$

Da alle Pole entfernt sind, wurde bereits der Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  durchgeführt.

Folgt man jetzt formal dem minimalen Renormierungsschema, um die renormierte Magnetisierung  $\hat{v}_R$  zu berechnen, lautet die Definition der renormierten Kopplung

## 2 Renormierungsmethoden

---

in drei Dimensionen

$$\hat{\lambda}_R = \frac{1}{m_R} \frac{1}{4\pi} \frac{\hat{Z}_\phi^2}{\hat{Z}_g} g_0 .$$

Wegen  $u = g_0/m_R$  ergibt sich hier

$$\frac{u}{8\pi} = \hat{\lambda}_R \frac{1}{2} \frac{\hat{Z}_g}{\hat{Z}_\phi^2} .$$

Die  $Z$ -Faktoren (2.52), (2.53) lauten hier für  $N = 1$

$$\begin{aligned} \hat{Z}_\phi &= 1 - \frac{1}{48} \hat{\lambda}_R^2 - \frac{1}{64} \hat{\lambda}_R^3 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_R^4) \\ \hat{Z}_g &= 1 + \frac{3}{2} \hat{\lambda}_R + \frac{3}{2} \hat{\lambda}_R^2 + \frac{1}{5184} (8073 + 2592 \zeta(3)) \hat{\lambda}_R^3 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_R^4) . \end{aligned}$$

Mittels

$$\hat{v}_R^2(m_R, \hat{\lambda}_R) = \frac{1}{\hat{Z}_\phi} v_0^2(m_R, u(\hat{\lambda}_R))$$

berechnet man die renormierte Magnetisierung

$$\begin{aligned} \hat{v}_R^2 &= \frac{m_R}{8\pi} \left\{ \frac{6}{\hat{\lambda}_R} - \frac{33}{8} + \frac{29503}{6912} \hat{\lambda}_R \right. \\ &\quad \left. + \hat{\lambda}_R^2 \left[ -\frac{753911}{442368} + \frac{1387}{64} a + \frac{9651}{4096} c^t - \frac{23263}{3456} \log \frac{4}{3} - 3\zeta(3) \right] \right\} \end{aligned}$$

und liest die Amplitudenfunktion  $f_\phi = \frac{\hat{v}_R^2}{m_R}$  ab. Das numerische Ergebnis für  $f_\phi$ ,

$$f_\phi = \frac{1}{4\pi \hat{\lambda}_R} \left\{ 3 - 2.063 \hat{\lambda}_R + 2.134 \hat{\lambda}_R^2 - 6.153 \hat{\lambda}_R^3 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_R^4) \right\} ,$$

ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Zum Vergleich ist in Abbildung 2.3 der Graph der entsprechenden Amplitudenfunktion aus [SLD98] dargestellt, die mit der Pseudomasse berechnet wurde. Durch die geschickte Wahl des Geometriefaktors  $A_D$  entfällt dort der Term erster Ordnung, und auch die Konvergenz scheint besser zu sein.

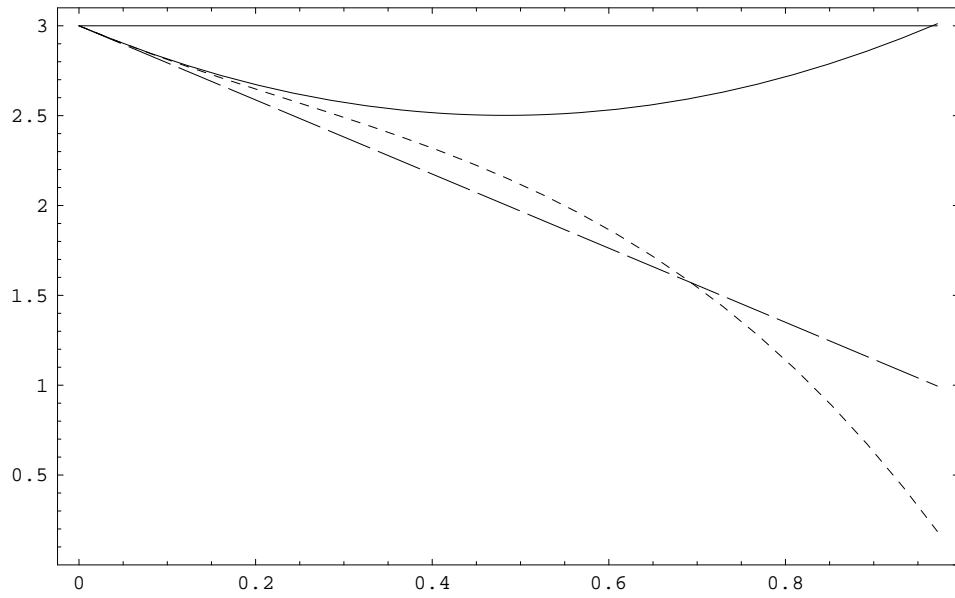


Abbildung 2.2: Graph von  $4\pi\hat{\lambda}_R f_\phi$  für  $N = 1$  als Funktion von  $\hat{\lambda}_R$  in erster, zweiter (durchgezogen) und dritter (gestrichelt) Ordnung. Der Fixpunkt befindet sich bei  $\hat{\lambda}_R = 0.97$ .

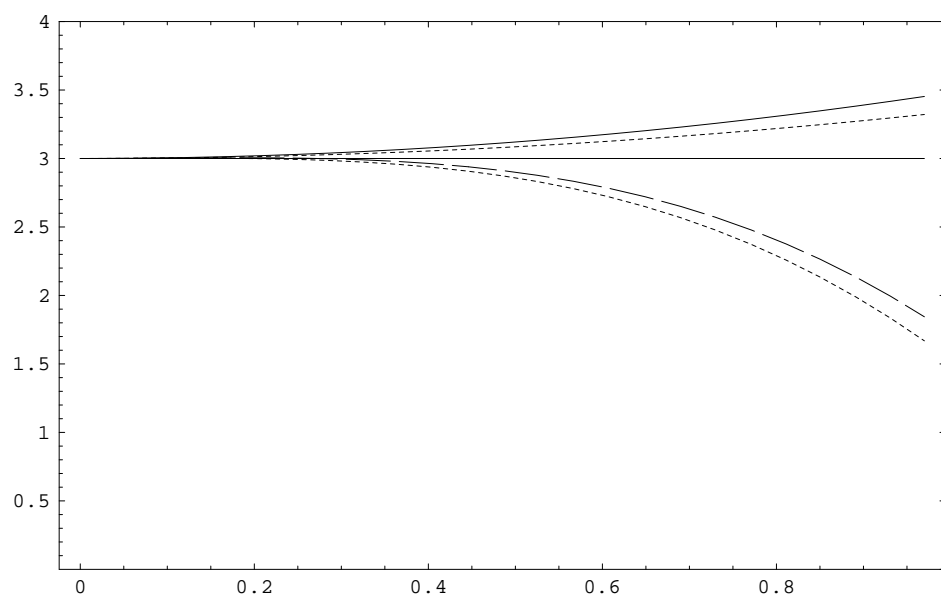


Abbildung 2.3: Graph von  $4\pi\hat{\lambda}_p f_\phi$  in zweiter Ordnung (durchgezogen) und dritter Ordnung (gestrichelt) für  $N = 1$ . Die jeweils darunter liegenden gepunkteten Kurven sind die entsprechenden Graphen für  $N = 2$ . Der  $N = 1$ -Fixpunkt ist derselbe wie in Abbildung 2.2. Der  $N = 2$ -Fixpunkt liegt bei  $\hat{\lambda}_p = 0.87$ .

## 2.5 Renormierung unterhalb $T_C$ für $N > 1$

Die bisher im Fall  $N = 1$  verwendete Korrelationslänge bzw. renormierte Masse kann wegen der Infrarotdivergenzen, die aus den Goldstone-Moden stammen, hier nicht weiter verwendet werden. Es muß also eine störungstheoretisch möglichst leicht zugängliche Größe gesucht werden, die die Rolle einer renormierten Masse übernehmen kann und mit deren Hilfe man das minimale Renormierungsschema so, wie es oben benutzt worden ist, weiterverwenden kann, ohne wieder auf die Pseudokorrelationslänge zurückzugreifen.

### 2.5.1 Renormierung durch renormierte Masse aus $v_\sigma$ gewonnen

Eine Möglichkeit besteht darin, aus der Magnetisierung eine durch Renormierungsbedingungen definierte renormierte Magnetisierung zu gewinnen, die als Reihe in  $u_0$  berechnet werden kann. Im Schema der Renormierungsbedingungen ist folgendes definiert:

$$\begin{aligned} Z_\pi(u_0) &= -(\partial_{p^2} \Gamma_{\pi\pi}^{(2)}(p=0))^{-1} \\ v_0 &= \sqrt{\frac{3m_0^2}{g_0}} + G_c^{(1)}(p=0) \\ v_R &:= \frac{1}{\sqrt{Z_\pi}} v_0 . \end{aligned} \tag{2.75}$$

$v_R^2$  hat in drei Dimensionen die Einheit einer Masse und kann benutzt werden, um eine renormierte Masse zu ersetzen, zum Beispiel bei der minimalen Renormierung der Magnetisierung. Weil der aus der Zweipunktfunktion gewonnene Faktor  $Z_\pi$  mit eingeht, sollte ein triviales Ergebnis dabei ausgeschlossen sein.

### Renormierungsschema

Zunächst wird das sich daraus ergebende Schema formal beschrieben. Dabei werden der Einfachheit halber Reihen in erster Ordnung ohne Koeffizienten verwendet.

$$v_0 = \frac{m_0}{\sqrt{g_0}} + \sqrt{g_0} + \mathcal{O}\left(g_0^{3/2}\right), \quad v_0^2 = \frac{m_0}{u_0} (1 + u_0 + \mathcal{O}(u_0^2))$$

## 2 Renormierungsmethoden

---

$$Z_\pi = 1 + u_0 + \mathcal{O}(u_0^2), \quad v_R^2 = \frac{m_0}{u_0}(1 + u_0 + \mathcal{O}(u_0^2))$$

Man definiert die renormierte Masse, die man auch als inverse transversale Korrelationslänge betrachten kann,  $m_T := v_R^2$ , d.h.

$$m_T = m_0 \left( \frac{1}{u_0} + 1 + \mathcal{O}(u_0) \right).$$

Setzt man für  $u_0$  im Term  $\frac{1}{u_0}$  die Definition  $u_0 = \frac{g_0}{m_0^{1+\varepsilon}}$  ein, so erhält man

$$m_T = \frac{m_0^{2+\varepsilon}}{g_0}(1 + u_0 + \mathcal{O}(u_0^2)); \quad \text{bzw.} \quad m_0^{2+\varepsilon} = m_T g_0(1 + u_0 + \mathcal{O}(u_0^2)).$$

Damit ergibt sich

$$m_0^{1+\varepsilon} = \sqrt{m_T g_0}^\alpha (1 + u_0 + \mathcal{O}(u_0^2))^\alpha; \quad \alpha = \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{2}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Zunächst wird im weiteren die erste Ordnung in  $\varepsilon$  mitgeführt, um in Analogie zu  $u'_0$  des vorigen Abschnittes eine dimensionslose Kopplung einzuführen, die mit einer renormierten Masse definiert ist.

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{g_0}{m_0^{1+\varepsilon}} = \frac{g_0}{\sqrt{m_T g_0}^{1+\varepsilon/2}} (1 + u_0 + \mathcal{O}(u_0^2))^{1+\varepsilon/2} \\ &= \frac{\sqrt{g_0}^{1-\varepsilon/2}}{\sqrt{m_T}^{1+\varepsilon/2}} (1 + u_0 + \mathcal{O}(u_0^2))^{1+\varepsilon/2} \end{aligned}$$

Das führt zu der Definition von

$$w := \frac{\sqrt{g_0}^{1-\varepsilon/2}}{\sqrt{m_T}^{1+\varepsilon/2}} \tag{2.76}$$

als neuer Kopplung, die bis zur gewünschten Ordnung in  $\varepsilon$  dimensionslos ist. Iteration liefert

$$u_0 = w(1 + w + \mathcal{O}(w^2))^{1+\varepsilon/2}.$$

Außerdem erhält man dann für die Beziehung zwischen  $m_0$  und  $m_T$ ,

$$m_0 = m_T w(1 + w + \mathcal{O}(w^2)),$$



so daß man nun  $v_0$  als Funktion der Kopplung  $w$  und der Masse  $m_T$  ausdrücken kann.

$$v_0^2(w, m_T) = m_T(1 + w + \mathcal{O}(w^2))$$

Es wird angenommen, daß nun alle Pole in  $D = 3$  entfernt sind und deshalb die minimale Renormierung in  $D = 3$  durchgeführt werden kann. Die Definition der renormierten Kopplung im minimalen Schema  $\hat{\lambda}_\mu = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mu} \frac{\hat{Z}_\phi^2(\hat{\lambda}_\mu)}{\hat{Z}_g(\hat{\lambda}_\mu)} g_0$  ergibt nach Wurzelziehen mit  $\mu = m_T$

$$\hat{w}_R := \frac{\hat{Z}_\phi}{\sqrt{4\pi \hat{Z}_g}} \sqrt{\frac{g_0}{m_T}} = \frac{\hat{Z}_\phi}{\sqrt{4\pi \hat{Z}_g}} w. \quad (2.77)$$

Wendet man dies auf  $v_0$  an, so erhält man

$$\hat{v}_R^2 = \frac{1}{\hat{Z}_\phi} v_0^2 \left( m_T, w = \hat{w}_R \frac{\sqrt{4\pi \hat{Z}_g}}{\hat{Z}_\phi} \right) = m_T(1 + \hat{w}_R + \mathcal{O}(\hat{w}_R^2)) \quad (2.78)$$

und damit

$$f_\phi = \frac{\hat{v}_R^2}{m_T} = (1 + \hat{w}_R + \mathcal{O}(\hat{w}_R^2)).$$

Mit Hilfe von (2.75) und (2.78) sieht man, daß  $f_\phi = \frac{Z_\pi}{Z_\phi}$ , ausgedrückt durch die Kopplung  $\hat{w}_R$ , ist.

### Ein-Loop-Rechnung

Mit den Ein-Loop-Ergebnissen von [Luc95] wird das obige Schema nun konkret durchgeführt.

$$v_0 = \frac{\sqrt{3}m_0}{\sqrt{g_0}} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \sqrt{g_0} + \mathcal{O}(g_0^{3/2}), \quad (2.79)$$

also

$$v_0^2 = \frac{3m_0}{u_0} \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi} u_0 + \mathcal{O}(u_0^2) \right\} \quad (2.80)$$

$$Z_\pi(u_0) = 1 - \frac{1}{36\pi}u_0 + \mathcal{O}(u_0^2) \quad (2.81)$$

Daraus berechnet man  $m_T$ .

$$m_T = \frac{1}{Z_\pi}v_0^2 = \frac{3m_0}{u_0} \left\{ 1 + \frac{5}{18\pi}u_0 + \mathcal{O}(u_0) \right\}$$

Da die erste Ordnung der Störungsrechnung keine Pole enthält, genügt es, nur die nullte Ordnung in  $\varepsilon$  zu betrachten, es müssen also hier keine Korrekturen in  $\varepsilon$  berechnet werden.

$$m_0 = \frac{\sqrt{m_T g_0}}{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \frac{5}{36\pi}u_0 + \mathcal{O}(u_0^2) \right\}$$

An dieser Stelle bietet es sich an, die Definition der Kopplung  $w$  noch etwas bequemer zu gestalten, und den Faktor  $\sqrt{3}$  mit aufzunehmen, so daß

$$w = \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{m_t}}\sqrt{3}. \quad (2.82)$$

Man erhält dann für  $u_0$

$$u_0 = w \left\{ 1 + \frac{5}{36\pi}u_0 + \mathcal{O}(u_0^2) \right\}$$

und nach Iteration ergibt sich

$$u_0 = w \left\{ 1 + \frac{5}{36\pi}w + \mathcal{O}(w^2) \right\}.$$

Für  $m_0$  erhält man

$$m_0 = \frac{m_T}{3}w \left\{ 1 - \frac{5}{36\pi}w + \mathcal{O}(w^2) \right\}.$$

Setzt man dies in  $v_0$  ein, bekommt man

$$v_0^2 = m_T \left\{ 1 + \frac{1}{8\pi}w + \mathcal{O}(w^2) \right\}.$$

Wendet man schließlich die minimale Renormierung an,

$$w = \sqrt{12\pi} \frac{\sqrt{\hat{Z}_g}}{\hat{Z}_\phi} \hat{w}_R ,$$

erhält man die renormierte Magnetisierung

$$\hat{v}_R^2 = m_T \left\{ 1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16\pi}} \hat{w}_R + \mathcal{O}(\hat{w}_R^2) \right\}$$

und man kann  $f_\phi$  ablesen.

### 2.5.2 Ein-Loop-Rechnung mit der Masse $m_\sigma$

Eine weitere Möglichkeit, Dohms Verfahren bei  $N > 1$  anzuwenden, ist, die physikalische Masse  $m_\sigma$  zu benutzen, die auch im Schema der Renormierungsbedingungen benutzt wird. Zum Abschluß der Betrachtung der verschiedenen Renormierungsmöglichkeiten wird dieses Verfahren in einer Ein-Loop-Rechnung mit den Ergebnissen aus [Luc95] durchgeführt.

Die renormierte Masse  $m_\sigma$  ist für  $T < T_C$  implizit definiert durch die komplexe Nullstelle der renormierten Zweipunktfunktion der massiven Feldkomponente

$$\text{Re } \Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}(p = (im_\sigma, 0, 0, \dots)) = 0$$

und kann iterativ in jeder Ordnung bestimmt werden. In erster Ordnung erhält man

$$m_\sigma = m_0 \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi} (4 - 3 \log 3) u_0 + \mathcal{O}(u_0^2) \right\} .$$

Die Magnetisierung ist wie oben durch Gleichung (2.79) bzw. (2.80) gegeben.

Nun substituiert man die renormierte Masse  $m_\sigma$  für  $m_0$  und definiert die Kopplung  $u$  entsprechend wie oben. (In Ein-Loop-Rechnungen müssen keine Korrekturen in  $\varepsilon$  berücksichtigt werden.)

$$u := \frac{g_0}{m_\sigma}; \quad u_0 = u \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi} (4 - 3 \log 3) u + \mathcal{O}(u^2) \right\}$$

$$v_0^2 = \frac{3m_\sigma}{u} \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{4\pi} - \frac{1}{16\pi}(4 - 3 \log 3) \right] u + \mathcal{O}(u^2) \right\}$$

Die Renormierung der Kopplung im minimalen Schema lautet hier

$$u = 4\pi\hat{\lambda}_\sigma \frac{\hat{Z}_g(\hat{\lambda}_\sigma)}{\hat{Z}_\phi(\hat{\lambda}_\sigma)^2}$$

und mit (2.52), (2.53),

$$\hat{Z}_\phi = 1 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\sigma^2) \quad , \quad \hat{Z}_g = 1 + \frac{N+8}{6}\hat{\lambda}_\sigma + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\sigma^2) \quad ,$$

erhalt man das Resultat

$$\hat{v}_R^2(\hat{\lambda}_\sigma) = \frac{1}{\hat{Z}_\phi} v_0^2(m_\sigma, u(\hat{\lambda}_\sigma)) = \frac{3}{4\pi} m_\sigma \left\{ \frac{1}{\hat{\lambda}_\sigma} - \frac{N+8}{6} + \frac{3}{4} \log 3 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\sigma^3) \right\} .$$

## KAPITEL 3

---

### Zwei-Loop-Rechnung in $D = 3$

---

Es werden die Rechnungen in  $D = 3 - \varepsilon$  für eine  $N$ -Komponenten  $\phi^4$ -Theorie mit  $O(N)$ -Symmetrie für  $T < T_C$  und für  $T > T_C$  in zweiter Ordnung Störungsrechnung durchgeführt.

In der Phase gebrochener Symmetrie wird die Entwicklung mit dem verschobenen Feld  $\phi_-$  durchgeführt. Der potentielle Anteil der Wirkung lautet dafür nach (2.20)

$$V(\phi_-) = \frac{1}{2}m_{0-}^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_0}{3}}\left(\sigma\sum_{i=1}^{N-1}\pi_i^2 + \sigma^3\right) + \frac{g_0}{4!}\left(\left(\sum_{i=1}^{N-1}\pi_i^2\right)^2 + \sigma^4 + 2\sigma^2\sum_{i=1}^{N-1}\pi_i^2\right).$$

Im folgenden wird zur Abkürzung das „–“ bei  $m_{0-}$  fortgelassen, wenn der Zusammenhang eindeutig ist.

Für die graphische Darstellung der Integrale ergeben sich daraus folgende Feynmanregeln für die Dreipunkt- und Vierpunktvertices mit dem  $O(N)$ -symmetrischen

### 3 Zwei-Loop-Rechnung in $D = 3$

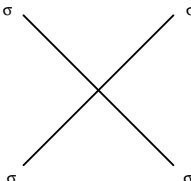
---

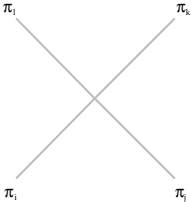
Tensor (2.15),

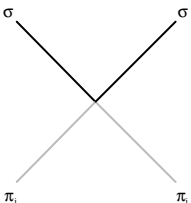
$$S_{ijkl} = \frac{1}{3} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) .$$

1.  Dieser Dreipunktvertex entspricht einem Faktor  $-\sqrt{3g_0}m_0$ .

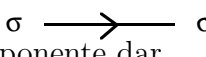
2.  Jeder dieser Dreipunktvertices erhält einen Faktor  $-\frac{1}{3}\sqrt{3g_0}m_0\delta_{ij}$ .

3.  Jeder dieser Vierpunktvertices erhält einen Faktor  $-g_0$ .

4.  Jeder dieser Vierpunktvertices erhält einen Faktor  $-g_0S_{ijkl}$ .

5.  Jeder dieser Vierpunktvertices erhält einen Faktor  $-\frac{1}{3}g_0\delta_{ij}$ .

Die Vertices werden durch zwei Typen von Propagatoren verbunden.

1.  Diese Linie stellt den Propagator der massiven Feldkomponente dar.

$$\hat{\sigma}(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2} \quad (3.1)$$

2.  $\pi \longrightarrow \pi$  Diese Linie stellt den Propagator der masselosen Feldkomponenten dar.

$$\hat{\pi}(p) = \frac{\delta_{ij}}{p^2 + h_0^2} = \frac{\delta_{ij}}{p^2 + h^2 m_0^2} \quad (3.2)$$

Dabei wird mit  $h_0 = h m_0$  eine Hilfsmasse eingeführt, die zur Behandlung des Infrarotproblems benutzt wird. Der dimensionslose Parameter  $h$  dient als Entwicklungsgröße im Limes  $h \rightarrow 0$ . Das Infrarotproblem wird in Abschnitt 3.1.2 diskutiert.

An allen Vertices muß über die auftretenden Indizes der masselosen Felder summiert werden. Weil es  $N - 1$  masselose Felder gibt, liefert jedes  $\delta_{ii}$  dabei einen Faktor  $(N - 1)$ . Es wird die Summenkonvention verwendet.

Die Graphen werden mit  $G_{nlxx}$  bezeichnet, wobei  $n$  der  $n$ -Punktfunktion entspricht, zu der der Graph gehört;  $l$  bezeichnet die Loop-Ordnung des Graphen und  $xx$  die laufende Numerierung des Graphen zu gegebenem  $n$  und  $l$ . Die laufende Numerierung entspricht der Reihenfolge, in der die Graphen von dem Programm `qgraf` ([Nog93b], [Nog93a]) erzeugt werden. Die Symmetriefaktoren  $S_{nlxx}$  sind nicht in den  $G_{nlxx}$  enthalten, sondern werden beim Zusammenfassen der Graphen berücksichtigt. Der Symmetriefaktor wird in Klammern hinter der laufenden Nummer des Graphen angegeben.

Die Berechnungen der einzelnen Graphen sind in Anhang A aufgelistet.

Zur Abkürzung wird folgende Notation für die Impulsintegrale benutzt:

$$\int_k \dots := \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \dots$$

### 3.1 Methoden der Graphenberechnung

Bei der Berechnung der Integrale, die für die einzelnen Graphen benötigt werden, sind verschiedene Grenzwertprozesse in den Parametern durchzuführen. Um ein konsistentes Ergebnis zu erhalten, muß die Reihenfolge bzw. die Unabhängigkeit der verschiedenen Grenzwerte beachtet werden.

Als Parameter treten die Masse  $m_0$  des massiven Propagators  $\hat{\sigma}$ , die Masse  $h_0 = h m_0$  des masselosen Propagators  $\hat{\pi}$ , die Dimension  $D = 3 - \varepsilon$  und gegebenenfalls

der äußere Impuls  $\mathbf{p}$  auf. Zu berechnen ist im Endeffekt der Fall  $h \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  und gegebenenfalls  $p \rightarrow 0$ .

#### 3.1.1 Dimensionelle Regularisierung

Alle Integrale werden mittels dimensioneller Regularisierung berechnet. ([tV72], [tH73]) Die wesentlichen Eigenschaften (man kann sie auch als Definition auffassen) dieser Methode sind

1. Translation

$$\int_k f(k+q) = \int_k f(k) \quad (3.3)$$

2. Dilatation

$$\int_k f(\lambda k) = |\lambda|^{-D} \int_k f(k) \quad (3.4)$$

3. Faktorisierung

$$\int_k \int_l f(k)g(l) = \int_k f(k) \int_l g(l) \quad (3.5)$$

auch mit verschiedenem  $D$  für  $k$ - und  $l$ -Integration.

Aus (3.4) kann man sofort folgern, daß

$$\int_k = 0; \quad \int_k \frac{1}{(\mathbf{k}^2)^\alpha} = 0, \alpha \neq \frac{D}{2}. \quad (3.6)$$

#### 3.1.2 Behandlung des Infrarotproblems $h \rightarrow 0$

Zunächst sieht es so aus, als wären Integrale mit dem Propagator  $\hat{\pi}$  bei  $h \rightarrow 0$  mittels (3.6) besonders leicht auszuwerten. Allerdings entsteht bei Zwei-Loop-Integralen das Problem, daß es möglich ist, Infrarot- und Ultraviolettssingularitäten zu vermischen, und je nach Zusammenfassung der Schleifenintegrale können



diese sich gegenseitig aufheben oder in den Feynmanparameterintegralen auftreten. ([tV72], S. 199) Auch stellt man fest, daß eine Berechnung bei  $h \neq 0$  mit anschließendem Grenzwert  $h \rightarrow 0$  nicht konsistent mit einer direkten Integration bei  $h = 0$  ist.

Als einfaches Beispiel dient der Graph  $G_{1210}$ . Aus (3.6) folgt direkt bei  $h = 0$

$$\text{---} \bigcirc \bigcirc \propto \int_k \int_l \frac{1}{(k^2)^2 l^2} = 0 .$$

Aber bei  $h \neq 0$  erhält man mit den Integralen  $J_1$  und  $J_2$  aus Anhang C

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \bigcirc &\propto \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)^2 (l^2 + h_0^2)} = J_1(hm_0) J_2(hm_0) \\ &= -\frac{(hm_0)^{1-\varepsilon}}{4\pi} \frac{1}{8\pi(hm_0)^{1+\varepsilon}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = -\frac{1}{32\pi^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) . \end{aligned}$$

Eine genauere Untersuchung der Grenzwertprozesse erfolgt im nächsten Abschnitt.

Um Schwierigkeiten mit den Infrarotanteilen zu vermeiden, werden hier die Integrale bei  $h \neq 0$  ausgewertet und sobald wie möglich in  $h$  entwickelt, um Pole in  $h$  zu isolieren. Das heißt, sobald keine Divergenz in  $h$  mehr vorhanden oder das Integral von vornherein infrarotkonvergent ist, wird sofort  $h = 0$  gesetzt, um nicht lange Entwicklungen von Termen, die keinen Beitrag zum Endergebnis liefern, mitzuführen. Es wird erwartet und beobachtet, daß bei der Addition der Graphen sich die Infrarotpole zu null summieren.

Ein weiterer Vorteil dieser Strategie ist, daß man durch sie einen Test der Korrektheit der Rechnung zumindest für einen Teil der Vorfaktoren erhält.

### 3.1.3 Behandlung von $D = 3 - \varepsilon$

Grundsätzlich wird so vorgegangen, daß bei der Berechnung sobald wie möglich die Entwicklung in  $\varepsilon$  vorgenommen und nur bis zur Ordnung  $\varepsilon^0$  mitgeführt wird. Sobald wie möglich bedeutet, daß keine dimensionsabhängigen Divergenzen mehr im Integral enthalten sind.

Weil in den Graphen die Kopplung  $g_0$  auftritt, die dimensionsabhängig ist, erhält man allerdings immer einen Faktor, der eine  $\varepsilon$ -te Potenz der Masse  $m_0$  enthält. Wenn man den Faktor zu früh entwickelt und mit Poltermen multipliziert, bleiben

endliche Reste, die nicht entstanden wären, wenn man die gesamten in der vorliegenden  $n$ -Punktfunktion vorhandenen Terme berücksichtigt hätte. Deshalb wird dieser Term grundsätzlich nicht entwickelt. Das führt zu einer gewissen Inkonsistenz der Notation, ist aber insgesamt doch vorteilhaft, da der (Schreib-) Aufwand, um die gesamte  $\varepsilon$ -Abhängigkeit bis zum Addieren der Graphen mitzuführen, beträchtlich ist und die Notation nicht mit an sich Überflüssigem belastet werden soll. Außerdem sollte eine allzu große Abweichung von bisherigen Arbeiten vermieden werden, die sich ergibt, wenn man die Kopplung ganz aus der Definition der Graphen entfernen würde.<sup>1</sup>

Insgesamt hat man damit ein konsistentes Verfahren zur Berechnung der  $n$ -Punktfunktionen definiert. Die Pole in  $h$  sind dimensionsunabhängig und heben sich bei der Addition der Graphen heraus. Die Entwicklung in  $\varepsilon$  liefert einen Polterm in zweiter Ordnung, der durch das Renormierungsverfahren behandelt wird.

### 3.2 Beispiel zum Limes $m_0 \rightarrow 0$

Betrachtet man  $I_3(\mathbf{p}; A, B)$  (Abschnitt C.3.2), so sieht man, daß in  $D = 3$  Dimensionen

$$I_3(\mathbf{p}; m_0, m_0) = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{m_0(4m_0^2 + p^2)} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

und

$$I_3(\mathbf{p}; 0, 0) = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

ist, daß also der Grenzwert  $\lim_{m_0 \rightarrow 0} I_3(\mathbf{p}; m_0, m_0) \neq I_3(\mathbf{p}; 0, 0)$  nicht existiert.

Zur genaueren Untersuchung der Situation wird das Integral für allgemeines  $D$  und  $m_0$  berechnet. Ausgangspunkt ist das Parameterintegral (C.1), das man nach der Feynmanparametrisierung erhält.

$$I := \frac{1}{m_0^{2\alpha}} \int_0^1 dt \frac{t}{(1 + p_0^2 t(1-t))^\alpha}$$

---

<sup>1</sup>[Hei93], [Küs95], [Gut95] In diesen Arbeiten wird durch zu frühe Entwicklung ein Beitrag zum Polterm in  $D = 3$  erzeugt, der sich bei der Renormierung zwar heraushebt, aber eigentlich überflüssig ist und den Vergleich mit anderen Rechnungen erschwert.

mit  $\alpha = 3 - D/2$ . Die Substitution  $x = t(1 - t)$  liefert

$$0 = \int_0^1 dx \frac{1}{(1 + p_0^2 x)^\alpha} = \int_0^1 dt \frac{1 - 2t}{(1 + p_0^2 t(1 - t))^\alpha} , \quad (3.7)$$

und damit berechnet man

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} m_0^{-2\alpha} \int_0^1 dt \frac{1}{(1 + p_0^2 t(1 + t))^\alpha} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m_0^{-2\alpha}}{p(\alpha - 1)2^{1+\alpha}} \left[ \left(1 - \frac{p_0}{\bar{p}}\right)^\alpha (p + \bar{p}m_0) \right. \\ &\quad \left. {}_2F_1\left(1 - \alpha, \alpha, 2 - \alpha, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_0}{\bar{p}}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{p_0}{\bar{p}}\right)^\alpha (-p + \bar{p}m_0) {}_2F_1\left(1 - \alpha, \alpha, 2 - \alpha, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p_0}{\bar{p}}\right)\right) \right] . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dabei ist  $F$  die hypergeometrische Funktion (D.19) und

$$p_0 = \frac{p}{m_0}, \quad \bar{p} = \sqrt{4 + p_0^2} . \quad (3.9)$$

Man stellt folgende Eigenschaften fest:

$$\lim_{m_0 \rightarrow 0} \frac{p_0}{\bar{p}} = 1 \quad (3.10)$$

$$\lim_{m_0 \rightarrow 0} \bar{p}m_0 = p$$

$$\lim_{m_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p_0}{\bar{p}}\right) = 0, \quad {}_2F_1(1 - \alpha, \alpha, 2 - \alpha, 0) = 1$$

$$\lim_{m_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_0}{\bar{p}}\right) = 1$$

$${}_2F_1(1 - \alpha, \alpha, 2 - \alpha, 1) = 2^{2\alpha-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\Gamma(\frac{3}{2} - \alpha)} \stackrel{D \rightarrow 3}{=} 0 . \quad (3.11)$$

### 3 Zwei-Loop-Rechnung in $D = 3$

---

Zunächst betrachtet man den Grenzwert  $m_0 \rightarrow 0$ . Der erste Faktor des ersten Summanden, den man zusammen mit dem Vorfaktor  $m_0^{-2\alpha}$  entwickeln kann, ergibt

$$\left(m_0^{-2} \left(1 - \frac{p_0}{\bar{p}}\right)\right)^\alpha = \left(\frac{2}{p^2} - 6\frac{m_0^2}{p^4} + \mathcal{O}(m_0^4)\right)^\alpha.$$

Man erkennt, daß der Grenzwert für  $m_0 \rightarrow 0$  existiert und somit für  $D \rightarrow 3$  nur  $\frac{1}{p^3}$  bzw. zusammen mit der hypergeometrischen Funktion null für den ersten Summanden übrig bleibt, was dem Ergebnis von  $I_3(\mathbf{p}; 0, 0)$  entspricht.

Entsprechend kann man im zweiten Summanden entwickeln:

$$\left(m_0^{-2} \left(1 + \frac{p_0}{\bar{p}}\right)\right)^\alpha (-p + \bar{p}m) = m_0^{-2\alpha} \left(\frac{2^{1+\alpha}m_0^2}{p} + \mathcal{O}(m_0^4)\right).$$

Offensichtlich existiert der Grenzwert nur, wenn  $\alpha < 1$ , also  $D > 4$  ist, und der Grenzwert ist dann null. Dies entspricht der Situation bei der direkten Auswertung von  $I_3(\mathbf{p}; 0, 0)$ . Dort existiert das Parameterintegral auch nur in diesem Fall, und erst die Fortsetzung zu  $D = 3$  liefert das Ergebnis.

Bildet man zuerst den Grenzwert  $D \rightarrow 3$ , erhält man aus (3.8) ohne Schwierigkeiten  $I_3(\mathbf{p}; m_0, m_0)$ . Der Grenzwert  $m_0 \rightarrow 0$  kann nun nicht mehr durchgeführt werden.

### 3.3 Einpunktfunktion, $T < T_C$

Mit diesen Rechenverfahren erhält man dann mittels der Graphen aus Anhang A folgendes Ergebnis für die Einpunktfunktion:

$$\begin{aligned} G_c^{(1)} &= \frac{1}{2}G_{111} + \frac{1}{6}G_{121} + \frac{1}{2}G_{122} + \frac{1}{4}G_{123} + \frac{1}{4}G_{127} + \frac{1}{4}G_{129} + \frac{1}{4}G_{1210} \\ &\quad + \frac{1}{4}G_{1211} + \frac{1}{4}G_{1212} + \frac{1}{4}G_{1213} + \frac{1}{4}G_{1214} + \frac{1}{4}G_{1216} + \frac{1}{4}G_{1217} + \frac{1}{8}G_{1218} \\ &\quad + \mathcal{O}(u_0^{5/2}) \\ &= m_0^{1/2-\varepsilon/2} \sqrt{3u_0} \left\{ \frac{1}{8\pi} + \frac{u_0}{\pi^2} \left[ \frac{1}{1152}(N+5) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{576}(N+2) \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) - \frac{\log 9}{192} \right] + \mathcal{O}(u_0^2) \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$N = 2$  :

$$G_c^{(1)} = m_0^{1/2-\varepsilon/2} \sqrt{3u_0} \left\{ \frac{1}{8\pi} + \frac{u_0}{\pi^2} \left[ \frac{7}{1152} + \frac{1}{144} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \frac{3}{4} \log 9 + \log 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right] + \mathcal{O}(u_0^2) \right\}$$

### 3.4 Zweipunktfunktion des massiven Feldes, $T < T_C$

Für die Zweipunktfunktion erhält man:

#### 3.4.1 Ein-Loop

$$\begin{aligned} u_0 \Sigma_{\sigma\sigma}^{(1)}(p) &= \frac{1}{2} G_{211} + \frac{1}{2} G_{212} + \frac{1}{2} G_{215} + \frac{1}{2} G_{216} \\ &= u_0 \frac{m_0^2}{48\pi} \left( \frac{\pi m_0}{p} (N-1) - 12 + 18 \frac{m_0}{p} \arctan \frac{p}{2m_0} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

#### 3.4.2 Zwei-Loop

Das Integral  $I_6(p)$  (Abschnitt C.4.2, S. 169) konnte nicht analytisch berechnet werden. Deshalb bleibt es in  $\Sigma_{\sigma\sigma}^{(2)}(p)$  zunächst allgemein stehen.

$$\begin{aligned} u_0^2 \Sigma_{\sigma\sigma}^{(2)}(p) &= \sum_{i=221}^{2269} \frac{1}{S_i} G_i(p) \\ &= u_0^2 \frac{m_0^2}{6912\pi^2} \left( -120 + 12N + \pi^2 m_0^4 \left( 31104 I_6(p; m_0, m_0, m_0, m_0, m_0) \right. \right. \\ &\quad + 2304(N-1) I_6(p; m_0, m_0, 0, 0, 0) \\ &\quad + 384(N-1) I_6(p; hm_0, hm_0, m_0, hm_0, hm_0) \Big) \\ &\quad + 24(N+2) \left( -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma - \log 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \frac{m_0^2}{p^2} (11 - 8N + 3N^2) \\ &\quad + \frac{36m_0}{p} (N-1) + 243 \frac{m_0}{p} k_{2263} + 54(N-1) \frac{m_0}{p} k_{2264} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 648 \frac{m_0^2}{4m_0^2 + p^2} - \frac{56\pi m_0}{p} (N-1) - 216 \frac{m_0}{p} \arctan \frac{p}{3m_0} \\
 & + \left( 36(1-N) \frac{m_0^2}{p^2} + 648 \frac{m_0}{p} + 72i\pi(1-N) \frac{m_0}{p} - 648 \frac{m_0}{p} \log 9 \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad \arctan \frac{p}{2m_0} \\
 & - 324 \frac{m_0^2}{p^2} \arctan^2 \frac{p}{2m_0} + 88(N-1) \frac{m_0}{p} \arctan \frac{p}{m_0} \\
 & - 324i \frac{m_0}{p} \text{Di}\left(\frac{p}{m_0}\right) + 36i(N-1) \text{Di}_2\left(\frac{p}{m_0}\right) + 108 \log 9 \\
 & + \left( 12(1-N) + 8(N-1) \frac{m_0^4}{p^4} + 48(1-N) \frac{m_0^2}{p^2} \right) \log \left( 1 + \frac{p^2}{m_0^2} \right) \\
 & - 36 \log \left( 9 + \frac{p^2}{m_0^2} \right) \qquad \qquad \qquad (3.14)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 k_{2263} = & \frac{2}{3(4m_0^2 p + p^3)} \left( 6m_0(2m_0^2 + p^2) \log 3 \right. \\
 & + p(4m_0^2 + p^2)(-4 + \log 27) \text{arccot} \frac{2m_0}{p} \\
 & - (3m_0 - ip)(2m_0 + ip)(m_0 - 2ip) \log \left( 3 - \frac{ip}{m_0} \right) \\
 & - (2m_0 - ip)(3m_0 + ip)(m_0 + 2ip) \log \left( 3 + \frac{ip}{m_0} \right) \Big) \\
 & + i \text{Di} \left( \frac{p}{m_0} \right) \qquad \qquad \qquad (3.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{2264} = & \left( -i\pi \arctan \frac{p}{2m_0} + \frac{4m_0^2 + p^2 + 2im_0^2\pi + ip^2\pi}{4m_0^2 + p^2} \arctan \frac{p}{m_0} \right. \\
 & + \frac{m_0}{p(4m_0^2 + p^2)} (-ip^2 + (2m_0^2 + p^2)) \log \left( 1 + \frac{p^2}{m_0^2} \right) \\
 & \left. + 2i \text{Di}_2 \left( \frac{p}{m_0} \right) \right) \qquad \qquad \qquad (3.16)
 \end{aligned}$$

und den Abkürzungen (D.15) und (D.16),

$$\text{Di}(x) = \text{Li}_2\left(-\frac{i}{3}x\right) - \text{Li}_2\left(\frac{i}{3}x\right) - \text{Li}_2(-2 - ix) + \text{Li}_2(-2 + ix) ,$$

$$\text{Di}_2(x) = -\text{Li}_2(-ix) + \text{Li}_2(ix) - \text{Li}_2(2 - ix) + \text{Li}_2(2 + ix) .$$

### 3.5 Zweipunktfunktion des masselosen Feldes, $T < T_C$

Für die Zweipunktfunktion des masselosen Feldes bei  $p = 0$  erhält man wie erwartet null. Die Berechnung dient vor allem der Kontrolle der Vorfaktoren.

#### 3.5.1 Ein-Loop

$$u_0 \Sigma_{\pi_i \pi_j}^{(1)}(0) = \frac{1}{2} G_{2111} + \frac{1}{2} G_{2113} + G_{2115} = 0 \quad (3.17)$$

$$u_0 \partial_{p^2} \Sigma_{\pi_i \pi_j}^{(1)}(0) = \partial_{p^2} G_{2115}(0) = \frac{1}{36\pi} u_0 \delta_{ij} \quad (3.18)$$

#### 3.5.2 Zwei-Loop

$$u_0^2 \Sigma_{\pi_i \pi_j}^{(2)}(0) = \sum_{k=22101}^{22160} \frac{1}{S_k} G_k(0) = 0 \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} u_0^2 \partial_{p^2} \Sigma_{\pi_i \pi_j}^{(2)}(0) &= \sum_{k=22101}^{22160} \frac{1}{S_k} \partial_{p^2} G_k(0) \\ &= \frac{\delta_{ij}}{1728\pi^2} u_0^2 (-18 + N + 24 \log 3) \end{aligned} \quad (3.20)$$

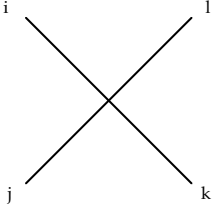
### 3.6 Symmetrische Phase, $T > T_C$

In der symmetrischen Phase sind  $N$  gleiche Feldkomponenten vorhanden.

Der potentielle Anteil von  $H$ , (2.16), lautet dann explizit

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{1}{4!}g_0(\phi^2)^2 = \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{1}{4!}g_0S_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l$$

mit dem  $O(N)$ -symmetrischen Tensor (2.15). Daraus liest man die Feynmanregeln für die Graphen ab.

1.  Dieser Vertex entspricht einem Faktor  $-g_0S_{ijkl}$ .

2.  Dieser Propagator entspricht

$$\Delta_{ij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{p^2 + m_0^2}.$$

Zur Berechnung eines Graphen ist über alle inneren Linien zu summieren. Außerdem müssen bei der Vierpunktfunktion zusätzlich die Permutationen der verschiedenen äußeren Linien berücksichtigt werden.

#### 3.6.1 Zweipunktfunktion, $T > T_C$

$$-\Gamma_{ij}^{(2)} = \delta_{ij} (p^2 + m_0^2) - \Sigma_{ij}(p) \quad (3.21)$$

$$\Sigma_{ij}(p) = u_0\Sigma_{ij}^{(1)}(p) + u_0^2\Sigma_{ij}^{(2)}(p) + \mathcal{O}(u_0^3)$$



### Ein-Loop

$$u_0 \Sigma_{ij}^{(1)}(p) = \frac{1}{2} G_1(p) = \frac{N+2}{24\pi} m_0^2 u_0 \delta_{ij}$$

Weil die Zweipunktfunktion in Ein-Loop-Ordnung gar nicht vom äußeren Impuls abhängt, entfällt die Ableitung hier.

### Zwei-Loop

$$\begin{aligned} u_0^2 \Sigma_{ij}^{(2)}(p) &= \frac{1}{4} G_2(p) + \frac{1}{6} G_3(p) \\ &= \frac{N+2}{1152\pi^2} m_0^2 \delta_{ij} \left( 6 - (N+2) + \frac{2}{\varepsilon} - 2\gamma - 12 \frac{m_0}{p} \arctan \frac{p}{3m_0} \right. \\ &\quad \left. - 2 \log \left( 9 + \frac{p^2}{m_0^2} \right) + 2 \log 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) u_0^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} -\partial_{p^2} \Gamma_{ij}^{(2)}(0) &= \delta_{ij} \left( 1 - \frac{1}{6} \partial_{p^2} G_3(0) + \mathcal{O}(u_0^3) \right) \\ &= \delta_{ij} \left( 1 + \frac{N+2}{15552\pi^2} u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

#### 3.6.2 Vierpunktfunktion, $T > T_C$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijkl}^{(4)}(0) &= G_{411}(0) + \frac{1}{2} G_{412}(0) \\ &\quad + \frac{1}{4} G_{421}(0) + \frac{1}{2} G_{422}(0) + \frac{1}{2} G_{423}(0) + \frac{1}{2} G_{424}(0) \\ &= -S_{ijkl} g_0 \left( 1 - \frac{8+N}{48\pi} u_0 + \frac{47+7N}{1728\pi^2} u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

---

## Ergebnisse mit minimaler Renormierung

---

Im vorigen Kapitel sind die Ein- und Zweipunktfunktionen sowie die symmetrische Vierpunktfunktion bis zur zweiten Ordnung berechnet worden. Jetzt sollen entsprechend der Diskussion in Kapitel 2 die renormierte Masse  $m_\sigma$ , die Magnetisierung und damit die Amplitudenfunktion  $f_\phi$  und die Amplitudenfunktion  $f_{\chi T}$  in Dohms Schema berechnet werden. Außerdem wird der Zusammenhang zwischen der Pseudomasse  $m_p$  und der Masse  $m_\sigma$  hergestellt und an einigen Beispielen angewendet.

### 4.1 Bestimmung der Masse $m_\sigma$

$$-\Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}(p) = p^2 + m_0^2 - \Sigma_{\sigma\sigma}(p)$$

$$\Sigma_{\sigma\sigma}(p) = u_0 \Sigma_{\sigma\sigma}^{(1)}(p) + u_0^2 \Sigma_{\sigma\sigma}^{(2)}(p) + \mathcal{O}(u_0^3)$$

$\Sigma_{\sigma\sigma}^{(1)}(p)$ ,  $\Sigma_{\sigma\sigma}^{(2)}(p)$  sind in Kapitel 3 (3.13), (3.14) berechnet worden.

Die dem Ursprung nächstgelegene Nullstelle von

$$\operatorname{Re} \Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}(p = im_\sigma) = 0$$

definiert implizit die Masse  $m_\sigma$ . Ihre Entwicklung lautet

$$m_\sigma = m_0 \left( 1 + m_\sigma^{(1)} u_0 + m_\sigma^{(2)} u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right) . \quad (4.1)$$

Die Koeffizienten  $m_\sigma^{(1)}$  und  $m_\sigma^{(2)}$  werden durch Einsetzen in  $\Gamma_{\sigma\sigma}$  sukzessive bestimmt.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\sigma}(im_\sigma) &= \left( 2m_0^2 m_\sigma^{(1)} + \Sigma_{\sigma\sigma}^{(1)}(im_0) \right) u_0 \\ &\quad - \left( m_0^2 (m_\sigma^{(1)})^2 + 2m_0^2 m_\sigma^{(2)} + \Sigma_{\sigma\sigma}^{(2)}(im_0) + im_0 m_\sigma^{(1)} \Sigma_{\sigma\sigma}^{(1)'}(im_0) \right) u_0^2 \\ &\quad + \mathcal{O}(u_0^3) \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aus der ersten Ordnung erhält man

$$\begin{aligned} m_\sigma^{(1)} &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{96\pi} \left( 12 + i\pi(N-1) - 18 \operatorname{artanh} \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{16\pi} \left( 2 - \frac{3}{2} \log 3 \right) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Damit kann man nun aus der zweiten Ordnung  $m_\sigma^{(2)}$  berechnen. Außerdem benötigt man dazu  $\Sigma_{\sigma\sigma}^{(2)}(im_0)$ .

$$\begin{aligned} \Sigma_{\sigma\sigma}^{(2)}(im_0) &= \\ &\frac{m_0^2}{27468\pi^2} \left( (-33 + 6N)\pi^2 - (1388 - 144i) + N(80 - 144i) + 7776d_1 \right. \\ &\quad + 288(N-1)d_2 + 96(N-1)d_3 + 12N^2 - \frac{96}{\varepsilon}(N+2) + 96(N+2)\gamma \\ &\quad + 224i\pi(N-1) + (2000 + 448N) \log 2 + (-432 + 72i(N-1)) \log 3 \\ &\quad + (72i(N-1))\pi \log 3 - 1944 \log^2 3 - 96(N+2) \log \pi \\ &\quad + 162\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 648\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + (252 + 72N)\operatorname{Li}_2(3) - 162\operatorname{Li}_2(9) \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dabei sind  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  numerische Konstanten, die sich aus der Berechnung von Integral  $I_6$  für den Fall  $p = im_0$  ergeben (vgl. Abschnitt C.4.2).

Man erhält dann

$$\begin{aligned}
 m_\sigma^{(2)} = & \frac{1}{55296\pi^2} \left( (33 - 6N)\pi^2 + 92 - 80N - 7776d_1 - 288(N - 1)\text{Re } d_2 \right. \\
 & - 96(N - 1)\text{Re } d_3 - 12N^2 + \frac{96}{\varepsilon}(N + 2) - 96(N + 2)\gamma \\
 & - (2000 + 448N)\log 2 + 2376\log 3 + 1215\log^2 3 + (192 + 96N)\log \pi \\
 & - 162\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) + 648\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Re}(-(252 + 72N)\text{Li}_2(3) + 162\text{Li}_2(9)) \\
 & \left. + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Im folgenden wird die Masse  $m_0$ , ausgedrückt durch Masse  $m_\sigma$ , benötigt. Die Entwicklung wird mit

$$\begin{aligned}
 m_0 &= m_\sigma \left\{ 1 + m_0^{(1)}u_0 + m_0^{(2)}u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \\
 m_0^{(1)} &= -m_\sigma^{(1)} \\
 m_0^{(2)} &= (m_\sigma^{(1)})^2 - m_\sigma^{(2)}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

bezeichnet.

### 4.2 Renormierter Vakuumerwartungswert $\hat{v}_R$ und Amplitudenfunktion $f_\phi$

Gemäß (2.21),

$$v_0 = v_{\min} + G_c^{(1)},$$

erhält man  $v_0$  aus der Einpunktfunktion  $G_c^{(1)}$ , (3.12), aus Kapitel 3. Es ist zweckmäßig, das Quadrat von  $v_0$  zu betrachten. (Siehe auch Kapitel 2.) Um nicht unnötig viele Bezeichnungen einzuführen, bezeichnen  $v_0^{(1)}$  und  $v_0^{(2)}$  im folgenden die Koeffizienten der Entwicklung von  $v_0^2$ .

$$v_0^2 = \frac{3m_0^{(1-\varepsilon)}}{u_0} \left\{ 1 + v_0^{(1)}u_0 + v_0^{(2)}u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\}$$

mit

$$\begin{aligned} v_0^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \\ v_0^{(2)} &= \frac{1}{576\pi^2} \left( 14 + N + \frac{4 + 2N}{\varepsilon} - (4 + 2N)\gamma - 6 \log 9 \right. \\ &\quad \left. + (4 + 2N) \log 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Zunächst wird  $m_0$  durch  $m_\sigma$  ersetzt.

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \frac{3m_\sigma^{(1-\varepsilon)}}{u_0} \\ &\quad \left\{ 1 + (m_0^{(1)} + v_0^{(1)})u_0 + (m_0^{(2)} - \varepsilon m_0^{(2)} + m_0^{(1)}v_0^{(1)} + v_0^{(2)})u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \end{aligned}$$

Ebenso muß  $m_0$  in der Kopplung  $u_0$  ersetzt werden.

$$u_0 = \frac{g_0}{m_0^{1+\varepsilon}} = \frac{g_0}{m_\sigma^{1+\varepsilon}} \left\{ 1 + m_0^{(1)}u_0 + m_0^{(2)}u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\}^{-1-\varepsilon} \quad (4.7)$$

$$= u \left\{ 1 + m_\sigma^{(1)}u_0 + (m_\sigma^{(2)} + \varepsilon m_\sigma^{(2)})u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \quad (4.8)$$

Iterieren der Gleichung liefert

$$\begin{aligned} u_0 &= u \left\{ 1 + m_\sigma^{(1)}u + (m_\sigma^{(2)} + \varepsilon m_\sigma^{(2)} + (m_\sigma^{(1)})^2)u^2 + \mathcal{O}(u^3) \right\} \\ &=: u \left\{ 1 + u^{(1)}u + u^{(2)}u^2 + \mathcal{O}(u^3) \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Man erhält

$$u^{(1)} = \frac{4 - 3 \log 3}{32\pi} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \\ &\frac{1}{55296\pi^2} \left( (33 - 6N)\pi^2 + 1148 + 16N - 7776d_1 - 288(N - 1)\text{Re } d_2 \right. \\ &\quad - 96(N - 1)\text{Re } d_3 - 12N^2 + \frac{96}{\varepsilon}(N + 2) - 96(N + 2)\gamma \\ &\quad - (2000 + 448N) \log 2 + 1080 \log 3 + 1701 \log^2 3 + (192 + 96N) \log \pi \\ &\quad \left. - 162\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) + 648\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Re}(-(252 + 72N)\text{Li}_2(3) + 162\text{Li}_2(9)) \right) \end{aligned}$$

$$+ \mathcal{O}(\varepsilon) \Big) . \quad (4.11)$$

Setzt man dies alles in  $v_0^2$  ein, erhält man

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \frac{3m_\sigma^{1-\varepsilon}}{u} \left\{ 1 + (m_0^{(1)} - u^{(1)} + v_0^{(1)})u \right. \\ &\quad \left. + (m_0^{(2)} - \varepsilon m_0^{(2)} + (u^{(1)})^2 + m_0^{(1)}v_0^{(1)} + v_0^{(2)})u^2 + \mathcal{O}(u^3) \right\} \\ &=: \frac{3m_\sigma^{1-\varepsilon}}{u} \left\{ 1 + v_0^{(1)'}u + v_0^{(2)'}u^2 + \mathcal{O}(u^3) \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

mit

$$v_0^{(1)'} = \frac{3 \log 3}{16\pi} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} v_0^{(2)'} &= \frac{1}{27648\pi^2} \left( (6N - 33)\pi^2 + 148 + 128N + 12N^2 \right. \\ &\quad + 7776d_1 + (N - 1)288\operatorname{Re} d_2 + (N - 1)96\operatorname{Re} d_3 - 3456\pi \\ &\quad + (640N - 2384)\log 2 - 2952\log 3 - 972\log^2 3 \\ &\quad \left. + 162\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 648\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{Re}((72N + 252)\operatorname{Li}_2(3) - 162\operatorname{Li}_2(9)) \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Der Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  ist bereits durchgeführt, weil der Pol entfernt ist, und es muß jetzt noch die Renormierung der Kopplung und des Feldes durchgeführt werden.

$$u = 4\pi \frac{\hat{Z}_g(\hat{\lambda}_\sigma)}{\hat{Z}_\phi^2(\hat{\lambda}_\sigma)} \hat{\lambda}_\sigma$$

$$\hat{v}_R^2 = \frac{1}{\hat{Z}_\phi(\hat{\lambda}_\sigma)} v_0^2(u(\hat{\lambda}_\sigma))$$

Das Endergebnis ist

$$\begin{aligned} \hat{v}_R^2 &= \frac{3m_\sigma}{4\pi\hat{\lambda}_\sigma} \\ &\quad \left\{ 1 + \left( -\frac{4}{3} - \frac{N}{6} + \frac{3 \log 3}{4} \right) \hat{\lambda}_\sigma \right\} \end{aligned}$$

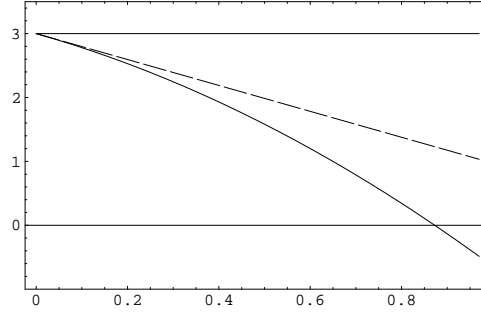


Abbildung 4.1: Graph von  $4\pi\hat{\lambda}_\sigma f_\phi$  für  $N = 1$  als Funktion von  $\hat{\lambda}_\sigma$  in erster (gestrichelt) und zweiter (durchgezogen) Ordnung. Der Fixpunkt für  $N = 1$  befindet sich bei  $\hat{\lambda}_\sigma = 0.97$ .

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{1728} \left( 1180 + 356N + 7776d_1 + 288(N-1)\text{Re } d_2 + 96(N-1)\text{Re } d_3 \right. \\
 & + 12N^2 + (-33 + 6N)\pi^2 + (2384 + 640N)\log 2 - 2952\log 3 - 972\log^2 3 \\
 & + 162\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 648\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Re}((252 + 72N)\text{Li}_2(3) - 162\text{Li}_2(9)) \Big) \hat{\lambda}_\sigma^2 \\
 & \left. + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\sigma^3) \right\} \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

bzw. für  $N = 2$

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_R^2 = & \frac{3m_\sigma}{4\pi\hat{\lambda}_\sigma} \left\{ 1 + \left( -\frac{5}{3} + \frac{3\log 3}{4} \right) \hat{\lambda}_\sigma + \frac{1}{1728} \left( 1940 + 7776d_1 + \text{Re}(288d_2 \right. \right. \\
 & + 96d_3) - 21\pi^2 + 3664\log 2 - 2952\log 3 - 972\log^2 3 + 162\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) \\
 & \left. \left. - 648\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) - \text{Re}(-396\text{Li}_2(3) - 162\text{Li}_2(9)) \right) \hat{\lambda}_\sigma^2 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\sigma^3) \right\}. \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Weil  $f_\phi = \hat{v}_R^2/m_\sigma$  ist, hat man damit auch  $f_\phi$  erhalten. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Numerisch lautet es

$$\begin{aligned}
 f_\phi = & \frac{3}{4\pi\hat{\lambda}_R} \left\{ 1 - (0.509 + 0.167N)\hat{\lambda}_\sigma \right. \\
 & \left. + 0.00694(-2.50 + N)(41.1 + N)\hat{\lambda}_\sigma^2 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\sigma^3) \right\}. \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

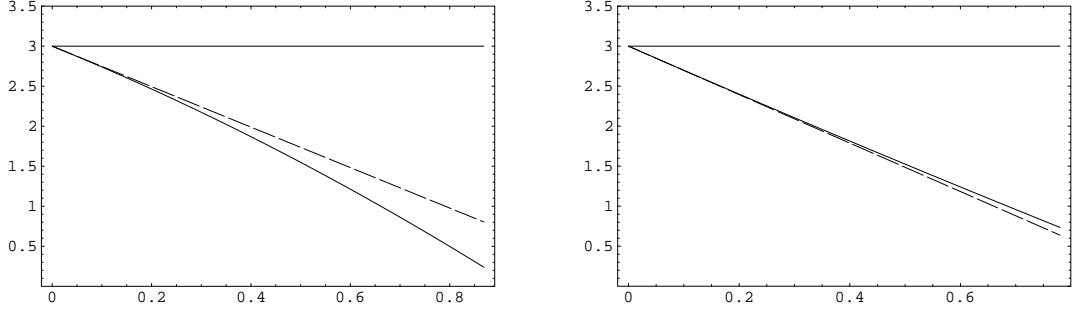


Abbildung 4.2: Graphen von  $4\pi\hat{\lambda}_\sigma f_\phi$  für  $N = 2$  (links) und  $N = 3$  (rechts) als Funktion von  $\hat{\lambda}_\sigma$  in erster (gestrichelt) und zweiter (durchgezogen) Ordnung. Der Fixpunkt für  $N = 2$  bzw.  $N = 3$  befindet sich bei  $\hat{\lambda}_\sigma = 0.87$  bzw.  $\hat{\lambda}_\sigma = 0.78$ .

Abbildung 4.1 kann man mit Abbildung 2.2 auf Seite 37 vergleichen. Dort ist  $f_\phi$  mit der renormierten Masse  $m_R$  für  $N = 1$  abgebildet. In Abbildung 2.3 ist  $f_\phi$  mit der Pseudomasse  $m_p$  dargestellt. Auffällig ist hier vor allem der Unterschied durch die fehlende erste Ordnung bei Verwendung der Pseudomasse  $m_p$ .

### 4.3 Amplitudenfunktionen $f_{\chi T}$ und $G$

Die Amplitudenfunktion  $f_{\chi T}$  ist definiert als die Ableitung der inversen transversalen Suszeptibilität nach  $p^2$  [SD90]. Weil  $\chi_T = -1/\Gamma_{\pi\pi}^{(2)}(0)$  ist, folgt

$$f_{\chi T} = -\partial_{p^2} \hat{\Gamma}_{\pi\pi,R}^{(2)}(p=0). \quad (4.18)$$

$\hat{\Gamma}_{\pi\pi,R}^{(2)}$  erhält man mittels der minimalen Renormierung (2.44).

Aus Kapitel 3 ist die Ableitung von  $\Gamma_{\pi\pi}^{(2)}$  bekannt ((3.18), (3.20)).

$$-\partial_{p^2} \Gamma_{\pi\pi}^{(2)}(p=0) = 1 - u_0 \partial_{p^2} \Sigma_{\pi\pi}^{(1)} - u_0^2 \partial_{p^2} \Sigma_{\pi\pi}^{(2)} + \mathcal{O}(u_0^3)$$

Ersetzt man hier wie im vorigen Abschnitt  $u_0$  durch  $u$ , so erhält man

$$\begin{aligned} -\partial_{p^2} \Gamma_{\pi\pi}^{(2)}(p=0, u) &= 1 + \frac{1}{36\pi} u \\ &\quad + \frac{1}{3456\pi^2} (48 - 2N - 57 \log 3) u^2 + \mathcal{O}(u^3) . \end{aligned}$$



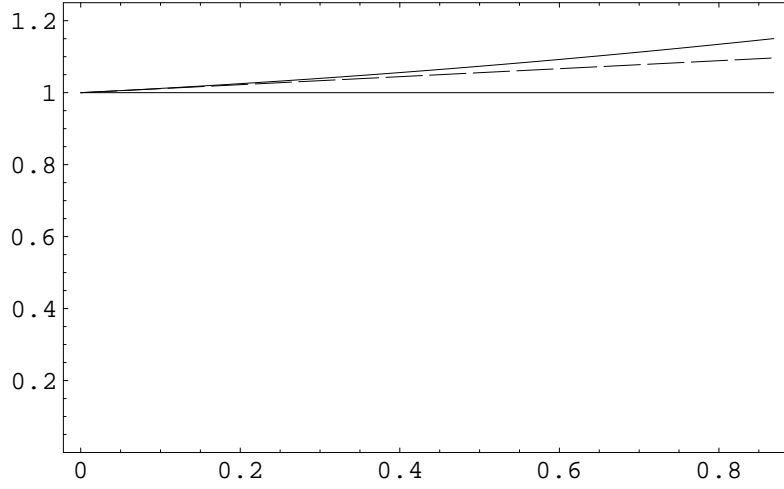


Abbildung 4.3: Graph von  $f_{\chi T}$  für  $N = 2$  in erster (gestrichelt) und zweiter Ordnung als Funktion von  $\hat{\lambda}_\sigma$ . Der  $N = 2$ -Fixpunkt befindet sich bei  $\hat{\lambda}_\sigma = 0.87$ .

$\hat{\lambda}_\sigma$  ist ebenfalls im vorigen Abschnitt bereits berechnet worden, so daß man damit direkt das Ergebnis angeben kann.

$$\begin{aligned} -\partial_{p^2} \hat{\Gamma}_{\pi\pi,R}^{(2)} &= -\hat{Z}_\phi \partial_{p^2} \Gamma_{\pi\pi}^{(2)}(p=0, u(\hat{\lambda}_\sigma)) \\ &= 1 + \frac{1}{9} \hat{\lambda}_\sigma + \frac{1}{432} (154 + N - 114 \log 3) \hat{\lambda}_\sigma^2 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\sigma^3) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dies entspricht  $f_{\chi T}$ . Für  $N = 2$  ist  $f_{\chi T}$  in Abbildung 4.3 dargestellt.

Aus  $f_{\chi T}$  kann man nach [BSD97] zusammen mit  $f_\phi$  leicht die Amplitude des sogenannten Helizitätsmoduls berechnen. Definiert man den Helizitätsmodul mittels der Gibbsschen freien Energie  $\Gamma$  als

$$\Upsilon = 2\partial_{p^2} \Gamma(p; m_0, g_0) \Big|_{p=0}, \quad (4.20)$$

so erhält man in drei Dimensionen

$$\Upsilon_R = \frac{1}{4\pi} \mu G(\hat{\lambda}_\mu). \quad (4.21)$$

In [BSD97] wird gezeigt, daß für  $G$  zumindest bis zur zweiten Ordnung

$$G = 4\pi f_\phi f_{\chi T} \quad (4.22)$$

gilt. Damit erhält man sofort aus (4.15) und (4.19)

$$\begin{aligned}
 G = & \frac{3}{\hat{\lambda}_\sigma} \\
 & \left\{ 1 + \frac{1}{36} (-44 - 6N + 27 \log 3) \hat{\lambda}_\sigma \right. \\
 & + \frac{1}{1728} \left( 1540 + 356N + 7776d_1 + 288(N-1)\text{Re } d_2 + 96(N-1)\text{Re } d_3 \right. \\
 & + 12N^2 + (-33 + 6N)\pi^2 + (2384 + 640N) \log 2 + (-3264) \log 3 \\
 & - 972 \log^2 3 + 162\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 648\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) \\
 & \left. + \text{Re}((252 + 72N)\text{Li}_2(3) - 162\text{Li}_2(9)) \right) \hat{\lambda}_\sigma^2 + \mathcal{O}\left(\hat{\lambda}_\sigma^3\right) \left. \right\}. \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

#### 4.4 Beziehung zwischen $m_\sigma$ und $m_p$

Die Masse  $m_\sigma$  ist durch (4.1) gegeben.

$$m_\sigma = m_0 \left\{ 1 + m_\sigma^{(1)} u_0 + m_\sigma^{(2)} u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\}$$

Weil die Pseudomasse  $m_p$  nur im Bezug auf die Masse  $m'_0$  bekannt ist [Str96],

$$\begin{aligned}
 m'_0 &= m_p \left\{ 1 + m_p^{(1)} \frac{g_0}{m_p} + m_p^{(2)} \frac{g_0^2}{m_p^2} + \mathcal{O}(g_0^3) \right\} \quad (4.24) \\
 m_p^{(1)} &= \frac{2 + N}{48\pi} \\
 m_p^{(2)} &= \frac{2 + N}{124416\pi^2} \left( 1439 + 27N + 432 \log \frac{g_0}{m_p} \right),
 \end{aligned}$$

wird zunächst  $m_\sigma$  durch  $m'_0$  ausgedrückt. Außerdem kann man im folgenden dann technisch vorteilhaft direkt bei festem  $D = 3$  rechnen. Die Massensubtraktion (2.70) liefert

$$\begin{aligned}
 m_\sigma &= m'_0 \left\{ 1 + m_\sigma'^{(1)} u'_0 + m_\sigma'^{(2)} u_0'^2 + \mathcal{O}(u_0'^3) \right\} \quad (4.25) \\
 m_\sigma'^{(1)} &= m_\sigma^{(1)} \\
 m_\sigma'^{(2)} &= \frac{1}{55296\pi^2} \left( (33 - 6N)\pi^2 - 100 - 176N - 7776d_1 \right. \\
 &\quad \left. - 288(N-1)\text{Re } d_2 - 96(N-1)\text{Re } d_3 - 12N^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (2384 + 640N) \log 2 + (2760 + 192N) \log 3 + 1215 \log^2 3 \\
 & + (348 + 192N) \log u'_0 - 162 \text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) + 648 \text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) \\
 & - \text{Re} \left( (252 + 72N) \text{Li}_2(3) - 162 \text{Li}_2(9) \right) .
 \end{aligned}$$

Setzt man  $m'_0$  (4.24) in  $m_\sigma$  (4.25) ein, so erhält man

$$m_\sigma = m_p \left\{ 1 + (m_p^{(1)} + m_\sigma'^{(1)}) \frac{g_0}{m_p} + (m_p^{(2)} + m_\sigma'^{(2)}) \frac{g_0^2}{m_p^2} + \mathcal{O}(g_0^3) \right\}$$

bzw. nach Invertieren

$$m_p = m_\sigma \left\{ 1 + (-m_p^{(1)} - m_\sigma'^{(1)}) \frac{g_0}{m_\sigma} + (-m_p^{(2)} - m_\sigma'^{(2)}) \frac{g_0^2}{m_\sigma^2} + \mathcal{O}(g_0^3) \right\}. \quad (4.26)$$

Diese Beziehung kann man jetzt mittels der minimal renormierten Kopplung

$$g_0 = 4\pi m_\sigma \hat{\lambda}_\sigma \frac{\hat{Z}_g(\hat{\lambda}_\sigma)}{\hat{Z}_\phi^2(\hat{\lambda}_\sigma)} \quad (4.27)$$

und durch Einsetzen der entsprechenden  $Z$ -Faktoren durch die renormierte Kopplung  $\hat{\lambda}_\sigma$  ausdrücken.

$$\begin{aligned}
 m_p = m_\sigma \left\{ 1 + 4\pi (-m_p^{(1)} - m_\sigma'^{(1)}) \hat{\lambda}_\sigma \right. \\
 \left. + 16\pi^2 \left( -m_p^{(2)} - m_\sigma'^{(2)} - \frac{N+8}{6} \frac{1}{4\pi} (m_p^{(1)} + m_\sigma^{(1)}) \right) \hat{\lambda}_\sigma^2 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\sigma^3) \right\} \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

Um die Massen in renormierten Ergebnissen zu ersetzen, muß die renormierte Kopplung  $\hat{\lambda}_p$  ebenfalls substituiert werden. Analog zur Definition der minimal renormierten Kopplung  $\lambda_\sigma$ , (4.27), gilt für  $\lambda_p$

$$g_0 = 4\pi m_p \hat{\lambda}_p \frac{\hat{Z}_g(\hat{\lambda}_p)}{\hat{Z}_\phi^2(\hat{\lambda}_p)}, \quad (4.29)$$

so daß

$$\hat{\lambda}_p = \frac{m_\sigma}{m_p} \hat{\lambda}_\sigma \frac{\frac{\hat{Z}_g(\hat{\lambda}_\sigma)}{\hat{Z}_\phi^2(\hat{\lambda}_\sigma)}}{\frac{\hat{Z}_g(\hat{\lambda}_p)}{\hat{Z}_\phi^2(\hat{\lambda}_p)}}.$$

## 4 Ergebnisse mit minimaler Renormierung

---

Die Kopplung  $\hat{\lambda}_p$  in dem Quotienten der  $Z$ -Faktoren muß iterativ eingesetzt werden, um  $\hat{\lambda}_p$  als Funktion von  $\hat{\lambda}_\sigma$  zu erhalten. Man findet bis zur zweiten Ordnung folgendes Ergebnis:

$$\hat{\lambda}_p = \frac{m_\sigma}{m_p} \hat{\lambda}_\sigma \left\{ 1 - \hat{\lambda}_\sigma^2 4\pi \frac{N+8}{6} (m_p^{(1)} + m_\sigma'^{(1)}) + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\sigma^3) \right\}. \quad (4.30)$$

Durch Invertieren von (4.28) erhält man  $\frac{m_\sigma}{m_p}$ , so daß man insgesamt

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_p = \hat{\lambda}_\sigma & \left\{ 1 + 4\pi (m_p^{(1)} + m_\sigma'^{(1)}) \hat{\lambda}_\sigma \right. \\ & \left. + 16\pi^2 \left( m_p^{(2)} + m_\sigma'^{(2)} + (m_p^{(1)} + m_\sigma'^{(1)})^2 \right) \hat{\lambda}_\sigma^2 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\sigma^3) \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

erhält.

Damit kann man nun die Ergebnisse, die mit der Pseudomasse berechnet wurden, mit der Masse  $m_\sigma$  ausdrücken.

Als erstes Beispiel dient  $f_\phi$  aus [BSD97]:

$$f_\phi(\hat{\lambda}_p) = \frac{3}{4\pi\hat{\lambda}_p} + \left( \frac{1}{27\pi} (160 - 82N) + \frac{2}{\pi} (N-1) \log 3 \right) \frac{\hat{\lambda}_p}{24} + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_p^2).$$

Hier kann man durch Einsetzen von (4.28) und (4.31) direkt  $f_\phi$ , (4.15), erhalten, wenn man zusätzlich noch berücksichtigt, daß sich die beiden  $f_\phi$  noch um einen weiteren Faktor  $\frac{m_\sigma}{m_p}$  unterscheiden, weil die jeweilige Masse auch als Vorfaktor des Quadrats der Magnetisierung,  $\hat{v}_R^2$ , auftritt.

Als zweites Beispiel wird  $f_{\chi T}$  aus [BSD97] verglichen:

$$f_{\chi T} = 1 + \frac{1}{9} \hat{\lambda}_p + \frac{1}{432} (122 - 3N - 96 \log 3) \hat{\lambda}_p^2 + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_p^3).$$

Auch hier erhält man durch Einsetzen von (4.28) und (4.31) direkt  $f_{\chi T}(\hat{\lambda}_\sigma)$ , (4.19). Weil  $\partial_{p^2} \Gamma_{\pi\pi}^{(2)}$  dimensionslos ist, muß bei dieser Amplitudenfunktion kein zusätzlicher Vorfaktor berücksichtigt werden.

Als Anwendung soll die Amplitudenfunktion  $\hat{F}_-$  der spezifischen Wärme unterhalb der kritischen Temperatur berechnet werden. Die spezifische Wärme läßt sich aus der freien Energie oder aus der Vertexfunktion  $\Gamma^{(0,2)}$  mit  $\phi^2$ -Insertion gewinnen. Beides sind Größen, die in dieser Arbeit nicht betrachtet werden. Man kann nun

wiederum das Ergebnis aus [BSD97] verwenden und die Masse  $m_\sigma$  einsetzen. Es gilt demnach in drei Dimensionen

$$\Gamma_-^{(0,2)}(m_p, \hat{\lambda}_p) = -\frac{1}{16\pi} m_p \hat{F}_-(m_p, \hat{\lambda}_p) \quad (4.32)$$

und

$$\hat{F}_-(\hat{\lambda}_p) = \frac{12}{\hat{\lambda}_p} - 4 + \frac{1}{3}(10 - N)\hat{\lambda}_p + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_p^2) . \quad (4.33)$$

Also ist

$$\hat{F}_-(\hat{\lambda}_\sigma) = \frac{m_p}{m_\sigma} \hat{F}_-(\hat{\lambda}_p(\hat{\lambda}_\sigma)) .$$

Durch Einsetzen von (4.28) und (4.31) erhält man

$$\begin{aligned} \hat{F}_-(\hat{\lambda}_\sigma) = & \frac{12}{\hat{\lambda}_\sigma} + (9 \log 3 - 20 - 2N) + \frac{1}{1296} \left( 13276 + 69984d_1 \right. \\ & + 2592(N-1)\text{Re } d_2 + 864(N-1)\text{Re } d_3 + 5828N + 108N^2 \\ & + (-297 + 54N)\pi^2 + 21456 \log 2 + (-26784 - 1728N) \log 3 \\ & - 8748 \log^2 3 + 1458\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 5832\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) \\ & \left. + \text{Re}((2268 + 648N)\text{Li}_2(3) - 1458\text{Li}_2(9)) \right) \hat{\lambda}_\sigma + \mathcal{O}(\hat{\lambda}_\sigma^2) . \end{aligned} \quad (4.34)$$

## KAPITEL 5

---

### Ergebnisse mit Renormierungsbedingungen

---

In diesem Kapitel werden die Berechnungen aus Kapitel 3 und die Masse  $m_\sigma$  verwendet, um im Schema der Renormierungsbedingungen einige renormierte Größen auszurechnen und das universelle Amplitudenverhältnis der longitudinalen und der transversalen Korrelationslänge zu bestimmen.

#### 5.1 Renormierung in der symmetrischen Phase, $T > T_C$

Im Schema der Renormierungsbedingungen gilt nach (2.25) für den Feldrenormierungsfaktor  $Z_{\phi+}$  mit (3.23)

$$Z_{\phi+} = - \left( \partial_{p^2} \Gamma^{(2)}(0) \right)^{-1} = 1 - \frac{N+2}{15552\pi^2} u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \quad (5.1)$$

und für die renormierte Kopplung (2.28)

$$g_R = -Z_{\phi+}^2 \Gamma^{(4)}(0) = g_0 \left\{ 1 - \frac{8+N}{48\pi} u_0 + \frac{419+61N}{15552\pi^2} u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} . \quad (5.2)$$

Die renormierte Masse erhält man mittels (2.26) aus (3.22).

$$m_R^2 = -Z_{\phi+}\Gamma^{(2)}(0) = m_0^2 \left\{ 1 - \frac{N+2}{24\pi}u_0 + \frac{1}{31104\pi^2} \left[ -4 - 2N \right. \right. \\ \left. \left. + 27(N+2) \left( N+2 \left( -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma - \log 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) - \log 81 \right) \right] u_0^2 \right. \\ \left. + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \quad (5.3)$$

$$=: m_0^2 \left\{ 1 + m_R^{(1)}u_0 + m_R^{(1)}u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \quad (5.4)$$

Für  $N = 1$  stimmen diese Resultate mit denen in [Hei93] und [Küs95] überein.

Hieraus kann nun die dimensionslose renormierte Kopplung  $u_R = \frac{g_R}{m_R^{1+\varepsilon}}$  berechnet werden, wobei der  $\varepsilon$ -abhängige Beitrag zur zweiten Ordnung von  $m_R^{1+\varepsilon}$  berücksichtigt werden muß.

$$u_R = u_0 \left\{ 1 - \frac{u_0}{8\pi} + \frac{1}{41472\pi^2} \right. \\ \left. \left[ 1012 + 92N - 9N^2 + (72 + 36N) \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log 9 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right] u_0^2 \right. \\ \left. + \mathcal{O}(u_0^3) \right\}$$

Durch Umkehrung und Iteration erhält man

$$u_0 = u_R \left\{ 1 + \frac{u_R}{8\pi} + \frac{1}{41472\pi^2} \right. \\ \left. \left[ 284 - 92N + 9N^2 - (72 + 36N) \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log 9 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right] u_R^2 \right. \\ \left. + \mathcal{O}(u_R^3) \right\}. \quad (5.5)$$

Analog zur Masse  $m_\sigma$  in der Tieftemperaturphase kann man auch in der symmetrischen Phase eine Masse

$$m_{\sigma+} = m_0 \left\{ 1 + m_{\sigma+}^{(1)}u_0 + m_{\sigma+}^{(2)}u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \quad (5.6)$$

durch die komplexe Nullstelle der Zweipunktfunktion definieren.

$$\operatorname{Re} \Gamma^{(2)}(p = im_{\sigma+}) = 0$$

Indem man in Gleichung (4.1)  $m_{\sigma+}$  statt  $m_{\sigma}$  verwendet, erhält man formal genau analog zu (4.2) mit  $\Gamma^{(2)}$  statt  $\Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}$

$$m_{\sigma+}^{(1)} = -\frac{N+2}{48\pi} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} m_{\sigma+}^{(2)} = & \frac{1}{4608\pi^2} \left( -20 - 8N + N^2 \right. \\ & \left. + 4(N+2) \left( -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma + 4\log 2 - \log \pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Mit dieser Masse kann man ebenfalls eine renormierte Kopplung

$$\begin{aligned} u_{\sigma+} := \frac{g_R}{m_{\sigma+}^{1+\varepsilon}} = u_0 \left\{ 1 - \frac{1}{8\pi} u_0 + \frac{1}{124416\pi^2} \left( 3460 - 488N - 27N^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 108(N+2) \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \log 2 + \log \pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

bzw. ihre Umkehrung berechnen.

$$\begin{aligned} u_0 = u_{\sigma+} \left\{ 1 + \frac{1}{8\pi} u_{\sigma+} + \frac{1}{124416\pi^2} \left( 428 - 488N + 27N^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 108(N+2) \left( -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma + 4\log 2 - \log \pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) u_{\sigma+}^2 \right. \\ \left. + \mathcal{O}(u_{\sigma+}^3) \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Man stellt fest, daß sowohl  $m_{\sigma+}$  als auch  $u_{\sigma+}$  bis zur ersten Ordnung identisch mit  $m_R$  bzw.  $u_R$  sind.



## 5.2 Renormierung in der Phase gebrochener Symmetrie, $T < T_C$

Mit

$$-\partial_{p^2}\Gamma_{\pi_i\pi_j}^{(2)}(0) = \delta_{ij} - \partial_{p^2}\Sigma_{\pi_i\pi_j}^{(1)}(0)u_0 - \partial_{p^2}\Sigma_{\pi_i\pi_j}^{(2)}(0)u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3)$$

erhält man gemäß den Renormierungsbedingungen (2.35)  $Z_\pi$ .

$$\begin{aligned} Z_\pi(u_0) &= -(\partial_{p^2}\Gamma_{\pi\pi}^{(2)}(p=0, u_0, m_0))^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{36\pi}u_0 + \frac{1}{5184\pi^2}(-50 + 3N + 72\log 3)u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Damit berechnet man nach (2.36) das Quadrat der renormierten Magnetisierung.

$$\begin{aligned} v_R^2 &= \frac{1}{Z_\pi(u_0)}v_0^2(u_0) \\ &= \frac{3m_0^{1-\varepsilon}}{u_0} \left\{ 1 + \frac{5}{18\pi}u_0 + \frac{1}{864\pi^2} \left( 36 + N - 5\log 3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (6 + 3N) \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Daraus ergibt sich die renormierte Kopplung  $g_R$ , (2.37).

$$g_R = 3 \frac{m_\sigma^2(u_0)}{v_R^2(u_0)} = m_0^{1+\varepsilon} u_0 \left\{ 1 + g_R^{(1)}u_0 + g_R^{(2)}u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \quad (5.13)$$

$$g_R^{(1)} = -\frac{4 + 27\log 3}{144\pi}$$

$$\begin{aligned} g_R^{(2)} &= \\ &= -\frac{1}{82944\pi^2} \left( 1244 + 23328d_1 + 864(N-1)\operatorname{Re} d_2 + 288(-1+N)\operatorname{Re} d_3 \right. \\ &\quad + 336N + 36N^2 - 99\pi^2 + 18N\pi^2 + (7152 + 1920N)\log 2 - 12384\log 3 \\ &\quad - 4374\log^2 3 \\ &\quad \left. + 486\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 1944\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) - \operatorname{Re}((216N - 756)\operatorname{Li}_2(3) - 486\operatorname{Li}_2(9)) \right) \end{aligned}$$

## 5 Ergebnisse mit Renormierungsbedingungen

---

Für die dimensionslose renormierte Kopplung  $u_R$  erhält man mit der Masse  $m_\sigma$

$$u_R = \frac{g_R}{m_\sigma^{1+\varepsilon}} = u_0 \left\{ 1 + (g_R^{(1)} - m_\sigma^{(1)})u_0 + (g_R^{(2)} - g_R^{(1)}m_\sigma^{(1)} + (m_\sigma^{(1)})^2 - m_\sigma^{(2)} - \varepsilon m_\sigma^{(2)})u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\}.$$

Invertieren und Iterieren der Gleichung liefert  $u_0$  in  $u_R$  entwickelt.

$$\begin{aligned} u_0 = u_R & \left\{ 1 + \frac{44 + 27 \log 3}{288\pi} u_R + \frac{u_R^2}{165888\pi^2} \left( 7916 + 23328d_1 \right. \right. \\ & + 864(N-1)\text{Re } d_2 + 288(-1+N)\text{Re } d_3 + 720N + 36N^2 \\ & + (576 + 288N) \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log \pi \right) - 99\pi^2 + 18N\pi^2 \\ & + (8304 + 2496N) \log 2 - 7704 \log 3 - 729 \log^2 3 \\ & + 486\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 1944\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Re}(756 + 216N)\text{Li}_2(3) - 486\text{Li}_2(9) \Big) \\ & \left. + \mathcal{O}(u_R^3) \right\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nun kann noch die Kopplung  $u$  (2.38) berechnet werden.

$$\begin{aligned} u &= \frac{g_0}{m_\sigma^{1+\varepsilon}} = \frac{u_0 m_0^{1+\varepsilon}}{m_\sigma^{1+\varepsilon}} \stackrel{(5.13)}{=} \frac{g_R}{m_\sigma^{1+\varepsilon}} \left\{ 1 + g_R^{(1)}u_0 + g_R^{(2)}u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\}^{-1} \\ &= u_R \left\{ 1 - g_R^{(1)}u_0 + ((g_R^{(1)})^2 - g_R^{(2)})u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \end{aligned}$$

Setzt man die Koeffizienten ein und ersetzt noch  $u_0$  durch  $u_R$  mittels (5.14), so erhält man

$$\begin{aligned} u &= u_R \left\{ 1 + \frac{4 + 27 \log 3}{144\pi} u_R + \frac{u_R^2}{82944\pi^2} \left( 1660 + 23328d_1 \right. \right. \\ & + 864(N-1)\text{Re } d_2 + 288(-1+N)\text{Re } d_3 + 336N + 36N^2 \\ & + (-99 + 18N)\pi^2 + (7152 + 1920N) \log 2 - 8928 \log 3 \\ & + 486\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 1944\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Re}((756 + 216N)\text{Li}_2(3) - 486\text{Li}_2(9)) \Big) \\ & \left. + \mathcal{O}(u_R^3) \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

### 5.3 Berechnung der Renormierungsgruppenfunktionen

Im Schema der Renormierungsbedingungen kann das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge nach der Methode von [Hei93], [MH94], [GKM96] und [Luc95] berechnet werden. Man definiert die Funktionen

$$F_+(u_{R+}) = \partial_{m_0^2} m_{R+}^2, \quad F_\sigma(u_{R-}) = \partial_{m_0^2} m_\sigma^2, \quad F_T(u_{R+}) = \partial_{m_0^2} m_T^2. \quad (5.16)$$

Daraus ergeben sich die Amplitudenverhältnisse dann als

$$\frac{f_+}{f_\sigma} = \left( 2 \frac{F_\sigma(u_{R-})}{F_+(u_{R+})} \right)^\nu, \quad \frac{f_+}{f_T} = \left( 2 \frac{F_T(u_{R-})}{F_+(u_{R+})} \right)^\nu \quad (5.17)$$

mit dem kritischen Exponenten der Korrelationslänge,  $\nu$ . Um den Quotienten auswerten zu können, müssen die beiden Reihen in einer Kopplung ausgedrückt werden, die beiden Phasen gemeinsam ist. Deshalb wird eine Kopplung  $\bar{u}$  konstruiert, durch die man  $u_{R+}$  oder  $u_{R-}$  ausdrücken kann, so daß der Fixpunktwert der in  $\bar{u}$  entwickelten Reihen in beiden Phasen gleich ist.

#### 5.3.1 Oberhalb $T_C$

Aus der Definition  $Z_g^{-1} = -\frac{\Gamma_{ijkl}^{(4)}(0)}{S_{ijkl}g_0}$  erhält man, ausgedrückt durch die Kopplung  $u_R$ ,

$$Z_g(u_R) = 1 + \frac{N+8}{48\pi} u_R + \frac{1}{6912\pi^2} [148 + N(38 + 3N)] u_R^2 + \mathcal{O}(u_R^3). \quad (5.18)$$

Daraus folgt zusammen mit der Definition von  $g_R$ , (2.28), für die Kopplung  $u$

$$\begin{aligned} u &= \frac{g_0(u_R)}{m_R^{1+\varepsilon}(u_R)} = u_R \frac{Z_g(u_R)}{Z_{\phi+}^2(u_R)} \\ &= 1 + \frac{N+8}{48\pi} u_R + \frac{1}{62208\pi^2} [1348 + N(350 + 27N)] u_R^2 + \mathcal{O}(u_R^3). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Mit  $\partial_{m_0^2} = \frac{1}{2m_0} \partial_{m_0}$  berechnet man  $F_+(u_R)$

$$\begin{aligned} F_+(u_0) &= \partial_{m_0^2} m_R^2(g_0, m_0) \\ &= \frac{1}{2m_0} \partial_{m_0} \left( m_0^2 \left\{ 1 + m_R^{(1)} u_0 + m_R^{(2)} u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2m_0} \partial_{m_0} \left( m_0^2 + m_R^{(1)} g_0 m_0^{1-\varepsilon} + m_R^{(2)} g_0^2 m_0^{-2\varepsilon} + \mathcal{O}(u_0^3) \right) \\
&= 1 + \frac{m_R^{(1)} g_0}{2m_0} (1 - \varepsilon) m_0^{-\varepsilon} + \frac{m_R^{(2)} g_0^2}{2m_0} m_0^{-2\varepsilon-1} (-2\varepsilon) + \mathcal{O}(g_0^3) \\
&= 1 + \frac{m_R^{(1)}}{2} u_0 - \varepsilon m_R^{(2)} u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \tag{5.20}
\end{aligned}$$

$$F_+(u_R) = 1 - \frac{N+2}{48\pi} u_R - \frac{N+2}{1152\pi^2} u_R^2 + \mathcal{O}(u_R^3) . \tag{5.21}$$

Die  $\beta$ -Funktion in diesem Schema,  $\beta(u_R) = m_R \partial_{m_R} u_R$ , erhält man nach [Hei93] durch

$$\begin{aligned}
\beta_+(u_R) &= -u(u_R) \left( \frac{\partial u(u_R)}{\partial u_R} \right)^{-1} \\
&= -u_R \left\{ 1 - \frac{N+8}{48\pi} u_R + \frac{1}{15552\pi^2} (190 + 41N) u_R^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\} .
\end{aligned}$$

Entsprechend zu  $F_+$  kann man auch mit der Masse  $m_{\sigma+}$  eine Funktion  $F_{\sigma+}$  definieren. Diese ist jedoch bis zur zweiten Ordnung identisch zu  $F_+$ , weil die Kopplung  $u_{\sigma+}$  nur in der ersten Ordnung in  $F_+$  eingeht und aus dem Term zweiter Ordnung der Masse nur der Vorfaktor des Poles bedeutsam ist, wie man in (5.20) erkennt. Der Polterm ist jedoch in  $m_R$  und  $m_{\sigma+}$  identisch.

### 5.3.2 Unterhalb $T_C$

Die Berechnung von  $F_\sigma$  erfolgt genau so wie die von  $F_+$ .

$$\begin{aligned}
F_\sigma(u_0) &= \partial_{m_0^2} m_\sigma^2(g_0, m_0) \\
&= 1 + m_\sigma^{(1)} u_0 - \varepsilon 2m_\sigma^{(2)} u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \\
F_\sigma(u_R) &= 1 + \frac{4 - 3 \log 3}{32\pi} u_R + \frac{1}{9216\pi^2} (112 - 32N - 24 \log 3 \\
&\quad - 81 \log^2 3) u_R^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Die  $\beta$ -Funktion erhält man ganz analog zur symmetrischen Phase durch

$$\beta_-(u_{R-}) = -u(u_{R-}) \left( \frac{\partial u(u_{R-})}{\partial u_{R-}} \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 = & -u_{R-} \left\{ 1 - \frac{4 + 27 \log 3}{144\pi} u_R - \frac{1}{13824\pi^2} \left( 532 + 7776d_1 \right. \right. \\
 & + 288(N-1)\text{Re } d_2 + 96(-1+N)\text{Re } d_3 + 112N + 12N^2 - 33\pi^2 + 6N\pi \\
 & + (2384 + 640N) \log 2 - 3264 \log 3 - 972 \log^2 3 \\
 & + 162\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 648\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Re}((252 + 72N)\text{Li}_2(3) - 162\text{Li}_2(9)) \left. \right) u_R^2 \\
 & \left. + \mathcal{O}(u_R^3) \right\}.
 \end{aligned}$$

Hier kann man nun auch noch das Quadrat der transversalen Masse, (2.40), und die zugehörige Funktion  $F_T$  berechnen.

$$\begin{aligned}
 m_T^2 &= \frac{9m_\sigma^2(u_0)}{u_{R-}^2(u_0)} =: \frac{9m_0^2}{u_0^2} \left\{ 1 + m_T^{(1)}u_0 + m_T^{(2)}u_0^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \\
 m_T^{(1)} &= \frac{5}{9\pi} \\
 m_T^{(2)} &= \frac{1}{2592\pi^2} \left( 434 + 15N + (36 + 18N) \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\
 &\quad \left. - 180 \log 3 \right)
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann  $F_T$ .

$$\begin{aligned}
 F_T(u_0) &= \partial_{m_0^2} m_T^2(g_0, m_0) \\
 &= 9 \frac{\partial_{m_0}}{2m_0} \left( \frac{m_0^{4+2\varepsilon}}{g_0^2} + m_T^{(1)} \frac{m_0^{3+\varepsilon}}{g_0} + m_T^{(2)} m_0^2 + \mathcal{O}(g_0) \right) \\
 &= 9 \left( \frac{m_0^{2+2\varepsilon}(4+2\varepsilon)}{2g_0^2} + m_T^{(1)} \frac{m_0^{1+\varepsilon}(3+\varepsilon)}{2g_0} + m_T^{(2)} + \mathcal{O}(g_0) \right) \\
 &= 9 \left( \frac{2}{u_0^2} + m_T^{(1)} \frac{3}{2u_0} + m_T^{(2)} + \mathcal{O}(u_0) \right) \\
 F_T(u_{R-}) &= \frac{18}{u_{R-}^2} \left\{ 1 + \frac{16 - 27 \log 3}{144\pi} u_{R-} + \frac{1}{27648\pi^2} \left( -244 - 7776d_1 \right. \right. \\
 &\quad + 288(1-N)\text{Re } d_2 + 96(1-N)\text{Re } d_3 - 208N - 12N^2 + 33\pi^2 \\
 &\quad - 6N\pi^2 + (-2384 - 640N) \log 2 + 2904 \log 3 + 972 \log^2 3 \\
 &\quad \left. - 162\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) + 648\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Re}(-(252 + 72N)\text{Li}_2(3)) \right. \\
 &\quad \left. \left. \right) u_{R-}^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left. + 162\text{Li}_2(9)) \right) u_{R-}^2 + \mathcal{O}(u_{R-}^3) \} \quad (5.23)$$

Im letzten Schritt wurde bereits  $u_{R-}$  (5.14) eingesetzt.

## 5.4 Bestimmung der Amplitudenverhältnisse in der Kopplung

$u_{R+}$

Aus den vorhergehenden Rechnungen sind die Kopplungen  $u_-$  und  $u_+$ , entwickelt in  $u_{R-}$  bzw.  $u_{R+}$ , bekannt (5.15), (5.19).

$$\begin{aligned} u_-(u_{R-}) &=: u_{R-} \left\{ 1 + u_-^{(1)} u_{R-} + u_-^{(2)} u_{R-}^2 + \mathcal{O}(u_{R-}^3) \right\} \\ u_+(u_{R+}) &=: u_{R+} \left\{ 1 + u_+^{(1)} u_{R+} + u_+^{(2)} u_{R+}^2 + \mathcal{O}(u_{R+}^3) \right\} \end{aligned}$$

Um die in beiden Phasen verwendbare Kopplung  $\bar{u}$  zu bestimmen, macht man den Ansatz

$$u_{R-} = \bar{u} \left\{ 1 + \bar{u}^{(1)} \bar{u} + \bar{u}^{(2)} \bar{u}^2 + \mathcal{O}(\bar{u}^3) \right\} .$$

Die Idee dabei ist, eine Kopplung  $\bar{u}$  so zu konstruieren, daß die in dieser Kopplung ausgedrückte  $\beta$ -Funktion in beiden Phasen die gleiche ist, damit auch der Fixpunktwert in beiden Phasen der gleiche ist. Weil sich die  $\beta$ -Funktion aus der Kopplung  $u_{\pm}$  als Funktion von  $u_{R\pm}$  gewinnen läßt, bietet sich die Verwendung von  $u_{\pm}$  hier an. Mit der Forderung, daß

$$u_-(u_{R-} = u_{R-}(\bar{u})) = u_+(u_{R+} = \bar{u}) ,$$

legt man die Gestalt von  $\bar{u}$  fest. Dabei hätte man genausogut auch die Anpassung an die Kopplung  $u_{R-}$  wählen können. Hier wird  $u_{R+}$  verwendet, weil mir nur für den Fixpunkt von  $u_{R+}$  zuverlässige Werte für  $N > 1$  bekannt sind.

Durch Einsetzen des Ansatzes in  $u_-$  und Koeffizientenvergleich mit der Entwicklung von  $u_+$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)} &= u_+^{(1)} - u_-^{(1)} \\ \bar{u}^{(2)} &= u_+^{(2)} - 2\bar{u}^{(1)} u_-^{(1)} - u_-^{(2)} . \end{aligned}$$

Konkret findet man

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(1)} &= \frac{20 + 3N + 27 \log 3}{144\pi} \\ \bar{u}^{(2)} &= \frac{1}{248832\pi^2} \left( -1508 - 69984d_1 + 2592(1 - N)\operatorname{Re} d_2 \right. \\ &\quad + 864(1 - N)\operatorname{Re} d_3 + 104N + 297\pi^2 - 54N\pi^2 \\ &\quad - (21456 + 5760N) \log 2 + (16416 - 1944N) \log 3 + 17496 \log^2 3 \\ &\quad - 1458\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) + 5832\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) - \operatorname{Re}((2268 + 648N)\operatorname{Li}_2(3) \\ &\quad \left. + 1458\operatorname{Li}_2(9)) \right) .\end{aligned}$$

Die Kopplung kann nun in  $F_\sigma(u_{R-})$  eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}F_\sigma(\bar{u}) &= 1 + \frac{4 - \log 3}{32\pi} \bar{u} \\ &\quad + \frac{1}{9216\pi^2} \left( 272 - 8N - (360 + 18N) \log 3 + 81 \log^2 3 \right) \bar{u}^2 + \mathcal{O}(\bar{u}^3)\end{aligned}$$

Nachdem man  $\bar{u}$  mit  $u_{R+}$  identifiziert hat, berechnet man  $\Phi_\sigma(u_{R+})$ .

$$\begin{aligned}\Phi_\sigma(u_{R+}) &:= \frac{F_\sigma(\bar{u} = u_{R+})}{F_+(u_{R+})} \\ &= 1 + \frac{16 + 2N - 9 \log 3}{96\pi} u_{R+} \\ &\quad + \frac{1}{9216\pi^2} \left( 352 + 40N + 4N^2 - (396 + 36N) \log 3 + 81 \log^2 3 \right) u_{R+}^2 \\ &\quad + \mathcal{O}(u_{R+}^3)\end{aligned}\tag{5.24}$$

Dasselbe Verfahren wendet man an, um  $\Phi_T$  zu bestimmen. Zunächst setzt man die Kopplung  $\bar{u}$  ein,

$$\begin{aligned}F_T(\bar{u}) &= \frac{18}{\bar{u}^2} \left\{ 1 + \frac{-8 - 2N + 9 \log 3}{48\pi} \bar{u} + \frac{1}{248832\pi^2} \left( 11380 + 69984d_1 \right. \right. \\ &\quad + 2592(N - 1)\operatorname{Re} d_2 + 864(-1 + N)\operatorname{Re} d_3 + 1664N + 216N^2 - 297\pi^2 \\ &\quad + 54N\pi^2 + (21456 + 5760N) \log 2 + (-31968 + 972N) \log 3 \\ &\quad - 8748 \log^2 3 + 1458\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 5832\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Re}((2268 + 648N)\operatorname{Li}_2(3) - 1458\operatorname{Li}_2(9)) \right) \bar{u}^2 + \mathcal{O}(\bar{u}^3) \right\} ,\end{aligned}$$

und bildet anschließend das Verhältnis  $F_T/F_+$ .

$$\begin{aligned}
 \Phi_T(u_{R+}) &:= \frac{F_T(\bar{u} = u_{R+})}{F_+(u_{R+})} \\
 &= \frac{18}{u_{R+}^2} \left\{ 1 - \frac{6 + N - 9 \log 3}{48\pi} u_{R+} + \frac{1}{248832\pi^2} \left( 10516 + 69984d_1 \right. \right. \\
 &\quad + 2592(N-1)\text{Re } d_2 + 864(-1+N)\text{Re } d_3 + 1016N + 108N^2 - 297\pi^2 \\
 &\quad + 54N\pi^2 + (21456 + 5760N) \log 2 - 31968 \log 3 - 8748 \log^2 3 \\
 &\quad + 1458\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 5832\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) \\
 &\quad \left. \left. + \text{Re}((2268 + 648N)\text{Li}_2(3) - 1458\text{Li}_2(9)) \right) u_{R+}^2 + \mathcal{O}(u_{R+}^3) \right\} \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

## 5.5 Numerische Auswertung der Amplitudenverhältnisse

Die universellen Amplitudenverhältnisse erhält man nach (5.17) durch

$$\frac{f_+}{f_\sigma} = (2\Phi_\sigma(u_R^*))^\nu; \quad \frac{f_+}{f_T} = (2\Phi_T(u_R^*))^\nu.$$

Um die Reihen numerisch auszuwerten, benötigt man numerische Vorgaben für den Wert der Kopplung am kritischen Punkt  $u_{R+}^*$  und den Exponenten  $\nu$ . Diese Größen hängen jeweils noch von  $N$  ab. Im Prinzip kann man den Wert von  $u_{R+}^*$  auch aus der  $\beta$ -Funktion berechnen, aber in der Literatur existieren dazu bereits andere Rechnungen, die eine bessere Bestimmung von  $u_{R+}^*$  ermöglichen. Hier werden die Ergebnisse einer Sechs-Loop-Rechnung aus [AS95] verwendet.

Die Berechnung des Exponenten  $\nu$  wird in einer großen Zahl von Arbeiten durchgeführt. Eine gute Übersicht für  $N = 2$  findet sich zum Beispiel in [CHP<sup>+</sup>00]. Hier werden exemplarisch die Werte aus [LMSD98] und die Werte einer linked cluster expansion [Rei95] verwendet, weil dort Werte für alle  $N$ , die hier betrachtet werden, berechnet sind. Daraus ergeben sich die Werte in den Tabellen 5.1 und 5.2.

Entsprechend werden die Ergebnisse für  $f_+/f_T$  (Tabelle 5.3) berechnet. Man erkennt, daß die numerische Auswertung von  $f_+/f_T$  wenig sinnvolle Ergebnisse liefert. Ein Vergleich mit anderen Werten und der Ein-Loop-Rechnung zeigt, daß die numerische Konvergenz der Reihe sehr schlecht ist, so daß die zweite Ordnung keine numerische Verbesserung liefert. Immerhin wachsen die Ergebnisse



## 5.5 Numerische Auswertung der Amplitudenverhältnisse

---

$N$	$u_{R+}^*$	$\nu$	Padé[2,0]	Padé[1,1]	Padé[0,2]	Mittel
1	23,474	0,6310	2,2025	2,2232	2,0300	2,1519
2	21,021	0,67095	2,4130	2,4501	2,1516	2,3382
3	18,9594	0,7050	2,6266	2,6979	2,3028	2,5424
4	17,204	0,738	2,8502	2,9779	2,4898	2,7727

Tabelle 5.1: Amplitudenverhältnis  $f_+/f_\sigma$  mit Exponent  $\nu$  nach [LMSD98] ( $N = 1, 2, 3$ ) und [AS95] ( $N=4$ )

$N$	$u_{R+}^*$	$\nu$	Padé[2,0]	Padé[1,1]	Padé[0,2]	Mittel
1	23,474	0,6301	2,2000	2,2207	2,0280	2,1496
2	21,021	0,6734	2,4208	2,4582	2,1576	2,3455
3	18,9594	0,7131	2,6559	2,7288	2,3250	2,5699
4	17,204	0,7361	2,9695	2,8426	2,4840	2,7654

Tabelle 5.2: Amplitudenverhältnis  $f_+/f_\sigma$  mit Exponent  $\nu$  nach [Rei95]

$N$	$u_{R+}^*$	$\nu$	Padé[2,0]	Padé[1,1]	Padé[0,2]	Mittel
2	21,021	0,67095	—	0,1890	0,0821	0,1356
3	18,9594	0,7050	—	0,1984	0,1000	0,1492
4	17,204	0,738	—	0,2112	0,1221	0,1667

Tabelle 5.3: Amplitudenverhältnis  $f_+/f_T$  mit Exponent  $\nu$  nach [LMSD98] ( $N = 2, 3$ ) und [AS95] ( $N=4$ )

$N$	$f_+/f_T$	Methode	
2	0,140	$N$ -Entwicklung	[PHA91]
	0,33	$\epsilon$ -Entwicklung	[Ber76]
	0,50	Feldtheorie	[SD90]
	0,39	Experiment	[HAH76]
	0,41	Experiment	[MPA75]
3	0,208	$N$ -Entwicklung	[PHA91]
	0,38	$\epsilon$ -Entwicklung	[Ber76]
	0,56	Feldtheorie	[SD90]
	0,6(1)	Experiment	[HAH76]

Tabelle 5.4: Vergleichswerte  $f_+/f_T$  nach einer Zusammenstellung in [Luc95]

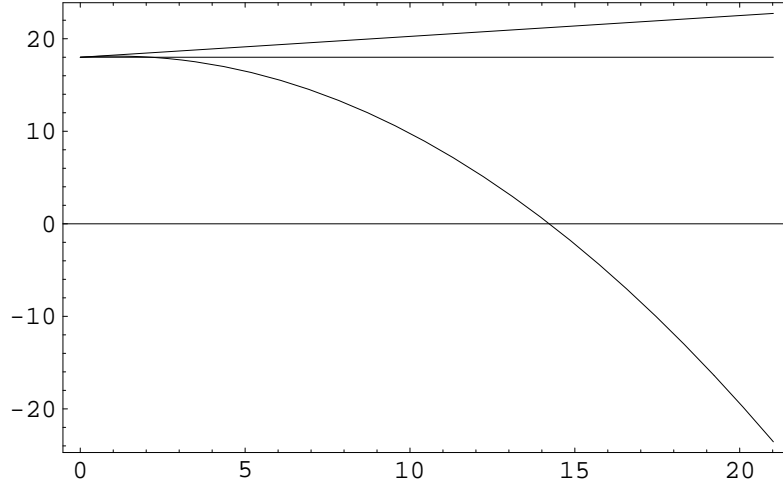


Abbildung 5.1: Graph von  $u_R^2 \Phi_T$  für  $N = 2$  in nullter, erster und zweiter Ordnung. Der Fixpunktwert liegt bei  $u_R = 21,02$ .

in zweiter Ordnung mit steigendem  $N$ , wie man es erwartet. In erster Ordnung war eine umgekehrte  $N$ -Abhängigkeit beobachtet worden ([Luc95]). Eine Ursache für die schlechte Konvergenz könnte darin liegen, daß die Reihenentwicklung von  $\Phi_T$  mit  $u_R^{-2}$  beginnt (Abbildung 5.1).

Für  $f_+/f_\sigma$  sind die Ergebnisse hingegen eine deutliche Verbesserung der Ein-Loop-Rechnungen. Die verschiedenen Padé-Approximationen liegen näher beieinander und die Ergebnisse stimmen im Rahmen der Genauigkeit, die man von einer Zwei-Loop-Rechnung erwarten kann, mit den Erwartungen überein. Leider sind mir keine Vergleichswerte für  $f_+/f_\sigma$  für  $N \geq 2$  bekannt.

Man erkennt außerdem, daß die Unterschiede, die sich durch die unterschiedlichen numerischen Vorgaben ergeben, zwar sichtbar sind, sie sind jedoch viel kleiner als die Unsicherheit, die sich aus der Approximation der Reihe in zweiter Ordnung ergibt. Die Abweichung der verschiedenen Padé-Approximationen untereinander ist erheblich größer.

## KAPITEL 6

---

### Resümee

---

In dieser Arbeit wurden zunächst verschiedene Renormierungsschemata, die für eine dreidimensionale  $\phi^4$ -Theorie mit  $N$  Feldkomponenten verwendet werden können, beschrieben und verglichen. Zur Anwendung kamen die Methode der Renormierungsbedingungen und die Methode der minimalen Renormierung in drei Dimensionen nach Dohm. Es wurden die notwendigen Beziehungen hergestellt, um Resultate, die in Dohms Schema berechnet wurden, und solche, die im Schema der Renormierungsbedingungen berechnet wurden, zu vergleichen und Zwischenergebnisse von einem ins andere Schema umzurechnen. Insbesondere wurden dabei die verschiedenen Möglichkeiten betrachtet, eine renormierte Masse in der Phase gebrochener Symmetrie für eine  $\phi^4$ -Theorie mit mehr als einer Feldkomponente zu definieren. Ein Ziel war dabei, die Pseudomasse, die in Dohms Schema verwendet wird, durch die physikalisch definierte Masse  $m_\sigma$  zu ersetzen.

Den größten Teil der Arbeit nehmen die Berechnungen aller Graphen der Zwei- und Vierpunktfunktion in der symmetrischen Phase und die der Ein- und Zweipunktfunktion in der Phase gebrochener Symmetrie ein, die bis zur zweiten Ordnung Störungsrechnung für das  $\phi^4$ -Modell berechnet wurden. Dabei erfordert die Berechnung der Masse  $m_\sigma$  die Berechnung der Zweipunktfunktion der Phase gebrochener Symmetrie mit äußerem Impuls.

Mit diesen Resultaten wurde dann die Amplitudenfunktion der Magnetisierung,  $f_\phi$ , und die Amplitudenfunktion der transversalen Suszeptibilität,  $f_{\chi T}$ , in Dohms Schema unter Verwendung der Masse  $m_\sigma$  in zweiter Ordnung berechnet. Daraus wurde die Amplitudenfunktion  $G$  des Helizitätsmoduls berechnet, die bei der Behandlung des Phasenübergangs bei superflüssigem Helium von Interesse ist [Doh98]. Anschließend wurden die notwendigen Beziehungen hergeleitet, um renormierte Resultate, die mit der Pseudomasse berechnet wurden, durch die Masse  $m_\sigma$  auszudrücken. Damit wurde dann die Amplitudenfunktion  $\hat{F}_-$  der spezifischen Wärme unterhalb  $T_C$  berechnet.

Der Nachteil der Verwendung der Masse  $m_\sigma$  ist, daß es erforderlich ist, die Graphen mit äußeren Impulsen zu berechnen. Dadurch erhält man bei vergleichbarem Aufwand eine Ordnung weniger in der Störungsrechnung, so daß man, wenn man zum Beispiel Amplitudenverhältnisse numerisch auswerten will, eine geringere Genauigkeit erzielt. Deshalb wurde hier auch auf eine weitere numerische Auswertung verzichtet. Dem gegenüber steht natürlich der Vorteil, die Amplitudenfunktionen durch eine physikalische Masse ausdrücken zu können.

Die Möglichkeiten, die nächste Ordnung der Masse  $m_\sigma$  zu berechnen, sind ziemlich gering. Zunächst scheint die Anzahl der Graphen – in der dritten Ordnung tragen zum Beispiel zur massiven Zweipunktfunktion 1319 Graphen bei – das größte Problem zu sein. Allerdings ergeben sich viele topologisch äquivalente und auf gleiche Integrale zurückzuführende Graphen, so daß man dieses Problem mit einer guten Buchführung als lösbar ansehen kann. Nach den Erfahrungen in dieser Arbeit liegt die größere Schwierigkeit darin, die Integrale der komplizierteren Graphen analytisch zu behandeln. Schon in zweiter Ordnung konnte ein Integral nur numerisch ausgewertet werden. Es ist zu vermuten, daß man in der dritten Ordnung auf derzeit kaum lösbare Integrale stoßen wird.

Im letzten Kapitel wurde dann das Schema der Renormierungsbedingungen in beiden Phasen angewendet. Dabei wurde neben der Berechnung einiger renormierter Größen das universelle Amplitudenverhältnis der longitudinalen,  $f_+/f_\sigma$ , und der transversalen Korrelationslänge  $f_+/f_T$  in zweiter Ordnung berechnet und numerisch ausgewertet. Dies geschah in Fortsetzung der Arbeit von Lucas [Luc95], der diese Berechnung in erster Ordnung vorgenommen hat. Außerdem wurde festgestellt, daß es in der symmetrischen Phase bis zur zweiten Ordnung keinen Unterschied gibt zwischen der Amplitudenfunktion der durch das zweite Moment gewonnenen Korrelationslänge und einer Korrelationslänge, die als Inverses einer physikalischen Masse in Analogie zu  $m_\sigma$  unterhalb  $T_C$  definiert ist.

Es hat sich gezeigt, daß das numerische Ergebnis für  $f_+/f_-$  in zweiter Ordnung deutlich verbessert ist, während bei  $f_+/f_T$  ein sehr schlechtes numerisches Kon-

---

vergenzverhalten nicht zuläßt, zuverlässige Ergebnisse zu gewinnen.

---

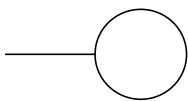
## Graphen in der Phase gebrochener Symmetrie

---

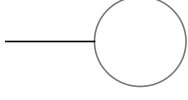
### A.1 Einpunktfunktion

#### A.1.1 Ein-Loop

$G_{111} \ (2)$

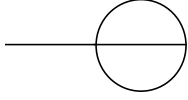


$$\begin{aligned}
 &= -\sqrt{3g_0}m_0\hat{\sigma}(0)\int_k\hat{\sigma}(k) \\
 &= -\sqrt{3g_0}\frac{1}{m_0}J_1(m_0)=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\sqrt{u_0}m_0^{1/2(1-\varepsilon)}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

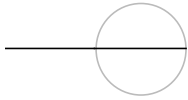
$G_{112} \text{ (2)}$ 


$$= -\sqrt{3g_0} \frac{N-1}{3m_0} \int_k \frac{1}{k^2} = 0$$

### A.1.2 Zwei-Loop

 $G_{121} \text{ (6)}$ 


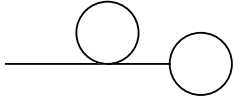
$$\begin{aligned} &= g_0 \sqrt{3g_0} m_0 \frac{1}{m_0^2} \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(l) \hat{\sigma}(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \\ &= \sqrt{3} \frac{g_0^{3/2}}{m_0} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)((\mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + m_0^2)} \\ &= \sqrt{3} \frac{g_0^{3/2}}{m_0} I_2(0; m_0, m_0, m_0) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{32\pi^2} u_0^{3/2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma - \log 9 + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

 $G_{122} \text{ (2)}$ 


$$\begin{aligned} &= \frac{1}{m_0^2} g_0 \frac{\sqrt{3g_0}}{9} m_0 \delta_{ij} \delta_{kl} \int_k \int_l \hat{\pi}_{ik}(k) \hat{\sigma}(l) \hat{\pi}_{jl}(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \\ &= \frac{1}{m_0^2} g_0 \frac{\sqrt{3g_0}}{9} (N-1) m_0 I_2(0; 0, m_0, 0) \end{aligned}$$

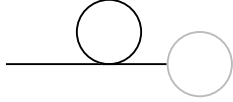
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m_0^2} g_0^{3/2} (N-1) \frac{\sqrt{3}}{9} m_0 \frac{m_0^{-2\varepsilon}}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log(4\pi) + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}(N-1)}{288\pi^2} u_0^{3/2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)
 \end{aligned}$$

$G_{123}$  (4)



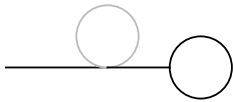
$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{3}}{9} g_0^{3/2} \frac{1}{m_0} \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(l) \hat{\sigma}(0) = \frac{\sqrt{3}}{m_0^3} g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(l^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{m_0^3} g_0^{3/2} (J_1(m_0))^2 = \frac{1}{m_0} g_0^{3/2} m_0^{-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} u_0^{3/2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{124}$  (4)



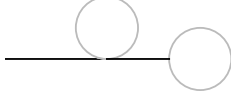
$$= \frac{\sqrt{3}}{3} (N-1) g_0^{3/2} \frac{1}{m_0^3} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2) l^2} = 0$$

$G_{125}$  (4)

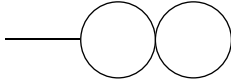


$$= \frac{\sqrt{3}}{3} (N-1) g_0^{3/2} \frac{1}{m_0^3} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2) l^2} = 0$$

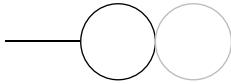


$G_{126} \quad (4)$ 


$$= \frac{\sqrt{3}}{9} (N-1)^2 g_0^{3/2} \frac{1}{m_0^3} \int_k \int_l \frac{1}{k^2 l^2} = 0$$

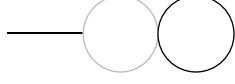
 $G_{127} \quad (4)$ 


$$\begin{aligned} &= \frac{1}{m_0^2} g_0 \sqrt{g_0} \sqrt{3} m_0 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(l) = \frac{\sqrt{3}}{m_0} g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{m_0} g_0^{3/2} J_2(m_0) J_1(m_0) = \frac{\sqrt{3}}{m_0} g_0^{3/2} \frac{1}{8\pi m_0^{1+\varepsilon}} \frac{-m_0^{1-\varepsilon}}{4\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= -u_0^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{32\pi^2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

 $G_{128} \quad (4)$ 


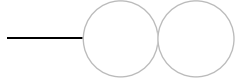
$$= \frac{\sqrt{3}}{3m_0} (N-1) g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 l^2} = 0$$

$G_{129}$  (4)



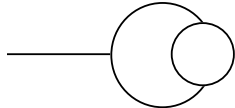
$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{3}}{9m_0} (N-1) g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)} \\
 &= \frac{\sqrt{3}(N-1)}{9m_0} g_0^{3/2} J_2(hm_0) J_1(m_0) \\
 &= -\frac{\sqrt{3}(N-1)}{288\pi^2} g_0^{3/2} m_0^{-2\varepsilon-1} h^{-1-\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{\sqrt{3}(N-1)}{288\pi^2} u_0^{3/2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} h^{-1-\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{1210}$  (4)



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{3}}{9m_0} (N+1)(N-1) g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)^2 (l^2 + h_0^2)} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{9m_0} (N+1)(N-1) g_0^{3/2} J_2(hm_0) J_1(hm_0) \\
 &= -\frac{\sqrt{3}(N+1)(N-1)}{288\pi^2} g_0^{3/2} (hm_0)^{-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{\sqrt{3}(N+1)(N-1)}{288\pi^2} u_0^{3/2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} h^{-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

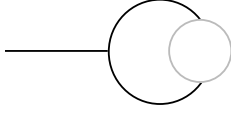
$G_{1211}$  (4)



$$= \frac{1}{m_0^2} (-g_0^{3/2}) \sqrt{3} m_0^3 \int_k \int_l \hat{\sigma}^2(k) \hat{\sigma}(l) \hat{\sigma}(\mathbf{k}-\mathbf{l})$$

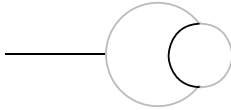
$$\begin{aligned}
&= -m_0 3^{3/2} g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2) ((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2)} \\
&= -m_0 3^{3/2} g_0^{3/2} D_2(m_0, m_0, m_0) \\
&= -\frac{\sqrt{3} g_0^{3/2}}{32\pi^2 m_0^{1+2\varepsilon}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = -\frac{\sqrt{3}}{32\pi^2} u_0^{3/2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
\end{aligned}$$

$G_{1212}$  (4)



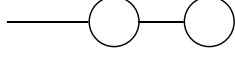
$$\begin{aligned}
&= -m_0 \frac{3^{3/2}}{9} (N-1) g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 l^2 (\mathbf{k} - \mathbf{l})^2} \\
&= -m_0 \frac{3^{3/2}}{9} (N-1) g_0^{3/2} D_2(m_0, 0, 0) \\
&= -\frac{\sqrt{3}(N-1)}{96\pi^2} u_0^{3/2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
\end{aligned}$$

$G_{1213}$  (2)



$$\begin{aligned}
&= -m_0 \frac{3^{3/2}}{27} (N-1) g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)^2 (l^2 + h_0^2) ((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2)} \\
&= -m_0 \frac{3^{3/2}}{27} (N-1) g_0^{3/2} D_2(hm_0, hm_0, m_0) \\
&= -\frac{\sqrt{3}(N-1)}{288\pi^2} u_0^{3/2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} \left( \frac{1}{h} - 2 + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
\end{aligned}$$

$G_{1214}$  (4)



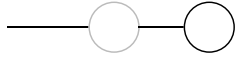
$$\begin{aligned}
 &= -g_0^{3/2} 3^{3/2} m_0^3 \hat{\sigma}(0) \int_k \int_l \hat{\sigma}^2(k) \hat{\sigma}(l) \\
 &= -m_0 3^{3/2} g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)} \\
 &= -m_0 3^{3/2} g_0^{3/2} J_2(m_0) J_1(m_0) = -m_0 3^{3/2} g_0^{3/2} \frac{1}{8\pi m_0^{1+\varepsilon}} \frac{-m_0^{1-\varepsilon}}{4\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{3^{3/2}}{32\pi^2} u_0^{3/2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{1215}$  (4)

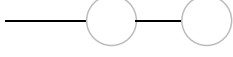


$$= -\frac{3^{3/2}}{3} \frac{1}{m_0} (N-1) g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 l^2} = 0$$

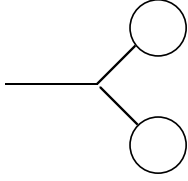
$G_{1216}$  (4)



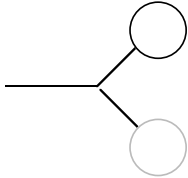
$$\begin{aligned}
 &= -\frac{3^{3/2}}{9} (N-1) \frac{1}{m_0} g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)} \\
 &= -\frac{3^{3/2}}{9} (N-1) \frac{1}{m_0} g_0^{3/2} J_2(hm_0) J_1(m_0) \\
 &= \frac{\sqrt{3}^3}{288\pi^2} (N-1) g_0^{3/2} m_0^{-1-2\varepsilon} h^{-1-\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{\sqrt{3}(N-1)}{96\pi^2} u_0^{3/2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} h^{-1-\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{1217} \quad (4)$ 


$$\begin{aligned}
&= -\frac{3^{3/2}}{27}(N-1)^2 \frac{1}{m_0} g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)^2 (l^2 + h_0^2)} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{9}(N-1)^2 \frac{1}{m_0} g_0^{3/2} J_2(hm_0) J_1(hm_0) \\
&= \frac{\sqrt{3}(N-1)^2}{288\pi^2} u_0^{3/2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} h^{-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
\end{aligned}$$

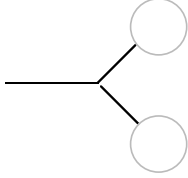
 $G_{1218} \quad (8)$ 


$$\begin{aligned}
&= -g_0^{3/2} 3^{3/2} m_0^3 \frac{1}{m_0^6} \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(l) = -\frac{3^{3/2}}{m_0^3} g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)} \\
&= -\frac{3^{3/2}}{m_0^3} g_0^{3/2} (J_1(m_0))^2 = -\frac{3^{3/2}}{16\pi^2} u_0^{3/2} m_0^{1/2(1-\varepsilon)} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
\end{aligned}$$

 $G_{1219} \quad (4)$ 


$$= -\frac{3^{3/2}}{3m_0^3} (N-1) g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2) l^2} = 0$$

$G_{1220}$  (8)

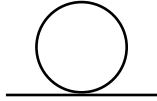


$$= -\frac{3^{3/2}}{9m_0^3} (N-1)^2 g_0^{3/2} \int_k \int_l \frac{1}{k^2 l^2} = 0$$

## A.2 Zweipunktfunktion des massiven Feldes

### A.2.1 Ein-Loop

$G_{211}$  (2)

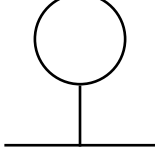


$$\begin{aligned} &= -g_0 \int_k \hat{\sigma}(k) = -g_0 \int_k \frac{1}{k^2 + m_0^2} = -g_0 J_1(m_0) \\ &= g_0 \frac{m_0^{1-\varepsilon}}{4\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = u_0 \frac{m_0^2}{4\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

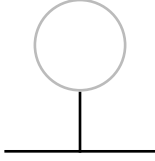
$G_{212}$  (2)



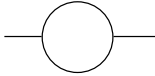
$$= -g_0 \frac{\delta_{ij}}{3} \int_k \hat{\pi}_{ij}(k) = 0$$

$G_{213} \ (2)$ 


$$\begin{aligned}
&= 3g_0 m_0^2 \hat{\sigma}(0) \int_k \hat{\sigma}(k) = 3g_0 \int_k \frac{1}{k^2 + m_0^2} = 3g_0 J_1(m_0) \\
&= -\frac{3}{4\pi} m_0^2 u_0 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
\end{aligned}$$

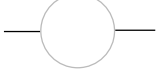
 $G_{214} \ (2)$ 


$$= \frac{1}{3} 3\delta_{ij} g_0 m_0^2 \hat{\sigma}(0) \int_k \hat{\pi}_{ij}(k) = 0$$

 $G_{215} \ (2)$ 


$$\begin{aligned}
&= 3g_0 m_0^2 \int_k \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(\mathbf{k} + \mathbf{p}) = 3g_0 m_0^2 \int_k \frac{1}{((\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)} \\
&= 3g_0 m_0^2 I_1(p; m_0, m_0) = \frac{3}{4\pi} g_0 m_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{2m_0} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
&= \frac{3}{4\pi} u_0 m_0^3 \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{2m_0} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
\end{aligned}$$

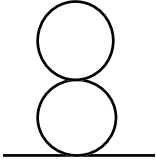
$G_{216}$  (2)



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0 m_0^2 \int_k \hat{\pi}_{ik}(k) \hat{\pi}_{jl}(\mathbf{k} + \mathbf{p}) = \frac{(N-1)}{3} g_0 m_0^2 \int_k \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 k^2} \\
 &= \frac{(N-1)}{3} g_0 m_0^2 I_1(p; 0, 0) = \frac{(N-1)}{24} u_0 m_0^3 \frac{1}{p} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

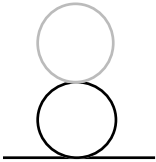
### A.2.2 Zwei-Loop

$G_{221}$  (4)



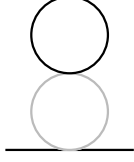
$$\begin{aligned}
 &= g_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(l) = g_0^2 J_2(m_0) J_1(m_0) = \frac{-1}{8\pi} m_0^{-1-\varepsilon} \frac{m_0^{1-\varepsilon}}{4\pi} g_0^2 \\
 &= -\frac{1}{32\pi^2} m_0^{-2\varepsilon} g_0^2 = -\frac{1}{32\pi^2} m_0^2 u_0^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{222}$  (4)

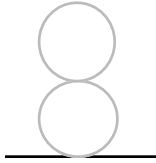


$$= -\frac{1}{3} \delta_{ij} g_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\pi}_{ij}(l) = 0$$

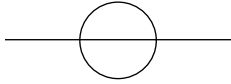


$G_{223} \quad (4)$ 


$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{ik}(k) \hat{\pi}_{jl}(k) \hat{\sigma}(l) = \frac{1}{9} (N-1) g_0^2 J_2(hm_0) J_1(m_0) \\
 &= -\frac{N-1}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 h^{-1-\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

 $G_{224} \quad (4)$ 


$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} S_{ijkl} \delta_{mn} g_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{ij}(k) \hat{\pi}_{kl}(k) \hat{\pi}_{mn}(l) \\
 &= \frac{1}{9} (N+1)(N-1) g_0^2 J_2(hm_0) J_1(hm_0) \\
 &= -\frac{N^2-1}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 h^{-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

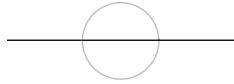
 $G_{225} \quad (6)$ 


$$\begin{aligned}
 &= g_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{l}) \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(l) \\
 &= g_0^2 \int_k \int_l \frac{1}{((\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)} \\
 &= g_0^2 I_2(p; m_0, m_0, m_0)
 \end{aligned}$$

$$= u_0^2 \frac{m_0^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 3 - 2 \frac{3m_0}{p} \arctan \frac{p}{3m_0} - \log\left(9 + \frac{p^2}{m_0^2}\right) - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)$$

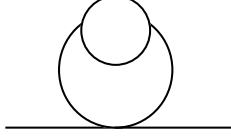
$$G_{225}(p = im_0) = u_0^2 \frac{m_0^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 3 - \gamma + \log\left(\frac{16}{\pi}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)$$

$G_{226}$  (2)

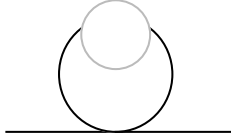


$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{mn} g_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{im}(\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{l}) \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{jn}(l) \\ &= \frac{1}{9} (N-1) g_0^2 \int_k \int_l \frac{1}{(\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{l})^2 (k^2 + m_0^2) l^2} = \frac{N-1}{9} g_0^2 I_2(p; 0, m_0, 0) \\ &= u_0^2 \frac{m_0^2 (N-1)}{288\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 3 - 2 \frac{m_0}{p} \arctan \frac{p}{m_0} - \log\left(1 + \frac{p^2}{m_0^2}\right) - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

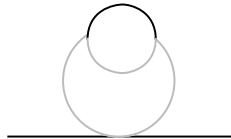
$$G_{226}(p = im_0) = u_0^2 \frac{m_0^2}{288\pi^2} (N-1) \left( \frac{1}{\varepsilon} + 3 - \gamma + \log(\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)$$

$G_{227} \quad (4)$ 


$$\begin{aligned}
 &= -3g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(\mathbf{k}-\mathbf{l}) \hat{\sigma}(l) = -3g_0^2 m_0^2 D_2(m_0, m_0, m_0) \\
 &= -3g_0^2 m_0^2 \frac{1}{96\pi^2} m_0^{-2-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = -\frac{1}{32\pi^2} u_0^2 m_0^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

 $G_{228} \quad (4)$ 


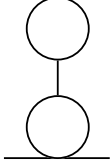
$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{mn} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\pi}_{im}(\mathbf{k}-\mathbf{l}) \hat{\pi}_{jn}(l) \\
 &= -\frac{1}{3} (N-1) g_0^2 m_0^2 D_2(m_0, 0, 0) = -\frac{N-1}{3} g_0^2 m_0^2 \frac{1}{32\pi^2} m_0^{-2-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{N-1}{96\pi^2} u_0^2 m_0^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

 $G_{229} \quad (2)$ 


$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{kl} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{im}(k) \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\sigma}(\mathbf{k}-\mathbf{l}) \hat{\pi}_{lm}(l) \\
 &= -\frac{1}{9} (N-1) g_0^2 m_0^2 D_2(hm_0, hm_0, m_0)
 \end{aligned}$$

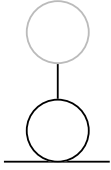
$$= -\frac{N-1}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \left( \frac{1}{h} - 2 + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$G_{2210}$  (4)



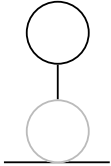
$$\begin{aligned} &= -3g_0^2 m_0^2 \hat{\sigma}(0) \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(l) = -3g_0^2 J_2(m_0) J_1(m_0) \\ &= 3g_0^2 \frac{1}{8\pi} m_0^{-1-\varepsilon} \frac{m_0^{1-\varepsilon}}{4\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \frac{3}{32\pi^2} m_0^2 u_0^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{2211}$  (4)

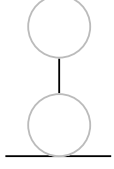


$$= -(N-1) g_0^2 m_0^2 \hat{\sigma}(0) \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\pi}(l) = 0$$

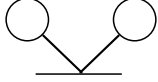
$G_{2212}$  (4)



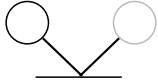
$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 m_0^2 \hat{\sigma}(0) \int_k \int_l \hat{\pi}_{ik}(k) \hat{\pi}_{jl}(k) \hat{\sigma}(l) = -\frac{N-1}{3} g_0^2 J_2(hm_0) J_1(m_0) \\ &= \frac{N-1}{96\pi^2} u_0^2 m_0^2 h^{-1-\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{2213} \quad (4)$ 


$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3}g_0\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn}\delta_{kl}g_0m_0^2\hat{\sigma}(0)\int_k\int_l\hat{\pi}_{im}(k)\hat{\pi}_{jn}(k)\hat{\pi}_{kl}(l) \\
 &= -\frac{1}{9}(N-1)^2g_0^2J_2(hm_0)J_1(hm_0)=\frac{(N-1)^2}{288\pi^2}u_0^2m_0^2h^{-2\varepsilon}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

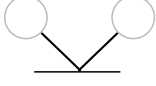
 $G_{2214} \quad (8)$ 


$$\begin{aligned}
 &= -g_03g_0m_0^2\hat{\sigma}(0)^2\int_k\int_l\hat{\sigma}(k)\hat{\sigma}(l)=-3g_0^2\frac{1}{m_0^2}J_1(m_0)^2=-\frac{3}{16\pi^2}g_0^2\frac{m_0^{2-2\varepsilon}}{m_0^2} \\
 &= -\frac{3}{16\pi^2}u_0^2m_0^2(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

 $G_{2215} \quad (4)$ 


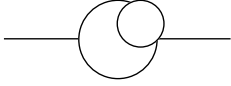
$$= -g_0^2m_0^2\delta_{ij}\hat{\sigma}(0)^2\int_k\int_l\hat{\sigma}(k)\hat{\pi}_{ij}(l)=0$$

$G_{2216}$  (8)



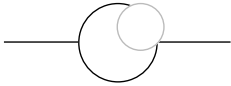
$$= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}g_0^2m_0^2\hat{\sigma}(0)^2\int_k\int_l\hat{\pi}_{ij}(k)\hat{\pi}_{kl}(l)=0$$

$G_{2217}$  (2)

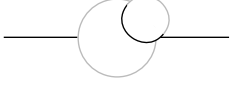


$$\begin{aligned} &= -3g_0^2m_0^2\int_k\int_l\hat{\sigma}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\hat{\sigma}(k)\hat{\sigma}(l)\hat{\sigma}(\mathbf{k}-\mathbf{l}) \\ &= -3g_0^2m_0^2\int_k\int_l\frac{1}{((\mathbf{p}-\mathbf{k})^2+m_0^2)(k^2+m_0^2)(l^2+m_0^2)((\mathbf{k}-\mathbf{l})^2+m_0^2)} \\ &= -3g_0^2m_0^2I_7(p;m_0,m_0,m_0,m_0) \\ &= -\frac{3}{64\pi^2}u_0^2m_0^2\frac{m_0}{p}\left(2\log(9)\arctan\frac{p}{2m_0}+i\text{Di}\left(\frac{p}{m_0}\right)\right)(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

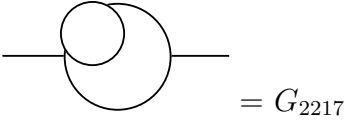
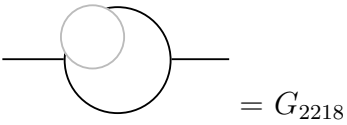
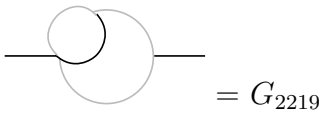
$G_{2218}$  (2)



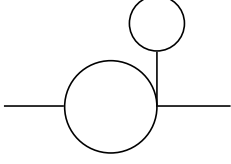
$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}g_0^2m_0^2\int_k\int_l\hat{\sigma}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\hat{\sigma}(k)\hat{\pi}_{ik}(l)\hat{\pi}_{jl}(\mathbf{k}-\mathbf{l}) \\ &= -\frac{1}{3}(N-1)g_0^2m_0^2\int_k\int_l\frac{1}{((\mathbf{p}-\mathbf{l})^2+m_0^2)(k^2+m_0^2)l^2(\mathbf{k}-\mathbf{l})^2} \\ &= -\frac{N-1}{3}g_0^2m_0^2I_7(p;m_0,0,0,m_0) \\ &= -\frac{N-1}{192\pi^2}u_0^2m_0^2\frac{m_0}{p}\left(2\pi i\arctan\frac{p}{2m_0}-i\text{Di}_2\left(\frac{p}{m_0}\right)\right)(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{2219} \text{ (1)}$ 


$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}g_0^2m_0^2\int_k\int_l\hat{\pi}_{im}(p-k)\hat{\pi}_{jk}(k)\hat{\pi}_{ln}(l)\hat{\sigma}(k-l) \\
 &= -\frac{1}{9}(N-1)g_0^2m_0^2\int_k\int_l\frac{1}{((p-l)^2)k^2l^2((k-l)^2+m_0^2)} \\
 &= -\frac{N-1}{9}g_0^2m_0^2I_7(p;0,0,m_0,0) \\
 &= -\frac{N-1}{144\pi^2}u_0^2m_0^2(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &\quad \left(\pi\frac{m_0}{2p}+\frac{m_0^2}{2p^2}\left(\log\left(1+\frac{p^2}{m_0^2}\right)-2\frac{p}{m_0}\arctan\frac{p}{m_0}\right)\right)
 \end{aligned}$$

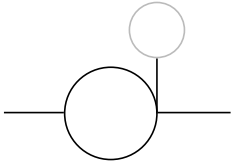
 $G_{2220} \text{ (2)}$ 

 $G_{2221} \text{ (2)}$ 

 $G_{2222} \text{ (1)}$ 


$G_{2223}$  (4)



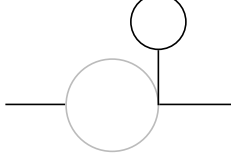
$$\begin{aligned}
 &= -3g_0^2 m_0^2 \hat{\sigma}(0) \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\sigma}(l) \\
 &= -3g_0^2 \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)} \\
 &= -3g_0^2 I_1(p; m_0, m_0) J_1(m_0) \\
 &= 3g_0^2 \frac{1}{4\pi} m_0^{-\varepsilon} \frac{1}{p} \arctan\left(\frac{p}{2m_0}\right) \frac{m_0^{1-\varepsilon}}{4\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= g_0^2 \frac{3}{16\pi^2} \frac{m_0}{p} m_0^{-2\varepsilon} \arctan\left(\frac{p}{2m_0}\right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{3}{16\pi^2} u_0^2 \frac{m_0^3}{p} \arctan\left(\frac{p}{2m_0}\right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{2224}$  (4)

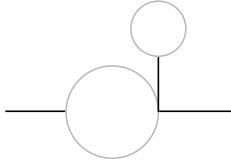


$$\begin{aligned}
 &= -\delta_{ij} g_0^2 m_0^2 \hat{\sigma}(0) \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\pi}_{ij}(l) \\
 &= -g_0^2 (N - 1) \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m_0^2) l^2} = 0
 \end{aligned}$$

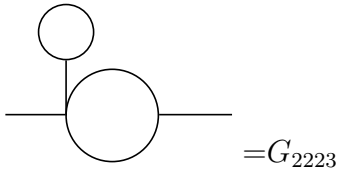


$G_{2225} \quad (4)$ 


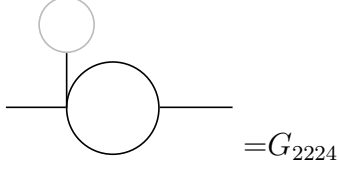
$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}g_0^2m_0^2\hat{\sigma}(0)\int_k\int_l\hat{\pi}_{ij}(k)\hat{\pi}_{kl}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\hat{\sigma}(l) \\
 &= -\frac{N-1}{3}g_0^2\int_k\int_l\frac{1}{k^2(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2(l^2+m_0^2)} \\
 &= -\frac{N-1}{3}g_0^2J_1(m_0)I_1(p;0,0)=\frac{N-1}{3}g_0^2\frac{1}{8p}m_0^{-\varepsilon}\frac{m_0^{1-\varepsilon}}{4\pi}(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{N-1}{96\pi^2}g_0^2\frac{m_0}{p}m_0^{-2\varepsilon}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))=\frac{N-1}{96\pi^2}u_0^2\frac{m_0^3}{p}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

 $G_{2226} \quad (4)$ 


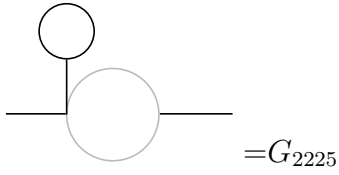
$$= -\frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}g_0^2m_0^2\hat{\sigma}(0)\int_k\int_l\hat{\pi}_{km}(k)\hat{\pi}_{ln}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\hat{\pi}_{ij}(l)=0$$

 $G_{2227} \quad (4)$ 


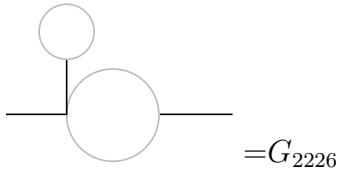
$G_{2228} \ (4)$



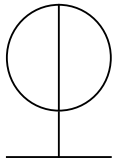
$G_{2229} \ (4)$



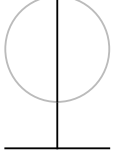
$G_{2230} \ (4)$



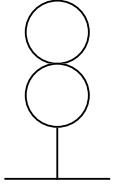
$G_{2231} \ (6)$



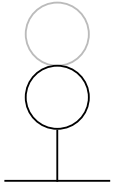
$$\begin{aligned}
 &= -3g_0^2 m_0^2 \hat{\sigma}(0) \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(l) \hat{\sigma}(\mathbf{k} + \mathbf{l}) = -3g_0^2 I_2(0; m_0, m_0, m_0) \\
 &= -3g_0^2 \frac{m_0^{-2\varepsilon}}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + 1 - \log 9 + \log 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\
 &= -\frac{3}{32\pi^2} u_0^2 m_0^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + 1 - \log 9 + \log 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)
 \end{aligned}$$

$G_{2232} \quad (2)$ 


$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}g_0^2m_0^2\hat{\sigma}(0)\int_k\int_l\hat{\pi}_{ik}(k)\hat{\sigma}(l)\hat{\pi}_{jl}(\mathbf{k}+\mathbf{l}) = -\frac{N-1}{3}g_0^2I_2(0;0,m_0,0) \\
&= -\frac{N-1}{96\pi^2}u_0^2m_0^2\left(\frac{1}{\varepsilon}+1-\gamma+\log(4\pi)+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)
\end{aligned}$$

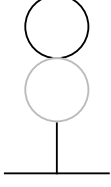
 $G_{2233} \quad (4)$ 


$$\begin{aligned}
&= -3g_0^2m_0^2\hat{\sigma}(0)\int_k\int_l\hat{\sigma}(k)^2\hat{\sigma}(l) = -3g_0^2J_2(m_0)J_1(m_0) \\
&= \frac{3}{32\pi^2}m_0^2u_0^2(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
\end{aligned}$$

 $G_{2334} \quad (4)$ 


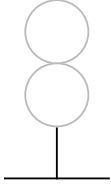
$$= -\delta_{ij}g_0^2m_0^2\hat{\sigma}(0)\int_k\int_l\hat{\sigma}(k)^2\hat{\pi}_{ij}(l) = 0$$

$G_{2235}$  (4)



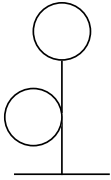
$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}g_0^2m_0^2\hat{\sigma}(0)\int_k\int_l\hat{\pi}_{ik}(k)\hat{\pi}_{jl}(k)\hat{\sigma}(l) = -\frac{N-1}{3}g_0^2J_2(hm_0)J_1(m_0) \\
 &= \frac{N-1}{96\pi^2}u_0^2m_0^2h^{-1-\varepsilon}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{2236}$  (4)



$$\begin{aligned}
 &= -\delta_{ij}S_{klmn}g_0^2m_0^2\hat{\sigma}(0)\int_k\int_l\hat{\pi}(k)_{ik}\hat{\pi}(k)_{jl}\hat{\pi}_{mn}(l) \\
 &= -\frac{1}{3}(N-1)(N+1)g_0^2J_2(hm_0)J_1(hm_0) \\
 &= \frac{(N-1)(N+1)}{96\pi^2}u_0^2m_0^2h^{-2\varepsilon}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

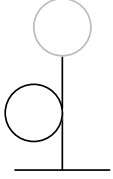
$G_{2237}$  (4)



$$= -3g_0^2m_0^2\hat{\sigma}(0)^2\int_k\int_l\hat{\sigma}(k)\hat{\sigma}(l) = -3g_0^2\frac{1}{m_0^2}J_1(m_0)^2$$

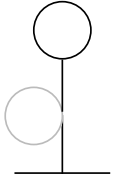
$$= -3g_0^2 \frac{1}{m_0^2} \frac{m_0^{2-2\varepsilon}}{16\pi^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = -\frac{3}{16\pi^2} u_0^2 m_0^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$$G_{2238} \quad (4)$$



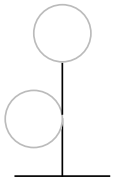
$$= -\delta_{ij} g_0^2 m_0^2 \hat{\sigma}(0)^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{ij}(l) = 0$$

$$G_{2239} \quad (4)$$



$$= -\delta_{ij} g_0^2 m_0^2 \hat{\sigma}(0)^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{ij}(k) \hat{\sigma}(l) = 0$$

$$G_{2240} \quad (4)$$



$$= -\frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 m_0^2 \hat{\sigma}(0)^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{ij}(k) \hat{\pi}_{kl}(l) = 0$$

$G_{2241}$  (4)



$$\begin{aligned}
 &= -3g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\sigma}(l) \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{l}) \\
 &= -3g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)((\mathbf{p} - \mathbf{l})^2 + m_0^2)} \\
 &= -3g_0^2 m_0^2 I_1(p; m_0, m_0)^2 \\
 &= -\frac{3}{16\pi^2} g_0^2 m_0^2 m_0^{-2\varepsilon} \frac{1}{p^2} \arctan^2 \left( \frac{p}{2m_0} \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{3}{16\pi^2} u_0^2 m_0^2 \frac{m_0^2}{p^2} \arctan^2 \left( \frac{p}{2m_0} \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{2242}$  (4)



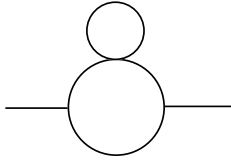
$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\pi}_{ik}(l) \hat{\pi}_{jl}(\mathbf{p} - \mathbf{l}) \\
 &= -\frac{1}{3} (N-1) g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m_0^2) l^2 ((\mathbf{p} - \mathbf{l})^2)} \\
 &= -\frac{N-1}{3} g_0^2 m_0^2 I_1(p; m_0, m_0) I_1(p; 0, 0) \\
 &= -\frac{N-1}{3} g_0^2 m_0^2 \frac{1}{8p} m_0^{-2\varepsilon} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{p} \arctan \left( \frac{p}{2m_0} \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{N-1}{96\pi^2} u_0^2 \frac{m_0^4}{p^2} \arctan \left( \frac{p}{2m_0} \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{2243}$  (4)

$$= G_{2242}$$

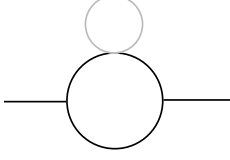
$G_{2244} \quad (4)$ 


$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3} S_{ijkl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{mi}(k) \hat{\pi}_{nj}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\pi}_{ko}(l) \hat{\pi}_{lp}(\mathbf{p} - \mathbf{l}) \\
 &= -\frac{1}{9} (N+1)(N-1) g_0^2 m_0^2 I_1(p; 0, 0)^2 \\
 &= -\frac{(N+1)(N-1)}{576} u_0^2 \frac{m_0^4}{p^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

 $G_{2245} \quad (2)$ 


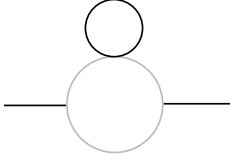
$$\begin{aligned}
 &= -3g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\sigma}(l) \\
 &= -3g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 ((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m_0^2) (l^2 + m_0^2)} \\
 &= -3g_0^2 m_0^2 J_1(m_0) I_3(p; m_0, m_0) \\
 &= -3g_0^2 m_0^2 \frac{-m_0^{1-\varepsilon}}{4\pi} \frac{1}{8\pi} m_0^{-1-\varepsilon} \frac{1}{4m_0^2 + p^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{3}{32\pi^2} u_0^2 \frac{m_0^4}{4m_0^2 + p^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{2246} \ (2)$



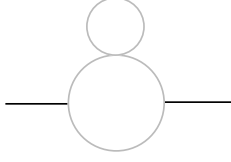
$$= -\delta_{ij} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\pi}_{ij}(l) = 0$$

$G_{2247} \ (2)$

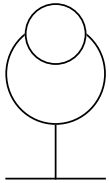


$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\pi}_{lm}(k) \hat{\pi}_{ni}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\sigma}(l) \\ &= -\frac{N-1}{9} g_0^2 m_0^2 I_3(p; h m_0, h m_0) J_1(m_0) \\ &= -\frac{N-1}{9} g_0^2 m_0^2 \frac{1}{8\pi} \frac{1}{h m_0} \frac{1}{4h^2 m_0^2 + p^2} \left(-\frac{m_0}{4\pi}\right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{N-1}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \frac{1}{h(4h^2 + \frac{p^2}{m_0^2})} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{N-1}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \frac{m_0^2}{p^2} \left( \frac{1}{h} + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$



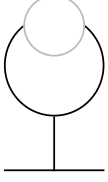
$G_{2248} \quad (2)$ 


$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3} S_{ijkl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{no}(k) \hat{\pi}_{mk}(k) \hat{\pi}_{pl}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\pi}_{ij}(l) \\
 &= -\frac{1}{9} (N+1)(N-1) g_0^2 m_0^2 I_3(p; hm_0, hm_0) J_1(hm_0) \\
 &= \frac{(N+1)(N-1)}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \frac{m_0^2}{4hm_0^2 + p^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{(N+1)(N-1)}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \frac{m_0^2}{p^2} + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

 $G_{2249} \quad (4)$ 


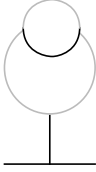
$$\begin{aligned}
 &= 9g_0^2 m_0^4 \hat{\sigma}(0) \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(l) \hat{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) = 9g_0^2 m_0^2 D_2(m_0, m_0, m_0) \\
 &= 9g_0^2 m_0^2 \frac{1}{96\pi^2} m_0^{-2-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \frac{3}{32\pi^2} u_0^2 m_0^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{2250}$  (4)



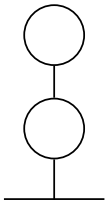
$$\begin{aligned}
 &= g_0^2 \delta_{ij} \delta_{kl} m_0^4 \hat{\sigma}(0) \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\pi}_{ik}(l) \hat{\pi}_{jl}(\mathbf{k}-\mathbf{l}) = g_0^2 (N-1) m_0^2 D_2(m_0, 0, 0) \\
 &= g_0^2 m_0^2 \frac{N-1}{32\pi^2} m_0^{-2-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \frac{N-1}{32\pi^2} u_0^2 m_0^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{2251}$  (2)



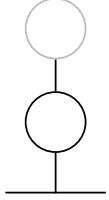
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^4 \hat{\sigma}(0) \int_k \int_l \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\pi}_{lm}(k) \hat{\pi}_{in}(l) \hat{\sigma}(\mathbf{k}-\mathbf{l}) \\
 &= \frac{1}{3} (N-1) g_0^2 m_0^2 D_2(hm_0, hm_0, m_0) = \frac{N-1}{96\pi^2} u_0^2 m_0^2 \frac{1}{2h^2 + h} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
 &= \frac{N-1}{96\pi^2} u_0^2 m_0^2 \left( \frac{1}{h} - 2 + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{2252}$  (4)

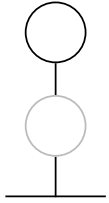


$$= 9g_0^2 m_0^4 \hat{\sigma}(0)^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(l) = 9g_0^2 m_0^2 J_2(m_0) J_1(m_0)$$

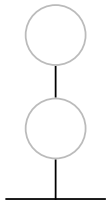
$$= -9g_0^2 \frac{1}{8\pi} \frac{1}{4\pi} m_0^{-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = -\frac{9}{32\pi^2} u_0^2 m_0^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

 $G_{2253} \quad (4)$ 


$$= 3\delta_{ij} g_0^2 m_0^4 \hat{\sigma}(0)^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\pi}_{ij}(l) = 0$$

 $G_{2254} \quad (4)$ 


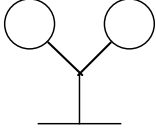
$$\begin{aligned} &= g_0^2 \delta_{ij} \delta_{kl} m_0^4 \hat{\sigma}(0)^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{ik}(k) \hat{\pi}_{jl}(k) \hat{\sigma}(l) = g_0^2 (N-1) J_2(hm_0) J_1(m_0) \\ &= -\frac{N-1}{32\pi^2} u_0^2 m_0^2 h^{-1-\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

 $G_{2255} \quad (4)$ 


$$= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^4 \hat{\sigma}(0)^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{ik}(k) \hat{\pi}_{jl}(k) \hat{\pi}_{mn}(l)$$

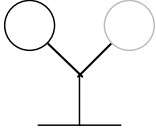
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3}(N-1)^2 g_0^2 J_2(hm_0) J_1(hm_0) \\
 &= -\frac{(N-1)^2}{96\pi^2} u_0^2 m_0^2 h^{-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{2256}$  (8)



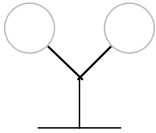
$$\begin{aligned}
 &= 9g_0^2 m_0^4 \hat{\sigma}(0)^3 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(l) = 9g_0^2 \frac{1}{m_0^2} J_1(m_0)^2 \\
 &= 9g_0^2 \frac{m_0^{2-2\varepsilon}}{m_0^2} \frac{1}{16\pi^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \frac{9}{16\pi^2} u_0^2 m_0^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{2257}$  (4)

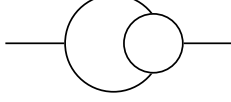


$$= 3\delta_{ij} g_0^2 m_0^4 \hat{\sigma}(0)^3 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{ij}(l) = 0$$

$G_{2258}$  (8)



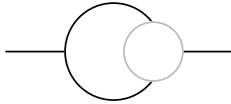
$$= \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 m_0^4 \hat{\sigma}(0)^3 \int_k \int_l \hat{\pi}_{ij}(k) \hat{\pi}_{kl}(l) = 0$$

$G_{2259} \quad (2)$ 


$$\begin{aligned}
&= 9g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \hat{\sigma}(l) \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{l}) \\
&= 9g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m_0^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2)} \\
&\quad \frac{1}{(l^2 + m_0^2)((\mathbf{p} - \mathbf{l})^2 + m_0^2)} \\
&= 9g_0^2 m_0^4 I_6(p; m_0, m_0, m_0, m_0, m_0)
\end{aligned}$$

Spezialfall  $p = im_0$ :

$$G_{2259}(im_0) = \frac{9}{16\pi^2} u_0^2 m_0^2 d_1$$

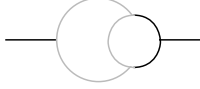
 $G_{2260} \quad (2)$ 


$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\pi}_{jk}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \hat{\pi}_{ml}(l) \hat{\pi}_{ni}(\mathbf{p} - \mathbf{l}) \\
&= \frac{N-1}{3} g_0^2 m_0^4 I_6(p; m_0, m_0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Spezialfall  $p = im_0, h \rightarrow 0$ :

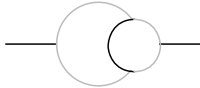
$$G_{2260}(im_0) = \frac{N-1}{96\pi^2} u_0^2 m_0^2 d_2$$

$G_{2261} \ (2)$



$$= G_{2260}$$

$G_{2262} \ (2)$



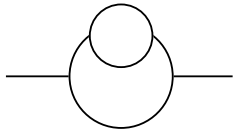
$$= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\pi}_{lm}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \hat{\pi}_{no}(l) \hat{\pi}_{pi}(\mathbf{p} - \mathbf{l})$$

$$= \frac{N-1}{9} g_0^2 m_0^4 I_6(p; hm_0, hm_0, m_0, hm_0, hm_0)$$

Spezialfall  $p = im_0, h \rightarrow 0$ :

$$G_{2262}(im_0) = \frac{N-1}{144\pi^2} u_0^2 m_0^2 d_3$$

$G_{2263} \ (2)$

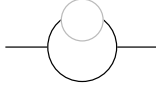


$$= 9g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\sigma}(l) \hat{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{l})$$

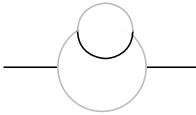
$$= 9g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 ((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m_0^2) (l^2 + m_0^2) ((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2)}$$

$$= 9g_0^2 m_0^4 I_9(p; m_0, m_0, m_0, m_0, m_0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{9}{128\pi^2} u_0^2 m_0^2 \frac{m_0}{p} \left( \left( -\frac{8}{3} + \log 9 \right) \arctan \frac{p}{2m_0} + \frac{m_0 p}{4m_0^2 + p^2} \log 9 \right. \\
 &\quad + \frac{1}{3p(4m_0^2 + p^2)} \left[ 2p \arctan \frac{p}{3m_0} (m_0^2(4 + 18 \log 3) + p^2(1 + \log 27)) \right. \\
 &\quad \left. \left. - 3m_0(4m_0^2 + p^2(1 + \log 3)) \log(1 + \frac{p^2}{9m_0^2}) \right] + i \text{Di}(\frac{p}{m_0}) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

 $G_{2264} \quad (2)$ 


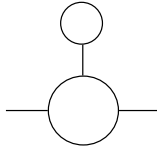
$$\begin{aligned}
 &= g_0^2 \delta_{ij} \delta_{kl} m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\pi}_{ik}(l) \hat{\pi}_{jl}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \\
 &= g_0^2 (N - 1) m_0^4 I_9(p; m_0, 0, 0, m_0, m_0) \\
 &= \frac{N - 1}{64\pi^2} u_0^2 m_0^2 \frac{m_0}{p} \left( -i\pi \arctan \frac{p}{2m_0} + \frac{4m_0^2 + p^2 + 2im_0^2\pi + ip^2\pi}{4m_0^2 + p^2} \arctan \frac{p}{m_0} \right. \\
 &\quad + \frac{m_0}{p(4m_0^2 + p^2)} (-ip^2 + 2m_0^2 + p^2) \log(1 + \frac{p^2}{m_0^2}) \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} i \text{Di}_2(\frac{p}{m_0}) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

 $G_{2265} \quad (1)$ 


$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\pi}_{lm}(k) \hat{\pi}_{no}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\pi}_{pi}(l) \hat{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \\
 &= \frac{1}{9} (N - 1) g_0^2 m_0^4 I_9(\mathbf{p}; hm_0, hm_0, m_0, hm_0, hm_0)
 \end{aligned}$$

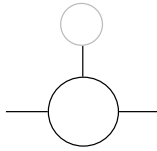
$$\begin{aligned}
 &= \frac{(N-1)m_0^4}{864\pi^2 p^4} u_0^2 m_0^2 \left( -4 \frac{p^2}{m_0^2} - \pi \frac{p^3}{m_0^3} + \log \left( 1 + \frac{p^2}{m_0^2} \right) + 2 \frac{p^3}{m_0^3} \arctan \frac{p}{m_0} \right) \\
 &\quad + \frac{m_0^2(N-1)}{288\pi^2 p^2} \frac{1}{h} u_0^2 m_0^2 + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

$G_{2266} (2)$



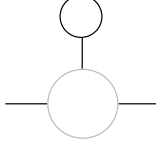
$$\begin{aligned}
 &= 9g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\sigma}(0) \hat{\sigma}(l) \\
 &= 9g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 ((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m_0^2) (l^2 + m_0^2)} \\
 &= 9g_0^2 m_0^2 I_3(p; m_0, m_0) J_1(m_0) \\
 &= 9g_0^2 m_0^2 \frac{-m_0^{1-\varepsilon}}{4\pi} \frac{1}{8\pi} m_0^{-\varepsilon-1} \frac{1}{4m_0^2 + p^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{9}{32\pi^2} u_0^2 \frac{m_0^4}{4m_0^2 + p^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{2267} (2)$

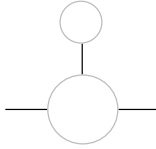


$$= 3\delta_{ij} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\sigma}(0) \hat{\pi}_{ij}(l) = 0$$



$G_{2268} \quad (2)$ 


$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\pi}_{km}(k) \hat{\pi}_{ni}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\sigma}(0) \hat{\sigma}(l) \\
 &= \frac{N-1}{3} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)^2 ((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + h_0^2) (l^2 + m_0^2)} \\
 &= \frac{N-1}{3} g_0^2 m_0^2 I_3(p; hm_0, hm_0) J_1(m_0) \\
 &= \frac{N-1}{3} g_0^2 m_0^2 \frac{1}{8\pi} \frac{1}{hm_0} \frac{1}{4h^2 m_0^2 + p^2} \frac{-m_0}{4\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{N-1}{96\pi^2} g_0^2 \frac{1}{(4h^2 + \frac{p^2}{m_0^2})h} = -\frac{N-1}{96\pi^2} u_0^2 m_0^2 \left( \frac{1}{h} \frac{m_0^2}{p^2} + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

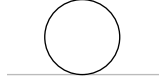
 $G_{2269} \quad (2)$ 


$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\pi}_{lm}(k) \hat{\pi}_{ni}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{\sigma}(0) \hat{\pi}_{op}(l) \\
 &= \frac{(N-1)^2}{9} g_0^2 m_0^2 I_3(p; hm_0, hm_0) J_1(hm_0) \\
 &= -\frac{(N-1)^2}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \frac{m_0^2}{4hm_0^2 + p^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{(N-1)^2}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \frac{m_0^2}{p^2} + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

### A.3 Zweipunktfunktion des masselosen Feldes

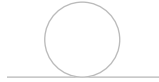
#### A.3.1 Ein-Loop

$G_{2111} (2)$



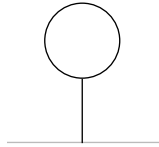
$$= -\frac{1}{3}\delta_{ij}g_0 \int_k \hat{\sigma}(k) = -\frac{1}{3}\delta_{ij}g_0 J_1(m_0) = \frac{m_0^2}{12\pi}u_0\delta_{ij}(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$G_{2112} (2)$

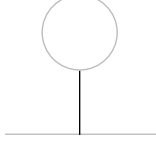


$$= -g_0 S_{ijkl} \int_k \hat{\pi}_{kl}(k) = -g_0 \frac{N+1}{3} \delta_{ij} \int_k \frac{1}{k^2} = 0$$

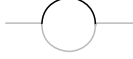
$G_{2113} (2)$



$$= \delta_{ij}g_0 m_0^2 \hat{\sigma}(0) \int_k \hat{\sigma}(k) = \delta_{ij}g_0 m_0^2 J_1(m_0) = -\frac{1}{4\pi}m_0^2 u_0 \delta_{ij}(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$G_{2114} \quad (2)$ 


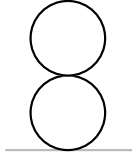
$$= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0 m_0^2 \hat{\sigma}(0) \int_k \hat{\pi}_{kl}(k) = \frac{1}{3} \delta_{ij} g_0 \int_k \frac{1}{k^2} = 0$$

 $G_{2115} \quad (1)$ 


$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0 m_0^2 \int_k \hat{\pi}_{ik}(k) \hat{\sigma}(k) \\ &= \frac{1}{3} \delta_{ij} g_0 m_0^2 I_1(0; m_0, 0) = \frac{1}{12\pi} m_0^2 u_0 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{p^2} G_{2115}(0) &= \frac{1}{3} \delta_{ij} g_0 m_0^2 \partial_{p^2} I_1(0; m_0, 0) \\ &= -\frac{1}{36\pi} u_0 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

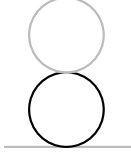
### A.3.2 Zwei-Loop

 $G_{22101} \quad (4)$ 


$$= \frac{1}{3} \delta_{ij} g_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(l) = \frac{1}{3} \delta_{ij} g_0^2 J_2(m_0) J_1(m_0)$$

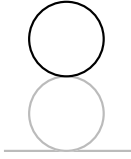
$$= -\frac{1}{96\pi^2} m_0^2 u_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$G_{22102}$  (4)



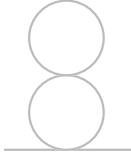
$$= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\pi}_{kl}(l) = 0$$

$G_{22103}$  (4)

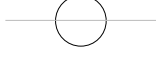


$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} S_{ijkl} \delta_{mn} g_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{km}(k) \hat{\pi}_{ln}(k) \hat{\sigma}(l) = \frac{1}{3} S_{ijkk} g_0^2 J_2(hm_0) J_1(m_0) \\ &= -\frac{N+1}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 h^{-1-\varepsilon} \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{22104}$  (4)



$$\begin{aligned} &= g_0^2 S_{ijkl} S_{mnop} \int_k \int_l \hat{\pi}_{km}(k) \hat{\pi}_{ln}(k) \hat{\pi}_{op}(l) = g_0^2 S_{ijkl} S_{kloo} J_2(hm_0) J_1(hm_0) \\ &= -\frac{(N+1)^2}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 h^{-2\varepsilon} \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{22105} \quad (2)$ 


$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\sigma}(l) = \frac{1}{9} \delta_{ij} g_0^2 I_2(0; m_0, 0, m_0) \\
 &= \frac{1}{9} \delta_{ij} g_0^2 \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log \pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\
 &= \frac{1}{288\pi^2} \delta_{ij} u_0^2 m_0^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log \pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)
 \end{aligned}$$

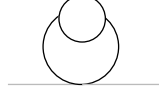
$$\begin{aligned}
 \partial_{p^2} G_{22105}(0) &= \frac{1}{9} \delta_{ij} g_0^2 \partial_{p^2} I_2(0; m_0, 0, m_0) \\
 &= \frac{1}{9} \delta_{ij} g_0^2 \frac{-1}{384\pi^2 m_0^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = -\frac{1}{3456\pi^2} u_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

 $G_{22106} \quad (6)$ 


$$\begin{aligned}
 &= g_0^2 S_{ijkl} S_{mnop} \int_k \int_l \hat{\pi}_{jn}(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \hat{\pi}_{kn}(k) \hat{\pi}_{lo}(l) \\
 &= g_0^2 S_{ijkl} S_{jklo} I_2(0; 0, 0, 0) \\
 &= g_0^2 \frac{N+1}{3} \delta_{io} \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + (1 - \log 9) - 2 \log h + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\
 &= \frac{N+1}{96\pi^2} \delta_{io} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + (1 - \log 9) - 2 \log h + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) u_0^2 m_0^2
 \end{aligned}$$

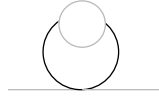
$$\begin{aligned}
 \partial_{p^2} G_{22106}(0) &= g_0^2 \frac{N+1}{3} \delta_{io} I_2(0; hm_0, hm_0, hm_0) \\
 &= g_0^2 \frac{N+1}{3} \delta_{io} \frac{-1}{864\pi^2 m_0^2} \frac{1}{h^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{N+1}{2592\pi^2} u_0^2 \delta_{io} \frac{1}{h^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{22107}$  (4)



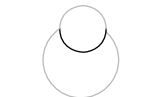
$$\begin{aligned}
 &= -g_0^2 \delta_{ij} m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \hat{\sigma}(l) = -g_0^2 \delta_{ij} D_2(m_0, m_0, m_0) \\
 &= -\frac{1}{96\pi^2} u_0^2 m_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{22108}$  (4)

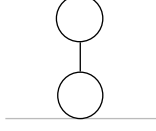


$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\pi}_{km}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \hat{\pi}_{ln}(l) \\
 &= -\frac{1}{9} \delta_{ij} (N - 1) g_0^2 m_0^2 D_2(m_0, 0, 0) = -\frac{N - 1}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

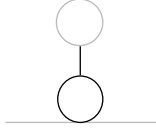
$G_{22109}$  (2)



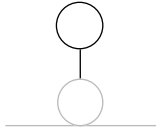
$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3} S_{ijkl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{km}(k) \hat{\pi}_{lo}(k) \hat{\pi}_{pn}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \hat{\sigma}(l) \\
 &= -\frac{1}{9} (N + 1) \delta_{ij} D_2(hm_0, hm_0, m_0) \\
 &= -\frac{N + 1}{9} g_0^2 m_0^2 \frac{1}{32\pi^2 m_0^2} \left( \frac{1}{h} - 2 + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{N + 1}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \left( \frac{1}{h} - 2 + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{22110} \quad (4)$ 


$$\begin{aligned}
 &= -\delta_{ij} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(0) \hat{\sigma}(l)^2 = -\delta_{ij} g_0^2 J_2(m_0) J_1(m_0) \\
 &= \frac{1}{32\pi^2} u_0^2 m_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

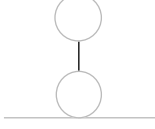
 $G_{22111} \quad (4)$ 


$$= -\frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{kl}(k) \hat{\sigma}(0) \hat{\sigma}(l)^2 = 0$$

 $G_{22112} \quad (4)$ 


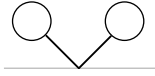
$$\begin{aligned}
 &= -S_{ijkl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(0) \hat{\pi}_{km}(l) \hat{\pi}_{ln}(l) \\
 &= -\frac{N+1}{3} \delta_{ij} g_0^2 J_2(hm_0) J_1(m_0) = \frac{N+1}{96\pi^2} h^{-1-\varepsilon} u_0^2 m_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{22113}$  (4)



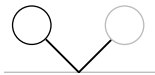
$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3} S_{ijkl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{op}(k) \hat{\sigma}(0) \hat{\pi}_{km}(l) \hat{\pi}_{ln}(l) \\
 &= -\frac{1}{3} \frac{N+1}{3} \delta_{ij} (N-1) g_0^2 J_2(hm_0) J_1(hm_0) \\
 &= \frac{(N-1)(N+1)}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 h^{-2\varepsilon} \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{22114}$  (8)



$$\begin{aligned}
 &= -\delta_{ij} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^2 \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(l) \\
 &= -\delta_{ij} g_0^2 \frac{1}{m_0^2} J_1(m_0)^2 = -\frac{1}{16\pi^2} u_0^2 m_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{22115}$  (4)

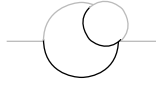


$$= -\frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^2 \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{kl}(l) = 0$$



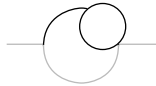
$G_{22116} \text{ (8)}$ 


$$= -\frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}g_0^2m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^2 \hat{\pi}_{kl}(k) \hat{\pi}_{mn}(l) = 0$$

 $G_{22117} \text{ (1)}$ 


$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}g_0^2m_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\pi}_{lm}(l) \hat{\sigma}(\mathbf{1}-\mathbf{k}) \hat{\sigma}(k) \\ &= -\frac{1}{9}\delta_{in}g_0^2m_0^2 I_7(0; m_0, 0, m_0, 0) = -\frac{1}{9}\delta_{in}g_0^2m_0^2 \frac{1}{16\pi^2 m_0^2} \log 2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= -\frac{1}{144\pi^2} u_0^2 m_0^2 \log 2 \delta_{in} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{p^2} G_{22117}(0) &= -\frac{1}{9}\delta_{in}g_0^2m_0^2 \partial_{p^2} I_7(0; m_0, 0, m_0, 0) \\ &= -\frac{1}{384\pi^2} u_0^2 \left(1 - \frac{8}{3} \log 2\right) \delta_{in} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

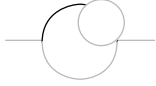
 $G_{22118} \text{ (2)}$ 


$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}g_0^2m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(l) \hat{\sigma}(\mathbf{1}-\mathbf{k}) \hat{\pi}_{jk}(k) \\ &= -\frac{1}{3}\delta_{il}g_0^2m_0^2 I_7(0; 0, m_0, m_0, m_0) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3}\delta_{il}g_0^2m_0^2\frac{1}{16\pi^2m_0^2}\log\frac{3}{2}(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) = -\frac{1}{48\pi^2}u_0^2m_0^2\log\frac{3}{2}\delta_{il}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))$$

$$\begin{aligned}\partial_{p^2}G_{22118}(0) &= -\frac{1}{3}\delta_{il}g_0^2m_0^2\partial_{p^2}I_7(0;0,m_0,m_0,m_0) \\ &= \frac{1}{1152\pi^2}u_0^2\left(1+8\log\frac{3}{2}\right)\delta_{il}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))\end{aligned}$$

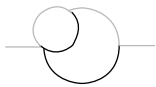
$G_{22119}$  (2)



$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}S_{mnop}g_0^2m_0^2\int_k\int_l\hat{\sigma}(k)\hat{\pi}_{kn}(l)\hat{\pi}_{lo}(\mathbf{1}-\mathbf{k})\hat{\pi}_{jm}(k) \\ &= -\frac{1}{3}\frac{N+1}{3}\delta_{ip}g_0^2m_0^2I_7(0;hm_0,hm_0,hm_0,m_0) \\ &= -\frac{N+1}{9}\delta_{ip}g_0^2\frac{1}{16\pi^2}(-\log(3h)+\mathcal{O}(h))(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{N+1}{144\pi^2}u_0^2m_0^2(\log(3h)+\mathcal{O}(h))\delta_{ip}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))\end{aligned}$$

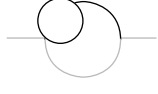
$$\begin{aligned}\partial_{p^2}G_{22119}(0) &= -\frac{N+1}{9}\delta_{ip}g_0^2m_0^2\partial_{p^2}I_7(0;hm_0,hm_0,hm_0,m_0) \\ &= -\frac{N+1}{7776\pi^2}\left(-\frac{1}{h^2}+11+18\log 3+18\log h+\mathcal{O}(h)\right)u_0^2\delta_{ip}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))\end{aligned}$$

$G_{22120}$  (1)



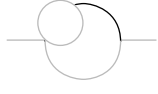
$$= G_{22117}$$

$$G_{22121} \quad (2)$$



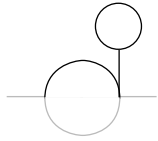
$$= G_{22118}$$

$$G_{22122} \quad (2)$$



$$= G_{22119}$$

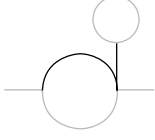
$$G_{22123} \quad (2)$$



$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}g_0^2m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)\hat{\pi}_{jk}(k)\hat{\sigma}(0)\hat{\sigma}(l) \\ &= -\frac{1}{3}\delta_{ik}g_0^2I_1(0;m_0,0)J_1(m_0) = \frac{1}{48\pi^2}u_0^2m_0^2\delta_{ik}(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{p^2}G_{22123}(0) &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}g_0^2m_0^2\partial_{p^2}I_1(0;m_0,0)J_1(m_0) \\ &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}g_0^2\left(-\frac{1}{12m_0^3\pi}\right)\left(-\frac{m_0}{4\pi}\right)(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) = -\frac{1}{144\pi^2}u_0^2\delta_{ij}(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

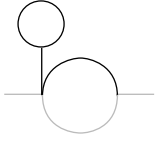
$G_{22124}$  (2)



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}g_0^2m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)\hat{\pi}_{jk}(k)\hat{\sigma}(0)\hat{\pi}_{lm}(l) \\
 &= -\frac{1}{9}\delta_{ik}(N-1)g_0^2I_1(0;m_0,0)J_1(0) = 0
 \end{aligned}$$

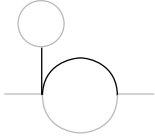
$$\partial_{p^2}G_{22124}(0) = 0$$

$G_{22125}$  (2)



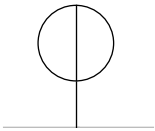
$$= G_{22123}$$

$G_{22126}$  (2)



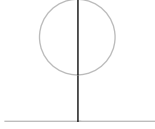
$$= G_{22124}$$

$G_{22127}$  (6)

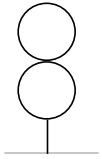


$$= -\delta_{ij}g_0^2m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k)\hat{\sigma}(l)\hat{\sigma}(\mathbf{k}+\mathbf{l})\hat{\sigma}(0) = -g_0^2m_0^2\delta_{ij}I_2(0;m_0,m_0,m_0)$$

$$= -\frac{1}{32\pi^2} u_0^2 m_0^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + 1 - \log 9 \right) \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

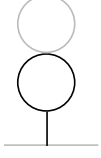
 $G_{22128} \quad (2)$ 


$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\pi}_{km}(k) \hat{\pi}_{ln}(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \hat{\sigma}(l) \hat{\sigma}(0) \\ &= -\frac{1}{9} \delta_{ij} (N-1) g_0^2 I_2(0; 0, m_0, 0) \\ &= -\frac{N-1}{288\pi^2} \delta_{ij} u_0^2 m_0^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

 $G_{22129} \quad (4)$ 


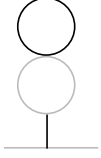
$$\begin{aligned} &= -\delta_{ij} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0) \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(l) \\ &= -\delta_{ij} g_0^2 J_2(m_0) J_1(m_0) = \frac{1}{32\pi^2} u_0^2 m_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{22130}$  (4)



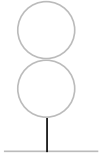
$$= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}g_0^2m_0^2\int_k\int_l\hat{\sigma}(0)\hat{\sigma}(k)^2\hat{\pi}_{kl}(l)=0$$

$G_{22131}$  (4)



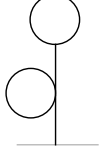
$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}g_0^2m_0^2\int_k\int_l\hat{\sigma}(0)\hat{\pi}_{km}(k)\hat{\pi}_{ln}(k)\hat{\sigma}(l) \\ &= -\frac{1}{9}\delta_{ij}(N-1)g_0^2J_2(hm_0)J_1(m_0)=\frac{N-1}{288\pi^2}h^{-1-\varepsilon}u_0^2m_0^2\delta_{ij}(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{22132}$  (4)



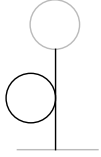
$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}S_{mnop}g_0^2m_0^2\int_k\int_l\hat{\sigma}(0)\hat{\pi}_{km}(k)\hat{\pi}_{ln}(k)\hat{\pi}_{op}(l) \\ &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{(N-1)(N+1)}{3}g_0^2J_2(hm_0)J_1(hm_0) \\ &= \frac{(N-1)(N+1)}{288\pi^2}h^{-2\varepsilon}u_0^2m_0^2\delta_{ij}(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{22133}$  (4)



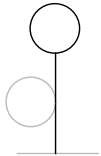
$$\begin{aligned}
 &= -\delta_{ij} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^2 \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(l) = -\delta_{ij} \frac{g_0^2}{m_0^2} J_1(m_0)^2 \\
 &= -\frac{1}{16\pi^2} u_0^2 m_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{22134}$  (4)



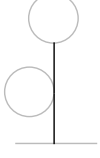
$$= -\frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^2 \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{kl}(l) = 0$$

$G_{22135}$  (4)



$$= -\frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^2 \hat{\sigma}(l) \hat{\pi}_{kl}(k) = 0$$

$G_{22136}$  (4)



$$= -\frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}g_0^2m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^2 \hat{\pi}_{kl}(k) \hat{\pi}_{mn}(l) = 0$$

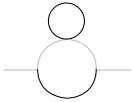
$G_{22137}$  (1)



$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}g_0^2m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\sigma}(l) \hat{\pi}_{lm}(l) \\ &= -\frac{1}{9}\delta_{in}g_0^2m_0^2 I_1(0; m_0, 0)^2 = -\frac{1}{144\pi^2}u_0^2m_0^2\delta_{in}(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{p^2} G_{22137} &= -\frac{1}{9}\delta_{ij}g_0^2m_0^2 \partial_{p^2} I_1(0; m_0, 0)^2 \\ &= -\frac{1}{9}\delta_{ij}g_0^2m_0^2 \left( -\frac{1}{24m_0^4\pi^2} \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{216\pi^2}u_0^2\delta_{ij}(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{22138}$  (2)



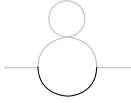
$$= -\frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}g_0^2m_0^2 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\pi}_{lm}(k) \hat{\sigma}(l)$$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{9}\delta_{in}g_0^2m_0^2I_3(0;hm_0,m_0)J_1(m_0) \\
 &= -\frac{1}{9}\delta_{in}g_0^2m_0^2\frac{1}{8\pi}\frac{1}{m_0^3}\left(\frac{1}{h}-2+\mathcal{O}(h)\right)\frac{-m_0}{4\pi}(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{1}{288\pi^2}u_0^2m_0^2\left(\frac{1}{h}-2+\mathcal{O}(h)\right)\delta_{in}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{p^2}G_{22138}(0) &= -\frac{1}{9}\delta_{in}g_0^2m_0^2\partial_{p^2}I_3(0;hm_0,m_0)J_1(m_0) \\
 &= -\frac{1}{9}\delta_{in}g_0^2m_0^2\left(\frac{-1}{8\pi m_0^5h}+\frac{1}{2m_0^5\pi}+\mathcal{O}(h)\right)\left(\frac{-m_0}{4\pi}\right)(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{1}{72\pi^2}u_0^2\left(-\frac{1}{4h}+1+\mathcal{O}(h)\right)\delta_{in}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

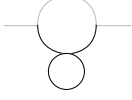
$G_{22139} (2)$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}S_{klop}\delta_{mn}g_0^2m_0^2\int_k\int_l\hat{\sigma}(k)\hat{\pi}_{jk}(k)\hat{\pi}_{lm}(k)\hat{\pi}_op(l) \\
 &= -\frac{1}{3}\frac{N+1}{3}\delta_{in}g_0^2m_0^2I_3(0;hm_0,m_0)J_1(hm_0) \\
 &= \frac{N+1}{288\pi^2}\delta_{in}u_0^2m_0^2\left(\frac{1}{h}-2+\mathcal{O}(h)\right)(hm_0)(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{N+1}{288\pi^2}u_0^2m_0^2(1+\mathcal{O}(h))\delta_{in}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{p^2}G_{22139} &= -\frac{N+1}{9}\delta_{in}g_0^2m_0^2\partial_{p^2}I_3(0;hm_0,m_0)J_1(hm_0) \\
 &= -\frac{N+1}{9}\delta_{in}g_0^2m_0^2\left(\frac{-1}{8\pi m_0^5h}+\frac{1}{2\pi}m_0^5+\mathcal{O}(h)\right)\left(\frac{-hm_0}{4\pi}\right)(1+\mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{N+1}{288\pi^2}u_0^2\delta_{in}+\mathcal{O}(h)+\mathcal{O}(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

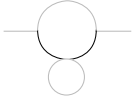
$G_{22140} \ (2)$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}g_0^2m_0^2\int_k\int_l\hat{\pi}_{jk}(k)\hat{\sigma}(k)^2\hat{\sigma}(l)=-\frac{1}{3}\delta_{il}g_0^2m_0^2I_3(0;m_0,0)J_1(m_0) \\
 &= \frac{1}{96\pi^2}u_0^2m_0^2\delta_{il}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

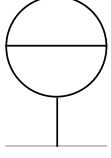
$$\begin{aligned}
 \partial_{p^2}G_{22140}(0) &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}g_0^2m_0^2\partial_{p^2}I_3(0;m_0,0)J_1(m_0) \\
 &= -\frac{1}{3}\delta_{ij}g_0^2m_0^2\frac{-1}{8\pi m_0^5}\frac{-m_0}{4\pi}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))=-\frac{1}{96\pi^2}u_0^2\delta_{ij}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{22141} \ (2)$

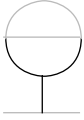


$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}g_0^2m_0^2\int_k\int_l\hat{\pi}_{jk}(k)\hat{\sigma}(k)^2\hat{\pi}_{mn}(l) \\
 &= -\frac{1}{9}(N-1)\delta_{il}g_0^2m_0^2I_3(0;m_0,0)J_1(0)=0
 \end{aligned}$$

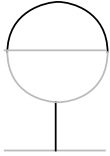
$$\partial_{p^2}G_{22141}(0) = 0$$

$G_{22142} \quad (4)$ 


$$\begin{aligned}
 &= 3\delta_{ij}g_0^2m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)\hat{\sigma}(k)^2\hat{\sigma}(l)\hat{\sigma}(\mathbf{k}-\mathbf{l}) = 3\delta_{ij}g_0^2m_0^2D_2(m_0, m_0, m_0) \\
 &= \frac{1}{32\pi^2}u_0^2m_0^2\delta_{ij}(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

 $G_{22143} \quad (4)$ 


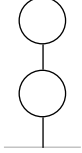
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}g_0^2m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)\hat{\sigma}(k)^2\hat{\pi}_{km}(l)\hat{\pi}_{ln}(\mathbf{k}-\mathbf{l}) \\
 &= \frac{1}{3}\delta_{ij}(N-1)g_0^2m_0^2D_2(m_0, 0, 0) = \frac{N-1}{96\pi^2}u_0^2m_0^2\delta_{ij}(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

 $G_{22144} \quad (2)$ 


$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}\delta_{op}g_0^2m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)\hat{\pi}_{km}(k)\hat{\pi}_{lo}(k)\hat{\pi}_{np}(l)\hat{\sigma}(\mathbf{k}-\mathbf{l}) \\
 &= \frac{1}{9}\delta_{ij}(N-1)g_0^2m_0^2D_2(hm_0, hm_0, m_0)
 \end{aligned}$$

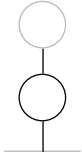
$$= \frac{N-1}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \left( \frac{1}{h} - 2 + \mathcal{O}(h) \right) \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$G_{22145}$  (4)



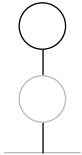
$$\begin{aligned} &= 3\delta_{ij} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^2 \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(l) = 3\delta_{ij} g_0^2 J_2(m_0) J_1(m_0) \\ &= -\frac{3}{32\pi^2} m_0^2 u_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{22146}$  (4)

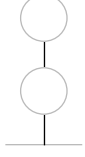


$$= \delta_{ij} \delta_{lk} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^2 \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\pi}_{kl}(l) = 0$$

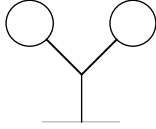
$G_{22147}$  (4)



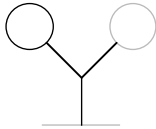
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^2 \hat{\pi}_{km}(k) \hat{\pi}_{ln}(k) \hat{\sigma}(l) \\ &= \frac{1}{3} \delta_{ij} (N-1) g_0^2 J_2(hm_0) J_1(m_0) = -\frac{N-1}{96\pi^2} m_0^2 u_0^2 h^{-1-\varepsilon} \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{22148} \quad (4)$ 


$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^2 \hat{\pi}_{km}(k) \hat{\pi}_{ln}(l) \hat{\pi}_{op}(l) \\
&= \frac{1}{9} \delta_{ij} (N-1)^2 g_0^2 J_2(hm_0) J_1(hm_0) \\
&= -\frac{(N-1)^2}{288\pi^2} m_0^2 u_0^2 h^{-2\varepsilon} \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
\end{aligned}$$

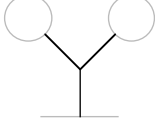
 $G_{22149} \quad (8)$ 


$$\begin{aligned}
&= 3\delta_{ij} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^3 \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(l) = 3\delta_{ij} \frac{g_0^2}{m_0^2} J_1(m_0)^2 \\
&= \frac{3}{16\pi^2} m_0^2 u_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
\end{aligned}$$

 $G_{22150} \quad (4)$ 


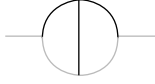
$$= \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^3 \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{kl}(l) = 0$$

$G_{22151}$  (8)



$$= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0)^3 \hat{\pi}_{kl}(k) \hat{\pi}_{mn}(l) = 0$$

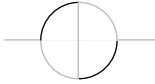
$G_{22152}$  (1)



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\sigma}(k) \hat{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \hat{\pi}_{lm}(l) \hat{\sigma}(l) \\ &= \frac{1}{3} \delta_{in} g_0^2 m_0^4 I_6(0; m_0, 0, m_0, m_0, 0) \\ &= \frac{1}{48\pi^2} u_0^2 m_0^2 \log \frac{4}{3} \delta_{in} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{p^2} G_{22152}(0) &= \frac{1}{3} \delta_{in} g_0^2 m_0^4 \partial_{p^2} I_6(0; m_0, 0, m_0, m_0, 0) \\ &= \frac{1}{576\pi^2} u_0^2 (1 - 32 \log 2 + 16 \log 3 + \mathcal{O}(h)) \delta_{in} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

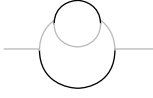
$G_{22153}$  (1)



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{lm}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \hat{\pi}_{no}(l) \hat{\sigma}(l) \\ &= \frac{1}{9} \delta_{ip} g_0^2 m_0^4 I_6(0; m_0, hm_0, hm_0, hm_0, m_0) \end{aligned}$$

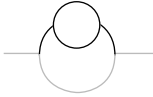
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{9} \delta_{ip} g_0^2 \frac{1}{32\pi^2} (-\log 36 - 2 \log h + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{1}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \delta_{ip} (-\log 4 - 2 \log 3 - 2 \log h + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{p^2} G_{22153}(0) &= \frac{1}{9} \delta_{ip} g_0^2 m_0^4 \partial_{p^2} I_6(0; m_0, hm_0, hm_0, hm_0, m_0) \\
 &= \frac{1}{31104\pi^2} u_0^2 \delta_{ip} \left( 79 - \frac{4}{h^2} + 144 \log 6 + 144 \log h + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)
 \end{aligned}$$

 $G_{22154} (1)$ 


$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\pi}_{lm}(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \hat{\pi}_{no}(l) \\
 &= \frac{1}{9} \delta_{ip} g_0^2 m_0^4 I_9(0; hm_0, m_0, hm_0, hm_0, m_0) \\
 &= \frac{1}{288\pi^2} u_0^2 m_0^2 \left( \frac{1}{h} - 2 - 2 \log 2 + \mathcal{O}(h) \right) \delta_{ip} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{p^2} G_{22154}(0) &= \frac{1}{9} \delta_{ip} g_0^2 m_0^4 \partial_{p^2} \delta_{ip} I_9(0; hm_0, m_0, hm_0, hm_0, m_0) \\
 &= \frac{1}{288\pi^2} u_0^2 \left( -\frac{1}{h} + \frac{7}{12} + \frac{20}{3} \log 2 + \mathcal{O}(h) \right) \delta_{ip} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

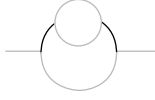
 $G_{22155} (2)$ 


$$\begin{aligned}
 &= \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \hat{\sigma}(l) \\
 &= g_0^2 \delta_{il} m_0^4 I_9(0; m_0, m_0, m_0, m_0, 0)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{96\pi^2} u_0^2 m_0^2 (-1 - 6 \log 2 + 6 \log 3) \delta_{il} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$$\begin{aligned} \partial_{p^2} G_{22155}(0) &= \delta_{il} g_0^2 m_0^4 \partial_{p^2} I_9(0; m_0, m_0, m_0, m_0, 0) \\ &= \frac{1}{1152\pi^2} u_0^2 \left( 1 - 48 \log \frac{3}{2} \right) \delta_{il} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

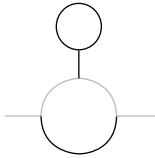
$G_{22156} (2)$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\pi}_{mo}(\mathbf{k} + \mathbf{l}) \hat{\pi}_{np}(l) \\ &= \frac{1}{9} \delta_{il} (N - 1) g_0^2 m_0^4 I_9(0; m_0, hm_0, hm_0, m_0, hm_0) \\ &= -\frac{N-1}{288\pi^2} \delta_{il} u_0^2 m_0^2 (1 + \log 9 + 2 \log h + \mathcal{O}(h)) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{p^2} G_{22156}(0) &= \frac{N-1}{9} \delta_{il} g_0^2 m_0^4 \partial_{p^2} I_9(0; m_0, hm_0, hm_0, m_0, hm_0) \\ &= \frac{N-1}{7776\pi^2} u_0^2 \left( -\frac{1}{h^2} + 31 + 36 \log 3 + 36 \log h + \mathcal{O}(h) \right) \delta_{il} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$G_{22157} (2)$



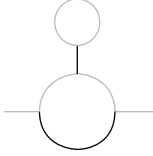
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0) \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\pi}_{lm}(k) \hat{\sigma}(l) \\ &= \frac{1}{3} \delta_{in} g_0^2 m_0^2 I_3(0; hm_0, m_0) J_1(m_0) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \delta_{in} g_0^2 m_0^2 \frac{1}{8\pi m_0^3} \left( \frac{1}{h} - 2 + \mathcal{O}(h) \right) \frac{-m_0}{4\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= -\frac{1}{96\pi^2} u_0^2 m_0^2 \left( \frac{1}{h} - 2 + \mathcal{O}(h) \right) \delta_{in} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{p^2} G_{22157}(0) &= \frac{1}{3} \delta_{ij} g_0^2 m_0^4 \partial_{p^2} I_3(0; h m_0, m_0) J_1(m_0) \\
 &= -\frac{1}{96\pi^2} u_0^2 \left( -\frac{1}{h} + 4 + \mathcal{O}(h) \right) \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

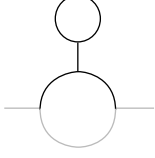
$G_{22158}(2)$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{op} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0) \hat{\sigma}(k) \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\pi}_{lm}(k) \hat{\pi}_{op}(l) \\
 &= \frac{1}{9} \delta_{in} (N-1) g_0^2 m_0^2 I_3(0; h m_0, m_0) J_1(h m_0) \\
 &= -\frac{N-1}{288\pi^2} \delta_{in} u_0^2 m_0^2 (1 + \mathcal{O}(h)) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{p^2} G_{22158}(0) &= \frac{N-1}{9} \delta_{in} g_0^2 m_0^2 \partial_{p^2} I_3(0; h m_0, m_0) J_1(h m_0) \\
 &= \frac{N-1}{288\pi^2} u_0^2 (1 + \mathcal{O}(h)) \delta_{in} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

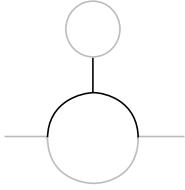
$G_{22159} \quad (2)$



$$\begin{aligned}
 &= \delta_{ij} \delta_{kl} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0) \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\sigma}(l) = \delta_{il} g_0^2 m_0^2 I_3(0; m_0, 0) J_1(m_0) \\
 &= -\frac{1}{32\pi^2} \delta_{il} u_0^2 m_0^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{p^2} G_{22159}(0) &= \delta_{il} g_0^2 m_0^2 \partial_{p^2} I_3(0; m_0, 0) J_1(m_0) \\
 &= \frac{1}{32\pi^2} u_0^2 \delta_{il} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{22160} \quad (2)$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} g_0^2 m_0^4 \int_k \int_l \hat{\sigma}(0) \hat{\pi}_{jk}(k) \hat{\sigma}(k)^2 \hat{\pi}_{mn}(l) \\
 &= \frac{1}{3} \delta_{il} (N-1) g_0^2 m_0^2 I_3(0; m_0, 0) J_1(0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\partial_{p^2} G_{22160}(0) = 0$$

## ANHANG B

---

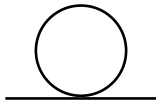
Graphen in der symmetrischen Phase,  $T > T_C$

---

### B.1 Zweipunktfunktion

#### B.1.1 Ein-Loop

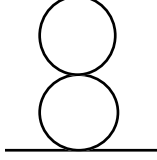
$G_1$  (2)



$$\begin{aligned} &= -g_0 \sum_{k,l} S_{ijkl} \int_k \Delta_{kl}(k) = -g_0 \sum_{k,l} S_{ijkl} \delta_{kl} \int_k \frac{1}{(k^2 + m_0^2)} \\ &= -g_0 \frac{1}{3} (N+2) \delta_{ij} J_1(m_0) = \frac{N+2}{24\pi} m_0^2 u_0 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

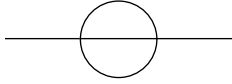
### B.1.2 Zwei-Loop

$G_2$  (4)



$$\begin{aligned}
 &= g_0^2 \sum_{k,l,m,n,o,p} S_{ijkl} S_{mnop} \int_k \int_l \Delta_{lm}(k) \Delta_{nk}(k) \Delta_{op}(l) \\
 &= g_0^2 \sum_{k,l,m,n,o,p} S_{ijkl} S_{mnop} \delta_{lm} \delta_{nk} \delta_{op} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)} \\
 &= g_0^2 \frac{1}{9} (N+2)^2 \delta_{ij} J_2(m_0) J_1(m_0) \\
 &= -\frac{(N+2)^2}{288\pi^2} m_0^2 u_0^2 \delta_{ij} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_3$  (6)



$$\begin{aligned}
 &= g_0^2 \sum_{j,k,l,m,n,o} S_{ijkl} S_{mnop} \int_k \int_l \Delta_{jn}(\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{l}) \Delta_{km}(k) \Delta_{lo}(l) \\
 &= g_0^2 \sum_{j,k,l,m,n,o} S_{ijkl} S_{mnop} \delta_{jn} \delta_{km} \delta_{lo} \\
 &\quad \int_k \int_l \frac{1}{((\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)} \\
 &= g_0^2 \frac{1}{3} (N+2) \delta_{ip} I_2(p; m_0, m_0, m_0) \\
 &= \frac{N+2}{96\pi^2} m_0^2 u_0^2 \delta_{ip} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 3 - 2 \frac{3m_0}{p} \arctan \frac{p}{3m_0} - \log\left(9 + \frac{p^2}{m_0^2}\right) - \gamma \right. \\
 &\quad \left. + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)
 \end{aligned}$$

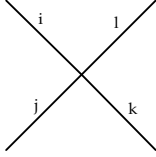
$$\begin{aligned}
 \partial_{p^2} G_3(0) &= g_0^2 \frac{1}{3} (N+2) \delta_{ip} \partial_{p^2} I_2(0; m_0, m_0, m_0) \\
 &= \frac{1}{2592\pi^2} (N+2) \delta_{ip} u_0^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

## B.2 Vierpunktfunktion

Bei der Vierpunktfunktion müssen zusätzliche Permutationen der äußeren Linien berücksichtigt werden, die in dem Symmetriefaktor des Graphen nicht enthalten sind. Diese führen dazu, daß das Endergebnis immer proportional zum  $O(N)$ -symmetrischen Tensor  $S_{ijkl}$  ist.

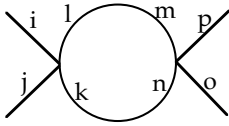
### B.2.1 Ein-Loop

$$G_{411} (1)$$



$$= -g_0 S_{ijkl}$$

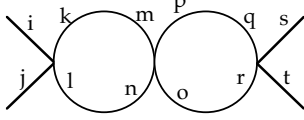
$$G_{412} (2)$$



$$\begin{aligned}
 &= g_0^2 \sum_{k,l,m,n=1}^N S_{ijkl} S_{mnop} \int_k \Delta_{kn}(\mathbf{k}) \Delta_{lm}(\mathbf{k}) + 2 \text{ Permutationen} \\
 &= g_0^2 \sum_{k,l=1}^N S_{ijkl} S_{lkop} \int_k \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} + 2 \text{ Permutationen} \\
 &= g_0^2 S_{ijop} \frac{1}{3} (N+8) J_2(m_0) = \frac{N+8}{24\pi} S_{ijop} u_0 g_0 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

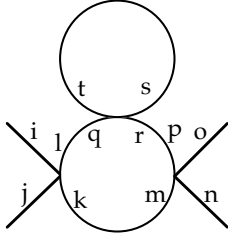
### B.2.2 Zwei-Loop

$G_{421}$  (4)



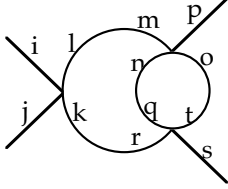
$$\begin{aligned}
 &= -g_0^3 \sum_{k,l,m,n,o,p,q,r=1}^N S_{ijkl} S_{mnop} S_{qrst} \int_k \int_l \Delta_{km}(\mathbf{k}) \Delta_{ln}(\mathbf{k}) \Delta_{pq}(\mathbf{l}) \Delta_{or}(\mathbf{l}) \\
 &\quad + 2 \text{ Permutationen} \\
 &= -g_0^3 \sum_{k,l,o,p=1}^N S_{ijkl} S_{klpo} S_{post} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)^2} \\
 &\quad + 2 \text{ Permutationen} \\
 &= -g_0^3 \frac{1}{9} S_{ijst} (N^2 + 6N + 20) J_2(m_0) J_2(m_0) \\
 &= -\frac{N^2 + 6N + 20}{576\pi^2} S_{ijst} u_0^2 g_0 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$G_{422}$  (2)

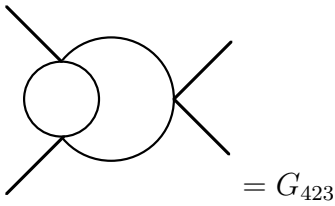


$$\begin{aligned}
 &= -g_0^3 \sum_{k,l,m,p,q,r,s,t=1}^N S_{ijkl} S_{mnop} S_{qrst} \int_k \int_l \Delta_{km}(\mathbf{k}) \Delta_{rp}(\mathbf{k}) \Delta_{ql}(\mathbf{k}) \Delta_{st}(\mathbf{l}) \\
 &\quad + 2 \text{ Permutationen} \\
 &= -g_0^3 \sum_{k,l,p,s=1}^N S_{ijkl} S_{knop} S_{lpss} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^3 (l^2 + m_0^2)} \\
 &\quad + 2 \text{ Permutationen} \\
 &= -g_0^3 \frac{1}{9} S_{ijno} (N^2 + 10N + 16) J_3(m_0) J_1(m_0)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{N^2 + 10N + 16}{1152\pi^2} S_{ijno} u_0^2 g_0 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

 $G_{423} \quad (2)$ 


$$\begin{aligned} &= -g_0^3 \sum_{k,l,m,n,o,q,r,t=1}^N S_{ijkl} S_{mnop} S_{qrst} \int_k \int_l \Delta_{lm}(\mathbf{k}) \Delta_{kr}(\mathbf{k}) \Delta_{nq}(\mathbf{l}) \Delta_{ot}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \\ &\quad + 2 \text{ Permutationen} \\ &= -g_0^3 \sum_{k,l,n,o=1}^N S_{ijkl} S_{knop} S_{lpss} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2) ((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2)} \\ &\quad + 2 \text{ Permutationen} \\ &= -g_0^3 \frac{1}{9} S_{ijps} (5N + 22) D_2(m_0, m_0, m_0) \\ &= -\frac{5N + 22}{864\pi^2} S_{ijps} u_0^2 g_0 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

 $G_{424} \quad (2)$ 


In diesem Kapitel werden alle verwendeten Integrale aufgeführt. Soweit mit vertretbarem Aufwand möglich, wird die Berechnung ausgeführt, ein Teil der aufwendigen Integrale wurde [Raj96] entnommen. Als Hilfsmittel dienten [AS70], [BS89], [DD84], [GR81], [Nic78] und `Mathematica` [Wol96] sowie die Arbeiten von [Hei93], [Luc95] und [Str96].

### C.1 Ein-Loop-Integrale $J_1$ und $J_2$ ohne äußeren Impuls

$$\begin{aligned}
 J_1(D) &= \int_k \frac{1}{k^2 + m_0^2} = \frac{(m_0^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \\
 J_1(D = 3 - \varepsilon) &= -\frac{m_0^{1-\varepsilon}}{4\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 J_1(D = 4 - \varepsilon) &= \frac{m_0^{2-\varepsilon}}{16\pi^2} \Gamma(-1 + \varepsilon/2) \stackrel{D.4}{=} \frac{m_0^{2-\varepsilon}}{16\pi^2} \left( \frac{-2}{\varepsilon} - 1 + \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 J_n(D) &= \int_k \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^n} \\
 &= -\frac{1}{n-1} \partial_{m_0^2} J_{n-1}(D) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{(m_0^2)^{D/2-n}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(n - \frac{D}{2}\right) \\
 J_2(D=3-\varepsilon) &= \frac{1}{8\pi m_0^{1+\varepsilon}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 J_3(D=3-\varepsilon) &= \frac{1}{32\pi m_0^{3+\varepsilon}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 J_2(D=4-\varepsilon) &= \frac{m_0^{-\varepsilon}}{16\pi^2} \Gamma(\varepsilon/2) \stackrel{D.4}{=} \frac{m_0^{-\varepsilon}}{8\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)
 \end{aligned}$$

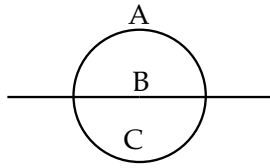
Aufgrund der Eigenschaften der dimensionellen Regularisierung ist

$$\int_k \frac{1}{(k^2)^\beta} = 0$$

für beliebiges  $\beta \neq D/2$ .

## C.2 Zwei-Loop-Integrale ohne äußeren Impuls

### C.2.1 Integral $I_2$



$$\begin{aligned}
 I_2(0; A, B, C) &= \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + A^2)(l^2 + B^2)((\mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + C^2)} \\
 &\stackrel{D.7}{=} \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \int_k \int_l \underbrace{\exp(-\alpha(k^2 + A^2) - \beta(C^2 + B^2) - \gamma((\mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + C^2))}_{=\exp(-k^2(\alpha+\gamma) - l^2(\beta+\gamma) - 2\gamma l k - (\alpha A^2 + \beta B^2 + \gamma C^2))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{D.9}{=} \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \int_k \left( \frac{\pi}{\beta + \gamma} \right)^{D/2} \\
&\quad \exp \left( \frac{\gamma^2 k^2}{\beta + \gamma} - k^2(\alpha + \gamma) - (\alpha A^2 + \beta B^2 + \gamma C^2) \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \left( \frac{\pi}{\beta + \gamma} \right)^{D/2} \\
&\quad \int_k \exp \left( k^2 \underbrace{\left( \frac{\gamma^2}{\beta + \gamma} - (\alpha + \gamma) \right)}_{= \frac{-\alpha\beta - \alpha\gamma - \gamma\beta}{\beta + \gamma}} - (\alpha A^2 + \beta B^2 + \gamma C^2) \right) \\
&\stackrel{D.9}{=} \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \frac{\pi^D}{(\beta + \gamma)^{D/2}} \frac{(\beta + \gamma)^{D/2}}{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma\beta)^{D/2}} \\
&\quad \exp \left( -(\alpha A^2 + \beta B^2 + \gamma C^2) \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \frac{\pi^D}{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma\beta)^{D/2}} \exp \left( -(\alpha A^2 + \beta B^2 + \gamma C^2) \right)
\end{aligned}$$

Substitution:

$$\begin{aligned}
\alpha &= stu \\
\beta &= st(1 - u) \\
\gamma &= s(1 - t)
\end{aligned}$$

Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(s, t, u)} = -s^2 t$$

Damit:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = s^2 t^2 u(1 - u) + s^2 tu(1 - t) + s^2 t(1 - t)(1 - u)$$

$$\alpha A^2 + \beta B^2 + \gamma C^2 = s(tuA^2 + (t - tu)B^2 + (1 - t)C^2)$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{(4\pi)^D} \int_0^\infty ds \int_0^1 dt du \frac{s^2 t}{s^D} \frac{e^{-s[tuA^2 + (t-tu)B^2 + (1-t)C^2]}}{(t^2 u(1-u) + tu(1-t) + t(1-t)(1-u))^{D/2}} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^D} \int_0^\infty ds s^{2-D} e^{-s} \int_0^1 dt du \frac{t^{1-D/2} e^{-s[\dots]}}{(t^2 u(1-u) + tu(1-t) + t(1-t)(1-u))^{D/2}}
 \end{aligned}$$

Substitution:  $s' = s[tuA^2 + (t-tu)B^2 + (1-t)C^2]$ .

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{(4\pi)^D} \int_0^\infty ds' s'^{2-D} e^{-s'} \int_0^1 dt du \frac{[\dots]^{-1} [\dots]^{-2+D} t^{1-D/2}}{(t^2 u(1-u) + tu(1-t) + t(1-t)(1-u))^{D/2}} \\
 &\stackrel{D.5}{=} \frac{1}{(4\pi)^D} \Gamma(3-D) \int_0^1 dt du \frac{[\dots]^{-3+D} t^{1-D/2}}{(1-t+ut(1-u))^{D/2}}
 \end{aligned}$$

Betrachte den Fall  $A = B = C = m_0$ .

$$[\dots] = m_0^2$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{(4\pi)^D} \Gamma(3-D) \int_0^1 dt du \frac{[\dots]^{-3+D} t^{1-D/2}}{(1-t+ut(1-u))^{D/2}} \\
 &\stackrel{D.4}{=} \frac{1}{64\pi^3} (4\pi)^\varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) (m_0^2)^{-\varepsilon} \underbrace{\left\{ \int_0^1 dt du \frac{1}{\sqrt{t}(1-t+ut(1-u))^{3/2}} \right\}}_{=2\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_0^1 dt du \frac{\log(t - t^2 + ut^2(1 - u))}{\sqrt{t}(1 - t + ut(1 - u))^{3/2}}}_{=C_H} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \Big\} \\
& = m_0^{-2\varepsilon} \frac{1}{64\pi^3} (1 + \varepsilon \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \frac{C_H}{4\pi} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) 2\pi \\
& = m_0^{-2\varepsilon} \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \frac{C_H}{4\pi} + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)
\end{aligned}$$

Betrachte nun den Fall  $A = 0, B = m_0, C = 0$ , also

$$[\dots] = (t - tu)m_0^2.$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{(4\pi)^\varepsilon}{(4\pi)^3} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) \int_0^1 dt du \frac{(m_0^2)^{-\varepsilon} (t - tu)^{-\varepsilon} t^{-\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{t}(1 - t + ut(1 - u))^{3/2}} (1 - t + ut(1 - u))^{\frac{\varepsilon}{2}} \\
&= \frac{(4\pi)^\varepsilon}{(4\pi)^3} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) m_0^{-2\varepsilon} \int_0^1 dt du \frac{1}{\sqrt{t}(1 - t + ut(1 - u))^{3/2}} \\
&\quad \times \left( 1 - \varepsilon \log(t - tu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \\
&\quad \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \log(t - t^2 + ut^2(1 - u)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \\
&= \frac{(4\pi)^\varepsilon}{(4\pi)^3} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) m_0^{-2\varepsilon} \int_0^1 dt du \frac{1}{\sqrt{t}(1 - t + ut(1 - u))^{3/2}} \\
&\quad \times \left( 1 - \varepsilon \log(t - tu) + \frac{\varepsilon}{2} \log(t - t^2 + ut^2(1 - u)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \\
&= \frac{(4\pi)^\varepsilon}{(4\pi)^3} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) m_0^{-2\varepsilon} \left\{ \underbrace{\int_0^1 dt du \frac{1}{\sqrt{t}(1 - t + ut(1 - u))^{3/2}}}_{=2\pi} \right. \\
&\quad - \varepsilon \int_0^1 dt du \frac{\log(t - tu)}{\sqrt{t}(1 - t + ut(1 - u))^{3/2}} \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 dt du \frac{\log(t - t^2 + ut^2(1 - u))}{\sqrt{t}(1 - t + ut(1 - u))^{3/2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(4\pi)^3} \left( 1 + \varepsilon \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) m_0^{-2\varepsilon} \\
 &\quad \left\{ 2\pi + \varepsilon \left( \frac{C_H}{2} - C_D \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\} \\
 &= \frac{m_0^{-2\varepsilon}}{32\pi^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log(4\pi) + \frac{C_H}{4\pi} - \frac{C_D}{2\pi} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\}
 \end{aligned}$$

mit

$$C_H = \int_0^1 dt \, du \frac{\log(t - t^2 + ut^2(1-u))}{\sqrt{t}(1-t+ut(1-u))^{3/2}}$$

$$C_D = \int_0^1 dt \, du \frac{\log(t - tu)}{\sqrt{t}(1-t+ut(1-u))^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
 C_D &= \int_0^1 dt \, du \frac{\log(t)}{\sqrt{t}(1-t+ut(1-u))^{3/2}} + \int_0^1 dt \, du \frac{\log(1-u)}{\sqrt{t}(1-t+ut(1-u))^{3/2}} \\
 &= -4\pi \log \frac{2}{3} + \int_0^1 dt \, du \frac{\log(1-u)}{\sqrt{t}(1-t+ut(1-u))^{3/2}}
 \end{aligned}$$

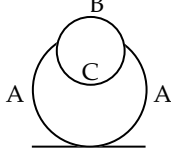
Dieses letzte Integral und das Integral  $C_H$  lassen sich nicht leicht berechnen. Durch Vergleich mit [Raj96] kann man jedoch ermitteln, daß

$$\frac{1}{4\pi}(C_H - 2C_D) = 1$$

und

$$C_H = 4\pi(1 - \log 9) .$$

### C.2.2 Integral $D_2$



$$D_2(A, B, C) = \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + A^2)^2 (l^2 + B^2) ((\mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + C^2)}$$

Die Rechnung verläuft analog zu Integral  $I_2$ .

$$\begin{aligned} D_2(A, B, C) &\stackrel{D.7}{=} \int_k \int_l \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \alpha e^{-\alpha(k^2+A^2)-\beta(l^2+B^2)-\gamma((\mathbf{k}+\mathbf{l})^2+C^2)} \\ &\stackrel{D.9}{=} \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \frac{\alpha \pi^D}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma} e^{-(\alpha A^2 + \beta B^2 - \gamma C^2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \pi^D \int_0^\infty ds \int_0^1 dt du \\ &\quad \frac{s^3 t^2 u e^{-s[\dots]}}{s^D t^{D/2} (tu(1-u) + u(1-t) + (1-t)(1-u))^{D/2}} \\ &\stackrel{D.5}{=} \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \Gamma(4-D) \pi^D \int_0^1 dt du \frac{t^{2-D/2} u [\dots]^{D-4}}{(1-t+ut(1-u))^{D/2}} \end{aligned}$$

mit

$$[\dots] = tuA^2 + (t-tu)B^2 + (1-t)C^2 .$$

$$A = B = C = m_0$$

$$[\dots] = m_0^2$$

$$D_2(m_0, m_0, m_0)$$

$$\begin{aligned}
 &= (m_0^2)^{-1-\varepsilon} \frac{1}{(2\pi)^6} \pi^3 \underbrace{\int_0^1 dt du \frac{\sqrt{tu}}{(1-t+ut(1-u))^{3/2}}}_{\frac{2\pi}{3}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{1}{96\pi^2 m_0^{2+2\varepsilon}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$$A = m_0, B = C = 0$$

$$[\dots] = tum_0^2$$

$$\begin{aligned}
 D_2(m_0, 0, 0) &= (m_0^2)^{-1-\varepsilon} \frac{1}{(2\pi)^6} \pi^3 \int_0^1 dt du \frac{\sqrt{tu}(tu)^{-1}}{(1-t+ut(1-u))^{3/2}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^6 m_0^{2+2\varepsilon}} \pi^3 \underbrace{\int_0^1 dt du \frac{\sqrt{t}^{-1}}{(1-t+ut(1-u))^{3/2}}}_{2\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{1}{32\pi^2 m_0^{2+2\varepsilon}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$$A = hm_0, B = hm_0, C = m_0$$

$$[\dots] = m_0^2[tuh^2 + (t-tu)h^2 + 1-t] = m_0^2[t(h^2-1) + 1]$$

$$\begin{aligned}
 &D_2(hm_0, hm_0, m_0) \\
 &= (m_0^2)^{-1-\varepsilon} \frac{1}{(2\pi)^6} \pi^3 \int_0^1 dt du \frac{\sqrt{tu}}{(1-t+ut(1-u))^{3/2}} \frac{1}{t(h^2-1)+1} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{1}{64\pi^3 m_0^2} 2\pi \left( \frac{1}{h} - 2 + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{1}{32\pi^2 m_0^2} \left( \frac{1}{h} - 2 + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

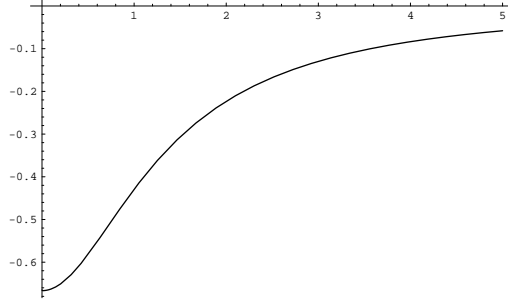
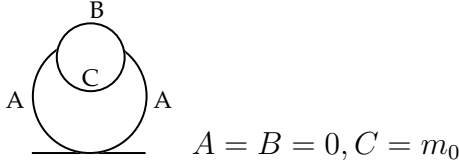


Abbildung C.1: Graph der Funktion  $f(x)$  zur Berechnung von Integral  $D_1$ .

### C.2.3 Integral $D_1$

Dieses Integral wird in dieser Arbeit nicht verwendet. Es ist ein Spezialfall von Integral  $D_2$ , der hier ohne die Hilfsmasse  $h_0$  berechnet wird. Man kann an der Berechnung sehen, wie man durch geschicktes Verwenden der dimensionellen Regularisierungsvorschriften endliche Ergebnisse aus infrarotdivergenten Integralen gewinnen kann. Weil sich dieses Vorgehen schwer systematisieren läßt, wurde es in dieser Arbeit nicht weiter verwendet, sondern die Hilfsmasse  $h_0$  eingeführt.



$$D_1 = \int_k \int_l \frac{1}{k^4 l^2 ((\mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + m_0^2)} = \int_k \frac{1}{k^4} \underbrace{\int_l \frac{1}{l^2 ((\mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + m_0^2)}}_{=: I_L(\mathbf{k})}$$

$I_L$  ist aus [Luc95] (Formel 3.23) bekannt.

$$I_L(\mathbf{k}) = \int_l \frac{1}{(1 - \mathbf{k})^2 (l^2 + m_0^2)} = \frac{m_0^{-\varepsilon}}{8\pi} \frac{1}{|k|} \left( \arcsin \left( \frac{k^2 - m_0^2}{k^2 + m_0^2} \right) + \frac{\pi}{2} \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

Also:

$$\int_k \int_l \frac{1}{k^4 l^2 ((\mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + m_0^2)} = \int_k \frac{1}{k^4} I_L(k)$$



$$= \frac{m_0^{-\varepsilon}}{8\pi} \int_k \frac{1}{k^5} \left( \arcsin \frac{k^2 - m_0^2}{k^2 + m_0^2} + \frac{\pi}{2} \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

Definiert man

$$R(k) := \arcsin \frac{k^2 - m_0^2}{k^2 + m_0^2} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{m_0} k,$$

so erhält man

$$D_1 = \frac{m_0^{-\varepsilon}}{8\pi} \int_k \frac{R(k)}{k^5} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) + \underbrace{\frac{m_0^{-\varepsilon}}{8\pi} \frac{2}{m_0} \int_k \frac{1}{k^4} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))}_{=0 \text{ nach dimensioneller Regularisierung}}.$$

Einführung von Kugelkoordinaten und die anschließende Substitution  $r = m_0 x$  ergibt

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{m_0^{-\varepsilon}}{8\pi} \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dr \frac{r^{D-1}}{r^5} R(r) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{m_0^{-\varepsilon}}{8\pi} \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dx m_0^{D-5} x^{D-6} \left( \arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{\pi}{2} - 2x \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &\stackrel{D.6}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} m_0^{-2-2\varepsilon} \int_0^\infty dx \frac{1}{x^3} \left( \arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{\pi}{2} - 2x \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} m_0^{-2-2\varepsilon} \int_0^\infty dx f(x) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

mit

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \left( \arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{\pi}{2} - 2x \right) = 2 \sum_{n=3, \text{ungerade}}^\infty \frac{x^{n-3}}{n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

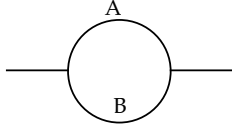
Es ist  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2/3$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . (Vergleiche Bild C.1.)

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{(2\pi)^3} m_0^{-2-2\varepsilon} \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1, \text{ungerade}}^\infty \frac{x^n}{n(n+2)} (-1)^{\frac{n+1}{2}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} m_0^{-2-2\varepsilon} \frac{\pi}{4} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{32\pi^2} m_0^{-2-2\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

### C.3 Ein-Loop-Integrale mit äußerem Impuls

#### C.3.1 Integral $I_1$



$$I_1(p; A, B) = \int_k \frac{1}{(k^2 + A^2)((\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + B^2)}$$

$$\begin{aligned} I_1(p; A, B) &\stackrel{D.7}{=} \int_k \int_0^\infty d\alpha d\beta e^{-\alpha(k^2 + A^2) - \beta((\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + B^2)} \\ &= \int_0^\infty d\alpha d\beta \int_k e^{-k^2(\alpha + \beta) + 2\mathbf{k}\mathbf{p}\beta - p^2\beta - (\alpha A^2 + \beta B^2)} \\ &\stackrel{D.9}{=} \int_0^\infty d\alpha d\beta \left( \frac{\pi}{\alpha + \beta} \right)^{D/2} \frac{1}{(2\pi)^D} e^{\frac{p^2\beta^2}{\alpha + \beta} - (\alpha A^2 + \beta B^2) - p^2\beta} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha d\beta \left( \frac{\pi}{\alpha + \beta} \right)^{D/2} e^{-(\alpha A^2 + \beta B^2) - \frac{\alpha\beta p^2}{\alpha + \beta}} \end{aligned}$$

Substitution:

$$s = \alpha + \beta; \quad t = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Also:

$$\alpha = st; \quad \beta = s(1 - t)$$

$$I_1(p; A, B) = \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty ds \int_0^1 dt s^{-D/2+1} e^{-stA^2 - s(1-t)B^2 - p^2 ts(1-t)}$$

$$A = B = m_0$$

Mit  $u = s(m_0^2 + p^2 t(1-t))$  und  $p_0 = \frac{p}{m_0}$  erhält man

$$\begin{aligned} I_1(p; m_0, m_0) &= \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty ds \int_0^1 dt s^{-D/2+1} e^{-s(m_0^2 + p^2 t(1-t))} \\ &= \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty du \int_0^1 dt \frac{1}{m_0^2 + p^2 t(1-t)} (m_0^2 + p^2 t(1-t))^{D/2-1} u^{1-D/2} e^{-u} \\ &\stackrel{D.5}{=} \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 dt (m_0^2)^{D/2-2} (1 + p_0^2 t(1-t))^{D/2-2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{8\pi} m_0^{-1-\varepsilon} \frac{2}{p_0} \arctan \frac{p_0}{2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{4\pi} m_0^{-\varepsilon} \frac{1}{p} \arctan \left( \frac{p}{2m_0} \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Dieses Integral entspricht dem Integral  $J_2$  im Falle  $p = 0$ .

$$A = m_0; B = 0$$

$$\begin{aligned} I_1(p; m_0, 0) &= \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty ds \int_0^1 dt s^{-D/2+1} e^{-s(tm_0^2 + p^2 t(1-t))} \\ &\stackrel{D.5}{=} \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 dt (tm_0^2 + p^2 t(1-t))^{D/2-2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{m_0^{-\varepsilon}}{p} \left( \arcsin \left( \frac{p^2 - m_0^2}{p^2 + m_0^2} \right) + \frac{\pi}{2} \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} I_1(p; m_0, 0) = \frac{1}{4\pi m_0} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$$\partial_{p^2} I_1(0; m_0, 0) = -\frac{1}{12\pi m_0^3} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

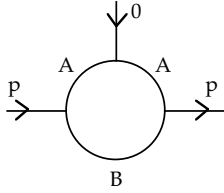
$$\partial_{p^2} (I_1(0; m_0, 0))^2 = -\frac{1}{24\pi^2 m_0^4} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$$A = 0; B = 0$$

$$\begin{aligned} I_1(p; 0, 0) &= \frac{1}{8\pi} \int_0^1 dt (p^2 t(1-t))^{D/2-2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \frac{1}{8\pi} \frac{m_0^{D-4}}{p_0} \pi (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{8p} m_0^{-\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

Das entspricht dem Ergebnis, welches man aus  $\lim_{h \rightarrow 0} I_1(p; hm_0, hm_0)$  erhält.

### C.3.2 Integral $I_3$



$$\begin{aligned} I_3(p; A, B) &= \int_k \frac{1}{(k^2 + A^2)^2 ((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + B^2)} \\ &\stackrel{D.7}{=} \int_k \int_0^\infty d\alpha d\beta \alpha e^{-\alpha(k^2 + A^2) - \beta((\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + B^2)} \\ &= \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha d\beta \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)^{D/2}} e^{-(\alpha A^2 + \beta B^2) - \frac{\alpha\beta p^2}{\alpha + \beta}} \end{aligned}$$

$$s = \alpha + \beta; \quad t = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\alpha = st; \quad \beta = s(1 - t)$$

$$I_3(p; A, B) = \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty ds \int_0^1 dt t s^{2-D/2} e^{-s[tA^2 + (1-t)B^2 + p^2 t(1-t)]}$$

$$s' = s[\dots]$$

$$\begin{aligned} I_3(p; A, B) &= \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dt \int_0^\infty ds' t[\dots]^{D/2-3} s'^{2-D/2} e^{-s'} \\ &\stackrel{D.5}{=} \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \underbrace{\Gamma(3-D/2)}_{=\sqrt{\pi}/2(1+\mathcal{O}(\varepsilon))} \int_0^1 dt \frac{t}{[tA^2 + (1-t)B^2 + p^2 t(1-t)]^{3-D/2}} \quad (C.1) \end{aligned}$$

$$A = B = m_0$$

$$[\dots] = m_0^2 + p^2(1-t)t \quad \text{und} \quad p_0 = \frac{p}{m_0}$$

$$\begin{aligned} I_3(p; m_0, m_0) &= \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 dt \frac{t}{(m_0^2)^{3-D/2} (1 + p_0^2(1-t)t)^{3/2}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{16\pi} m_0^{D-6} \frac{2}{4 + p_0^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{8\pi} m_0^{-\varepsilon-1} \frac{1}{4m_0^2 + p^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$I_3(0; m_0, m_0) = \frac{1}{32\pi} m_0^{-3-\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

Dieses Ergebnis entspricht dem Integral  $J_3(m_0)$ .

$$A = m_0, B = 0$$

$$[\dots] = tm_0^2 + p^2(1-t)t$$

$$\begin{aligned}
 I_3(p; m_0, 0) &= \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \frac{\sqrt{\pi}}{2} m_0^{D-6} \int_0^1 dt \frac{t}{(t + p_0^2(1-t)t)^{3/2}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{1}{16\pi} m_0^{-3-\varepsilon} \frac{2}{1 + p_0^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \frac{1}{8\pi} m_0^{-1-\varepsilon} \frac{1}{m_0^2 + p^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned}$$

$$I_3(0; m_0, 0) = \frac{1}{8\pi} m_0^{-3-\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$$\partial_{p^2} I_3(0; m_0, 0) = -\frac{1}{8\pi} m_0^{-5} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$$A = 0, B = 0$$

$$[\dots] = p^2(1-t)t$$

$$\begin{aligned}
 I_3(p; 0, 0) &= \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \frac{\sqrt{\pi}}{2} m_0^{D-6} \int_0^1 dt \frac{t}{(p_0^2(1-t)t)^{3-D/2}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{1}{8\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) p^{D-6} \int_0^1 dt \frac{t}{[t(1-t)]^{3-D/2}} \\
 &= \frac{1}{8\pi} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) p^{D-6} \int_0^1 dt t^{-2+D/2} (1-t)^{-3+D/2} \\
 &\stackrel{D.8}{=} \frac{1}{8\pi} p^{-3} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) B(D/2 - 1, D/2 - 2) \\
 &= \frac{1}{8\pi} p^{-3} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \frac{\Gamma(1/2 - \varepsilon/2) \Gamma(-1/2 - \varepsilon/2)}{\Gamma(-\varepsilon)} \\
 &= \frac{1}{8\pi} p^{-3} (-2\pi) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

$$A = hm_0, B = m_0$$

$$[\dots] = m_0^2 [th^2 + 1 - t] + p_0^2 t(1-t)$$

$$\begin{aligned}
 I_3(p; hm_0, m_0) &= \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 dt \frac{t}{(m_0^2)^{3-D/2} (h^2 t + (1-t) + p_0^2 t(1-t))^{3-D/2}} \\
 &= \frac{1}{16\pi} m_0^{-3} \frac{2}{1 + \frac{p^2}{m_0^2}} \left( \frac{1}{h} - \frac{2}{1 + \frac{p^2}{m_0^2}} + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 &= \frac{1}{8\pi} m_0^{-3} \frac{1}{1 + \frac{p^2}{m_0^2}} \left( \frac{1}{h} - \frac{2}{1 + \frac{p^2}{m_0^2}} + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \tag{C.2}
 \end{aligned}$$

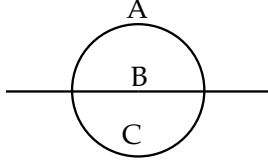
$$I_3(0; hm_0, m_0) = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{m_0^3} \left( \frac{1}{h} - 2 + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \tag{C.3}$$

$$\partial_{p^2} I_3(0; hm_0, m_0) = \frac{1}{8\pi m_0^5} \left( -\frac{1}{h} + 4 + \mathcal{O}(h) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \tag{C.4}$$

Obwohl es sich hierbei um ein Ein-Loop-Integral handelt, ist mir keine vollständige analytische Lösung in drei Dimensionen für den Fall bekannt, daß der zweite äußere Impuls nicht null ist. Ein vierdimensionales Ergebnis findet man in [BC80]. Eine dreidimensionale Lösung könnte bei der Faktorisierung von Graphen höherer Ordnung hilfreich sein. Die in vier Dimensionen erfolgreich eingesetzten Gegenbauer-Polynome ([CKT79], [CKT80]) lassen in drei Dimensionen nur Näherungen zu [Reh].

## C.4 Zwei-Loop-Integrale mit äußerem Impuls

### C.4.1 Integral $I_2$ mit äußerem Impuls



$$I_2(\mathbf{p}; A, B, C) = \int_k \int_l \frac{1}{((\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + A^2)(k^2 + B^2)(l^2 + C^2)}$$

Dieses Integral findet man in allgemeiner Form bei [Raj96].

$$I_2(p; A, B, C) = \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 3 - 2 \frac{A+B+C}{p} \arctan \frac{p}{A+B+C} + \log \frac{m_0^2}{(A+B+C)^2 + p^2} - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \quad (\text{C.5})$$

Daraus berechnet man leicht die benötigten Spezialfälle.

$$A = B = C = m_0$$

$$I_2(p; m_0, m_0, m_0) = \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 3 - 2 \frac{3m_0}{p} \arctan \frac{p}{3m_0} - \log\left(9 + \frac{p^2}{m_0^2}\right) - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \quad (\text{C.6})$$

$$I_2(0; m_0, m_0, m_0) = \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \log(4\pi) + (1 - \log 9) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \quad (\text{C.7})$$

$$\partial_{p^2} I_2(0; m_0, m_0, m_0) = -\frac{1}{864\pi^2 m_0^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \quad (\text{C.8})$$



$$A = 0, B = m_0, C = 0$$

$$I_2(p; 0, m_0, 0) = \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 3 - 2 \frac{m_0}{p} \arctan \frac{p}{m_0} - \log\left(1 + \frac{p^2}{m_0^2}\right) - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \quad (\text{C.9})$$

$$I_2(0; 0, m_0, 0) = \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \quad (\text{C.10})$$

$$A = m_0, B = 0, C = m_0$$

$$I_2(0; m_0, 0, m_0) = \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log(\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \quad (\text{C.11})$$

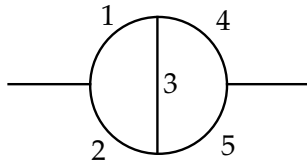
$$\partial_{p^2} I_2(0; m_0, 0, m_0) = -\frac{1}{384\pi^2 m_0^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \quad (\text{C.12})$$

$$A = B = C = hm_0$$

$$I_2(0; hm_0, hm_0, hm_0) = \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \log(4\pi) - \log 9 - 2 \log 2 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \quad (\text{C.13})$$

$$\partial_{p^2} I_2(0; hm_0, hm_0, hm_0) = -\frac{1}{864\pi^2 m_0^2} \frac{1}{h^2} + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{C.14})$$

#### C.4.2 Integral $I_6$ mit äußerem Impuls



Dieses Integral ist das mit Abstand am schwierigsten zu lösende. Eine allgemeine analytische Lösung existiert meines Wissens in drei Dimensionen nicht. In vier Dimensionen gibt es eine Menge unterschiedlicher Lösungsmöglichkeiten (zum Beispiel [Bro90], [MDR93]), die sich alle nicht in drei Dimensionen übertragen lassen. In [Raj96], [Raj98] Integral (a) wird eine Lösung angegeben, die das Integral in allgemeiner Form auf ein eindimensionales Integral reduziert, welches sich relativ leicht numerisch auswerten läßt. Dieses Verfahren wird hier referiert und für die verschiedenen benötigten Massenkonfigurationen berechnet. Im nächsten Abschnitt werden dann die benötigten Ableitungen dieses Integrals bei  $p = 0$  mit dieser Methode und teilweise auch direkt berechnet.

$$\begin{aligned}
 I_6(\mathbf{p}; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) &= \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_1^2)((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m_2^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_3^2)} \\
 &\quad \frac{1}{(l^2 + m_4^2)((\mathbf{p} - \mathbf{l})^2 + m_5^2)}
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}
 I_6(\mathbf{p}; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) &= -\frac{2}{\sqrt{\det M(p, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)}} \\
 &\times \int_{x_0}^{m_3} dx \, x \frac{\det H(p, m_2, m_2, x, m_4, m_5)}{\sqrt{\det M(p, m_1, m_2, x, m_4, m_5)}}
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

Dabei ist  $x_0$  eine Lösung der Gleichung

$$\det M(p, m_1, m_2, x_0, m_4, m_5) = 0 .$$

$$\begin{aligned}
 M(p, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) &= \begin{pmatrix} 2m_3^2 & m_1^2 + m_3^2 - m_4^2 & m_2^2 + m_3^2 - m_5^2 \\ m_1^2 + m_3^2 - m_4^2 & 2m_1^2 & m_1^2 + m_2^2 + p^2 \\ m_2^2 + m_3^2 - m_5^2 & m_1^2 + m_2^2 + p^2 & 2m_2^2 \end{pmatrix} \\
 H(p, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) &= \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ m_1^2 + m_3^2 - m_4^2 & 2m_1^2 & m_1^2 + m_2^2 + p^2 \\ m_2^2 + m_3^2 - m_5^2 & m_1^2 + m_2^2 + p^2 & 2m_2^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_1(p, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) &= H_1^3 - H_1^4 + H_2^3 - H_2^5 \\
 H_2(p, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) &= H_2^1 + H_3^1 - H_3^4 \\
 H_3(p, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) &= H_3^2 + H_3^5 - H_1^2
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

$$\begin{aligned}
 H_1^3 &= H_X(m_1, m_2, m_4, m_5) \\
 H_1^4 &= H_Y(m_1, m_3, m_5, m_2) \\
 H_2^3 &= H_X(m_2, m_1, m_5, m_4) \\
 H_2^5 &= H_Y(m_2, m_3, m_4, m_1) \\
 H_2^1 &= H_Z(m_4, m_2, m_3, m_5) \\
 H_3^1 &= H_Z(m_4, m_3, m_2, m_5) \\
 H_3^4 &= H_Z(m_1, m_3, m_5, m_2) \\
 H_3^2 &= H_Z(m_5, m_3, m_1, m_4) \\
 H_3^5 &= H_Z(m_2, m_3, m_4, m_1) \\
 H_1^2 &= H_Z(m_5, m_1, m_3, m_4)
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

$$\begin{aligned}
 H_X(m_1, m_2, m_3, m_4) &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2m_1 p ((m_1 + m_2)^2 + p^2)} \arctan \frac{p}{m_3 + m_4} \\
 H_Y(m_1, m_2, m_3, m_4) &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2m_1 p ((p^2 + m_1^2 + m_4^2)^2 - 4m_1^2 m_4^2)} \\
 &\quad \left( (p^2 + m_4^2 - m_1^2) \arctan \frac{p}{m_1 + m_2 + m_3} \right. \\
 &\quad \left. + m_1 p \log \frac{p^2 + (m_1 + m_2 + m_3)^2}{(m_2 + m_3 + m_4)^2} \right) \\
 H_Z(m_1, m_2, m_3, m_4) &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2m_2 p (m_4^2 - (m_2 + m_3)^2)} \\
 &\quad \left( \arctan \frac{p}{m_1 + m_2 + m_3} - \arctan \frac{p}{m_1 + m_4} \right) \tag{C.19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_6(\mathbf{p}; m_0, m_0, m_0, m_0) &= \frac{1}{16\pi^2 m p^2 \sqrt{3m_0^2 + p^2}} \int_0^{m_0} \frac{dx}{(2m_0 + x) \sqrt{4m_0^2 + p^2 - x^2}} \\
 &\quad \left[ 2p \left( \arctan \frac{p}{2m_0 + x} - \arctan \frac{p}{2m_0} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\left. + (2m_0 + x) \log \frac{p^2 + (2m_0 + x)^2}{(2m_0 + x)^2} \right] \quad (\text{C.20})$$

Setzt man den Impuls  $p = im_0$  ein, so erhält man

$$\begin{aligned} I_6(im_0; m_0, m_0, m_0, m_0, m_0) &= \frac{-1}{16\pi^2 i \sqrt{2} m_0^4} \\ &\int_0^1 dx \frac{2 \operatorname{artanh} \frac{1}{2} - 2 \operatorname{artanh} \frac{1}{2+x} + (2+x) \log \frac{3+4x+x^2}{(2+x)^2}}{(2+x) \sqrt{x^2-3}} \\ &= \frac{1}{16\pi^2 i \sqrt{2} m_0^4} (-0.0547836) i = \frac{1}{16\pi^2 m_0^4} d_1 \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

$$d_1 = -0.0387379$$

$$\begin{aligned} I_6(\mathbf{p}; m_0, m_0, hm_0, hm_0, hm_0) &= \frac{1}{16\pi^2} \int_l^{hm_0} dx \\ &\left( -p \left( (h-1)^2 (h+1) m_0^3 - (h-1) m_0 x^2 + x^3 + m_0^2 (x - h^2 x) \right) \right. \\ &\arctan \frac{p}{2m_0} \\ &- p \left( m_0^3 - hm_0^3 - h^2 m_0^3 + h^3 m_0^3 - m_0^2 x + h^2 m_0^2 x - m_0 x^2 + hm_0 x^2 + x^3 \right) \\ &\arctan \frac{p}{2hm_0} \\ &\left( 2m_0^3 - 2hm_0^3 - 2h^2 m_0^3 + 2h^3 m_0^3 2x^3 \right) p \arctan \frac{p}{m_0 + hm_0 + x} \\ &\left( -m_0^3 + hm_0^3 + h^2 m_0^3 - h^3 m_0^3 - m_0^2 x + 2hm_0^2 x - h^2 m_0^2 x \right. \\ &\left. + m_x^2 + hm_0 x^2 + x^3 \right) \\ &\left. x \log \frac{p^2 + (m_0 + hm_0 + x)^2}{(m_0 + hm_0 + x)^2} \right) \\ &\left( ((h-1)m_0 - x)((h-1)m_0 + x)(m_0 + hm_0 + x) \right. \\ &\left. \sqrt{-m_0^2 p^2 ((4h^2 - 1)m_0^2 + h^2 p^2)} \right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{p^2((h^2 - 1)^2 m_0^4 - 2(h^2 + 1)m_0^2 x^2 - p^2 x^2 + x^4)} \Big)^{-1} \quad (\text{C.22})$$

mit

$$l = \pm \sqrt{(1 + h^2)m_0^2 + \frac{1}{2} \left( p^2 \pm \sqrt{4m_0^2 + p^2} \sqrt{4h^2 m_0^2 + p^2} \right)}$$

Eine allgemeine Auswertung des Integrals ist schwierig, der Spezialfall  $p = im_0$  läßt sich aber im Limes  $h \rightarrow 0$  numerisch berechnen. Die Integrationsgrenzen sind dann null und

$$l = m_0 \frac{1}{2} (\sqrt{3} + i) .$$

Es bietet sich dann die Substitution  $x \rightarrow lx$  an.

$$\begin{aligned} I_6(im_0; m_0, m_0, 0, 0, 0) &= \frac{1}{32\pi^2 m_0^4} \frac{i + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_1^0 dx \\ &\left[ -2i\pi + 2(i\sqrt{3} - 1)\pi x + (\sqrt{3} - i)(\pi + 2i \operatorname{arccoth}(2))x^2 \right. \\ &\quad + 4(1 - ix)(-2 + (\sqrt{3} - i)x) \operatorname{arccoth} \left( \frac{1}{2}(2 + (i + \sqrt{3})x) \right) + \log 9 \\ &\quad + 2x(i + \sqrt{3} - 2ix^2) \left( \log \left( 2 + (i + \sqrt{3})x^2 \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \log \left( (i + \sqrt{3})x(4 + (i + \sqrt{3})x) \right) \right) \right] \\ &\quad \left[ \sqrt{(x^2 + 1)(2 + (1 - i\sqrt{3})x^2)} \left( 2i + (\sqrt{3} - i)x^2 \right) \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{32\pi^2 m_0^4} d_2 \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$d_2 = -(1.79215 + i1.7257)$$

$$\begin{aligned}
I_6(\mathbf{p}; hm_0, hm_0, m_0, hm_0, hm_0) &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{m_0} \left( -x(-2p \operatorname{artanh} \frac{p}{2hm_0} \right. \\
&\quad \left. + 2p \operatorname{artanh} \frac{p}{2hm_0 + x} + (2hm_0 + x) \log \frac{p^2 + (2hm_0 + x)^2}{(2hm_0 + x)^2} \right) \\
&\quad \left( (2hm_0 + x) \sqrt{-m_0^2 p^2 ((4h^2 - 1)m_0^2 + p^2)} \right. \\
&\quad \left. \sqrt{-p^2 x^2 (4h^2 m_0^2 + p^2 - x^2)} \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

Setzt man  $p = im_0$ , bildet den Limes  $h \rightarrow 0$  und ersetzt  $x$  durch  $xm_0$ , so kann man das verbleibende Integral numerisch integrieren.

$$\begin{aligned}
I_6(im_0; 0, 0, m_0, 0, 0) &= \frac{1}{16\pi^2 m_0^4 \sqrt{2}} \int_0^1 \frac{-i\pi - 2\operatorname{artanh} \frac{1}{x} + x \log(1 - \frac{1}{x^2})}{x \sqrt{1 + x^2}} \\
&= \frac{1}{16\pi^2 m_0^4 \sqrt{2}} (-0.68856 + i2.76892) \\
&= \frac{1}{16\pi^2 m_0^4} d_3
\end{aligned} \tag{C.25}$$

$$d_3 = (-0.486886 + i1.95792)$$

$$m_1 = m_0, m_2 = 0, m_3 = m_0, m_4 = m_0, m_5 = 0$$

$$I_6(0; m_0, 0, m_0, m_0, 0) = \frac{1}{16\pi^2 m_0^4} \log \frac{4}{3} \tag{C.26}$$

$$m_1 = m_0, m_2 = hm_0, m_3 = hm_0, m_4 = hm_0, m_5 = m_0$$

$$\begin{aligned}
&I_6(0; m_0, hm_0, hm_0, hm_0, m_0) \\
&= \frac{1}{32\pi^2 m_0^4} (-\log 36 - 2\log h + \mathcal{O}(h))
\end{aligned} \tag{C.27}$$

### C.4.3 Die Ableitungen von $I_6$

Die Ableitung kann man direkt auf den Integranden anwenden. Dazu berechnet man zunächst

$$\begin{aligned}
 & \left. \partial_{p^2} \frac{1}{((\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 + A^2)((\mathbf{l} + \mathbf{p})^2 + B^2)} \right|_{p=0} \\
 &= \frac{4}{3} \frac{k^2}{(k^2 + A^2)^3(l^2 + B^2)} + \frac{4}{3} \frac{l^2}{(k^2 + A^2)(l^2 + B^2)^3} - \frac{1}{(k^2 + A^2)^2(l^2 + B^2)} \\
 & \quad - \frac{1}{(k^2 + A^2)(l^2 + B^2)^2} + \frac{4}{3} \frac{\mathbf{k}\mathbf{l}}{(k^2 + A^2)^2(l^2 + B^2)^2} . \tag{C.28}
 \end{aligned}$$

**Fall 1:**  $m_1 = 0, m_2 = m_0, m_3 = m_0, m_4 = 0, m_5 = m_0$

$$\begin{aligned}
 & \partial_{p^2} I_6(\mathbf{p}; m_1 = 0, m_2 = m_0, m_3 = m_0, m_4 = 0, m_5 = m_0) \\
 &= \partial_{p^2} \int_k \int_l \frac{1}{k^2 l^2 ((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2) ((\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 + m_0^2) ((\mathbf{p} + \mathbf{l})^2 + m_0^2)} \\
 &= \int_k \int_l \frac{1}{k^2 l^2 ((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2)} \partial_{p^2} \frac{1}{((\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 + m_0^2) ((\mathbf{p} + \mathbf{l})^2 + m_0^2)} \\
 &= \underbrace{\frac{4}{3} \int_k \int_l \frac{k^2}{k^2 l^2 ((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2) (k^2 + m_0^2)^3 (l^2 + m_0^2)}}_{(1)} \\
 & \quad + \underbrace{\frac{4}{3} \int_k \int_l \frac{l^2}{k^2 l^2 ((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2) (k^2 + m_0^2) (l^2 + m_0^2)^3}}_{(2)} \\
 & \quad - \underbrace{\int_k \int_l \frac{1}{k^2 l^2 ((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2) (k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)}}_{(3)} \\
 & \quad - \underbrace{\int_k \int_l \frac{1}{k^2 l^2 ((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2) (k^2 + m_0^2) (l^2 + m_0^2)^2}}_{(4)}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{4}{3} \underbrace{\int_k \int_l \frac{\mathbf{k} \mathbf{l}}{k^2 l^2 ((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2) (k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)^2}}_{(5)} \quad (\text{C.29})$$

Aus Symmetriegründen ist (1) = (2) und (3) = (4).

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int_0^\infty 4\pi l^2 dl \frac{1}{l^2(l^2 + m_0^2)} \int_0^\infty 2\pi k^2 dk \\ &\quad \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{(k^2 + m_0^2)^3 (m_0^2 + k^2 + l^2 - 2kl \cos \theta)} \\ &= \frac{8\pi^2}{(2\pi)^6} \int_0^\infty dl \frac{1}{l^2 + m_0^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + m_0^2)^3} \frac{1}{2kl} \log \frac{(k+l)^2 + m_0^2}{(k-l)^2 + m_0^2} \\ &= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{1}{l^2 + m_0^2} \pi \frac{l^2 + 8m_0^2}{8m_0^3(l^2 + 4m_0^2)^2} \\ &= \frac{11}{4608\pi^2 m_0^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int_0^\infty 4\pi l^2 dl \frac{1}{l^2(l^2 + m_0^2)} \int_0^\infty 2\pi k^2 dk \\ &\quad \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{k^2(k^2 + m_0^2)^2(k^2 + l^2 + m_0^2 - 2kl \cos \theta)} \\ &= \frac{8\pi^2}{64\pi^6} \int_0^\infty \frac{dl}{l^2 + m_0^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{2kl} \log \frac{(k+l)^2 + m_0^2}{(k-l)^2 + m_0^2} \\ &= \frac{1}{16\pi^4 m_0^6} \int_0^\infty dl \frac{1}{l(l^2 + 1)} R(l) \\ &\quad R(l) := \int_0^\infty dk \frac{1}{(k^2 + 1)^2 k} \log \frac{(k+l)^2 + 1}{(k-l)^2 + 1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \partial_l R(l) &= \int_0^\infty dk \frac{2}{k(k^2+1)^2} \left( \frac{k-l}{1+(k-l)^2} + \frac{k+l}{1+(k+l)^2} \right) \\
 &= -\pi \frac{l^4 + 7l^2 - 12}{(1+l^2)(4l+l^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$R(l) = -\pi \left( \frac{l}{4+l^2} + 2 \arctan \frac{l}{2} - 2 \arctan l \right)$$

$$\begin{aligned}
 (3) &= \frac{1}{16\pi^4 m_0^6} \int_0^\infty dl \frac{1}{l(l^2+1)} R(l) \\
 &= -\frac{1}{16\pi^2 m_0^6} \left( \frac{1}{12} + \operatorname{artanh} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 3 - \log 4 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int_0^\infty dl 4\pi l^2 \frac{1}{l^2(l^2+m_0^2)^2} \\
 &\quad \int_0^\infty dk 2\pi k^2 \int_0^\pi d\theta \frac{kl \cos \theta \sin \theta}{(k^2+m_0^2)^2(k^2+l^2+m_0^2-2kl \cos \theta)} \\
 &= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l}{(l^2+m_0^2)^2} \\
 &\quad \int_0^\infty dk \frac{k}{(k^2+m_0^2)^2} \frac{1}{4k^2 l^2} \left[ -4kl + (k^2+l^2+m_0^2) \log \frac{(k+l)^2+m_0^2}{(k-l)^2+m_0^2} \right] \\
 &= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l}{(l^2+m_0^2)^2} \left[ \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{-1}{l(k^2+m_0^2)^2}}_{(a)} + \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{k}{4l^2(k^2+m_0^2)^2} \log(\dots)}_{(b)} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{1}{4k(k^2+m_0^2)^2} \log(\dots)}_{(c)} + \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{1}{4kl^2(k^2+m_0^2)^2} \log(\dots)}_{(d)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a) &= -\frac{\pi}{4lm_0^4} \\
 (b) &= \frac{\pi}{m_0^4(16l + 4l^3)} \\
 (c) &= \frac{\pi}{m_0^4} \left( -\frac{l}{4(4+l^2)} - \frac{1}{2} \arctan \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \arctan l \right) \\
 (d) &= (c) \times \frac{1}{l^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{8\pi^4 m_0^6} \int_0^\infty dl \frac{l}{(l^2+1)^2} \left[ (a) + (b) + (c) + (d) \right] \\
 &= \frac{1}{8\pi^4 m_0^6} \left[ \frac{-\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{72} \right. \\
 &\quad \left. + \pi \int_0^\infty dl \frac{l}{(l^2+1)^2} \left( -\frac{l}{4(4+l^2)} - \frac{1}{2} \arctan \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \arctan l \right) \left( 1 + \frac{1}{l^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{8\pi^4 m_0^6} \left[ \frac{-\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{72} - \frac{\pi^2}{48} \right. \\
 &\quad \left. + \pi \int_0^\infty dl \frac{l}{(l^2+1)^2} \left( -\frac{1}{2} \arctan \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \arctan l \right) \left( 1 + \frac{1}{l^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{8\pi^4 m_0^6} \left[ \frac{-\pi^2}{64} + \frac{\pi^2}{72} - \frac{\pi^2}{48} + \pi \int_0^\infty dl \frac{-\arctan \frac{l}{2} + \arctan l}{2(l+l^3)} \right] \\
 &= \frac{1}{8\pi^4 m_0^6} \left[ \frac{-\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{72} - \frac{\pi^2}{48} - \frac{\pi^2}{8} (2 \operatorname{artanh} \frac{1}{2} - \log \frac{4}{3}) + \frac{\pi^2}{4} \log 2 \right] \\
 &= \frac{1}{32\pi^2 m_0^6} \left[ -\frac{5}{18} - \operatorname{artanh} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{4}{3} + \log 2 \right]
 \end{aligned}$$

Zusammen:

$$\begin{aligned}
 &\partial_{p^2} I_6(0; m_1 = 0, m_2 = m_0, m_3 = m_0, m_4 = 0, m_5 = m_0) \\
 &= \frac{8}{3} \times (1) - 2 \times (3) + \frac{4}{3} \times (5)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{192\pi^2 m_0^6} (1 - 32 \log 2 + 16 \log 3)$$

Zum Vergleich wurde dieses Integral aus dem von [Raj96] angegebenen Parameterintegral (C.16) berechnet. Nach Ableiten des Parameterintegrals führt eine Partialbruchzerlegung auf sieben Teilintegrale, die sich ohne größere Schwierigkeiten berechnen lassen. Das Resultat ist mit dem obigen identisch.

**Fall 2:**  $m_1 = m_0, m_2 = m_3 = m_4 = h m_0, m_5 = m_0$

$$\begin{aligned} & \partial_{p^2} I_6(0; m_0, h_0, h_0, h_0, m_0) \\ &= \partial_{p^2} \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)((\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + h_0^2)} \\ & \quad \frac{1}{((\mathbf{l} + \mathbf{p})^2 + h_0^2)(l^2 + m_0^2)} \Big|_{p=0} \\ &= \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + h_0^2)(l^2 + m_0^2)} \\ & \quad \partial_{p^2} \frac{1}{((\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2)((\mathbf{l} + \mathbf{p})^2 + h_0^2)} \Big|_{p=0} \\ &= \frac{4}{3} \underbrace{\int_k \int_l \frac{k^2}{(k^2 + h_0^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + h_0^2)(l^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)^3(l^2 + h_0^2)}}_{=(1)} \\ & \quad + \frac{4}{3} \underbrace{\int_k \int_l \frac{l^2}{(k^2 + h_0^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + h_0^2)(l^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)(l^2 + h_0^2)^3}}_{=(2)} \\ & \quad - \underbrace{\int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + h_0^2)(l^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)^2(l^2 + h_0^2)}}_{=(3)} \\ & \quad - \underbrace{\int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + h_0^2)(l^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)(l^2 + h_0^2)^2}}_{=(4)} \end{aligned}$$

$$+ \frac{4}{3} \underbrace{\int_k \int_l \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}}{(k^2 + h_0^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + h_0^2)(l^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)^2(l^2 + h_0^2)^2}}_{=(5)} \quad (\text{C.30})$$

$$\begin{aligned}
 (1) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int_0^\infty 4\pi l^2 dl \frac{1}{(l^2 + m_0^2)(l^2 + h_0^2)} \\
 &\quad \int_0^\infty 2\pi k^2 dk \int_0^\pi d\theta \frac{k^2 \sin \theta}{(k^2 + h_0^2)(k^2 + m_0^2)^3(h_0^2 + k^2 + l^2 - 2kl \cos \theta)} \\
 &= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l^2}{(l^2 + m_0^2)(l^2 + h_0^2)} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{(k^2 + h_0^2)(k^2 + m_0^2)^3} \\
 &\quad \frac{1}{2kl} \log \frac{h_0^2 + (k+l)^2}{h_0^2 + (k-l)^2} \\
 &= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l}{2(l^2 + m_0^2)(l^2 + h_0^2)} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{(k^2 + h_0^2)(k^2 + m_0^2)^3} \log(\dots) \\
 &= \frac{1}{8\pi^4 m_0^4} \int_0^\infty dl \frac{l}{2(l^2 + m_0^2)(l^2 + h_0^2)} \left[ \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{-k}{(-1 + h^2)(1 + k^2)^3} \log(\dots)}_{(a)} \right. \\
 &\quad + \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{h^2 k}{(-1 + h^2)^2(1 + k^2)^2} \log(\dots)}_{(b)} \\
 &\quad + \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{-h^2 k}{(-1 + h^2)^3(1 + k^2)} \log(\dots)}_{(c)} \\
 &\quad \left. + \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{h^2 k}{(-1 + h^2)^3(h^2 + k^2)} \log(\dots)}_{(d)} \right] \quad (\text{C.31})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a) &= -\pi \frac{l(3 + 4h + h^2 + l^2)}{4(h^2 - 1)(1 + 2h + h^2 + l^2)^2} \\
 (b) &= \pi \frac{h^2 l}{(h^2 - 1)^2(1 + 2h + h^2 + l^2)} \\
 (c) &= -\pi \frac{2h^2}{(h^2 - 1)^3} \arctan \frac{1}{1 + h} \\
 (d) &= \pi \frac{2h^2}{(h^2 - 1)} \arctan \frac{1}{2h}
 \end{aligned}$$

Ausführen der  $l$ -Integration, Entwickeln in  $h$  und Aufsummieren der Teilintegrale führt schließlich auf:

$$(1) = \frac{5}{512\pi^2 m_0^6} + \mathcal{O}(h)$$

Mit derselben Vorgehensweise wie in (1) berechnet man:

$$\begin{aligned}
 (2) &= \frac{1}{1152\pi^2 m_0^6} \left( 91 + \frac{8}{h^2} - \frac{27}{h} + 72 \log 6 + 72 \log h + \mathcal{O}(h) \right) \\
 (3) &= -\frac{1}{64\pi^2 m_0^6} (1 + \log 1296 + 4 \log h + \mathcal{O}(h)) \\
 (4) &= \frac{1}{96\pi^2 m_0^6} \left( 8 + \frac{1}{h^2} - \frac{3}{h} + 2 \log 216 + 6 \log h + \mathcal{O}(h) \right)
 \end{aligned}$$

Wegen des Skalarproduktes im Zähler ist Integral (5) etwas aufwendiger. Weil  $\mathbf{k}\mathbf{l} = \frac{1}{2}(k^2 + l^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + h_0^2 - h_0^2)$  ist, erhält man

$$\begin{aligned}
 2 \times (5) &= \underbrace{\int_k \int_l \frac{k^2}{(k^2 + h_0^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + h_0^2)(l^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)^2(l^2 + h_0^2)^2}}_{=(a)} \\
 &+ \underbrace{\int_k \int_l \frac{l^2}{(k^2 + h_0^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + h_0^2)(l^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)^2(l^2 + h_0^2)^2}}_{=(b)} \\
 &- \underbrace{\int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + h_0^2)(l^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)^2(l^2 + h_0^2)^2}}_{=(c)}
 \end{aligned}$$

$$- \underbrace{\int_k \int_l \frac{h_0^2}{(k^2 + h_0^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + h_0^2)(l^2 + m_0^2)(k^2 + m_0^2)^2(l^2 + h_0^2)^2}}_{=(d)} .$$

Die Teilintegrale (a), (b) und (d) lassen sich in ähnlicher Weise wie (1) berechnen.

$$(a) = \frac{1}{192\pi^2 m_0^6} \left( -17 + \frac{3}{h} + \mathcal{O}(h) \right)$$

$$(b) = \frac{1}{192\pi^2 m_0^6} (-5 - 12 \log 6 - 12 \log h + \mathcal{O}(h))$$

$$(d) = \frac{1}{96\pi^2 m_0^6} + \mathcal{O}(h)$$

Das Teilintegral (c) faktorisiert und man erhält direkt

$$(c) = \frac{1}{64\pi^2 m_0^6} \left( 4 - \frac{1}{h} + \mathcal{O}(h) \right) .$$

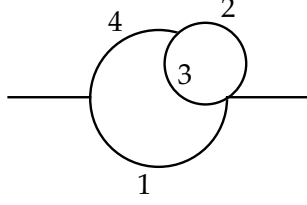
Insgesamt ergibt sich

$$(5) = -\frac{1}{96\pi^2 m_0^6} (2 + 3 \log 6 + 3 \log h + \mathcal{O}(h)) .$$

Zusammen bekommt man damit für die Ableitung von  $I_6$

$$\begin{aligned} & \partial_{p^2} I_6(\mathbf{p} = 0; m_0, hm_0, hm_0, hm_0, m_0) \\ &= \frac{4}{3} \times (1) + \frac{4}{3} \times (2) - (3) - (4) + \frac{4}{3} \times (5) \\ &= \frac{1}{3456\pi^2 m_0^6} \left( 79 - \frac{4}{h^2} + 144 \log 6 + 144 \log h + \mathcal{O}(h) \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Zur Kontrolle wurde dieses Integral aus dem von [Raj96] angegebenen Parameterintegral (C.16) berechnet, indem die Impulsableitung auf das Parameterintegral angewendet wurde. Der Integrand wurde dann per Partialbruchzerlegung in zehn Teilintegrale zerlegt, die anschließend einzeln berechnet und in  $h$  entwickelt werden konnten. Der Nachteil dieses Vorgehens ist die erheblich Länge der Terme in den vielen Zwischenschritten, so daß dieser Aufwand nur noch mit Hilfe von **Mathematica** vertretbar ist. Als Ergebnis erhält man auch auf diese Weise (C.32).

C.4.4 Integral  $I_7$  mit äußerem Impuls


Entspricht [Raj96] Integral (f).

$$I_7(\mathbf{p}; m_1, m_2, m_3, m_4) = \int_k \int_l \frac{1}{((\mathbf{p} - \mathbf{l})^2 + m_1^2)(k^2 + m_4^2)(l^2 + m_2^2)((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_3^2)}$$

$$\begin{aligned} I_7 = & \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4pm_4} \left( 2 \log \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2 + m_3 - m_4} \arctan \frac{p}{m_1 + m_4} \right. \\ & + i \left[ \text{Li}_2 \left( -\frac{m_1 + m_4 - ip}{m_2 + m_3 - m_4} \right) - \text{Li}_2 \left( -\frac{m_1 - m_4 - ip}{m_2 + m_3 + m_4} \right) \right. \\ & \left. \left. + \text{Li}_2 \left( -\frac{m_1 - m_4 + ip}{m_2 + m_3 + m_4} \right) - \text{Li}_2 \left( -\frac{m_1 + m_4 + ip}{m_2 + m_3 - m_4} \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_0$$

$$\begin{aligned} I_7(\mathbf{p}; m_0, m_0, m_0, m_0) &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4pm_0} \left( 2 \log(9) \arctan \frac{p}{2m_0} \right. \\ &+ i \left[ \text{Li}_2 \left( -\frac{ip}{3m_0} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{ip}{3m_0} \right) \right. \\ &\left. \left. - \text{Li}_2 \left( -2 - \frac{ip}{3m_0} \right) + \text{Li}_2 \left( -2 + \frac{ip}{3m_0} \right) \right] \right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4pm_0} \left( 2 \log(9) \arctan \frac{p}{2m_0} + i \text{Di} \left( \frac{p}{m_0} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

mit der Abkürzung

$$\text{Di}(x) = \text{Li}_2 \left( -\frac{i}{3}x \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{i}{3}x \right) - \text{Li}_2 \left( -2 - ix \right) + \text{Li}_2 \left( -2 + ix \right) \quad (\text{C.35})$$

$$I_7(\mathbf{p} = 0; m_0, m_0, m_0, m_0) = \frac{1}{96\pi^2 m_0^2} \quad (\text{C.36})$$

$$m_1 = m_0, m_2 = m_3 = 0, m_4 = m_0$$

$$\begin{aligned} I_7(\mathbf{p}; m_0, 0, 0, m_0) &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4pm_0} \left( 2\pi i \arctan \frac{p}{2m_0} + i \left[ \text{Li}_2\left(-\frac{ip}{m_0}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{ip}{m_0}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \text{Li}_2\left(2 - \frac{ip}{m_0}\right) - \text{Li}_2\left(2 + \frac{ip}{m_0}\right) \right] \right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4pm_0} \left( 2\pi i \arctan \frac{p}{2m_0} - i \text{Di}_2\left(\frac{p}{m_0}\right) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

wobei

$$\text{Di}_2(x) = -\text{Li}_2(-ix) + \text{Li}_2(ix) - \text{Li}_2(2 - ix) + \text{Li}_2(2 + ix) \quad (\text{C.38})$$

$$m_1 = m_0, m_2 = 0, m_3 = m_0, m_4 = 0$$

$$I_7(\mathbf{p} = 0; m_0, 0, m_0, 0) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\log 2}{m_0^2} \quad (\text{C.39})$$

$$\partial_{p^2} I_7(\mathbf{p} = 0; m_0, 0, m_0, 0) = \frac{1}{128\pi^2 m_0^4} (3 - 8 \log 2) \quad (\text{C.40})$$

$$m_1 = 0, m_2 = m_0, m_3 = m_0, m_4 = m_0$$

$$I_7(\mathbf{p} = 0; 0, m_0, m_0, m_0) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\log \frac{3}{2}}{m_0^2} \quad (\text{C.41})$$

$$\partial_{p^2} I_7(\mathbf{p} = 0; 0, m_0, m_0, m_0) = -\frac{1}{384\pi^2 m_0^4} \left( 1 + 8 \log \frac{3}{2} \right) \quad (\text{C.42})$$



$$m_1 = hm_0, m_2 = hm_0, m_3 = hm_0, m_4 = m_0$$

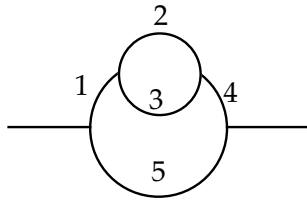
$$I_7(\mathbf{p} = 0; hm_0, hm_0, hm_0, m_0) = \frac{1}{16\pi^2 m_0^2} (-\log 3h + \mathcal{O}(h))$$

$$\begin{aligned} & \partial_{p^2} I_7(\mathbf{p} = 0; hm_0, hm_0, hm_0, m_0) \\ &= \frac{1}{864\pi^2 m_0^4} \left( -\frac{1}{h^2} + 11 + 18 \log 3 + 18 \log h + \mathcal{O}(h) \right) \end{aligned}$$

$$m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = m_0, m_4 = 0$$

$$\begin{aligned} & I_7(\mathbf{p}; 0, 0, m_0, 0) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2m_0^2} \left( \pi \frac{m_0}{p} + \frac{m_0(m_0 - ip)}{p^2} \log \left( 1 - \frac{ip}{m_0} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{m_0(m_0 + ip)}{p^2} \log \left( 1 + \frac{ip}{m_0} \right) \right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2m_0^2} \left( \pi \frac{m_0}{p} + \frac{m_0^2}{p^2} \left( \log \left( 1 + \frac{p^2}{m_0^2} \right) - 2 \frac{p}{m_0} \arctan \frac{p}{m_0} \right) \right) \quad (\text{C.43}) \end{aligned}$$

#### C.4.5 Integral $I_9$ mit äußerem Impuls



Entspricht [Raj96], [Raj98] Integral (b).

$$\begin{aligned} & I_9(\mathbf{p}; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \\ &= \int_k \int_l \frac{1}{(k^2 + m_1^2)(k^2 + m_4^2)((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m_5^2)(l^2 + m_2^2)} \\ & \quad \frac{1}{((\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_3^2)} \quad (\text{C.44}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_9(\mathbf{p}; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4pm_1m_4(m_4^2 - m_1^2)} \left( 2m_4 \log \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_2 + m_3 - m_1} \arctan \frac{p}{m_1 + m_5} \right. \\
&\quad - 2m_1 \log \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2 + m_3 - m_4} \arctan pm_4 + m_5 \\
&\quad + im_4 \left[ \text{Li}_2\left(-\frac{m_5 + m_1 - ip}{m_2 + m_3 - m_1}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{m_5 + m_1 + ip}{m_2 + m_3 - m_1}\right) \right. \\
&\quad \left. - \text{Li}_2\left(-\frac{m_5 - m_1 - ip}{m_1 + m_2 + m_3}\right) + \text{Li}_2\left(-\frac{m_5 - m_1 + ip}{m_1 + m_2 + m_3}\right) \right] \\
&\quad - im_1 \left[ \text{Li}_2\left(-\frac{m_5 + m_4 - ip}{m_2 + m_3 - m_4}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{m_5 + m_4 + ip}{m_2 + m_3 - m_4}\right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{Li}_2\left(-\frac{m_5 - m_4 - ip}{m_2 + m_3 + m_4}\right) + \text{Li}_2\left(-\frac{m_5 - m_4 + ip}{m_2 + m_3 + m_4}\right) \right] \right) \quad (\text{C.45})
\end{aligned}$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_0$$

$$\begin{aligned}
& I_9(p; m_0, m_0, m_0, m_0, m_0) \\
&= \frac{1}{128\pi^2 m_0^3 p} \left( -\frac{8}{3} \arctan \frac{p}{2m_0} + \frac{m_0 p}{4m_0^2 + p^2} \log 9 + \arctan \frac{p}{2m_0} \right. \\
&\quad + \frac{i}{3} \left[ \frac{3im_0 + p}{p} \log\left(1 - \frac{ip}{3m_0}\right) + \frac{3im_0 - p}{p} \log\left(1 + \frac{ip}{3m_0}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3(3m_0 - ip)}{2m_0 - ip} \log\left(3 - \frac{ip}{m_0}\right) - \frac{3(3m_0 + ip)}{2m_0 + ip} \log\left(3 + \frac{ip}{m_0}\right) \right] \\
&\quad \left. + i\text{Di}\left(\frac{p}{m_0}\right) \right),
\end{aligned}$$

wobei

$$\text{Di}(x) = \text{Li}_2\left(-\frac{i}{3}x\right) - \text{Li}_2\left(\frac{i}{3}x\right) - \text{Li}_2(-2 - ix) + \text{Li}_2(-2 + ix)$$

in (C.35) definiert worden ist.

Dies läßt sich zusammenfassen zu

$$I_9(p; m_0, m_0, m_0, m_0, m_0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{128\pi^2 m_0^3 p} \left( \left( -\frac{8}{3} + \log 9 \right) \arctan \frac{p}{2m_0} + \frac{m_0 p}{4m_0^2 + p^2} \log 9 \right. \\
 &\quad + \frac{1}{3p(4m_0^2 + p^2)} \left[ 2p \arctan \frac{p}{3m_0} \cdot (m_0^2(4 + 18 \log 3) + p^2(1 + \log 27)) \right. \\
 &\quad \left. \left. - 3m_0(4m_0^2 + p^2(1 + \log 3)) \log \left( 1 + \frac{p^2}{9m_0^2} \right) \right] + i \text{Di} \left( \frac{p}{m_0} \right) \right). \quad (\text{C.46})
 \end{aligned}$$

$$m_1 = m_0, m_2 = m_3 = 0, m_4 = m_5 = m_0$$

$$\begin{aligned}
 &I_9(p; m_0, 0, 0, m_0, m_0) \\
 &= -\frac{i}{128\pi^2 m_0^3 p} \left( -\frac{2m_0 p \pi}{4m_0^2 + p^2} - 2\pi \arctan \frac{p}{2m_0} \right. \\
 &\quad - \frac{m_0 + ip}{2m_0 + ip} \log \left( -1 - \frac{ip}{m_0} \right) - \frac{i(m_0 - ip)}{p} \log \left( 1 - \frac{ip}{m_0} \right) \\
 &\quad + \frac{m_0 - ip}{2m_0 - ip} \log \left( -1 + \frac{ip}{m_0} \right) + \frac{-im_0 + p}{p} \log \left( 1 + \frac{ip}{m_0} \right) \\
 &\quad \left. + \text{Di}_2 \left( \frac{p}{m_0} \right) \right),
 \end{aligned}$$

wobei

$$\text{Di}_2(x) = -\text{Li}_2(-ix) + \text{Li}_2(ix) - \text{Li}_2(2 - ix) + \text{Li}_2(2 + ix)$$

in (C.38) definiert worden ist.

Zusammenfassen ergibt:

$$\begin{aligned}
 &I_9(p; m_0, 0, 0, m_0, m_0) \\
 &= \frac{1}{64\pi^2 m_0^3 p} \left( -i\pi \arctan \frac{p}{2m_0} + \frac{4m_0^2 + p^2 + 2im_0^2\pi + ip^2\pi}{4m_0^2 + p^2} \arctan \frac{p}{m_0} \right. \\
 &\quad + \frac{m_0}{p(4m_0^2 + p^2)} (-ip^2 + (2m_0^2 + p^2)) \log \left( 1 + \frac{p^2}{m_0^2} \right) \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} i \text{Di}_2 \left( \frac{p}{m_0} \right) \right). \quad (\text{C.47})
 \end{aligned}$$

$$m_1 = hm_0, m_2 = hm_0, m_3 = m_0, m_4 = hm_0, m_5 = hm_0$$

In diesem Fall ergeben sich Infrarotsingularitäten im Limes  $h \rightarrow 0$ . Deshalb werden die obigen Parameter eingesetzt und das Ergebnis anschließend in  $h$  bis zur ersten Ordnung entwickelt. Man erhält

$$\begin{aligned} I_9(p; hm_0, hm_0, m_0, hm_0, hm_0) \\ = \frac{1}{96\pi^2 p^4} \left( -4 \frac{p^2}{m_0^2} - \pi \frac{p^3}{m_0^3} + \log \left( 1 + \frac{p^2}{m_0^2} \right) + 2 \frac{p^3}{m_0^3} \arctan \frac{p}{m_0} \right) \\ + \frac{1}{32\pi^2 m_0^2 p^2} \frac{1}{h} + \mathcal{O}(h) . \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

**Weitere Ergebnisse für  $p = 0$**

$$\begin{aligned} I_9(\mathbf{p} = 0; hm_0, m_0, hm_0, hm_0, m_0) \\ = \frac{1}{32\pi^2 m_0^4} \left( \frac{1}{h} - 2 - 2 \log 2 + \mathcal{O}(h) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

$$\begin{aligned} \partial_{p^2} I_9(\mathbf{p} = 0; hm_0, m_0, hm_0, hm_0, m_0) \\ = \frac{1}{32\pi^2 m_0^6} \left( -\frac{1}{h} + \frac{7}{12} + \frac{20}{3} \log 2 + \mathcal{O}(h) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

$$I_9(\mathbf{p} = 0; m_0, m_0, m_0, m_0, 0) = \frac{1}{96\pi^2 m_0^4} \left( -1 + 6 \log \frac{3}{2} \right) \quad (\text{C.51})$$

$$\partial_{p^2} I_9(\mathbf{p} = 0; m_0, m_0, m_0, m_0, 0) = \frac{1}{1152\pi^2 m_0^6} \left( 1 - 48 \log \frac{3}{2} \right) \quad (\text{C.52})$$

$$\begin{aligned} I_9(\mathbf{p} = 0; m_0, hm_0, hm_0, m_0, hm_0) \\ = -\frac{1}{32\pi^2 m_0^4} (1 + \log 9 + 2 \log h + \mathcal{O}(h)) \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

$$\begin{aligned} \partial_{p^2} I_9(\mathbf{p} = 0; m_0, hm_0, hm_0, m_0, hm_0) \\ = \frac{1}{864\pi^2 m_0^6} \left( -\frac{1}{h^2} + 31 + 36 \log 3 + 36 \log h + \mathcal{O}(h) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

---

## Hilfsformeln, spezielle Funktionen und Konstanten

---

Einige der verwendeten Formeln, speziellen Funktionen und Abkürzungen sollen hier aufgelistet werden. Dazu wurde vor allem [AS70] verwendet.

### Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1}; \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (\text{D.1})$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (\text{D.2})$$

Eulersche Zahl

$$\gamma = 0.5772 \dots \quad (\text{D.3})$$

Entwicklung um ganzzahliges  $n$

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \quad (\text{D.4})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}; \quad n > -1, \alpha > 0 \quad (\text{D.5})$$

Oberfläche der Einheitskugel in  $D$  Dimensionen

$$\Omega_D = D \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)} \quad (\text{D.6})$$

### Feynmanparametrisierung

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} d\alpha \alpha^{n-1} e^{-\alpha A}; \quad n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re} A > 0 \quad (\text{D.7})$$

### Betafunktion

$$B(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}; \quad \operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0 \quad (\text{D.8})$$

### Gaußintegral

$$\int_k \exp(-(ak^2 + 2\mathbf{p}\mathbf{k})) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{D/2} \exp\left(\frac{p^2}{a}\right); \quad \operatorname{Re} a > 0 \quad (\text{D.9})$$

### Dilogarithmus

$$\operatorname{Li}_2(y) = - \int_0^1 dx \frac{\log(1-xy)}{x} = - \int_0^y dx \frac{\log(1-x)}{x} \quad (\text{D.10})$$

$$\operatorname{Re} \operatorname{Li}_2(3) = 2.32018 \dots \quad (\text{D.11})$$

$$\operatorname{Re} \operatorname{Li}_2(9) = 0.761610 \dots \quad (\text{D.12})$$

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) = 0.366213 \dots \quad (\text{D.13})$$

---


$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) = 0.114360\dots \quad (\text{D.14})$$

Abkürzungen

$$\operatorname{Di}(x) = \operatorname{Li}_2\left(-\frac{i}{3}x\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{i}{3}x\right) - \operatorname{Li}_2(-2-ix) + \operatorname{Li}_2(-2+ix) \quad (\text{D.15})$$

$$\operatorname{Di}_2(x) = -\operatorname{Li}_2(-ix) + \operatorname{Li}_2(ix) - \operatorname{Li}_2(2-ix) + \operatorname{Li}_2(2+ix) \quad (\text{D.16})$$

### Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-x}; \quad \operatorname{Re} x > 1 \quad (\text{D.17})$$

$$\zeta(3) = 1.20206\dots \quad (\text{D.18})$$

### Hypergeometrische Funktion

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= {}_2F_1(a, b; c; z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

### Numerische Integralergebnisse (Siehe Abschnitt C.4.2)

$$d_1 = -0.0387379\dots \quad (\text{D.20})$$

$$\operatorname{Re} d_2 = -1.79215\dots \quad (\text{D.21})$$

$$\operatorname{Re} d_3 = -0.486886\dots \quad (\text{D.22})$$

---

## Literaturverzeichnis

---

- [Ami78] D. Amit, *Field theory, the renormalization group, and critical phenomena*, McGraw-Hill, 1978.
- [AS70] M. Abramowitz and A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, ninth ed., Dover Publications, New York, 1970.
- [AS95] S. A. Antonenko and A. I. Sokolov, *Critical exponents for a three-dimensional  $O(n)$ -symmetric model with  $n > 3$* , Phys. Rev. B **51** (1995), 1894.
- [BC80] J. S. Ball and T. Chiu, *Analytic properties of the vertex function in gauge theories*, Physical Review D **22** (1980), no. 10, 2550–2557.
- [BDFN93] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, and M. E. J. Newman, *The Theory of Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [Bel91] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, first ed., Oxford University Press, 1991.
- [Ber76] C. Bervillier, *Universal relations among critical amplitude. Calculations up to order  $\epsilon^2$  for systems with continuous symmetry*, Physical Review B **14** (1976), no. 11, 4964–4975.
- [Bro90] D. J. Broadhurst, *The master two-loop diagram with masses*, Z. Phys. C **47** (1990), 115–124.



- [BS89] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, 24th ed., Verlag Harri Deutsch, Thun, 1989.
- [BSD97] S. S. C. Burnett, M. Strösser, and V. Dohm, *Minimal renormalization without  $\epsilon$ -expansion: Amplitude functions in three dimensions below  $T_c$* , Nucl. Physics B **504** (1997), 665–700.
- [CHP99] M. Caselle, M. Hasenbusch, and P. Provero, *Non-perturbative states in 3D  $\phi^4$  theory*, hep-lat/9903011 (1999).
- [CHP<sup>+</sup>00] M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, P. Rossi, and E. Vicari, *Critical behavior of the three-dimensional XY universality class*, cond-mat/0010360 (2000).
- [CKT79] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, and F. V. Tkachov, *Higher Order Corrections to  $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{Hadrons})$  in Quantum Chromodynamics*, Physics Letters B **85** (1979), 277–279.
- [CKT80] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, and F. V. Tkachov, *New Approach to Evaluation of Multiloop Feynman Integrals: The Gegenbauer Polynomial  $x$ -Space Technique*, Nuclear Physics B **174** (1980), 345–377.
- [Col85] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1985.
- [DD84] A. Devoto and D. W. Duke, *Table of Integrals and Formulae for Feynman Diagram Calculations*, La Rivista del Nuovo Cimento **7** (1984), no. 6.
- [Doh85] V. Dohm, *Nonuniversal Critical Phenomena along the Lambda Line of  $^4\text{He}$* , Z. Phys. B **60** (1985), 61–71.
- [Doh98] V. Dohm, *Renormalization-Group Theory and Universality along the Lambda Line of  $^4\text{He}$* , cond-mat/9803095 V2 (1998).
- [GKM96] C. Gutsfeld, J. Küster, and G. Münster, *Calculation of Universal Amplitude Ratios in three loop order*, Nuclear Physics B **479** (1996), 654–662.
- [GR81] I. Gradstein and I. Ryshik, *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*, fifth ed., Verlag Harri Deutsch, Thun, 1981.
- [Gut95] C. Gutsfeld, *Das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge in 3-Loop-Ordnung im dreidimensionalen  $\phi^4$ -Modell*, Diplomarbeit, WWU Münster, 1995.

- [HAH76] P. C. Hohenberg, A. Aharony, and B. I. Halperin, *Two-scale-factor universality and the renormalization group*, Physical Review B **13** (1976), 2987.
- [HD92] F. J. Halfkann and V. Dohm, *Minimal renormalization without  $\epsilon$ -expansion. Amplitude functions in three dimensions below  $T_c$* , Z. Phys. B **89** (1992), 79–87.
- [Hei93] J. Heitger, *Feldtheoretische Berechnung universeller Amplitudenverhältnisse in 2-Loop-Ordnung beim dreidimensionalen Ising-Modell*, Diplomarbeit, WWU Münster, 1993.
- [Küs95] J. Küster, *Anwendung der Dyson-Schwinger-Gleichung in der  $\phi^4$ -Theorie zur Berechnung universeller Amplitudenverhältnisse*, Diplomarbeit, WWU Münster, 1995.
- [LMSD98] S. A. Larin, M. Mönnigmann, M. Ströscher, and V. Dohm, *Five-loop additive renormalization in the  $\phi^4$  theory and amplitude functions of the minimally renormalized specific heat in three dimensions*, Physical Review B **58** (1998), no. 6, 3394–3408.
- [LSN<sup>+</sup>96] J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen, T. C. P. Chui, and U. E. Israelsson, *Heat Capacity and Thermal Relaxation of Bulk Helium very near the Lambda Point*, Physical Review Letters **76** (1996), no. 6, 944–947.
- [Luc95] B. Lucas, *Feldtheoretische Berechnung universeller Amplitudenverhältnisse in 1-Loop-Ordnung beim dreidimensionalen N-Vektor-Modell*, Diplomarbeit, WWU Münster, 1995.
- [LW89] M. Lüscher and P. Weisz, *Scaling Laws and Triviality Bounds in the Lattice  $\phi^4$  Theory (III).  $n$ -component model*, Nuclear Physics B **318** (1989), 705–741.
- [MDR93] P. N. Maher, L. Durand, and K. Riesselmann, *Two-loop renormalization constants and high-energy  $2 \rightarrow 2$  scattering amplitudes in the Higgs sector of the standard model*, Physical Review D **48** (1993), no. 3, 1061–1083.
- [MH94] G. Münster and J. Heitger, *Field-theoretic calculation of the universal amplitude ratio of correlation lengths in 3D Ising systems*, Nuclear Physics B **424** (1994), 582–594.

- [MPA75] K. H. Mueller, F. Pobell, and G. Ahlers, *Thermal-Expansion Coefficient and Universality near the Superfluid Transition of  $^4\text{He}$  under pressure*, Phys. Rev. Letters **34** (1975), 513.
- [Nic78] B. G. Nickel, *Evaluation of simple Feynman graphs*, J. Math. Phys. **19** (1978), 542–548.
- [Nog93a] P. Nogueira, *Automatic Feynman Graph Generation*, Journal of Computational Physics **105** (1993), no. 2, 279–289.
- [Nog93b] P. Nogueira, *QGraf Manual Version 1.1*, 1993.
- [Par80] G. Parisi, *Field-Theoretic Approach to Second-Order Phase Transitions in Two- and Three-Dimensional Systems*, Journal of Statistical Physics **23** (1980), no. 1, 49–82.
- [PHA91] V. Privman, P. C. Hohenberg, and A. Aharony, *Universal Critical-Point Amplitude Relations*, Phase Transitions and Critical Phenomena (C. Domb and J. L. Lebowitz, eds.), vol. 14, Academic Press, 1991.
- [PV01] A. Pelissetto and E. Vicari, *Critical Phenomena and the Renormalization-Group Theory*, cond-mat /0012164 (2001).
- [Raj96] A. K. Rajantie, *Feynman diagrams to three loops in three dimensional field theory*, Nuclear Physics B **480** (1996), 729–752.
- [Raj98] A. K. Rajantie, *Erratum to "Feynman diagrams to three loops in three dimensional field theory"*, Nuclear Physics B **513** (1998), 761–762.
- [Reh] M. Rehwald, *Konforme Bootstrap-Feldtheorie*, Unveröffentlicht.
- [Rei95] T. Reisz, *High temperature critical  $O(N)$  field models by LCE series*, Physics Letters B **360** (1995), 77–82.
- [SD89] R. Schloms and V. Dohm, *Minimal renormalization without  $\epsilon$ -Expansion: Critical Behavior in three Dimensions*, Nuclear Physics B **328** (1989), 639–663.
- [SD90] R. Schloms and V. Dohm, *Minimal renormalization without  $\epsilon$  expansion: Critical behavior above and below  $T_c$* , Physical Review B **42** (1990), no. 10, 6142–6152.
- [SLD98] M. Ströscher, S. A. Larin, and V. Dohm, *Minimal renormalization without  $\epsilon$ -expansion: Three-loop amplitude functions of the  $O(n)$  symmetric  $\phi^4$  theory in three dimensions below  $T_c$* , cond-mat/9806103 V2 (1998).

- [Str96] M. Strösser, *Kritisches Verhalten des  $\Phi^4$ -Modells unterhalb von  $T_c$  in drei Dimensionen*, Diplomarbeit, RWTH Aachen, 1996.
- [tH73] G. 't Hooft, *Dimensional Regularization and the Renormalization Group*, Nuclear Physics B **61** (1973), 455–468.
- [tV72] G. 't Hooft and M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nuclear Physics B **44** (1972).
- [WK74] K. G. Wilson and J. Kogut, *The Renormalization group and the  $\epsilon$ -Expansion*, Phys. Rep. **12** (1974), no. 2, 75–198.
- [Wol96] S. Wolfram, *The Mathematica book*, third ed., Cambridge University Press, 1996.
- [ZJ96] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1996.