

Diplomarbeit

Volumen-Effekte in der $N=1$ supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Tobias Berheide

Münster, 20. März 2012

Betreuer: Prof. Dr. Gernot Münster

Im Vergleich zu der am 20. März 2012 im Prüfungsamt eingereichten Arbeit sind in dieser korrigierten Version dieser Arbeit einige kleine Fehler behoben worden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Supersymmetrie im Kontinuum	7
2.1	Motivation	7
2.2	Graduierung	8
2.3	Poincaré Superalgebra	9
2.4	Die irreduziblen Darstellungen der SUSY-Algebra	10
2.5	Die Supermultipletts	11
2.5.1	Das Chirale Supermultiplett	12
2.5.2	Das Vektor-Supermultiplett	12
2.6	Superfelder	12
2.7	Die Lagrange-Dichte der supersymmetrischen Yang-Mills Theorie .	15
2.8	Die Multipletts	17
3	Supersymmetrie auf dem Gitter	19
3.1	Die Gitterdiskretisierung	19
3.2	Eichinvariante Objekte aus Linkvariablen	21
3.2.1	Die Plakette	21
3.2.2	Die Clover-Plakette	22
3.3	Die Wilson-Schleife	23
3.4	Die Wirkung der N=1 supersymmetrischen Theorie auf dem Gitter .	24
4	Simulationsdetails	27
4.1	Der polynomiale Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus	27
4.1.1	Die Markov-Kette	27
4.1.2	Molekül-Dynamik-Algorithmus	28
4.1.3	Metropolis-Algorithmus	29
4.1.4	Der Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus	30
4.1.5	Die polynomiale Approximation	31
4.2	Die Simulationsparameter	34
4.3	Die Korrekturfaktoren	38
5	Massenbestimmung auf dem Gitter	40
5.1	Die Zeitscheiben-Korrelationsfunktion	40
5.2	Direkter Massenfit	41
5.3	Effektive Massen	42
5.4	Die Variationsmethode	43
5.5	Fehlerabschätzungen	44
5.5.1	Die Jackknife-Analyse	45
5.5.2	Die Methode der Linearisierung	46
5.6	Das APE-Smearing	47

5.7	Die Korrelatoren des supersymmetrischen Teilchenspektrums	48
5.7.1	Die adjungierten Mesonen	48
5.7.2	Der Gluino–Glueball	49
5.8	Das statische Potential und die physikalische Skala	49
6	Massenbestimmung des pseudoskalaren Glueballs	52
6.1	Glueball–Operatoren	52
6.2	Erste Ergebnisse für den pseudoskalaren Glueball	55
7	Volumen–Effekte	59
7.1	Physikalischer Ursprung der Massenverschiebung	59
7.2	Die Massenverschiebung	60
7.3	Volumen–Effekte bei konstanten Simulationsparametern	63
7.4	Der chirale Limes	68
7.5	Der Volumen–Effekt bei konstanter Pionmasse	72
8	Diskussion und Ausblick	75
9	Anhang	76
9.1	Die lineare Anpassung	76
9.2	Daten für den chiralen Limes	78
9.3	Daten der linearen Regressionen	80
9.4	Gluino–Glue–Massen bei konstanten Pionmassen	81

1 Einleitung

Quarks, Leptonen und Eichbosonen werden nach heutigem Kenntnisstand als Elementarteilchen verstanden. Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik werden diese drei Elementarteilchen-Familien sowie drei der vier Grundkräfte zusammengefasst.

Insgesamt gibt es sechs verschiedene Quarks, sie besitzen die Farbladungen rot, blau und grün. Gebundene Zustände aus zwei Quarks, bzw. einem Quark und dem zugehörigen Antiquark, werden als Mesonen bezeichnet, gebundene Zustände aus drei Quarks als Baryonen. Diese gebundenen Zustände sind immer farbneutral. Leptonen sind wie Quarks Spin-1/2-Teilchen, gehören also zu den Fermionen.

Bosonen sind Teilchen mit ganzzahligem Spin. Sie übertragen die Kräfte zwischen den Fermionen. Die elektromagnetische Kraft wird von den masselosen Photonen übertragen. Da die Reichweite einer Kraft mit dem Kehrwert der Masse des übertragenden Bosons im Zusammenhang steht, hat diese Kraft eine unendliche Reichweite. Die Bosonen W^\pm und Z^0 , welche die schwache Kraft übertragen, besitzen eine relativ hohe Masse (im GeV-Bereich), so dass diese eine sehr kurze Reichweite von unter 10^{-17} Meter besitzt. Verantwortlich ist diese Kraft zum Beispiel für den β -Zerfall.

Quarks werden durch den Austausch von Gluonen zusammengehalten. Die Gluonen besitzen die außergewöhnliche Eigenschaft, selbst wieder Farbladung zu tragen. Das bedeutet, sie wechselwirken auch untereinander. Versucht man, Quarks aus ihrem Verbund zu lösen, nimmt die Energie immer weiter zu, bis schließlich genug Energie vorhanden ist, ein weiteres Meson zu erzeugen. Daher ist es unmöglich, einzelne Quarks zu beobachten. Diese Tatsache wird auch kurz als Confinement bezeichnet. Die Reichweite liegt im fm-Bereich, die Ausläufer der starken Kraft zwischen den drei Quarks in Protonen und Neutronen ist die bekannte Kernkraft. Die vierte fundamentale Kraft ist die Gravitation, welche durch das hypothetische, noch nicht experimentell beobachtete Graviton übertragen wird. Diese Kraft bleibt im Standardmodell der Elementarteilchenphysik unberücksichtigt.

Quantenfeldtheorien (QFT) bilden die Grundlage der theoretischen Beschreibung. Die erste QFT war die Dirac-Theorie, die eine Vereinheitlichung der relativistischen Elektrodynamik und der Quantentheorie darstellt und von Paul Dirac 1928 aufgestellt wurde. Ausgehend von dieser entwickelten Richard P. Feynman, Julian Schwinger und Shinichirō Tomonaga in den 1940er die Quantenelektrodynamik (QED). Die Vereinheitlichung der elektromagnetischen mit der schwachen Wechselwirkung gelang Sheldon Glashow, Abdus Salam und Steven Weinberg 1967, sie wird auch als Glashow-Weinberg-Salam-Modell bezeichnet. Die starke Wechselwirkung wird durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben. Diese wurde 1973 von Murray Gell-Mann, Harald Fritzsch und Heinrich Leutwyler entwickelt.

Grundlage der Beschreibung der Wechselwirkungen im Standardmodell sind Sym-

metrien. Unterschieden werden Symmetrien in lokale und globale Symmetrien. Eichtheorien sind Feldtheorien, die lokalen Symmetrien genügen, d.h. bei der lokalen Transformation einer Größe bleibt die Theorie invariant. Dieses Prinzip wurde 1929 von Hermann Weyl begründet.

Die QED ist eine sogenannte abelsche Eichtheorie, d.h. die Reihenfolge der Transformationen spielt keine Rolle. Beschrieben wird sie durch die Symmetriegruppe $U(1)$. Die starke sowie die schwache Wechselwirkung sind Beispiele für nicht abelsche Theorien. Hier ist die Reihenfolge der Transformation nicht vertauschbar. Nicht-abelsche Theorien werden auch als Yang–Mills–Theorien bezeichnet, nach Cheng Ning Yang und Robert L. Mills, die 1954 versuchten, von der globalen Isospinsymmetrie ausgehend eine lokale Eichsymmetrie der starken Wechselwirkung zu entwickeln. Bei der Isospinsymmetrie geht man davon aus, dass Protonen und Neutronen bezüglich der Kernkraft identische Teilchen sind. Diese Symmetrie ist allerdings nicht exakt. Sie wird von der elektrischen Ladung des Protons gebrochen.

Die QCD gehorcht der Symmetriegruppe $SU(3)$, die schwache Wechselwirkung der $SU(2)$. Somit ist das Standardmodell eine Produktdarstellung der Gruppen $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ der drei einzelnen QFT.

Trotz der herausragenden Erfolge in der Beschreibung der Teilchenphysik besitzt das Standardmodell ein paar Unzulänglichkeiten. Hier sei nur eine kleine Auswahl dargestellt. Die Stärke der einzelnen Kräfte kann über die Kopplungskonstante beschrieben werden. Diese Eichkopplungen sind von der Energieskala, bei welcher sie gemessen werden, abhängig. In einer vereinheitlichten Theorie geht man davon aus, dass sich diese Kopplungen in einem Punkt vereinen. Das ist im Standardmodell nicht der Fall. Außerdem findet die Gravitation keinen Platz im Standardmodell. Ein weiteres Problem ist das Hierarchieproblem (siehe auch Kapitel 2.1).

Hier schafft die Supersymmetrie Abhilfe. Diese ist eine zusätzliche Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen. Daher erwartet man zu jedem Boson einen sogenannten fermionischen Superpartner und umgekehrt. In einem theoretischen, supersymmetrischen Modell treffen sich die laufenden Kopplungen in einem Punkt. Da bis heute die experimentellen Hinweise auf diese Superpartner fehlen, geht man in dem sogenannten minimalen supersymmetrischen Standardmodell (MSSM) von einer weich gebrochenen Supersymmetrie aus („soft SUSY breaking“). Dabei bleiben die fundamentalen Eigenschaften erhalten, aber die Superpartner besitzen eine deutlich höhere Masse als die Standardmodellteilchen.

Das einfachste supersymmetrische Modell mit lokaler Eichsymmetrie ist die $N = 1$ supersymmetrische Yang–Mills–Theorie, da hier nur eine supersymmetrische Erweiterung auftritt. Diese enthält neben dem Eichfeld auch masselose Majorana–Fermionen in der adjungierten Darstellung.

In der störungstheoretischen Behandlung von Eichtheorien werden Streu–Amplituden in Termen der Kopplungskonstanten entwickelt. Bei niedrigen Energien sind diese Kopplungen aber sehr groß, so dass die Störungstheorie versagt.

Um eine Eichtheorie auf niedrigen Energieskalen zu untersuchen, bietet sich die Diskretisierung der vierdimensionalen Raum–Zeit an. Das Konzept der Gittereich–

theorie wurde von Kenneth Wilson 1974 eingeführt. Die diskretisierte Raum–Zeit besitzt minimale Abstände. Durch diese wird die Energie im Impulsraum abgeschnitten. Man erhält also einen natürlichen Cut–Off im Impulsraum. Dadurch wird die Eichtheorie regularisiert, so dass Divergenzen wie im Falle der Störungstheorie nicht auftreten. Werden die Gitterabstände kleiner und kleiner, so wird im Grenzfall das Kontinuum reproduziert. Verwendet man aber ein Raum–Zeit–Gitter mit zu kleiner physikalischer Ausdehnung, so wird die Wellenlänge der betrachteten Teilchen zusammengestaucht. Dadurch verschiebt sich die Energie und damit die Masse des Teilchen. Diese Massenverschiebung wird als Volumen–Effekt („finite size effect“) bezeichnet.

Durch eine analytische Fortsetzung der Zeit in die imaginäre Halbebene können Probleme der Minkowski–Raum–Zeit auf ein Problem der euklidischen Raum–Zeit überführt werden. Dieser Vorgang wird als Wick–Rotation bezeichnet, nach Gian–Carlo Wick. Dann offenbart sich die Möglichkeit, Quantenfeldtheorien mit Methoden der statistischen Physik zu untersuchen, wodurch der Einsatz von Monte–Carlo–Methoden gerechtfertigt wird.

Bei diesem stochastischen Verfahren werden Zufallsexperimente mit sehr hoher Häufigkeit wiederholt. Zum Beispiel kann mit dieser Methode ein Schätzwert für π ermittelt werden. Dazu werden Zufallspunkte im Intervall $x, y \in [-1, 1]$ erzeugt und überprüft, ob diese im Einheitskreis liegen. Die daraus resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung, also die Anzahl der Treffer durch die Gesamtzahl der erzeugten Punkte, ergibt dabei die Fläche eines Viertels des Einheitskreises.

Für die Simulation der supersymmetrischen Yang–Mills–Theorie auf dem Gitter schlugen Gabriele Curci und Gabriele Veneziano die Verwendung der Wilson Gitterwirkung vor. Dabei wird die Supersymmetrie explizit durch einen Massenterm und dem endlichen Gitterabstand a gebrochen. Durch ein sorgfältiges Tuning der Simulationsparameter kann dann im sogenannten chiralen Limes die Supersymmetrie wieder hergestellt werden.

In dieser Arbeit wird zunächst ein kleiner Einblick in die Supersymmetrie im Kontinuum gegeben, um diese dann auf das Gitter zu übertragen. Im Anschluss werden die Methoden der Gittersimulation, sowie der Massenbestimmung auf dem Gitter vorgestellt. Der pseudoskalare Glueball wird ausführlich im Kapitel 6 vorgestellt. Insgesamt wurden sechs Teilchen in den folgenden Untersuchungen zum Volumen–Effekt einbezogen. Die aus zwei Gluinos bestehenden, mit den Mesonen in der QCD vergleichbaren Teilchen, das $a - \eta'$ und das $a - f_0$. Ausserdem wurde das Pion, ein Gluinogluonball und der skalare Glueball verwendet.

Um die Auswirkungen eines zu kleinen Gittervolumens auf die Massen abzuschätzen, werden verschiedene Verfahren verwendet. Zum einen wird der Volumen–Effekt bei konstant gehaltenen Simulationsparametern untersucht. Weiterhin werden bei den gewählten Gittergrößen verschiedene Simulationsparameter verwendet. Dadurch lässt sich für jede Gittergröße individuell ein Feintuning der Parameter durchführen, so dass man den chiralen und den supersymmetrischen Limes

erreichen kann. Die im Limes erhaltenen Massen werden dann erneut einer Untersuchung des Volumen-Effektes unterzogen.

Bei dieser Grenzwertbildung werden die Parameter derart gewählt, dass man für jede Gittergröße unterschiedliche Massen erhält. Diese werden dann in Abhängigkeit der gemessenen Pionmasse aufgetragen. Durch eine lineare Regression erhält man dann die Massen der Teilchen bei verschwindender Pionmasse. Dies ist analog zur QCD, wo der chirale Limes dadurch erreicht wird, die Quarkmassen gegen null zu extrapolieren.

Das bietet zudem die Möglichkeit, bei den verschiedenen Gittergrößen die Massen bei konstanter Pionmasse zu bestimmen. Diese Massen werden ebenfalls einer Volumen-Effekt-Untersuchung unterzogen. Ziel dieser Untersuchungen ist es, einen guten Kompromiss zu finden. Zum einen werden die Rechenzeiten länger, wenn die Anzahl der Gitterpunkte erhöht wird. Andererseits werden die Massen bei einem zu klein gewählten Gitter teilweise sehr stark verschoben. Daher ist es sinnvoll, ein Gittervolumen abschätzen zu können, bei dem plausible Ergebnisse erreicht werden können.

Hierfür sind eine ganze Reihe von Simulationen notwendig, so dass genügend Computerressourcen zur Verfügung stehen müssen. Die Universität Münster bekam im Jahre 2010 einen Supercomputer, der diesen Anforderungen genügt. Daher wurden alle Daten, soweit nicht explizit erwähnt, auf PALMA erzeugt. PALMA steht dabei für Paralleles Linux-System für Münsteraner Anwender.

2 Supersymmetrie im Kontinuum

2.1 Motivation

Hierarchieproblem

Das Hierarchieproblem ist keine Schwierigkeit des Standardmodells an sich, sondern die störende Empfindlichkeit des Higgspotentials gegenüber neuer Physik jenseits des Standardmodells. Der elektrisch neutrale Anteil des SM-Higgs-Feldes ist ein komplexer Skalar H mit klassischem Potential

$$V = m_H^2 |H|^2 + \lambda |H|^4$$

und besitzt einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert im Minimum, wenn $\lambda > 0$ und $m_H^2 < 0$ gilt:

$$\langle H \rangle = \sqrt{-\frac{m_H^2}{2\lambda}} \quad .$$

Experimentell findet man $\langle H \rangle \approx 174 \text{ GeV}$. Die Messungen von Ereignissen in der schwachen Wechselwirkung ergeben, dass m_H^2 in der Größenordnung $\approx (100 \text{ GeV})^2$ liegen sollte [Mar11].

Starke Korrekturen erhält m_H^2 durch virtuelle Effekte von jedem Teilchen, das direkt oder indirekt an das Higgsfeld koppelt. Zum Beispiel für ein Dirac-Fermion f mit der Masse m_f , welches mit dem Term $-\lambda_f H \bar{f} f$ der Lagrange-Dichte koppelt, ergibt sich die Korrektur zu

$$\Delta m_H^2 = -\frac{|\lambda_f|^2}{8\pi^2} \Lambda_{UV}^2 + \dots \quad .$$

Hierbei ist Λ_{UV}^2 der UV-Impuls-Cutoff, um das Schleifenintegral endlich zu halten. Diese ist interpretierbar als die minimale Energie, bei der neue Physik eintritt. Die weiteren Terme sind $\sim m_f^2$, welche maximal mit $\log \Lambda_{UV}$ wachsen.

Da Λ_{UV} in der Größenordnung der reduzierten Planckskala ($M_P = 2,4 \cdot 10^{18} \text{ GeV}$) liegt, sind die Korrekturen von m_H^2 um 30 Größenordnungen größer als die erwartete Higgsmasse m_H^2 . Alle Quarks, Leptonen sowie die Z^0, W^\pm -Bosonen erhalten ihre Masse von $\langle H \rangle$ und somit vom UV-Impuls-Cutoff.

Wird Λ_{UV} klein gehalten, müsste neue Physik auftreten, die sowohl die Propagation in den Schleifen, als auch ein Abschneiden des Schleifenintegrals bewirkt. In einer Theorie, deren Lagrange-Dichte nur zwei Ableitungen enthält, ist das nicht ohne weiteres möglich.

Hier bietet die Supersymmetrie eine Lösung, da sie eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen darstellt. Hier steht zwischen fermionischen und bosonischen Schleifenintegralen ein relatives Minuszeichen, daher löschen sich die Divergenzen in m_H^2 aus.

Die Supersymmetrie-Transformation transformiert bosonische Zustände in fermionische und umgekehrt. Dies wird formal durch den antikommutierenden Operator Q bewerkstelligt:

$$Q |\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle \quad Q |\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \quad .$$

Da Q und Q^\dagger fermionische Operatoren sind, besitzen sie Spin 1/2. Diese Operatoren sind antikommutierend. Erweitert man die Poincaré-Gruppe nicht trivial mit einer Lie-Algebra, so würde eine Physik resultieren, die die Streumatrix als Einheitsmatrix erhält. Dadurch würden alle Streuamplituden verschwinden. Das ist das sogenannte no-go Theorem, welches 1967 von Coleman und Mandula gezeigt wurde [Man67]. Umgehen kann man dieses Problem, indem man anstatt kommutierender anti-kommutierende Generatoren hinzunimmt, wie Gol'fand und Likhtman 1971 vorschlugen [Lik71]. Dies bringt uns zu dem Konzept der Graduierung.

2.2 Graduierung

Die Graduierung einer Algebra \mathcal{G} mit einer abelschen Halbgruppe G ist die Unterteilung von \mathcal{G} in eine direkte Summe von Untervektorräumen

$$\mathcal{G} = \oplus_{i \in G} \mathcal{G}_i \quad , \quad (2.1)$$

so dass für $x_i \in \mathcal{G}_i$, $x_j \in \mathcal{G}_j$ und $i, j \in G$ gilt

$$x_i \circ x_j \in \mathcal{G}_{i+j \bmod n} \quad . \quad (2.2)$$

Für $G = \mathbb{Z}_2$ ist $i, j \in \{0, 1\}$. Die Algebra \mathcal{G} zerfällt also in zwei Teilräume \mathcal{G}_0 und \mathcal{G}_1 , wobei wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 \circ \mathcal{G}_0 &\subset \mathcal{G}_0 \\ \mathcal{G}_0 \circ \mathcal{G}_1 &\subset \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{G}_1 \circ \mathcal{G}_0 &\subset \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{G}_1 \circ \mathcal{G}_1 &\subset \mathcal{G}_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

nur \mathcal{G}_0 bezüglich des Produktes \circ abgeschlossen ist. Von dieser \mathbb{Z}_2 graduierten Algebra ausgehend, gelangt man durch die folgenden zusätzlichen Eigenschaften zu einer \mathbb{Z}_2 graduierten Lie-Algebra:

$$\begin{aligned} \text{Supersymmetrie :} \quad & x_i \circ x_j = (-1)(-1)^{ij} x_j \circ x_i \\ \text{Jacobi-Identität :} \quad & x_k \circ (x_l \circ x_m)(-1)^{km} + x_l \circ (x_m \circ x_k)(-1)^{lk} \\ & + x_m \circ (x_k \circ x_l)(-1)^{ml} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hier ist mit Supersymmetrie das symmetrische bzw. antisymmetrische Verhalten des Produktes \circ bezeichnet.

2.3 Poincaré Superalgebra

Die Poincaré-Gruppe ist die Gruppe der Translationen a^μ und der Lorentztransformation Λ^μ_ν

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad . \quad (2.5)$$

Die Lie-Gruppe der Poincaré Gruppe besteht aus insgesamt 10 Generatoren, 6 der Lorentz-Gruppe $M^{\rho\sigma} = -M^{\sigma\rho}$ und 4 der Translation P^μ . Für die Generatoren $M^{\rho\sigma}$ gilt im dreidimensionalen Raum

$$M^{\rho\sigma} = \epsilon^{\rho\sigma\lambda} J_\lambda \quad \rho, \sigma, \lambda = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.6)$$

wobei J^λ den Generatoren des Drehimpulses entspricht.

Poincaré Algebra:

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [M^{\mu\nu}, P^\rho] &= i(\eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu) \end{aligned} \quad (2.7)$$

In der Supersymmetrie entspricht die Poincaré-Algebra dem Unterraum \mathcal{G}_0 mit dem Produkt $\mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_0$, welcher durch die Supersymmetrie-Generatoren Q_α ($\alpha = 1, \dots, 4N$) erweitert wird. Die einfachste Erweiterung, die auch im Folgenden betrachtet wird, ist die Erweiterung für $N=1$, mit vier spinorartigen Generatoren Q_α .

Da Dirac-Spinoren mit ihren vier komplexen Einträgen acht Freiheitsgrade besitzen, ist es üblich Majorana-Spinoren zu verwenden, für welche

$$Q = C\bar{Q}^T \quad \text{bzw.} \quad \bar{Q} = Q^T C \quad (2.8)$$

gilt. Hierbei ist $C = i\gamma^2\gamma^0$ der Ladungskonjugationsoperator in der darstellungsunabhängigen Form. Majorana-Teilchen sind ihre eigenen Antiteilchen. Diese besitzen nur vier Freiheitsgrade.

Als Spinor sollte sich Q_α bei Lorentz-Transformationen $M^{\mu\nu}$ wie ein Spinor transformieren, sowie invariant gegenüber Translationen P^μ sein. Damit ergibt sich für das zweite Produkt $\mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_1$:

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, Q_\alpha] &= -\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta} Q^\beta \\ [P^\mu, Q_\alpha] &= 0 \quad , \\ \text{mit} \quad \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Für das noch fehlende Produkt $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$ wählt man den allgemeinen Ansatz

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (h^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu + (k^{\mu\nu})_{\alpha\beta} M_{\mu\nu} \quad , \quad (2.10)$$

wobei h^μ und $k^{\mu\nu}$ symmetrisch in α, β und antisymmetrisch in μ, ν sein sollten. Die Jacobi-Identität (2.4) kann nur für

$$h^\mu = a\gamma^\mu C \quad , a \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad k^{\mu\nu} = 0$$

erfüllt werden, wobei C der Ladungskonjugationsoperator ist. Üblicherweise wird $a = -2$ gewählt. Mit (2.8) folgt:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2\gamma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu \quad . \quad (2.11)$$

Zusammengefasst ergibt sich die **vollständige Lie-Superalgebra**:

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [M^{\mu\nu}, P^\rho] &= i(\eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu) \\ [M^{\mu\nu}, Q_\alpha] &= -\sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} Q^\beta \\ [P^\mu, Q_\alpha] &= 0 \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= 2\gamma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu \end{aligned} \quad (2.12)$$

Statt der Verwendung von Spinoren in der Majorana-Darstellung werden in der Literatur oftmals links- und rechtshändige Spinoren in der Weyl-Darstellung

$$Q = \begin{pmatrix} Q_A \\ \bar{Q}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

verwendet. Dann gilt in der indexfreien Notation

$$\{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0 \quad (2.14)$$

$$\{Q, \bar{Q}\} = 2\sigma_\mu P^\mu \quad (2.15)$$

mit $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma})$.

2.4 Die irreduziblen Darstellungen der SUSY-Algebra

Ein Casimir-Operator zeichnet sich dadurch aus, dass er mit allen Generatoren der Gruppe kommutiert. Allgemein lassen sich in Quantenfeldtheorien alle physikalischen Zustände durch Casimir-Operatoren klassifizieren. Um in der SUSY-Algebra die irreduziblen Darstellungen klassifizieren zu können, betrachtet man die beiden Casimir-Operatoren

$$\begin{aligned} P^2 &= P_\mu P^\mu \\ C^2 &= C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \quad , \end{aligned} \quad (2.16)$$

wobei der zweite durch den Vierervektor Y_μ definiert ist:

$$C_{\mu\nu} = Y_\mu P_\nu - Y_\nu P_\mu \quad . \quad (2.17)$$

Dieser wiederum setzt sich aus dem *Pauli–Lubanski*-Vektor

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} \quad , \quad (2.18)$$

welcher eine relativistische Verallgemeinerung des Spinvektors ist, und den Weyl-Spinoren Q und \bar{Q} zusammen:

$$Y_\mu = W_\mu + \frac{1}{8} \bar{Q} \gamma_\mu \gamma_5 Q \quad . \quad (2.19)$$

Der Vierervektor Y_μ ist eine Verallgemeinerung des Drehimpulses, da er die Vertauschungsrelation

$$[Y_\mu, Y_\nu] = i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\rho Y^\sigma \quad (2.20)$$

erfüllt. Im Ruhesystem ergibt sich

$$[Y_i, Y_j] = i m \epsilon_{ijk} Y^k \quad . \quad (2.21)$$

Der verallgemeinerte Drehimpuls $\frac{1}{m} \mathbf{Y}$ wird auch als *Superspin* bezeichnet. Er besitzt die Eigenwerte

$$\left(\frac{\mathbf{Y}}{m} \right)^2 = y(y+1) \quad \text{mit} \quad y = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad . \quad (2.22)$$

Für den Lorentz-Skalar C^2 ergibt sich damit im Ruhesystem das Eigenwertspektrum

$$C^2 = -2m^4 y(y+1) \quad \text{mit} \quad y = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad . \quad (2.23)$$

Demnach lassen sich die massiven, irreduziblen Darstellungen über die Masse m und den Superspin y charakterisieren.

2.5 Die Supermultipletts

Für die Anzahl der fermionischen und bosonischen Zustände innerhalb eines Massmultipletts kann der Witten-Index betrachtet werden. Gilt für diesen

$$\Delta := \text{Sp}[-1]^{N_f} = 0 \quad , \quad (2.24)$$

so liegen gleich viele bosonische wie fermionische Zustände vor. Das folgt aus $N_f = 0$ und $N_f = 1$ für bosonische bzw. fermionische Zustände. Demnach ist

$(-1)^{N_f} = +1$ bzw. $(-1)^{N_f} = -1$, also ist die Anzahl der Zustände gleich. Weiterhin ist das Vakuum, d.h. der Zustand mit der Energie $E = 0$, Poincaré-invariant

$$P_\mu|0\rangle = 0 \quad (2.25)$$

und invariant unter Supersymmetrie-Transformationen

$$Q_\alpha|0\rangle \quad \text{und} \quad \bar{Q}_\beta|0\rangle \quad . \quad (2.26)$$

Dies gilt nur für den Fall der exakten, also ungebrochenen Supersymmetrie.

Wir beschränken uns hier auf die beiden einfachsten Darstellungen der exakten Supersymmetrie für Superspin $y = 0$ und $y = \frac{1}{2}$.

2.5.1 Das Chirale Supermultiplett

Für $y = 0$ erhält man das chirale Multiplett, welches im massiven Sektor aus einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen sowie einem skalaren und einem pseudoskalaren Teilchen mit Spin 0 besteht. Damit lassen sich zum Beispiel Quarks und Leptonen sowie deren Superpartner, die Squarks und die Sleptonen, beschreiben. Um Fermionen eine Masse zu geben, sind im minimal supersymmetrischen Standard Modell (MSSM) zwei Higgs-Bosonen nötig.

2.5.2 Das Vektor-Supermultiplett

Dieses findet man für $y = \frac{1}{2}$. Es besteht im massiven Sektor aus zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, einem Vektorteilchen mit Spin 1 sowie einem pseudoskalaren Teilchen mit Spin 0. Es dient zur Beschreibung der Eichbosonen und deren Superpartnern, den Gauginos.

In der folgenden Tabelle (1) ist das Teilchenspektrum des minimalen supersymmetrischen Standardmodells (MSSM) dargestellt [Ait05]. Die Elementarteilchen werden als linkshändige Teilchen aufgefasst, rechtshändige Teilchen sind dann die linkshändigen Antiteilchen (z.B. $e_R = e_L^c$). Für die Superpartner ändert sich der Spin jeweils um $\frac{1}{2}$. Diese werden durch eine Tilde gekennzeichnet.

2.6 Superfelder

Eine kompakte und sehr hilfreiche Darstellung der Supersymmetrie-Algebra wurde von A. Salam und J. Strathdee [Soh85] eingeführt. Die Darstellung der Superfelder im Superraum bietet sich insbesondere für die $N = 1$ Theorie an. Um die

Multiplett	Bosonen			Fermionen		
	Teilchen		Spin	Teilchen		Spin
Chiral	Sleptonen	$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$ \tilde{e}_L^c	0	Leptonen	$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ e_L^c	$\frac{1}{2}$
	Squark	$\begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$ \tilde{u}_L^c \tilde{d}_L^c	0	Quarks	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ u_L^c d_L^c	$\frac{1}{2}$
	Higgsinos	$\begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}$	0	Higgs	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \tilde{H}_d^0 \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$
Vektor	W-Bosonen	$\begin{pmatrix} W^\pm \\ W^3 \end{pmatrix}$	1	Winos	$\begin{pmatrix} \tilde{W}^\pm \\ \tilde{W}^3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$
	Photon	B		Photino	\tilde{B}	
	Gluonen	g^a	1	Gluinos	\tilde{g}^a	$\frac{1}{2}$

Tabelle 1: Das Teilchenspektrum des MSSM

Poincaré-Algebra im Superraum darzustellen, werden diesem die Koordinaten x^μ , θ und $\bar{\theta}$ zugewiesen. Die resultierenden Superfelder $\mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta})$ hängen dann auch von diesen antikommutierenden Grassmann-Variablen ab. Damit kann jedes endliche Element der supersymmetrischen Gruppe mit Hilfe der Algebra (2.12) als

$$G(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = \exp \{ i (\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q} - x^\mu P_\mu) \} \quad (2.27)$$

geschrieben werden. Die Generatoren lassen sich zu

$$P_\mu = i \partial_\mu \quad (2.28)$$

$$i Q = \frac{\partial}{\partial \theta} - i \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \quad (2.29)$$

$$i \bar{Q} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i \sigma^\mu \partial_\mu \quad (2.30)$$

bestimmen [Lov94].

Entwickelt man ein Superfeld in einer Potenzreihe in θ und $\bar{\theta}$ so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)M(x) \\ & + (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) \\ & + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})D(x) \quad .\end{aligned}\tag{2.31}$$

An den Komponentenfeldern erkennt man den Teilchengehalt des Supermultipletts. Unter der Voraussetzung, dass das Superfeld ein Lorentz-Skalar ist, findet man:

- 4 komplexe skalare Felder: $f(x)$, $M(x)$, $N(x)$ und $D(x)$
- 2 linkshändige Weyl-Spinoren $\phi(x)$, $\alpha(x)$
- 2 rechtshändige Weyl-Spinoren $\bar{\chi}(x)$, $\bar{\lambda}(x)$
- 1 komplexes Vektorfeld A_μ .

Um von der linearen, reduziblen Darstellung der Superfelder zur irreduziblen Darstellung zu gelangen, betrachtet man Superfelder, welche bestimmten supersymmetrisch kovarianten Bedingungen genügen.

Definiert man zum Beispiel die kovarianten Ableitungen

$$\mathcal{D}_A = \partial_A + i(\sigma^\mu\theta)_A\partial_\mu \tag{2.32}$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{A}} = -\partial_{\dot{A}} + i(\tilde{\sigma}^\mu\theta)_{\dot{A}}\partial_\mu \tag{2.33}$$

mit $\tilde{\sigma}^\mu = (1, -\sigma)$, so antikommutieren diese mit den Generatoren Q und \bar{Q} und sind daher invariant unter supersymmetrischen Transformationen. Unter der Forderung

$$\mathcal{D}_A\mathcal{F} = 0 \tag{2.34}$$

erhält man ein chirales Multiplett $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$. Ein antichirales Multiplett $\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})$ ergibt sich für

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{A}}\mathcal{F}^\dagger = 0 \quad . \tag{2.35}$$

Diese werden auch skalare Superfelder genannt. Der Teilchengehalt der chiralen Felder entspricht dem des massiven chiralen Supermultipletts. Die Vektorfelder $V(x, \theta, \bar{\theta})$, welche sich aus der Forderung

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^\dagger \tag{2.36}$$

ergeben, beschreiben die supersymmetrischen Yang-Mills-Felder.

Vektorfelder sind invariant unter Eichtransformationen

$$V \rightarrow V' = V + (\phi + \phi^\dagger) \quad , \tag{2.37}$$

mit den chiralen (ϕ) und antichiralen Feldern (ϕ^\dagger). Bei der Wahl der Wess–Zumino–Eichung nimmt das Vektor–Superfeld die folgende Form an:

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = (\theta \sigma^\mu \bar{\theta}) A_\mu(x) + i(\theta \theta)(\bar{\theta} \bar{\lambda}(x)) - i(\bar{\theta} \bar{\theta})(\theta \lambda(x)) + (\theta \theta)(\bar{\theta} \bar{\theta}) d(x) \quad . \quad (2.38)$$

Der Teilchengehalt ist:

- 1 bosonisches Vektorfeld $A_\mu(x)$ (3 Freiheitsgrade)
- 1 Weyl–Spinorfeld $\lambda(x)$ (4 Freiheitsgrade)
- 1 Skalarfeld $d(x)$ (1 Freiheitsgrade).

Es hat also insgesamt acht Freiheitsgrade.

2.7 Die Lagrange–Dichte der supersymmetrischen Yang–Mills Theorie

Das Ziel ist es, ausgehend von den Skalarfeldern und den Vektorfeldern eine supersymmetrische Wirkung

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (2.39)$$

zu konstruieren, die invariant unter Supersymmetrie–Transformationen ist, also $\delta_\epsilon S = 0$ erfüllt. Für das Vektor–Superfeld lässt sich diese mit Hilfe der Definition der supersymmetrischen Feldstärke

$$W_A := -\frac{1}{4}(\overline{DD})D_A V(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.40)$$

konstruieren zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} W^A W_A + h.c. \quad . \quad (2.41)$$

Aufgrund der Addition des hermitesch Konjugierten ist diese Lagrange–Dichte reell. Mit (2.38) ergibt sich die Lagrange–Dichte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{i}{2} (\lambda \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda) + 2d^2 \quad . \quad (2.42)$$

Betrachtet man den Fall einer nicht–abelschen Theorie, so ist zunächst ein matrixwertiges Vektor–Superfeld

$$V = V^a T^a \quad (2.43)$$

zu verwenden, um eine eichinvariante Lagrange–Dichte zu erhalten, wobei dieses zur adjungierten Darstellung (Index a) der Eichgruppe gehört. Mit T^a sind die Generatoren der Gruppe bezeichnet. Für diese gilt die Kommutatorrelation

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad , \quad (2.44)$$

welche auch die Strukturkonstanten f^{abc} definiert. Unter der Verwendung der Feldstärke

$$W_A = W_A^a T^a \quad (2.45)$$

gelangt man zu der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - i \lambda^a \sigma^\mu (\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda})^a + \frac{1}{2} d^a d^a \quad (2.46)$$

Hierbei ist

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.47)$$

die Yang-Mills-Feldstärke und

$$(\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda})^a = \partial_\mu \bar{\lambda}^a + g f_{abc} A_\mu^b \bar{\lambda}^c \quad (2.48)$$

die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung. Das Hilfsfeld d^a lässt sich mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen entfernen. Verwendet man noch den Majorana-Bi-Spinor

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \bar{\lambda}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

so ergibt sich die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F^{\mu\nu a}(x) + \frac{i}{2} \bar{\lambda}^a \gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu \lambda^a) \quad (2.50)$$

Man kann zeigen [Luc97], dass die zugehörige Wirkung unter den folgenden Supersymmetrie-Transformationen invariant sind:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= 2i \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^a(x) \\ \delta \lambda^a &= -\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\ \delta \bar{\lambda}^a &= \bar{\epsilon} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Hierbei ist ϵ ein Raum-Zeit-unabhängiger, antikommutierender Majorana-Spinor. Darüber hinaus ist die Lagrange-Dichte invariant unter einer $U(1)_A$ Transformation des Gluinofeldes λ

$$\lambda \rightarrow e^{-i\phi\gamma_5} \lambda \quad , \quad \bar{\lambda} \rightarrow \bar{\lambda} e^{-i\phi\gamma_5} \quad (2.52)$$

welche mit der sogenannten R-Symmetrie der Supersymmetrie übereinstimmt. Diese globale chirale Symmetrie besitzt eine Anomalie, so dass der zugehörige Noether-Strom

$$j_\mu^5 = \bar{\lambda} \gamma_\mu \gamma_5 \lambda \quad (2.53)$$

nicht erhalten bleibt. Es bleibt aber eine Untergruppe \mathcal{Z}_{2N_c} der $U(1)_A$ ungebrochen, für deren Elemente gilt:

$$\phi = \phi_k = \frac{k\pi}{N_c} \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, 2N_c - 1 \quad (2.54)$$

Hierbei sind die N_c Elemente der Eichgruppe $SU(N_c)$. Diese diskrete Symmetrie \mathcal{Z}_{2N_c} wird durch ein nicht-verschwindendes Gluino-Kondensat $\langle \bar{\lambda}\lambda \rangle \neq 0$ spontan auf eine \mathcal{Z}_2 -Symmetrie gebrochen:

$$\lambda \rightarrow -\lambda \quad . \quad (2.55)$$

In der Gruppe $\mathcal{Z}_{2N_c}/\mathcal{Z}_2$ existieren N_c entartete Vakuum-Zustände. Diese Entartung wird durch eine nicht verschwindende Gluino-Masse $m_{\tilde{g}} \neq 0$ gebrochen, so dass man für $N_c = 2$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\lambda}\lambda \rangle &> 0 \quad \text{für} \quad m_{\tilde{g}} > 0 \\ \langle \bar{\lambda}\lambda \rangle &< 0 \quad \text{für} \quad m_{\tilde{g}} < 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

erhält. Hat man also massive Gluinos, so wird der eine oder der andere Zustand eingenommen. Die Masse der Gluinos wird durch den Term

$$\mathcal{L}_m = m_{\tilde{g}} (\bar{\lambda}\lambda) \quad (2.57)$$

in die Lagrange-Dichte eingefügt. Dieser Term sorgt für ein „soft breaking“ der Supersymmetrie. Das heißt, die wichtigen Eigenschaften bleiben erhalten. Das ist zum Beispiel das nicht-Renormierbarkeits-Theorem, welches für ein Verschwinden der Divergenzen und damit der Lösung des Hierarchieproblems notwendig ist. Bei verschwindender Gluino-Masse erwartet man einen Phasenübergang erster Ordnung.

2.8 Die Multipletts

In Analogie zur QCD erwartet man für $m_{\tilde{g}} = 0$ farblose Bindungszustände aus fundamentalen Feldern, also den Gluonen und Gluinos. Nach der Theorie von G. Veneziano und S. Yankielowicz [Yan82] enthält das chirale Wess-Zumino-Multiplett die folgenden Bindungszustände:

- $\bar{\lambda}^a \gamma_5 \lambda^a$: Ein pseudoskalar $J^{PC} = 0^{-+}$ Boson aus zwei Gluinos. Es ist nach dem äquivalent aufgebauten η' -Meson der QCD benannt, um die adjungierte Darstellung zu verdeutlichen, mit dem zusätzlichen a : $a - \eta'$
- $\bar{\lambda}^a \lambda^a$: Ein skalar $J^{PC} = 0^{++}$ Boson, ebenfalls aus zwei Gluinos, mit der QCD-ähnlichen Bezeichnung: $a - f_0$
- $\chi = F^{\mu\nu a} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a$: Majorana-Fermion aus einem Gluon und einem Gluino, mit Spin $\frac{1}{2}$. Hier gibt es keine Entsprechung in der QCD, es wird als Gluino-Glueball bezeichnet.

Hierbei wurden die Bezeichnungen J für den Spin, $P = \pm$ für Paritätsoperationen und $C = \pm$ für Ladungskonjugationen verwendet.

G.R. Farrar, G. Gabadadze und M. Schweetz [GS99] erweiterten die Veneziano und Yankielowicz Wirkung, und sagen ein weiteres, leichteres Multiplett mit Bindungszuständen aus Gluonen voraus. Dieses enthält:

- $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$: Der skalare 0^{++} -Glueball
- $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$: Der pseudoskalare 0^{-+} -Glueball
- Ein weiteren, aber leichteren Gluino-Glueball

Die Aufspaltung der einzelnen Multipletts in Folge der nicht verschwindenden Gluinomasse $m_{\tilde{g}} \neq 0$ ist in Abbildung (1) gezeigt.

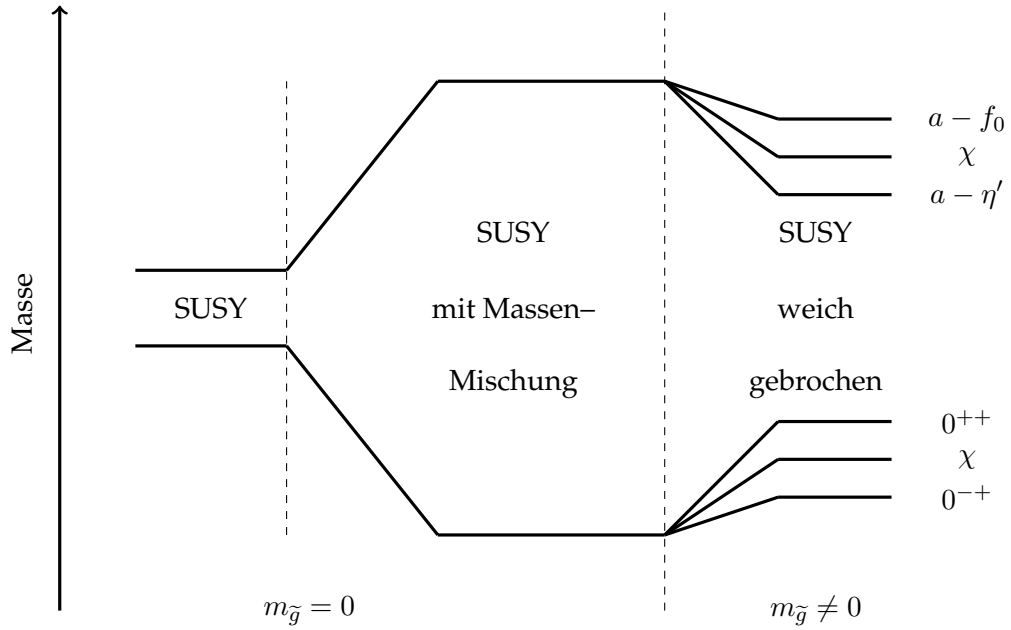


Abbildung 1: Massenmultiplett nach G.R. Farrar, G. Gabadadze und M. Schweetz

Desweiteren sind in diesem Multiplett Massenmischungen von $a - \eta'$ und dem 0^{++} -Glueball, sowie zwischen $a - f_0$ und dem 0^{-+} -Glueball möglich, was zu einer Verschiebung der Massen des gesamten Multipletts führt.

3 Supersymmetrie auf dem Gitter

In diesem Kapitel sollen die Grundzüge der Gittereichtheorie vorgestellt werden. Im Wesentlichen bedient man sich derselben Methoden wie in der QCD. Der Unterschied liegt in der verwendeten Wirkung S . Die Vierer–Orts–Vektoren der Supersymmetrie im Kontinuum entsprechen der Minkowski–Metrik für reelle Zeiten τ . Geht man auf dem Gitter zu imaginären Zeiten $t = i\tau$ über, so verschwindet das relative Minuszeichen zwischen Zeit– und Raumkomponenten innerhalb der Metrik. Daher wird die Metrik euklidisch.

Von nun an werden Vierer–Vektoren durch n gekennzeichnet. Mit n werden Vektoren gekennzeichnet, die einen Punkt in der räumlichen Ausdehnung des Gitters bezeichnen.

3.1 Die Gitterdiskretisierung

Um die Pfadintegral–Darstellung von Quantenfeldtheorien für Computersimulationen zugänglich zu machen, wird die 4–dimensionale Raumzeit mit Hilfe eines Raumzeit–Gitters diskretisiert:

$$\Lambda = \{n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \mid \begin{aligned} n_1, n_2, n_3 &= 0, 1, \dots, L-1; \\ n_4 &= 0, 1, \dots, T-1 \end{aligned} \} \quad . \quad (3.1)$$

Die $n \in \Lambda$ bezeichnen dabei Vektoren, die die Raumzeit–Punkte $x = an$ mit dem Gitterabstand a markieren. Spinoren werden dann an diesen Punkten platziert:

$$\psi(n), \quad \bar{\psi}(n), \quad n \in \Lambda \quad . \quad (3.2)$$

Diese tragen natürlich die gleichen Farb–, Dirac– und Flavourindizes wie im Kontinuum, die wir aber im Folgenden unterdrücken. Die partielle Ableitung wird auf dem Gitter diskretisiert dargestellt als:

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \frac{1}{2a} (\psi(n + \hat{\mu}) - \psi(n - \hat{\mu})) \quad . \quad (3.3)$$

Auf den Verbindungslinien zwischen den Punkten werden die Eichfelder definiert. Das ist notwendig, um die Invarianz der Wirkung unter Eichtransformationen zu gewährleisten. Wie im Kontinuum müssen Massenterme der Wirkung invariant unter Transformationen sein. Um Ableitungen invariant zu lassen, wird das Feld $U_\mu(n)$ mit dem Richtungsindex μ eingeführt. Dann ist

$$\bar{\psi}'(n)U'_\mu(n)\psi'(n+\hat{\mu}) = \bar{\psi}(n)\Omega(n)^\dagger U'_\mu(n)\Omega(n+\hat{\mu})\psi(n+\hat{\mu}) \quad (3.4)$$

mit $\Omega(n) \in \text{SU}(N)$ eichinvariant, wenn die Eichtransformation des neuen Feldes durch

$$U_\mu(n) \rightarrow U'_\mu(n) = \Omega(n)U_\mu(n)\Omega(n+\hat{\mu})^\dagger \quad (3.5)$$

gegeben ist. Diese Matrixwertigen Variablen sind gerichtet und werden auch als Linkvariablen bezeichnet. Diese können sowohl in positive Richtung ($U_\mu(n)$ verbindet n mit $n+\hat{\mu}$), als auch in negative Richtung zeigen ($U_{-\mu}(n)$ verbindet n mit $n-\hat{\mu}$), und sind Elemente der $\text{SU}(N)$ (Abbildung 2).



Abbildung 2: Die Linkvariablen $U_{-\mu}(n)$ und $U_\mu(n)$

Im Unterschied zum Kontinuum werden die Eichfelder $U_\mu(n)$ als Elemente der Eichgruppe $\text{SU}(N)$ verwendet und nicht die Elemente der Lie-Algebra. Das Verhalten der Eichtransformation (3.5) wird von den beiden Transformationsmatrizen $\Omega(n)$ und $\Omega(n+\hat{\mu})^\dagger$ bestimmt. Im Kontinuum wird dieses Verhalten vom Eichtransporter

$$G(x, y) = P \cdot \exp \left\{ i \int_{\mathcal{C}_{xy}} A \cdot ds \right\} \quad (3.6)$$

erfüllt. Hierbei bezeichnet P den Pfadordnungs-Operator. Das Integral über die Eichfelder A_μ wird entlang der Kurve \mathcal{C}_{xy} ausgewertet. Diese verbindet zwei Punkte x und y miteinander. Aufgrund des gleichen Verhaltens unter Eichtransformationen

$$G(x, y) \rightarrow \Omega(x)G(x, y)\Omega(y)^\dagger, \quad (3.7)$$

kann die Linkvariable $U_\mu(n)$ als Gitterversion des Eichtransporters interpretiert werden. Um den Vergleich deutlicher zu machen, kann man die Linkvariablen durch die Eichtransporter darstellen:

$$U_\mu(n) = G(n, n + \hat{\mu}) + \mathcal{O}(a). \quad (3.8)$$

Dazu verwendet man die Gittereichfelder $A_\mu(n)$ und schreibt

$$U_\mu(n) = \exp \{i a A_\mu(n)\} \quad . \quad (3.9)$$

Beim Vergleich von (3.6) und (3.9) erkennt man, dass das Integral entlang des Pfades von n nach $n + \hat{\mu}$ durch $a A_\mu(n)$, also der Länge des Pfades a und das Eichfeldes $A_\mu(n)$ am Startpunkt approximiert wird.

3.2 Eichinvariante Objekte aus Linkvariablen

Für die Konstruktion einiger Größen auf dem Gitter benötigt man Objekte, die aus mehreren Linkvariablen aufgebaut sind. Hat man k Linkvariablen, die die Punkte n_0 bis n_1 verbinden, so ist das geordnete Produkt definiert durch

$$\begin{aligned} P[U] &= U_{\mu_0}(n_0) U_{\mu_1}(n_0 + \hat{\mu}_0) \dots U_{\mu_{k-1}}(n_1 - \hat{\mu}_{k-1}) \\ &\equiv \prod_{(n,\mu) \in \mathcal{P}} U_\mu(n) \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dieses ist die Gitterversion vom Eichtransporter (3.6) im Kontinuum, der Pfad \mathcal{P} kann Linkvariablen für beide Richtungen $\pm\mu$ enthalten. Wählt man für den Pfad \mathcal{P} eine geschlossene Schleife \mathcal{L} und bildet die Spur, so erhält man eichinvariante Objekte. Betrachtet man zum Beispiel (3.10), bleiben bei einer Transformation nur die Matrizen $\Omega(n_0)$ und $\Omega(n_0)^\dagger$ am Anfangspunkt der Schleife erhalten. Bei der Spurbildung verschwinden diese:

$$L[U] = \text{Sp} \left[\Omega(n_0) \prod_{(n,\mu) \in \mathcal{L}} U_\mu(n) \Omega(n_0)^\dagger \right] = \text{Sp} \left[\prod_{(n,\mu) \in \mathcal{L}} U_\mu(n) \right] = L[U] \quad . \quad (3.11)$$

Diese eichinvarianten Schleifen aus Linkvariablen werden für gewöhnlich verwendet, um die Eichwirkung sowie physikalische Observablen darzustellen.

3.2.1 Die Plakette

Für die Darstellung der Eichwirkung wird üblicherweise die sogenannte Plakette verwendet. Diese ist die kürzeste, nicht-triviale, geschlossene Schleife auf dem Gitter, bestehend aus vier Linkvariablen:

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_\mu(n + \hat{\nu})^\dagger U_\nu(n)^\dagger \quad . \quad (3.12)$$

Diese ist in Abbildung (3) dargestellt. Aufgrund (3.11) ist die Spur der Plakette eichinvariant.

Den Zusammenhang zwischen der Plakette und dem Feldstärketensor sieht man, wenn man in (3.12) die Definition der Linkvariable (3.9) einsetzt. Verwendet man

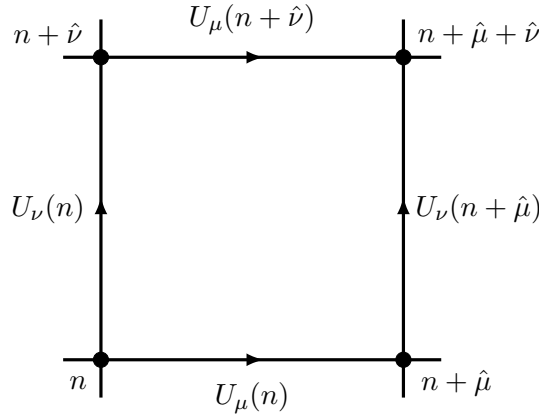


Abbildung 3: Die Plakette $U_{\mu\nu}$ aus vier Linkvariablen

die Baker–Campbell–Hausdorff Formel, und entwickelt dann die Plakette in eine Taylorreihe, also nutzt zum Beispiel

$$A_{\nu}(n + \hat{\mu}) = A_{\nu}(n) + a\partial_{\mu}A_{\nu}(n) + \mathcal{O}(a^2) \quad (3.13)$$

aus, so erhält man

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &= \exp \{ i a^2 (\partial_{\mu}A_{\nu}(n) - \partial_{\nu}A_{\mu}(n) + i[A_{\mu}(n), A_{\nu}(n)]) + \mathcal{O}(a^3) \} \\ &= \exp \{ i a^2 F_{\mu\nu}(n) + \mathcal{O}(a^3) \} \quad , \end{aligned} \quad (3.14)$$

wobei die Definition des Feldstärketensors

$$F_{\mu\nu}(x) = -i[D_{\mu}(x), D_{\nu}(x)] = \partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x) + i[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x)] \quad (3.15)$$

verwendet wurde. Dies ist ein wichtiger Zusammenhang, der in der Konstruktion der Eichwirkung zum Tragen kommt.

3.2.2 Die Clover–Plakette

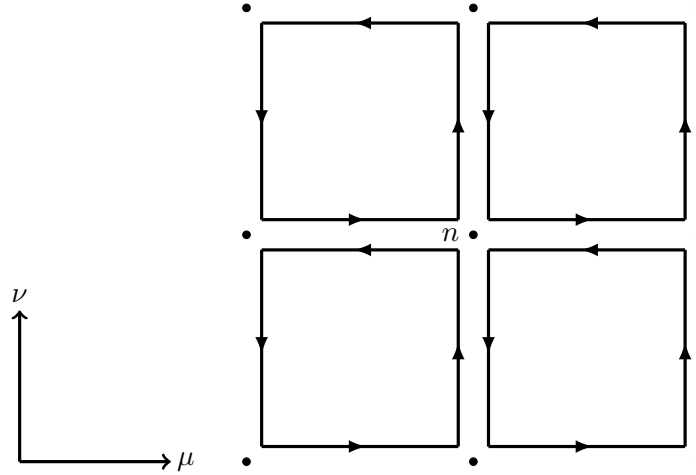
Eine weitere Möglichkeit, die Feldstärke für die Verwendung auf dem Gitter zu diskretisieren ist

$$F_{\mu\nu}(n) = -\frac{i}{8a^2} (Q_{\mu\nu}(n) - Q_{\nu\mu}(n)) \quad . \quad (3.16)$$

Hierbei ist $Q_{\mu\nu}(n)$ die Summe über die Plaketten $U_{\mu,\nu}(n)$ in der μ – ν –Ebene:

$$Q_{\mu\nu}(n) \equiv U_{\mu,\nu}(n) + U_{\nu,-\mu}(n) + U_{-\mu,-\nu}(n) + U_{-\nu,\mu}(n) \quad . \quad (3.17)$$

Diese wird auch als Clover–Plakette bezeichnet, sie ist graphisch dargestellt in Abbildung 4. Diese diskretisierte Feldstärke hat den Vorteil, dass sie das gleiche Verhalten wie die Feldstärke im Kontinuum unter Paritäts– und Zeitumkehr–Transformationen zeigt.

Abbildung 4: Die Clover–Plakette $U_{\mu,\nu}$

3.3 Die Wilson–Schleife

Eine Wilson–Schleife $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ besteht aus zwei sogenannten Wilson–Linien $S(\mathbf{m}, \mathbf{n}, 0)$ und $S(\mathbf{m}, \mathbf{n}, n_t)$, und zwei zeitliche Transporter $T(\mathbf{n}, n_t)$ und $T(\mathbf{m}, n_t)$. Die Wilson–Linie verbindet die räumlichen Punkte \mathbf{m} und \mathbf{n} durch den Pfad $\mathcal{C}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$, wobei dieser zeitlich auf n_t fixiert ist:

$$S(\mathbf{m}, \mathbf{n}, n_t) = \prod_{(\mathbf{k}, j) \in \mathcal{C}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}} U_j(\mathbf{k}, n_t) \quad . \quad (3.18)$$

Der zeitliche Transporter ist eine Linie aus n_t Linkvariablen in Zeitrichtung, welche alle auf einem räumlichen Punkt \mathbf{n} liegen:

$$T(\mathbf{n}, n_t) = \prod_{j=0}^{n_t-1} U_4(\mathbf{n}, j) \quad . \quad (3.19)$$

Diese vier Bestandteile werden zu einer geschlossenen Schleife zusammengesetzt:

$$\mathcal{L} : (\mathbf{m}, n_t) \xrightarrow{S} (\mathbf{n}, n_t) \xrightarrow{T^\dagger} (\mathbf{n}, 0) \xrightarrow{S^\dagger} (\mathbf{m}, 0) \xrightarrow{T} (\mathbf{m}, n_t) \quad . \quad (3.20)$$

Durch die Spurbildung erhält man dann die Wilson–Schleife $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}$:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{L}}[U] = \text{Sp} \left[S(\mathbf{m}, \mathbf{n}, n_t) T(\mathbf{n}, n_t)^\dagger S(\mathbf{m}, \mathbf{n}, 0)^\dagger T(\mathbf{m}, n_t) \right] = \text{Sp} \left[\prod_{(k, \mu) \in \mathcal{L}} U_\mu(k) \right] \quad . \quad (3.21)$$

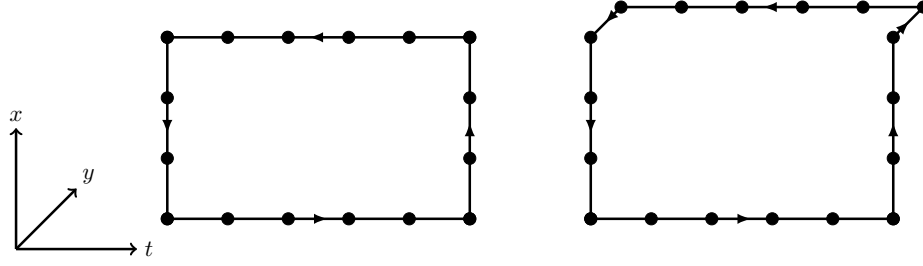


Abbildung 5: Die Wilson-Schleife \mathcal{W}_L ,
links planar, rechts nicht-planar

Wilson-Schleifen lassen sich planar, also wenn \mathbf{m} und \mathbf{n} auf einer Achse liegen, und nicht-planar konstruieren, siehe Abbildung (5).

Man kann zeigen [Lan10], dass das Quark-Antiquark Potential $V(r)$ für große n_t aus dem Erwartungswert der Wilson-Schleife berechnet werden kann:

$$\langle \mathcal{W}_L \rangle \propto e^{-tV(r)} (1 + \mathcal{O}(e^{-t\Delta E})) = e^{-n_t a V(r)} (1 + \mathcal{O}(e^{-n_t a \Delta E})) \quad . \quad (3.22)$$

Dabei ist $r = a|\mathbf{m} - \mathbf{n}|$ der Abstand des quark-antiquark Paares, dessen Energie gleich der Energie E_1 im Korrelator ist. Die Korrektur in (3.22) ist exponentiell unterdrückt mit der Energiedifferenz ΔE zwischen $V(r) = E_{n_t}$ und dem ersten angeregten Zustand.

3.4 Die Wirkung der N=1 supersymmetrischen Theorie auf dem Gitter

Die vollständige Wirkung der supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie auf den Gitter ist die Summe aus dem reinen Eichanteil und dem fermionischen Teil:

$$S = S_G + S_F \quad . \quad (3.23)$$

Für den Eichanteil wird die Wilson-Wirkung verwendet [Wil74]. Diese ist die Summe über alle Plaketten, wobei jede einzelne nur mit einer Orientierung berücksichtigt wird. Diese Summe kann als Summe über alle Gitterpunkte n , wo die Plaketten lokalisiert sind, kombiniert mit der Summe über die Lorentz-Indizes $1 \leq \mu \leq \nu \leq 4$, dargestellt werden:

$$S_G = \frac{2}{g^2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Re Sp} [\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)] \quad . \quad (3.24)$$

Der Vorfaktor $2/g^2$ wird eingeführt, um im Übergang $a \rightarrow 0$ die Kontinuumswirkung zu reproduzieren. Mit der Entwicklung der Exponentialfunktion in (3.14)

folgt dann

$$S_G = \frac{a^4}{2g^2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Sp} [F_{\mu\nu}(n)^2] + \mathcal{O}(a^2) \quad (3.25)$$

Somit wird die Kontinuumswirkung bis auf den Faktor $\mathcal{O}(a^2)$ reproduziert, da a^4 und die Summe über Λ die Diskretisierung des Raum-Zeit-Integrals ist:

$$a^4 \sum_{n \in \Lambda} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \int d x^4 \quad . \quad (3.26)$$

Mit der nackten Eichkopplung in der allgemeinen Form für die $SU(N_c)$ Gruppe

$$\beta \equiv \frac{2N_c}{g^2} \quad , \quad (3.27)$$

lässt sich die Wilson-Wirkung schreiben als:

$$S_G = \beta \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \left(1 - \frac{1}{N_c} \text{Re Sp } U_{\mu\nu}(n) \right) \quad . \quad (3.28)$$

Der fermionische Anteil mit den Majorana-Feld $\lambda_n^{(j)a}$ in der adjungierten Darstellung kann dargestellt werden als:

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{j=1}^2 \left\{ \bar{\lambda}_n^{(j)a} \lambda_n^{(j)a} - \kappa \sum_{\mu=1}^4 \left[\bar{\lambda}_{n+\hat{\mu}}^{(j)a} V_{ab,n\mu}(r + \gamma_\mu) \lambda_n^{(j)b} + \bar{\lambda}_n^{(j)a} V_{ab,n\mu}^T(r - \gamma_\mu) \lambda_{n+\hat{\mu}}^{(j)b} \right] \right\} \quad . \quad (3.29)$$

Hierbei nimmt der Index a für die adjungierte Darstellung die Werte $a = 1, \dots, N_c^2 - 1$ in der $SU(N_c)$ an. Der Hoppingparameter ist definiert durch

$$\kappa = \frac{1}{2m_{\tilde{g},0} + 8r} \quad , \quad (3.30)$$

wobei der Wilson-Parameter r die Fermion-Verdoppler eliminiert, welche sonst beim Übergang zum Kontinuum auftreten. An dieser Stelle wird er in Analogie zur QCD auf $r = 1$ fixiert. Die Wirkung hängt mit den Linkvariablen $U_\mu(n)$ über die Matrix der Eichfeldvariablen $V_{n\mu}$

$$V_{ab,n\mu} \equiv V_{ab,n\mu}[U] \equiv 2 \text{Sp}(U_\mu^\dagger(n) T_a U_\mu(n) T_b) = V_{ab,n\mu}^* = V_{ab,n\mu}^{-1T} \quad (3.31)$$

ab. Führt man die Fermion–Matrix

$$\begin{aligned} Q_{n'd,nc} &\equiv Q_{n'd,nc}[U] \\ &\equiv \delta_{n'n} \delta_{dc} - \kappa \sum_{\mu=1}^4 [\delta_{n',n+\hat{\mu}} (1 + \gamma_{\mu}) V_{dc,nn'} + \delta_{n'+\hat{\mu},n} (1 - \gamma_{\mu}) V_{dc,n'n}^T] \end{aligned} \quad (3.32)$$

ein, so lässt sich die fermionische Wirkung kompakt darstellen:

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{nc,n'd} \bar{\lambda}_{n'}^{(j)d} Q_{n'd,nc} \lambda_n^{(j)c} \quad . \quad (3.33)$$

Die Fermion–Matrix erfüllt die Eigenschaften

$$Q^{\dagger} = \gamma_5 Q \gamma_5 \quad \text{und} \quad \tilde{Q} \equiv \gamma_5 Q = \tilde{Q}^{\dagger} \quad . \quad (3.34)$$

Darüber hinaus kann man mit

$$C Q C^{-1} = Q^T \quad \text{und} \quad C \gamma_5 \tilde{Q} (C \gamma_5)^{-1} = \tilde{Q}^T \quad , \quad (3.35)$$

zeigen, dass die Determinante $\det(Q)$ immer positiv ist. Das fermionische Pfadintegral über Dirac–Fermionen ist das Quadrat des Pfadintegrals mit Majorana–Fermionen. Somit lässt es sich elegant darstellen als:

$$\int [d\lambda] e^{-\frac{1}{2} \bar{\lambda} Q \lambda} = \pm \sqrt{\det(Q)} = \text{Pf}(M) \quad . \quad (3.36)$$

Hier wurde der sogenannte Pfaffian eingeführt, dessen Quadrat gleich der Determinante der Fermion–Matrix ist. Das Vorzeichen bleibt dabei unbestimmt. Der Pfaffian kann für eine komplexe, antisymmetrische Matrix $M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha}$ mit einer geraden Anzahl an Dimensionen ($1 \leq \alpha, \beta \leq 2N$) durch ein Grassmann–Integral

$$\text{Pf}(M) \equiv \int [d\phi] e^{-\frac{1}{2} \phi_{\alpha} M_{\alpha\beta} \phi_{\beta}} = \frac{1}{N! 2^N} \epsilon_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_N \beta_N} M_{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\alpha_N \beta_N} \quad (3.37)$$

definiert werden. Eine Einführung in die Integration mit Grassmann–Variablen findet man zum Beispiel in [Lan10].

Die antisymmetrische Matrix M ist definiert durch

$$M \equiv C Q = -M^T \quad . \quad (3.38)$$

Erwartungswerte für Majorana–Fermionfelder können dann nach [Mü94] durch die Inversion der Fermion–Matrix berechnet werden. Im einfachsten Fall ergibt sich zum Beispiel

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{n'} \bar{\lambda}_n \rangle &= Z_M^{-1} \int [dU] e^{-S_g[U]} \text{Pf}(M[U]) \frac{1}{2} \{ Q_{n'n}^{-1} + C^{-1} Q_{nn'}^{-1} C \} \\ &= Z_M^{-1} \int [dU] e^{-S_g[U]} \text{Pf}(M[U]) Q_{n'n}^{-1} \quad . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dieser Erwartungswert wird auch als 2–Punkt–Funktion bezeichnet.

4 Simulationsdetails

Bei der Simulation einer Feldtheorie auf dem Gitter werden zunächst mit Hilfe eines Update-Algorithmus Feldkonfigurationen erzeugt. Diese Erzeugung ist sehr rechenaufwändig, wodurch eine Kompromissfindung nötig wird. Zum einen sollte das Gitter nicht zu groß sein um den Rechenaufwand zu begrenzen. Andererseits zeigt ein zu kleines Gitter aufgrund des Volumen-Effektes Massenverschiebungen. In diesem Kapitel wird zunächst die Erzeugung der Gitterkonfiguration betrachtet.

4.1 Der polynomiale Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus

Zur Erzeugung der Gitterkonfigurationen wird in der DESY-Münster-Kollaboration der polynomiale Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus verwendet. Dieser ist eine Zusammensetzung von verschiedenen Algorithmen. Zugrunde liegt der Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus (HMC), welcher durch eine polynomiale Approximation zu einem (PHMC) erweitert wird. Der HMC wiederum besteht aus einem Molekül-Dynamik-Algorithmus, bei welchem ein Metropolissschritt durchgeführt wird. Hier sollen aufgrund des Umfanges der Arbeit nur die zugrundeliegenden Ideen erläutert werden.

4.1.1 Die Markov-Kette

Als Gitterkonfiguration wird z.B. in der reinen Eichtheorie ein vollständiges Gitter mit den darauf verteilten Werten für die Links bezeichnet [Lan10]. Diese Konfiguration wird auch als Simulationsschritt bezeichnet, da dieser einem Zeitpunkt in der Monte-Carlo-Zeit entspricht.

Der Übergang von einer Konfiguration zu einer anderen wird durch die Markov-Kette beschrieben. Hierbei werden, von einer beliebigen Konfiguration ausgehend, die Konfigurationen $\{U_i\}$ nacheinander erzeugt. Der Index markiert die Reihenfolge der Erzeugung:

$$U_0 \rightarrow U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow \dots \quad . \quad (4.1)$$

Die Idee dabei ist, dass diese Kette der stochastischen Abfolge letztendlich einer Gleichgewichtsverteilung folgt. Die Markov-Kette ist so konstruiert, dass sie die Punkte mit der höchsten Wahrscheinlichkeit, also mit dem größten Boltzmann-Faktor e^{-S} , am häufigsten aufsucht.

Charakterisiert ist der Prozess durch die bedingte Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(U_n = U' | U_{n-1} = U) = W(U' | U) \quad , \quad (4.2)$$

also die Wahrscheinlichkeit, ausgehend von U zu U' zu gelangen. Diese hängt nur von U und U' ab und befolgt

$$0 \leq W(U'|U) \leq 1 \quad , \quad \sum_{U'} W(U'|U) = 1 \quad (4.3)$$

Ein wichtiger Punkt ist, dass die Wahrscheinlichkeit keine Quellen und Senken haben kann, sobald sie erstmal im Gleichgewicht ist. Also muss die Wahrscheinlichkeit, von einer Startkonfiguration U zu einer bestimmten Konfiguration U' zu gelangen, genau so groß sein wie die, sich von dieser bestimmten Konfiguration zu entfernen:

$$\sum_U W(U|U')P(U) \stackrel{!}{=} \sum_{U'} W(U'|U)P(U') \quad . \quad (4.4)$$

Hier wird zusätzlich über die Wahrscheinlichkeit $P(U)$ gewichtet, sich in der Anfangskonfiguration U zu befinden. Damit erhält man die gesamte Wahrscheinlichkeit, in der Konfiguration U' zu enden. Eine Lösung kann gefunden werden, wenn diese Term für Term gilt:

$$W(U|U')P(U) = W(U'|U)P(U') \quad . \quad (4.5)$$

Diese hinreichende Bedingung wird auch als detailed balance condition bezeichnet.

Ein weiterer wichtiger Punkt um richtige Ergebnisse zu erhalten ist, dass die Markov-Kette alle Konfigurationen in einer endlichen Anzahl von Schritten erreichen können muss.

4.1.2 Molekül-Dynamik-Algorithmus

Zunächst wird ein Satz zu den Eichfeldern U kanonisch konjugierten Impulsen erzeugt, mit denen der Erwartungswert der Observablen

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}U \mathcal{O} e^{-S[U]} \quad \text{mit} \quad \mathcal{Z} = \int \mathcal{D}U \mathcal{O} e^{-S[U]} \quad (4.6)$$

zu

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}} \int \mathcal{D}U \mathcal{O} e^{-H[U,P]} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathcal{Z}} = \int \mathcal{D}U \mathcal{O} e^{-H[U,P]} \quad (4.7)$$

erweitert wird. Dabei ist der Hamilton-Operator definiert durch

$$H[U, P] = \frac{1}{2} \sum_i P_i^2 + S[U] \quad . \quad (4.8)$$

Summiert wird hierbei über alle Orte und Impulse. Damit lassen sich die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in der molekular-dynamischen Zeit τ schreiben als

$$\frac{d}{d\tau} U = P_i \quad \frac{d}{d\tau} P_i = -\frac{\partial S(U)}{\partial U_i} \quad . \quad (4.9)$$

Wenn man den Startpunkt bei $\tau = 0$ festlegt, erhält man so eine Phasenraumtrajektorie $[d(\tau), U(\tau)]$ durch den Phasenraum. Die zugehörige, klassische Partitionsfunktion ist

$$\mathcal{Z} = \int [d p][d U] e^{-H[U, P]} \quad . \quad (4.10)$$

Führt man das Gauss–Integral über $d p$ aus, so ist das Ergebnis proportional zum Pfadintegral–Ausdruck der quantenmechanischen Partitionsfunktion (4.6). Daher kann die klassische Molekular–Dynamik zur Lösung verwendet werden. Mit der Annahme, dass die Bewegungsgleichungen ergodisch sind, ist die Wahrscheinlichkeit, einen Punkt entlang der Trajektorie zu erreichen, proportional zum Boltzmann–Faktor. In diesem Fall lässt sich der Erwartungswert einer Observablen durch die Mittelung der molekular–dynamischen Trajektorie berechnen:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \mathcal{O}[U_i(\tau)] \quad . \quad (4.11)$$

Bei dieser Darstellung handelt es sich aufgrund der Einfachheit um reine Eichfelder. Um Bosonen und Fermionen mit einzubeziehen, ist der Hamilton–Operator zu modifizieren. In diesem Fall ergibt sich mit π_x , dem zum Skalarfeld ϕ kanonisch konjugierten Impuls, an einem Punkt x

$$H[U, P, \phi, \pi] = \frac{1}{2} \sum_i P_i^2 + \frac{1}{2} \sum_x \pi_x^\dagger \pi_x + S[U, \phi] \quad . \quad (4.12)$$

Der große Vorteil bei dieser Methode ist, dass alle Linkvariablen auf einmal erneuert werden. Der Nachteil ist, dass die Trajektorie–Propagation nicht immer ergodisch ist.

4.1.3 Metropolis–Algorithmus

Die Grundidee der Metropolis–Methode ist, dass ausgehend von einer Konfiguration U eine Konfiguration U' vorgeschlagen wird. Diese wird dann in einem Akzeptanz–Schritt entweder akzeptiert, oder verworfen. U und U' unterscheiden sich dabei in nur einer einzelnen Linkvariablen $U_i(n)'$. In vier Dimensionen wird dieser Link von sechs Plaketten geteilt. Nur diese Plaketten werden bei einem Update verändert. Der einzelne Link wird gewöhnlich durch

$$U_i(n)' = X U_i(n) \quad (4.13)$$

gewählt, wobei X ein Zufallselement der Eichgruppe mit dem Wert in der Nähe von $\mathbb{1}$ ist. Zusammengefasst werden die folgenden drei Schritte abgearbeitet:

- 1: Bei einer gegebenen Eichfeldkonfiguration wähle einen Konfigurationskandidat $U_i(n)'$ unter Berücksichtigung von (4.13)

- 2: Berechne die Summe über die Produkte der drei anderen Linkvariablen die die Plakette bilden. Hiervon ausgehend berechnet man die Änderung der Wirkung $\Delta S = S[U_i(n)'] - S[U_i(n)]$. Akzeptiere den Kandidat als neue Konfiguration wenn $r \leq \exp(-\Delta S)$ gilt, wobei r eine Zufallszahl im Intervall $[0, 1)$ ist, sonst verwerfe sie.

- 3: Beginne wieder bei Schritt 1.

Man kann zeigen, dass die detailed balance condition (4.5) erfüllt ist [Lan10].

Akzeptiert wird immer, sobald die Wirkung kleiner wird oder unverändert bleibt. Diese Tatsache allein würde zu einem Minimum der Wirkung im Konfigurationsraum führen. Das ist vergleichbar mit der Lösung der klassischen Feldgleichung. Gelegentlich wird aber aufgrund der Zufallszahl r auch eine Konfiguration mit erhöhter Wirkung akzeptiert, was man als die Reproduktion der Quantenfluktuation bezeichnen kann.

Der Vorteil der Metropolis-Methode ist, dass diese frei von systematischen Fehlern ist. Dafür wird sie sehr langsam, wenn die Wirkung von nicht-lokalen Feldern abhängig ist.

4.1.4 Der Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus

Bei dieser Methode wird die Phasenraumkonfiguration, die am Ende jeder Molekular-Dynamik-Kette erzeugt wird, als Testkonfiguration der Metropolis-Methode verwendet. Werden also U' und P' als Testkonfiguration zu U und P erzeugt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit einer Akzeptanz

$$W_A((U, P) \rightarrow (U', P')) = \min \left(1, \frac{e^{-H[U', P']}}{e^{-H[U, P]}} \right) . \quad (4.14)$$

Wenn die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen exakt berechnet werden können, ist der Hamilton-Operator $H[U, P]$ (4.8) entlang einer Trajektorie konstant. Das führt dazu, dass die Konfiguration im Metropolis-Schritt immer akzeptiert wird. Ist aber der Zeitschritt ϵ endlich und $\delta H[U, P] \neq 0$, so eliminiert der Metropolis-Schritt den systematischen Fehler, welcher durch den endlichen Zeitschritt entsteht.

Somit sehen die Schritte für den HMC folgendermaßen aus:

- 1: Willkürliche Wahl von $\{U_i(\tau_n)\}$
- 2: Auswahl von gaussverteilten P_i
- 3: Berechne $P_i(n) \rightarrow P_i(\tau_{n+1})$
- 4: Berechne $U_i(n) \rightarrow U_i(\tau_{n+1})$

- 5: Akzeptiere die neue Konfiguration mit der Wahrscheinlichkeit $r \geq \exp(-\Delta H)$
- 6: Verwende die neue Konfiguration im Schritt 2, oder im Fall der Verwerfung, starte mit der alten Konfiguration in 2.

Dass dieser Algorithmus die detailed balance condition erfüllt, findet man z.B. in [Rot05].

4.1.5 Die polynomielle Approximation

Wir nehmen an, dass die Determinante der Fermionmatrix $\tilde{Q} = \tilde{Q}^\dagger$ positiv ist. Ohne Vorzeichen wird der Determinantenfaktor in der Boltzmann-Wichtung der Eichkonfiguration zu

$$|\det \tilde{Q}|^{2\alpha} = (\tilde{Q}^2)^\alpha . \quad (4.15)$$

Allgemein gilt $\alpha = \frac{N_f}{2n_B}$, wobei n_B eine positive ganze Zahl ist. Im Falle von N_f massenentarteten Dirac-Fermionen gilt $\alpha = \frac{1}{2}N_f$. Für die in der $N_f = 1$ supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie verwendeten Majorana-Fermionen gilt $\alpha = \frac{1}{4}$. Die Grundlage der Approximation ist das Polynom

$$P(x) \simeq x^{-\alpha} \quad x \in [\epsilon, \lambda] , \quad (4.16)$$

wobei sich die Eigenwerte von \tilde{Q}^2 im Intervall $[\epsilon, \lambda]$ befinden.

Unter der Annahme, dass die Wurzeln der Polynome $P(x)$ in komplex konjugierten Paaren auftauchen, kann man die äquivalenten Formen

$$P(\tilde{Q}^2) = r_0 \prod_{j=1}^n \left[(\tilde{Q} \pm \mu_j)^2 + \nu_j^2 \right] = r_0 \prod_{j=1}^n (\tilde{Q} - \rho_j^*) (\tilde{Q} - \rho_j) \quad (4.17)$$

eingeführen, wobei n die Ordnung des Polynoms und $\rho_j \equiv \mu_j + i\nu_j$ ist. Die Wurzeln sind $r_j \equiv (\mu_j + i\nu_j)$. Mit Hilfe der bosonischen Felder ϕ_{jx} kann man schreiben:

$$\begin{aligned} (\det \tilde{Q}^2)^\alpha &\propto \prod_{j=1}^n \det[(\tilde{Q} - \rho_j^*) (\tilde{Q} - \rho_j)]^{-1} \\ &\propto \int [d\phi] \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n \sum_{xy} \phi_{jy}^\dagger [(\tilde{Q} - \rho_j^*) (\tilde{Q} - \rho_j)]_{yx} \phi_{jx} \right\} . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dabei tragen die Felder $j = 1, \dots, n$ die Indizes der zugehörigen Felder, z.B. Dirac-Indizes.

Da die Approximierung nicht exakt sein kann, muss die Abweichung von der zu approximierenden Funktion korrigiert werden, um einen exakten Updater zu erhalten. Diese Abweichung sollte kleiner als der statistische Fehler sein. Dazu müsste man z.B. in der QCD Ordnungen von $n \sim 10^3$ bis $n \sim 10^4$ verwenden, was zu einem nicht vertretbaren Aufwand führt.

Dieses Problem kann umgangen werden, indem man die Korrekturen stochastisch durchführt. Dazu führt man ein zweites Polynom ein:

$$P_1(x)P_2(x) \simeq x^{-\alpha} \quad x \in [\epsilon, \lambda] \quad . \quad (4.19)$$

Hierbei entspricht $P_1(x) \equiv P(x)$ in (4.16). Das zweite Polynom gibt eine gute Approximation gemäß

$$P_2(x) \simeq [x^\alpha P_1(x)]^{-1} \quad . \quad (4.20)$$

P_1 ist im Update realisiert, P_2 wird stochastisch in einem sogenannten noisy correction step berücksichtigt.

Nach dem Update von U nach U' wird ein Akzeptanzschritt durchgeführt. Dabei wird das neue Eichfeld mit der Wahrscheinlichkeit

$$\min\{1, A(\eta; [U'] \leftarrow [U])\} \quad (4.21)$$

akzeptiert, wobei

$$A(\eta; [U'] \leftarrow [U]) = \exp \left\{ -\eta^\dagger P_2 \left(\tilde{Q}[U']^2 \right) \eta + \eta^\dagger P_2 \left(\tilde{Q}[U]^2 \right) \eta \right\} \quad (4.22)$$

gilt. Man kann zeigen, dass die detailed balance condition (4.5) erfüllt ist.

Desweiteren wird nach dem Update ein Zufallsvektor erzeugt, welcher die Verteilung

$$\eta' = \frac{e^{-\eta^\dagger P_2(\tilde{Q}[U]^2)\eta}}{\int [d\eta] e^{-\eta^\dagger P_2(\tilde{Q}[U]^2)\eta}} \quad (4.23)$$

besitzt. Diese sind gaussverteilt mit

$$\frac{e^{-\eta'^\dagger \eta'}}{\int [d\eta'] e^{-\eta'^\dagger \eta'}} \quad . \quad (4.24)$$

Den Rauschvektor erhält man mit

$$\eta = P_2 \left(\tilde{Q}[U]^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \eta' . \quad (4.25)$$

Hier taucht eine invertierte Wurzel auf, welche man durch eine polynomiale Approximation

$$\overline{P}_2(x) \simeq P_2(x)^{-\frac{1}{2}} , \quad x \in [\bar{\epsilon}, \lambda] , \quad (4.26)$$

erhalten kann. Für das Intervall $[\bar{\epsilon}, \lambda]$ gilt für gewöhnlich $\bar{\epsilon} < \epsilon$, wobei ϵ aus dem Intervall für P_2 stammt.

Hier muss wiederum $n_2 \sim \infty$ für die Ordnung des Polynoms gelten, wenn die Approximation exakt sein soll. An dieser Stelle kann n_2 als ein großer Wert festgelegt und eine Korrektur während der Messung der Erwartungswerte durchgeführt werden. Dies geschieht durch eine Neugewichtung der Konfigurationen [Jan99].

Diese Korrektur während der Messung beruht auf eine weitere Approximation mit dem Polynom P' mit der Ordnung n' , welches

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} P_1(x)P_2(x)P'(x) = x^{-\alpha} \quad x \in [\epsilon', \lambda] \quad (4.27)$$

erfüllt. Das Intervall kann zum Beispiel zu $\epsilon' = 0$ und $\lambda = \lambda_{\max}$ gewählt werden. Dabei ist λ_{\max} die obere Grenze der Eigenwerte von \tilde{Q}^2 .

Um die Polynome zu berechnen, können n' unabhängige, rekursive Gleichungen benutzt werden. Diese findet man zum Beispiel in [Mon98].

Nach der Neugewichtung ist der Erwartungswert für eine Observable \mathcal{O} gegeben durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\langle \mathcal{O} \exp \left\{ \eta^\dagger \left[1 - P' \left(\tilde{Q}^2 \right) \right] \eta \right\} \rangle_{U, \eta}}{\langle \exp \left\{ \eta^\dagger \left[1 - P' \left(\tilde{Q}^2 \right) \right] \eta \right\} \rangle_{U, \eta}} . \quad (4.28)$$

Dabei ist η ein Rauschvektor und $\langle \dots \rangle_{U, \eta}$ ist der Erwartungswert einer Eichfeldsequenz.

Wir verwenden für die Neugewichtung eine Kombination aus zwei Methoden. Zunächst wird eine feste Anzahl m der kleinsten Eigenwerte λ_{\min} exakt berechnet. Dann wird zu dem zu diesen Eigenwerten gehörenden Unterraum der orthogonale Unterraum von \tilde{Q}^2 mit Rauschvektoren $\{\eta_i\}$ stochastisch abgetastet. Die Korrekturfaktoren einer Konfiguration U nehmen dann die Form

$$C[U] \simeq \prod_{k \leq m} P_1(\lambda_{\min}^{(k)}) P_2(\lambda_{\min}^{(k)}) \left\langle \exp \left\{ \eta^\dagger \left[1 - P' \left(\tilde{Q}^2 \right) \right] \eta \right\} \right\rangle_{U, \eta} \quad (4.29)$$

an. Mit der Verwendung des Vorzeichen des Pfaffians (3.37) erhält man dann die neugewichtete Observable

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\langle \mathcal{O} \text{sgn PF}(M[U]) \exp \left\{ \eta^\dagger \left[1 - P' \left(\tilde{Q}^2 \right) \right] \eta \right\} \rangle_{U, \eta}}{\langle \text{sgn PF}(M[U]) \exp \left\{ \eta^\dagger \left[1 - P' \left(\tilde{Q}^2 \right) \right] \eta \right\} \rangle_{U, \eta}}. \quad (4.30)$$

Sämtliche polynomialen Approximationen können durch ein rekursives Schema der kleinsten quadratischen Abweichungen erhalten werden, wie man zum Beispiel in [Mon98] findet. Diese beruht auf der Minimierung der L_2 -Norm der Ableitung. Generell ist dabei das Ziel, die kleinste mögliche Abweichung der Erwartungswerte bei einer möglichst kleinen Ordnung der Polynome zu erreichen. Die Koeffizienten der Polynome lassen sich zum Beispiel numerisch durch beliebige Präzisionsarithmetiken [Mon03] oder durch Diskretisierung des Approximationsintervalls [T04] bestimmen. Die Entwicklung in orthogonalen Polynomen ist sowohl für die Bestimmung der Koeffizienten, sowie in der Anwendung der Polynome der Fermionmatrix \tilde{Q}^2 auf einen Vektor, von großer Bedeutung.

Desweiteren existieren Möglichkeiten, den PHMC zu tunen. Zum Einen wird das sogenannte determinant breakup [Has02] verwendet. Dieses vermeidet die Rundungsfehler, welche bei der Verwendung von Polynomen $P_1(x)$ mit sehr hoher Ordnung auftreten, da es erlaubt, die Ordnung des Polynoms zu senken. Außerdem sinkt die Magnitude, sowie die Varianz der Quarkkraft proportional zu $n_b^{-1/2}$. Weitere Möglichkeiten des Tunings bieten das Sexton-Weingarten-Schema [Wei92], wobei der Wechselwirkungsterm und der Fermion-Term des Hamilton-Operators mit unterschiedlichen Zeitschritten approximiert werden sowie verschiedene Verfahren zur Optimierung der Fermion-Matrix durch Präkonditionierung [Fer09].

4.2 Die Simulationsparameter

In der Wirkung S treten die Parameter β und κ auf, die für eine Simulation frei gewählt werden können. Diese Auswahl sollte allerdings sorgfältig getroffen werden, da beide Parameter einen entscheidenden Einfluss auf die Plausibilität der erhaltenen Daten haben.

Die nackte Eichkopplung

$$\beta = \frac{2N_c}{g^2} \quad (4.31)$$

hängt mit der Kopplungskonstante g zusammen. Diese geht im Falle der asymptotischen Freiheit gegen null. Somit geht auch $\beta \rightarrow \infty$, was dem Kontinuums-Limes entspricht. Hier geht der Gitterabstand a gegen null. Da aber bei dem PHMC Algorithmus der Rechenaufwand mit den Gitterpunkten a^6 ansteigt, ist der Kontinuums-Limes unerreichbar. Für gewöhnlich wird das Raum-Zeit-Gitter so gewählt, dass die Zeitrichtung doppelt so groß wie die Raumrichtung ist. Dadurch

wird eine bessere Auflösung der Zeitscheibenkorrelatoren ermöglicht. Mit dem Parameter β wird dann der Gitterabstand, und damit das physikalische Volumen festgelegt. Ein großes β reproduziert den Kontinuums-Limes am besten. Allerdings wird dadurch auch das Volumen der Simulation kleiner, was zu Volumen-Effekten führen kann.

Im Kontinuum werden Ströme, die unter Symmetrietransformationen erhalten bleiben, als Noether-Ströme bezeichnet. Für masselose Fermionen bleibt bei Symmetrietransformationen sowohl der Vektorstrom als auch der axiale Vektorstrom erhalten. Diese als chirale Symmetrie bezeichnete Eigenschaft, wird durch Hinzufügen eines Massenterms zur Lagrange-Dichte gebrochen, da der axiale Vektorstrom nicht erhalten bleibt. Der chirale Limes wird durch eine Extrapolation der Form $m_{a-\pi} \rightarrow 0$ erreicht, welche im Kapitel 7 durchgeführt wird.

Durch das Brechen der chiralen Symmetrie bekommen die Gluinos eine Masse. Im Rahmen der Wilson-Wirkung ist diese Masse im Hopping-Parameter enthalten:

$$\kappa = \frac{1}{2m_{\tilde{g},0} + 8r} . \quad (4.32)$$

Im Falle der QCD ist der Wilson-Parameter $r = 1$. Dann können in der freien Theorie die Symmetrien wieder hergestellt werden, indem man für κ den kritischen Wert

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \kappa_{cr} = \frac{1}{8} \quad (4.33)$$

wählt.

In der Praxis wird der Hopping-Parameter derart eingestellt, dass die Pionmasse möglichst klein wird, was die Extrapolation zum Kontinuum erleichtert. Hierbei ist zu beachten, dass eine kleinere Masse eine größere Wellenlänge und somit einen verstärkten Volumen-Effekt mit sich bringt. Desweiteren steigt mit kleineren Massen der Rechenaufwand. Somit gestaltet sich eine geeignete Wahl der Parameter sehr schwierig.

Eine Möglichkeit, die Qualität der erhaltenen Daten zu überprüfen, ist die Einsicht der Rohdaten. Diese liefern eine Einsicht der Einzelbeiträge der Konfigurationen zum Korrelator. Dazu verwendet man für gewöhnlich die Korrelatoren des Pions oder des Gluino-Gluons. Diese Teilchen liefern ein relativ stabiles Signal, bei den anderen Teilchen ist das Signal-Zu-Rauschverhältnis nicht so groß. Für den Fall, dass Korrekturfaktoren vorhanden sind, werden diese mit den Einzelbeiträgen multipliziert.

In Abbildung (6) und (7) sind diese Einzelbeiträge eines Pion-Korrelators für ein Gitter mit $L = 8$ und $T = 16$, sowie einem Gitter mit $L = 20$ und $T = 40$ bei

den gleichen Parametern $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$ dargestellt. Da die Korrelatoren symmetrisch in der Zeit sind, werden für gewöhnlich die um den Mittelpunkt liegenden Punkte addiert und der Mittelwert berechnet. Daher treten hier nur acht bzw. 20 Zeitschritte auf.

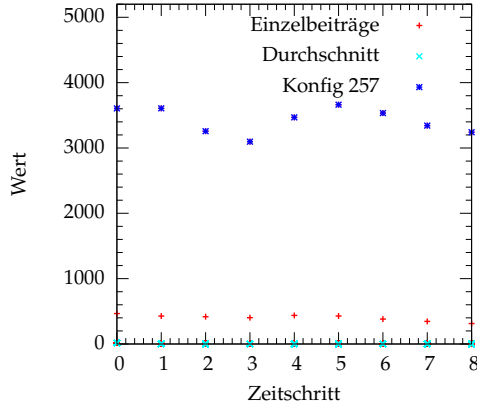


Abbildung 6: Einzelbeiträge des Pion-Korrelators für das Gitter mit $L = 8$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$

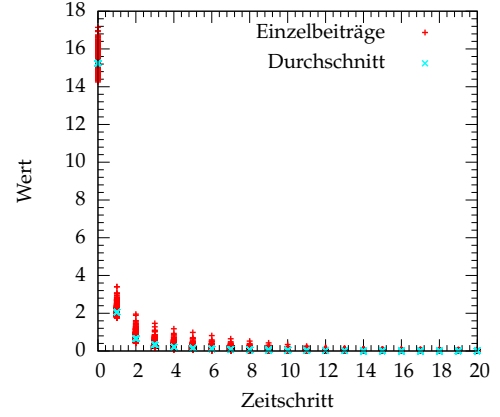


Abbildung 7: Einzelbeiträge des Pion-Korrelators für das Gitter mit $L = 20$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$

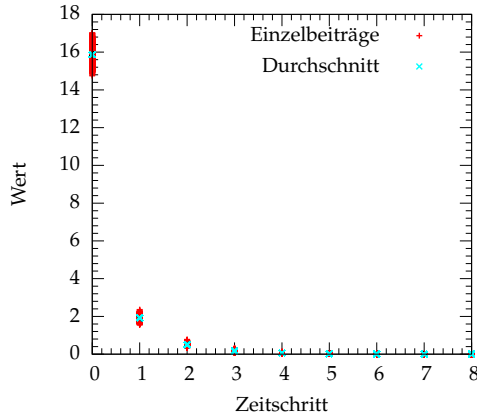


Abbildung 8: Einzelbeiträge des Pion-Korrelators für das Gitter mit $L = 8$, $\beta = 1.60$ und $\kappa = 0.1500$

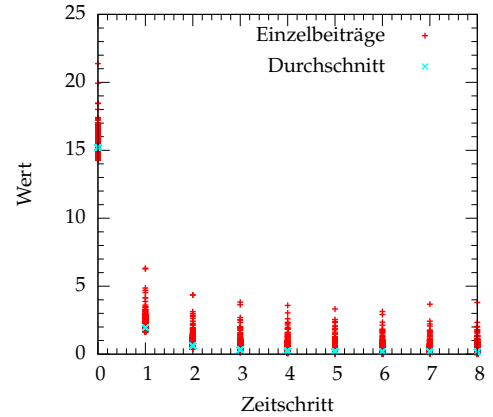


Abbildung 9: Einzelbeiträge des Pion-Korrelators für das Gitter mit $L = 8$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1482$

Man erkennt deutlich, dass zum Beispiel die Konfiguration 257 des Gitters mit $L = 8$ stark von den übrigen abweicht. Insgesamt liegen die einzelnen Werte bei einer geeigneten Wahl der Simulationsparameter deutlich näher zusammen. Dies lässt sich durch eine sorgfältige Wahl des Hopping-Parameters κ erreichen. Weiterhin kann die nackten Eichkopplung verkleinert, sowie die Anzahl der Gitterpunkte vergrößert werden. Beides führt zu einem größeren physikalischen Volumen. Für einen Vergleich mit einer verkleinerten Eichkopplung ist in Abbildung (8) ein

Gitter mit $L = 8$, $T = 16$ sowie $\beta = 1.6$ und $\kappa = 0.1500$ dargestellt, welches ebenfalls bei der Auswahl der Parameter untersucht wurde. Um den Einfluß des Hopping-Parameters zu verdeutlichen, ist in Abbildung (9) das Gitter mit $L = 8$, $T = 16$ sowie $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1482$ dargestellt. Hier liegen die einzelnen Werte ebenfalls sehr nahe beieinander. Starke „Ausreißer“ wie die Konfiguration 257 fehlen vollständig.

4.3 Die Korrekturfaktoren

Die Approximation in dem PHMC ist nur dann exakt, wenn die Ordnung der verwendeten Polynome gegen unendlich geht, was in der Praxis unmöglich ist. Aufgrund der Approximationsungenauigkeiten werden in einigen Fällen sehr kleine Eigenwerte der Fermion-Matrix erzeugt. Für diese ist die Approximation bei fester Ordnung der Polynome am schlechtesten. Anstatt nun die Ordnung der Polynome sehr hoch zu wählen, können für diese Eigenwerte Korrekturfaktoren berechnet werden, wie es mit dem Polynom P' in (4.27) dargestellt ist.

Dazu werden zunächst die kleinsten Eigenwerte der \tilde{Q}^2 -Matrix bestimmt, was schon im Update nach jeden Akzeptanzschritt mit Hilfe des konjugierten Gradientenverfahren [Fer09] durchgeführt wird. Dann werden die Korrekturen für die kleinsten Eigenwerte berechnet, so dass der Erwartungswert die Form (4.30) annimmt.

Die Korrekturfaktoren nehmen einen Wert ~ 1 an. Nur für die Konfigurationen der „Ausreißer“ weichen sie stark ab. Wie diese den Wert der einzelnen Konfigurationen beeinflussen, zeigt Abbildung (10), wo der Korrelator für das Gluino-Gluon dargestellt ist. Hier wurden die Korrekturen für 7000 Konfigurationen auf dem Gitter mit $L = 8$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$ berechnet. Wie zuvor bei dem Pion-Korrelator erwähnt, gab es „Ausreißer“, zum Beispiel Konfiguration 257. Diese werden durch die Korrekturen unterdrückt.

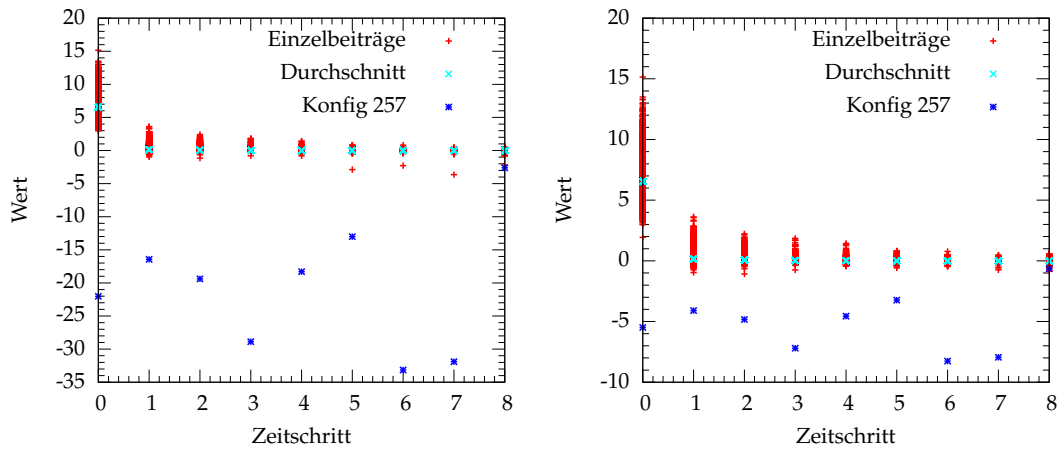


Abbildung 10: Rohdaten für das Gitter mit $L = 8$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$ ohne und mit Korrekturfaktoren

Durch die Korrekturfaktoren ändern sich die Massen folgendermassen:

Gitter	$am_{a-\pi}$	$am_{\tilde{g}}$	$am_{a-\eta'}$	am_{a-f_0}
Ohne Korrekturen	0.096(78)	0.947(50)	2.21(116)	2.219(71)
Mit Korrekturen	0.142(35)	0.930(39)	1.18(15)	0.180(23)

Tabelle 2: Vergleich der Masse für das Gitter mit $L = 8$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$ ohne und mit Korrekturfaktoren

Dabei wurden, um einen besseren Vergleich zu ermöglichen, exakt die gleichen Fitintervalle verwendet. Erkennbar ist eine starke Massenverschiebung. Desweiteren werden die Fehler mit der Verwendung von Korrekturfaktoren kleiner.

Zwar werden die Ergebnisse durch die Korrekturfaktoren verbessert, aber dennoch ist die Wahl der Parameter sorgfältig zu treffen. Wählt man ein kleines Volumen und einen verhältnismäßig großen Wert für κ , so können die Eigenwerte der Fermion-Matrix sehr klein werden. Hier empfiehlt sich eine gelegentliche Überprüfung der kleinsten Eigenwerte, um gegebenenfalls die Ordnung der polynomialen Approximation zu erhöhen. Die verwendeten Polynome besitzen einen bestimmten Bereich, in dem die Approximation zufriedenstellend durchgeführt werden kann. Für die Untersuchung des chiralen Limes wurde die Kombination aus der Ordnung der Polynome und des Hopping-Parameters κ derart gewählt, dass keine Korrekturfaktoren benötigt werden. Diese bieten eine Verbesserung der Ergebnisse, aber wie man in Abbildung (10) erkennt, werden Fehler nicht gänzlich vermieden.

5 Massenbestimmung auf dem Gitter

5.1 Die Zeitscheiben–Korrelationsfunktion

Ausgangspunkt der Massenbestimmung auf dem Gitter ist der Verlauf von Zwei-Punkt Zeitscheiben–Korrelationsfunktionen. Diese haben die Form

$$C(\Delta t) = \langle S^\dagger(t + \Delta t) S(t) \rangle \quad , \quad (5.1)$$

wobei $S(t)$ den Zeitscheiben–Mittelwert eines eichfeldabhängigen Operators \mathcal{O} zu einem bestimmten Zeitpunkt t bezeichnet:

$$S(t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{n}} \mathcal{O}(\mathbf{n}, t) \quad . \quad (5.2)$$

Die Summation über die gesamte Zeitscheibe t projiziert die Impulse auf $\mathbf{p} = 0$. Daher liefert diese wegen $E_k(\mathbf{p} = 0) = m_k$ die für die Massenbestimmung interessanten Komponenten. Fügt man in die Zeitscheiben–Korrelationsfunktion ein Satz von vollständigen Eigenzuständen

$$\sum_k |k\rangle \langle k| = \mathbb{1} \quad (5.3)$$

ein, so erhält man die spektrale Darstellung

$$\begin{aligned} C(\Delta t) &= \sum_k \left[|\langle 0 | S^\dagger(t) | k \rangle|^2 e^{-m_k(T-\Delta t)} \pm |\langle k | S(t) | 0 \rangle|^2 e^{-m_k \Delta t} \right] \\ &= \omega_0 + \sum_k \omega_k \left(e^{-m_k(T-\Delta t)} \pm e^{-m_k \Delta t} \right) \quad . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dabei ist ω_0 der Vakuumerwartungswert und T die zeitliche Ausdehnung des Gitters. Der Vorzeichenwechsel des zweiten Summanden ist von den Randbedingungen abhängig:

- (+) Die auf dem Gitter befindlichen Eichfelder haben periodische Randbedingungen
- (–) Fermionfelder haben antiperiodische Randbedingungen

Aufgrund der periodischen Randbedingungen besitzt der Korrelator eine Symme-

trie um $T/2$. Dann nimmt der Korrelator die Form

$$\begin{aligned}
 C(\Delta t) &= \omega_0 + \sum_k \omega_k \cdot e^{-m_k \frac{T}{2}} \left(e^{m_k(\frac{T}{2}-\Delta t)} \pm e^{-m_k(\frac{T}{2}-\Delta t)} \right) \\
 &= \begin{cases} \omega_0 + \sum_k \omega_k \cdot e^{-m_k \frac{T}{2}} \cdot 2 \cdot \cosh \left(m_k \left(\frac{T}{2} - \Delta t \right) \right) & (+) \\ \omega_0 + \sum_k \omega_k \cdot e^{-m_k \frac{T}{2}} \cdot 2 \cdot \sinh \left(m_k \left(\frac{T}{2} - \Delta t \right) \right) & (-) \end{cases} \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

an.

Diese Symmetrie kann man ausnutzen, um das Signal-zu-Rausch-Verhältnis zu verbessern. Durch eine Zeitsymmetrisierung erhält man

$$C(\Delta t)|_{[0, \dots, T]} \rightarrow \tilde{C}(\Delta t)|_{[0, \dots, \frac{T}{2}]} = \frac{1}{2}(C(\Delta t) \pm C(T - \Delta t)) \quad . \quad (5.6)$$

Da für gewöhnlich der zeitsymmetrisierte Korrelator verwendet wird, wird ab jetzt auf die Tilde verzichtet. Zum Schluss sei noch angemerkt, dass der Vakuum Erwartungswert ω_0 durch den Zugang

$$C(\Delta t) = \langle S^\dagger(t + \Delta t) S(t) \rangle - \langle S^\dagger(t + \Delta t) \rangle \langle S(t) \rangle \quad (5.7)$$

subtrahiert werden kann. Dies bietet sich zum Beispiel bei skalaren Teilchen an, da diese einen Überlapp mit dem Vakuum besitzen. Somit besitzt der Vakuumswert einen nicht verschwindenden Anteil vom Erwartungswert.

An (5.4) wird auch deutlich, dass das Spektrum durch die leichtesten Zustände dominiert wird. Höhere Massen werden stärker exponentiell gedämpft. Hat der Operator auch für größere Δt einen signifikanten Überlapp mit schwereren Zuständen, so müssen auch höhere Ordnungen in (5.4) berücksichtigt werden.

5.2 Direkter Massenfit

Der Verlauf der Zeitscheiben-Korrelationsfunktion wird bei großen Zeitscheibendistanzen von den leichtesten Zuständen des Spektrums dominiert, da höhere Moden stärker exponentiell gedämpft werden. Im Grenzfall $\Delta t \rightarrow \infty$ sollte dieser leichteste Zustand der Grundzustand sein. Die Masse des Grundzustandes lässt sich dann mit Hilfe eines zwei-Parameter-Fits an die Zeitscheiben-Korrelationsfunktion

$$C(\Delta t) \approx \omega_1 \left(e^{-m_1 \Delta t} \pm e^{m_1(T-\Delta t)} \right) \quad (5.8)$$

bestimmen. Bei der Wahl des Intervalls $\Delta t \in [t_{min}, t_{max}]$ ist darauf zu achten, dass einerseits t_{min} nicht zu klein gewählt wird, um die angeregten Zustände zu unterdrücken. Andererseits darf t_{min} nicht zu groß gewählt werden, da das Signal bei zu großen Zeiten stark verrauscht sein kann.

Eine Methode, um festzustellen ob die angeregten Zustände hinreichend stark unterdrückt sind, bietet die Methode der effektiven Massen, welche im folgenden Kapitel dargestellt wird.

5.3 Effektive Massen

Eine Abschätzung der Grundzustandsmasse liefert die Methode der effektiven Massen. Zunächst betrachten wir den Fall mit $\omega_0 = 0$.

Ausgehend vom Verlauf der Zeitscheiben–Korrelationsfunktion wird zu einem Zeitscheibenpaar (t_1, t_2) und einer zeitlichen Gitterausdehnung T die Lösung $m_{eff}(t_1, t_2, T)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\langle S^\dagger(t+t_1)S(t) \rangle &= \omega_1 \left(e^{-m_{eff}t_1} \pm e^{-m_{eff}(T-t_1)} \right) \\ \langle S^\dagger(t+t_2)S(t) \rangle &= \omega_1 \left(e^{-m_{eff}t_2} \pm e^{-m_{eff}(T-t_2)} \right)\end{aligned}\tag{5.9}$$

bestimmt. Im Grenzfall $\{t_1, t_2, T\} \rightarrow \infty$ ist diese Lösung, welche als effektive Masse bezeichnet wird, die Grundzustandsmasse. Das Gleichungssystem wird gelöst, indem man zunächst das Verhältnis

$$r_{12} \equiv \frac{\langle S^\dagger(t+t_1)S(t) \rangle}{\langle S^\dagger(t+t_2)S(t) \rangle}\tag{5.10}$$

definiert. Mit den Abkürzungen

$$\tau_i = \left(\frac{T}{2} - t_i \right), \quad x = e^{-m_{eff}}\tag{5.11}$$

wird daraus

$$r_{12} (x^{-\tau_2} \pm x^{\tau_2}) = (x^{-\tau_1} \pm x^{\tau_1}) \quad .\tag{5.12}$$

Auf numerischen Weg lässt sich daraus eine Lösung für x und damit dann auch für die effektive Masse bestimmen:

$$m_{eff}(t_1, t_2, T) = -\log x \quad .\tag{5.13}$$

Üblicherweise wird $t_2 = t_1 + 1$ für $\omega_0 = 0$ gesetzt.

Im allgemeinen Fall $\omega_0 \neq 0$ muss zur Berechnung des dritten freien Parameters zusätzlich eine weitere Zeitscheiben–Korrelationsfunktion betrachtet werden. Mit den gleichen Abkürzungen wie oben, periodischen Randbedingungen und $t_3 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$(r_{13} - 1) (x^{\tau_2} + x^{-\tau_2} - x^{\tau_3} - x^{-\tau_3}) = (r_{23} - 1) (x^{\tau_1} + x^{-\tau_1} - x^{\tau_3} - x^{-\tau_3}),\tag{5.14}$$

welches wie oben numerisch gelöst werden kann.

Aufgrund der Wahl von t_2 sollte sich in beiden Fällen bei der grafischen Darstellung von m_{eff} ein Plateau ausbilden. Mit ansteigendem Wert von t_1 ist, gemäß des theoretischen Verlaufes der Zeitscheiben-Korrelationsfunktion, mit einem Abfall der effektiven Masse m_{eff} zu rechnen. In diesem Bereich sollten die höheren Moden hinreichend stark unterdrückt sein, so dass im Bereich des Plateaus der Grundzustand dominieren sollte.

5.4 Die Variationsmethode

Liegen mehrere angeregte Zustände vor, oder werden mehrere interpolierende Operatoren für die Extrahierung eines Quantenzustandes verwendet, lässt sich auch eine Variationsmethode zur Bestimmung der Energieniveaus verwenden. Das ist zum Beispiel der Fall bei Gluebällen mit unterschiedlichen Smearing-Levels (Siehe dazu auch Kapitel 5.6). Dabei geht man von verschiedenen interpolierenden Operatoren $\{\mathcal{O}_i, i = 1, \dots, N\}$ aus und bildet alle möglichen Kreuzkorrelationsfunktionen

$$C_{ij}(t) = \langle \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j^\dagger \rangle \quad \text{mit} \quad i, j = 1, \dots, N \quad . \quad (5.15)$$

Im Hilbert-Raum haben diese die Spektraldarstellung

$$C_{ij}(t) = \sum_k \langle 0 | \mathcal{O}_i | k \rangle \langle k | \mathcal{O}_j^\dagger | 0 \rangle e^{-m_k t} \quad . \quad (5.16)$$

Um die Masse m_k zu berechnen, wird zunächst die Kombination

$$\mathcal{O} = \sum_j c_j \mathcal{O}_j \quad (5.17)$$

bestimmt. Dabei werden die Koeffizienten c_j so gewählt, dass das Verhältnis

$$C(t)/C(0) \quad (5.18)$$

maximal wird, wobei

$$C(t) = \sum_{ij} c_i c_j C_{ij}(t) \quad (5.19)$$

der Korrelator des Operators \mathcal{O} ist. Man kann zeigen [Wol90], dass für die Eigenwerte $\lambda^{(k)}$ des generalisierten Eigenwertproblems

$$C_{ij}(t) \mathbf{v}_j^{(k)} = \lambda^{(k)} C_{ij}(0) \mathbf{v}_j^{(k)} \quad (5.20)$$

gilt:

$$\lambda^{(k)}(t) \propto e^{-m_k t} [1 + \mathcal{O}(e^{-\Delta m_k \cdot t})] \quad . \quad (5.21)$$

Dabei ist m_k die Masse des k -ten angeregten Zustandes. Weiterhin korrespondiert mit dem größten Eigenwert die kleinste Masse. Somit hat der zu diesem Eigenwert gehörende Operator \mathcal{O} mit dem Koeffizient $c_j^{(0)}$ den besten Überlapp mit dem niederenergetischsten Zustand.

An dieser Stelle haben sich zwei Methoden etabliert:

Die Methode des fixierten Eigenvektors: Hier wird das Eigenwertproblem (5.20) für eine einzelne Zeitscheibe $t = t_b$ gelöst, wobei b die Basis bezeichnet. Der Eigenvektor $\mathbf{v}^{(k)}$ wird für die Rotation der Kreuzkorrelationen jeder Zeitscheibe verwendet. Dann gilt für die effektive Masse (in Gittereinheiten) auf benachbarten Zeitscheiben:

$$am_k(t) = \ln \left[\frac{\sum_{ij} \mathbf{v}_i^{(k)} \mathbf{v}_j^{(k)} C_{ij}(t)}{\sum_{ij} \mathbf{v}_i^{(k)} \mathbf{v}_j^{(k)} C_{ij}(t+1)} \right] . \quad (5.22)$$

Die Methode des t-Vektors: Diese stellt eine Verallgemeinerung zur Methode des fixierten Eigenvektors da. Dabei ist die Basis b unbedeutend, da das Eigenwertproblem (5.20) für alle Zeiten t gelöst wird. Mit den daraus berechneten Eigenwerten bestimmt man dann die effektive Masse zu

$$am_k(t) = \ln \left[\frac{\lambda^{(k)}(t)}{\lambda^{(k)}(t+1)} \right] . \quad (5.23)$$

Bei beiden Methoden werden die Fehler über die Jackknife Analyse oder die Linearisierungs-Methode bestimmt.

Wie auch im Falle der effektiven Massen in Kapitel (5.3) wird ein Plateau im Massenplot gesucht um dann bei einer fixierten Anzahl von Zeitschritten einen exponentiellen Fit wie in Kapitel (5.2) durchzuführen.

5.5 Fehlerabschätzungen

Diskretisierungsfehler, Volumen-Effekte sowie die Approximation durch endliche Polynome bei der Erzeugung der Eichfelder spielen bei der Simulation eine Rolle. Zusätzlich zu diesen systematischen Fehlern treten auch statistische Fehler auf. Diese werden durch die endliche Anzahl der berechneten Stichproben begründet. Allgemein sollte es möglich sein, die systematischen Fehler kleiner als die statistischen Fehler zu halten. Um die Größe der statistischen Fehler abschätzen zu können werden in der Münster-Desy-Kollaboration die Jackknife-Analyse sowie die Methode der Linearisierung verwendet.

Im Folgenden wird mit der primären Observablen eine direkt messbare Größe bezeichnet. Auf dem Gitter wäre diese zum Beispiel die Plakette. Eine sekundäre Ob-

servable ist eine Kombination von primären Observablen, zum Beispiel ein Operator mit dem die Masse eines Teilchen bestimmt wird.

5.5.1 Die Jackknife–Analyse

Ausgangspunkt ist die Messung der Observable A , die insgesamt N mal durchgeführt wird. In der Jackknife Analyse wird aus diesem Datensatz eine Stichprobe A_j entfernt, um die Wirkung dieser einzelnen Messung auf das Ergebnis abzuschätzen. Dazu wird der Mittelwert $A_j^{(J)}$ der verbliebenen Messungen berechnet:

$$A_j^{(J)} = \frac{1}{N-1} \sum_{i \neq j} A_i \quad . \quad (5.24)$$

Der Jackknife–Schätzer der sekundären Observablen $y(A)$ ist gegeben durch

$$y_j^{(J)} = y(A_j^{(J)}) \quad . \quad (5.25)$$

Mit diesem Schätzer wird im zweiten Schritt der Mittelwert \bar{y}^J der sekundären Observable

$$\bar{y}^J = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j^{(J)} \quad (5.26)$$

berechnet. Die Varianz der sekundären Observablen ist dann

$$\sigma^2(\bar{y}^{(J)}) = \frac{N-1}{N} \sum_{j=1}^N \left(y_j^{(J)} - \bar{y}^{(J)} \right)^2 \quad . \quad (5.27)$$

Ein Problem ergibt sich für korrelierte Observablen, wie es für die Eichkonfigurationen der Fall ist. Hier wird im Allgemeinen die Größe des Fehlers unterschätzt. Um die Autokorrelation zu eliminieren bietet sich die Blockbildungsmethode [MS02] an. Dazu werden die N Messungen in $B < N$ Blöcke unterteilt. Jeder dieser N_B Blöcke wird dann der Jackknife–Analyse unterzogen. In wiederholter Messung, bei sukzessiver Erhöhung der Blockgröße, sollte der statistische Fehler ein Plateau erreichen. Für unendliche viele Messungen ist dieser Fehler der Fehler der unkorrelierten Messungen.

5.5.2 Die Methode der Linearisierung

Die Methode der Linearisierung, auch Γ -Methode genannt, wurde von U. Wolff [Wol04] vorgeschlagen.

Für eine primäre Observable mit den exakten Erwartungswerten A_j $j = 1, \dots, M$ ergibt die Messung von N mit Monte Carlo Methoden erzeugten Konfigurationen

$$\bar{a}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_j^{(i)} \quad , \quad (5.28)$$

wobei $|\bar{a}_j - A_j| \ll 1$ gilt. Sind die verwendeten Konfigurationen unabhängig, kann der Fehler auf die übliche Art und Weise abgeschätzt werden.

Bei sekundären Observablen $y(A_j)$ ist dies nicht möglich. Hier wird angenommen, dass die Abweichung einer Stichprobe für eine genügend große Statistik

$$y(\bar{a}) - y(A) \simeq \sum_j (\bar{a}_j - A_j) \frac{\partial y(A)}{\partial A_j} \quad (5.29)$$

beträgt. Die Ableitungen sollten am Ort \bar{a}_j der korrekten Eigenwerte konstante Werte liefern. Dann lässt sich die Abweichung einer Stichprobe als Linearkombination primärer Observablen ausdrücken. Aufgrund des Schätzwertes

$$\frac{\partial y(A)}{\partial A_j} \simeq \left. \frac{\partial y(A)}{\partial A_j} \right|_{A=\bar{a}} \equiv \bar{y}_j \quad (5.30)$$

ist es möglich, die Abweichung darzustellen als

$$y(\bar{a}) - y(A) \simeq \sum_j (\bar{a}_j - A_j) \bar{y}_j = \bar{a}_{\bar{y}} - A_{\bar{y}} \quad , \quad (5.31)$$

wobei

$$A_{\bar{y}} = \sum_j \bar{A}_j \bar{y}_j \quad (5.32)$$

eine Linearkombination primärer Observablen ist. Der Erwartungswert dieser primären Observablen ist

$$A_{\bar{y}} = \sum_j \bar{A}_j \bar{y}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_j^{(i)} \bar{y}_j \quad . \quad (5.33)$$

Nimmt man einen unendlichen Satz identischer Messungen mit der gleichen Statistik an, so ist der Erwartungswert

$$\langle \bar{a}_j - A_j \rangle = 0 \quad , \quad (5.34)$$

und die Varianz von A_j ist

$$\sigma_j^2 = \langle (\bar{a}_j - A_j)^2 \rangle = \langle \bar{a}_j^2 - \langle A_j \rangle^2 \rangle \quad . \quad (5.35)$$

Die Varianz für beliebige $A_{\bar{y}}$ kann dann mit

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \langle (\bar{a}_{\bar{y}} - A_{\bar{y}})^2 \rangle = \langle \bar{a}_{\bar{y}}^2 - \langle A_{\bar{y}} \rangle^2 \rangle \quad (5.36)$$

berechnet werden. Für jedes $A_{\bar{y}}$ existieren numerische Wege, die Linearisierung zu realisieren. Aufbauend von dieser Grundidee kann die Linearisierung für die effektiven Massen und die effektiven Massen aus der Variationsmethode vollzogen werden, diese findet man zum Beispiel in [Dem09].

5.6 Das APE-Smearing

Um den Überlapp zwischen den ausgedehnten physikalischen Teilchen und den lokalen Eichlinks zu erhöhen, sowie den Signal-zu-Rausch-Abstand zu verbessern, können sogenannte geschmierte Links verwendet werden. Insbesondere das Signal der Gluebälle ist stark verrauscht. Für diese bietet sich das APE-Smearing [ea87] an, welches allgemein bei Eichfeldern weite Anwendung findet.

Die Grundidee besteht darin, einen Link $U_\mu(n)$ mit der Summe der benachbarten Links und den Link selber, zu ersetzen:

$$U_\mu(n) \rightarrow U'_\mu(n) = U_\mu(n) + \epsilon_{APE} \sum_{\mu \neq \nu} C_{\mu\nu}(n) \quad (5.37)$$

$$C_{\mu\nu}(n) = U_\nu(n)U_\mu(n + \hat{\nu})U_\nu(n + \hat{\mu})^\dagger + U_\nu(n - \hat{\nu})^\dagger U_\mu(n - \hat{\nu})U_\nu(n - \hat{\nu} + \hat{\mu}) \quad .$$

Mit dem Parameter ϵ_{APE} vor der Summe kann die Gewichtung der Nachbarlinks kontrolliert werden. Eine Veranschaulichung befindet sich in Abbildung (11). Diese geschmierten Links sind allerdings nicht mehr Elemente der $SU(2)$ -Eichgruppe. Durch eine Projektion der Art

$$\mathcal{P}_{SU(2)}[U_\mu(n)] = \frac{U_\mu(n)}{\sqrt{\frac{1}{2} \text{Sp}[U_\mu(n)^\dagger U_\mu(n)]}} \quad (5.38)$$

kann dies behoben werden. Für jede Konfiguration wird die Linksubstitution N_{APE} mal durchgeführt. Dadurch erhält man einen Smearing Radius [Zan02] von:

$$R = \sqrt{N_{APE} \cdot \frac{\epsilon}{3}} \quad . \quad (5.39)$$

Wie N_{APE} und ϵ_{APE} gewählt werden bleibt dabei unklar. Hier empfiehlt sich einfaches Ausprobieren. Allerdings sollte darauf geachtet werden, dass eine zu große Wahl der Parameter zu einer Auswaschung des Signals führt.

wendet.

Eine Möglichkeit diesen gewaltigen Rechenaufwand zu bewältigen, bietet die sogenannte Stochastic Estimator Technique, wobei der Vektorraum mit zufälligen Schätzern abgetastet wird [Dem09].

5.7.2 Der Gluino–Glueball

Der fermionische Spin- $\frac{1}{2}$ -Zustand aus Gluonen und Gluinos $\chi = F^{\mu\nu a} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a$ kann mit dem Operator

$$\mathcal{O}^\alpha = \sum_{i < j} \sigma_{ij}^{\alpha\beta} \text{Sp} \left[F_{ij}(n) \lambda^\beta(n) \right] \quad (5.41)$$

gemessen werden. Um Beiträge von angrenzende Zeitscheiben zu unterdrücken, wird nur über die räumlichen Indizes i, j summiert. F_{ij} ist die diskretisierte Feldstärke mit der Clover-Plakette (3.16).

Der Zeitscheiben-Korrelator ist aus zwei Plaketten aufgebaut, eine dient als Quelle, die andere als Senke. Diese sind über den Gluino-Propagator verbunden, welcher als

$$C^{\alpha\beta}(\Delta t) = -\frac{1}{4} \sum_{\mathbf{n}} \sum_{ij,kl} \left\langle \sigma_{ij}^{\alpha\alpha'} \text{Sp} [U_{ij}(n) \sigma^a] Q_{na\alpha',n'b\beta'}^{-1} \text{Sp} [U_{kl}(n') \sigma^b] \sigma_{kl}^{\beta'\beta} \right\rangle \quad (5.42)$$

dargestellt werden kann. Eine Illustration befindet sich in Abbildung (12). Dort wurde der Einfachheit halber der Korrelator mit Hilfe der einfachen Plakette dargestellt, in (5.42) wird aber die Clover-Plakette $U_{ij}(n)$ verwendet. Für die Berechnung wird eine Quelle n' auf einer beliebigen Zeitscheibe n'_0 gewählt. Dort wird dann die Vektorquelle $[U_{kl}(n') \sigma^b]$ konstruiert, welche diese Zeitscheibe vollständig abdeckt. Hier wird dann die Fermion-Matrix Q invertiert. Durch Kontraktion und Multiplikation der verbleibenden Terme in (5.42) erhält man den vollständigen Korrelator.

5.8 Das statische Potential und die physikalische Skala

Um die in Gittergrößen erhaltenen Massen in physikalische Einheiten umzurechnen, verwendet man in der QCD die Sommer-Skala. Diese ist über die Kraft $F(r)$ zwischen zwei statischen Quarks im Abstand r definiert:

$$r^2 F(r) \big|_{r=R(c)} = c \quad (5.43)$$

Dabei gilt:

$$R(1.65) \equiv r_0 \simeq 0.5 \text{ fm} \quad (5.44)$$

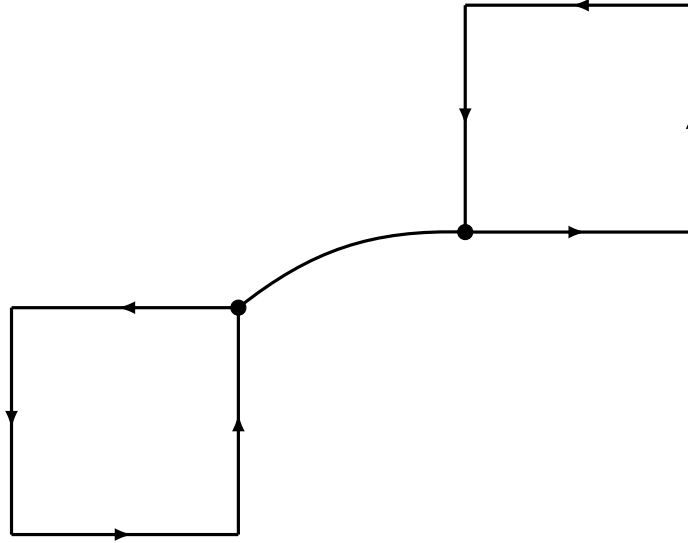


Abbildung 12: Der Gluino-Glueball-Korrelator

In Analogie zur QCD wird erwartet, dass die supersymmetrische Theorie confinement zwischen Farbsingulets realisiert. Dieses kann mit Hilfe des statischen Potentials $V(r)$ untersucht werden. Parametrisiert werden kann das Potential durch

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r \quad . \quad (5.45)$$

Dabei ist A eine Konstante, der zweite Term ist der Coulomb-Anteil mit der Stärke B . Der letzte Term ist für das lineare Anwachsen des Potentials beim Entfernen der Quarks voneinander verantwortlich. Das σ wird auch als string tension bezeichnet. Es existieren mehrere Methoden $V(r)$ zu bestimmen. Hier wird kurz eine zwei-fit-Methode vorgestellt.

Wir haben in (3.22) gesehen, dass das Potential $V(r)$ mit dem Erwartungswert der Wilson-Schleifen berechnet werden kann. Vernachlässigt man die exponentiell unterdrückten Korrekturen, so kann die Fitfunktion

$$\langle \mathcal{W}_{\mathcal{L}} \rangle = C e^{-tV(r)} \quad (5.46)$$

verwendet werden. Hierbei wird das χ^2 minimiert, wobei üblicherweise nur in einer gegebenen Richtung nach dem lokalen Minimum gesucht wird, so dass hier die Wahl der Fitparameter einen entscheidenden Einfluss hat. Das dadurch erhaltene Potential $V(r)$ wird in einem zweiten Fit an die standard Potentialform

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r \quad (5.47)$$

angepasst. Mit den Parametern B und σ kann der Sommer-Parameter r_0/a zu

$$r_0 = \sqrt{\frac{1.65 - B}{\sigma}} \quad (5.48)$$

bestimmt werden. Eine ausführliche Studie zu dem Thema findet man in [Haa12].

6 Massenbestimmung des pseudoskalaren Glueballs

Numerische Simulationen der Gitter-QCD erlauben die Bestimmung von Glueballmassen. Diese sind bestimmt durch das Langzeitverhalten der verbundenen Korrelationsfunktion

$$G(t) = \langle \mathcal{O}(t) \cdot \mathcal{O}(0) \rangle - \langle \mathcal{O}(t) \rangle \langle \mathcal{O}(0) \rangle \approx e^{-mt}, \quad (6.1)$$

wobei $\mathcal{O}(t)$ ein eichinvarianter Operator ist.

In diesem Kapitel wird zunächst der Operator besprochen, mit dem der 0^{-+} -Glueballgehalt extrahiert werden kann. Im Anschluss daran werden Möglichkeiten besprochen die Richtigkeit der Ergebnisse zu untersuchen.

6.1 Glueball-Operatoren

Im Kontinuum ist ein physikalischer Zustand aus den Eigenzuständen $|\psi_n\rangle$ des Hamilton-Operators entwickelbar:

$$|\psi(\mathbf{x}, t)\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \quad . \quad (6.2)$$

Dabei sind $n = (J, m; \alpha)$ die Quantenzahlen der Spin-Darstellung, α ist ein zusätzlicher Index für beispielsweise angeregte Zustände mit gleichem Spin. Somit gehört jeder Eigenzustand zu einem Multiplett mit bestimmtem Spin J . Auf dem Gitter lässt sich ein physikalischer Zustand durch die Anwendung eines vollständigen Satzes geeigneter Operatoren auf das Vakuum erzeugen:

$$|\psi(\mathbf{n}, t)\rangle = \sum_i c_i \mathcal{O}_i(\mathbf{n}, t) |0\rangle \quad (6.3)$$

Man verwendet

$$\mathcal{O}_i(\mathbf{n}, t) = \text{Sp } U(\mathcal{C}_i) - \langle \text{Sp } U(\mathcal{C}_i) \rangle \quad (6.4)$$

um die Bedingung $\langle 0 | \mathcal{O}_i | 0 \rangle = 0$ zu erfüllen, wobei $U(\mathcal{C}_i)$ im einfachsten Fall der Plakette $U_{\mu\nu}$ entspricht. Außerdem soll sich der Gitteroperator gemäß der irreduziblen Darstellung $\mathcal{R} = A_1, A_2, E, T_1, T_2$ der kubischen Gruppe transformieren.

Die kubische Gruppe \mathbf{O} ist eine endliche, nicht-abelsche Gruppe, welche 24 Elemente besitzt. Ihre Elemente lassen sich mit den Rotationen eines Würfels, welche seine Lage invariant lassen, identifizieren. Diese Rotationsachsen werden als Symmetrieachsen bezeichnet, wovon ein dreidimensionaler Würfel 13 Stück besitzt. Es existieren fünf irreduzible Darstellungen der kubischen Gruppe \mathbf{O} , deren Dimensionen d_μ sich mit Hilfe der des Vollständigkeitstheorems und der Bedingung [Joh02]

$$\sum_{\mu=1}^5 d_\mu^2 = 24 \quad (6.5)$$

bestimmen lassen zu:

$$(d_1, \dots, d_5) = (1, 1, 2, 3, 3) \quad (6.6)$$

Die beiden eindimensionalen Darstellungen werden mit A_1 und A_2 bezeichnet, die Zweidimensionale mit E . T_1 und T_2 sind die dreidimensionalen Darstellungen. Da die kubische Gruppe eine Untergruppe der $SO(3)$ ist, lässt sich die Spin-Darstellung D_J , wobei J den ganzzahligen Spin bezeichnet, durch die Elemente der kubischen Gruppe \mathbf{O} darstellen. Dies führt zu der eingeschränkten Darstellung $D_J^{\mathbf{O}}$, welche in irreduziblen Darstellungen von \mathbf{O} zerlegt werden kann. In [AC65] findet man die eingeschränkten Darstellungen bis $J = 12$.

Für $J = 4$ findet man:

$$\begin{aligned} D_0^{\mathbf{O}} &= A_1 \\ D_1^{\mathbf{O}} &= T_1 \\ D_2^{\mathbf{O}} &= E \oplus T_2 \\ D_3^{\mathbf{O}} &= A_2 \oplus T_1 \oplus T_2 \\ D_4^{\mathbf{O}} &= A_1 \oplus E \oplus T_1 \oplus T_2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Wir betrachten nun einen Gitteroperator, der sich unter der irreduziblen Darstellung $\mathcal{R} = A_1, A_2, E, T_1, T_2$ der kubischen Gruppe transformiert. Wendet man diesen Operator auf das Vakuum an, so wird ein Zustand erzeugt, der eine Superposition verschiedener Eigenzustände des Hamilton-Operators darstellt:

$$\psi_{\mathcal{R}} = \sum_n c_n^{\mathcal{R}} |\psi_n\rangle \quad (6.8)$$

Demnach enthält $|\psi_{\mathcal{R}}\rangle$ verschiedene Spinanteile, welche nur dann auftauchen, wenn \mathcal{R} in $D_J^{\mathbf{O}}$ enthalten ist. Die Korrelationsfunktion wird von der niedrigsten Masse dominiert, welche für gewöhnlich dem niedrigsten Spin entspricht. Somit betrachten wir hier die triviale Darstellung A_1 , welche den Spin $J = 0, 4, 6, \dots$ enthält. Eine Zusammenstellung aller irreduziblen Darstellungen der kubischen Gruppe mit Wilson-Loops der Länge acht findet man in [Bil83].

Außer den Transformationen der kubischen Gruppe besitzt der Glueball zwei weitere diskrete Symmetrien. Das Verhalten bei der Raumspiegelung wird durch die Parität \mathcal{P} beschrieben, welche die Werte $\mathcal{P} = \pm 1$ annehmen kann. Die Ladungskonjugation kann ebenfalls die Eigenwerte $\mathcal{C} = \pm 1$ annehmen. Hierdurch wird das Verhalten der Wilson-Loops bei der komplexen Konjugation beschrieben.

Die relevanten Gluebälle sind

$$J^{\mathcal{PC}} = 0^{++} \quad \text{und} \quad J^{\mathcal{PC}} = 0^{-+} \quad (6.9)$$

Der skalare Glueball $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ ist der leichteste Zustand. Im einfachsten Fall besteht dieser Operator aus einer symmetrischen Kombination von raumartigen Plaketten, welche an einem gemeinsamen Gitterpunkt grenzen. Bildlich ausgedrückt werden von einem Gitterpunkt aus gesehen, die drei Plaketten in alle drei Raumrichtungen betrachtet. Dieser Operator mit dem A_1^{++} Inhalt lässt sich darstellen als

$$\mathcal{O}_{0^{++}}(U, n) = \text{Sp}[U_{12}(n) + U_{23}(n) + U_{31}(n)]. \quad (6.10)$$

Der pseudoskalare Glueball $F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ wird aus Wilson-Loops konstruiert, welche durch Drehungen nicht in ihr Spiegelbild überführt werden können. Der kleinste Loop besteht aus acht Links und entspricht dem Operator der A_1^{-+} -Darstellung:

$$\mathcal{O}_{0^{-+}}(U, n) = \sum_{\mathcal{R}} [\text{Sp } U(\mathcal{C}) - \text{Sp } U(\mathcal{PC})] \quad (6.11)$$

Summiert wird über alle Rotationen der kubischen Gruppe, \mathcal{PC} ist die punktgespiegelte Version von \mathcal{C} . Eine grafische Darstellung findet man in Abbildung 13

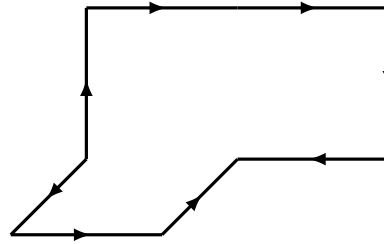


Abbildung 13: Wilson-Loop-Operator für den pseudoskalaren Glueball

6.2 Erste Ergebnisse für den pseudoskalaren Glueball

Aufgrund der Paritätssymmetrie sollte der pseudoskalare Glueball keinen Vakuumerwartungswert besitzen.

Daraus ergibt sich ein erster Test für die Simulation. In Abbildung (14) ist der Vakuumerwartungswert für das Gitter mit $L = 12$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$ bei 18000 Konfigurationen gezeigt.

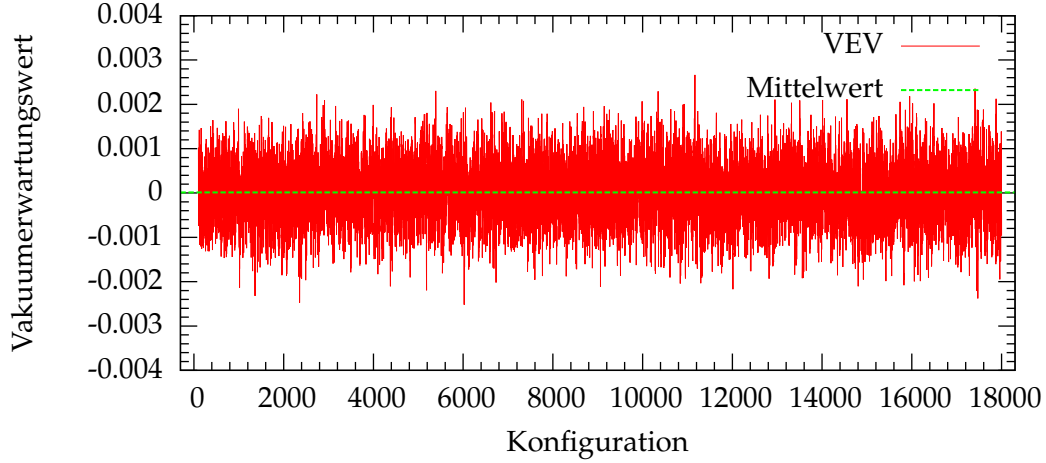


Abbildung 14: Vakuumerwartungswert für den pseudoskalaren Glueball auf dem Gitter mit $L = 12$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$

Für den Mittelwert ergibt sich

$$\overline{\text{VEV}} = (1.3 \pm 0.5) \cdot 10^{-5} \quad .$$

Somit kann man davon ausgehen, dass der Vakuumerwartungswert im Mittel verschwindet.

Um die Massen zu bestimmen, bieten sich zwei Methoden an. Zum einen kann die Methode des t-Vektors (5.23) verwendet werden. Die andere Möglichkeit ist ein Plot der Eigenwerte. Die Eigenwerte verlaufen exponentiell, wie Abbildung (15) zeigt. Dort sind als Beispiel die Eigenwerte des 0^{-+} -Glueballs des Gitters mit $L = 12$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$ bei einer Anzahl von $N = 18000$ Konfigurationen dargestellt. Auf der rechten Seite wurde die y-Achse logarithmisch dargestellt. Hier lässt sich dann zum Beispiel für eine Fitlänge von $\Delta t = 3$ jeweils eine Gerade anpassen. In der Tabelle (3) gibt t immer den Startpunkt des Fits an.

In Abbildung (16) erkennt man, wie schwierig die Massenbestimmung ist. Auf der linken Seite sind die effektiven Massen abgebildet. Hier lässt sich ein Plateau von

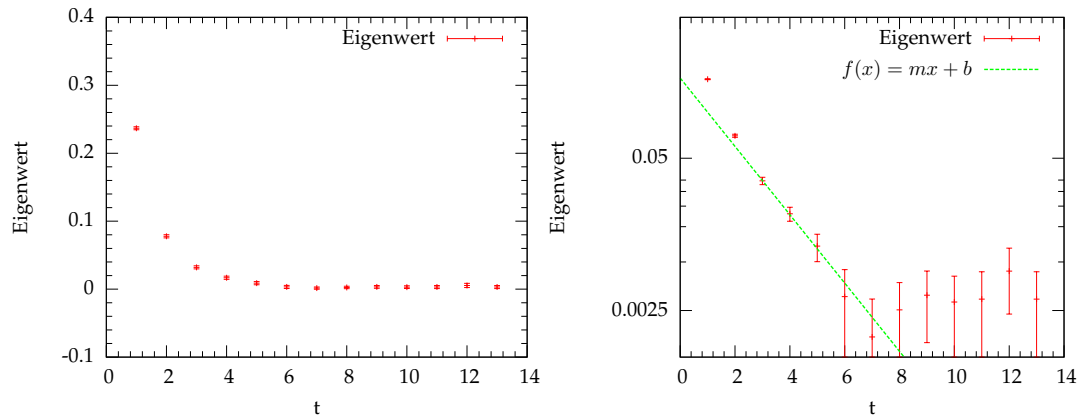


Abbildung 15: Eigenwerte für den 0^{++} -Glueball $L = 12$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$, links: y-Achse linear, rechts: y-Achse logarithmisch

t	$am_{0^{++}}$	Fehler	χ^2/n_{df}
0	1.4087	0.0102	69.4969
1	1.0713	0.0278	5.3251
2	0.8272	0.0581	1.3295
3	0.6454	0.1033	0.0011
4	0.7258	0.2077	0.1766
5	0.9341	0.4324	0.0126
6	0.1914	0.5754	0.3995

Tabelle 3: 0^{++} -Glueball für $L = 12$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$

$t = 3$ bis $t = 4$ erahnen. Für größere t geht das Signal schon im Rauschen unter. Auf der rechten Seite sind die Ergebnisse für eine Fitlänge von drei dargestellt. Bei beiden Plots stimmt der Wert in Punkt $t = 3$ gut überein:

$$am_{fit} = 0.6454(1033) \quad am_{eff} = 0.6489(1078) \quad .$$

Ein weiterer Test ergibt sich aus der Wahl des Operators (6.11). Addiert man die beiden Spuren anstatt sie zu subtrahieren, so sollte sich der skalare 0^{++} -Glueball ergeben. An dieser Stelle kann das Eigenwertspektrum verglichen werden. Ein logarithmischer Plot der Eigenwerte für den 0^{++} -Glueball sowie von dem 0^{++} -Glueball mit den addierten Spuren befindet sich in (17). Es zeigt sich, dass der Verlauf der Eigenwerte von $t = 1$ bis $t = 6$ gleich ist. Die Eigenwerte des Glueballs mit den addierten Spuren (grün) liegen etwas höher, aber bei dem direkten Fit ist nur die Steigung entscheidend, so dass sich hier die gleichen Massen ergeben.

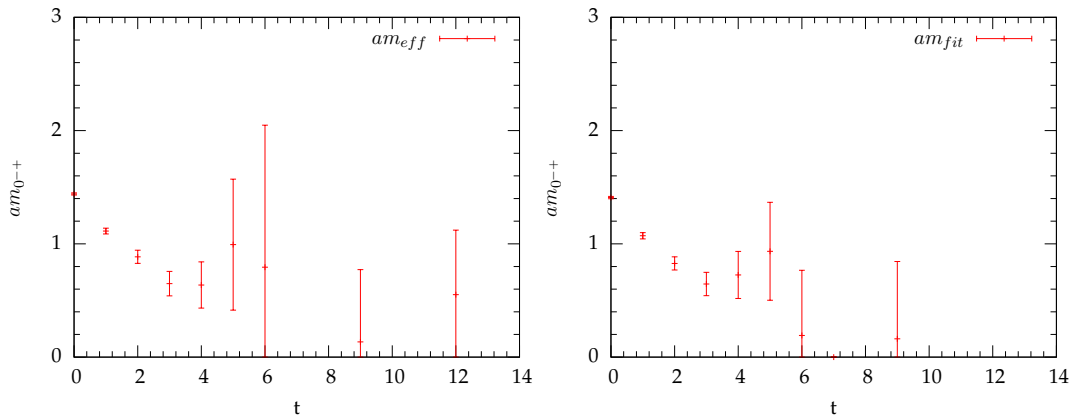


Abbildung 16: Die effektive Masse und die Masse aus dem Fit mit $\Delta t = 3$ für den 0^{-+} -Glueball $L = 12$, $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$

Die verschiedenen Gittergrößen sowie die resultierenden Massen sind in Tabelle (4) dargestellt. Hierbei wurde konstant $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$ verwendet.

Gitter	$am_{0^{++}}$	$am_{0^{-+}}$	$am_{a-\eta'}$	$am_{0^{++}}\text{-Test}$	$\frac{am_{0^{-+}}}{am_{0^{++}}}$
$8^3 \times 16$	0.366(52)	0.568(71)	0.146(37)	0.388(68)	1.55(42)
$12^3 \times 24$	0.298(94)	0.645(103)	0.1846(42)	0.310(44)	2.16(103)
$16^3 \times 36$	0.460(32)	0.778(152)	0.2862(98)	0.452(38)	1.69(45)
$24^3 \times 48$	0.596(62)	0.620(157)	0.348(12)	0.526(49)	1.040(37)

Tabelle 4: Glueball- und Etamassen für verschiedene Gitterkonfigurationen

Leider ist das Signal bei beiden Gluebällen stark verrauscht, sodass eindeutige Massenbestimmungen sehr schwierig sind. Oft wurde der direkte Fit verwendet, da ein Plateau in den effektiven Massen nicht zu finden war. Die damit bestimmten Massen stimmen im Rahmen der Fehler bei den Gittern mit $L = 8, 12, 16$ für den skalaren Glueball mit beiden Operatoren überein.

In [Tep98] wurde das Verhältnis der Glueballmassen mit $0^{-+}/0^{++} = 1.8(2)$ angegeben. Im Rahmen der Fehler ist das bis auf dem Fall für $L = 24$ erfüllt.

In Tabelle (4) sind zusätzlich die Massen des $a - \eta'$ eingetragen. Dieses Teilchen sollte zwar in dem von G. R. Farrar, G. Gabadadze und M. Schwetz [GS99] vorgeschlagenen Teilchenspektrum eine vom 0^{-+} -Glueball verschiedene Masse besitzen, aber auf dem Gitter sollten diese Massen in etwa gleich sein. Das liegt daran, dass die Operatoren nicht zwischen den verschiedenen Teilchen unterscheiden, sondern nur in den Quantenzahlen. Diese sind aber für den 0^{-+} -Glueball und den $a - \eta'$ gleich. Allerdings sind hier Mischungen der Operatoren für den 0^{-+} -Glueball

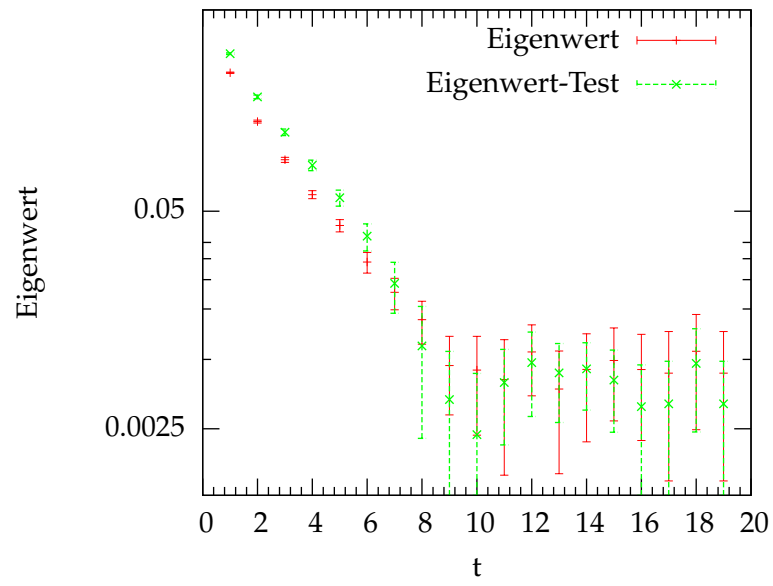


Abbildung 17: Die Eigenwerte der 0^{++} -Gluebälle, gemessen mit den verschiedenen Operatoren

und dem $a - \eta'$ möglich. Das Gleiche gilt für den 0^{++} -Glueball und dem $a - f_0$. Wie man erkennt stimmen die Massen nicht überein.

7 Volumen–Effekte

Da die Störungstheorie in Theorien mit starken Kopplungen niemals konvergiert ist es unumgänglich Computersimulationen durchzuführen. Dabei zeigte sich, dass die berechneten Massen von der Größe der verwendeten Gittervolumen abhängen. Diese Abhängigkeit wird als Volumen–Effekt bezeichnet.

Grundsätzlich werden massive Quantenfeldtheorien in endlichen Boxen mit periodischen Randbedingungen und Kantenlänge L betrachtet. Die Zeitausdehnung wird für gewöhnlich doppelt so groß gewählt, um die Auswirkungen auf die Zeit vernachlässigen zu können. Aufgrund des endlichen Volumens ist das Spektrum des Hamiltonoperators (Transfermatrix in Gittertheorien) diskret, die zugehörigen Energien sind abhängig von L . Bei ausreichend großen Volumina erwartet man unterschiedliche Eigenzustände mit verschwindendem Impuls. Diese können als stabile, ruhende Teilchen interpretiert werden. Die zugehörigen Energien $M_i(L)$ der einzelnen Teilchen liegen in der Nähe der Ruhemassen m_i , wie sie bei $L = \infty$ definiert sind.

Wir betrachten hier, wie der Übergang $M_i(L) \rightarrow m_i$ für $L \rightarrow \infty$ vonstatten geht, wobei die Parameter β und κ festgehalten werden. Hier liegt der Unterschied zum finite volume scaling, wo L vergrößert wird, aber die übrigen Parameter so getunt werden, dass L/ξ konstant bleibt. ξ bezeichnet dabei die Korrelationslänge.

7.1 Physikalischer Ursprung der Massenverschiebung

Betrachtet man ein punktförmiges, stabiles Teilchen innerhalb des Vakuums, so zeigt sich, dass das Vakuum polarisiert ist. Das Teilchen ist also von einer Wolke aus virtuellen Teilchen umgeben. Im einfachsten Fall ist die Ausdehnung dieser Wolke mit der Compton–Wellenlänge λ_0 des leichtesten Teilchens der Theorie vergleichbar. Befindet sich diese Wolke in einem endlichen Raum–Zeit–Volumen, so ändert sich die Energie des Teilchens sobald das Volumen so klein wird, dass es die Polarisationswolke zusammenstaucht. Das ist der Fall, wenn das gewählte Gitter der Simulation eine Kantenlänge besitzt, die etwa so groß ist wie die Compton–Wellenlänge, also wenn $L \simeq \lambda_0$ gilt.

Eine scheinbar zusätzliche Möglichkeit ergibt sich, wenn man gebundene Zustände aus punktförmigen Teilchen betrachtet, wobei die Bindungsenergie klein ist im Vergleich zur Masse. Hier fällt die Wellenfunktion des Zustandes mit der charakteristischen Länge λ (kann deutlich größer als λ_0 sein) exponentiell ab. Daher ist zu erwarten, dass der Volumen–Effekt der Bindungsenergie bis $L \simeq \lambda$ groß ist und dann exponentiell abfällt. Aber in [Tha85] wurde gezeigt, dass die Situation der gebundenen Zustände und der gestauchten Polarisationswolke sehr ähnlich sind, da beide durch Teilchenaustausch mit der Umgebung herrühren. Der Hauptunterschied liegt in der kinematischen Natur.

In Hadronen liegen Quarks in gebundenen Zuständen vor. Hier ist aber aufgrund des confinements die Situation anders. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Quark den gebundenen Zustand verlässt, geht gegen null. Somit sollte ein einzelnes Quark in einem großen Gittervolumen nicht anzutreffen sein. Der Volumen-Effekt eines Hadrons kann also nicht vom Austausch eines Quarks herrühren, sondern wird durch eine gestauchte, virtuelle Pionen-Wolke verursacht. Das impliziert, dass dieses Stauchen der virtuellen Teilchen-Wolke in allen Prozessen die Hauptrolle spielt.

Für die Gleichung (7.1) im nächsten Kapitel wird angenommen, dass sich die Dynamik der Teilchen durch Lagrangedichten beschreiben lässt, in welchen alle Felder massiv und die Kopplungen klein sind. Die Gleichung ist nur von der physikalischen Masse und der Streuamplitude der Teilchen abhängig. Die Massenverschiebung sollte kinematischer Natur sein, somit sollte sie in allen Quantenfeldtheorien Gültigkeit besitzen.

7.2 Die Massenverschiebung

Lüscher hat in [Lü86] gezeigt, dass sich für die Massenverschiebung bei realistischen Gittereichtheorien

$$\begin{aligned} \Delta m &= m(L) - m \\ &= -\frac{3}{16\pi m^2 L} \left\{ \lambda^2 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}mL} + \frac{m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\sqrt{m^2+y^2}L} F(iy) + \mathcal{O}(e^{-\bar{m}L}) \right\} . \end{aligned} \quad (7.1)$$

ergibt, wobei über alle Ordnungen der Störungstheorie summiert wurde. Hierbei bezeichnet $F(iy)$ die Streuungsamplitude in Vorwärtsrichtung $F(\nu = s - u) = A(s, t = 0, u)$, analytisch fortgesetzt zum imaginären Argument, s, t, u sind die Mandelstamvariablen. Weiterhin kann man zeigen, dass $\bar{m} > \sqrt{3/2}$ gilt.

Der Beweis ist sehr technisch, daher beschränken wir uns hier darauf, uns diese Gleichung für den Spezialfall $\lambda = 0$ plausibel zu machen, wie es in [Lan10] zu finden ist.

Da sich der Impuls eines einzelnen Hadrons beim Absorbieren oder Emittieren eines Pions nicht verändert, steht die Wechselwirkung im Zusammenhang mit der Streuamplitude. Ist diese Näherungsweise eine Konstante α , dann ist die Veränderung der Masse proportional zum divergenten Schleifenbeitrag

$$m^2 = m_0^2 + \alpha \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \hat{G}(p) = m_0^2 + \alpha G(0) \quad , \quad (7.2)$$

wobei $\hat{G}(p)$ der Propagator im Impulsraum ist. Im zweiten Schritt wurde explizit ausgeschrieben, dass das Integral den realen Propagator im Ursprung des Raumes

darstellt. Der divergente Anteil des Schleifenbeitrages wurde mit Hilfe einer Renormierung in die Definition der nackten Masse untergebracht.

Wir betrachten eine endliche, räumliche Box mit periodischen Randbedingungen. Diese soll eine große Zeitausdehnung besitzen, um die Effekte einer endlichen Zeitausdehnung vernachlässigen zu können. Dann müssen wir den Propagator im Ortsraum durch die Summe

$$G(x) \Rightarrow \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} G(x + Ls) \quad (7.3)$$

ersetzen. Dabei wird die Verschiebung zwischen dem originalen Gitter und den Spiegelbildern mit $s \in \mathbb{Z}^3$ bezeichnet. Dann ist die Massenverschiebung zwischen der endlichen und der unendlichen Box bedingt durch den Wechselwirkungsterm, also durch die Beiträge der Propagatoren der Spiegelbilder:

$$m^2(L) - m^2 = \alpha \sum_{s \neq 0} G(Ls) \quad (7.4)$$

Um diese Beiträge abschätzen zu können benötigen wir das Verhalten des freien Bosonenpropagators auf großen Distanzen. Eine Möglichkeit die Fouriertransformierte darzustellen ist

$$G(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} \sim \frac{m^2 \sqrt{8\pi}}{(4\pi)^4} \frac{e^{-m|x|}}{(m|x|)^{3/2}} \quad (7.5)$$

Wählt man die x -Achse in Zeitrichtung und setzt $y = |p|$, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iEx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iEx} \int_0^{\infty} \frac{dy}{2\pi^2} \frac{y}{E^2 + y^2 + m^2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Mit Hilfe des Residuensatzes kann man das Integral über E berechnen. Dazu nehmen wir den Pol $E = i\sqrt{y^2 + m^2}$ in der positiven Halbebene, für das Residuum erhält man

$$\text{Res} = \frac{e^{-\sqrt{y^2 + m^2}}}{2i\sqrt{y^2 + m^2}} \quad (7.7)$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^\infty \frac{dy}{2\pi^2} \frac{y^2}{2\pi} 2\pi i \text{Res} \\ &= \int_0^\infty \frac{dy}{4\pi^2} \frac{y^2}{\sqrt{y^2+m^2}} e^{-\sqrt{y^2+m^2}} . \end{aligned} \quad (7.8)$$

Wir schreiben das noch etwas um und integrieren partiell

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p}{x} \frac{d}{dp} \left(e^{-\sqrt{p^2+m^2}x} \right) \\ &= -\frac{p}{4\pi^2 x} e^{-\sqrt{p^2+m^2}} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{dp}{4\pi^2 x} e^{-\sqrt{p^2+m^2}} , \end{aligned} \quad (7.9)$$

wobei der erste Term gegen null geht. Verdoppelt man das Integrationsintervall, um die Form von (7.1) zu reproduzieren und berücksichtigt in der Summe (7.4) nur den führenden Term, welcher Aufgrund der an den betrachteten Würfel angrenzenden Spiegelbildern sechs mal auftritt, so folgt:

$$m^2(L) - m^2 = \frac{6\alpha}{8\pi^2 L} \int_{-\infty}^\infty dp e^{\sqrt{p^2+m^2}L} . \quad (7.10)$$

Damit erhalten wir für die Massenverschiebung

$$m(L) - m \approx \frac{m^2(L) - m^2}{2m} = -\frac{3}{(4\pi)^2} \frac{(-2\alpha)}{mL} \int_{-\infty}^\infty dp e^{-\sqrt{p^2+m^2}L} . \quad (7.11)$$

Dies entspricht (7.1) für den Fall, dass die Streuamplitude durch eine Konstante $F \rightarrow -2\alpha$ ersetzt wird.

Im Allgemeinen gilt nach [Lü86]

$$\Delta m = -\frac{3}{16\pi m^2 L} \left\{ \lambda^2 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}mL} + \frac{m}{\pi} \int_{-\infty}^\infty dy e^{-\sqrt{m^2+y^2}L} F(iy) + \mathcal{O}(e^{-\overline{m}L}) \right\} . \quad (7.12)$$

In einer realistischen QCD findet man das Ergebnis wie oben, in einer reinen Eichtheorie findet man für den führenden Term

$$\Delta m = -\frac{3\lambda^2}{16\pi m^2 L} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}mL} \{1 + \mathcal{O}(L^{-1})\} , \quad (7.13)$$

wie Lüscher in [Lüs] gezeigt hat. Somit findet man in allen Fällen eine Massenverschiebung der Form

$$\Delta m = \mathcal{O}(e^{-mL}) \quad . \quad (7.14)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird die allgemeine Funktion

$$m(L) = \frac{a}{x} e^{-bx} + c \quad (7.15)$$

verwendet. Die Fitparameter a, b und c sollten dann eine Abschätzung für die zu verwendende Gittergröße erlauben, bei der die Volumen–Effekte vernachlässigbar sind.

7.3 Volumen–Effekte bei konstanten Simulationsparametern

Bei der Untersuchung des Volumen–Effektes bei konstanten Simulationsparametern wurden $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$ gewählt, da für diese Parameter Ergebnisse für das Gitter mit $L = 32$ vorlagen. Diese wurden von der DESY–Münster–Kollaboration auf JUGENE erzeugt und auf JUROPA ausgewertet.

Für die Umrechnung der Gittergrößen in physikalische Einheiten wurde der für das $32^3 \times 64$ Gitter mit $\beta = 1.75$ extrapolierte Wert $r_0/a = 8.70(14)$ verwendet. Mit dem Sommerskalen–Parameter $r_0 = 0.5\text{fm}$ der QCD, der zum Vergleich herangezogen wird, erhält man $a(\beta = 1.75) = 0.05747(92)\text{fm}$.

Um die erhaltenen Massen in physikalische Größen umzurechnen verwendet man die Umrechnungsfaktoren

$$1 = 0.2\text{GeVfm} \quad \text{und} \quad a^{-1} = 3.48(6)\text{GeV} \quad . \quad (7.16)$$

Die Massen der verschiedenen Teilchen auf den getesteten Gittern mit $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$ befinden sich in Tabelle (5).

Gitter	L in fm	am_π	$am_{a-\eta'}$	am_{a-f_0}	$am_{\tilde{g}g}$	$am_{0^{++}}$
$8^3 \times 16$	0.459(7)	0.1492(43)	0.146(37)	0.181(23)	0.972(79)	0.366(52)
$12^3 \times 24$	0.698(11)	0.1666(37)	0.1831(40)	0.177(15)	0.570(15)	0.298(94)
$16^3 \times 36$	0.919(14)	0.2223(16)	0.2862(98)	0.543(10)	0.433(5)	0.460(32)
$20^3 \times 40$	1.149(18)	0.2342(15)	0.329(12)	0.463(25)	0.424(6)	0.332(85)
$24^3 \times 48$	1.379(20)	0.2417(18)	0.382(14)	0.475(20)	0.406(7)	0.596(62)
$32^3 \times 64$	1.839(29)	0.2400(6)	0.348(12)	0.552(43)	0.392(5)	0.469(38)

Tabelle 5: Die Massen bei konstanten Simulationsparametern $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$ in Abhängigkeit der Gittergröße

Mit Hilfe von gnuplot wurde die Funktion (7.15) durch Minimierung der Abstandsquadrate gefittet.

Das Pion ist in dieser Theorie ein unphysikalisches Teilchen, aber da es einen guten Signal-zu-Rausch-Abstand besitzt, wurde es hier ebenfalls betrachtet. Außerdem spielt es in der Bildung des chiralen Limes eine große Rolle. Da die Exponentialfunktion des Volumen-Effektes nur eine Näherung ist, kann die Abweichung bei zu kleinen Gittern stark anwachsen. Daher wurden sowohl die Massen mit Einbeziehung des Gitters mit $L = 8$ gefittet (grün), als auch ohne (blau). Der Plot für das Pion befindet sich in Abbildung (18), die Plots für das $am_{a-\eta'}$, am_{a-f_0} , $am_{\tilde{g}g}$ und dem $am_{0^{++}}$ befinden sich in Abbildung (19) bis (22).

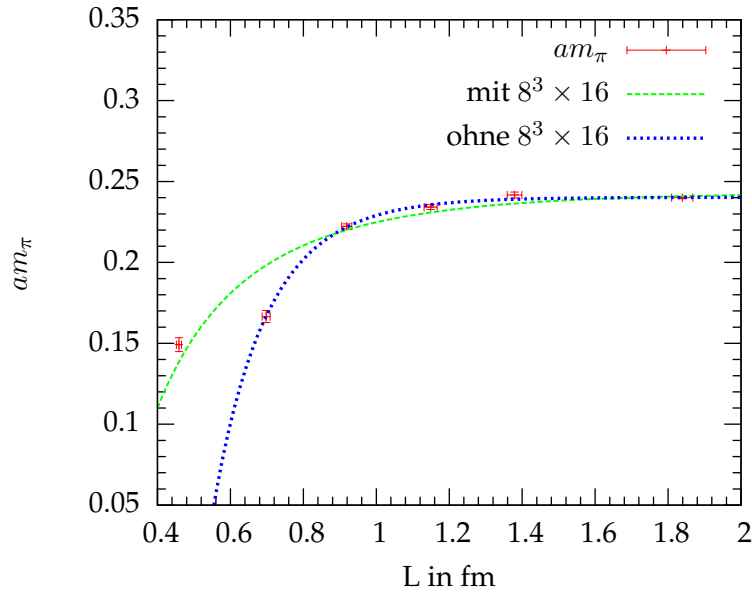


Abbildung 18: Pionmasse in Abhängigkeit der Gittergröße

Anhand der Fitparameter soll nun das Volumen abgeschätzt werden, bei dem die Volumen-Effekte vernachlässigbar klein sind. Dazu wird der exponentielle Anteil $\frac{a}{x} \exp\{-bx\}$ mit dem Fehler f_m der entsprechenden Teilchenmasse bei $L = 24$ verglichen. Dieser Wert wurde ausgewählt da hier die Funktion schon sehr flach ist, die Abweichung der Massen im Bezug auf das sehr große Gitter ist für das Pion und das Gluino-Gluon sehr klein.

Bezieht man die Massen für $L = 8$ mit ein, so ergeben sich die Fitparameter aus Tabelle (6), vernachlässigt man diese, so ergeben sich die Parameter in Tabelle (7). Hier sind die Gittergrößen, bei denen der Volumen-Effekt klein wird sowohl in fm als auch in der Anzahl der Gitterpunkte für das betrachtete Gitter mit $\beta = 1.75$ angegeben. Die Werte in Gittereinheiten sind jeweils auf ganze Zahlen aufgerundet.

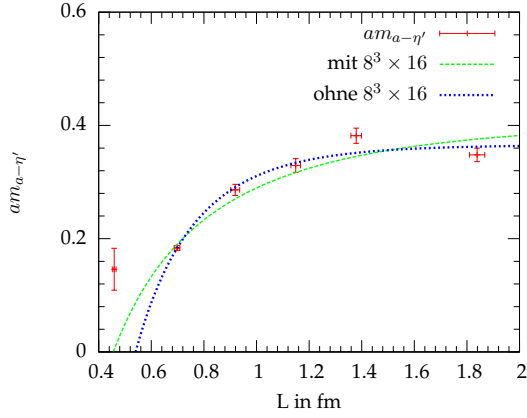


Abbildung 19: $am_{a-\eta'}$ in Abhängigkeit der Gittergröße

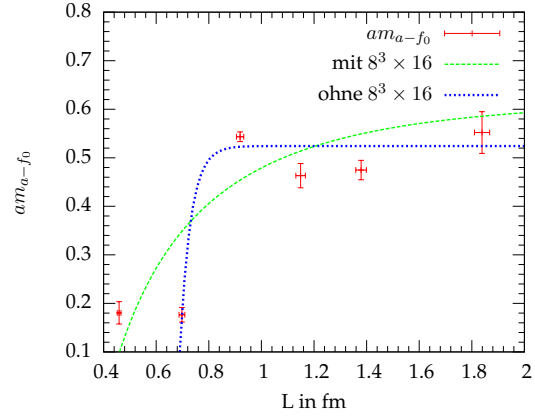


Abbildung 20: am_{a-f_0} in Abhängigkeit der Gittergröße

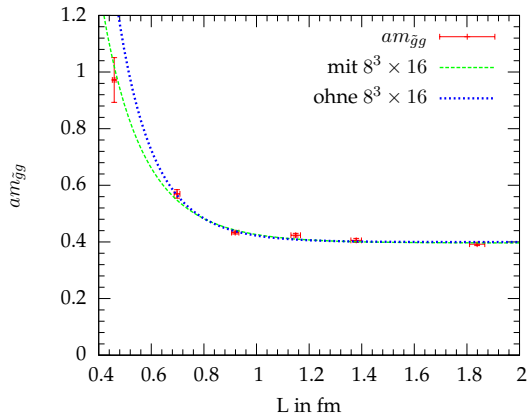


Abbildung 21: $am_{\tilde{g}g}$ in Abhängigkeit der Gittergröße

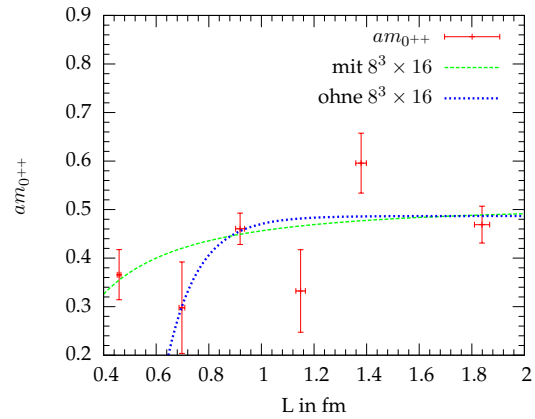


Abbildung 22: $am_{0^{++}}$ in Abhängigkeit der Gittergröße

	a	b	c	χ^2	f_m	L in fm	L in a
π	-0.109(67)	1.779(1097)	0.2423(58)	32.17	0.002	1.93(8)	34(2)
$a - \eta'$	-0.273(199)	0.826(1687)	0.41(611)	11.37	0.012	2.68(12)	46(3)
$a - f_0$	-0.373(597)	0.889(4976)	0.627(532)	87.14	0.020	2.33(58)	41(11)
$\tilde{g}g$	1.947(1107)	4.179(850)	0.396(8)	3.82	0.007	1.29(1)	23(1)
0^{++}	-0.093(198)	0.068(6594)	0.503(195)	2.77	0.062	0.85(42)	15(8)

Tabelle 6: Fitparameter mit Betrachtung der Werte bei $L = 8$ und benötigte Gittergrößen, um den Einfluss des Volumen-Effektes klein zu halten. Die Fitparameter treten in Einheiten von a in $a \cdot \text{fm}$, b in $1/\text{fm}$ und c in Gittereinheiten a auf

	a	b	c	χ^2	f_m	L in fm	L in a
π	-1.714(718)	5.028(560)	0.240(1)	1.61	0.002	1.310(1)	23(1)
$a - \eta'$	-0.898(852)	2.798(1495)	0.365(23)	3.41	0.012	1.42(4)	25(1)
$a - f_0$	-33125(1.8e ⁷)	20.25(8082)	0.525(44)	8.73	0.020	0.83(176)	15(32)
$\tilde{g}g$	4.823(6541)	5.349(1841)	0.400(9)	4.66	0.007	1.19(2)	21(1)
0^{++}	-15.5(1335)	6.855(1208)	0.487(58)	3.24	0.062	0.83(81)	15(15)

Tabelle 7: Fitparameter ohne Betrachtung der Werte bei $L = 8$ und benötigte Gittergrößen, um den Einfluss des Volumen-Effektes klein zu halten. Die Fitparameter treten in Einheiten von a in $a \cdot \text{fm}$, b in $1/\text{fm}$ und c in Gittereinheiten a auf

Es zeigen sich große Unterschiede zwischen der Betrachtung der Daten mit dem Gitter mit $L = 8$ und ohne. Vernachlässigt man diese, so sollte ein Gitter mit $L = 24$ eine gute Wahl sein.

Hier sei noch einmal erwähnt, dass dies nur eine grobe Abschätzung ist. Die Gleichung (7.12) von Lüscher gilt nur asymptotisch für sehr kleine Abweichungen in der Masse. Dies wurde in der QCD ausführlich untersucht. Eine Untersuchung des Pions, des Rho und des Nukleons findet man zum Beispiel in [Sch03].

An den Plots zeigt sich auch die Stabilität der Messungen. Das Pion und das Gluino-Gluon lassen sich sehr gut bestimmen. Beim $a - \eta'$ ist die richtige Tendenz erkennbar, aber beim $a - f_0$ und insbesondere beim Glueball treten starke Schwankungen auf.

Der Fitparameter c gibt die Masse im unendlich großen Volumen an. Diese wollen wir für die Werte, welche bei der Vernachlässigung des Gitters mit $L = 8$ erhalten wurden, in physikalische Massen umrechnen. Dazu verwenden wir die Umrechnungsfaktoren (7.16). Das Pion wurde dabei vernachlässigt, da es ein unphysikalisches Teilchen ist.

Es ergeben sich die folgenden Massen:

	$m_{a-\eta'}$	m_{a-f_0}	$m_{\tilde{g}g}$	$m_{0^{++}}$
c	0.365(23)	0.525(44)	0.400(9)	0.487(58)
m in GeV	1.270(80)	1.827(153)	1.3920(31)	1.695(202)

In [Mün85] wird der Volumen-Effekt in Gittereichtheorien studiert. Die Massenverschiebung wird darin ausgedrückt durch:

$$\frac{\Delta m}{m} \sim -C(mL)^{-p} e^{-\alpha mL} \quad \text{mit} \quad . \quad (7.17)$$

Die Werte für (7.17) in der reinen Eichtheorie sind gegeben durch:

$$C \approx 100 \quad , \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \alpha \leq 1 \quad , \quad p = 1 \quad . \quad (7.18)$$

Diese wurden mit Hilfe der Stark-Kopplungs-Entwicklung erhalten. Wir wollen an dieser Stelle Vergleichswerte bestimmen. Dazu betrachten wir das Gluino-Glue, da es die stabilsten Ergebnisse liefert. Hier werden für einen Fit mit (7.15) die Gittergrößen in Gittereinheiten verwendet. Man erhält dann:

a	b	c	χ^2
63.85(7989)	0.289(98)	0.3909(89)	4.436

Die Bestimmung der Parameter C und α liefert

$$C = a \cdot c = 24.96(3180) \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{b}{c} = 0.74(27) \quad . \quad (7.19)$$

Somit zeigt sich für α eine gute Übereinstimmung, C liegt in der richtigen Größenordnung. Dabei wurde das Vorzeichen von C vernachlässigt, da die Richtung der Massenverschiebung von den Wechselwirkungen des Teilchens abhängt. Zum Beispiel kann die Wechselwirkung zwischen nichtrelativistischen Gluebällen durch das attraktive Yukawa-Potential beschrieben werden. Das Gluino-Glue war bei unseren Untersuchungen das einzige Teilchen mit einem positiven Vorzeichen, hier müsste demnach ein repulsives Potential vorliegen.

7.4 Der chirale Limes

Bei der Bildung des chiralen Limes werden die Teilchenmassen als Funktion von $(r_0 m_\pi)^2$ geplottet. Dann wird eine lineare Regression durchgeführt, um die Teilchenmassen für eine verschwindende Pion-Masse zu erhalten. Aus Dimensionsgründen werden die Massen auf der y-Achse mit r_0 multipliziert. Für gewöhnlich wird r_0 für das betreffende Gitter mit den jeweiligen Simulationsparametern verwendet. Bei der Bestimmung von r_0 kann aber nur die Hälfte der Gitterpunkte in Raumrichtung in die Fits einbezogen werden, so dass hier eine Bestimmung auf kleinen Gittern schwierig und ungenau wird. Daher wird hier der Wert $r_0/a = 8.82(12)$ von dem Gitter mit $L = 32$ verwendet, um diese Fehlerquelle zu eliminieren.

Um die verschiedenen Pion-Massen zu erhalten wählt man verschiedene κ -Werte bei festgehaltenem β . Der kritische κ -Wert verschiebt sich mit der Gittergröße. Deshalb waren einige Tests notwendig, um die Parameter zu finden, bei denen keine Korrekturfaktoren benötigt werden.

An dieser Stelle sei nur ein Beispiel für das Gitter mit $L = 12$ gegeben. Die weiteren verwendeten Massen sind der Übersicht halber in den Anhang verschoben (Tabelle (13)). Mit N ist die Anzahl der erzeugten Konfigurationen bezeichnet. Leider ist bei der Statistik, die bei den größeren Gittern erreicht werden konnte, die Bestimmung des pseudoskalaren Glueball nicht möglich gewesen. Daher taucht er nur in diesem Beispiel auf.

κ	N	am_π	$am_{a-\eta'}$	am_{a-f_0}	$am_{\tilde{g}}$	am_{0++}	am_{0-+}
0.1485	10000	0.236(3)	0.272(4)	0.498(23)	0.614(9)	0.541(46)	1.10(12)
0.1487	10000	0.215(4)	0.230(6)	0.371(21)	0.575(11)	0.372(41)	0.72(15)
0.1489	10000	0.183(7)	0.207(8)	0.312(13)	0.574(13)	0.465(42)	0.71(16)

Tabelle 8: Die Massen für verschiedene κ -Werte auf dem Gitter mit $L = 12$

Die lineare Regression wurde mit Hilfe der kleinsten Abstandsquadrate durchgeführt (Eine kurze Einführung zur linearen Regression befindet sich im Anhang 9.1). Der Plot für das Gitter mit $L = 12$ befindet sich in Abbildung (23).

Hier sieht man erneut die Schwierigkeit den pseudoskalaren Glueball zu bestimmen. Die Fehler sind deutlich größer als bei den anderen Werten. Das Vorzeichen ist wie erwartet, aber der Betrag der Steigung ist sehr groß, sodass die Masse im Limes einen großen negativen Wert annimmt. Die Ergebnisse der Regression sind in Tabelle (9) dargestellt.

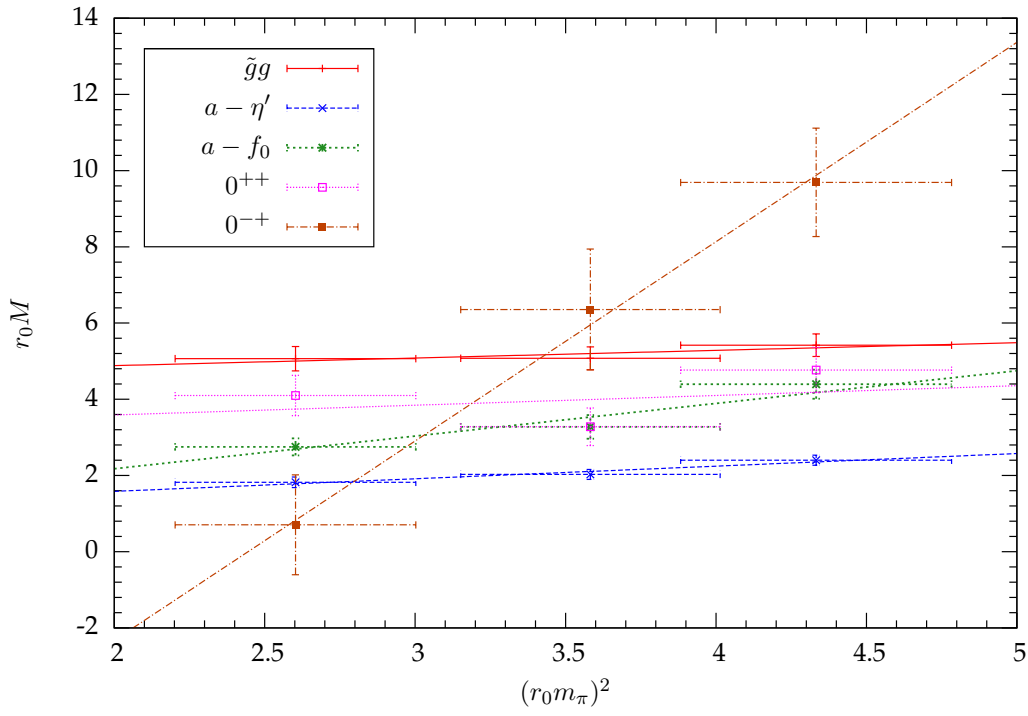


Abbildung 23: Die Massen für verschiedene κ -Werte und die linearen Regressionen bei $L = 12$ und $\beta = 1.75$

Teilchen	Achsenabschnitt	Steigung
$\tilde{g}g$	4.4814(909)	0.0225
$a - \eta'$	0.9214(3996)	0.3309
$a - f_0$	0.4640(7938)	0.8567
0^{++}	3.0753(1599)	0.2562
0^{-+}	-12.7876(39154)	5.2306

Tabelle 9: Die Parameter der linearen Regression bei $L = 12$

Mit der gleichen Methode wurde bei den anderen Gittergrößen die Massen bei verschwindender Pionmasse bestimmt. Die dafür verwendeten Daten befinden sich in Anhang (9.2) in Tabelle (13). Die Ergebnisse des chiralen Limes befinden sich in Tabelle (10).

Gitter	L in fm	$r_0 m_{a-\eta'}$	$r_0 m_{a-f_0}$	$r_0 m_{\tilde{g}g}$	$r_0 m_{0++}$
$8^3 \times 16$	0.459(7)	1.2806(2360)	0.896(258)	9.4275(12226)	7.524(2367)
$12^3 \times 24$	0.698(11)	0.9214(3996)	0.464(779)	4.4814(9094)	3.075(1600)
$16^3 \times 32$	0.919(14)	1.0518(6606)	4.201(1374)	3.6015(8979)	7.386(2232)
$20^3 \times 40$	1.149(18)	0.057(9701)	0.654(2656)	3.5607(9496)	3.199(3319)
$24^3 \times 48$	1.379(20)	1.7842(6548)	1.280(990)	2.3026(4198)	-1.708(1206)
$32^3 \times 64$	1.839(29)	1.8325(2894)	2.602(673)	2.6641(1327)	4.027(460)

Tabelle 10: Die Massen aus dem chiralen Limes in Abhängigkeit der Gittergröße

Bei den Plots der Massen im chiralen Limes (Abbildung 24 bis 27) zeigt sich, dass die Messung des Gluino–Glues am stabilsten ist. Hier lässt sich die Exponentialfunktion sehr gut anpassen. Bei dem $a - \eta'$ ist die Tendenz bei Vernachlässigung der Gitter $8^3 \times 16$ und $20^3 \times 40$ gut zu erkennen, bei den übrigen Teilchen ist das nicht mehr möglich. Hier variieren die Massen zu stark, bei dem Glueball tauchen sogar negative Massen auf. Dabei ist zu sagen, dass der rechenaufwändige all-to-all Propagator für das Gitter mit $L = 20$ und $\kappa = 0.1492$ nur mit einer Statistik von $N = 580$ in die Berechnung eingeflossen ist. Insgesamt wurden für dieses Gitter nicht ganz so gute Ergebnisse erzielt, das Pion mit $N = 2300$ lieferte auch nicht so gute Ergebnisse wie erwartet. Hier könnte eine Erhöhung der Statistik sowie die Verwendung anderer Polynome und Korrekturfaktoren die Ergebnisse verbessern.

Betrachtet man die Parameter für den Fit des Gluino–Glues, so zeigt sich, dass hier eine kleine Abweichung zwischen den Werten bei Einbeziehung der Daten für $L = 8$ und deren Vernachlässigung auftritt. Da die Fehler selbst für das Gluino–Glue den Wert übertreffen, wird an dieser Stelle auf die Abschätzung der benötigten Gittergröße für die übrigen Teilchen verzichtet. Diese befinden sich der Vollständigkeit halber in Tabelle (14) im Anhang.

a	b	c	χ^2	f_m	L in fm	L in a
15.084(9587)	3.434(1271)	2.625(1169)	0.55	0.4198	1.03(132)	19(25)
13.55(4242)	3.294(4334)	2.622(162)	0.83	0.4198	1.04(233)	19(43)

Tabelle 11: Fitparameter mit Betrachtung der Werte bei $L = 8$ (oben) und ohne (unten) sowie die benötigten Gittergrößen, um den Einfluss des Volumen-Effektes klein zu halten

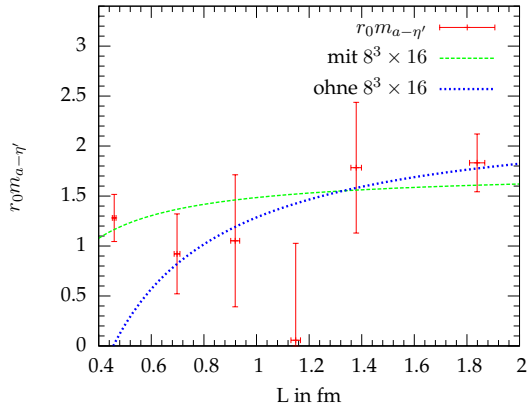


Abbildung 24: $r_0 m_{a-\eta'}$ im chiralen Limes in Abhängigkeit der Gittergröße

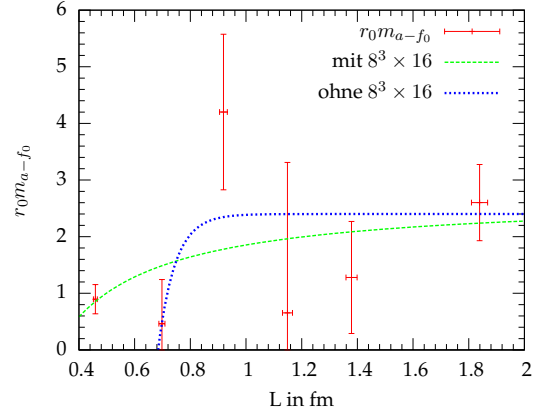


Abbildung 25: $r_0 m_{a-f_0}$ im chiralen Limes in Abhängigkeit der Gittergröße

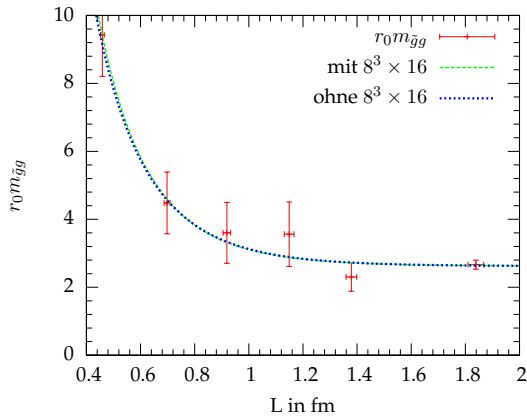


Abbildung 26: $r_0 m_{\tilde{g}g}$ im chiralen Limes in Abhängigkeit der Gittergröße

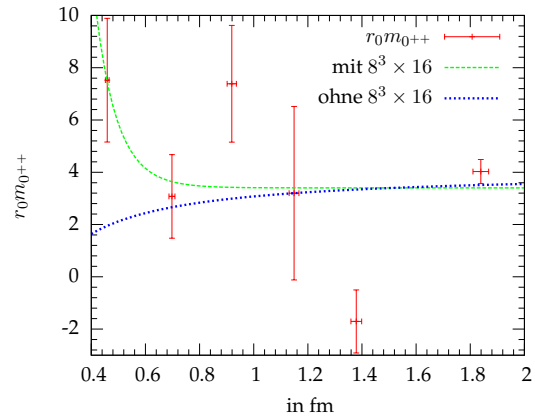


Abbildung 27: $r_0 m_{0^{++}}$ im chiralen Limes in Abhängigkeit der Gittergröße

7.5 Der Volumen-Effekt bei konstanter Pionmasse

Bei der Wahl der Parameter für den chiralen Limes mussten verschiedene κ -Werte bei den verschiedenen Gittergrößen verwendet werden, um die Notwendigkeit einer Verwendung von Korrekturfaktoren zu unterdrücken. Um dennoch die Extrapolation zum chiralen Limes bei konstanten κ -Werten durchführen zu können, werden die Massen bei konstanten $(r_0 m_\pi)^2$ verwendet.

Wie bei dem chiralen Limes werden dazu die Massen in Abhängigkeit von $(r_0 m_\pi)^2$ geplottet. Anstatt die Pionmasse gegen null zu extrapolieren werden nun bei einer Auswahl von konstanten $(r_0 m_\pi)^2$ die Massen bestimmt. Die Massen für den chiralen Limes zeigen starke Variationen, nur das Gluino-Gluon liefert gute Resultate. Daher wird hier nur dieses betrachtet.

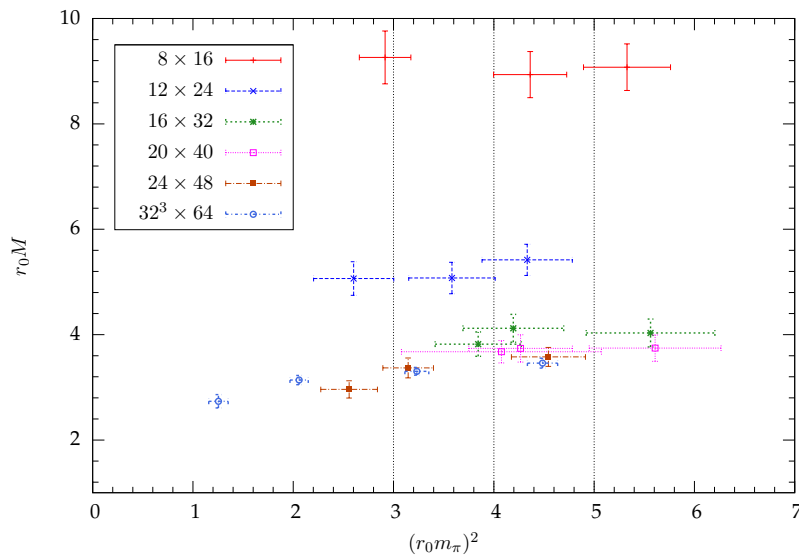


Abbildung 28: Die Gluino-Gluon-Massen für die verschiedenen κ -Werte auf den verschiedenen Gittergrößen

In Abbildung (28) sind alle Gluino-Gluon-Massen für die verschiedenen κ -Werte bei den verschiedenen Gittergrößen dargestellt. Hier zeigt sich eine Häufung der Massen zwischen $(r_0 m_\pi)^2 \sim 3$ und $(r_0 m_\pi)^2 \sim 5$. Für den chiralen Limes werden mindestens drei Werte bei jeder Gittergröße benötigt. Um nicht zu weit von der Häufung abzuweichen wurde $(r_0 m_\pi)^2 = 3, 4$ und 5 gewählt. Für die Fehler wurde nur der Fehler des r_0 verwendet, da die Fehler der Pionmassen variieren. Dieser Fehler fließt bei der Volumen-Effekt-Berechnung sowie der linearen Regression nicht ein, daher ist diese recht willkürliche Wahl gerechtfertigt. Man könnte ihn auch weglassen.

Für jeden Wert von $(r_0 m_\pi)^2$ wurden die Gluino–Glue–Massen mit Hilfe der Gera-
dengleichung (9.13) und den Parametern aus der linearen Regression (Tabelle (15)
in Anhang (9.2)) bestimmt, die Fehler mit (9.14). Die erhaltenen Massen befinden
sich für eine bessere Übersicht im Anhang, Tabelle (16). Im Anschluß wurde mit der
Fitfunktion (7.15) die Masse für ein unendlich ausgedehntes Gitter extrapoliert. Ein
Beispielplot für $(r_0 m_\pi)^2 = 4$ ist in Abbildung (29) dargestellt.
Die Bestimmung der Massen scheint bei dieser Vorgehensweise noch stabiler zu
sein, die Exponentialfunktion lässt sich sehr gut an die Datenpunkte anpassen.

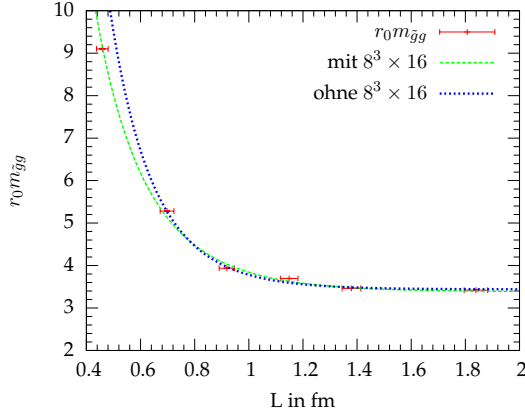


Abbildung 29: Die Gluino–Glue–Masse
für $(r_0 m_\pi)^2 = 4$

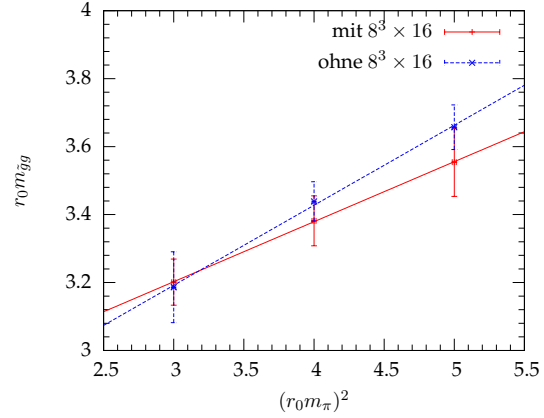


Abbildung 30: Die Gluino–Glue–Masse
auf ein unendlich großes Gitter extrapoliert und die lineare Regression zur ver-
schwindenden Pionmasse

Die Fitparameter befinden sich in Tabelle (12). Wir benötigen für die Extrapolation
zum chiralen Limes nur den Fitparameter c in Einheiten von $r_0 m_{\tilde{g}g}$ sowie $(r_0 m_\pi)^2$.
Diese Extrapolation ist in Abbildung (30) dargestellt.

$(r_0 m_\pi)^2$	a	b	c	χ^2
3.000(14)	10.618(2855)	2.9632(4885)	3.2011(679)	762.20
4.000(14)	11.680(1889)	3.2339(3309)	3.3816(736)	429.49
5.000(14)	12.812(3406)	3.5391(5850)	3.5543(1009)	424.03
3.000(14)	8.438(7383)	2.6667(11950)	3.1861(1043)	1100.96
4.000(14)	26.939(14150)	4.3667(7480)	3.4386(580)	256.18
5.000(14)	85.548(65070)	6.0284(10750)	3.6571(657)	126.46

Tabelle 12: Fitparameter mit Betrachtung der Werte bei $L = 8$ (oben) und ohne (unten) für
die Gluino–Glue–Massen mit $(r_0 m_\pi)^2 = 3, 4$ und 5

Im chiralen Limes ergeben sich dann die Massen:

	$r_0 m_{\tilde{g}g}$	m in GeV
mit $8^3 \times 16$	2.485(40)	0.9805(460)
ohne $8^3 \times 16$	2.672(009)	1.0543(361)

Aufgrund der sehr systematischen Vorgehensweise sollten diese Massen im supersymmetrischen Limes eine sehr hohe Plausibilität besitzen.

8 Diskussion und Ausblick

Gegenstand dieser Arbeit war die Untersuchung des Volumen-Effektes bei der $N=1$ supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie bei der Simulation auf dem Gitter. Erwartet wurde eine exponentielle Massenverschiebung zwischen der Verwendung von großen und kleinen Gittern. Groß meint in diesem Zusammenhang ein Gitter mit dem physikalischen Volumen im Bereich von $\approx (1.8\text{fm})^3$, welches bei der Verwendung einer Gitters mit $32^3 \times 64$ und $\beta = 1.75$ erreicht wird. Bei dieser Gittergröße wurde in vorherigen Simulationen der DESY-Münster-Kollaboration das Massenspektrum untersucht.

Die Untersuchung eines Gitters mit dieser Anzahl an Gitterpunkten ist sehr rechenaufwändig. Daher ist es sinnvoll kleinere Gitter zu verwenden um dadurch schneller eine größere Statistik erreichen zu können. Hierbei muss bei der Wahl der Gittergröße die Massenverschiebung berücksichtigt werden. Die Untersuchungen des Volumen-Effektes im Rahmen dieser Arbeit zeigten, dass bei den verwendeten Parametern $\beta = 1.75$ und $\kappa = 0.1490$ die Gittergröße $24^3 \times 48$ ausreicht um plausible Ergebnisse zu erhalten.

Erfreulich war die Stabilität mit der das Gluino-Glue gemessen werden konnte. Die übrigen Massen schwankten sehr stark, insbesondere im chiralen Limes. In der QCD ist die Methode des chiralen Limes mit Hilfe der chiralen Störungstheorie bewiesen worden. Ein Beweis in der Supersymmetrie fehlt noch vollständig. Die Erfahrungen vieler Anwendungen zeigen aber, dass sie Gültigkeit besitzen sollte. Bei den verschiedenen Gittergrößen mussten unterschiedliche κ -Werte verwendet werden, da sich das kritische κ verschiebt. Durch die Verwendung der Massen bei konstanter Pion-Masse wurden letztendlich die Massen für gleiche κ -Werte auf den verschiedenen Gittern extrapoliert. Somit sind hier alle Parameter konstant gehalten. Hierbei zeigte sich, dass die Massenbestimmung noch stabiler ist. Die Gluino-Glue-Massen folgten sehr exakt der Exponentialfunktion. Mit dieser konnten die Massen für unendlich ausgedehnte Gitter bestimmt werden, welche dann zu verschwindender Pion-Masse extrapoliert wurden. Die daraus erhaltene Masse für das Gluino-Glue im chiralen Limes sollte Aufgrund dieser systematischen Vorgehensweise sehr plausibel sein.

Dass die Massen für das $a - f_0$ und dem 0^{++} -Glueball bei allen Untersuchungen stark schwankten, muss andere Gründe als den reinen Volumen-Effekt haben. Hier sind noch zahlreiche Untersuchungen nötig, um die Ursache dieser Instabilität in den Massen auf dem Grund zu gehen.

Das supersymmetrische Massenmultiplett beinhaltet viele Teilchen die es zu studieren gibt. Eines davon ist der pseudoskalare Glueball, welcher hier ebenfalls untersucht wurde. Einige Tests zur Richtigkeit des Programms konnten erfolgreich durchgeführt werden. Man erwartet aber auch, dass der pseudoskalare Glueball etwa die gleiche Masse besitzt wie das $a - \eta'$. Das trifft aber nicht zu. Hier werden ebenfalls noch ausführliche Untersuchungen vorgenommen, unter anderem zu den Massenmischungen zwischen den adjungierten Mesonen und den Gluebällen.

9 Anhang

9.1 Die lineare Anpassung

Die Methode der kleinsten Quadrate beruht auf dem χ^2 -Test. Hier soll eine parametrisierte Funktion, in unserem Fall eine Gerade, an normalverteilte Messwerte angepasst werden. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen für die Messwerte und der parametrisierten Beschreibung:

- y_i : Die an den bekannten Punkten x_i (ohne Fehler) gemessenen Werte
- σ_i : Die Fehler der Messwerte y_i , auch Standardabweichung genannt
- η_i : Der Erwartungswert $\eta_i = f(x_i|\theta)$ von y_i . Die Abhängigkeit von x_i wird dabei durch die Funktion $f(x|\theta)$ beschrieben
- θ_j : Damit die Funktion $f(x_i|\theta) = \eta_i$ die Messwerte gut beschreibt, werden die Parameter θ_j optimiert

Die Methode der kleinsten Quadrate beruht darauf, die Schätzwerte $\hat{\theta}$ der Parameter $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ durch Minimierung der Summe der Quadrate der Abweichungen zu bestimmen:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \eta_i)^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f(x_i|\theta))^2}{\sigma_i^2} . \quad (9.1)$$

In der linearen Anpassung wird die Funktion

$$f(x|\theta) = \theta_1 f_1(x) + \dots + \theta_m f_m(x) \quad (9.2)$$

der Parameter $\theta = (\theta_1 \dots \theta_m)$ verwendet. Die Funktionen f_i sind beliebige Funktionen von x . Im Falle einer Geraden gilt hier

$$f_1(x) = 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = x . \quad (9.3)$$

Also ergibt sich die Anpassungsfunktion zu

$$f(x|\theta) = \theta_1 + x\theta_2 . \quad (9.4)$$

Gemessen werden die n Tripel (x_i, y_i, σ_i) . Sind die y_i unabhängig, so erhält man für (9.1):

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \theta_1 - x_i\theta_2)^2}{\sigma_i^2} . \quad (9.5)$$

Betrachtet man S als Funktion der Parameter θ_i , so erfordert die Minimierung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \theta_1} &= \sum \frac{-2}{\sigma_i^2} (y_i - \theta_1 - x_i\theta_2) \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \theta_2} &= \sum \frac{-2x_i}{\sigma_i^2} (y_i - \theta_1 - x_i\theta_2) \stackrel{!}{=} 0 . \end{aligned} \quad (9.6)$$

Hieraus ergibt sich ein lineares inhomogenes Gleichungssystem für die θ_i . Im Allgemeinen werden die Summen

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \\ S_x &= \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ S_y &= \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \\ S_{xx} &= \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \\ S_{xy} &= \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (9.7)$$

gebildet. Damit folgt aus (9.6) für die Schätzer $\hat{\theta}$ der Minimierung:

$$\begin{aligned} S_1 \cdot \hat{\theta}_1 + S_x \cdot \hat{\theta}_2 &= S_y \\ S_x \cdot \hat{\theta}_1 + S_{xx} \cdot \hat{\theta}_2 &= S_{xy} \end{aligned} \quad (9.8)$$

Mit der Determinante der Koeffizientenmatrix

$$D = S_1 S_{xx} - S_x^2 \quad (9.9)$$

ergeben sich die Parameter mit (9.8) zu:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \frac{1}{D} (S_{xx} S_y - S_x S_{xy}) \\ \hat{\theta}_2 &= \frac{1}{D} (S_1 S_{xy} - S_x S_y) \end{aligned} \quad (9.10)$$

Die Fehler der Parameter ergeben sich mit Hilfe der inversen Kovarianzmatrix V_{ij}^{-1} zu

$$V_{ij}^{-1} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\theta=\hat{\theta}} \quad (9.11)$$

Berechnet man die einzelnen Matrixelemente und invertiert die Matrix, so gelangt man zu der Kovarianzmatrix

$$V(\theta) = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} S_{xx} & -S_x \\ -S_x & S_1 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

Der y -Wert zu jedem x -Wert lässt sich durch die gewöhnliche Geradengleichung

$$y = \hat{\theta}_1 + x \hat{\theta}_2 \quad (9.13)$$

bestimmen. Der Fehler ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma^2(y) = \frac{1}{D} (S_{xx} + x^2 S_1 - 2x S_x) \quad (9.14)$$

Ausführlichere Informationen zu den Fehlern und der Güte des Fits findet man zum Beispiel in [Kol].

9.2 Daten für den chiralen Limes

Hier seien noch die Massen für die einzelnen Gittergrößen bei verschiedenen κ -Werten dargestellt. Um ein möglichst geradliniges Vorgehen zu gewährleisten, wurden bei den jeweiligen Gittergrößen und betrachteten Teilchen immer die gleichen Fitintervalle gewählt. Die Daten für die Gitter mit $L = 24$ und $\kappa = 0.1493$ sowie $L = 32$ wurde von der DESY-Münster-Kollaboration auf JUGENE erzeugt und auf JUROPA ausgewertet. Um alle Daten noch einmal in der Übersicht zu haben, ist das Gitter mit $L = 12$ auch noch einmal aufgeführt. Der pseudoskalare Glueball wurde hierbei nicht betrachtet.

	κ	N	$am_{a-\pi}$	$am_{a-\eta'}$	am_{a-f_0}	$am_{\tilde{g}g}$	$am_{0^{++}}$
$8^3 \times 16$	0.1475	22000	0.2617(17)	0.2933(18)	0.2615(61)	1.029(15)	0.635(31)
	0.1478	22000	0.2368(18)	0.2690(18)	0.2455(55)	1.013(15)	0.538(45)
	0.1482	22000	0.1936(19)	0.2262(25)	0.1904(40)	1.050(21)	0.410(34)
$12^3 \times 24$	0.1485	10000	0.2360(29)	0.2722(42)	0.498(23)	0.614(9)	0.541(46)
	0.1487	10000	0.2146(44)	0.2299(57)	0.371(21)	0.575(11)	0.372(41)
	0.1489	10000	0.1829(68)	0.2065(76)	0.312(13)	0.574(13)	0.465(42)
$16^3 \times 36$	0.1487	5000	0.2674(24)	0.3388(16)	0.475(24)	0.4571(78)	0.304(68)
	0.1489	5000	0.2322(26)	0.2637(97)	0.481(22)	0.4672(72)	0.495(69)
	0.1490	10000	0.2223(16)	0.2862(98)	0.543(11)	0.4331(51)	0.460(32)
$20^3 \times 40$	0.1488	4000	0.2685(12)	0.3381(91)	0.521(46)	0.4245(55)	0.483(56)
	0.1490	4000	0.2342(15)	0.329(12)	0.463(25)	0.4239(64)	0.332(85)
	0.1492	2350	0.2289(16)	0.206(16)	0.078(146)	0.4168(15)	0.554(78)
$24^3 \times 48$	0.1490	4300	0.2417(18)	0.382(14)	0.469(20)	0.4056(70)	0.596(62)
	0.1492	3240	0.2011(18)	0.319(12)	0.385(14)	0.3819(87)	0.388(57)
	0.1493	10000	0.1813(40)	0.315(29)	0.302(53)	0.3357(75)	0.252(28)
$32^3 \times 64$	0.1490	5039	0.2400(6)	0.348(12)	0.552(43)	0.3921(51)	0.474(37)
	0.1492	5508	0.2037(9)	0.298(16)	0.397(47)	0.3744(30)	0.440(28)
	0.1494	3600	0.1626(13)	0.274(20)	0.437(39)	0.3556(49)	0.506(22)
	0.1495	2007	0.1269(31)	0.25(3)	0.33(8)	0.31(1)	0.381(47)

Tabelle 13: Die Massen für verschiedene κ -Werte auf den verschiedenen Gittergrößen

Die Fitparameter und die Abschätzung der benötigten Gittergröße der Volumen-Effekt-Untersuchung mit den Massen aus dem chiralen Limes. Hier wurden die Fehler sehr groß:

mit $L = 8$		$a - \eta'$	$a - f_0$	0^{++}
	a	-0.271(983)	-0.847(1962)	191.244(7097000)
	b	0.015(294100)	0.633(96820)	10.094(80820)
	c	1.752(77420)	2.673(76780)	3.402(1169)
	χ^2	1.62	2.02	7.70
	f_m	0.654	0.9896	1.206
	L in fm	0.41(10011)	0.59(11124)	0.56(7013)
	L in a	8(1945)	11(2074)	10(1253)
ohne $L = 8$		$a - \eta'$	$a - f_0$	0^{++}
	a	-1.075(2895)	-45992(5400000)	-0.690(24460)
	b	0.014(152000)	14.5957(170700)	0.005(3575000)
	c	2.346(157900)	2.400(735)	4.029(3388000)
	χ^2	1.12	1.81	11.36
	f_m	0.654	0.989	1.206
	L in fm	1.61(22463)	0.74(16664)	0.79(481365)
	L in a	29(4044)	13(2928)	14(85306)

Tabelle 14: Fitparameter für die Massen aus dem chiralen Limes mit Betrachtung der Werte bei $L = 8$ (oben) und ohne (unten) sowie die benötigten Gittergrößen, um den Einfluss des Volumen-Effektes klein zu halten

9.3 Daten der linearen Regressionen

Hier sind die Parameter der linearen Regressionen zusammengestellt. Diese wurden mit Octave und dem Verfahren aus Anhang (9.1) berechnet.

$8^3 \times 16$			$12^3 \times 24$	
	Achsenabschnitt	Steigung	Achsenabschnitt	Steigung
$a - \eta'$	1.281(236)	0.247	0.9214(3996)	0.3309
$a - f_0$	0.896(258)	0.274	0.4640(7938)	0.8567
$\tilde{g}g$	9.427(1223)	-0.082	4.4814(909)	0.2005
0^{++}	7.524(2367)	-0.667	3.0753(1599)	0.2562
$16^3 \times 36$			$20^3 \times 40$	
	Achsenabschnitt	Steigung	Achsenabschnitt	Steigung
$a - \eta'$	1.052(661)	0.344	0.057(970)	0.344
$a - f_0$	4.201(1374)	-0.0002	0.654(2656)	0.344
$\tilde{g}g$	3.601(898)	0.084	3.561(950)	0.290
0^{++}	7.386(2232)	-0.832	3.199(3319)	1.555
$24^3 \times 48$			$32^3 \times 64$	
	Achsenabschnitt	Steigung	Achsenabschnitt	Steigung
$a - \eta'$	1.784(654)	0.344	1.832(289)	0.270
$a - f_0$	1.280(990)	0.626	2.602(673)	0.455
$\tilde{g}g$	2.303(420)	0.290	2.664(133)	0.189
0^{++}	-1.708(1205)	1.555	4.027(460)	0.029

Tabelle 15: Die Parameter der linearen Regression bei den verschiedenen Gittergrößen

9.4 Gluino–Glue–Massen bei konstanten Pionmassen

Die Gluino–Glue–Massen bei konstanten $(r_0 m_\pi)^2$. Diese sind mit (9.13) und (9.14) sowie den Werten aus Tabelle (15) berechnet worden:

Gitter	$(r_0 m_\pi)^2$	$am_{\tilde{g}g}$	Gitter	$(r_0 m_\pi)^2$	$am_{\tilde{g}g}$
$8^3 \times 16$	3.000(14)	9.182(18)	$12^3 \times 24$	3.000(14)	5.083(9)
	4.000(14)	9.101(11)		4.000(14)	5.283(7)
	5.000(14)	9.019(11)		4.000(14)	5.484(13)
$16^3 \times 36$	3.000(14)	3.852(8)	$20^3 \times 40$	3.000(14)	3.661(5)
	4.000(14)	3.936(4)		4.000(14)	3.694(2)
	5.000(14)	4.019(5)		4.000(14)	3.728(3)
$24^3 \times 48$	3.000(14)	3.172(5)	$32^3 \times 64$	3.000(14)	3.232(2)
	4.000(14)	3.462(5)		4.000(14)	3.421(4)
	5.000(14)	3.751(9)		4.000(14)	3.610(7)

Tabelle 16: Die Massen bei konstantem $(r_0 m_\pi)^2$ in Abhängigkeit der Gittergröße

Literatur

- [AC65] S. L. Altmann, and A.P. Cracknell, *Lattice Harmonics I. Cubic Groups*, Rev.Mod. Phys. **37** (1965), 19–32.
- [Ait05] I.J.R. Aitchison, *Supersymmetry and the MSSM: An Elementary Introduction*, 2005, arXiv:hep-ph/0505105v1.
- [Bil83] B. Berg, A. Billoire, *Glueball Spectroscopy in Four-Dimensional SU(3) Lattice Gauge Theory*, Nucl. Phys. **B221** (1983), 109–140.
- [Dem09] K. Demmouche, *N=1 SU(2) Supersymmetric Yang–Mills theory on the lattice with light dynamical Wilson gluinos*, Dissertation, Universität Münster, 2009.
- [ea87] APE Collaboration, M. Albanese et al., *Glueball Masses and String Tension in Lattice QCD*, Phys. Lett. **B192** (1987), 163–169.
- [Fer09] A. Ferling, *Numerische Methoden zur Erforschung einer N = 1 Super Yang–Mills-Theorie mit SU(2)_c und SU(3)_c Wilson Fermionen*, Dissertation, Universität Münster, 2009.
- [GS99] G.R. Farrar, G. Gabadadze and M. Schwetz, *The Spectrum of Softly Broken N=1 Supersymmetric Yang–Mills Theory*, Phys. Rev. **C60** (1999), 035002, arXiv:hep-th/9806204v1.
- [Haa12] R. Haake, *Methoden zur Bestimmung des Sommer–Parameters auf dem Gitter*, Diplomarbeit, Universität Münster, 2012.
- [Has02] A. Alexandru, A. Hasenfratz, *Partial-Global Stochastic Metropolis Update for Dynamical Smeared Link Fermions*, Phys.Rev. **D66** (2002), 094502, arXiv:hep-lat/0207014.
- [Jan99] R. Frezzotti, K. Jansen, *The PHMC algorithm for simulations of dynamical fermions: I – description and properties*, Nuclear Physics **B555** (1999), 395–431, arXiv:hep-lat/9808011.
- [Joh02] K. Johnson, *Darstellungstheorie der Überlagerung der kubischen Gruppe in Anwendung auf Operatoren der N=1 SUSY–Yang–Mills–Theorie auf dem Gitter*, Diplomarbeit, Universität Münster, 2002.
- [Kol] H. Kolanoski, *Statistische Methoden der Datenanalyse*, Vorlesung im Sommersemester 2002, Humboldt–Universität zu Berlin.
- [Lan10] C. Gattringer, C.B. Lang, *Quantum Chromodynamics on the Lattice–An Introductory Presentation*, Lect. Notes Phys. 788, Springer, Berlin Heidelberg, 2010.
- [Lik71] Y. Gol’fand, E.P. Likhtman, *Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of P invariance*, JETP Letters **13** (1971), 232.

-
- [Lov94] D. Bailin, A. Love, *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, Graduate Student Series in Physics, IOP, 1994.
 - [Luc97] S. Luckmann, *Ward-Identitäten in der N=1 Super-Yang-Mills-Theorie*, Diplomarbeit, Universität Münster, 1997.
 - [Lüs] M. Lüscher, *On a relation between finite size effects and elastic scattering processes*. In: *Progress in gauge field theory*. G. 't Hooft et al. (eds.) (Cargèse 1983), New York: Plenum 1984.
 - [Lü86] M. Lüscher, *Volume dependence of the energy spectrum in massive quantum field theories. I. Stable particle states*, Comm. Math. Phys. **104** (1986), 177–206.
 - [Man67] S. Coleman, J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Physical Review **159** (1967), 1251–1256.
 - [Mar11] S.P. Martin, *A Supersymmetry Primer*, 2011, arXiv:hep-ph/9709356.
 - [Mon98] I. Montvay, *Quadratically optimized polynomials for fermion simulations*, Computer physics communications **109(2-3)** (1998), 144–160.
 - [Mon03] C. Gebert, I. Montvay, *A recurrence scheme for least-square optimized polynomials*, 2003, arXiv:hep-lat/0302025.
 - [MS02] F. Farchioni, C. Gebert, I. Montvay and L. Scorzato, *Numerical simulation tests with light dynamical quarks*, Eur.Phys.J. **C26** (2002), 237–251.
 - [Mün85] G. Münster, *The size of finite size effects in lattice gauge theories*, Nuclear Physics **B249** (1985), 659–671.
 - [Mü94] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1994.
 - [Rot05] H. J. Rothe, *Lattice Gauge Theories—An Introduction*, World Scientific Lecture Notes in Physics—Vol. 74, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005.
 - [Sch03] T. Lippert, B. Orth, K. Schilling, *Light Hadrons in a Box*, NIC Series **20** (2003), 139–148, <http://www.fz-juelich.de/nic-series/volume20>.
 - [Soh85] M.F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, Physics Reports (Review Section of Physics Letters) **128** (1985), 39–304.
 - [T04] S.D. Katz, B.C. Tóth, *Least-Squared Optimized Polynomials for Smeared Link Actions*, Comput.Phys.Commun. **158** (2004), 137–149, arXiv:hep-lat/0401007.
 - [Tep98] M. Teper, *Glueball masses and other physical properties of SU(N) gauge theories in D=3+1: a review of lattice results for theorists*, 1998, arXiv:hep-th/9812187v1.

- [Tha85] D. Hochberg, H.B. Thacker, *Finite-volume effects on spectrum calculations: Monte Carlo study of an exactly solvable lattice field theory*, Nucl. Phys. **B257** (1985), 729–745.
- [Wei92] J.C. Sexton, D.H. Weingarten, *Hamiltonian evolution for the hybrid Monte Carlo algorithm*, Nuclear Physics **B308** (1992), 665–677.
- [Wil74] K.G. Wilson, *Confinement of quarks*, Phys. Rev. **D10** (1974), 2445–2459.
- [Wol90] M. Lüscher, U. Wolff, *How to calculate the elastic scattering matrix in two-dimensional quantum field theories by Numerical simulation*, Nuclear Physics **B339** (1990), 222–252.
- [Wol04] U. Wolff, *Monte Carlo errors with less errors*, Comput.Phys.Commun. **156** (2004), 143–153, arXiv:hep-lat/0306017v4.
- [Yan82] G. Veneziano, S. Yankielowicz, *An effective lagrangian for the pure N=1 supersymmetric Yang–Mills theory*, Physics Letters B **113** (1982), 231–236.
- [Zan02] F.D.R. Bonnet, D.B. Leinweber, A.G. Williams, J.M. Zanotti, *Improved Smoothing Algorithms for Lattice Gauge Theory*, Phys. Rev. **D65** (2002), arXiv:hep-lat/0106023.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei den zahlreichen Menschen bedanken, die mich während des Studiums und der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Das sind insbesondere:

- Meinen Eltern, die mir das Studium auch auf dem zweiten Bildungsweg ermöglichten
- Prof. Dr. G. Münster für die spannende Themenauswahl und die Betreuung meiner Arbeit
- Dr. Georg Bergner für die Betreuung meiner Arbeit und die ca. 1000 guten Ratschläge und Antworten auf teilweise dumme Fragen...
- Dirk für die Hilfe beim Häcken und was sonst so anlag
- Der AG Münster für die Unterstützung während der Arbeit und den spaßbringenden Ablenkungen
- Den Mitbewohnern des berühmt-berüchtigten Büros 411: Felix, Kai, Toast, Sven, Feng und noch einen Kai
- Den Korrekturlesern Sven, Georg, Jan, Stephan, Martin und Laura, die auch sehr kurzfristig Teile der Arbeit von Fehlern befreien konnten
- Den ganzen Menschen die hier in Münster und in der Heimat für den nötigen Spaß gesorgt haben

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Tobias Berheide
Münster, den 20. März 2012