

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Physik

Bachelorarbeit

**Das Coulomb-Potential in der
relativistischen höher-dimensionalen
Quantenmechanik**

**The Coulomb potential in relativistic higher-dimensional quantum
mechanics**

Michael Wigard
Matrikelnummer:

Eingereicht am 21.05.2013

Erstgutachter: Prof. Dr. Michael Klasen
Zweitgutachter: Prof. Dr. Gernot Münster

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Die Dirac-Gleichung in $D + 1$ Dimensionen	3
2.1	$D = 2N + 1$	3
2.2	$D = 2N$	4
2.3	Lösung der Radialgleichungen für das Coulomb-Potential	4
2.4	Bestimmung der Normierung	9
2.5	Berechnung des radialen Erwartungswertes	10
3	Die Klein-Gordon-Gleichung in $D + 1$ Dimensionen	11
3.1	Lösung der Radialgleichung für das Coulomb-Potential	12
3.2	Bestimmung der Normierung	14
3.3	Berechnung des radialen Erwartungswertes	14
4	Vergleich mit $3 + 1$ Dimensionen	15
5	Zusammenfassung	15

1 Einleitung

Die Alltagserfahrung sagt uns, dass wir in einer Welt mit drei Raumdimensionen leben. Daher beschäftigt sich auch ein großer Teil der Physik mit drei (oder weniger) Raumdimensionen, also einer vierdimensionalen Raumzeit. Höher-dimensionale Raumzeiten spielen eine große Rolle in Theorien zur Vereinheitlichung von Gravitation und Elektromagnetismus, wie zum Beispiel der Kaluza-Klein-Theorie. In dieser Arbeit sollen innerhalb der relativistischen Quantenmechanik die Konsequenzen einer höher-dimensionalen Raumzeit bei Betrachtung des Coulomb-Potentials untersucht werden. Dazu sollen die auf $(D+1)$ -dimensionale Raumzeiten verallgemeinerten Dirac- und Klein-Gordon-Gleichungen und ihre Lösungen für das Coulomb-Potential betrachtet werden. Man geht bei der Konstruktion der höher-dimensionalen Quantenmechanik davon aus, dass die Struktur der Gleichungen dieselbe ist wie in 3+1 Dimensionen, und nur die Operatoren an die neue Dimension angepasst werden müssen. Aus Gründen der Einfachheit wird in dieser Arbeit die Konvention $\hbar = c = 1$ verwendet.

2 Die Dirac-Gleichung in $D + 1$ Dimensionen

Die Herleitung der Dirac-Gleichung ist motiviert durch die Forderung, dass die relativistische Energie-Impuls-Beziehung gelten soll, ohne dass die Gleichung Zeitableitungen zweiter Ordnung erhält. Sie lässt sich in $D + 1$ Dimensionen analog zur üblichen Herleitung in drei Dimensionen durchführen. Es ergibt sich bis auf die angepasste Dimension die aus drei Dimensionen bekannte Gleichung[1]

$$i \sum_{\mu=0}^D \gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) \Psi(\vec{x}, t) = M \Psi(\vec{x}, t). \quad (2.1)$$

Es werden jetzt also $D + 1$ Matrizen γ^μ benötigt, die eine Clifford- bzw. Dirac-Algebra bilden, also die Antikommutatorbeziehung

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad (2.2)$$

erfüllen, wobei $\eta^{\mu\nu}$ der metrische Tensor ist.

2.1 $D = 2N + 1$

Im Fall einer ungeraden Dimension $D = 2N + 1$ verwendet man zur Lösung der Dirac-Gleichung den durch die gruppentheoretischen Eigenschaften der $SO(2N+1)$ motivierten Ansatz[1, 2]

$$\Psi_{K,(j)}(\vec{r}, t) = e^{-iEt} r^{-\frac{(D-1)}{2}} \begin{pmatrix} F(r) \phi_{K,(j)}(\hat{r}) \\ iG(r) \phi_{-K,(j)}(\hat{r}) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

mit $K = \pm(l + N) = \pm\frac{1}{2}(2l + D - 1)$, wobei die $\phi_{K,(j)}(\hat{r})$ durch Produkte aus den auf hypersphärische Koordinaten verallgemeinerten Kugelflächenfunktionen $Y_{\mathbf{M}}^{[\lambda]}(\hat{r})$ und

einem Spinanteil gegeben sind. Durch Einsetzen von (2.3) in die Dirac-Gleichung ergeben sich die Gleichungen (2.6) und (2.7).

2.2 $D = 2N$

Im Fall einer geraden Dimension $D = 2N$ verwendet man den Ansatz[1, 2]

$$\Psi_{|K|,(j_1)}(\vec{r}, t) = e^{-iEt} r^{-\frac{(D-1)}{2}} \left(F(r) \phi_{|K|,(j_1)}(\hat{r}) + iG(r) \phi_{-|K|,(j_1)}(\hat{r}) \right) \quad (2.4)$$

$$\Psi_{-|K|,(j_2)}(\vec{r}, t) = e^{-iEt} r^{-\frac{(D-1)}{2}} \left(F(r) \phi_{-|K|,(j_2)}(\hat{r}) + iG(r) \phi_{|K|,(j_2)}(\hat{r}) \right), \quad (2.5)$$

mit $K = \pm(l + N - \frac{1}{2}) = \pm\frac{1}{2}(2l + D - 1)$, wobei die Spinanteile der $\phi_{K,(j_{1/2})}(\hat{r})$ eine andere Form als bei ungerader Dimension haben, da die Spinordarstellung der $SO(2N)$ reduzibel ist. Durch Einsetzen in die Dirac-Gleichung ergeben sich auch hier die Gleichungen (2.6) und (2.7).

2.3 Lösung der Radialgleichungen für das Coulomb-Potential

Die Radialgleichungen lauten also zusammengefasst sowohl für gerade als auch für ungerade Dimensionen D

$$\frac{d}{dr}G(r) + \frac{K}{r}G(r) = (E - V(r) - M)F(r) \quad (2.6)$$

$$-\frac{d}{dr}F(r) + \frac{K}{r}F(r) = (E - V(r) + M)G(r). \quad (2.7)$$

Wird nun das Coulomb-Potential

$$V(r) = -\frac{\xi}{r}, \quad \xi > 0$$

betrachtet, bietet es sich an, für die gebundenen Zustände (das heißt Zustände mit $|E| < M$, da die Ruheenergie in E enthalten ist) die Reparametrisierung

$$\rho = 2r\sqrt{M^2 - E^2} \quad (2.8)$$

zu verwenden[3]. Die Energie E bleibt noch zu bestimmen. Die Gleichungen lauten dann

$$\frac{d}{d\rho}G(\rho) + \frac{K}{\rho}G(\rho) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M-E}{M+E}} + \frac{\xi}{\rho} \right) F(\rho) \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{d\rho}F(\rho) - \frac{K}{\rho}F(\rho) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M+E}{M-E}} - \frac{\xi}{\rho} \right) G(\rho). \quad (2.10)$$

Diese Gleichungen können mit einem Potenzreihenansatz gelöst werden, es hat sich jedoch als praktisch erwiesen, zunächst folgenden Ansatz zu machen, der aus [3] übernommen wurde:

$$G(\rho) = \sqrt{M-E} (\Phi_+(\rho) + \Phi_-(\rho)) \quad (2.11)$$

$$F(\rho) = \sqrt{M+E} (\Phi_+(\rho) - \Phi_-(\rho)). \quad (2.12)$$

Einsetzen in die Gleichungen (2.9) und (2.10) ergibt nach Zusammenfassung der Wurzelterme die beiden Gleichungen

$$\frac{d}{d\rho} (\Phi_+(\rho) + \Phi_-(\rho)) + \frac{K}{\rho} (\Phi_+(\rho) + \Phi_-(\rho)) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{M+E}{M-E}} \right) (\Phi_+(\rho) - \Phi_-(\rho)) \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{d\rho} (\Phi_+(\rho) - \Phi_-(\rho)) - \frac{K}{\rho} (\Phi_+(\rho) - \Phi_-(\rho)) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{M-E}{M+E}} \right) (\Phi_+(\rho) + \Phi_-(\rho)). \quad (2.14)$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} \Phi'_+(\rho) + \frac{K}{\rho} \Phi_-(\rho) &= -\frac{1}{2} \Phi_+(\rho) + \frac{\xi}{2\rho} \sqrt{\frac{M+E}{M-E}} (\Phi_+(\rho) - \Phi_-(\rho)) \\ &\quad - \frac{\xi}{2\rho} \sqrt{\frac{M-E}{M+E}} (\Phi_+(\rho) + \Phi_-(\rho)) \\ &= -\frac{1}{2} \Phi_+(\rho) + \frac{\xi}{2\rho} \frac{(M+E)(\Phi_+(\rho) - \Phi_-(\rho))}{\sqrt{M^2 - E^2}} \\ &\quad - \frac{\xi}{2\rho} \frac{(M-E)(\Phi_+(\rho) + \Phi_-(\rho))}{\sqrt{M^2 - E^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \Phi_+(\rho) + \frac{\xi}{\rho} \left(\frac{E\Phi_+(\rho) - M\Phi_-(\rho)}{\sqrt{M^2 - E^2}} \right). \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\xi E}{\sqrt{M^2 - E^2}} \\ \tau' &= \frac{\xi M}{\sqrt{M^2 - E^2}} \end{aligned}$$

ergibt sich schließlich

$$\Phi'_+(\rho) - \left(\frac{\tau}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \Phi_+(\rho) = -\frac{\tau' + K}{\rho} \Phi_-(\rho). \quad (2.15)$$

Analog erhält man durch Subtraktion der Gleichungen (2.13) und (2.14) die folgende Gleichung:

$$\Phi'_-(\rho) + \left(\frac{\tau}{\rho} - \frac{1}{2}\right)\Phi_-(\rho) = \frac{\tau' - K}{\rho}\Phi_+(\rho). \quad (2.16)$$

Auflösen der Gleichung (2.16) nach $\Phi_+(\rho)$ und Einsetzen in (2.15) liefert

$$\begin{aligned} \left(\left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \left(1 + \tau - \frac{\rho}{2}\right) \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{\tau}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \rho \left(\frac{d}{d\rho} + \left(\frac{\tau}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{\tau'^2 - K^2}{\rho} \right) \frac{\Phi_-(\rho)}{\tau' - K} &= 0 \\ \left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \left(1 + \tau - \frac{\rho}{2} - \left(\frac{\tau}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \rho \right) \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{2} - \rho \left(\frac{\tau}{\rho} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\tau'^2 - K^2}{\rho} \right) \Phi_-(\rho) &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{2\rho} - \left(\frac{\tau^2}{\rho^2} - \frac{\tau}{\rho} + \frac{1}{4} \right) + \frac{\tau'^2 - K^2}{\rho^2} \right) \Phi_-(\rho) &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{4} + \frac{\tau - \frac{1}{2}}{\rho} + \frac{\tau'^2 - K^2 - \tau^2}{\rho^2} \right) \Phi_-(\rho) &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\tau - \frac{1}{2}}{\rho} - \frac{K^2 + \tau^2 - \tau'^2}{\rho^2} \right) \right) \Phi_-(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich eine Gleichung für $\Phi_+(\rho)$, wenn man (2.15) nach $\Phi_-(\rho)$ auflöst und in (2.16) einsetzt. Zusammengefasst lauten die Bestimmungsgleichungen für $\Phi_{\pm}(\rho)$

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\tau \pm \frac{1}{2}}{\rho} - \frac{\eta^2}{\rho^2} \right) \right) \Phi_{\pm}(\rho) = 0, \quad (2.17)$$

wobei die Abkürzung

$$\eta^2 = K^2 + \tau^2 - \tau'^2 = K^2 - \xi^2 \quad (2.18)$$

eingeführt wurde. Wir betrachten ein schwaches Potential und wählen

$$\eta = \sqrt{K^2 - \xi^2} > 0. \quad (2.19)$$

Betrachtet man, welche Terme die Gleichung (2.17) in den Grenzfällen $\rho \rightarrow \infty$ und $\rho \rightarrow 0$ dominieren, bietet sich zur Lösung der Gleichung der folgende Separationsansatz an[3]:

$$\Phi_{\pm}(\rho) = \rho^{\eta} e^{-\frac{\rho}{2}} R_{\pm}(\rho). \quad (2.20)$$

Durch Einsetzen des Ansatzes erhält man, wenn berücksichtigt wird, welche Terme durch die Separation wegfallen

$$\begin{aligned} e^{-\rho/2} \left(\left(\rho^{\eta} \frac{d^2}{d\rho^2} + 2 \left(\eta \rho^{\eta-1} - \frac{1}{2} \rho^{\eta} \right) \frac{d}{d\rho} - 2 \frac{1}{2} \eta \rho^{\eta-1} \right) + \frac{1}{\rho} \rho^{\eta} \left(-\frac{1}{2} + \frac{d}{d\rho} \right) + \rho^{\eta} \frac{\tau \pm \frac{1}{2}}{\rho} \right) R_{\pm}(\rho) &= 0 \\ \left(\left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + 2 \left(\eta - \frac{1}{2} \rho \right) \frac{d}{d\rho} - \eta \right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{d}{d\rho} \right) + \left(\tau \pm \frac{1}{2} \right) \right) R_{\pm}(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also für $R_{\pm}(\rho)$ die Gleichung

$$\left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (2\eta + 1 - \rho) \frac{d}{d\rho} + \left(\tau - \eta - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \right) R_{\pm}(\rho) = 0. \quad (2.21)$$

Gleichung (2.21) entspricht der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung, auch Krummergleichung genannt, deren Lösung durch die konfluenten hypergeometrischen Funktionen, auch Krummerfunktionen, gegeben ist[1, 4]. Mit der hypergeometrischen Funktion der ersten Art,

$${}_1F_1(\alpha, \beta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{(\beta)_n n!}, \quad (2.22)$$

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + k), \quad (\alpha)_0 = 1$$

lässt sich die Lösung von Gleichung (2.21) angeben als

$$R_{\pm}(\rho) = a_{\pm} {}_1F_1\left(\eta - \tau + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}, 2\eta + 1, \rho\right). \quad (2.23)$$

Der zweite Term aus der allgemeinen Lösung wird dabei vernachlässigt, da er zu einer unphysikalischen Singularität im Ursprung führt. Die Funktion ${}_1F_1(\alpha, \beta, z)$ hat einige nützliche Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}_1F_1(\alpha, \beta, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n n z^{n-1}}{(\beta)_n n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n+1} (n+1) z^n}{(\beta)_{n+1} (n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)_n z^n}{\beta(\beta+1)_n n!} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} {}_1F_1(\alpha+1, \beta+1, z) \end{aligned} \quad (2.24)$$

und

$$\begin{aligned} {}_1F_1(\alpha, \beta, z) + \frac{z}{\beta} {}_1F_1(\alpha+1, \beta+1, z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{(\beta)_n n!} + \frac{z}{\beta} \frac{(\alpha+1)_{n-1} z^{n-1}}{(\beta+1)_{n-1} (n-1)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\alpha+1)_{n-1}}{(\beta)_n} + \frac{n(\alpha+1)_{n-1}}{(\beta)_n} \right) \frac{z^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+n)(\alpha+1)_{n-1} z^n}{(\beta)_n n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_n z^n}{(\beta)_n n!} \\ &= {}_1F_1(\alpha+1, \beta, z). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Aus (2.24) und (2.25) folgt

$$\left(\frac{\alpha}{z} + \frac{d}{dz}\right) {}_1F_1(\alpha, \beta, z) = \frac{\alpha}{z} {}_1F_1(\alpha + 1, \beta, z). \quad (2.26)$$

Zur Bestimmung der Konstanten a_{\pm} wird (2.23) in (2.20) und dann in (2.15) eingesetzt. Es ergibt sich unter Verwendung von (2.26)

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\xi}{2}\rho^\eta} \left(\left(\frac{\eta}{\rho} - \frac{1}{2} + \frac{d}{d\rho} \right) R_+(\rho) - \left(\frac{\tau}{\rho} - \frac{1}{2} \right) R_+(\rho) \right) &= -\frac{\tau' + K}{\rho} e^{-\frac{\xi}{2}\rho^\eta} R_-(\rho) \\ \left(\frac{\eta - \tau}{\rho} + \frac{d}{d\rho} \right) a_+ {}_1F_1(\eta - \tau, 2\eta + 1, \rho) &= -\frac{\tau' + K}{\rho} a_- {}_1F_1(\eta - \tau + 1, 2\eta + 1, \rho) \\ a_+ \frac{\eta - \tau}{\rho} {}_1F_1(\eta - \tau + 1, 2\eta + 1, \rho) &= -\frac{\tau' + K}{\rho} a_- {}_1F_1(\eta - \tau + 1, 2\eta + 1, \rho) \\ a_- &= \frac{\tau - \eta}{\tau' + K} a_+. \end{aligned}$$

Mit (2.11) und (2.12) kann die Lösung für die Radialfunktionen angegeben werden:

$$G(\rho) = N\sqrt{M - E}\rho^\eta e^{-\frac{\xi}{2}\rho^\eta} \left((\tau' + K) {}_1F_1(-n', 2\eta + 1, \rho) + n' {}_1F_1(1 - n', 2\eta + 1, \rho) \right) \quad (2.27)$$

$$F(\rho) = N\sqrt{M + E}\rho^\eta e^{-\frac{\xi}{2}\rho^\eta} \left((\tau' + K) {}_1F_1(-n', 2\eta + 1, \rho) - n' {}_1F_1(1 - n', 2\eta + 1, \rho) \right). \quad (2.28)$$

Dabei wurde die Abkürzung $n' = \tau - \eta$ eingeführt. Der Faktor N ist noch aus der Normierung der Wellenfunktion zu bestimmen. Damit die Wellenfunktion im Unendlichen verschwinden kann, darf die hypergeometrische Funktion nicht gegenüber dem $e^{-\frac{\xi}{2}\rho^\eta}$ -Term dominieren. Dies hat zur Folge, dass für physikalische Lösungen $n' \in \mathbb{N}_0$ gelten muss, denn nur dann bricht die Reihe in Gleichung (2.22) ab. Aus dieser Tatsache lassen sich die Energieeigenwerte bestimmen:

$$\begin{aligned} \tau - \eta &= n' \\ \frac{\xi E}{\sqrt{M^2 - E^2}} &= n' + \eta \\ \xi^2 E^2 &= (n' + \eta)^2 (M^2 - E^2) \\ E^2 &= \frac{M^2 (n' + \eta)^2}{\xi^2 + (n' + \eta)^2} \\ E &= M \left(1 + \frac{\xi^2}{(n' + \eta)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Man führt als Hauptquantenzahl

$$n = l + 1 + n'$$

ein, so dass sich das gewohnte Verhalten $n \geq l + 1 > 0$ ergibt. Mit (2.19) ergibt sich aus (2.29) für die Energieeigenwerte:

$$E = M \left(1 + \frac{\xi^2}{\left(n - l - 1 + \sqrt{\frac{1}{4}(2l + D - 1)^2 - \xi^2} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.30)$$

Für $D = 3$ entspricht dies dem bekannten Ergebnis. Man kann an (2.30) sofort erkennen, dass $E < M$ gilt, und, da ξ klein ist, dass E nah bei M liegt. Aus (2.27) und (2.28) folgt damit $F(r) \gg G(r)$. Der Term mit $F(r)$ in (2.3) entspricht also den sogenannten “großen Komponenten”, der mit $G(r)$ den “kleinen Komponenten”.

2.4 Bestimmung der Normierung

Zur Bestimmung des Normierungsfaktors N nutzt man die Tatsache, dass sich die hypergeometrische Funktion ${}_1F_1(-n, \beta + 1, \rho)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ durch die zugeordneten Laguerre-Polynome ausdrücken lässt. Es gilt[1, 5]:

$$\begin{aligned} {}_1F_1(-n, \beta + 1, \rho) &= \frac{n! \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n + \beta + 1)} L_n^\beta(\rho) \\ \int_0^\infty \rho^\beta e^{-\rho} L_n^\beta(\rho) L_m^\beta(\rho) d\rho &= \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{n!} \delta_{mn}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Daraus ergibt sich:

$$\int_0^\infty \rho^\beta e^{-\rho} ({}_1F_1(-n, \beta + 1, \rho))^2 d\rho = \frac{n! \Gamma(\beta + 1)^2}{\Gamma(n + \beta + 1)}. \quad (2.32)$$

Aus der Normierungsbedingung

$$\int |\Psi|^2 dV = 1$$

ergibt sich mit (2.3) bzw. (2.4) die Bedingung

$$1 = \int_0^\infty G(r)^2 + F(r)^2 dr,$$

wobei ausgenutzt wurde, dass die Kugelflächenfunktionen normiert sind, und dass das D -dimensionale Volumenelement in hypersphärischen Koordinaten $dV = r^{D-1} dr d\Omega$ lautet. Mit (2.32) lässt sich das Integral lösen:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{N^2 2M}{2\sqrt{M^2 - E^2}} \int_0^\infty \rho^{2\eta} e^{-\rho} (\tau' + K)^2 ({}_1F_1(-n', 2\eta + 1, \rho))^2 + n'^2 ({}_1F_1(1 - n', 2\eta + 1, \rho))^2 d\rho \\ &= \frac{N^2 M}{\sqrt{M^2 - E^2}} \left((\tau' + K)^2 \frac{n'! \Gamma(2\eta + 1)^2}{\Gamma(n' + 2\eta + 1)} + n'^2 \frac{(n' - 1)! \Gamma(2\eta + 1)^2}{\Gamma(n' + 2\eta)} \right). \end{aligned}$$

Dass für $n' = 0$ die Relation (2.31) auf den zweiten Term des Integrals nicht anwendbar ist, stellt kein Problem dar, da dieser dann sowieso verschwindet. Mit der Definition von n' ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{N^2 M(\tau - \eta)! \Gamma(2\eta + 1)^2}{\sqrt{M^2 - E^2}} \left(\frac{(\tau' + K)^2}{\Gamma(\tau + \eta + 1)} + \frac{(\tau - \eta)}{\Gamma(\tau + \eta)} \right) \\ &= \frac{N^2 M(\tau - \eta)! \Gamma(2\eta + 1)^2}{\sqrt{M^2 - E^2}} \left(\frac{(\tau' + K)^2 \Gamma(\tau + \eta) + n' \Gamma(\tau + \eta + 1)}{\Gamma(\tau + \eta + 1) \Gamma(\tau + \eta)} \right), \end{aligned}$$

und mit der Eigenschaft der Γ -Funktion, dass $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ ist,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{N^2 M(\tau - \eta)! \Gamma(2\eta + 1)^2}{\sqrt{M^2 - E^2}} \left(\frac{(\tau' + K)^2 + (\tau - \eta)(\tau + \eta)}{\Gamma(\tau + \eta + 1)} \right) \\ &= \frac{N^2 M(\tau - \eta)! \Gamma(2\eta + 1)^2}{\sqrt{M^2 - E^2}} \left(\frac{(\tau' + K)^2 + \tau^2 - \eta^2}{\Gamma(\tau + \eta + 1)} \right) \end{aligned}$$

und daher mit (2.18)

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{N^2 M(\tau - \eta)! \Gamma(2\eta + 1)^2}{\sqrt{M^2 - E^2}} \left(\frac{(\tau' + K)^2 - K^2 + \tau'^2}{\Gamma(\tau + \eta + 1)} \right) \\ &= \frac{N^2 M(\tau - \eta)! \Gamma(2\eta + 1)^2}{\sqrt{M^2 - E^2}} \frac{2\tau'(\tau' + K)}{\Gamma(\tau + \eta + 1)}. \end{aligned}$$

Es folgt schlussendlich

$$N = \frac{(M^2 - E^2)^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(2\eta + 1)} \left(\frac{\Gamma(\tau + \eta + 1)}{2M\tau'(\tau' + K)(\tau - \eta)!} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Damit sind die Radialfunktionen vollständig bestimmt.

2.5 Berechnung des radialen Erwartungswertes

Aus (2.3) bzw. (2.4) ergibt sich, dass der Erwartungswert $\langle r^k \rangle$ durch

$$\langle r^k \rangle = \int_0^\infty r^k (G(r)^2 + F(r)^2) dr$$

gegeben ist. Mit der Abkürzung $\alpha_k = \frac{2N^2}{(4(M^2 - E^2))^{\frac{k+1}{2}}}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle r^k \rangle &= \alpha_k \int_0^\infty \rho^{2\eta+k} e^{-\rho} M \left((\tau' + K)^2 {}_1F_1(-n', 2\eta + 1, \rho)^2 + n'^2 {}_1F_1(1 - n', 2\eta + 1, \rho)^2 \right) \\ &\quad - 2E(\tau' + K)n' {}_1F_1(-n', 2\eta + 1, \rho) {}_1F_1(1 - n', 2\eta + 1, \rho) d\rho. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Um dieses Integral zu lösen, wird wieder die Beziehung (2.31) zwischen der hypergeometrischen Funktion ${}_1F_1$ und den zugeordneten Laguerre-Polynomen benutzt. Allerdings kann die Orthogonalitätsrelation (2.32) hier nicht mehr angewandt werden. Es wird die folgende, von H. A. Mavromatis und R. S. Alassar in [6] angegebene, allgemeinere Formel¹ benötigt:

$$\int_0^\infty \rho^k e^{-\rho} L_n^{\beta_n}(\rho) L_m^{\beta_m}(\rho) d\rho = \frac{(-1)^m \Gamma(n + \beta_n + 1)^2 \Gamma(m + \beta_m + 1)}{m! \Gamma(m + \beta_m + 1) \Gamma(n + \beta_n + 1)} \\ \times \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p \Gamma(k + 1 + p) \Gamma(k - \beta_m + 1 + p)}{\Gamma(n + 1 - p) \Gamma(\beta_n + 1 + p) \Gamma(k - \beta_m + 1 - m + p) p!}.$$

Dieser Ausdruck wurde mit dem Computeralgebrasystem Mathematica zu

$$\int_0^\infty \rho^k e^{-\rho} L_n^{\beta_n}(\rho) L_m^{\beta_m}(\rho) d\rho = \frac{(-1)^m \Gamma(k + 1) \Gamma(k - \beta_m + 1) \Gamma(n + \beta_n + 1)}{m! n!} \quad (2.34) \\ \times {}_3\tilde{F}_2(-n, k + 1, k - \beta_m + 1; k - m - \beta_m + 1, \beta_n + 1; 1)$$

umgeformt, wobei die regularisierte hypergeometrische Funktion ${}_3\tilde{F}_2$ auftritt, die ähnlich wie ${}_1F_1$ definiert ist. Es gilt allgemein[7]:

$${}_p\tilde{F}_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z) = \frac{1}{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_q)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n z^n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_q)_n n!}.$$

Mit (2.34) lässt sich (2.33) berechnen. Es ergibt sich:

$$\langle r^k \rangle = \alpha_k \frac{(-1)^{n'} k! \Gamma(2\eta + 1)^2 \Gamma(k + 2\eta + 1) M}{\Gamma(n' + 2\eta + 1)} \quad (2.35) \\ \times ((\tau' + K)^2 {}_3\tilde{F}_2(-n', k + 1, k + 2\eta + 1; k - n' + 1, 2\eta + 1; 1) \\ - n'^2 (2\eta + n') {}_3\tilde{F}_2(1 - n', k + 1, k + 2\eta + 1; k - n' + 2, 2\eta + 1; 1) \\ + 2 \frac{E}{M} n' (\tau' + K) (2\eta + n') {}_3\tilde{F}_2(-n', k + 1, k + 2\eta + 1; k - n' + 2, 2\eta + 1; 1)).$$

Bei der Auswertung dieses Ausdrucks ist zu beachten, dass der zweite Term, in dem ${}_3\tilde{F}_2$ mit dem Argument $1 - n'$ auftaucht, im Fall $n' = 0$ bereits in (2.33) wegfällt, und daher das Produkt $n' {}_3\tilde{F}_2(1 - n', \dots)$ ohne weitere Überlegungen als gleich zu Null betrachtet werden kann.

3 Die Klein-Gordon-Gleichung in $D + 1$ Dimensionen

Die Klein-Gordon-Gleichung entsteht aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ durch die naheliegende Substitution der entsprechenden Operatoren für

¹In [6] wird eine um einen Faktor $\Gamma(n + \beta + 1)$ verschiedene Definition von $L_n^\beta(\rho)$ verwendet, der hier in der Formel auftaucht.

E und p und beschreibt spinlose Teilchen. Die zeitunabhängige Klein-Gordon-Gleichung für ein Zentralpotential lautet[1]

$$\left(-\nabla^2 + M^2\right) \Psi(\vec{r}) = (E - V(r))^2 \Psi(\vec{r}), \quad (3.1)$$

wobei sich in höheren Dimensionen lediglich die Form des Operators ∇^2 entsprechend ändert. Man verwendet als Lösungsansatz denselben Ansatz wie für die Schrödingergleichung in $D + 1$ Dimensionen[1]:

$$\Psi(\vec{r}) = r^{-\frac{D-1}{2}} R_l(r) Y_{l_{D-2} \dots l_1}^l(\hat{r}). \quad (3.2)$$

Mit den Ergebnissen

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2} \\ L^2 Y_{l_{D-2} \dots l_1}^l(\hat{r}) &= l(l + D - 2) Y_{l_{D-2} \dots l_1}^l(\hat{r}) \end{aligned}$$

aus [1] ergibt sich:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) &= \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\frac{D-1}{2}} \left(-\frac{D-1}{2r} + \frac{d}{dr} \right) R_l(r) Y_{l_{D-2} \dots l_1}^l(\hat{r}) \right) - \frac{L^2}{r^2} \Psi(\vec{r}) \\ &= r^{-\frac{D-1}{2}} \left(-\frac{(D-3)(D-1)}{4r^2} + \frac{d^2}{dr^2} \right) R_l(r) Y_{l_{D-2} \dots l_1}^l(\hat{r}) - \frac{L^2}{r^2} \Psi(\vec{r}) \\ &= r^{-\frac{D-1}{2}} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{D^2 - 4D + 3 + 4l(l + D - 2)}{4r^2} \right) R_l(r) Y_{l_{D-2} \dots l_1}^l(\hat{r}) \\ &= r^{-\frac{D-1}{2}} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\left(l - 1 + \frac{D}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right) R_l(r) Y_{l_{D-2} \dots l_1}^l(\hat{r}). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Klein-Gordon-Gleichung (3.1) ergibt sich mit der Abkürzung

$$\kappa = \left| l - 1 + \frac{D}{2} \right|$$

die folgende Gleichung für die Radialfunktion $R_l(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right) R_l(r) = \left(M^2 - (E - V(r))^2 \right) R_l(r). \quad (3.3)$$

3.1 Lösung der Radialgleichung für das Coulomb-Potential

Für das Coulomb-Potential

$$V(r) = -\frac{\xi}{r}, \quad \xi > 0$$

ergibt sich aus (3.3):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\xi^2 - \kappa^2 + \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{2E\xi}{r} + (E^2 - M^2) \right) R_l(r) = 0. \quad (3.4)$$

Auch hier bietet es sich an, die Substitution

$$\rho = 2r\sqrt{M^2 - E^2} \quad (3.5)$$

durchzuführen[1]. Gleichung (3.4) wird dann zu

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\xi^2 - \kappa^2 + \frac{1}{4}}{\rho^2} + \frac{\tau}{\rho} - \frac{1}{4} \right) R_l(r) = 0, \quad (3.6)$$

mit der auch bei der Lösung der Dirac-Gleichung benutzen Abkürzung

$$\tau = \frac{\xi E}{\sqrt{M^2 - E^2}}.$$

Betrachtet man wieder die für $\rho \rightarrow 0$ und $\rho \rightarrow \infty$ dominanten Terme, bietet sich ein ähnlicher Separationsansatz wie bei der Dirac-Gleichung an[1]:

$$R_l(\rho) = \rho^{\eta + \frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} \phi(\rho).$$

Dabei wurde die Abkürzung $\eta = \sqrt{\kappa^2 - \xi^2}$ eingeführt. Einsetzen dieses Ansatzes in (3.6) liefert eine zu (2.21) beinahe identische Gleichung:

$$\left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (2\eta + 1 - \rho) \frac{d}{d\rho} + (\tau - \eta - \frac{1}{2}) \right) \phi(\rho) = 0. \quad (3.7)$$

Bei Gleichung (3.7) handelt es sich wieder um die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung, die Lösung lässt sich daher direkt angeben. Für $R_l(\rho)$ ergibt sich dann:

$$R_l(\rho) = N \rho^{\eta + \frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} {}_1F_1(-n', 2\eta + 1, \rho),$$

wobei diesmal

$$n' = \tau - \eta - \frac{1}{2}$$

gewählt wurde. Wie zuvor lassen sich aus der Tatsache, dass für physikalische Lösungen aufgrund des Verschwindens der Wellenfunktion im Unendlichen $n' \in \mathbb{N}_0$ gelten muss, die Energieeigenwerte bestimmen. Es ergibt sich analog zur Herleitung von (2.29):

$$E = M \left(1 + \frac{\xi^2}{(n - l - \frac{1}{2} + \sqrt{\kappa^2 - \xi^2})^2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

mit der Hauptquantenzahl

$$n = l + 1 + n'.$$

3.2 Bestimmung der Normierung

Aus (3.2) und der Normierungsbedingung für die Wellenfunktion ergibt sich die Bedingung

$$\int_0^{\infty} R_l(r)^2 dr = 1.$$

Das Integral lautet ausgeschrieben:

$$\int_0^{\infty} R_l(r)^2 dr = \frac{N^2}{2\sqrt{M^2 - E^2}} \int_0^{\infty} \rho^{2\eta+1} e^{-\rho} {}_1F_1(-n', 2\eta + 1, \rho)^2 d\rho.$$

Mit (2.25) und (2.32) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} R_l(r)^2 dr &= \frac{N^2 (2\eta)^2}{2\sqrt{M^2 - E^2}} \int_0^{\infty} \rho^{2\eta-1} e^{-\rho} ({}_1F_1(-n', 2\eta, \rho) - {}_1F_1(-(n'+1), 2\eta, \rho))^2 d\rho \\ &= \frac{N^2 (2\eta)^2}{2\sqrt{M^2 - E^2}} \left(\frac{n'! \Gamma(2\eta)^2}{\Gamma(n'+2\eta)} + \frac{(n'+1)! \Gamma(2\eta)^2}{\Gamma(n'+1+2\eta)} \right) \\ &= \frac{N^2 \Gamma(2\eta + 1)^2}{2\sqrt{M^2 - E^2}} \left(\frac{n'! (n'+2\eta) + (n'+1)!}{\Gamma(n'+2\eta + 1)} \right) \\ &= \frac{N^2 \Gamma(2\eta + 1)^2}{2\sqrt{M^2 - E^2}} \left(\frac{n'! (2n' + 2\eta + 1)}{\Gamma(n'+2\eta + 1)} \right). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$N = \frac{(M^2 - E^2)^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(2\eta + 1)} \left(\frac{2\Gamma(n'+2\eta + 1)}{n'! (2n' + 2\eta + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

und die Wellenfunktion ist vollständig bestimmt.

3.3 Berechnung des radialen Erwartungswertes

Aus (3.2) ergibt sich, dass der Erwartungswert $\langle r^k \rangle$ durch

$$\begin{aligned} \langle r^k \rangle &= \int_0^{\infty} r^k R_l(r)^2 dr \\ &= \frac{N^2}{(4(M^2 - E^2))^{\frac{k+1}{2}}} \int_0^{\infty} \rho^{2\eta+1+k} e^{-\rho} {}_1F_1(-n', 2\eta + 1, \rho)^2 d\rho \end{aligned}$$

gegeben ist. Mit (2.34) und (3.8) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle r^k \rangle &= \frac{1}{2^k (M^2 - E^2)^{\frac{k}{2}}} \left(\frac{(-1)^{n'} (k+1)! \Gamma(k+2\eta+2)}{n'! (2n'+2\eta+1)} \right) \\ &\times {}_3\tilde{F}_2(-n', k+2, k+2\eta+2; k-n'+2, 2\eta+1; 1). \end{aligned}$$

4 Vergleich mit 3 + 1 Dimensionen

Um einen Vergleich zur bekannten Lösung für 3+1 Dimensionen herzustellen, wurden mit den Ergebnissen der Dirac-Gleichung aus Abschnitt 2 einige Diagramme erstellt, wobei $\xi = \frac{1}{10}$ und $m = 1$ gewählt wurden. Die Ergebnisse der Klein-Gordon-Gleichung unterscheiden sich auch in höheren Dimensionen nur minimal von denen der Dirac-Gleichung und wurden daher nicht separat dargestellt.

Abbildung 5.1 zeigt die Energieniveaus des Coulombproblems, die durch (2.30) gegeben sind, in Abhängigkeit von der Hauptquantenzahl n , bei $l = 0$, für verschiedene Dimensionen D . Man kann erkennen, dass die Bindungsenergie mit steigender Dimension abnimmt, der Unterschied wird jedoch mit zunehmendem n kleiner.

Abbildung 5.2 zeigt die Radialfunktionen $F(r)$ und $G(r)$ für $D = 3$, bei $l = 0$ und verschiedenen Werten von n . Die kleine Komponente $G(r)$ wurde fünffach vergrößert dargestellt.

Abbildung 5.3 zeigt die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $G(r)^2 + F(r)^2$ für verschiedene Werte von n bei $l = 0$, für $D = 3$ und $D = 4$. Die Wahrscheinlichkeitsdichten für $D = 3$ zeigen den gewohnten Verlauf, die für $D = 4$ haben eine sehr ähnliche Form, sind jedoch weniger eng und bei größeren Radien lokalisiert.

Abbildung 5.4 zeigt die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte bei $n = 1$ für mehrere Werte von D . Hier ist noch deutlicher zu erkennen, dass sich das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte mit steigender Dimension D zu größeren Radien verschiebt, während die Lokalisierung unschärfer wird.

Abbildung 5.5 zeigt den durch (2.35) gegebenen Erwartungswert $\langle r \rangle$ für mehrere Werte von n , bei $l = 0$. Man kann erkennen, dass der Abstand zwischen den Erwartungswerten der verschiedenen Energieniveaus mit steigender Dimension D größer wird.

5 Zusammenfassung

Es wurden die Dirac-Gleichung und die Klein-Gordon-Gleichung mit dem Coulombproblem in $D+1$ Dimensionen betrachtet. In Abschnitt 2 wurde die Dirac-Gleichung betrachtet und die Radialfunktionen des Coulombproblems wurden analytisch bestimmt, indem die Bestimmungsgleichungen auf die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung (2.21) zurückgeführt wurden. In Abschnitt 2.5 wurde der radiale Erwartungswert $\langle r^k \rangle$ analytisch bestimmt. Die Radialfunktionen und die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte wurden in Abschnitt 4 für verschiedene Werte von D und n grafisch dargestellt und die

Abhängigkeit des radialen Erwartungswertes von der Dimension wurde betrachtet. In Abschnitt 3 wurde die Klein-Gordon-Gleichung behandelt, wobei die Ergebnisse denen der Dirac-Gleichung sehr ähneln. Die Radialfunktionen wurden wieder durch Rückführung auf eine hypergeometrische Differentialgleichung analytisch bestimmt. In Abschnitt 3.3 wurde der radiale Erwartungswert auf dieselbe Weise wie bei der Dirac-Gleichung analytisch bestimmt.

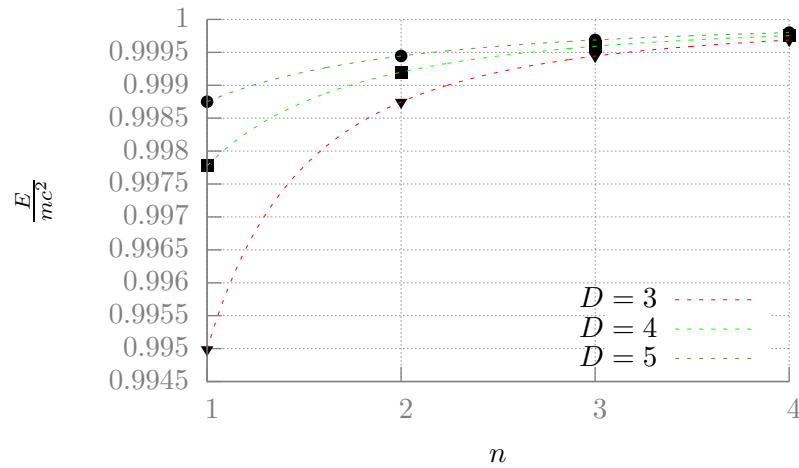


Abbildung 5.1: Energieniveaus des Coulomb-Problems in $D + 1$ Dimensionen

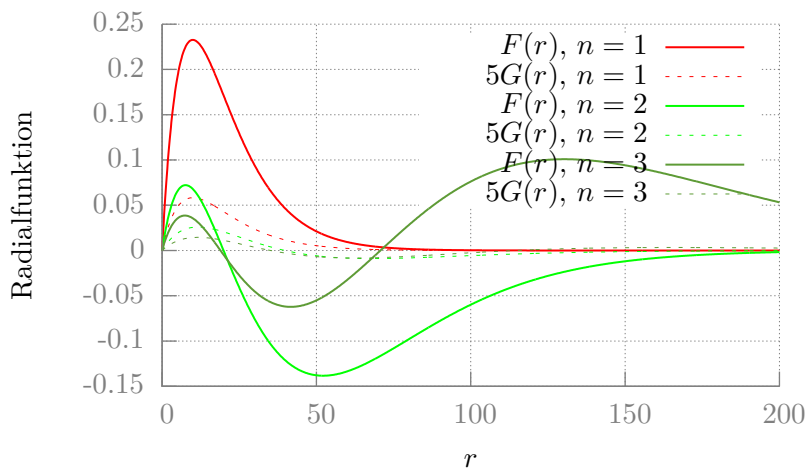


Abbildung 5.2: Radialfunktionen des Coulombproblems für $D = 3$

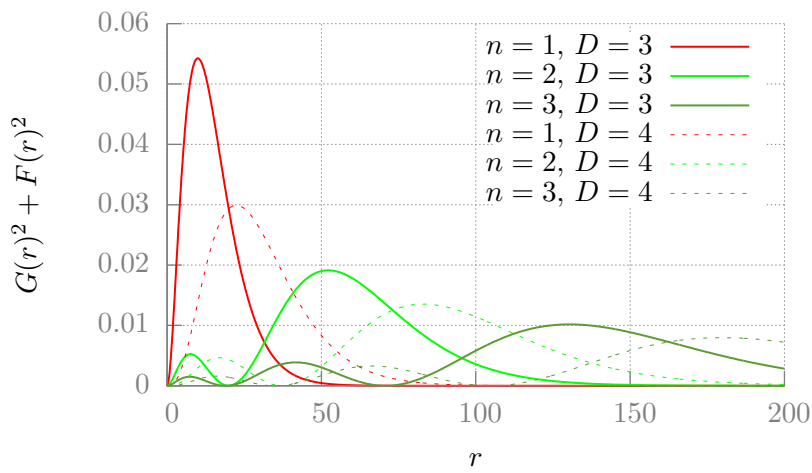


Abbildung 5.3: Radiale Wahrscheinlichkeitsdichte des Coulombproblems

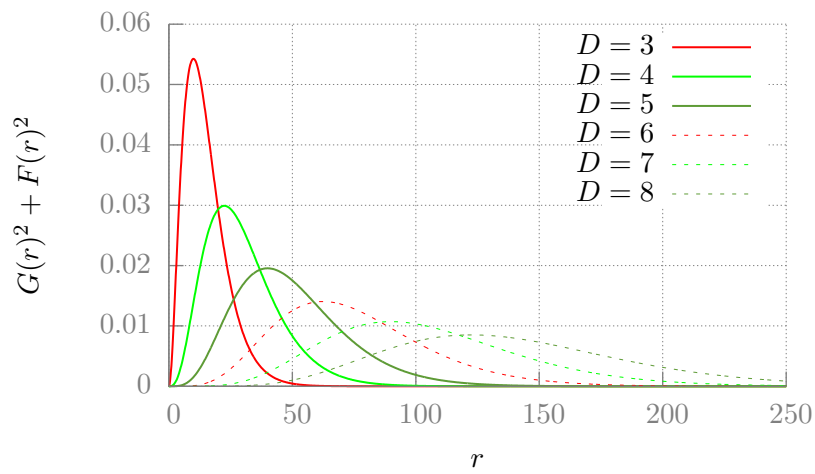


Abbildung 5.4: Radiale Wahrscheinlichkeitsdichte des Coulombproblems für $n = 1$

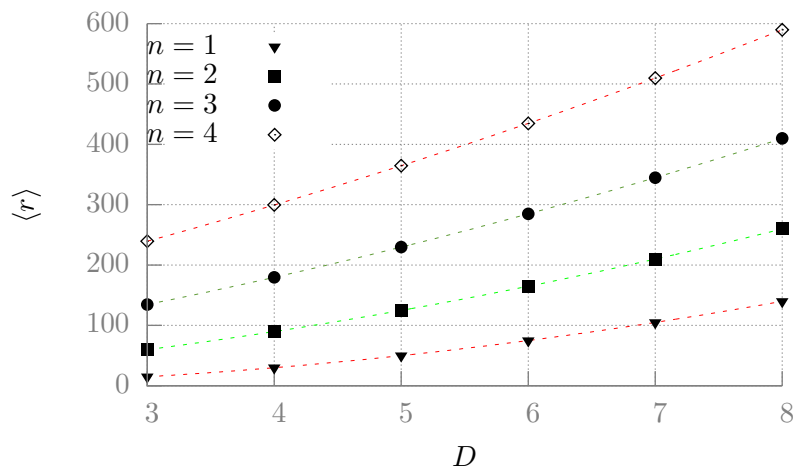


Abbildung 5.5: Erwartungswert $\langle r \rangle$ des Coulombproblems

Literatur

- [1] Shi-Hai Dong, Wave Equations in Higher Dimensions, Springer, 2011
- [2] Xiao-Yan Gu, Zhong-Qi Ma, Shi-Hai Dong, EXACT SOLUTIONS TO THE DIRAC EQUATION FOR A COULOMB POTENTIAL IN $D + 1$ DIMENSIONS, Int. J. Mod. Phys. E 11, 335, 2002.
- [3] Shi-Hai Dong, The Dirac equation with a Coulomb potential in D dimensions, J. Phys. A: Math. Gen. 36 4977, 2003.
- [4] <http://mathworld.wolfram.com/ConfluentHypergeometricDifferentialEquation.html>, zuletzt besucht am 14.05.2013
- [5] <http://mathworld.wolfram.com/AssociatedLaguerrePolynomial.html>, zuletzt besucht am 16.05.2013
- [6] H. A. Mavromatis, R. S. Alassar, Two new associated Laguerre integral results, Applied Mathematics Letters 14 (2001) 903-905, 2001.
- [7] <http://mathworld.wolfram.com/RegularizedHypergeometricFunction.html>, zuletzt besucht am 16.05.2013