

Institut für Theoretische Physik – AG Klasen  
Prof. Dr. Michael Klasen

Bachelorarbeit im Fach Physik  
zum Thema

## **Harmonischer Oszillator und Rekursionsrelationen in der höher-dimensionalen Quantenmechanik**

vorgelegt von

**Jens Alexander Tiebert**

am

05.11.2012

Erster Gutachter: Prof. Dr. Michael Klasen  
Zweiter Gutachter: Jun. Prof. Dr. Anna Kulesza  
Ausgabedatum: 13.08.2012

Jens Alexander Tiebert

[jens\\_tiebert@web.de](mailto:jens_tiebert@web.de)

Geburtsdatum: 01.06.1986  
Studiengang: Physik im 8. FS  
Matrikelnummer: XXXXXX

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis.....	III
<b>1. Einleitung.....</b>	<b>1</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen.....</b>	<b>2</b>
2.1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren.....	2
2.2 Rotationssymmetrie und Schrödingergleichung im $D$ -dimensionalen Raum.....	4
2.2.1 Rotationsoperator.....	4
2.2.2 Der generalisierte Drehimpulsoperator.....	5
2.2.3 Die Schrödingergleichung im $D$ -dimensionalen Raum.....	10
<b>3. Anwendungen in der nichtrelativistischen Quantenmechanik.....</b>	<b>12</b>
3.1 Der harmonische Oszillator.....	12
3.1.1 Exakte Lösung des harmonischen Oszillators im $D$ -dimensionalen Raum.....	12
3.1.2 Vergleich mit dem dreidimensionalen Fall.....	14
3.1.3 Der harmonische Oszillator mit einer minimalen Ortsunschärferelation.....	17
3.1.4 Rekursionsrelationen für die radiale Wellenfunktion.....	20
3.2 Der pseudoharmonische Oszillator.....	24
3.2.1 Exakte Lösung des pseudoharmonischen Oszillators.....	24
3.2.2 Vergleich zum dreidimensionalen Fall.....	26
3.2.3 Rekursionsrelationen für den pseudoharmonischen Oszillator.....	28
<b>4. Schlußbetrachtung.....</b>	<b>31</b>
<b>Anhang.....</b>	<b>32</b>
<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>38</b>

# Abbildungsverzeichnis

<b>Abbildung 1:</b> Übersicht über die Energieniveaus für verschiedene Dimensionen.....	15
<b>Abbildung 2:</b> Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den Grundzustand ( $n=0$ , $n'=0$ , $l=0$ ) in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit $m = k = 1$ und des Potentials (rot).....	15
<b>Abbildung 3:</b> Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den ersten angeregten Zustand ( $n=1$ , $n'=0$ , $l=1$ ) in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit $m = k = 1$ und des Potentials (rot).....	16
<b>Abbildung 4:</b> Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den zweiten angeregten Zustand ( $n=2$ , $n'=1$ , $l=0$ ) in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit $m = k = 1$ und des Potentials (rot).....	16
<b>Abbildung 5:</b> Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den dritten angeregten Zustand ( $n=3$ , $n'=1$ , $l=1$ ) in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit $m = k = 1$ und des Potentials (rot).....	16
<b>Abbildung 6:</b> Aufspaltung der Energielevel eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators für ein nichtpunktförmiges Teilchen mit einer relativen Größe $k = 1/10$ für den Fall $k'^2 = 2k^2$ [Kem96].....	19
<b>Abbildung 7:</b> Harmonisches und pseudoharmonisches Potential mit dem gleichen Gleichgewichtsabstand $r_0$ und der gleichen Federkonstante [Sag85].....	25
<b>Abbildung 8:</b> Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den Grundzustand ( $n = 0$ , $l = 0$ ) in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit $m = k = 1$ und des Potentials (rot).....	27
<b>Abbildung 9:</b> Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den Zustand $n = 0$ und $l = 1$ in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit $m = k = 1$ und des Potentials (rot).....	28

# 1. Einleitung

Niemand kann mit Gewissheit sagen, aus wie vielen Dimensionen unsere Welt besteht. Neben den direkt wahrnehmbaren drei räumlichen Dimensionen, können folglich weitere existieren, die jedoch derart kompaktifiziert sein müssen, dass sie mit dem bloßen Auge nicht wahrnehmbar sind und weiterhin auch keinen starken Einfluss auf makroskopische Körper ausüben dürfen. So könnte es sein, dass die uns bekannte vierdimensionale Raumzeit lediglich eine in einer höherdimensionalen Raumzeit eingebettete Hyperebene darstellt. Da die Gravitationskraft in allen Dimensionen unserer Welt wirkt, bestünde die Möglichkeit mithilfe dieser, aus zusätzlichen Dimensionen resultierende Effekte zu eruieren.

Innerhalb der Quantenmechanik wurde der exakten Lösung von Wellengleichungen mit kugelsymmetrischen Potentialen im dreidimensionalen Raum große Aufmerksamkeit gewidmet. Dabei hat sich in den letzten Jahrzehnten ebenfalls die Tendenz abgezeichnet, diese Probleme auf den  $D$ -dimensionalen Raum zu erweitern und somit zusätzliche Dimensionen zu untersuchen. Die Idee von zusätzlichen Dimensionen ist dabei kein neues Phänomen, sondern besitzt eine lange Geschichte und datiert nahezu auf die Anfänge der Quantenmechanik. Ein Grund, warum der höherdimensionalen Betrachtungsweise so viel Aufmerksamkeit zuteil wurde, besteht in der Möglichkeit, eine Vielzahl von Informationen in reduzierter Weise einbinden und damit beispielsweise zu einer Vereinheitlichung von Quanten- und Relativitätstheorie gelangen zu können [Don11]. Daneben findet dieser Ansatz zudem in vielen weiteren theoretischen Untersuchungen unterschiedlichster Provenienz Einzug. Ziel dieser Arbeit ist es nunmehr, einen kurzen Einblick in die Anwendungsfelder in der nichtrelativistischen, höherdimensionalen Quantenmechanik zu geben, wobei der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Behandlung des harmonischen Oszillators und damit verwandter Potentiale liegt.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Das zweite Kapitel widmet sich den theoretischen Grundlagen. Es beginnt mit einer kurzen Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen und behandelt anschließend die Erweiterung des Drehimpulsoperators auf den  $D$ -dimensionalen Raum. Danach wird die Schrödingergleichung in  $D$  Dimensionen betrachtet und mithilfe der vorherigen Erkenntnissen eine radiale Bestimmungsgleichung hergeleitet. Im dritten Kapitel wird diese Gleichung zur Lösung des harmonischen und pseudoharmonischen Oszillators angewendet und die erlangten Ergebnisse werden mit dem dreidimensionalen Fall verglichen. Weiterhin werden nützliche Rekursionsformeln bestimmt. Der harmonische Oszillator wird dabei zum einen mit einer kanonischen Vertauschungsrelation zwischen dem Ort und dem Impuls untersucht und zum anderen mit einer modifizierten Vertauschungsrelation analysiert, die eine minimale Längeneinheit impliziert. Die Arbeit schließt mit einer Schlussbetrachtung.

## 2. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen gelegt. Physikalische Systeme weisen in der Regel Symmetrieeigenschaften auf, deren Kenntnis die Handhabung des Problems deutlich vereinfacht. Insofern ist es wichtig, die relevanten Symmetrien zu identifizieren, und die Eigenschaften des Systems in Bezug auf diese Symmetrien zu klassifizieren. Dazu liefert die Gruppentheorie das mathematische Mittel, da durch die algebraische Struktur der Gruppen und deren Darstellungen die wesentlichen Grundlagen zur Beschreibung der Eigenschaften von Symmetrien gelegt werden [Böh11, Lud88]. Aus diesem Grund widmet sich der nächste Abschnitt einer kurzen Einführung in die Lie-Gruppen. Weiterhin wird in diesem Kapitel der Drehimpulsoperator auf den  $D$ -dimensionalen Raum erweitert und die Schrödingergleichung in diesem Raum betrachtet, um dadurch – analog zum dreidimensionalen Fall – eine Bestimmungsgleichung für die radiale Wellenfunktion herleiten zu können.

### 2.1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Lie-Gruppen sind kontinuierliche Gruppen, die aus einer überabzählbar unendlichen Anzahl von Elementen bestehen. Somit erfüllen die Lie-Gruppen zum einen die Gruppenaxiome. Des Weiteren bilden die einzelnen Elemente der Gruppe einen topologischen Raum und gehören weiterhin zu einer analytischen Mannigfaltigkeit, wobei die Gruppenoperationen durch Abbildungen dieser Mannigfaltigkeit auf sich selbst gegeben sind. Lineare Lie-Gruppen sind dadurch definiert, dass für sie eine endlichdimensionale Matrixdarstellung existiert. Da für jede abstrakte lineare Lie-Gruppe eine isomorphe Matrixgruppe gegeben ist, kann die Betrachtung auf eben diese Matrixgruppen eingeschränkt werden. Die Elemente einer Lie-Gruppe erfüllen die sogenannte Lie-Algebra. Diese Lie-Algebra  $L$  über dem Körper  $K$  mit der Dimension  $n$  ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $K$ , in dem für jede Elemente  $a, b, c, \dots$  aus  $L$  eine binäre Verknüpfung  $[\cdot]$  definiert ist, die die folgenden Eigenschaften erfüllt [Böh11, Luc93]:

- (i) Das Lie-Produkt  $[a, b]$  ist wieder ein Element der Lie-Algebra  $L$ :

$$[a, b] \in L \quad \forall a, b \in L.$$

- (ii) Das Lie-Produkt  $[a, b]$  ist für beliebige reelle oder komplexe Zahlen  $\alpha, \beta$  im ersten Faktor linear:

$$[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c] \quad \forall a, b, c \in L.$$

- (iii) Das Lie-Produkt  $[a, b]$  ist antisymmetrisch bezüglich der Vertauschung der Elemente  $a$  und  $b$ :

$$[a, b] = -[b, a] \quad \forall a, b \in L.$$

(iv) Das Lie-Produkt  $[a, b]$  erfüllt die Jacobi-Identität:

$$[a, [b, c]] + [b, [a, c]] + [c, [a, b]] = 0.$$

Mit den Eigenschaften (i)-(iv) folgt insbesondere, dass das Produkt eines Elements aus der Lie-Algebra  $L$  mit sich selbst verschwindet, d.h.  $[a, a] = 0, \forall a \in L$ . Weiterhin ist im speziellen Fall der Lie-Algebra von Matrizen das Produkt zweier Matrizen  $A$  und  $B$  durch den Kommutator  $[A, B] = AB - BA$  gegeben, der alle geforderten Eigenschaften erfüllt.

Im Folgenden sind einige spezielle Matrixgruppen dargestellt, auf die im weiteren Verlauf der Arbeit zurückgegriffen wird. Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge

$$GL(n, K) = \{A \in M_{n \times n}(K) \mid A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det A \neq 0\} \quad (1)$$

mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung. Mit  $M_{n \times n}(K)$  werden in (1)  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus dem Körper  $K$  bezeichnet. Die spezielle lineare Gruppe  $SL(n, K)$  ist eine Untergruppe von  $GL(n, K)$ , für die gilt

$$SL(n, K) = \{A \in M_{n \times n}(K) \mid \det A = 1\}. \quad (2)$$

Mit Hilfe einiger Definitionen [Fis10, Reb10] lassen sich nun weitere Untergruppen zu  $GL(n, K)$  finden. Eine Matrix  $A \in GL(n, R)$  heißt orthogonal, falls

$$A^{-1} = A^T \quad (3)$$

und entsprechend wird eine Matrix  $A \in GL(n, C)$  als unitär bezeichnet, falls

$$A^{-1} = A^+, \quad (4)$$

wobei  $A^+$  die adjungierte Matrix darstellt.<sup>1</sup> Hiermit folgen nun unmittelbar die weiteren Untergruppen

- |       |                               |  |
|-------|-------------------------------|--|
| (i)   | orthogonale Gruppe:           | $O(n) = \{A \in GL(n, R) \mid A^{-1} = A^T\},$ |
| (ii)  | spezielle orthogonale Gruppe: | $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\},$      |
| (iii) | unitäre Gruppe:               | $U(n) = \{A \in GL(n, C) \mid A^{-1} = A^+\},$ |
| (iv)  | spezielle unitäre Gruppe:     | $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}.$      |

Als letzte Gruppen werden die pseudounitäre Gruppe  $U(p, q)$  und die spezielle pseudounitäre Gruppe  $SU(p, q)$  vorgestellt, wobei jeweils  $p + q = n$  und  $p \geq q \geq 1$  erfüllt ist. Für diese gilt

$$\begin{aligned} U(p, q) &= \{A \in GL(n, C) \mid A^+ g A = g\}, \\ SU(p, q) &= \{A \in U(p, q) \cap SL(n, C)\} \end{aligned} \quad (5)$$

---

<sup>1</sup> Hierbei bezeichnet  $R$  die Menge der reellen Zahlen und  $C$  die Menge der komplexen Zahlen.

mit  $g = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$ . Die verschiedenen Gruppen lassen sich über ihre Kommutationsrelationen charakterisieren [Böh11, Luc93, Reb10, Fis10].

## 2.2 Rotationssymmetrie und Schrödingergleichung im D-dimensionalen Raum

In der Quantenmechanik folgt aus der Isotropie des Raumes, dass der Hamiltonoperator des betrachteten Systems rotationsinvariant sein muss. In dem in dieser Arbeit betrachteten Fall erfüllt die Schrödingergleichung diese Bedingung. Damit ergibt sich zugleich, dass der Drehimpulsoperator mit dem Hamiltonoperator vertauscht und somit eine Erhaltungsgröße darstellt, wodurch es möglich ist, die  $D$ -dimensionale Schrödingergleichung auf eine radiale Differentialgleichung zu reduzieren [Don11]. Im Folgenden wird daher kurz auf den Rotationsoperator eingegangen, um dann den Drehimpulsoperator auf den  $D$ -dimensionalen Raum zu erweitern, und dessen Eigenwerte zu bestimmen. Damit ist es schließlich möglich mithilfe eines Separationsansatzes, eine von dem Winkelanteil unabhängige radiale Bestimmungsgleichung zu erhalten, die zur Lösung verschiedener Probleme herangezogen werden kann.

### 2.2.1 Rotationsoperator

In diesem Kapitel wird der Rotationsoperator  $O_R(\vec{\varphi})$  betrachtet, der den skalaren Zustand  $\psi_\alpha(\vec{r}, t)$  in den rotierten Zustand  $\psi_\alpha(\vec{r}, t)$  überführt, so dass

$$\psi_\alpha(\vec{r}, t) = O_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (6)$$

gilt [Don11]. Sofern nunmehr der ursprüngliche Zustand  $\psi_\alpha(\vec{r}, t)$  die Schrödingergleichung  $i\hbar d\psi_\alpha(\vec{r}, t)/dt = H\psi_\alpha(\vec{r}, t)$  erfüllt, folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\psi_\alpha(\vec{r}, t)}{dt} &= i\hbar \frac{dO_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}, t)}{dt} = O_R(\vec{\varphi}) \left( i\hbar \frac{d\psi_\alpha(\vec{r}, t)}{dt} \right) = \\ &= O_R(\vec{\varphi}) H \psi_\alpha(\vec{r}, t) = O_R(\vec{\varphi}) H O_R^{-1}(\vec{\varphi}) \psi_\alpha(\vec{r}, t) = H \psi_\alpha(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Bei der letzten Umformung wurde dabei die Rotationsinvarianz des Hamiltonoperators vorausgesetzt, was zugleich mit einer Isotropie des Ortsraums einhergeht. Da folglich der Hamiltonoperator mit dem Rotationsoperator kommutiert, d.h.  $[O_R, H] = 0$ , und  $\vec{\varphi}$  frei wählbar ist, kommutiert ebenfalls der Drehimpulsoperator mit dem Hamiltonoperator,

$$[\vec{L}, H] = 0, \quad (8)$$

so dass der Drehimpulsoperator  $\vec{L}$  eine Erhaltungsgröße darstellt. Für eine infinitesimal kleine Drehung  $\delta\varphi$  um die z-Achse, lässt sich der Rotationsoperator in Abhängigkeit vom Drehimpulsoperator  $L_z$  schreiben,

$$O_{R_{e_z}}(\delta\varphi) = 1 - \frac{i\delta\varphi}{\hbar} L_z, \quad (9)$$

wodurch die infinitesimalen Drehungen durch  $L_z$  erzeugt werden. Hierbei ist die z-Komponente des Drehimpulsoperators durch  $L_z = -i\hbar(xd/dy - yd/dx) = xp_y - yp_x$  gegeben. Endliche Drehungen werden nun durch eine wiederholte Anwendung der Relation (9) erzeugt, so dass für diese folgt:

$$O_{R_{e_z}}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{i\varphi}{\hbar n} L_z \right)^n = e^{-\frac{i\varphi}{\hbar} L_z}. \quad (10)$$

Damit ist die z-Komponente des Drehimpulses ebenfalls eine Erhaltungsgröße. Die Relation (10) lässt sich in vollständiger Analogie ebenfalls für die anderen Raumrichtungen ableiten und auch auf höhere Raumdimensionen erweitern. Damit ergibt sich schließlich für den Rotationsoperator

$$O_{R_n}(\varphi) = e^{-\frac{i\varphi}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{n}}, \quad (11)$$

so dass durch den Drehimpulsoperator Drehungen des Raumes erzeugt werden [Bie81, Don11].

## 2.2.2 Der generalisierte Drehimpulsoperator

Um die Schrödingergleichung im  $D$ -dimensionalen Raum lösen zu können, muss zunächst der Drehimpulsoperator in diesem Raum definiert und dessen Eigenwerte bestimmt werden. Grundlegend für die Herleitung der Eigenwerte dieses generalisierten Drehimpulsoperators ist dabei die Arbeit von *Louck*, an die die folgenden Ausführungen angelehnt sind [Lou60a, Lou60b, Cha90]. In den kartesischen Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_D$  ist der Laplace-Operator  $\nabla_D^2$  analog zum dreidimensionalen Fall definiert [Lou60b] und ergibt sich demgemäß zu

$$\nabla_D^2 = \sum_{j=1}^D \partial^2 / \partial x_j^2. \quad (12)$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Problems ist es nunmehr hilfreich, hyperdimensionale Polarkoordinaten einzuführen. In  $D$  Dimensionen definieren sich die Polarkoordinaten dabei folgendermaßen:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdot \dots \cdot \sin \theta_{D-1}, \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdot \dots \cdot \sin \theta_{D-1}, \\ x_3 &= r \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \cdot \dots \cdot \sin \theta_{D-1}, \\ x_4 &= r \cos \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \cdot \dots \cdot \sin \theta_{D-1}, \\ &\vdots \\ x_j &= r \cos \theta_{j-1} \sin \theta_j \sin \theta_{j+1} \cdot \dots \cdot \sin \theta_{D-1}, \\ &\vdots \\ x_{D-1} &= r \cos \theta_{D-2} \sin \theta_{D-1}, \\ x_D &= r \cos \theta_{D-1}, \end{aligned} \quad (13)$$



für  $D \geq 3$  sowie  $x_1 = r \cos \theta_1$ ,  $x_2 = r \sin \theta_1$  entsprechend für  $D = 2$ . Die Laufweite der einzelnen Variablen beträgt  $0 \leq r \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$  und  $0 \leq \theta_j \leq \pi$  für  $j \in [2, D-1]$ . Nunmehr ergibt sich die Summe der quadrierten kartesischen Koordinaten zu

$$r^2 = \sum_{j=1}^D x_j^2, \quad (14)$$

wodurch eine D-dimensionale Kugel mit dem Radius  $r$  beschrieben wird. Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten ist schließlich durch

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{D-1} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left( \frac{h}{h_k^2} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \right) \quad (15)$$

gegeben [Som49] mit

$$\theta_0 = r, \quad h = \prod_{j=0}^{D-1} h_j \quad \text{und} \quad h_k^2 = \sum_{j=1}^D \left( \frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} \right)^2. \quad (16)$$

Hiermit lassen sich die jeweiligen Werte für  $h$  durch eine einfache Berechnung leicht bestimmen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_1 &= r \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdot \dots \cdot \sin \theta_{D-1}, \\ h_2 &= r \sin \theta_3 \sin \theta_4 \cdot \dots \cdot \sin \theta_{D-1}, \\ &\vdots \\ h_k &= r \sin \theta_{k+1} \sin \theta_{k+2} \cdot \dots \cdot \sin \theta_{D-1}, \\ &\vdots \\ h_{D-2} &= r \sin \theta_{D-1}, \\ h_{D-1} &= r, \\ h &= r^{D-1} \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \sin^3 \theta_4 \cdot \dots \cdot \sin^{k-1} \theta_k \cdot \dots \cdot \sin^{D-2} \theta_{D-1}, \end{aligned} \quad (17)$$

für  $D \geq 3$  und  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = r$ , sofern  $D = 2$ . Durch das Einsetzen der obenstehenden Ergebnisse in die Gleichung (15) ist es möglich, den Laplace-Operator in  $D$ -dimensionalen Kugelkoordinaten zu bestimmen. Ein solches Vorgehen liefert

$$\begin{aligned} \nabla_D^2 &= \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{D-2} \frac{1}{\sin^2 \theta_{k+1} \sin^2 \theta_{k+2} \cdot \dots \cdot \sin^2 \theta_{D-1}} \left\{ \frac{1}{\sin^{k-1} \theta_k} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \sin^{k-1} \theta_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} \right\} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin^{D-2} \theta_{D-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \sin^{D-2} \theta_{D-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Das Volumenelement im Ortsraum ergibt sich weiterhin zu

$$\prod_{j=1}^D dx_j = r^{D-1} dr d\Omega, \quad d\Omega = \prod_{k=1}^{D-1} (\sin \theta_k)^{k-1} d\theta_k, \quad (19)$$

wobei wiederum die obenstehenden Bereiche für die Variablen gelten. Die Komponenten des Drehimpulses sind als antisymmetrische Tensoren definiert,

$$L_{ij} = -L_{ji} = x_i p_j - x_j p_i, \quad i = 1, 2, \dots, j-1, \quad j = 2, 3, \dots, D, \quad (20)$$

wobei  $p_k$  die Komponenten des linearen Impulsoperators beschreiben. Diese sind durch

$$p_k = -i \frac{d}{dx_k} \quad (21)$$

gegeben.<sup>2</sup> Mit den hyperdimensionalen Polarkoordinaten ergibt sich die partielle Ableitung nach  $x_k$  zu

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{j=0}^{D-1} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \theta_j}. \quad (22)$$

Die explizite Berechnung der partiellen Ableitungen  $\partial \theta_j / \partial x_k$  ist sehr aufwendig, da dieses das Erfordernis mit sich bringen würde, die Gleichungen (17) zu invertieren. Allerdings folgt aus den Transformationsgleichungen und der Orthogonalität des Koordinatensystems

$$\sum_{i=0}^{D-1} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial \theta_i} = \delta_{lk}, \quad \sum_{l=0}^{D-1} \frac{\partial x_l}{\partial \theta_i} \frac{\partial x_l}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} h_i^2. \quad (23)$$

Multipliziert man nun die zweite Gleichung mit  $\partial \theta_i / \partial x_k$  und summiert über alle  $i$ , erhält man

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial x_k} = \frac{1}{h_j^2} \frac{\partial x_k}{\partial \theta_j}. \quad (24)$$

Damit folgt nunmehr unmittelbar

$$p_k = -i \sum_{j=0}^{D-1} \left( \frac{1}{h_j^2} \frac{\partial x_k}{\partial \theta_j} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \quad (25)$$

und explizit für  $p_D$

$$p_D = -i \left[ \cos \theta_{D-1} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta_{D-1}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \right], \quad D = 3, 4, 5, \dots. \quad (26)$$

---

<sup>2</sup> Sofern das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum  $\hbar$  nicht explizit ausgeschrieben ist, wird es im Rahmen dieser Arbeit zu  $\hbar = 1$  gewählt.

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, erzeugen die  $D(D-1)/2$  Komponenten des Drehimpulses, welche durch (20) bestimmt sind, Drehungen im  $D$ -dimensionalen Raum und bilden eine Basis der Lie-Algebra von der orthogonalen Gruppe  $O(N)$  [Cha90]. Diese Algebra ist über den Kommutator

$$[L_{ij}, L_{kl}] = i\delta_{jl}L_{ik} + i\delta_{ik}L_{jl} - i\delta_{jk}L_{il} - i\delta_{il}L_{jk} \quad (27)$$

definiert. Von besonderem Interesse sind hierbei die Casimiroptoren

$$L_k^2 = \sum_{i,j} (L_{ij})^2, \quad i = 1, 2, \dots, j-1, \quad j = 2, 3, \dots, k+1, \quad (28)$$

die mit allen Gruppenelementen  $L_{ij}$  kommutieren:

$$\begin{aligned} [L_k^2, L_{ij}] &= [\delta_{ac}\delta_{bd}L_{ab}L_{cd}, L_{ij}] = \delta_{ac}\delta_{bd}(L_{ab}L_{cd}L_{ij} - L_{ij}L_{ab}L_{cd}) = \delta_{ac}\delta_{bd}\{L_{ab}[L_{cd}, L_{ij}] + [L_{ab}, L_{ij}]L_{cd}\} = \\ &\stackrel{(27)}{=} i\delta_{ac}\delta_{bd}\{L_{ab}(\delta_{ci}L_{dj} + \delta_{dj}L_{ci} - \delta_{cj}L_{di} - \delta_{di}L_{cj}) + (\delta_{ai}L_{bj} + \delta_{bj}L_{ai} - \delta_{aj}L_{bi} - \delta_{bi}L_{aj})L_{cd}\} = \\ &= i\{L_{ab}(\delta_{ai}\delta_{bd}L_{dj} + \delta_{ac}\delta_{bj}L_{ci} - \delta_{aj}\delta_{bd}L_{di} - \delta_{ac}\delta_{bi}L_{cj} + \\ &\quad + (\delta_{ci}\delta_{bd}L_{bj} + \delta_{ac}\delta_{dj}L_{ai} - \delta_{cj}\delta_{bd}L_{bi} - \delta_{ac}\delta_{di}L_{aj})L_{cd}\} = 0. \end{aligned}$$

Nunmehr ergibt sich für die Komponenten des Drehimpulses in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} L_1^2 &= -\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}, \\ L_2^2 &= -\left(\frac{1}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{L_1^2}{\sin^2\theta_2}\right), \\ &\vdots \\ L_k^2 &= -\left(\frac{1}{\sin^{k-1}\theta_k}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\sin^{k-1}\theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k} - \frac{L_{k-1}^2}{\sin^2\theta_k}\right), \\ &\vdots \\ L_{D-1}^2 &= -\left(\frac{1}{\sin^{D-2}\theta_{D-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}\sin^{D-2}\theta_{D-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}} - \frac{L_{D-2}^2}{\sin^2\theta_{D-1}}\right), \end{aligned} \quad (29)$$

wobei  $\hbar=1$  verwendet wurde. Die ersten beiden Operatoren in (29) entsprechen den bekannten Drehimpulsoperatoren  $L_z^2$  und  $L^2$  des dreidimensionalen Raumes. Weiterhin ist bemerkenswert, dass die generalisierten Drehimpulsoperatoren in dem Sinne unabhängig von der Dimension des Raumes sind, dass man den gleichen Ausdruck für  $L_k^2$  erhält, ungeachtet davon, ob dieser in einem  $(k+1)$ -,  $(k+2)$ -,  $(k+3)$ -, ..., dimensionalen Raum berechnet wird. Dieses liegt daran, dass  $L_k^2$  nicht von den Winkeln  $\theta_{k+1}, \theta_{k+2}, \dots, \theta_{D-1}$  abhängt. Mit den obenstehenden Ausdrücken und (18) lässt sich nun der  $D$ -dimensionale Laplaceoperator in Abhängigkeit vom Drehimpulsoperator darstellen und somit vereinfachen:

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L_{D-1}^2}{r^2}. \quad (30)$$

Wie anhand der expliziten Koordinatenabhängigkeit in (29) zu erkennen ist, kommutieren die Operatoren  $L_1^2, L_2^2, \dots, L_{D-1}^2$ , so dass sie simultane Eigenfunktionen  $Y_{\lambda_{D-1}, \lambda_{D-2}, \dots, \lambda_2, \lambda_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1})$  besitzen, welche die Eigenwertgleichung

$$L_k^2 Y_{\lambda_{D-1}, \lambda_{D-2}, \dots, \lambda_2, \lambda_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}) = \lambda_k Y_{\lambda_{D-1}, \lambda_{D-2}, \dots, \lambda_2, \lambda_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}) \quad (31)$$

erfüllen. Da sich die Operatoren  $L_k^2$  aus einer Summe von quadrierten hermiteschen Operatoren zusammensetzen, sind diese ebenfalls hermitesch und es folgt für die Eigenwerte  $\lambda_k$ , dass diese positiv und reell sind. Des Weiteren gilt für die Eigenwerte die Bedingung  $\lambda_k \geq \lambda_{k-1}$ , was sich durch analoge Überlegungen begründen lässt. Aus der Form der Operatoren ist ebenfalls ersichtlich, dass sich die Eigenfunktionen in der Gestalt

$$Y_{\lambda_{D-1}, \lambda_{D-2}, \dots, \lambda_2, \lambda_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}) = \prod_{k=1}^{D-1} \Theta_{\lambda_k, \lambda_{k-1}}(\theta_k) \quad (32)$$

schreiben lassen, wobei  $\Theta_{\lambda_k, \lambda_{k-1}}(\theta_k)$  eine Funktion darstellt, die lediglich von der Koordinate  $\theta_k$  abhängt. Mit  $\Theta_{\lambda_1, \lambda_0}(\theta_1) = \Theta_{\lambda_1}(\theta_1)$  erhält man nun die Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned} L_1^2 \Theta_{\lambda_1}(\theta_1) &= \lambda_1 \Theta_{\lambda_1}(\theta_1), \\ L_k^2(\lambda_{k-1}) \Theta_{\lambda_k, \lambda_{k-1}}(\theta_k) &= \lambda_k \Theta_{\lambda_k, \lambda_{k-1}}(\theta_k), \quad k = 2, 3, \dots, D-1, \end{aligned} \quad (33a-b)$$

wobei

$$L_k^2(\lambda_{k-1}) = - \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta_k^2} + (k-1) \cot \theta_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} - \frac{\lambda_{k-1}}{\sin^2 \theta_k} \right). \quad (34)$$

Für  $k = 2$  definieren die Gleichungen (33) die bekannten Kugelflächenfunktionen in drei Dimensionen und man bekommt unter Verwendung der gewöhnlichen Auf- und Absteigeoperatoren die Eigenwerte

$$\lambda_1 = l_1^2, \quad \lambda_2 = l_2(l_2 + 1), \quad (35)$$

wobei für die Laufweiten  $l_2 = 0, 1, 2, \dots$  und  $l_1 = -l_2, -l_2 + 1, \dots, l_2 - 1, l_2$  gilt. Dieses legt nahe, dass der allgemeine Ausdruck für  $\lambda_k$  durch

$$\lambda_k = l_k(l_k + k - 1) \quad (36)$$

gegeben ist und  $l_k = 0, 1, 2, \dots$  sowie  $l_{k-1} = 0, 1, 2, \dots, l_k$  gilt. Der Beweis erfolgt unter der Annahme von  $\lambda_{k-1} = l_{k-1}(l_{k-1} + k - 2)$  durch vollständige Induktion und ist im Anhang A wiedergegeben. Damit ergibt sich nun die gesuchte Eigenwertgleichung

$$L_{D-1}^2 Y_{\lambda_{D-1}, \lambda_{D-2}, \dots, \lambda_2, \lambda_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}) = l_{D-1}(l_{D-1} + D - 2) Y_{\lambda_{D-1}, \lambda_{D-2}, \dots, \lambda_2, \lambda_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}), \quad (37)$$

wobei  $Y_{\lambda_{D-1}, \lambda_{D-2}, \dots, \lambda_2, \lambda_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1})$  als generalisierte Kugelflächenfunktionen bezeichnet werden und die Quantenzahlen  $l$  in den Bereichen  $l_{D-1} = 0, 1, 2, \dots$  sowie  $l_{D-2} = 0, 1, 2, \dots, l_{D-1}$  bis  $l_2 = 0, 1, 2, \dots, l_1$  und  $l_1 = -l_2, -l_2 + 1, \dots, l_2 - 1, l_2$  definiert sind. Aus Bequemlichkeitsgründen wird im Folgenden  $L_{D-1}^2 \equiv L^2$  und  $l_{D-1} \equiv l$  verwendet.

### 2.2.3 Die Schrödingergleichung im $D$ -dimensionalen Raum

Mit Hilfe der Eigenwerte des Drehimpulsoperators lässt sich nun die radiale Schrödingergleichung herleiten. Dabei wird ein Teilchen betrachtet, welches sich in einem  $D$ -dimensionalen, rotationssymmetrischen Potential  $V_D(r)$  befindet. Für dieses Problem ist die Schrödingergleichung durch

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla_D^2 + V_D(r)\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (38)$$

gegeben ( $\hbar=1$ ), wobei  $m$  die Masse des Teilchens und  $\vec{r} = r(x_1, \dots, x_D)$  den  $D$ -dimensionalen Ortsvektor des Teilchens mit der Länge  $r = \left(\sum_{j=1}^D x_j^2\right)^{1/2}$  beschreibt [Cha90]. Das  $D$ -dimensionale Potential  $V_D(r)$  hängt dabei nur von dem Radius  $r$  ab. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Problems wird als Ansatz für die Wellenfunktion [Gu02]

$$\psi(\vec{r}) = R(r) Y_{l_{D-1}, l_{D-2}, \dots, l_2, l_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}) \quad (39)$$

gewählt, wobei mit  $R(r)$  die radiale Wellenfunktion und mit  $Y_{l_{D-1}, l_{D-2}, \dots, l_2, l_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1})$  die generalisierten Kugelflächenfunktionen beschrieben werden. Mithilfe dieses Ansatzes und (37) ergibt sich nun unmittelbar die Gleichung

$$-\frac{1}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+D-2)}{r^2}\right)R(r) = (E - V_D(r))R(r). \quad (40)$$

Um die winkelabhängigen Funktionen  $Y_{l_{D-1}, l_{D-2}, \dots, l_2, l_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1})$  zu vermeiden, haben *Bander* und *Itzykson* [Ban66] die  $D$ -dimensionalen harmonischen Polynome

$$P_{l_{D-2}, \dots, l_2, l_1}^l(\vec{x}) = r^l Y_{l_{D-2}, \dots, l_2, l_1}^l(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}) \equiv r^l Y_{l_{D-2}, \dots, l_2, l_1}^l(\hat{x}) \quad (41)$$

eingeführt, wobei die Bezeichnung  $l_{D-1} = l$  verwendet wurde. Die Komponenten der Funktion  $P_{l_{D-2}, \dots, l_2, l_1}^l(\vec{x})$  sind dabei homogene Polynome vom Grad  $l$  und die Funktion an sich erfüllt die Laplace-Gleichung

$$\nabla_{\vec{x}}^2 P_{l_{D-2}, \dots, l_2, l_1}^l(\vec{x}) = 0. \quad (42)$$

Die Anzahl der linear unabhängigen homogenen Polynome vom Grad  $l$  in den  $D$  Komponenten von  $\vec{x}$  ist durch  $N(l) = (l + D - 1)! / l!(D - 1)!$  gegeben, wobei jedoch die Laplace-Gleichung (42)  $N(l - 2) = (l + D - 3)! / (l - 2)!(D - 1)!$  Zwangsbedingungen auflegt. Insofern ist die Anzahl der harmonischen Polynome  $P_{l_{D-2}, \dots, l_2, l_1}^l(\vec{x})$  vom Grad  $l$  durch

$$N(l) - N(l - 2) = \frac{(2l + D - 2)(l + D - 3)!}{l!(D - 2)!} \quad (43)$$

bestimmt. Dieses stellt zugleich die mögliche Anzahl der Kugelflächenfunktionen  $Y_{l_{D-1}, l_{D-2}, \dots, l_2, l_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1})$  in  $D$  Dimensionen dar und ist die Ordnung von den irreduziblen Darstellungen der Gruppe  $SO(D)$  [Gu02]. Folglich muss jedes in den Komponenten eines Vektors  $\vec{x}$  gegebene Polynom einer symmetrischen Darstellung genügen.<sup>3</sup> Aufgrund der Kugelsymmetrie ist es ausreichend, lediglich dasjenige Polynom mit dem höchsten Gewicht

$$P_{l, \dots, l}^l(\vec{x}) = N_l(x_1 + ix_2)^l \quad (44)$$

(hierbei bezeichnet  $N_l$  den Normierungsfaktor) explizit zu bestimmen, da die restlichen Polynome aus diesem durch Rotation bestimmt werden können. Durch diese Überlegungen lässt sich nun die Lösung der radialen Schrödingergleichung im Schwerpunktssystem als

$$\psi(\vec{x}) = R_l(r) P_{l, \dots, l}^l(\vec{x}) \quad (45)$$

schreiben, womit sich die radiale Schrödingergleichung zu

$$\frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} R_l(r) + \frac{2l}{r} \frac{\partial}{\partial r} R_l(r) = -2(E - V_D(r)) R_l(r) \quad (46)$$

schreiben lässt, wobei  $R_l(r) = r^{-l} R(r)$  gilt. Somit ist diese Gleichung mit (40) identisch, es tritt in der Rechnung jedoch nicht explizit die Winkelabhängigkeit auf [Ban66, Gu02, Ma07, Don11].

---

<sup>3</sup> Die Anzahl der harmonischen Polynome  $P_{l_{D-2}, \dots, l_1}^l(\vec{x})$  vom Grad  $l$  kann auch auf eine andere Weise interpretiert werden: Unter Ausschluss der homogenen Polynome von der Form  $r^2 f(\vec{x})$ , wobei  $f(\vec{x})$  ein homogenes Polynom vom Grad  $(l-2)$  darstellt, gibt die Gleichung (43) die Zahl der restlichen linear unabhängigen homogenen Polynome vom Grad  $l$  in den Komponenten von  $\vec{x}$  an. Damit sind die harmonischen Polynome  $P_{l_{D-2}, \dots, l_1}^l(\vec{x})$  eine Basis für die in den Komponenten von  $\vec{x}$  gegebenen homogenen Polynome vom Grad  $l$ , wobei diejenigen der Form  $r^2 f(\vec{x})$  ausgeschlossen sind [Gu02].

### 3. Anwendungen in der nichtrelativistischen Quantenmechanik

Mithilfe der radialen Schrödingergleichung lassen sich nun verschiedene physikalische Probleme untersuchen. Im Rahmen dieser Arbeit werden dabei der harmonische und pseudoharmonische Oszillator aufgrund der ihnen zukommenden theoretischen und praktischen Relevanz näher untersucht.

#### 3.1 Der harmonische Oszillator

Der harmonische Oszillator spielt eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik, da dieser einerseits eines der wenigen Probleme darstellt, welches exakt lösbar ist und sich zum anderen viele reale physikalische Probleme durch einen harmonischen Oszillator exakt oder angenähert beschreiben lassen. Dieses umfasst beispielsweise die Schwingung von Atomen in Molekülen und Kristallen, aber auch die Feldquantisierung [Don11]. Aus diesem Grund wird im Folgenden sowohl die Lösung des bekannten harmonischen Oszillators im  $D$ -dimensionalen Raum präsentiert und nützliche Rekursionsformeln für diesen hergeleitet, als auch der harmonische Oszillator mit einer minimalen Unschärferelation untersucht, welcher auf Überlegungen der Stringtheorie zurückzuführen ist.

##### 3.1.1 Exakte Lösung des harmonischen Oszillators im $D$ -dimensionalen Raum

Für einen harmonischen Oszillator ist das Potential durch

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2, \quad k = m\omega^2 \quad (47)$$

gegeben. Hierbei beschreibt  $m$  die Masse und  $\omega$  die Frequenz des Teilchens. Nunmehr ist es möglich, die radiale Schrödingergleichung dieses Problems über verschiedene Methoden zu lösen (vgl. hierzu die in [Don11, Oye08, Wan02] angegebenen Quellen sowie [Gan05]), wobei in der Literatur am häufigsten eine Lösung durch Ansatz oder mithilfe einer Laplacetransformation angewendet wird. Im Rahmen dieser Arbeit wird das erste Konzept vorgestellt [Wan02]. Als Ansatz wird

$$R(r) = e^{-\alpha\xi} \xi^\beta \phi(\xi), \quad \xi = r^2 \quad (48)$$

mit den zu bestimmenden Parametern  $\alpha$  und  $\beta$  gewählt, da somit das asymptotische Verhalten der radialen Wellenfunktion für  $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$  richtig abgebildet wird. Setzt man diesen Ansatz in die radiale Schrödingergleichung (40) ein, so ergibt sich unter Beachtung der Kettenregel bei den Ableitungen<sup>4</sup> folgende Bestimmungsgleichung:

---

<sup>4</sup> Für diese gilt

$$\frac{dR(\xi)}{dr} = \frac{dR(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dr}$$
$$\frac{d^2 R(\xi)}{dr^2} = \frac{d^2 R(\xi)}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dr} \right)^2 + \frac{dR(\xi)}{d\xi} \frac{d^2 \xi}{dr^2}.$$

$$\xi \frac{d^2 \phi(\xi)}{d\xi^2} + [2\beta + D/2 - 2\alpha\xi] \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} + \left\{ \xi^{-1} [\beta(2\beta + D - 2)/2 - l(l + D - 2)/4] + \xi(\alpha^2 - mk/4) + [mE/2 - 2\alpha(\beta + D/4)] \right\} \phi(\xi) = 0 \quad (49)$$

Die freien Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  wählt man derart, dass sich dadurch die Terme mit  $\xi^{-1}$  und  $\xi$  herausheben. Dieses führt zu

$$\alpha = \sqrt{mk}/2, \quad \beta = l/2. \quad (50)$$

Durch die Substitution  $\rho = 2\alpha\xi$  gelangt man schließlich zum Ergebnis, in dem die obenstehende Differentialgleichung in eine konfluente hypergeometrische Differentialgleichung<sup>5</sup> überführt wird:

$$\rho \frac{d^2 \phi(\rho)}{d\rho^2} + (l + D/2 - \rho) \frac{d\phi(\rho)}{d\rho} + [E\sqrt{mk}/2 - (2l + D)/4] \phi(\rho) = 0. \quad (51)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist hinreichend bekannt, so dass sich die Lösung der D-dimensionalen Schrödingergleichung mit einem harmonischen Potential zu

$$\Psi_{l_{D-2}, \dots, l_1}^l(x) = N_{E,l} e^{-\rho/2} \rho^{l/2} {}_1F_1(-n', l + D/2, \rho) Y_{l_{D-2}, \dots, l_1}^l(\hat{x}) \quad (52)$$

ergibt, wobei  $\rho = r^2 \sqrt{mk}$  und  $n' = E\sqrt{m/k}/2 - (2l + D)/4$  gilt sowie  $N_{E,l}$  den noch zu bestimmenden Normierungsfaktor beschreibt. Weiterhin muss die Wellenfunktion im Unendlichen einen endlichen Wert aufweisen oder verschwinden, so dass die in der Lösung vorkommende konfluente hypergeometrische Funktion nach einer bestimmten Anzahl von Gliedern abbrechen muss. Dieses ist dann gegeben, sofern  $n'$  eine nichtnegative ganze Zahl ist, was zugleich eine Quantisierung der Energie  $E$  mit der Quantenzahl  $n$  bedingt:

$$E_n = \sqrt{k/m} (n + D/2), \quad n = 2n' + l = 0, 1, 2, \dots \quad (53)$$

Das Energiespektrum ist äquidistant und es gelten die Auswahlregeln

$$l = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots, n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1, 3, 5, \dots, n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}. \quad (54)$$

Die einzelnen Energieniveaus sind weiterhin entartet, da verschiedenen Kombinationen der Quantenzahl  $n$  und der Dimensionszahl  $D$  zum gleichen Energieeigenwert führen. Der Entartungsgrad  $d_l$  ist dabei durch

$$d_l = \frac{(n + D - 1)!}{n!(D - 1)!} \quad (55)$$

---

<sup>5</sup> Vgl. hierzu Anhang B.



gegeben. Schließlich muss die Normierungskonstante  $N_{E,l}$  aus folgender Bedingung bestimmt werden:

$$\int |\Psi'_{l_{D-2}, \dots, l_1}(x)|^2 \prod_{a=1}^D dx_a = 1. \quad (56)$$

Da die Kugelflächenfunktionen bereits normiert sind, ergibt sich die Normierungskonstante durch Integration über den radialen Anteil. Folglich gilt:

$$\int_0^\infty r^{D-1} \left[ N_{E,l}^2 e^{-\rho} \rho^l \left( {}_1F_1(-n', l + D/2, \rho) \right)^2 \right] dr = 1 \quad (57)$$

mit  $\rho = r^2 \sqrt{mk}$ . Die Auswertung des Integrals (57) erfolgt nun über eine Beziehung der konfluenten hypergeometrischen Funktion  ${}_1F_1(-n, \beta + 1, \rho)$  zu den allgemeinen Laguerre-Polynomen  $L_n^\beta(\rho)$ , welche gilt, sofern  $n'$  eine nichtnegative ganze Zahl ist [Gra81]:

$$L_n^\beta(\rho) = \frac{\Gamma(\beta + n + 1)}{n! \Gamma(\beta + 1)} {}_1F_1(-n, \beta + 1, \rho). \quad (58)$$

Unter Anwendung der Gleichung (58) und Ausnutzung der Orthogonalitätsrelation der Laguerre-Polynome,

$$\int_0^\infty \rho^\beta e^{-\rho} L_n^\beta(\rho) L_m^\beta(\rho) d\rho = \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{n!} \delta_{nm}, \quad (59)$$

ergibt sich nach einer leichten Rechnung das gesuchte Resultat:

$$N_{E,l} = \frac{(mk)^{D/8}}{\Gamma(l + D/2)} \left( \frac{2\Gamma(n' + l + D/2)}{n!} \right)^{1/2}. \quad (60)$$

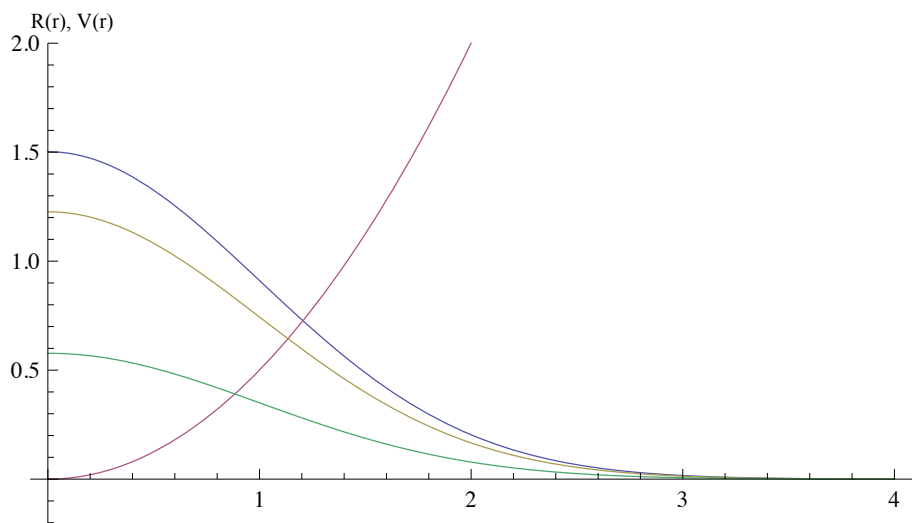
### 3.1.2 Vergleich mit dem dreidimensionalen Fall

Die Eigenenergien des harmonischen Oszillators hängen im  $D$ -dimensionalen Fall lediglich über die Nullpunktsenergie von der Dimension  $D$  ab, so dass diese demgemäß mit zunehmender Dimensionalität des betrachteten Problems ansteigt. Dieses bedingt zugleich, dass die Grundzustandsenergie im  $D$ -dimensionalen Fall der Energie des ersten angeregten Zustands im  $(D-2)$ -dimensionalen Fall entspricht. Diese Überlegung lässt sich beliebig fortsetzen. Weiterhin ist es evident, dass die Entartung der Energieniveaus mit zunehmender Dimension bei konstanter Quantenzahl  $n$  ebenfalls zunimmt. Ein Überblick über die ersten Energieniveaus für unterschiedliche Dimensionen liefert Abbildung 1.

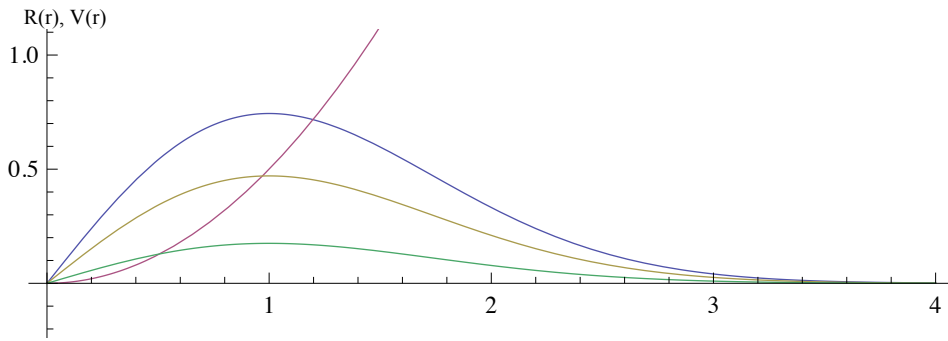
Energieniveau	Dimension $D$	Quantenzahl $n$		Entartung $d_i$
$E = 1/2$	$D = 1$	$n = 0$	$n' = 0, l = 0$	$d_i = 1$
$E = 3/2$	$D = 1$	$n = 1$	$n' = 0, l = 1$	$d_i = 1$
	$D = 3$	$n = 0$	$n' = 0, l = 0$	$d_i = 1$
$E = 5/2$	$D = 1$	$n = 2$	$n' = 0, l = 2$ $n' = 1, l = 0$	$d_i = 1$
	$D = 3$	$n = 1$	$n' = 0, l = 1$	$d_i = 3$
	$D = 5$	$n = 0$	$n' = 0, l = 0$	$d_i = 1$
$E = 7/2$	$D = 1$	$n = 3$	$n' = 0, l = 3$ $n' = 1, l = 1$	$d_i = 1$
	$D = 3$	$n = 2$	$n' = 0, l = 2$ $n' = 1, l = 0$	$d_i = 6$
	$D = 5$	$n = 1$	$n' = 0, l = 1$	$d_i = 5$
	$D = 7$	$n = 0$	$n' = 0, l = 0$	$d_i = 1$
$E = 9/2$	$D = 1$	$n = 4$	$n' = 0, l = 4$ $n' = 1, l = 2$ $n' = 2, l = 0$	$d_i = 1$
	$D = 3$	$n = 3$	$n' = 0, l = 3$ $n' = 1, l = 1$	$d_i = 10$
	$D = 5$	$n = 2$	$n' = 0, l = 2$ $n' = 1, l = 0$	$d_i = 15$
	$D = 7$	$n = 1$	$n' = 0, l = 1$	$d_i = 7$
	$D = 9$	$n = 0$	$n' = 0, l = 0$	$d_i = 1$

**Abbildung 1:** Übersicht über die Energieniveaus für verschiedene Dimensionen.

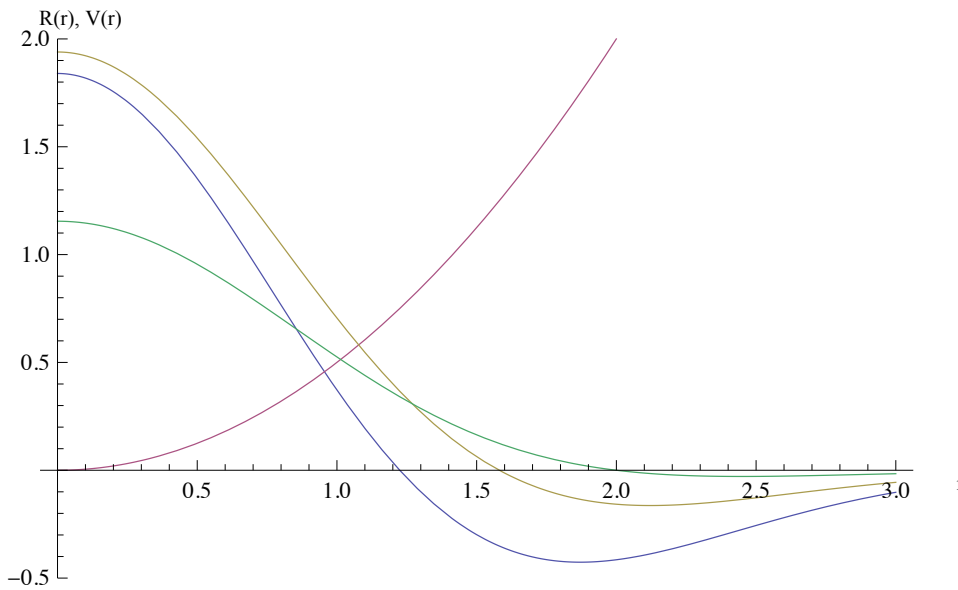
Die radialen Wellenfunktionen weisen bei der gleichen Quantenzahl  $n$  in verschiedenen Dimensionen einen ähnlichen Verlauf auf. Für einige Zustände sind diese schematisch in den nachfolgenden Abbildungen dargestellt.



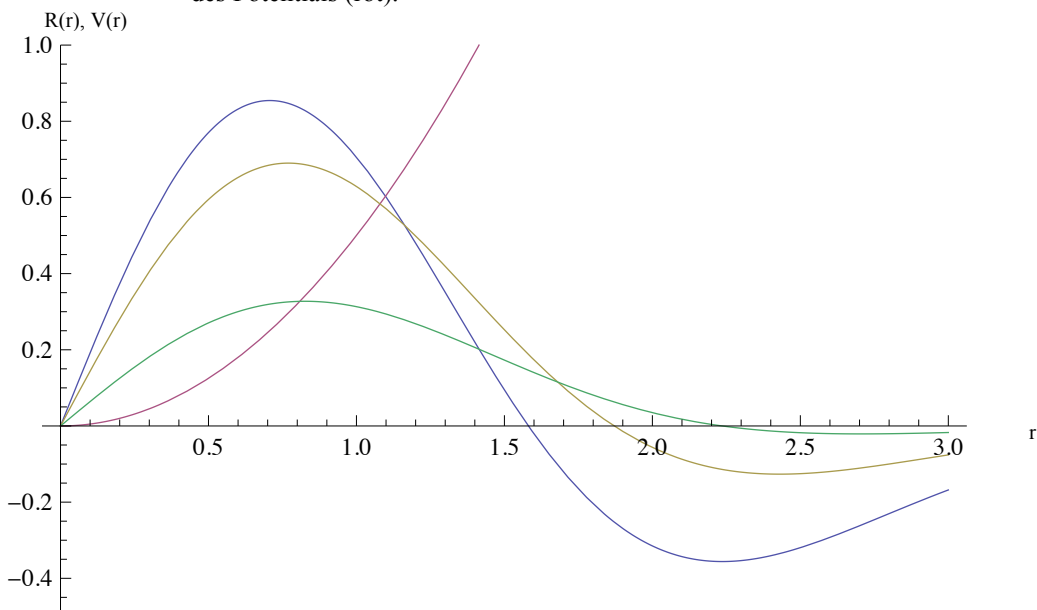
**Abbildung 2:** Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den Grundzustand ( $n=0$ ,  $n'=0$ ,  $l=0$ ) in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit  $m = k = 1$  und des Potentials (rot).



**Abbildung 3:** Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den ersten angeregten Zustand ( $n=1$ ,  $n'=0$ ,  $l=1$ ) in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit  $m = k = 1$  und des Potentials (rot).



**Abbildung 4:** Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den zweiten angeregten Zustand ( $n=2$ ,  $n'=1$ ,  $l=0$ ) in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit  $m = k = 1$  und des Potentials (rot).



**Abbildung 5:** Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den dritten angeregten Zustand ( $n=3$ ,  $n'=1$ ,  $l=1$ ) in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit  $m = k = 1$  und des Potentials (rot).

### 3.1.3 Der harmonische Oszillator mit einer minimalen Ortsunschärferelation

Im heutigen Standardmodell der Teilchenphysik existieren eine Reihe von ungelösten Fragen, die u.a. mit Hilfe der Stringtheorie und der Loop-Quantengravitation gelöst werden sollen, wobei diese Theorien auf unterschiedlichen Grundannahmen basieren [Har07, Kem95]. Gemeinsam ist ihnen hingegen das Postulat einer universellen, minimalen Längeneinheit, durch die das räumliche Auflösungsvermögen beschränkt ist. Aus diesem Grund werden im Folgenden die Eigenenergien des harmonischen Oszillators mit einer minimalen Ortsunschärferelation  $\Delta x_0$  bestimmt. Unter der Annahme einer Rotationssymmetrie und kleinen Werten für  $\Delta x_0$  ergibt sich für dieses Problem in  $D$  Dimensionen ein modifizierter Kommutator zwischen Ort und Impuls, durch den eine minimale Ortsunschärfe  $\Delta x_0 > 0$  bedingt wird. In erster Ordnung besitzt dieser Kommutator die Form

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \beta \hat{p}^2 \delta_{ij} + \beta' \hat{p}_i \hat{p}_j), \quad (61)$$

wobei  $\hat{p}^2 = \sum_{i=1}^D \hat{p}_i \hat{p}_i$  und  $\beta, \beta' > 0$  gilt [Kem96]. Mit (61) folgt aus den allgemeinen Unschärferelationen  $\Delta x_i \Delta p_i \geq |\langle [\hat{x}_i, \hat{p}_i] \rangle|/2$  die isotropische<sup>6</sup> minimale Länge

$$\Delta x_0 = \hbar \sqrt{\beta D + \beta'}. \quad (62)$$

Sofern die Komponenten des Impulsoperators miteinander kommutieren, d.h.

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad (63)$$

bestimmen sich die Kommutatoren der Ortsoperatoren aus der Jacobi-Identität und der geforderten Hermitizität, d.h.  $\hat{x}_i = \hat{x}_i^+$ ,  $\hat{p}_i = \hat{p}_i^+$ , zu

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar \frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta\hat{p}^2}{(1 + \beta\hat{p}^2)} (\hat{p}_i \hat{x}_j - \hat{p}_j \hat{x}_i). \quad (64)$$

Damit folgt für die Operatoren im Impulsraum

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= i\hbar \left[ (1 + \beta p^2) \frac{d}{dp_i} + \beta' p_i p_j \frac{d}{dp_j} + \gamma p_i \right], \\ \hat{p}_i &= p_i. \end{aligned} \quad (65a-b)$$

Die Wahl der Konstante  $\gamma$  in der Darstellung der Ortsoperatoren  $\hat{x}_i$  hat keinen Einfluss auf die Kommutatorrelation (64), sondern bestimmt die Gewichtungsfunktion bei der Definition des Skalarproduktes [Cha02]. Aus der Rotationssymmetrie des  $D$ -dimensionalen Hamiltonoperators

$$H = \frac{1}{2} m \omega^2 \sum_{i=1}^D \hat{x}_i^2 + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^D p_i^2 \quad (66)$$

---

<sup>6</sup> Dieses bedeutet  $\Delta x_{0i} = \Delta x_{0j}$ , so dass im Folgenden die Indizes weggelassen werden.

folgt nunmehr, dass sich die Energieeigenfunktionen im Impulsraum wiederum als Produkt aus Kugelflächenfunktionen und einer radialen Wellenfunktion schreiben lassen:

$$\Psi_D(\vec{p}) = Y_{l_{D-2}, \dots, l_1}^l(\Omega) R(p). \quad (67)$$

Damit ergibt sich zugleich analog zu (30) die Substitution

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^D \frac{d^2}{dp_i^2} &= \frac{d^2}{dp^2} + \frac{D-1}{p} \frac{d}{dp} - \frac{L^2}{p^2}, \\ \sum_{i=1}^D p_i \frac{d}{dp_i} &= p \frac{d}{dp}, \end{aligned} \quad (68a-b)$$

wobei  $L^2 = l(l+D-2)$ ,  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ , gilt. Folglich reduziert sich die  $D$ -dimensionale Schrödingergleichung auf die Lösung der Bestimmungsgleichung für die radiale Wellenfunktion  $R(p)$ , welche durch

$$\begin{aligned} -m\hbar\omega \left[ \left\{ \left[ 1 + (\beta + \beta') p^2 \right] \frac{d}{dp} \right\}^2 + \left\{ \frac{D-1}{p} + [(D-1)\beta + 2\gamma] p \right\} \left\{ \left[ 1 + (\beta + \beta') p^2 \right] \frac{d}{dp} \right\} \right. \\ \left. - \frac{L^2}{p^2} + (\gamma D - 2\beta L^2) + \left\{ \gamma(\beta D + \beta' + \gamma) - \beta^2 L^2 \right\} p^2 \right] R(p) + \frac{1}{m\hbar\omega} p^2 R(p) = \frac{2E}{\hbar\omega} R(p) \end{aligned} \quad (69)$$

gegeben ist. Die Lösung dieser Gleichung<sup>7</sup> liefert die Eigenenergien [Cha02]

$$\begin{aligned} E_{n,l} &= \hbar\omega \left[ \left( n + \frac{D}{2} \right) \sqrt{1 + \left\{ \beta^2 L^2 + \frac{(D\beta + \beta')^2}{4} \right\} m^2 \hbar^2 \omega^2} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (\beta + \beta') \left( n + \frac{D}{2} \right)^2 + (\beta - \beta') \left( L^2 + \frac{D^2}{4} \right) + \beta' \frac{D}{2} \right\} \frac{m\hbar\omega}{2} \right]. \end{aligned} \quad (70)$$

Damit ergeben sich die Eigenenergien in linearer Näherung zu

$$E_{n,l} \approx \hbar\omega \left[ \left[ \left( n + \frac{D}{2} \right) + \left\{ (\beta + \beta') \left( n + \frac{D}{2} \right)^2 + (\beta - \beta') \left( L^2 + \frac{D^2}{4} \right) + \beta' \frac{D}{2} \right\} \frac{m\hbar\omega}{2} \right] \right]. \quad (71)$$

Mit  $\beta = \beta' = 0$  resultiert das bereits bekannte Ergebnis für einen harmonischen Oszillator mit kanonischer Vertauschungsrelation. Weiterhin ist ersichtlich, dass durch die minimale Längenunsicherheit die Energieentartung zum Teil aufgehoben wird, was durch die Substitutionen

$$k^2 = \beta m\hbar\omega, \quad k'^2 = \beta' m\hbar\omega \quad (72)$$

---

<sup>7</sup> Der genaue Lösungsweg ist in der angegebenen Literatur dargestellt und wird hier nicht weiter angeführt. Prinzipiell wird die Gleichung (69) durch Substitutionen und Parameterbestimmung derart umgeformt, dass die Lösung durch ein Jacobi-Polynom gegeben ist. Die exakte Lösung der radialen Wellenfunktion ist ebenfalls in der obenstehenden Quelle gegeben.

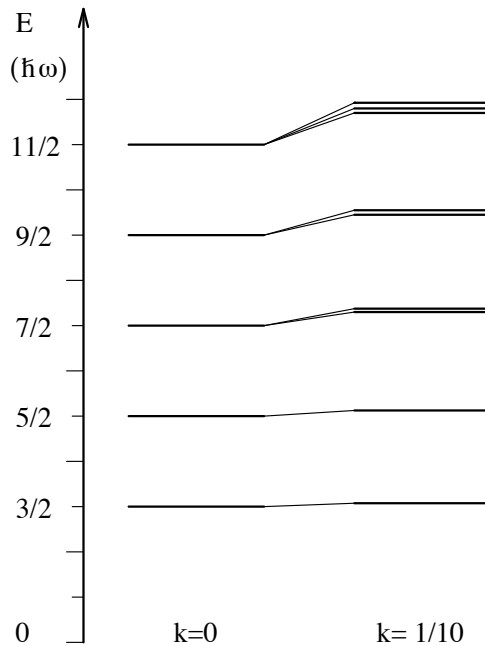
und die Definition der Variablen

$$s = \frac{n-l}{2} + 1 = \begin{cases} 1, \dots, \frac{n+2}{2} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1, \dots, \frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (73)$$

verdeutlicht werden kann. Mit diesen Substitutionen ergibt sich das Energiespektrum in den jeweiligen Dimensionen zu

$$E_{n,l} \approx \hbar\omega \left[ \left( n + \frac{D}{2} \right) + k^2 \left( (n+D)(n+1) + \frac{D^2}{4} \right) - k'^2 \left( n + \frac{3D}{4} \right) - (k^2 - k'^2)s (2(n-s) + (D+2)) \right]. \quad (74)$$

In (74) entspricht der dimensionsabhängige Anteil des ersten Terms der Nullpunktsenergie des harmonischen Oszillators mit kanonischer Vertuschungsrelation und der letzte Term bewirkt die Feinstruktur der Energieniveaus. Damit ist aber zugleich ersichtlich, dass es für den Fall  $k^2 = k'^2$  zu keiner Aufteilung kommt. Im allgemeinen Fall ist die Entartung des  $n$ -ten Zustands (71) jedoch gebrochen, so dass lediglich eine Entartung der Feinstrukturzustände in Abhängigkeit von der Drehimpulsquantenzahl  $l$  gegeben ist, die auf der Rotationssymmetrie basiert [Kem95, Kem96, Cha02]. Folglich ist die Entartung der jeweiligen Zustände durch (43) gegeben. Das Spektrum für einen dreidimensionalen harmonischen Oszillator ist in Abbildung 6 dargestellt.



**Abbildung 6:** Aufspaltung der Energielevel eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators für ein nichtpunktförmiges Teilchen mit einer relativen Größe  $k = 1/10$  für den Fall  $k'^2 = 2k^2$  [Kem96].

Der Nachweis einer  $n^2$ -Abhängigkeit der Eigenenergien des harmonischen Oszillators wäre ein deutliches Indiz für die Anwendbarkeit der modifizierten Vertauschungsrelationen. Dieser könnte beispielsweise mit Hilfe eines Elektrons in einer Penning-Falle geführt werden, da dessen Bewegung durch einen eindimensionalen harmonischen Oszillator beschrieben wird. Da  $k$  und  $k'$  jedoch sehr kleine Werte annehmen werden, wäre eine Verschiebung der Energieniveaus erst bei großen Quantenzahlen  $n$  nachweisbar [Cha02].

### 3.1.4 Rekursionsrelationen für die radiale Wellenfunktion

Im Folgenden wird wieder der harmonische Oszillator mit einer kanonischen Vertauschungsrelation zwischen Impuls und Ort betrachtet. Der Hamiltonoperator für einen  $D$ -fach entarteten harmonischen Oszillator mit dem Drehimpuls  $l$  ist durch

$$H = -\frac{1}{2m} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(D+l-2)}{r^2} \right\} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (75)$$

gegeben, wobei das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum  $\hbar = 1$  gesetzt wurde und für  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  gilt. Sofern dieser Operator auf die radiale Wellenfunktion  $R(n, l)$  angewandt wird, liefert er gerade die Energieeigenwerte  $E_n$ :

$$HR(n, l) = E_n R(n, l) \quad \text{mit} \quad E_n = \omega(n + D/2). \quad (76)$$

Aus Vereinfachungsgründen wird nunmehr die Variable  $\varsigma = \sqrt{m\omega} r$  definiert und diese in die Gleichung (75) des Hamiltonoperators substituiert. Dieses ergibt den modifizierten Hamiltonoperator

$$H(l) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{d^2}{d\varsigma^2} + \frac{D-1}{\varsigma} \frac{d}{d\varsigma} - \frac{l(D+l-2)}{\varsigma^2} - \varsigma^2 \right\}, \quad (77)$$

welcher die Eigenwertgleichung

$$H(l)R(n, l) = \varepsilon R(n, l) \quad \text{mit} \quad \varepsilon = (n + D/2) \quad (78)$$

erfüllt. Der Zusammenhang zwischen (76) und (78) ist durch

$$H = \omega H(l), \quad E_n = \omega \varepsilon \quad (79)$$

gegeben. Um die Rekursionrelationen für die radiale Wellenfunktion zu erhalten, werden folgende Leiteroperatoren<sup>8</sup> definiert [Lou60b]:

---

<sup>8</sup> Im Gegensatz zu vorangehenden Arbeiten von Schrödinger [Sch41] und Infeld und Hull [Inf51] erfolgt keine zweifache Faktorisierung der Eigenwertgleichung, sondern der Hamiltonoperator wird vierfach faktorisiert. Dadurch können nicht nur die Eigenwerte und radialen Wellenfunktionen bestimmt werden, sondern zugleich Operatoren abgeleitet werden, mit denen es möglich ist, die nichtverschwindenden Matrixelemente der kartesischen Koordinaten des Oszillators zu bestimmen [Lou60b]. Dieses bleibt im Rahmen dieser Arbeit jedoch unberücksichtigt.

$$\begin{aligned}
A^+(l) &= -\frac{d}{d\zeta} + \frac{l}{\zeta} + \zeta, \\
A^-(l) &= \frac{d}{d\zeta} + \frac{(l+D-2)}{\zeta} + \zeta, \\
a^+(l) &= \frac{d}{d\zeta} - \frac{l}{\zeta} + \zeta, \\
a^-(l) &= -\frac{d}{d\zeta} - \frac{(l+D-2)}{\zeta} + \zeta.
\end{aligned} \tag{80a-d}$$

Über die in (80a-d) dargestellten Operatoren lässt sich der Hamiltonoperator ausdrücken, so dass

$$2H(l) = \begin{cases} A^-(l+1)A^+(l) - (2l+D), \\ A^+(l-1)A^-(l) - (2l+D-4), \\ a^-(l+1)a^+(l) + (2l+D), \\ a^+(l-1)a^-(l) + (2l+D-4) \end{cases} \tag{81a-d}$$

gilt. Durch eine geeignete rechts- oder linksseitige Multiplikation der Operatoren  $A^\pm(l)$  und  $a^\pm(l)$  an die Gleichungen (81a-d) ergeben sich verschiedene Relationen, die einen Zusammenhang zwischen den Hamiltonoperatoren mit den Bahndrehimpulsquantenzahlen  $l$  und  $(l+1)$  bzw.  $(l-1)$  herstellen. Somit folgt für die erste Identität (81a) durch linkseitige Multiplikation mit  $A^-(l)$ :

$$\begin{aligned}
2H(l-1)A^-(l) &= A^-(l)A^+(l-1)A^-(l) - (2l+D)A^-(l) + 2A^-(l) = \\
&= A^-(l)\{2H(l) + (2l+D-4)\} - (2l+D)A^-(l) + 2A^-(l) = \\
&= 2A^-(l)H(l) - 2A^-(l) \\
\Rightarrow H(l-1)A^-(l) - A^-(l)H(l) &= -A^-(l).
\end{aligned} \tag{82}$$

Ein analoges Vorgehen liefert für die restlichen Gleichungen folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
H(l+1)A^+(l) - A^+(l)H(l) &= A^+(l), \\
H(l\pm 1)a^\pm(l) - a^\pm(l)H(l) &= \mp a^\pm(l).
\end{aligned} \tag{83a-b}$$

Eine Anwendung von (83) auf die radiale Wellenfunktion  $R(n,l)$  führt zu den Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned}
H(l\pm 1)A^\pm(l)R(n,l) &= (\varepsilon \pm 1)A^\pm(l)R(n,l), \\
H(l\pm 1)a^\pm(l)R(n,l) &= (\varepsilon \mp 1)a^\pm(l)R(n,l).
\end{aligned} \tag{84a-b}$$



Aus (84) ist ersichtlich, dass die Funktionen  $A^\pm(l)R(n,l)$  und  $a^\pm(l)R(n,l)$  Eigenfunktionen zum Hamiltonoperator  $H(l \pm 1)$  mit den Eigenwerten  $(\varepsilon \pm 1)$  bzw.  $(\varepsilon \mp 1)$  sind. In Verbindung mit (78) folgt damit, dass  $A^\pm(l)R(n,l)$  proportional zur normierten Eigenfunktion  $R(n \pm 1, l \pm 1)$  und  $a^\pm(l)R(n,l)$  proportional zur normierten Eigenfunktion  $R(n \mp 1, l \pm 1)$  sein muss, d.h.

$$\begin{aligned} A^\pm(l)R(n,l) &= B^\pm R(n \pm 1, l \pm 1), \\ a^\pm(l)R(n,l) &= C^\pm R(n \mp 1, l \pm 1), \end{aligned} \tag{85a-b}$$

wobei  $B^\pm$  und  $C^\pm$  die Normierungsfaktoren sind, welche im Allgemeinen von den Quantenzahlen  $n$  und  $l$  abhängen. Diese lauten<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} B^+ &= -\sqrt{2(n+l+D)}, \\ B^- &= -\sqrt{2(n+l+D-2)}, \\ C^+ &= \sqrt{2(n-l)}, \\ C^- &= \sqrt{2(n-l+2)}. \end{aligned} \tag{86a-d}$$

Mit (85) lassen sich nun einige nützliche Rekursionrelationen konstruieren. So gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} \zeta R(n,L) &= \frac{1}{2} \left( A^+(l)R(n,l) + a^+(l)R(n,l) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( A^-(l)R(n,l) + a^-(l)R(n,l) \right). \end{aligned} \tag{87}$$

Analog ergeben sich die folgenden Relationen:

---

<sup>9</sup> Die Herleitung der Normierungskonstanten beruht auf Operatorrechnungen, mit denen ein Zusammenhang zwischen den Normierungskonstanten und den Eigenwerten hergestellt wird. Der Beweis wird an dieser Stelle nicht näher erläutert, ist aber in [Lou60b] dargestellt.

$$\begin{aligned}
\varsigma R(n,l) &= \begin{cases} -\sqrt{\frac{n+l+D}{2}}R(n+1,l+1) + \sqrt{\frac{n-l}{2}}R(n-1,l+1), \\ -\sqrt{\frac{n+l+D-2}{2}}R(n-1,l-1) + \sqrt{\frac{n-l+2}{2}}R(n+1,l-1), \end{cases} \\
\frac{(D+2l-2)}{\varsigma} R(n,l) &= \begin{cases} -\sqrt{2(n+l+D)}R(n+1,l+1) - \sqrt{2(n-l+2)}R(n+1,l-1), \\ -\sqrt{2(n+l+D-2)}R(n-1,l-1) - \sqrt{2(n-l)}R(n-1,l+1), \end{cases} \\
(D+2l-2)\frac{dR(n,l)}{d\varsigma} &= \begin{cases} (D+l-2) \cdot \left[ \sqrt{\frac{(n+l+D)}{2}}R(n+1,l+1) + \sqrt{\frac{(n-l)}{2}}R(n-1,l+1) \right] \\ -l \cdot \left[ \sqrt{\frac{(n+l+D-2)}{2}}R(n-1,l-1) + \sqrt{\frac{(n-l+2)}{2}}R(n+1,l-1) \right]. \end{cases}
\end{aligned} \tag{88a-c}$$

Besonders nützlich ist dabei die Gleichung (88a): Da die radialen Wellenfunktionen  $R(n,l)$  für verschiedene Werte von  $n$ , aber gleiche Werte für  $l$  orthogonal zueinander sind, lassen sich mit Hilfe der Relation (88a) besonders einfach Integrale der Form  $\int_0^\infty r^k R^*(n',l')R(n,l)r^{D-1}dr$ ,  $k \geq 1$  auswerten [Lou60b]. Im Folgenden werden die radialen Wellenfunktionen nun in expliziter Abhängigkeit von den Laguerre-Polynomen betrachtet:

$$R_{n_r,l}^D(r) = \sqrt{\frac{2n_r!}{\Gamma(n_r+l+D/2)}} r^l e^{-r^2/2} L_{n_r}^{l+(D-2)/2}(r^2). \tag{89}$$

Nunmehr gilt für die Ableitung der Laguerre-Polynome nach ihrem Argument [Gra81]

$$x \frac{d}{dx} L_n^\beta(x) = \begin{cases} n L_n^\beta(x) - (n+\beta) L_{n-1}^\beta(x), \\ (n+1) L_{n+1}^\beta(x) - (n+\beta+1-x) L_n^\beta(x). \end{cases} \tag{90}$$

Mit (90) und der Relation [Don11]

$$e^{-B} A e^B = A + [A,B] + \frac{1}{2!} [[A,B],B] + \frac{1}{3!} [[[A,B],B],B] + \dots, \tag{91}$$

wobei  $A$  und  $B$  zwei frei wählbare Operatoren darstellen, erhält man die Auf- und Absteigeoperatoren in Bezug auf die Quantenzahl  $n_r$ :

$$L_\pm = \frac{1}{2} \left( \pm r \frac{d}{dr} - r^2 + H(l) \pm \frac{D}{2} \right), \tag{92}$$

wobei  $H(l)$  den radialen Hamiltonoperator (77) beschreibt. Definiert man nun weiterhin  $L_0 = H(l)/2$ , so erfüllen die Operatoren  $L_{\pm}$  und  $L_0$  die Kommutationsrelationen der Lie-Algebra  $\text{su}(1,1)$  [Saz00],

$$[L_0, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}, \quad [L_+, L_-] = -2L_0, \quad (93\text{a-b})$$

wobei

$$\begin{aligned} L_+ R_{n_r, l}^D(r) &= \sqrt{(n_r + 1)(n_r + l + D/2)} R_{(n_r + 1), l}^D(r), \\ L_- R_{n_r, l}^D(r) &= \sqrt{n_r(n_r + l + D/2 - 1)} R_{(n_r - 1), l}^D(r), \\ L_0 R_{n_r, l}^D(r) &= (n_r + l/2 + D/4) R_{n_r, l}^D(r) \end{aligned} \quad (94\text{a-c})$$

gilt [Don11].

### 3.2 Der pseudoharmonische Oszillator

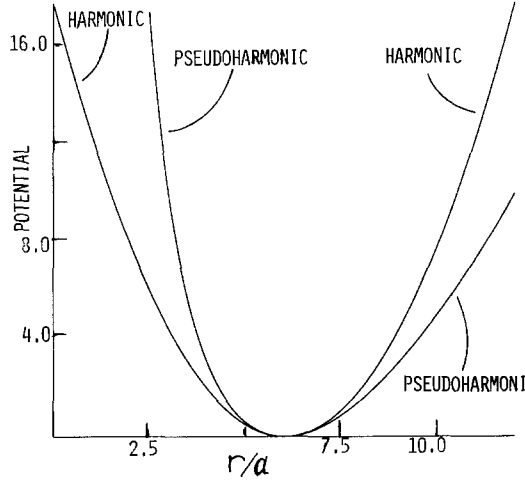
Lösbare Potentiale, wozu auch das Potential des pseudoharmonischen Oszillators gehört, sind in vielen Feldern der Physik von großer Bedeutung und haben vor allem auch in der höherdimensionalen Quantenmechanik zunehmende Beachtung gefunden [Oye08]. So ist es eindeutig bekannt, dass die Molekülschwingungen realitätsnäher durch einen pseudoharmonischen Oszillator beschrieben werden, als dieses mit einem harmonischen Potential möglich ist [Sag85]. Deshalb wird in diesem Abschnitt die Lösung der radialen Schrödingergleichung mit einem pseudoharmonischen Oszillator näher untersucht. Dabei wird ein Potential von der Form  $V(x) = V_0(x/a - a/x)^2$  mit den Parametern  $a$  und  $V_0$  zugrunde gelegt, welches von *Goldman* und *Krivchenkov* in den sechziger Jahren entwickelt wurde [Gol61].

#### 3.2.1 Exakte Lösung des pseudoharmonischen Oszillators

Das Potential des pseudoharmonischen Oszillators ist durch

$$V(r) = \frac{1}{8} k r_0^2 \left( \frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{r} \right)^2 \quad (95)$$

gegeben, wobei  $k$  die Federkonstante und  $r_0$  die Bindungslänge im Gleichgewicht beschreibt [Gol61, Don02]. In Abbildung 7 ist die Form des pseudoharmonischen Potentials im Vergleich zum harmonischen Potential dargestellt.



**Abbildung 7:** Harmonisches und pseudoharmonisches Potential mit dem gleichen Gleichgewichtsabstand  $r_0$  und der gleichen Federkonstante [Sag85].

Die Lösung der Schrödingergleichung erfolgt analog zu derjenigen des harmonischen Oszillators, so dass aufgrund der Rotationssymmetrie nur der radiale Anteil des Problems betrachtet wird. Der Ansatz

$$R(r) = e^{-\lambda \xi} \xi^\tau \phi(\xi), \quad \xi = r^2 \quad (96)$$

liefert mit (40) folgende Bestimmungsgleichung für die radiale Wellenfunktion [Oye08, Don11]:

$$\begin{aligned} \xi \frac{d^2 \phi(\xi)}{d\xi^2} + \left( 2\tau + \frac{D}{2} - 2\lambda \xi \right) \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} + \left\{ \xi^{-1} \left[ \frac{\tau(2\tau + D - 2)}{2} - \frac{l(l + D - 2)}{4} - \frac{mkr_0^4}{16} \right] \right. \\ \left. + \xi \left( \lambda^2 - \frac{mk}{16} \right) + \left[ \frac{mE}{2} + \frac{mkr_0^2}{8} - 2\lambda \left( \tau + \frac{D}{4} \right) \right] \right\} \phi(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Nunmehr werden die Parameter  $\lambda$  und  $\tau$  so gewählt, dass die Terme mit  $\xi$  und  $\xi^{-1}$  eliminiert werden. Damit erhält man

$$\lambda = \frac{\sqrt{mk}}{4}, \quad \tau = -\frac{D-2}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{(2l + D - 2)^2 + mkr_0^4}. \quad (98)$$

Mit der Substitution  $\rho = 2\lambda \xi$  und (98) wird (97) wiederum in eine konfluente hypergeometrische Gleichung überführt:

$$\rho \frac{d^2 \phi(\rho)}{d\rho^2} + \left( 2\tau + \frac{D}{2} - \rho \right) \frac{d\phi(\rho)}{d\rho} + \left\{ E \sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{r_0^2 \sqrt{mk}}{4} - \tau - \frac{D}{4} \right\} \phi(\rho) = 0. \quad (99)$$

Somit lauten die Lösungen der D-dimensionalen Schrödingergleichung mit einem pseudoharmonischen Potential

$$\Psi_{l_{D-2}, \dots, l_1}^l(x) = N_{E,l} e^{-\rho/2} \rho^\tau {}_1F_1(-n_r, 2\tau + D/2, \rho) Y_{l_{D-2}, \dots, l_1}^l(\hat{x}) \quad (100)$$

mit

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sqrt{mk}}{2} r^2, \\ n_r &= E \sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{r_0^2 \sqrt{mk}}{4} - \tau - \frac{D}{4} = 0, 1, 2, \dots, \\ N_{E,l} &= \frac{(mk)^{D/8}}{\Gamma(2\tau + D/2)} \left[ \frac{\Gamma(n_r + 2\tau + D/2)}{2^{D/2-1} n_r!} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (101a-c)$$

Die Normierungskonstante  $N_{E,l}$  bestimmt sich aus der Bedingung  $\int_0^\infty |R(r)|^2 r^{D-1} dr = 1$  unter der Ausnutzung des Zusammenhangs zwischen der konfluenten hypergeometrischen Funktion und den Laguerre-Polynomen. Weiterhin erfordert die Normierbarkeit, dass die Lösungen der Wellengleichungen im Unendlichen einen endlichen Wert aufweisen oder verschwinden müssen. Hieraus resultiert die Quantisierungsbedingung für  $n_r$ , womit zugleich die quantisierten Energieeigenwerte  $E_{n_r,l}$  gegeben sind:

$$E_{n_r,l} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left( n_r - \frac{r_0^2 \sqrt{mk}}{4} + \tau + \frac{D}{4} \right) = \sqrt{\frac{k}{m}} \left( n_r + \frac{1}{2} - \frac{r_0^2 \sqrt{mk}}{4} + \frac{\sqrt{(2l + D - 2)^2 + mkr_0^4}}{4} \right). \quad (102)$$

Für gegebene Werte der Parameter  $\tau$  und  $r_0$  ist das Energiespektrum äquidistant. Weiterhin erhält man für kleine Werte von  $r_0$ , d.h.  $r_0^2 \ll 2/\sqrt{mk}$ , mit der Reihenentwicklung der Wurzelfunktion bis zum linearen Term,  $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ , die Näherung

$$E_{n_r,l} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \left[ n_r + \frac{l}{2} + \frac{D}{4} - \frac{r_0^2 \sqrt{mk}}{4} + \frac{mkr_0^4}{16(l + D/2 - 1)} \right] \quad (103)$$

für die Energieeigenwerte. Sofern  $r_0$  jedoch große Werte aufweist, d.h.  $r_0^2 \gg 2/\sqrt{mk}$ , lauten die genäherten Energieeigenwerte

$$E_{n_r,l} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \left[ n_r + \frac{1}{2} + \frac{(l + D/2 - 1)^2}{2r_0^2 \sqrt{mk}} \right]. \quad (104)$$

### 3.2.2 Vergleich zum dreidimensionalen Fall

Die Eigenenergien des pseudoharmonischen Oszillators weisen eine direkte Dimensionsabhängigkeit auf, die über diejenige des harmonischen Oszillators hinausgeht. Insofern weisen die einzelnen Energieniveaus des pseudoharmonischen Oszillators in unterschiedlichen Dimensionen verschiedene Abstände auf und sind nur für feste Werte von  $\tau$  und  $r_0$  äquidistant. Für kleine Werte von  $r_0$  ist diese Abhängigkeit von der Dimension zum einen durch einen in  $D$  linearen Term und zum anderen durch einen in  $D$  reziproken Term gegeben, wie es in Gleichung (103) ersichtlich ist. Sofern  $r_0 \ll (mk)^{-1/2}$  ist, können die letzten beiden Terme in dieser Gleichung vernachlässigt werden und es ergibt sich das Energie-

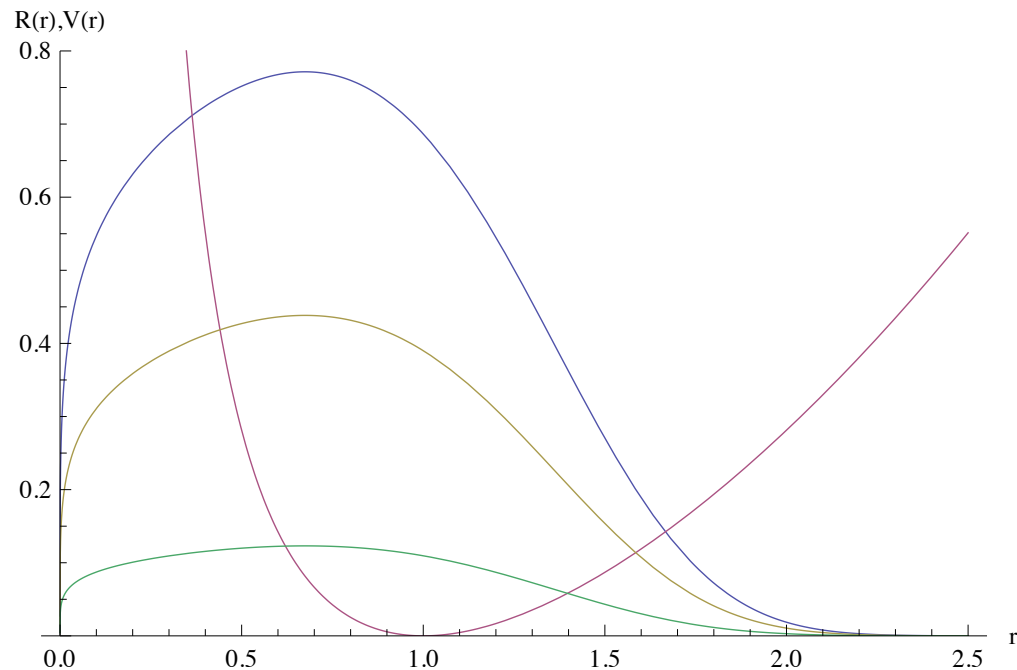
spektrum eines harmonischen Oszillators mit einer Federkonstantem, die dem Vierfachen derjenigen des pseudoharmonischen Oszillators entspricht. Betrachtet man hingegen die vollständige lineare Näherung in (103), so zeigt sich, dass sich das Energiespektrum bis auf den konstanten Term  $r_0^2 \sqrt{mk} / 4$  mit zunehmenden Dimensionen an dasjenige des harmonischen Oszillators (mit dem Vierfachen der Federkonstante) annähert. Dieses bedingt zugleich, dass der dimensionale Einfluss in höheren Dimensionen fast ausschließlich durch die Nullpunktsenergie gegeben ist.

Sofern hingegen  $r_0 \gg (mk)^{-1/2}$  ist, zeichnet sich ein anderes Bild. In diesem Fall ist in erster Näherung eine quadratische Abhängigkeit der Energieniveaus von der Dimension in einem zusätzlichen Term gegeben, so dass die Energieniveaus für  $D > 2$  sukzessive ansteigen. Schreibt man die in (104) gefundene Näherung um, so ergibt sich:

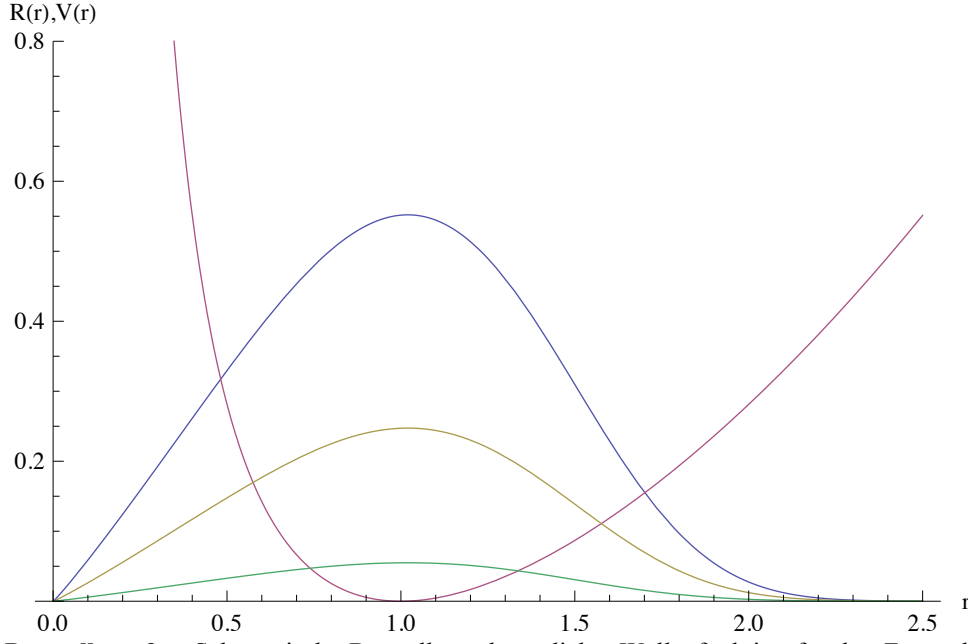
$$E_{n_r, l} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \left( n_r + \frac{1}{2} \right) + \frac{l(l + D - 2)}{2mr_0^2} + \frac{D^2 - 4D + 4}{8mr_0^2}.$$

Dieses entspricht der Energie eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit der Quantenzahl  $n_r$  und derjenigen eines starren  $D$ -dimensionalen Rotators zuzüglich einem von der Dimension und der Bindungslänge anhängigen Term, der für  $D < 4$  jedoch nur einen geringen Einfluss ausübt. Mit steigender Dimensionalität wächst dieser Term jedoch überproportional an, so dass beim pseudoharmonischen Oszillator im Vergleich zum harmonischen Oszillator eine stärkere Dimensionsabhängigkeit der Eigenenergien zu verzeichnen ist [Don02].

Im Folgenden sind die radialen Wellenfunktionen des pseudoharmonischen Oszillators für zwei Zustände in unterschiedlichen Dimensionen dargestellt. Diese weisen wie im Fall des harmonischen Oszillators eine dimensionsübergreifende Ähnlichkeit auf, obwohl die Ausprägung mit zunehmender Dimensionalität abnimmt.



**Darstellung 8:** Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den Grundzustand ( $n = 0, l = 0$ ) in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit  $m = k = 1$  und des Potentials (rot).



**Darstellung 9:** Schematische Darstellung der radialen Wellenfunktion für den Zustand  $n = 0$  und  $l = 1$  in drei (blau), fünf (gelb) und acht (grün) Dimensionen mit  $m = k = 1$  und des Potentials (rot).

### 3.2.3 Rekursionsrelationen für den pseudoharmonischen Oszillator

Für den pseudoharmonischen Oszillator werden nun die Auf- und Absteigeoperatoren für die Quantenzahl  $n_r$  definiert [Don11, Oye08, Don02]. Dazu wird in Analogie zur Vorgehensweise beim harmonischen Oszillator die radiale Wellenfunktion in direkter Abhängigkeit von den Laguerre-Polynomen betrachtet:

$$R_{n_r}(\rho) = N_{n_r} \rho^\tau e^{-\rho/2} L_{n_r}^{2\tau+(D-2)/2}(\rho), \quad (105)$$

wobei sich der Normierungsfaktor zu

$$N_{n_r} = (mk)^{D/8} \sqrt{\frac{n_r!}{2^{(D-2)/2} \Gamma(2\tau + n + D/2)}} \quad (106)$$

ergibt. Die gesuchten Leiteroperatoren  $M_\pm$  sollen nur von der Variablen  $\rho$  abhängen und die Eigenschaften

$$M_\pm = A_\pm(\rho) \frac{d}{d\rho} + B_\pm(\rho), \quad M_\pm R_{n_r}(\rho) = m_\pm R_{n_r \pm 1}(\rho) \quad (107a-b)$$

erfüllen. Dazu betrachtet man zuerst die Ableitung der Wellenfunktion

$$\frac{d}{d\rho} R_{n_r}(\rho) = \left( \frac{\tau}{\rho} - \frac{1}{2} \right) R_{n_r}(\rho) + N_{n_r} \rho^\tau e^{-\rho/2} \frac{d}{d\rho} L_{n_r}^{2\tau+(D-2)/2}(\rho). \quad (108)$$

Setzt man nun in diese Gleichung die Relation (90) für die Ableitung der Laguerre-Polynome ein, so ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{d\rho} - \frac{n_r + \tau}{\rho} + \frac{1}{2} \right) R_{n_r}(\rho) &= - \frac{n_r + 2\tau + D/2 - 1}{\rho} \frac{N_{n_r}}{N_{n_r-1}} R_{n_r-1}(\rho), \\ \left( \frac{d}{d\rho} + \frac{n_r + \tau + D/2}{\rho} - \frac{1}{2} \right) R_{n_r}(\rho) &= \frac{n_r + 1}{\rho} \frac{N_{n_r}}{N_{n_r+1}} R_{n_r+1}(\rho), \end{aligned} \quad (109a-b)$$

bei denen der Normierungsfaktor durch (106) bestimmt ist. Mit Hilfe dieser Gleichung erhält man auch direkt die gesuchten Auf- und Absteigeoperatoren

$$\begin{aligned} M_- &= -\rho \frac{d}{d\rho} + \tau + \hat{n}_r - \frac{\rho}{2}, \\ M_+ &= \rho \frac{d}{d\rho} + \tau + \hat{n}_r + \frac{D}{2} - \frac{\rho}{2}, \end{aligned} \quad (110a-b)$$

wobei mit  $\hat{n}_r$  ein Besetzungszahloperator mit der Eigenschaft  $\hat{n}_r R_{n_r}(\rho) = n_r R_{n_r}(\rho)$  eingeführt wurde. Zusammenfassend gilt folglich für die Leiteroperatoren

$$\begin{aligned} M_- R_{n_r}(\rho) &= m_- R_{n_r-1}(\rho) = \sqrt{n_r(n_r + 2\tau + D/2 - 1)}, \\ M_+ R_{n_r}(\rho) &= m_+ R_{n_r+1}(\rho) = \sqrt{(n_r + 1)(n_r + 2\tau + D/2)}. \end{aligned} \quad (111a-b)$$

Mit diesen Operatoren ist es jetzt möglich, die radiale Wellenfunktion  $R_{n_r}(\rho)$  direkt zu erhalten, indem der Aufsteigeoperator  $M_+$   $n_r$ -fach auf den Grundzustand  $R_0(\rho)$  angewendet wird:

$$R_{n_r}(\rho) = N_{n_r} M_+^{n_r} R_0(\rho) \quad (112)$$

mit

$$N_{n_r} = \sqrt{\frac{\Gamma(2\tau + D/2)}{n_r! \Gamma(n_r + 2\tau + D/2)}}, \quad R_0(\rho) = \sqrt{\frac{1}{\Gamma(2\tau + D/2)}} \rho^\tau e^{-\rho/2}. \quad (113a-b)$$

Für den Kommutator zwischen den Auf- und Absteigeoperatoren gilt mit den obenstehenden Ergebnissen (111a-b)

$$[M_-, M_+] = 2(n_r + \tau + D/4) \equiv 2m_0. \quad (114)$$

Dieses legt die Definition eines Operators

$$M_0 = (\hat{n}_r + \tau + D/4) \quad (115)$$

nah, mit dem nunmehr die Kommutationsrelationen

$$[M_-, M_+] = 2M_0, \quad [M_0, M_\pm] = \pm M_\pm, \quad (116a-b)$$



erfüllt sind. Die Relationen (116a-b) definieren aber zugleich die Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(1,1)$ , womit man ein analoges Ergebnis zum harmonischen Oszillator erhält [Mar10]. Schließlich ist es noch möglich, mit den Leiteroperatoren Integrale auszuwerten, die eine bestimmte Form aufweisen. Mit den Relationen

$$\rho = 2M_0 - M_- - M_+ \quad \text{und} \quad \rho \frac{d}{d\rho} = \frac{1}{2} \left( M_+ - M_- - \frac{D}{2} \right) \quad (117\text{a-b})$$

und den Eigenwerten der Operatoren  $M_+$  und  $M_-$  (111a-b) folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \int_0^\infty R_{n'_r}(r) r^2 R_{n_r}(r) dr &= (2n_r + 2\tau + D/2) \delta_{n'_r, n_r} - \sqrt{n_r(n_r + 2\tau + D/2 - 1)} \delta_{n'_r, (n_r-1)} \\ &\quad - \sqrt{(n_r + 1)(n_r + 2\tau + D/2)} \delta_{n'_r, (n_r+1)} \end{aligned} \quad (118\text{a})$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_0^\infty R_{n'_r}(r) \frac{r}{2} \frac{d}{dr} R_{n_r}(r) dr &= \frac{1}{2} \sqrt{(n_r + 1)(n_r + 2\tau + D/2)} \delta_{n'_r, (n_r+1)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{n_r(n_r + 2\tau + D/2 - 1)} \delta_{n'_r, (n_r-1)} - \frac{D}{4} \delta_{n'_r, n_r}. \end{aligned} \quad (118\text{b})$$

Letztendlich lässt sich auch für den pseudoharmonischen Oszillator eine Rekursionsrelation angeben, die einen Zusammenhang zwischen den radialen Wellenfunktionen mit unterschiedlicher Quantenzahl  $n_r$  herstellt. Es ist bekannt, dass die Laguerre-Polynome die Beziehung

$$(n+1)L_{n+1}^\beta(x) + (n+\beta)L_{n-1}^\beta(x) + (x-2n-\beta-1)L_n^\beta(x) = 0 \quad (119)$$

erfüllen. Hiermit ergibt sich sofort unter Berücksichtigung der Normierungsfaktoren  $N_{n_r}$  die Relation

$$\begin{aligned} &\sqrt{(n_r + 1)(n_r + 2\tau + D/2)} R_{n_r+1}(\rho) + \sqrt{n_r(n_r + 2\tau + D/2 - 1)} R_{n_r-1}(\rho) \\ &= (2n_r + 2\tau + D/2 - \rho) R_{n_r}(\rho). \end{aligned} \quad (120)$$

## 4. Schlußbetrachtung

In dieser Arbeit wurde ein kurzer Einblick in die höherdimensionale Quantenmechanik gegeben. Hierzu wurde im ersten Teil in Anlehnung an die Arbeit von *Louck* der Drehimpulsoperator auf den  $D$ -dimensionalen Raum erweitert und dessen Eigenwerte auf algebraischem Weg bestimmt. Dieses ermöglichte es, in einem zweiten Schritt die Schrödingergleichung für ein  $D$ -dimensionales, rotationsinvariantes Potential mit Hilfe eines Separationsansatzes in eine eindimensionale radiale Differentialgleichung zu überführen. Mit Hilfe dieser radialen Differentialgleichung wurden anschließend verschiedene Potentiale untersucht, die sich alle analytisch lösen ließen, in dem man mit Hilfe eines Ansatzes die Gleichungen in konfluente hypergeometrische Differentialgleichungen überführt hat, deren Lösungen wohl bekannt sind. Im Fall des harmonischen Oszillators ergab sich, dass das Energiespektrum nur über die Nullpunktsenergie von der gewählten Dimension abhängig ist. Anschließend wurde der harmonische Oszillator mit einer minimalen Ortsunschärferelevation untersucht. Auch hierbei zeigte sich eine dominante Dimensionsabhängigkeit in der Nullpunktsenergie, wobei die Energieniveaus darüber hinaus in zusätzlichen Termen von der Dimension abhängig waren. Diese zusätzlichen Terme bewirkten auch eine teilweise Aufhebung der Energieentartung, so dass die Entartung der Energieniveaus lediglich auf der Rotationssymmetrie resultiert. Als letztes wurde noch der pseudoharmonische Oszillator untersucht, für den eine starke Abhängigkeit der Energieniveaus von der gewählten Dimension attestiert wurde. Dabei wurde eine Fallunterscheidung zwischen kleinen und großen Bindungslängen getroffen und diese Fälle jeweils in Bezug auf den harmonischen Oszillator untersucht.

Weiterhin wurde aufgezeigt, dass sowohl der harmonische als auch der pseudoharmonische Oszillator der Lie-Algebra  $su(1,1)$  genügen und es wurden für diese beiden Potentiale einige Rekursionsrelationen zwischen radialen Wellenfunktionen mit unterschiedlichen Drehimpulsquantenzahlen  $l$  hergeleitet. Diese können beispielsweise bei der Auswertung von Integralen oder der Bestimmung von Ableitungen sehr nützlich sein.

## **Anhang**

<b>Anhang A: Eigenwerte des Drehimpulsoperators</b>	<b>33</b>
<b>Anhang B: Die konfluente hypergeometrische Funktion</b>	<b>35</b>

## Anhang A: Eigenwerte des Drehimpulsoperators

Der Beweis wird nach *Louck* [Lou60b] geführt. Aus Übersichtlichkeitsgründen wird dabei auf Indizes verzichtet und  $l_k$  mit  $l$  und  $l_{k-1}$  mit  $m$  sowie  $L_k^2(l_{k-1})$  mit  $L_k^2(m)$  bezeichnet. Weiterhin wird  $\theta_{\lambda_k, \lambda_{k-1}}(\theta_k) = \theta_k(\lambda_k, \lambda_{k-1})$  gesetzt, sofern nicht explizit auf die Koordinatenabhängigkeit von  $\theta_{\lambda_k, \lambda_{k-1}}(\theta_k)$  hingewiesen werden soll. Mit der Definition der Leiteroperatoren

$$L_k^+(m) = \hbar \left( \frac{\partial}{\partial \theta_k} - m \cot \theta_k \right), \quad (A1)$$

$$L_k^-(m) = \hbar \left( -\frac{\partial}{\partial \theta_k} - (m + k - 2) \cot \theta_k \right)$$

ergeben sich nun unmittelbar die Relationen

$$\begin{aligned} L_k^2(m) &= L_k^+(m-1)L_k^-(m) + \hbar^2(m+k-2)(m-1), \\ L_k^2(m) &= L_k^-(m+1)L_k^+(m) + \hbar^2 m(m+k-1). \end{aligned} \quad (A2)$$

Durch eine geeignete rechts- und linksseitige Multiplikation der Gleichungen (A2) mit  $L_k^\pm(m)$  und die Verwendung der jeweils anderen Gleichung zur Substitution der Glieder  $L_k^\mp(m \pm 1)L_k^\pm(m)$  erhält man

$$\begin{aligned} L_k^2(m+1)L_k^+(m) &= L_k^+(m)L_k^2(m), \\ L_k^2(m-1)L_k^-(m) &= L_k^-(m)L_k^2(m). \end{aligned} \quad (A3)$$

Mit der Eigenwertgleichung

$$L_k^2(m)\Theta_k(\lambda, m) = \hbar^2 \lambda \Theta_k(\lambda, m) \quad (A4)$$

ergeben sich durch Anwendung der Operatoren (A3) auf  $\Theta_k(\lambda, m)$  die modifizierten Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned} L_k^2(m+1)L_k^+(m)\Theta_k(\lambda, m) &= \hbar^2 \lambda L_k^+(m)\Theta_k(\lambda, m), \\ L_k^2(m-1)L_k^-(m)\Theta_k(\lambda, m) &= \hbar^2 \lambda L_k^-(m)\Theta_k(\lambda, m). \end{aligned} \quad (A5)$$

Dieses impliziert jedoch zugleich

$$\begin{aligned} L_k^+(m)\Theta_k(\lambda, m) &= \hbar A^+(\lambda, m)\Theta_k(\lambda, m+1), \\ L_k^-(m)\Theta_k(\lambda, m) &= \hbar A^-(\lambda, m)\Theta_k(\lambda, m-1), \end{aligned} \quad (A6)$$

wobei  $A^\pm(\lambda, m)$  die Normierungsfaktoren darstellen. Nunmehr gilt

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \Theta_{\lambda,m+1}^*(\theta_k) L_k^+(m) \Theta_{\lambda,m}(\theta_k) \sin^{k-1} \theta_k d\theta_k = \int_0^\pi \Theta_{\lambda,m+1}^*(\theta_k) \hbar \left( \frac{\partial}{\partial \theta_k} - m \cot \theta_k \right) \Theta_{\lambda,m}(\theta_k) \sin^{k-1} \theta_k d\theta_k \stackrel{(PI)}{=} \\
& = \hbar \underbrace{\left[ \Theta_{\lambda,m+1}^*(\theta_k) \sin^{k-1} \theta_k \Theta_{\lambda,m}(\theta_k) \right]_0^\pi}_{=0} \\
& \quad - \hbar \int_0^\pi \left( (k-1) \sin^{k-2} \theta_k \cos \theta_k \Theta_{\lambda,m+1}^*(\theta_k) + \sin^{k-1} \theta_k \left( \frac{\partial}{\partial \theta_k} \Theta_{\lambda,m+1}^*(\theta_k) \right) \right) \Theta_{\lambda,m}(\theta_k) d\theta_k \\
& \quad - \hbar \int_0^\pi \Theta_{\lambda,m+1}^*(\theta_k) m \cot \theta_k \Theta_{\lambda,m}(\theta_k) \sin^{k-1} \theta_k d\theta_k = \\
& = \int_0^\pi \Theta_{\lambda,m}(\theta_k) \hbar \left( -\frac{\partial}{\partial \theta_k} - (m+k-1) \cot \theta_k \right) \Theta_{\lambda,m+1}^*(\theta_k) \sin^{k-1} \theta_k d\theta_k = \\
& = \int_0^\pi \Theta_{\lambda,m}(\theta_k) L_k^-(m+1) \Theta_{\lambda,m+1}^*(\theta_k) \sin^{k-1} \theta_k d\theta_k.
\end{aligned}$$

Dabei resultiert aus der Gleichheit des ersten und letzten Terms die Bedingung

$$A^-(\lambda, m+1) = \left[ A^+(\lambda, m) \right]^*. \quad (\text{A7})$$

Mit (A2), (A4) und (A7) folgt

$$L_k^2(m) \Theta_k(\lambda, m) = \hbar^2 \lambda \Theta_k(\lambda, m) = \hbar^2 \left( \left| A^+(\lambda, m) \right|^2 + m(m+k-1) \right) \Theta_k(\lambda, m)$$

und damit

$$\lambda - m(m+k-1) = \left| A^+(\lambda, m) \right|^2 \geq 0. \quad (\text{A8})$$

Da  $\neq 0$  ist, existiert für einen vorgegebenen Wert von  $\lambda$  ein maximaler Wert für  $m$ , der mit  $l$  bezeichnet wird. Damit gilt zugleich

$$L_k^+(l) \Theta_k(\lambda, l) = 0. \quad (\text{A9})$$

Wendet man nun die zweite Gleichung von (A2), bei der  $m$  durch  $l$  ersetzt wurde, auf  $\Theta_k(\lambda, l)$  an und verwendet hierbei (A9), so ergibt sich die gesuchte Bedingung

$$\lambda = l(l+k-1), \quad (\text{A10})$$

wobei  $l = 0, 1, 2, \dots$ , da  $m$  gemäß Annahme ebenfalls null oder positiv ganzzahlig ist. Mit der zweiten Gleichung (A5) lässt sich weiterhin schließen, dass die Funktion  $L_k^-(l) \Theta_k(\lambda, l)$  eine Eigenfunktion von  $L_k^2(l-1)$  mit dem Eigenwert  $\lambda$  ist. Daraus folgt nun, dass  $m$  ebenfalls den Wert  $l-1$  annehmen kann. Wiederholt man nun diese Argumentation mit dem Wert  $m = l-1$ , so ergibt sich, dass der Wert  $m = l-2$  ebenso erlaubt ist. Dieses Vorgehen lässt sich nun beliebig fortsetzen, so dass für  $l = 0, 1, 2, \dots$ , die Werte  $m = l, l-1, l-2, \dots, 0$  möglich sind. Da die Gleichung (37) für  $D = 3$  erfüllt ist [Lou60b], gilt sie auch für  $k = 4$ , usw.

## Anhang B: Die konfluente hypergeometrische Funktion

Die konfluente hypergeometrische Funktion ist über die Reihe

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (\text{B1})$$

definiert [Lan59, Gra81, Don11], welche für alle endlichen  $z$  konvergiert. Die Wahl des Parameters  $\alpha$  unterliegt keinen Einschränkungen, wohingegen der Parameter  $\gamma$  positiv ganzzahlig und ungleich null gewählt werden muss. Die Funktion  ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$  ist die Lösung der Differentialgleichung

$$z \frac{d^2 \phi}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{d\phi}{dz} - \alpha \phi = 0, \quad (\text{B2})$$

welches leicht durch Nachrechnen zu überprüfen ist. Die Substitution  $\phi = z^{1-\beta} \phi_1$  führt ebenfalls auf eine Differentialgleichung derselben Form,

$$z \frac{d^2 \phi_1}{dz^2} + (2 - \gamma - z) \frac{d\phi_1}{dz} - (\alpha - \gamma + 1) \phi_1 = 0, \quad (\text{B3})$$

mit der Lösung  $z^{1-\gamma} {}_1F_1(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ , welche linear unabhängig zu der Lösung (B1) ist. Insofern ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (B2) zu

$$\phi = c_{11} {}_1F_1(\alpha, \gamma, z) + c_{21} z^{1-\gamma} {}_1F_1(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z). \quad (\text{B4})$$

Im Gegensatz zum ersten Term besitzt der zweite an der Stelle  $z = 0$  eine Singularität. Für die Funktion  ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$  ergibt sich mit der sogenannten Kummer Transformation die Relation

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = e^z {}_1F_1(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \quad (\text{B5})$$

Weiterhin gelten für die Funktion folgende Funktionalgleichungen [Dav65]:

$$\begin{aligned} (\gamma - \alpha) {}_1F_1(\alpha - 1, \gamma, z) + (2\alpha - \gamma + z) {}_1F_1(\alpha, \gamma, z) &= \alpha {}_1F_1(\alpha + 1, \gamma, z), \\ (\alpha - \gamma + 1) {}_1F_1(\alpha, \gamma, z) + (\gamma - 1) {}_1F_1(\alpha, \gamma - 1, z) &= \alpha {}_1F_1(\alpha + 1, \gamma, z), \\ \frac{d}{dz} {}_1F_1(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\alpha}{\gamma} {}_1F_1(\alpha + 1, \gamma + 1, z). \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

Durch die sukzessive Anwendung der letzten Gleichung erhält man nun einen Ausdruck für die  $n$ -te Ableitung der konfluenten hypergeometrischen Funktion:

$$\frac{d^n}{dz^n} {}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma + n)} {}_1F_1(\alpha + n, \gamma + n, z), \quad (\text{B7})$$

wobei  $\Gamma(x)$  die Gamma-Funktion bezeichnet. Sofern bei der Funktion  ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$  für den Parameter  $\alpha$  eine negative ganze Zahl, d.h.  $\alpha = -n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , oder null gewählt wird, bricht die Reihe  ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$  nach einer endlichen Anzahl von Gliedern ab und stellt ein Polynom vom Grad  $n$  dar:

$${}_1F_1(-n, \gamma, z) = 1 - \frac{n}{\gamma} z + \frac{n(1-n)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{(\gamma-1)!}{(\gamma+n-1)!} z^n \quad (\text{B8})$$

Diese Polynome lassen sich über folgende Beziehung darstellen:

$${}_1F_1(-n, \gamma, z) = \frac{z^{1-\gamma} e^z \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{d^n}{dz^n} (z^{\gamma+n-1} e^{-z}) \quad (\text{B9})$$

Über (B9) ergibt sich nun eine Beziehung zwischen den generalisierten Laguerre-Polynomen,

$$L_n^m(z) = z^{-m} e^z \frac{d^n}{dz^n} (z^{m+n} e^{-z}), \quad (\text{B10})$$

und der konfluenten hypergeometrischen Funktion  ${}_1F_1(-n, m, z)$  mit  $0 \leq m \leq n$  zu

$$L_n^m(z) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{n! \Gamma(m+1)} {}_1F_1(-n, m+1, z). \quad (\text{B11})$$

Hieraus resultieren für  $m = 0$  die einfachen Laguerre-Polynome  $L_n(z)$ , für die gilt:

$$L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n} (z^n e^{-z}) = \Gamma(n+1) {}_1F_1(-n, 1, z). \quad (\text{B12})$$

Nunmehr ist es ebenfalls möglich, das asymptotische Verhalten der konfluenten hypergeometrischen Funktion anzugeben. Für kleine Werte von  $z$  ist das asymptotische Verhalten der Funktion  ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$  durch die ersten Reihenglieder in (B1) gegeben. Für große  $z$  gilt hingegen die Näherung

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-\gamma} e^z \left[ 1 + O(|z|^{-1}) \right], \quad \Re z \rightarrow \infty, \quad (\text{B13})$$

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \left[ 1 + O(|z|^{-1}) \right], \quad \Re z \rightarrow -\infty.$$

Für feste Werte von  $z$  und unendlich große Werte für einen anderen Parameter ergibt sich dagegen als Näherung

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = 1 + O(|\gamma|^{-1}), \quad \gamma \rightarrow \infty \quad \text{sofern } z \text{ und } \alpha \text{ fest,} \quad (\text{B14})$$

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = e^z \left[ 1 + O(|\gamma|^{-1}) \right], \quad \gamma \rightarrow \infty \text{ sofern } z \text{ und } \gamma - \alpha \text{ fest.}$$



## Literaturverzeichnis

- [Ban66] Bander, M./ Itzykson, C.: Group Theory and The Hydrogen Atom (I), Rev. Mod. Phys. 38, No. 2 (1966), 330-345.
- [Bie81] Biedenharn, L./ Louck, J.: Angular Momentum in Quantum Physics – Theory and Application, Addison-Wesley, Reading 1981.
- [Böh11] Böhm, M.: Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik – Eine Einführung in die mathematischen Grundlagen, Heidelberg 2011.
- [Cha02] Chang, L./ Minic, D./ Okamura, N./ Takeuchi, T.: Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations, Phys. Rev. D 65 (2002), 125027.
- [Cha90] Chatterjee, A.: Large  $N$ -Expansions in Quantum Mechanics, Atomic Physics And Some  $O(N)$  Invariant Systems, Physics Reports 186, No. 6 (1990), 249-379.
- [Dav65] Davydov, A.: Quantum Mechanics, Pergamon Press, Oxford 1965.
- [Don02] Dong, S.: The Realization of Dynamic Group for the Pseudoharmonic Oscillator, Appl. Math. Let. 16 (2003), 199-203.
- [Don11] Dong, S.: Wave Equations in Higher Dimensions, Springer, New York 2011.
- [Fis10] Fischer, G.: Lineare Algebra – Eine Einführung für Studienanfänger, 17. Aufl., Wiesbaden 2010.
- [Gan05] Gang, C.: Exact solutions of  $N$ -dimensional harmonic oscillator via Laplace transformation, Chin. Phys. Soc. 14, No. 6 (2005), 1075-1076.
- [Gol61] Goldman, I./ Krivchenkov, V./ Kogan, V./ Galitskii, V.: Problems in Quantum Mechanics, Pergamon, London 1961.
- [Gra81] Gradstein Physik (Hrsg.), Summen-, Produkt- und Integraltafeln, Band 2, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) 1981.
- [Gu02] Gu, X./ Duan, B./ Ma, Z.: Quantum three-body system in  $D$  dimensions, J. Math. Phys. 43, No. 6 (2002), 2895-2906.
- [Har07] Harbach, U.: Experimentelle Konsequenzen einer minimalen Länge, Frankfurt 2007.
- [Inf51] Infeld, L./ Hull, T.: The Factorization Method, Revs. Mod. Phys. 23 (1951), 21-68.
- [Kem95] Kempf, A./ Mangano, G./ Mann, R.: Hilbert Space Representation of the Minimal Length Uncertainty Relation, Phys. Rev. D 52 (1998), 1108-1118.

- [Kem96] Kempf, A.: Nonpointlike Particles in Harmonic Oscillators, *J. Phys. A* 30 (1997), 2093-2102.
- [Lan59] Landau, L./ Lifshitz, E.: *Quantum Mechanics – Non-Relativistic Theory*, Pergamon Press, London 1959.
- [Lou60a] Louck, J.: Generalized Orbital Angular Momentum and the  $n$ -Fold Degenerate Quantum-Mechanical Oscillator – Part I. The Twofold Degenerate Oscillator, *J. Mol. Spectrosc.* 4 (1960), 285-297.
- [Lou60b] Louck, J.: Generalized Orbital Angular Momentum and the  $n$ -Fold Degenerate Quantum-Mechanical Oscillator – Part II. The  $n$ -Fold Degenerate Oscillator, *J. Mol. Spectrosc.* 4 (1960), 298-333.
- [Luc93] Lucha, W./ Schöberl, F.: *Gruppentheorie – Eine elementare Einführung für Physiker*, Mannheim 1993.
- [Lud88] Ludwig, W./ Falter, C.: *Symmetries in Physics – Group Theory Applied to Physical Problems*, Heidelberg 1988.
- [Ma07] Ma, Z.: *Group Theory for Physicists*, World Scientific, New Jersey 2007.
- [Mar10] Martinez, D./ Flores-Urbina, J./ Mota, R./ Granados, V.: The  $su(1,1)$  dynamical algebra from the Schrödinger ladder operators for  $N$ -dimensional systems: hydrogen atom, Mie-type potential, harmonic oscillator and pseudoharmonic oscillator, *J. Phys. A: Math. Theor.* 43 (2010), 135201.
- [Oye08] Oyewumi, K./ Akinpelu, F./ Agboola, A.: Exactly Complete Solutions of the Pseudoharmonic Potential in  $N$ -Dimensions, *Int. J. Theor. Phys.* 47 (2008), 1039-1057.
- [Reb10] Rebhan, E.: *Theoretische Physik: Relativistische Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie und Elementarteilchentheorie*, Heidelberg 2010.
- [Sag85] Sage, M./ Goodisman, J.: Improving on the conventional presentation of molecular vibrations: Advantages of the pseudoharmonic potential and the direct construction of potential energy curves, *Am. J. Phys.* 53, No. 4 (1985), 350-355.
- [Saz00] Sazonova, Z./ Singh, R.: The Role of  $SU(1,1)$  in Quantum Optics: I, *Laser Physics* 10, No. 3 (2000), 765-769.
- [Sch41] Schrödinger, E.: Further studies on solving eigenvalue problems by factorization, *Proc. Roy. Irish Acad A* 46 (1941), 183-206.
- [Som49] Sommerfeld, A.: *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York 1949.

- [Wan02] Wang, L./ Gu, X./ Ma, Z./ Dong, S.: Exact Solutions to  $D$ -Dimensional Schrödinger Equation with a Pseudoharmonic Oscillator, Found. Phys. Let. 15, No. 6 (2002), 569-576.

## **Eidesstattliche Erklärung**

Ich versichere hiermit, dass ich meine Bachelorarbeit „Harmonischer Oszillator und Rekursionsrelationen in der höher-dimensionalen Quantenmechanik“ selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe, und dass ich alle von anderen Autoren wörtlich übernommenen Stellen wie auch die sich an die Gedankengänge anderer Autoren eng anlehrenden Ausführungen meiner Arbeit besonders gekennzeichnet und die Quellen zitiert habe.

Münster, den

