

Masterarbeit

---

# **QCD-Korrekturen zur Annihilation von dunkler Materie im Higgs-Funnel**

**QCD corrections to dark matter annihilation in the Higgs  
funnel**

---

vorgelegt von  
Patrick Steppele

Münster, 15. März 2013

Erstgutachter: Prof. Dr. Michael Klasen  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Gernot Münster



*„Und wenn ich am Ende solcher Diskussionen noch allein einen kurzen Spaziergang im benachbarten Park unternahm, wiederholte ich mir immer und immer wieder die Frage, ob die Natur wirklich so absurd sein könne, wie sie uns in diesen Atomexperimenten erschien.“*

– Werner Karl Heisenberg



## Kurzfassung

In dieser Arbeit wird der Wirkungsquerschnitt des Prozesses  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  inklusive aller Einschleifenkorrekturen der starken Wechselwirkung berechnet. Zusätzlich werden Korrekturen höherer Ordnung durch eine Resummation berücksichtigt. Darin eingeschlossen sind insbesondere auch elektroschwache Korrekturen, die aufgrund der Yukawa-Kopplung des Top-Quarks in derselben Größenordnung wie typische starke Korrekturen liegen können.

Der genannte Prozess ist im sogenannten Higgs-Funnel der dominante Annihilationskanal von leichten Neutralinos, die als Kandidat für die dunkle Materie in Betracht kommen. Die mithilfe der Boltzmann-Gleichung bestimmte Reliktdichte dunkler Materie hängt in diesem Bereich des Parameterraums sensitiv vom Prozess  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  ab. Das bildet die Motivation der vorliegenden Arbeit.

Mithilfe des Programms DM@NLO wird eine numerische Untersuchung durchgeführt. Konkret wird dabei analysiert, wie sich die Beiträge zur Resummation genau zusammensetzen und wie sich der Wirkungsquerschnitt verändert, wenn Strahlungskorrekturen und Resummationseffekte berücksichtigt werden. Des Weiteren wird gezeigt, dass die genannten Korrekturen phänomenologische Relevanz besitzen, da sie die resultierende Reliktdichte direkt beeinflussen. Insbesondere ist dieser Einfluss größer als die derzeitigen experimentellen Unsicherheiten von Messungen mit WMAP.

## Abstract

In this thesis the cross section of the process  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  including all radiative one-loop corrections of the strong interaction is calculated. In addition, higher order corrections are included via resummation. By doing this, specific electroweak contributions, which can be sizeable due to the Yukawa coupling of the top quark, are also respected.

The given process is the dominant annihilation channel of light neutralinos – which are a possible dark matter candidate – in the so-called Higgs funnel region. In this part of the MSSM parameter space, the relic density determined by the Boltzmann equation depends sensitively on the process  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$ . This is the main motivation of the present work.

By using the program DM@NLO a numerical analysis is performed. The composition and behaviour of the resummation is investigated. Furthermore it is studied how the cross section changes when radiative corrections and resummation effects are included. It is shown that these corrections are phenomenologically relevant, as they directly influence the resulting relic density. This impact is in particular larger than the current experimental uncertainty of measurements with WMAP.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>v</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xi</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1. Dunkle Materie . . . . .	3
2.1.1. Evidenz . . . . .	3
2.1.2. Kandidaten für dunkle Materie . . . . .	7
2.2. Das Standardmodell der Teilchenphysik . . . . .	9
2.2.1. Wechselwirkungen und Symmetrien . . . . .	9
2.2.2. Teilcheninhalt . . . . .	10
2.3. Supersymmetrie und das MSSM . . . . .	11
2.3.1. Motivation und Konstruktion . . . . .	11
2.3.2. Teilcheninhalt . . . . .	12
2.3.3. Higgs-Sektor . . . . .	13
2.3.4. Flavour- und Squarkmischung . . . . .	14
2.3.5. R-Parität . . . . .	15
2.3.6. SUSY-Brechung und mSUGRA . . . . .	16
2.4. Boltzmann-Gleichung . . . . .	16
<b>3. Annihilation dunkler Materie im Higgs-Funnel</b>	<b>19</b>
3.1. Eigenschaften des Higgs-Funnels . . . . .	19
3.2. Bornscher Wirkungsquerschnitt . . . . .	21
3.3. QCD Korrekturen erster Ordnung . . . . .	24
3.3.1. Selbstenergien . . . . .	24
3.3.2. Vertexkorrektur . . . . .	26
3.3.3. Addition der virtuellen Korrekturen . . . . .	27
3.3.4. Reelle Korrekturen . . . . .	28
3.4. SUSY QCD Korrekturen erster Ordnung . . . . .	30
3.4.1. Selbstenergien . . . . .	30
3.4.2. Vertexkorrekturen . . . . .	32
3.4.3. Addition der virtuellen Korrekturen . . . . .	33
3.5. Berechnung des Wirkungsquerschnitts in erster Ordnung . . . . .	33
3.6. Resummation . . . . .	34
3.6.1. Das Konzept der Resummation . . . . .	34
3.6.2. Resummation der SUSY QCD Beiträge in $\mathcal{O}[(\alpha_S \mu \tan \beta)^n]$ . . . . .	35

3.6.3. Resummation der SUSY QCD Beiträge in $\mathcal{O}[\alpha_S^n(\mu \tan \beta)^m A_b^{n-m}]$ . . . . .	37
3.6.4. Resummation der SUSY QCD Beiträge in $\mathcal{O}[\alpha_S^{n+1}(\mu \tan \beta)^n]$ . . . . .	37
3.6.5. Resummation der elektroschwachen Beiträge . . . . .	39
3.6.6. Resummation der QCD Beiträge . . . . .	40
<b>4. Das Projekt DM@NLO</b>	<b>43</b>
<b>5. Numerische Resultate</b>	<b>47</b>
5.1. Zusammensetzung und Verhalten von $\Delta m_b$ . . . . .	47
5.2. Einfluss der Resummation auf den Wirkungsquerschnitt . . . . .	56
5.2.1. Abgleich des Wirkungsquerschnittes auf Baumniveau . . . . .	56
5.2.2. Wirkungsquerschnitte unter Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen und Resummationseffekten . . . . .	58
5.2.3. Analyse der Skalenabhängigkeit . . . . .	60
5.3. Einfluss der Resummation auf die Reliktdichte . . . . .	62
<b>6. Fazit</b>	<b>65</b>
<b>A. Verwendete Konventionen</b>	<b>67</b>
A.1. Einheitensystem . . . . .	67
A.2. Zur Notation . . . . .	67
A.3. Kinematische Variablen . . . . .	68
<b>B. Technisches zur Berechnung von Strahlungskorrekturen</b>	<b>69</b>
B.1. Dirac-Algebra . . . . .	69
B.1.1. Dirac-Algebra in vier Dimensionen . . . . .	69
B.1.2. Dirac-Algebra in $D$ Dimensionen . . . . .	70
B.2. Passarino-Veltman-Integrale . . . . .	70
B.2.1. Skalare Passarino-Veltman-Integrale . . . . .	71
B.2.2. Zusammenhang zwischen Zweipunkt-, Dreipunkt- und Dreiecksfunktion . . . . .	72
B.2.3. Tensorielle Passarino-Veltman-Integrale . . . . .	73
B.2.4. Ultraviolette Verhalten . . . . .	74
B.3. Phasenraumberechnungen . . . . .	75
B.3.1. Zwei Teilchen im Endzustand . . . . .	76
B.3.2. Drei Teilchen im Endzustand . . . . .	76
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>79</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1.	Rotationskurve der Galaxie NGC 3198 . . . . .	4
2.2.	Verteilung von baryonischer und dunkler Materie im Bullet-Cluster . . . . .	5
2.3.	Anisotropien in der kosmischen Hintergrundstrahlung, gemessen mit WMAP . . . . .	6
2.4.	Die Reliktdichte der Neutralinos gemäß der Boltzmann-Gleichung . . . . .	17
3.1.	Reliktdichte und relative Anteile des Endzustands $b\bar{b}$ im Higgs-Funnel . . . . .	19
3.2.	Reliktdichte und Massendifferenz $2m_\chi - m_A$ im Higgs-Funnel . . . . .	20
3.3.	Der Prozess $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$ in führender Ordnung . . . . .	21
3.4.	Quark-Selbstenergie in der QCD . . . . .	24
3.5.	Vertexkorrektur zur $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung in der QCD . . . . .	26
3.6.	Reelle NLO Korrekturen zum Prozess $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$ . . . . .	28
3.7.	Quark-Selbstenergie in der SUSY QCD . . . . .	31
3.8.	Vertexkorrektur zur $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung in der SUSY QCD . . . . .	32
3.9.	Relevante Feynman-Diagramme für die Resummation der SUSY QCD Beiträge in $\mathcal{O}[(\alpha_S \mu \tan \beta)^n]$ : Renormierte Bottommasse, Counterterm für die Bottommasse, Einschleifenbeiträge in SUSY QCD und Einschleifenbeiträge in SUSY QCD inklusive Counterterm . . . . .	35
3.10.	Exemplarische Zweischleifendiagramme zur Berechnung von $\Delta m_b^{\text{QCD}(2)}$ . . . . .	38
3.11.	Einschleifendiagramme zur Berechnung von $\Delta m_b^{\text{els}(1)}$ . . . . .	39
3.12.	Exemplarische Zweischleifendiagramme zur Berechnung von $\Delta m_b^{\text{els}(2)}$ . . . . .	40
4.1.	Programmablauf von DM@NLO . . . . .	44
5.1.	$\Delta m_b$ im Szenario 1 in der $m_0/m_{1/2}$ -Ebene . . . . .	52
5.2.	$\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$ im Szenario 1 in der $m_0/m_{1/2}$ -Ebene . . . . .	53
5.3.	$\Delta m_b^{\text{els(I)}}$ im Szenario 1 in der $m_0/m_{1/2}$ -Ebene . . . . .	53
5.4.	$\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$ im Szenario 1 in der $m_0/m_{1/2}$ -Ebene . . . . .	54
5.5.	$\Delta m_b^{\text{els(II)}}$ im Szenario 1 in der $m_0/m_{1/2}$ -Ebene . . . . .	54
5.6.	$\Delta m_b$ im Szenario 7 in der $m_0/m_{1/2}$ -Ebene . . . . .	55
5.7.	Abgleich des bornschen Wirkungsquerschnittes mit CalcHEP . . . . .	56
5.8.	Abgleich des bornschen Wirkungsquerschnittes mit DarkSUSY . . . . .	57
5.9.	Einfluss der Strahlungskorrekturen und der Resummation auf den Wirkungsquerschnitt . . . . .	58
5.10.	Detailansicht aus Abbildung 5.9 . . . . .	59
5.11.	Skalenabhängigkeit von $\Delta m_b(A)$ . . . . .	61
5.12.	Skalenabhängigkeit von $\Delta m_b(B)$ . . . . .	61
5.13.	Resultierende Reliktdichte im Higgs-Funnel für verschiedene Wirkungsquerschnitte . . . . .	62
5.14.	Detailansicht aus Abbildung 5.13 . . . . .	63

## Abbildungsverzeichnis

---

A.1. Kinematik eines $2 \rightarrow 2$ Prozesses . . . . .	68
B.1. Kinematik eines $2 \rightarrow 3$ Prozesses . . . . .	77

# Tabellenverzeichnis

2.1. Fermionischer Teilcheninhalt des Standardmodells . . . . .	11
2.2. Teilcheninhalt des MSSM . . . . .	13
5.1. Übersicht der untersuchten Szenarien . . . . .	48
5.2. Auswertung des Szenarios 1 . . . . .	49
5.3. Auswertung des Szenarios 7 . . . . .	50
5.4. Auswertung des Szenarios 22 . . . . .	51
5.5. Auswertung des Szenarios 50 . . . . .	51
A.1. Zur Umrechnung von natürlichen Einheiten . . . . .	67
B.1. UV-Verhalten von einigen skalaren Integralen und Tensorkoeffizienten . . . . .	74



# 1. Einleitung

Die Fähigkeit zu sehen ist für uns Menschen von fundamentaler Bedeutung. Das Sehen ermöglicht die räumliche Orientierung im Alltag, nonverbale Kommunikation und die Beobachtung von Dingen und Lebewesen. Daher bildet das Sehvermögen die Basis der empirischen Wissenschaften. Besonders bemerkenswert ist die Tatsache, dass wir kraft unseres Verstandes sogar in der Lage sind, *indirekt zu beobachten*.

Dazu stelle man sich eine Katze vor, die in charakteristischer Manier im hohen Gras lauert, um dann zielgerichtet hervor zu springen. Unser Verstand bzw. diesbezüglicher Erfahrungsschatz legt den Schluss nahe, dass sich ein kleiner Nager, um den es offenbar nicht gut bestellt ist, in der Nähe der Katze befindet, selbst wenn wir diesen nicht direkt sehen können.

Von einer indirekten Beobachtung im wissenschaftlichen Kontext – mit ebenfalls drastischen Konsequenzen – zeugt die Entdeckung des Planeten Neptun. Im Jahre 1821 studierte der damalige Direktor der Pariser Sternwarte, Alexis Bouvard, die Bewegung des Uranus. Die dabei gesammelten Daten wiesen Diskrepanzen gegenüber einer regulären keplerschen Umlaufbahn auf. Bouvard schloss daraus, dass die Bewegung des Uranus durch die Gravitation eines weiteren, bislang nicht bekannten Planeten gestört ist. Nachdem Urbain Le Verrier mithilfe von Bouvards Tabellen die hypothetische Position des neuen Planeten mathematisch vorhergesagt hatte, gelang Johann Gottfried Galle 1846 die direkte Beobachtung<sup>1</sup> des heute als Neptun bekannten Planeten (vgl. [1]).

Ein weiteres Phänomen, von dem wir lediglich durch indirekte Beobachtung wissen, beschäftigt derzeit die moderne Physik. Ähnlich dem Neptun bewegen sich sowohl die Sterne in den Galaxien als auch die Galaxien selbst nicht so, wie man es aufgrund des newtonschen Gravitationsgesetzes und der Anziehung durch die anderen sichtbaren Sterne bzw. Galaxien erwarten würde (vgl. [2] und [3]). Das impliziert, dass entweder das newtonscbe Gravitationsgesetz den Sachverhalt ungenügend beschreibt oder dass neben den Sternen und Galaxien weitere, nicht-leuchtende Gravitationsquellen existieren. Diese Gravitationsquellen müssen den Beobachtungen zufolge insgesamt sehr viel mehr Masse besitzen als die leuchtende Materie und werden als *dunkle Materie* bezeichnet.

Was ist dunkle Materie? Die kurze Antwort lautet, dass dies bislang gänzlich ungeklärt ist. Ein gegenwärtig intensiv studierter Erklärungsansatz basiert auf der Existenz eines Elementarteilchens, das die dunkle Materie hauptsächlich ausmacht (vgl. [4]). Um allen experimentellen Befunden gerecht zu werden, muss dieses Teilchen langlebig und massiv sein und darf nicht der elektromagnetischen Wechselwirkung unterliegen. Das bedeutet, dass es Licht weder absorbiert noch reflektiert. In Anbetracht der Tatsache, dass die dunkle Materie in sehr viel größerer Menge vorhanden ist als die leuchtende Materie, scheint diese Theorie zu bestätigen, was Antoine de Saint-Exupéry bereits 1943 erkannte (vgl. [5]). „*Das Wesentliche ist für das Auge unsichtbar.*“

---

<sup>1</sup>Interessant ist die Frage, wem die Ehre der Entdeckung gebührt. Galle selbst verwies dabei stets auf Le Verrier.

Das Problem dieses Erklärungsansatzes liegt darin, dass das *Standardmodell der Teilchenphysik* keinen geeigneten Kandidaten für die dunkle Materie liefert. Um den Gedanken weiter verfolgen zu können, ist es also notwendig, das Standardmodell zu erweitern. Ein aus theoretischer Sicht besonders motivierter Ansatz dazu besteht in der Einführung einer Symmetrie zwischen Teilchen mit ganz- und halbzahligen Spin – den Bosonen und den Fermionen. Dieses Konzept firmiert unter dem Namen *Supersymmetrie* (SUSY; vgl. [6] und [7]).

Das *minimale supersymmetrische Standardmodell* (MSSM) ist eine mögliche Realisierung einer supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells. Unter der zusätzlichen Annahme, dass eine neue Quantenzahl – die sogenannte *R-Parität* – erhalten ist, generiert das MSSM einen brauchbaren Kandidaten für die dunkle Materie. In den meisten Fällen handelt es sich hierbei um das leichteste *Neutralino*  $\tilde{\chi}_1^0$ .

In der vorliegenden Masterarbeit werden Eigenschaften des Neutralinos untersucht. Konkret geht es darum, den Wirkungsquerschnitt des Annihilationsprozesses  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  präzise, d. h. unter Berücksichtigung von *Einschleifenkorrekturen und Resummationseffekten*, zu bestimmen. Die genaue Berechnung ist dadurch motiviert, dass der genannte Prozess in einem bestimmten Bereich des Parameterraumes des MSSM – dem sogenannten *Higgs-Funnel* – dominant ist. Aufgrund dessen hängt die mithilfe der *Boltzmann-Gleichung* bestimmte Restdichte dunkler Materie im Higgs-Funnel sensitiv von genau diesem Prozess ab. Um auch in diesem Fall einen adäquaten Vergleich mit den experimentellen Daten<sup>2</sup> zu ermöglichen, ist es notwendig, die theoretischen Unsicherheiten zu minimieren und die aufgeführten Korrekturen zum Wirkungsquerschnitt zu bestimmen.

Die übrige Arbeit gliedert sich wie folgt. Im anschließenden Kapitel 2 wird das Phänomen der dunklen Materie ausführlicher beschrieben und die Boltzmann-Gleichung diskutiert. Zudem werden die für diese Arbeit wesentlichen Eigenschaften des Standardmodells der Teilchenphysik und der Supersymmetrie qualitativ zusammengefasst. Abschnitt 3 bildet den Hauptteil der Arbeit. In diesem wird der Wirkungsquerschnitt des Annihilationsprozesses  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  samt zugehörigen Strahlungskorrekturen auf Einschleifenniveau und Resummationseffekten berechnet und detailliert dargestellt. Die dabei notwendigen technischen Feinheiten werden entweder während der Rechnung selbst oder im Anhang B erläutert. In Abschnitt 4 wird das numerische Programmpaket *DM@NLO* kurz vorgestellt. Im Rahmen der vorliegenden Masterarbeit wurden die bereits erwähnten Resummationseffekte in dieses Programm implementiert. Die Auswirkungen der Resummation werden in Kapitel 5 mithilfe von *DM@NLO* numerisch analysiert. Abschließend wird in Abschnitt 6 ein Fazit gezogen, woran sich im Anhang A noch Bemerkungen zu den verwendeten Konventionen anschließen.

Die zentralen Quellen für diese Arbeit sind [8], [9], [10] und [11].

---

<sup>2</sup>Hier spielen insbesondere die sehr präzisen Messwerte der kosmischen Hintergrundstrahlung von *WMAP* („Wilkinson Microwave Anisotropy Probe“) und dessen Nachfolger, dem *Planck-Weltraumteleskop*, eine Rolle.

# 2. Theoretische Grundlagen

## 2.1. Dunkle Materie

### 2.1.1. Evidenz

#### Galaxienbewegung

Das historisch erste Indiz für die Existenz dunkler Materie stammt vom Schweizer Astronomen Fritz Zwicky. 1933 untersuchte dieser die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln<sup>3</sup> (vgl. [3]). Dabei wandte er den *Virialsatz*<sup>4</sup> auf den Coma-Galaxienhaufen an und stellte in einer Überschlagsrechnung fest, dass die Menge der leuchtenden Materie bei Weitem nicht ausreicht, um die beobachtete Rotverschiebung herbeizuführen. Verblüfft zog er das Fazit: „*Falls sich dies bewahrheiten sollte, würde sich also das überraschende Resultat ergeben, dass dunkle Materie in sehr viel größerer Dichte vorhanden ist als leuchtende Materie.*“ [3]

#### Rotationskurven

Unter einer Rotationskurve versteht man in diesem Kontext einen Graphen, der die Rotationsgeschwindigkeit  $v$  von Sternen einer Galaxie in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  zum galaktischen Zentrum darstellt. Die Rotationsgeschwindigkeit lässt sich mithilfe der Rotverschiebung der 21 cm-Wasserstofflinie sehr präzise und insbesondere auch für Sterne bestimmen, die weit vom galaktischen Zentrum entfernt sind. Dabei erwarten wir gemäß der newtonschen Mechanik näherungsweise folgenden Zusammenhang: Die repulsive Zentrifugalkraft wird durch die attraktive Gravitationskraft kompensiert,

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GmM(r)}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \quad (2.1)$$

Darin bezeichnet  $m$  die Masse des betrachteten Sterns,  $G$  die newtonsche Gravitationskonstante und  $M(r)$  die Masse der Galaxie bis zum Radius  $r$ . Wenn wir vereinfachend annehmen, dass die Massendichte der Galaxie  $\rho(r)$  radial ist, gilt

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r'). \quad (2.2)$$

In den Außenbereichen der Galaxie sollte  $M(r)$  in erster Näherung  $r$ -unabhängig sein, da sich die Zahl der im Radius  $r$  eingeschlossenen Sterne kaum noch erhöht. Demnach

<sup>3</sup>Zu dieser Zeit hatte sich der Begriff der Galaxie noch nicht etabliert. Galaxien außerhalb der Milchstraße konnten mit den damaligen Teleskopen nicht oder nur in Einzelfällen als Sternhaufen identifiziert werden, sodass man von *Nebeln* sprach.

<sup>4</sup>Der Virialsatz verbindet die zeitlichen Mittelwerte von kinetischer und potentieller Energie in einem konservativen System. Im Spezialfall eines gravitativen Systems gilt  $2\bar{E}_{\text{kin}} = -\bar{E}_{\text{pot}}$ . Die Überstriche stehen dabei für die zeitliche Mittelung (vgl. [12]).

erwartet man in diesem Bereich die Proportionalität

$$v \sim \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad (2.3)$$

wie sie auch für die Rotationsgeschwindigkeiten der Planeten in unserem Sonnensystem beobachtet wird.

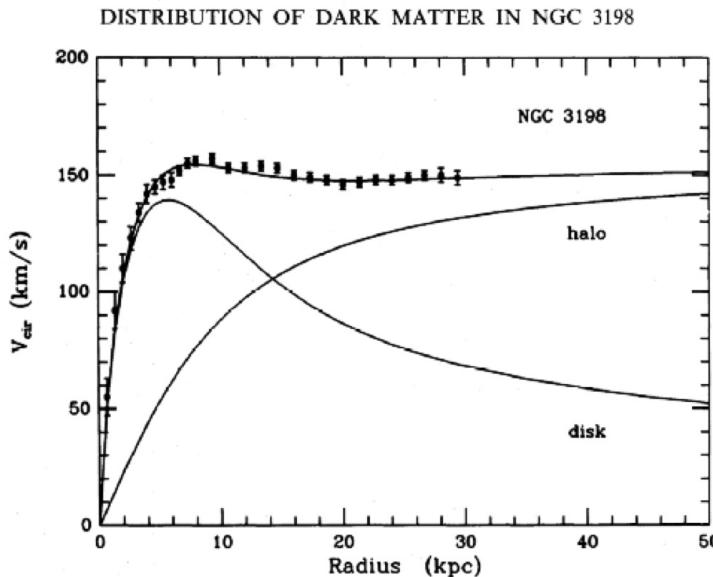


Abbildung 2.1.: Rotationskurve der Galaxie NGC 3198

Ein Beispiel für eine experimentell bestimmte Rotationskurve sehen wir in Abbildung 2.1 (Quelle: [13]). In diesem Fall wurde die Spiralbalkengalaxie NGC 3198 untersucht, die sich im Sternbild des großen Bären befindet. Die unterste und mit „disk“ beschriftete Kurve entspricht der theoretischen Vorhersage, wie sie in vereinfachter Form im Vorangegangenen dargelegt wurde. Sie fällt im Bereich großer Abstände zum galaktischen Zentrum ab. Den Messwerten entspricht jedoch die oberste Kurve. Diese bildet bei großem Radius ein charakteristisches Plateau aus. Die widersprüchliche Situation ist seit 1970 bekannt (vgl. [2]) und lässt sich auf zweierlei Arten interpretieren:

- Das newtonscche Gravitationsgesetz beschreibt den Sachverhalt ungenügend. Auf diese Option wird in Abschnitt 2.1.2 noch näher eingegangen.
- Die Massenverteilung  $M(r)$  besitzt nicht den angenommenen Verlauf. In den Außenbereichen der Galaxie befindet sich zusätzliche, nicht leuchtende Materie, die durch ihre gravitative Wirkung das Plateau in Abbildung 2.1 erzeugt. Dieser Wirkung entspricht der mit „halo“ beschriftete Graph in obiger Abbildung. Die Superposition der unteren beiden Kurven resultiert in der beobachteten Rotationskurve.

### Beobachtungen am Bullet-Cluster

Der Bullet-Cluster<sup>5</sup> ist ein Galaxienhaufen im Sternbild der Carina. Dieser Cluster entstand aus zwei Galaxienhaufen, die vor etwa 100 Millionen Jahren kollidiert sind. Anhand dieses Objektes wurde der bislang stärkste empirische Beweis für die Existenz von dunkler Materie erbracht (vgl. [14]). Wir betrachten dazu Abbildung 2.2 (Quelle: [15]).

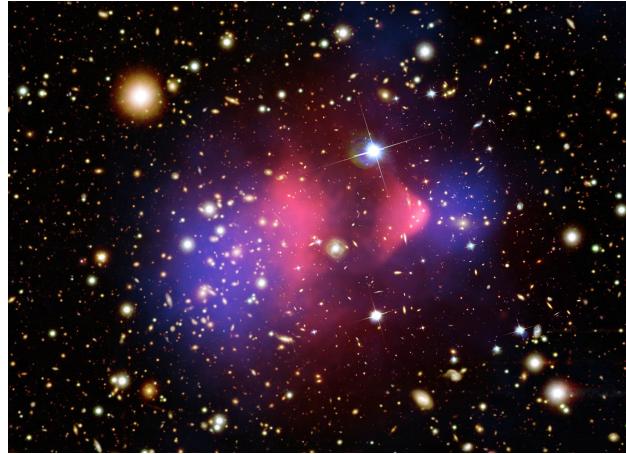


Abbildung 2.2.: Verteilung von baryonischer und dunkler Materie im Bullet-Cluster

Die beiden ursprünglichen Galaxienhaufen liegen ungefähr in den blau eingefärbten Bereichen und emittieren sichtbares Licht. Der linke Haufen ist deutlich größer als der rechte. Aufgrund der großen interstellaren Entfernung hatte die Kollision der Galaxienhaufen auf die einzelnen Galaxien und Sterne kaum einen Effekt.

Die rot eingefärbten Bereiche entsprechen den Gebieten der größten baryonischen Massendichte, dem interstellaren Gas. Diese Gebiete wurden durch den Nachweis von Röntgenstrahlung ermittelt. Man sieht, dass diese Bereiche den beiden Galaxienhaufen „hinterherlaufen“. Diese Tatsache lässt sich damit erklären, dass die Gaswolken – im Gegensatz zu den einzelnen Galaxien – durch die Kollision merklich verlangsamt wurden, da diese sehr diffus sind und miteinander elektromagnetisch wechselwirken.

In blau sind die Gebiete der größten Massendichte insgesamt zu sehen. Um diese zu bestimmen, wurde der *Gravitationslinseneffekt*<sup>6</sup> ausgenutzt. Diese Bereiche fallen mit den Galaxienhaufen selbst zusammen, obwohl diese nicht den Großteil der baryonischen Masse ausmachen.

Die Schlussfolgerung dieses Befundes lautet, dass die Galaxienhaufen neben den Sternen und dem interstellaren Gas noch eine dritte Komponente besitzen, nämlich ein Halo aus dunkler Materie. Die dunkle Materie unterliegt nicht der elektromagnetischen Wechselwirkung, weshalb die beiden Halos durch die Kollision der zugehörigen Galaxienhaufen kaum verlangsamt wurden.

<sup>5</sup>Der Name Bullet (Geschoss) geht auf das Aussehen der Röntgenemissionen des rechten Teils des Galaxienhaufens zurück.

<sup>6</sup>Gemäß der *allgemeinen Relativitätstheorie* krümmen schwere Massen den Raum. Dies führt zu einer Ablenkung von Lichtstrahlen durch Gravitationsfelder. Dabei wird das Abbild des Hintergrundobjektes von einem Beobachter verzerrt, verschoben oder sogar vervielfacht wahrgenommen. Mithilfe von statistischen Methoden lässt sich der Gravitationslinseneffekt dazu nutzen, die Masse der Linse selbst zu bestimmen.

### Kosmische Hintergrundstrahlung und Strukturbildung

Wir widmen unser Augenmerk nun der *kosmischen Hintergrundstrahlung*. Diese wird gelegentlich als „Echo des Urknalls“ bezeichnet und ist entstanden, als das Universum durchsichtig wurde, also zum Zeitpunkt der Entkopplung von Strahlung und Materie. Das Universum war dabei etwa 380.000 Jahre alt und 3.000 K heiß. Die kosmische Hintergrundstrahlung wurde von Satelliten wie *COBE* („Cosmic Background Explorer“) und *WMAP* („Wilkinson Microwave Anisotropy Probe“, vgl. [16]) sehr genau vermessen und als Schwarzkörperstrahlung mit einer Temperatur von etwa 2,7 K identifiziert. Sie zeichnet sich durch ihre räumliche Isotropie aus, die einen der Eckpfeiler der Urknall- und Inflationstheorie bildet. Man stellt jedoch fest, dass die räumliche Isotropie nicht völlig perfekt ist. Es liegen Temperaturanisotropien im Bereich von etwa 60  $\mu\text{K}$  vor.

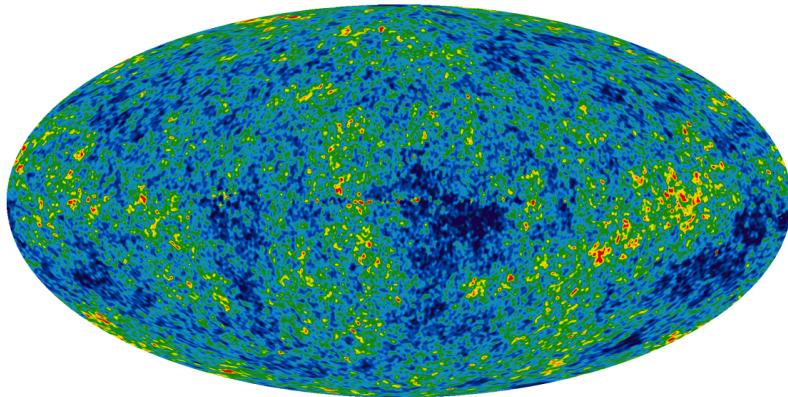


Abbildung 2.3.: Anisotropien in der kosmischen Hintergrundstrahlung, gemessen mit WMAP

Diese in Abbildung 2.3 (Quelle: [17]) dargestellten Fluktuationen sind für unser kosmologisches Modell essentiell. Schließlich geht man davon aus, dass die Strahlungsfluktuationen direkt mit Dichteschwankungen im frühen Universum verbunden sind. Diese Dichteschwankungen sind es, aus denen alle heutigen Strukturen wie z. B. Galaxien hervorgegangen sind. Aus dem Fourierspektrum der Anisotropien lassen sich auf ausgeklügelte Weise die Dichte der dunklen Materie  $\Omega_{\text{DM}}$  und die Dichte der baryonischen Materie  $\Omega_{\text{BM}}$  getrennt voneinander bestimmen<sup>7</sup>. Man findet (vgl. [16])

$$\Omega_{\text{DM}}h^2 = 0,1157 \pm 0,0023 \quad \text{sowie} \quad \Omega_{\text{BM}}h^2 = 0,02266 \pm 0,00043. \quad (2.4)$$

Diese Dichten sind in Einheiten der kritischen Dichte

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.5)$$

zu verstehen. Eine Energie- bzw. Materiedichte von 1 würde in diesen Einheiten ein perfekt flaches Universum hervorrufen.  $H$  bezeichnet die Hubble-Konstante. Diese schreibt man

<sup>7</sup>Bei dieser Bestimmung wird das  $\Lambda\text{CDM}$ -Modell verwendet. Dieses beruht auf einem flachen Universum mit einer *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik*. Den Großteil der benötigten Energie- bzw. Materiedichte für ein flaches Universum liefert dabei eine kosmologische Konstante, die man als *dunkle Energie* bezeichnet.

in der Regel als

$$H = h \cdot 100 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}, \quad (2.6)$$

um in (2.4) über  $h$  die Abhängigkeit von der Hubble-Konstanten zu betonen. Ein Megaparsec (Mpc) beträgt  $3,0856776 \cdot 10^{25}$  Meter. Die Unsicherheiten in (2.4) entsprechen einer Standardabweichung von  $1\sigma$ .

Komplementär lässt sich numerisch untersuchen, welche anfänglichen Dichteschwankungen zu den heute beobachteten kosmischen Strukturen führen. Dieser Fragestellung wurde im Rahmen der *Millennium-Simulation* unter Federführung des Max-Planck-Instituts für Astrophysik in Garching nachgegangen (vgl. [18]). In dieser Simulation konnte die kosmische Strukturbildung erfolgreich nachgebildet werden. Der wichtigste Parameter der Simulation war dabei die Menge der dunklen Materie  $\Omega_{\text{DM}}$ , der auf

$$\Omega_{\text{DM}} h^2 = 0,1092445 \quad (2.7)$$

gesetzt wurde. Die dunkle Materie prägt durch ihre gravitative Wechselwirkung den Strukturbildungsprozess maßgeblich, man spricht von „dunklen Kondensationskeimen“ oder Gravitationszentren. Fordert man weiterhin, dass die dunkle Materie nicht elektromagnetisch wechselwirkt, so findet keine Kopplung von Strahlung an dunkle Materie statt. Dadurch erhöhen sich die Temperaturanisotropien, wie sie von WMAP gemessen wurden, durch die Anwesenheit von dunkler Materie nicht.

Die Millennium-Simulation bescherte jedoch noch eine weitere Erkenntnis. Ist der Großteil der dunklen Materie heiß, d. h. bewegt sie sich mit relativistischer Geschwindigkeit, so rekonstruiert die simulierte Strukturbildung nicht die Realität. In diesem Falle bilden sich großskalige Objekte wie Galaxienhaufen vor kleineren Objekten wie Galaxien. Man beobachtet jedoch den gegenteiligen Fall. Dunkle Materie muss demnach hauptsächlich aus kalten Komponenten bestehen.

### 2.1.2. Kandidaten für dunkle Materie

#### MACHOs

Einen ersten Deutungsansatz zur dunklen Materie bilden die sogenannten *MACHOs* („Massive Astronomical Compact Halo Objects“). Darunter versteht man schwere, gebundene, nicht leuchtende Objekte. MACHOs müssten in den Außenbereichen der Galaxien in großer Zahl vorhanden sein, um so die zuvor aufgeführten Effekte erklären zu können. Kandidaten für MACHOs sind beispielsweise braune und weiße Zwerge, Neutronensterne oder schwarze Löcher. Die Erklärung besitzt jedoch einige Schwächen.

Zum einen sollten die genannten Objekte im frühen Universum noch nicht existieren. So sind der gängigen Theorie nach Neutronensterne Endzustände von Sternen, die sich erst im Laufe der Zeit ausbilden. Daher ist fraglich, wie eine aus MACHOs aufgebaute dunkle Materie die erwähnten Phänomene zur Strukturbildung verursacht haben soll.

Zum anderen lassen sich MACHOs mithilfe des Gravitationslinseneffektes nachweisen. Die dabei auftretenden kurzzeitigen Aufhellungen des Lichtsignals sind sehr charakteristisch, sodass der Effekt gut von anderen Ursachen abgegrenzt werden kann. Mithilfe dieser Methode wurde beispielsweise in der großen Magellanschen Wolke gezielt nach MACHOs gesucht (vgl. [19]). Es wurden auch MACHOs gefunden, allerdings zu wenig, als dass diese die geforderte Menge an dunkler Materie gänzlich erklären könnten.

## WIMPs

Eine andere Möglichkeit, das Phänomen der dunklen Materie zu erklären, basiert auf sogenannten *WIMPs* („Weakly Interacting Massive Particles“). In diesem Fall geht man davon aus, dass die dunkle Materie nicht aus großen kompakten Objekten, sondern aus freien Elementarteilchen besteht, die zahlreich in den galaktischen Halos sowie im frühen Universum vorhanden sind. Dabei müssen sie alle zuvor diskutierten Eigenschaften erfüllen. Insbesondere dürfen WIMPs nicht der elektromagnetischen oder starken<sup>8</sup> Wechselwirkung unterliegen, müssen nichtrelativistisch, massiv und stabil sein.

An dieser Stelle ist eine Klarstellung angebracht. WIMPs müssen wie erwähnt elektrisch neutral und farblos sein. Sie wechselwirken daher nur schwach. Schwach ist dabei zunächst als Adjektiv zu verstehen, hiermit ist nicht automatisch die schwache Wechselwirkung des Standardmodells gemeint. Konkret lassen sich drei Fälle unterscheiden:

1. Die WIMPs wechselwirken ausschließlich gravitativ.
2. Die WIMPs wechselwirken gravitativ und zusätzlich schwach auf eine bislang unbekannte Weise, z. B. über eine Wechselwirkung, die nicht im Standardmodell der Teilchenphysik enthalten ist.
3. Die WIMPs wechselwirken gravitativ und unterliegen der schwachen Wechselwirkung des Standardmodells.

In dieser Masterarbeit werden Eigenschaften eines potentiellen WIMPs untersucht, das in die dritte der obigen Kategorien fällt. Dieses Teilchen, das *Neutralino*, wird in Abschnitt 2.3 näher vorgestellt.

## MOND

Alternativ besteht in einer Korrektur der zugrunde liegenden Theorie, d. h. in diesem Falle der newtonschen Dynamik, ein weiterer Erklärungsansatz. Dieser Weg firmiert unter dem Schlagwort *MOND* (Modifizierte newtonsche Dynamik; vgl. [21] und [22]). Hierbei geht man davon aus, dass das übliche newtonsche Kraftgesetz<sup>9</sup>, also der Zusammenhang zwischen Kraft  $F$  und Beschleunigung  $a$ , gegeben durch

$$F = ma, \quad (2.8)$$

lediglich eine Näherung bzw. ein Grenzfall für große Beschleunigungen ist. Groß meint dabei insbesondere auch alltägliche Beschleunigungen, wie beispielsweise die Erdbeschleunigung. Die Kreisbeschleunigung von Sternen, die sich weit außen in ihrer Galaxie befinden, ist hingegen klein, sodass hier eine Korrektur erforderlich wird. Das modifizierte Gesetz lautet

$$F = ma\mu \left( \frac{a}{a_0} \right), \quad (2.9)$$

---

<sup>8</sup>Dass WIMPs nicht stark wechselwirken dürfen, folgt nicht unmittelbar aus dem bisher Beschriebenen. Eine genauere Begründung dessen findet sich in [20]. Das Hauptargument ist, dass stark wechselwirkende WIMPs bei der Suche nach anomalen Protonen detektiert worden wären.

<sup>9</sup>Auf eine vektorielle Schreibweise wird in diesem Abschnitt verzichtet.

wobei  $a_0$  eine neue Naturkonstante ist. Die Funktion  $\mu(x)$  ist nicht eindeutig festgelegt. Wesentlich ist, dass die Funktion die beiden Grenzfälle  $\mu(x \gg 1) = 1$  und  $\mu(x \ll 1) = x$  einschließt. In der Praxis verwendet man häufig die Funktionen

$$\mu(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{oder} \quad \mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (2.10)$$

Wie erwähnt erhält man somit im Falle großer Beschleunigungen die übliche newtonsche Dynamik. Für die Bahnbewegung von Sternen in den Außenbereichen von Galaxien folgt mittels der Korrektur für kleine Beschleunigungen

$$\frac{GmM}{r^2} = m \frac{a^2}{a_0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_0 GM}{r^2} = \frac{v^4}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt[4]{a_0 GM}. \quad (2.11)$$

Die Bahngeschwindigkeit ist demzufolge radiusunabhängig, was dem beobachteten Plateau für große Radien in Abbildung 2.1 gerecht wird. Obwohl die MOND die beobachteten Rotationskurven erklären kann und die übliche newtonsche Mechanik als Grenzfall enthält, besitzt sie auch Mängel:

- Die MOND erklärt neben den Rotationskurven keine weiteren Phänomene der dunklen Materie. Insbesondere die Beobachtungen am Bullet Cluster lassen sich nicht mithilfe der MOND deuten.
- Die MOND relativistisch zu verallgemeinern ist vermutlich möglich, jedoch noch aktueller Forschungsgegenstand (vgl. [23]). Generell sollte sich jede physikalische Theorie relativistisch formulieren lassen.

## 2.2. Das Standardmodell der Teilchenphysik

In diesem Abschnitt soll das *Standardmodell der Teilchenphysik* kurz und qualitativ zusammengefasst werden. Der Fokus liegt dabei auf den für diese Arbeit benötigten Grundlagen. Technische Aspekte sollen nicht diskutiert werden, da alle für die in Abschnitt 3 durchgeführte Rechnung benötigten Methoden während der Rechnung selbst oder im Anhang B im Detail erläutert werden. Die Darstellung folgt im Wesentlichen Vorlesungsmitschriften, findet sich jedoch ebenso in der einschlägigen Lehrliteratur wieder (vgl. etwa [24], [25], [26] oder [27]).

### 2.2.1. Wechselwirkungen und Symmetrien

Das Standardmodell der Teilchenphysik ist eine relativistische *Quantenfeldtheorie* (QFT) zur Beschreibung der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen. Im Rahmen des Standardmodells werden drei der vier fundamentalen Kräfte beschrieben, die elektromagnetische, die schwache sowie die starke Wechselwirkung. Die Theorie der Gravitation ist die allgemeine Relativitätstheorie, allerdings ist der Einfluss der Gravitation auf mikroskopischer Skala in der Regel vernachlässigbar.

Zugleich ist das Standardmodell eine *Eichtheorie*. Eine Eichtheorie zeichnet sich durch bestimmte Symmetrieeigenschaften aus. Formal gesprochen ist die Lagrangedichte einer Eichtheorie invariant unter der zugehörigen lokalen Eichtransformation. Die entsprechende Symmetriegruppe des Standardmodells lautet

$$SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y. \quad (2.12)$$

Die erwähnten drei Wechselwirkungen sind direkt mit obigen Symmetriegruppen verknüpft und sollen nun näher charakterisiert werden.

- Die elektromagnetische Wechselwirkung konnte als erste erfolgreich durch eine Quantenfeldtheorie, die *Quantenelektrodynamik* (QED) beschrieben werden. Wie in jeder Eichtheorie erfolgt auch in der QED der Kräfteaustausch durch ein Eichboson, in diesem Fall durch das masselose Photon. Das Photon koppelt an elektrisch geladene Teilchen. Da es selbst jedoch neutral ist, kommt es zu keiner Selbstwechselwirkung. Diese Tatsache spiegelt sich technisch darin wider, dass die Generatoren der zugehörigen Symmetriegruppe  $U(1)$  kommutieren. Man bezeichnet die QED daher als *abelsche Eichtheorie*.
- Die schwache Wechselwirkung besitzt insgesamt drei Austauschbosonen, zwei geladene  $W$ -Bosonen und ein neutrales  $Z$ -Boson. Alle drei Bosonen sind massiv, was eine theoretische Beschreibung durch eine Eichtheorie lange erschwerte, da Eichbosonen prinzipiell masselos sein müssen<sup>10</sup>.

Ein Ausweg wurde 1967 durch das *Glashow-Weinberg-Salam-Modell* (GWS-Modell) gefunden (vgl. [28] und [29]). Diese Theorie vereint die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung zur elektroschwachen Wechselwirkung. Die Theorie besitzt eine  $SU(2)_I \times U(1)_Y$ -Symmetrie bezüglich des schwachen Isospins  $I$  bzw. der schwachen Hyperladung  $Y$ . Allerdings wird diese Symmetrie durch den *Higgs-Mechanismus* spontan gebrochen. Bei diesem Vorgang erhalten die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung ihre Masse (vgl. [30]). Zusätzlich entsteht ein weiteres physikalisches Teilchen, das sogenannte *Higgs-Boson*, welches wahrscheinlich im letzten Jahr erstmalig beobachtet wurde (vgl. [31] und [32]).

- Die starke Wechselwirkung wird durch die *Quantenchromodynamik* (QCD) beschrieben. Ihr unterliegen alle Teilchen mit einer Farbladung. Die zugehörige Symmetriegruppe ist die  $SU(3)_C$ -Gruppe. Den acht Generatoren dieser Gruppe entsprechen die Eichbosonen der QCD, die masselosen Gluonen. Wesentlich ist, dass die Gluonen selbst farbig geladen sind und daher mit sich selbst wechselwirken. Die QCD ist deshalb – ebenso wie das GWS-Modell – eine *nicht-abelsche Eichtheorie*.

### 2.2.2. Teilcheninhalt

Neben den bereits angesprochenen Eichbosonen und dem Higgs-Boson beinhaltet das Standardmodell zwölf massive Fermionen. Diese lassen sich wiederum in Quarks ( $u, d, c, s, t$  und  $b$ ), geladene Leptonen ( $e, \mu$  und  $\tau$ ) sowie neutrale Leptonen ( $\nu_e, \nu_\mu$  und  $\nu_\tau$ ) in je drei Generationen einteilen. Die einzelnen Quark- und Leptonsorten werden auch als die verschiedenen *Flavours* der Quarks und Leptonen bezeichnet. Eine Übersicht findet sich in Tabelle 2.1.

---

<sup>10</sup>Ein Massenterm für Eichbosonen in der Lagrangedichte verletzt die Eichinvarianz.

Tabelle 2.1.: Fermionischer Teilcheninhalt des Standardmodells

	1. Generation	2. Generation	3. Generation
Quarks	$u$ $d$	$c$ $s$	$t$ $b$
Leptonen	$e$ $\nu_e$	$\mu$ $\nu_\mu$	$\tau$ $\nu_\tau$

Jedes der obigen Teilchen unterliegt der schwachen Wechselwirkung. Die Quarks und die geladenen Leptonen wechselwirken zusätzlich elektromagnetisch. Der starken Wechselwirkung unterliegen neben den Gluonen lediglich die Quarks.

Wir erinnern uns nun an die erforderlichen Eigenschaften eines WIMPs. Als WIMP kommen nur die schwach wechselwirkenden neutralen Leptonen, die Neutrinos, in Betracht. Neutrinos sind jedoch extrem leichte Teilchen<sup>11</sup>, weshalb sie im frühen Universum relativistisch waren. Dies steht im Widerspruch zu den Resultaten der Millennium-Simulation. Des Weiteren sind Neutrinos nicht zahlreich genug, um die benötigte Menge an dunkler Materie zu liefern. Wir halten deshalb fest, dass das Standardmodell der Teilchenphysik keinen geeigneten Kandidaten für die dunkle Materie beinhaltet.

## 2.3. Supersymmetrie und das MSSM

### 2.3.1. Motivation und Konstruktion

Obwohl das Standardmodell der Teilchenphysik als phänomenologisch extrem erfolgreich zu bewerten ist, gibt es Indizien dafür, dass das Standardmodell lediglich als eine effektive Theorie, d. h. als Näherung einer fundamentaleren Theorie für niedrige Energien, aufzufassen ist. Neben einem fehlenden Kandidaten für die dunkle Materie besitzt das Standardmodell aus theoretischer Sicht u. a. die folgenden Schwächen:

- Das sogenannte *Hierarchieproblem* betrifft die Frage, warum die Gravitation im Vergleich zur elektroschwachen Wechselwirkung so schwach ist. Technisch spiegelt sich dies in der Masse des Higgs-Bosons wider. Dazu nehmen wir an, dass das Standardmodell die Physik bis zur Energieskala  $\Lambda$  korrekt beschreibt. Bei der Berechnung der Masse des Higgs-Bosons auf Einschleifenniveau treten dann divergente Strahlungskorrekturen proportional zu  $\Lambda^2$  auf. Diese lassen sich prinzipiell durch eine geeignete Renormierung der Masse beheben. Wenn  $\Lambda$  jedoch die Planck-Skala ( $\sim 10^{19}$  GeV) ist, müsste diese Aufhebung mit einer *unnatürlichen* Präzision erfolgen, damit die Higgs-Masse im elektroschwachen Energiebereich ( $\sim 10^2$  GeV) liegt.
- Um Prozesse wie den Urknall besser studieren zu können, ist es notwendig, die drei Wechselwirkungen des Standardmodells innerhalb einer *vereinheitlichten Theorie* zu beschreiben. Dazu müssen die Kopplungstärken der Kräfte ab einer bestimmten Energieskala übereinstimmen. Dies ist im Standardmodell jedoch nicht gegeben.

<sup>11</sup>Beispielsweise ist das Elektroneneutrino  $\nu_e$  leichter als 2,2 eV.

Es stellt sich die Frage, wie die erwähnte tiefer liegende Theorie beschaffen ist, d. h. wie sich das Standardmodell erweitern lässt. Eine Möglichkeit besteht in der Einführung einer Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen, der sogenannten *Supersymmetrie*. Dabei wird durch einen Operator  $Q$  jedem Boson ein Fermion zugeordnet und umgekehrt:

$$Q |\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle \quad \text{und} \quad Q |\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle . \quad (2.13)$$

Konkret gehorcht  $Q$  der folgenden Algebra (vgl. [33]):

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu, \quad \{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0, \quad [P_\mu, Q_\alpha] = [P_\mu, Q_\alpha^\dagger] = 0. \quad (2.14)$$

Für die darin auftretenden Indices gilt  $\alpha, \beta = 1, 2$  und  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Mit  $P_\mu$  wird der Impulsoperator bezeichnet. Dieser unterliegt der *Poincaré-Algebra*. Die Größe  $\sigma^\mu$  beinhaltet die drei *Pauli-Matrizen* und ist wie folgt zu verstehen:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Bei der Supersymmetrie handelt es sich somit um eine äußere Symmetrie. Die inneren Symmetrien, d. h. die Eichsymmetrien, werden durch die Einführung der Supersymmetrie nicht verändert. Dementsprechend führt die SUSY zu keiner neuen fundamentalen Wechselwirkung.

Mithilfe der SUSY lassen sich die zuvor genannten Probleme des Standardmodells beheben. So liefern die neu eingeführten supersymmetrischen Partner ebenfalls Einschleifenbeiträge zur Higgs-Masse, welche die quadratischen Divergenzen in  $\Lambda^2$  exakt aufheben. Es verbleiben lediglich Divergenzen proportional zu  $\ln \Lambda$ . Zusätzlich lässt sich zeigen, dass die drei Eichkopplungen in supersymmetrischen Modellen an der GUT-Skala („Grand Unified Theory“), d. h. bei  $\sim 10^{16}$  GeV, Größenmäßig gut übereinstimmen.

Das *minimale supersymmetrische Standardmodell* (MSSM) ist die einfachste supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells. Es besitzt genau einen<sup>12</sup> SUSY-Operator  $Q$ , und der Teilcheninhalt ist minimal. Des Weiteren ist die R-Parität eine Erhaltungsgröße (vgl. Abschnitt 2.3.5). Dieses Modell wird im Folgenden verwendet.

### 2.3.2. Teilcheninhalt

Tabelle 2.2 bietet eine Übersicht über den Teilcheninhalt des MSSM (vgl. [4]). Wesentlich ist dabei, dass die Anzahl der Freiheitsgrade in der linken und rechten Tabellenhälfte, d. h. bei den Teilchen des Standardmodells und den zugehörigen SUSY-Partnern, gleich ist. Beispielsweise besitzt das Bottom-Quark  $b$  als Dirac-Fermion zwei Freiheitsgrade – einen rechtshändigen Anteil  $b_R$  und einen linkshändigen Anteil  $b_L$ . Die Händigkeit oder *Chiralität* dieses Dirac-Fermions erhält man mittels

$$b_R = P_R b \quad \text{und} \quad b_L = P_L b. \quad (2.16)$$

Dabei wurden die Chiralitätsprojektoren

$$P_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \quad \text{und} \quad P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \quad (2.17)$$

<sup>12</sup>Die Algebra in (2.14) bezieht sich bereits auf den Spezialfall  $N = 1$ , wobei  $N$  die Anzahl der SUSY-Operatoren bezeichnet.

eingeführt und die fünfte Dirac-Matrix  $\gamma_5$  verwendet (vgl. Abschnitt B.1.1). Dem Bottom-Quark werden deshalb zwei skalare Sbottoms  $\tilde{b}_1$  und  $\tilde{b}_2$  zugeordnet. Anders verhält es sich bei den Neutrinos. Das Standardmodell beinhaltet ausschließlich linkshändige Neutrinos. Dementsprechend besitzt jedes Neutrino lediglich einen Freiheitsgrad, und es gibt nur drei Sneutrinos.

Tabelle 2.2.: Teilcheninhalt des MSSM

Teilchen des Standardmodells inklusive zweitem Higgs-Dublett		SUSY-Partner	
Symbol	Name	Symbol	Name
$u, c, t$	Up-Quarks	$\tilde{u}_i, \tilde{c}_i, \tilde{t}_i$ mit $i = 1, 2$	Up-Squarks
$d, s, b$	Down-Quarks	$\tilde{d}_i, \tilde{s}_i, \tilde{b}_i$ mit $i = 1, 2$	Down-Squarks
$e, \mu, \tau$	Geladene Leptonen	$\tilde{e}_i, \tilde{\mu}_i, \tilde{\tau}_i$ mit $i = 1, 2$	Geladene Sleptonen
$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	Neutrinos	$\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\mu, \tilde{\nu}_\tau$	Sneutrinos
$g$	Gluonen	$\tilde{g}$	Gluinos
$W^\pm$ $H^\pm$	W-Bosonen Geladene Higgs-Bosonen	$\tilde{\chi}_i^\pm$ mit $i = 1, 2$	Charginos
$\gamma$	Photon		
$Z^0$	Z-Boson		
$h^0$	Leichtes Higgs-Boson	$\tilde{\chi}_j^0$ mit $j = 1, 2, 3, 4$	Neutralinos
$H^0$	Schweres Higgs-Boson		
$A^0$	Pseudoskalares Higgs-Boson		

Eine Besonderheit tritt bei den supersymmetrischen Partnern der Higgs- und Eich-Bosonen auf. Diese bezeichnet man als *Higgsinos* bzw. *Gauginos*. Da sie dieselben Quantenzahlen besitzen, sind die physikalisch beobachtbaren Massenzustände Linearkombinationen der Higgsinos und Gauginos. Man unterscheidet dabei zwischen elektrisch geladenen *Charginos* und elektrisch neutralen *Neutralinos*. Per definitionem ist das Teilchen mit dem niedrigsten Index stets das leichteste Chargino bzw. Neutralino. Selbiges gilt für die Squarks und Sleptonen.

### 2.3.3. Higgs-Sektor

Im Standardmodell führt man ein komplexwertiges Higgs-Dublett (Higgs-Feld) ein, das einer nichttrivialen Selbstwechselwirkung unterliegt (Higgs-Potential). Der Higgs-Mechanismus beschreibt dann die Folgen der spontanen Symmetriebrechung der lokalen Eichsymmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung. Die spontane Symmetriebrechung tritt auf, wenn das Higgs-Feld den energetisch günstigsten Zustand einnimmt. Dieser entspricht im vorliegenden Fall nicht dem Zustand der maximalen Symmetrie.

Der Higgs-Mechanismus generiert die Masse der  $W$ - und  $Z$ -Bosonen. Mithilfe von Yukawa-Kopplungen können zusätzlich die Massen der Fermionen mit dem Higgs-Mechanismus verbunden werden. Von den ursprünglich vier Freiheitsgraden des Higgs-Dubletts werden mithilfe einer unitären Eichtransformation drei Freiheitsgrade eliminiert. Der verbleibende Freiheitsgrad manifestiert sich als massives, skalares Teilchen – das Higgs-Boson.

Der Higgs-Sektor des MSSM unterscheidet sich von dem des Standardmodells. Im MSSM gibt es zwei Higgs-Dubletts<sup>13</sup> mit insgesamt acht Freiheitsgraden. Nach einer unitären Eichtransformation verbleiben fünf Freiheitsgrade, die allesamt physikalischen Teilchen, d. h. Higgs-Bosonen, entsprechen. Im Einzelnen sind dies zwei geladene  $H^\pm$ , ein leichtes und ein schweres elektrisch neutrales skalares  $h^0$  bzw.  $H^0$  sowie ein pseudoskalares, ebenfalls elektrisch neutrales  $A^0$ .

Die beiden Higgs-Dubletts besitzen verschiedene Vakuum-Erwartungswerte  $v_1$  und  $v_2$ . Ein wichtiger Parameter für die vorliegende Masterarbeit sowie für das MSSM allgemein ist das Verhältnis dieser beiden Größen,

$$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}. \quad (2.18)$$

Aufgrund der Relation

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}G_F} \quad \text{mit} \quad G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g_W^2}{m_W^2} \quad (2.19)$$

fixiert  $\tan \beta$  nicht nur das relative Verhältnis der beiden Vakuum-Erwartungswerte, sondern auch deren Absolutwerte. In obiger Gleichung bezeichnet  $G_F$  die Fermi-Konstante,  $m_W$  die Masse der  $W$ -Bosonen und  $g_W$  die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung.

### 2.3.4. Flavour- und Squarkmischung

Im Standardmodell der Teilchenphysik kommt es im elektroschwachen Sektor zur *Flavourmischung*. Das bedeutet, dass der Flavour keine Erhaltungsgröße der schwachen Wechselwirkung ist und ein Teilchen seinen Flavour ändern kann, wenn es sich bewegt. Technisch manifestiert sich dieser Umstand darin, dass die Wechselwirkungszustände der Quarks nicht mit ihren Massenzuständen zusammenfallen. Stattdessen existiert eine nichtdiagonale Matrix, welche die Wechselwirkungs- mit der Massenbasis verknüpft. Diese ist unter dem Namen *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix* (CKM-Matrix) bekannt.

Im MSSM tritt dasselbe Phänomen auf, auch hier mischen die verschiedenen Flavours. Zusätzlich mischen im MSSM noch die Wechselwirkungszustände der Squarks, wodurch es insgesamt zur Mischung aller sechs Squarks eines gegebenen Typs ( $u$  oder  $d$ ) kommt.

Der Einfluss der Flavourmischung im Kontext von supersymmetrischer dunkler Materie wird in [35] untersucht<sup>14</sup>. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird lediglich die Mischung

<sup>13</sup>Die Einführung eines zweiten Dubletts ist notwendig, da in einer supersymmetrischen Theorie die Yukawa-Kopplungen der Up- und Down-Quarks nicht vom selben Dublett erzeugt werden können (vgl. [4]). In der Nomenklatur von (2.18) ist das erste Dublett für die Yukawa-Kopplungen der Bottom-Quarks und das zweite für die der Up-Quarks verantwortlich. Des Weiteren lässt sich zeigen, dass durch die Einführung des zweiten Dubletts gewisse Eichanomalien vermieden werden (vgl. [34]).

<sup>14</sup>Hierbei werden insbesondere nichtminimale Mechanismen der Flavourmischung phänomenologisch analysiert. Als nichtminimal bezeichnet man dabei Mechanismen, die über eine Flavourmischung der Squarks mittels CKM-Matrix hinaus gehen.

der Sbottoms betrachtet. Die Massenzustände  $\tilde{b}_1$  und  $\tilde{b}_2$  sind über eine Drehmatrix  $W$  mit den Wechselwirkungszuständen  $\tilde{b}_{\text{R}}$  und  $\tilde{b}_{\text{L}}$  verbunden.

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix} = W \cdot \begin{pmatrix} \tilde{b}_{\text{L}} \\ \tilde{b}_{\text{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\tilde{b}} & \sin \theta_{\tilde{b}} \\ -\sin \theta_{\tilde{b}} & \cos \theta_{\tilde{b}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{b}_{\text{L}} \\ \tilde{b}_{\text{R}} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Die Matrix  $W$  diagonalisiert die Massenmatrix der Wechselwirkungsbasis  $M$ , d. h. es gilt

$$W \cdot M \cdot W^{-1} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{b}_1}^2 & 0 \\ 0 & m_{\tilde{b}_2}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Dabei kann die Matrix  $M$  als

$$M = \begin{pmatrix} M_{\tilde{b}_{\text{L}}}^2 + m_b^2 & m_b(A_b - \mu \tan \beta) \\ m_b(A_b - \mu \tan \beta) & M_{\tilde{b}_{\text{R}}}^2 + m_b^2 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

geschrieben werden (vgl. [36] und [9]). Hieraus können wir

$$\sin 2\theta_{\tilde{b}} = \frac{2m_b(A_b - \mu \tan \beta)}{m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2} \quad \text{und} \quad \cos 2\theta_{\tilde{b}} = \frac{M_{\tilde{b}_{\text{L}}}^2 - M_{\tilde{b}_{\text{R}}}^2}{m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2} \quad (2.23)$$

sowie

$$m_{\tilde{b}_{1,2}}^2 = m_b^2 + \frac{1}{2} \left[ M_{\tilde{b}_{\text{L}}}^2 + M_{\tilde{b}_{\text{R}}}^2 \mp \sqrt{(M_{\tilde{b}_{\text{L}}}^2 - M_{\tilde{b}_{\text{R}}}^2)^2 + 4m_b^2(A_b - \mu \tan \beta)^2} \right] \quad (2.24)$$

folgern. Der letzte Ausdruck verknüpft somit die Massen der Sbottoms  $m_{\tilde{b}_{1,2}}$  mit der des  $b$ -Quarks  $m_b$  und den Massenparametern  $M_{\tilde{b}_{\text{L,R}}}$ .

### 2.3.5. R-Parität

Im MSSM wird eine neue, diskrete Quantenzahl eingeführt, die sogenannte *R-Parität*  $R$ . Für jedes Teilchen ist diese als

$$R = (-1)^{3(B-L)+2S} \quad (2.25)$$

definiert (vgl. [4]). Dabei bezeichnen  $B$ ,  $L$  und  $S$  die Baryonen- und Leptonenzahl sowie den Spin. Die Baryonenzahl  $B$  beträgt  $1/3$  für Quarks und Squarks und null für die übrigen Teilchen des MSSM<sup>15</sup>. Ganz ähnlich beträgt die Leptonenzahl  $L$  eins für alle Leptonen und Sleptonen und null sonst. Damit lässt sich  $R$  auch als

$$R = \begin{cases} 1 & \text{für Teilchen des Standardmodells,} \\ -1 & \text{für die zugehörigen supersymmetrischen Partner} \end{cases} \quad (2.26)$$

schreiben, wobei die neu eingeführten Higgs-Bosonen ( $h^0$ ,  $H^0$ ,  $A^0$  und  $H^\pm$ ) in diesem Fall unter die Teilchen des Standardmodells fallen.

<sup>15</sup>Der Wert von  $1/3$  ist dadurch motiviert, dass drei Quarks ein Baryon bilden und dieses somit die Baryonenzahl eins hat.

Im Folgenden wird stets davon ausgegangen, dass diese Quantenzahl exakt erhalten ist<sup>16</sup>. Da es sich um eine multiplikative Quantenzahl handelt, hat dies zur Folge, dass nur solche Prozesse erlaubt sind, an denen eine geradzahlige Anzahl von supersymmetrischen Teilchen beteiligt ist. Insbesondere kann ein einzelnes supersymmetrisches Teilchen nicht ausschließlich in Teilchen des Standardmodells zerfallen. Somit ist das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP; „Lightest Supersymmetric Particle“) stabil und ein geeigneter Kandidat für die dunkle Materie.

### 2.3.6. SUSY-Brechung und mSUGRA

Falls die Supersymmetrie exakt ist, besitzen die supersymmetrischen Partner (abgesehen vom Spin) die gleichen Eigenschaften wie das ursprüngliche Teilchen des Standardmodells. Insbesondere gilt dies auch für die Masse, was im Widerspruch zu den experimentellen Tatsachen steht, da keine leichten SUSY-Teilchen gefunden wurden. Die SUSY kann deshalb nicht als exakte, sondern höchstens als gebrochene Symmetrie realisiert sein.

Es existieren verschiedene Mechanismen, die zur SUSY-Brechung führen. Eine der populärsten Varianten ist *mSUGRA* („Minimal Super Gravity“). Wie der Name andeutet, liegen die Wurzeln dieses Ansatzes in einer feldtheoretischen Beschreibung der Gravitation (vgl. [37]). In diesem Modell erfolgt die Brechung der SUSY via Gravitation in einem sogenannten verborgenen Sektor, worauf im Folgenden jedoch nicht näher eingegangen werden soll. Stattdessen sollen die praktischen Konsequenzen hervorgehoben werden.

Innerhalb von mSUGRA vereinen sich die drei Eichkopplungen an der GUT-Skala. Zusätzlich wird angenommen, dass an dieser Skala alle Gauginos die universelle Masse  $m_{1/2}$  und alle skalaren SUSY-Teilchen die Masse  $m_0$  besitzen. Analog vereinen sich die trilinearen Kopplungen zu  $A_0$ . Das hat zur Folge, dass lediglich fünf<sup>17</sup> Parameter frei wählbar sind, nämlich

$$m_{1/2}, \quad m_0, \quad A_0, \quad \tan \beta \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn} \mu. \quad (2.27)$$

Alle anderen Parameter, z. B. die trilinearen Kopplungen  $A_b$  und  $A_t$  oder die einzelnen Squark- und Gauginomassen an der elektroschwachen Skala, ergeben sich mithilfe von *Renormierungsgruppengleichungen* aus den obigen Größen. Es existieren frei verfügbare Programme, die speziell für diese Aufgabe geschrieben wurden (vgl. Kapitel 4).

Dieses Modell ist aufgrund seiner einfachen Handhabbarkeit für praktische Studien gut geeignet. Wegen der enormen Reduktion der freien Parameter bezeichnet man es auch als *cMSSM* („Constrained Minimal Supersymmetric Standard Model“). Das cMSSM wird in Abschnitt 5 zur numerischen Analyse der berechneten Strahlungskorrekturen verwendet.

## 2.4. Boltzmann-Gleichung

Wenn man ein konkretes WIMP – in diesem Fall das Neutralino – als Kandidaten für die dunkle Materie bestimmt hat, so erlaubt die *Boltzmann-Gleichung* eine quantitative Aussage über den zeitlichen Verlauf der im Universum vorhandenen Menge bzw. Dichte

<sup>16</sup>Die Verletzung der R-Parität hätte drastische phänomenologische Konsequenzen. Beispielsweise wäre in diesem Fall das Proton instabil.

<sup>17</sup>Da lediglich das Vorzeichen des Higgsino-Massenparameters  $\mu$  frei wählbar ist, nicht aber sein Betrag, spricht man gelegentlich auch von 4,5 freien Parametern.

dieses Teilchens. Wenn wir diese Dichte mit  $n_\chi$  bezeichnen, lautet die Boltzmann-Gleichung (vgl. [4] und [38])

$$\frac{dn_\chi}{dt} = -3Hn_\chi - \langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle [(n_\chi)^2 - (n_\chi^{\text{eq}})^2]. \quad (2.28)$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Dilution aufgrund der Expansion des Universums. Diese ist proportional zur Hubble-Konstante  $H$ . Die übrigen zwei Terme beschreiben die Vernichtung bzw. Erzeugung von Neutralinos. Beide Terme sind proportional zum effektiven, thermisch gemittelten Wirkungsquerschnitt  $\langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle$ . Der effektive Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{eff}}$  berücksichtigt alle Annihilations- und Ko-Annihilationsprozesse, bei denen das Neutralino in Teilchen des Standardmodells übergeht.  $v$  bezeichnet die Relativgeschwindigkeit der Neutralinos. Mit  $n_\chi^{\text{eq}}$  wird die Dichte der Neutralinos im thermischen Gleichgewicht beschrieben. In Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  und der Neutralinomasse  $m_\chi$  gelten die Proportionalitäten (vgl. [4])

$$n_\chi^{\text{eq}} \sim \begin{cases} T^3, & \text{wenn } T \gg m_\chi, \\ \left(\frac{m_\chi T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_\chi}{T}\right), & \text{wenn } T \ll m_\chi. \end{cases} \quad (2.29)$$

Das bedeutet, dass im frühen Universum (bei hohen Temperaturen) in etwa so viele Neutralinos wie Photonen vorhanden waren. Bei niedrigeren Temperaturen ist die Neutralinodichte über einen Boltzmann-Faktor exponentiell unterdrückt. Summa summarum folgt die durch die Boltzmann-Gleichung beschriebene Neutralinodichte  $n_\chi$  dem in Abbildung 2.4 (Quelle: [39]) gezeigten Verlauf.

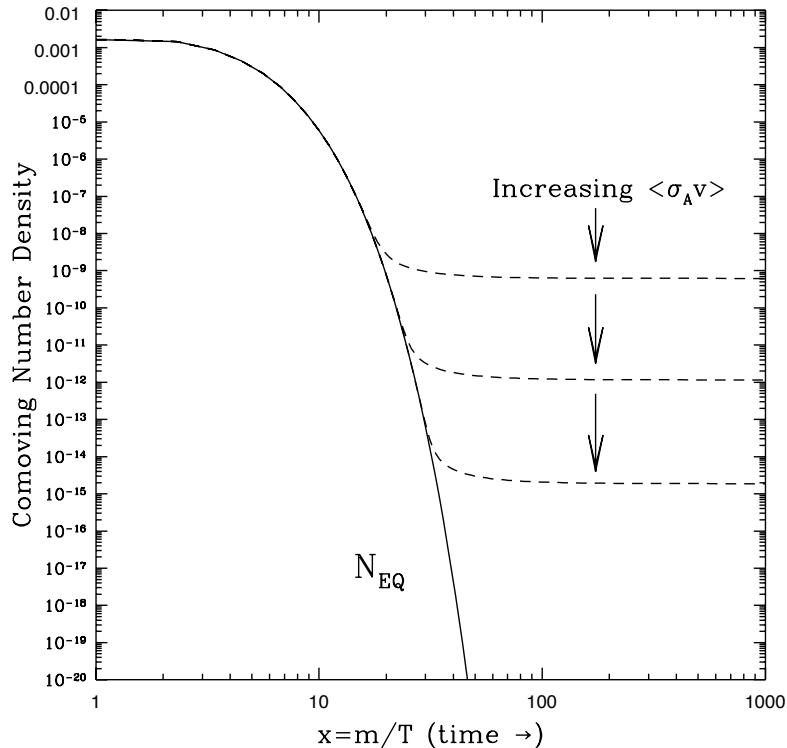


Abbildung 2.4.: Die Reliktdichte der Neutralinos gemäß der Boltzmann-Gleichung

Im frühen Universum, also im Bereich von hohen Temperaturen (kleinen  $x = m/T$ ) ist die Expansion zunächst vernachlässigbar. Aufgrund der hohen thermischen Energie laufen die Annihilationsprozesse in beide Richtungen gleichermaßen ab, d. h. es werden eben so viele Teilchen vernichtet wie erzeugt. Die Neutralinodichte ist konstant.

Im Laufe der Zeit nimmt die Temperatur zusehends ab, sodass die Erzeugung von Neutralinos exponentiell unterdrückt ist. Folglich werden in dieser Phase mehr Neutralinos vernichtet als erzeugt und die Neutralinodichte nimmt stark ab.

In einem statischen Universum würde dieser Prozess nun so lange andauern, bis die Neutralinodichte asymptotisch Null erreicht. Da das Universum jedoch expandiert, kommt es irgendwann zum sogenannten *Ausfrieren der Reliktdichte*. In diesem Punkt übersteigt die Expansionsrate  $3H$  die Vernichtungsrate  $\langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle n_\chi$ . Anschaulich gesprochen entfernen sich die Neutralinos fortan schneller voneinander, als sie sich vernichten können. Dadurch bleibt die Neutralinodichte in einem mitbewegten Volumenelement konstant.

Wann es zum Ausfrieren kommt, hängt vom effektiven Wirkungsquerschnitt ab. Je höher dieser ist, desto später kommt es zum Ausfrieren und desto geringer ist die resultierende Reliktdichte  $\Omega_\chi h^2$ . Die Reliktdichte lässt sich numerisch<sup>18</sup> bestimmen und anschließend mit dem experimentell bestimmten Wert (vgl. (2.4)) vergleichen. Es gilt

$$\Omega_\chi h^2 = \frac{n_\chi m_\chi}{\rho_c} \sim \frac{1}{\langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle}. \quad (2.30)$$

Die Boltzmann-Gleichung nimmt somit eine Schlüsselfunktion ein und verbindet die Physik des ganz Großen, die Kosmologie, mit der Physik des ganz Kleinen, der Elementarteilchenphysik. Zusätzlich ermöglicht sie die experimentelle Überprüfung theoretischer Vorhersagen. Dabei lassen sich drei Fälle unterscheiden.

1.  $\Omega_\chi h^2 < \Omega_{\text{DM}} h^2$

Die Menge der Neutralinos reicht nicht aus, um die dunkle Materie gänzlich auszumachen. Dieser Fall erlaubt streng genommen keine Falsifikation der zugrundeliegenden Theorie (in diesem Fall des MSSM), sondern höchstens eine Defavorisierung. Schließlich ist es möglich, dass die dunkle Materie nicht nur aus einer Komponente aufgebaut ist.

2.  $\Omega_\chi h^2 = \Omega_{\text{DM}} h^2$

Dies ist der Idealfall, in welchem die Theorie einen mit dem Experiment verträglichen und vollständigen Erklärungsansatz zur dunklen Materie liefert.

3.  $\Omega_\chi h^2 > \Omega_{\text{DM}} h^2$

Die postulierte Reliktdichte der Neutralinos übersteigt die experimentell gefundene Menge an dunkler Materie. In diesem Fall widerspricht die Theorie dem Experiment direkt, sodass eine Falsifikation möglich ist<sup>19</sup>.

---

<sup>18</sup>Die Boltzmann-Gleichung kann nicht analytisch gelöst werden.

<sup>19</sup>Diese Formulierung trifft nicht zu, wenn man einen zusätzlichen Grund angibt, warum der Überschuss an Neutralinos nicht die Effekte verursacht, die einem Überschuss an dunkler Materie entsprechen.

# 3. Annihilation dunkler Materie im Higgs-Funnel

## 3.1. Eigenschaften des Higgs-Funnels

Als *Higgs-Funnel* bezeichnet man im cMSSM den Bereich des Parameterraumes mit moderaten bis großen Werten von  $m_0$  und  $m_{1/2}$  sowie großem  $\tan\beta$ . In diesem Abschnitt sollen die Eigenschaften des Higgs-Funnels herausgearbeitet werden, wobei auf den Implikationen für dunkle Materie besonderes Augenmerk liegt. Es sei explizit darauf hingewiesen, dass im Folgenden z. T. auf Ergebnisse vorgegriffen wird, die an späterer Stelle noch ausführlicher erläutert werden.

In Abbildung 3.1 ist die Reliktdichte  $\Omega h^2$  durch einen farbigen Konturplot in Abhängigkeit von  $m_0$  und  $m_{1/2}$  zu sehen. Als weitere Eingangsparameter wurden  $A_0 = 0$ ,  $\tan\beta = 53$  sowie  $\text{sgn } \mu = +1$  verwendet. Der Plot bzw. die dafür nötigen Rechnungen wurden mit DM@NLO (vgl. Abschnitt 4) auf Baumniveau (vgl. Abschnitt 3.2) durchgeführt.

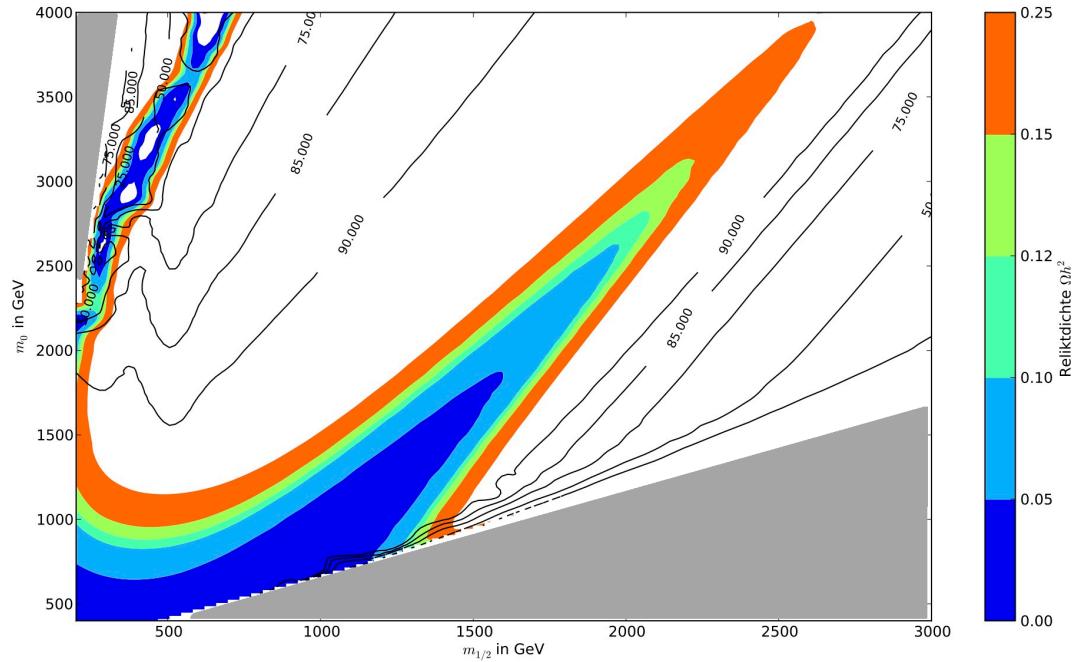


Abbildung 3.1.: Reliktdichte und relative Anteile des Endzustands  $b\bar{b}$  im Higgs-Funnel

Die grau markierten Bereiche sind phänomenologisch irrelevant bzw. unphysikalisch. Der graue Bereich unten rechts führt zu einem elektrisch geladenen LSP, welches nicht als Kandidat für die dunkle Materie in Betracht kommt. Im grauen Bereich oben links kann

keine elektroschwache Symmetriebrechung stattfinden<sup>20</sup>.

Es lässt sich erkennen, dass sich ein schmales grünes Band durch den Parameterraum schlängelt. Innerhalb dieses Gebiets annihielten die Neutralinos gerade in dem Maße, dass sich mithilfe der Boltzmann-Gleichung eine Reliktdichte ergibt, die dem experimentell bestimmten Wert entspricht. Das bedeutet, dass das MSSM in diesem ausgezeichneten Parameterbereich einen konsistenten und mit den experimentellen Befunden zur Reliktdichte verträglichen Erklärungsansatz für die dunkle Materie liefert.

Diese Tatsache trifft in dieser Form auch auf einige weitere Szenarien zu. Der Higgs-Funnel zeichnet sich jedoch noch durch eine weitere Eigenschaft aus. Dazu betrachten wir die schwarzen Höhenlinien in Abbildung 3.1. Diese entsprechen dem prozentualen Anteil des Endzustands  $b\bar{b}$  an allen Endzuständen im Higgs-Funnel. Wir erinnern uns daran, dass zur Lösung der Boltzmann-Gleichung alle möglichen Annihilationsprozesse und Endzustände betrachtet werden müssen (vgl. Abschnitt 2.4). Im vorliegenden Fall ist es jedoch in großen Teilen des Parameterraums so, dass die Annihilation der Neutralinos in über 90 % der Fälle auf den Endzustand  $b\bar{b}$  führt. Hierin eingeschlossen ist insbesondere der phänomenologisch interessante grüne Bereich.

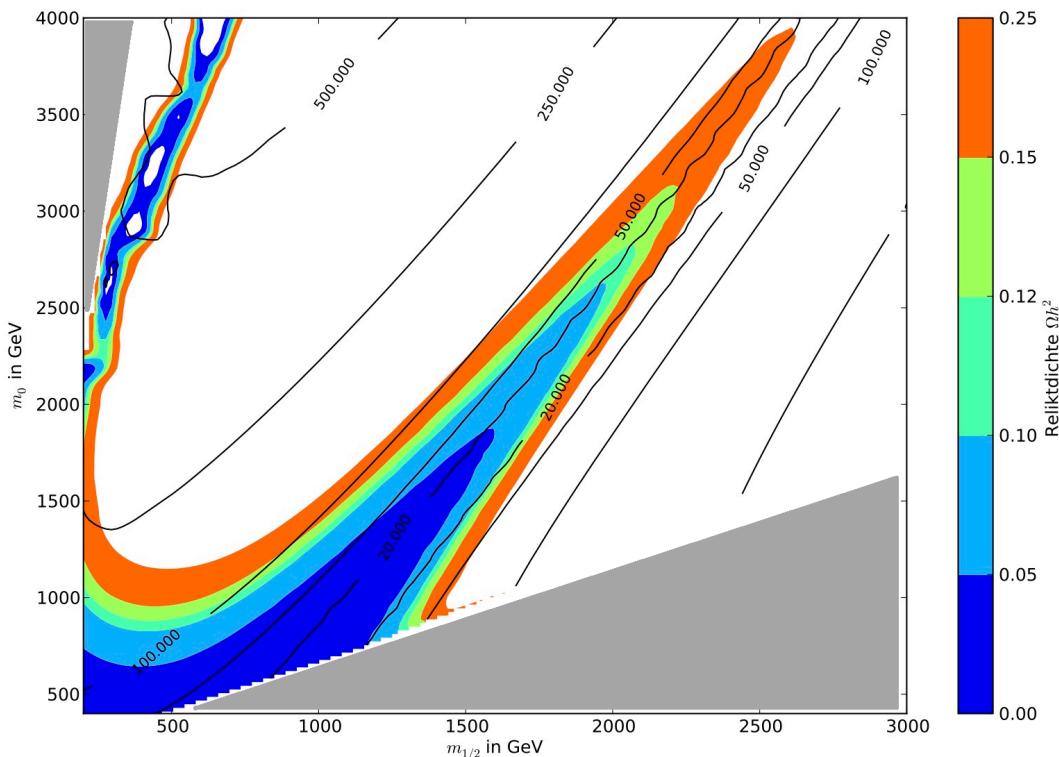


Abbildung 3.2.: Reliktdichte und Massendifferenz  $2m_\chi - m_A$  im Higgs-Funnel

Diese Dominanz lässt sich auf einen einzelnen Prozess zurückführen, nämlich den Prozess  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  (vgl. Abbildung 3.3). Durch die direkte Proportionalität der  $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung zu  $\tan\beta$  (vgl. (3.9)) dominiert dieser Prozess im betrachteten Parameterraum

<sup>20</sup>Der Name *Funnel* („Trichter“) bezieht sich auf das typische Aussehen derartiger Graphen. Die unphysikalischen Bereiche verjüngen den Parameterbereich zum Koordinatenursprung hin, was man mit dem Effekt eines Trichters vergleichen kann.

gegenüber allen anderen möglichen Annihilationsprozessen<sup>21</sup>.

Neben der angesprochenen Kopplung ist noch eine weitere Begebenheit für die Dominanz dieses Prozesses verantwortlich. Dazu betrachten wir Abbildung 3.2. Diese zeigt dasselbe Szenario, die schwarzen Höhenlinien entsprechen jetzt jedoch der Differenz  $2m_\chi - m_A$  in GeV. Dabei bezeichnet  $m_\chi$  die Neutralinomasse und  $m_A$  die Masse des pseudoskalaren Higgs-Bosons  $A^0$ . Es lässt sich erkennen, dass diese Differenz im Bereich des Peaks sehr gering (weniger als 20 GeV) wird. Da es sich bei den Neutralinos um nicht-relativistische Teilchen handelt, d. h. um Teilchen mit vergleichsweise geringer kinetischer Energie, führt dieser Umstand zu einer *Resonanz*. Der Wirkungsquerschnitt des Prozesses wird erhöht, da die Annihilation von zwei Neutralinos in ein  $A^0$  kinematisch begünstigt ist. Technisch spiegelt sich dies im zugehörigen Propagator wider (vgl. (3.12)). Dieser Effekt verstärkt die Dominanz des Prozesses und bestimmt den Verlauf des Konturplots in den Abbildungen 3.1 und 3.2.

Aus dem Vorangegangenen folgt, dass die theoretische Vorhersage der Reliktdichte im Parameterbereich des Higgs-Funnels sensitiv vom Wirkungsquerschnitt des Prozesses  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  abhängt. Dieses Faktum bildet die Motivation der vorliegenden Masterarbeit. Das Ziel ist es, den Wirkungsquerschnitt dieses phänomenologisch wichtigen Prozesses genauer, d. h. unter Berücksichtigung von Einschleifenkorrekturen und Resummationseffekten zu bestimmen, um die theoretische Vorhersage der Reliktdichte im Higgs-Funnel zu präzisieren.

## 3.2. Bornscher Wirkungsquerschnitt

In diesem Abschnitt soll der Wirkungsquerschnitt des Prozesses  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  in führender Ordnung berechnet werden. Man spricht auch vom *Wirkungsquerschnitt auf Born- oder Baumniveau*. Das zugehörige Feynman-Diagramm ist in Abbildung 3.3 zu sehen.

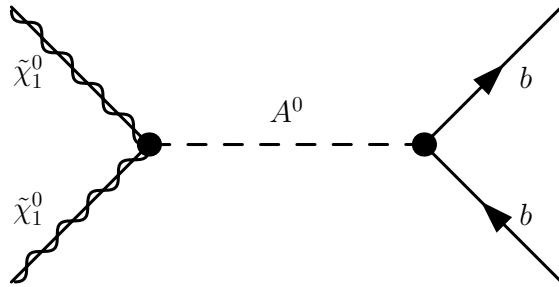


Abbildung 3.3.: Der Prozess  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  in führender Ordnung

Die kinematischen Variablen des Prozesses werden wie in Abschnitt A.3 beschrieben benannt. Demnach lauten die Spinoren des Anfangszustands

$$u(p_a) \quad \text{und} \quad \bar{v}(p_b). \quad (3.1)$$

<sup>21</sup>Zusätzlich zur aufgeföhrten qualitativen Erklärung wurde die Dominanz dieses Prozesses auch numerisch bestätigt. Im in diesem Abschnitt untersuchten Szenario ( $\tan \beta > 50$ ) beträgt der Anteil des Prozesses  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  am gesamten Wirkungsquerschnitt  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow b\bar{b}$  mehr als 80 %.

An dieser Stelle tritt allerdings eine Besonderheit auf. Neutralinos sind *Majorana-Fermionen*, d. h. ihre eigenen Antiteilchen. Dadurch existiert keine ausgezeichnete Fermionflussrichtung wie beispielsweise im Endzustand  $b\bar{b}$ . Der Anfangszustand aus (3.1) ist gegenüber

$$u(p_b) \quad \text{und} \quad \bar{v}(p_a) \quad (3.2)$$

gleichberechtigt. Um diesem Umstand gerecht zu werden, wird der Anfangszustand via

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (u(p_a)\bar{v}(p_b) - u(p_b)\bar{v}(p_a)) \quad (3.3)$$

antisymmetrisiert (vgl. [40]). Da beide Terme exakt denselben Beitrag zur Amplitude liefern, reicht es aus, (3.1) zu verwenden und die Amplitude mit einem zusätzlichen Faktor  $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$  zu multiplizieren. Das Amplitudenquadrat und der Wirkungsquerschnitt erhalten somit einen zusätzlichen Faktor zwei. Die Spinoren der Quarks im Endzustand sind wie üblich

$$\bar{u}(p_1) \quad \text{und} \quad v(p_2). \quad (3.4)$$

Die Kopplung der Neutralinos  $\tilde{\chi}_i^0$  und  $\tilde{\chi}_j^0$  an das pseudoskalare Higgs-Boson  $A^0$  lautet

$$-\frac{g_W}{2} T_{Aij} \gamma_5. \quad (3.5)$$

Dabei ist  $T_{Aij}$  über

$$T_{Aij} = -\sin \beta Q_{ij} + \cos \beta S_{ij} \quad (3.6)$$

mit

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} N_{3i} (N_{2j} - \tan \theta_W N_{1j}) + \frac{1}{2} N_{3j} (N_{2i} - \tan \theta_W N_{1i}) \quad (3.7)$$

und

$$S_{ij} = \frac{1}{2} N_{4i} (N_{2j} - \tan \theta_W N_{1j}) + \frac{1}{2} N_{4j} (N_{2i} - \tan \theta_W N_{1i}) \quad (3.8)$$

definiert. In den obigen Ausdrücken wird bereits ausgenutzt, dass die Neutralino-Mischungsmatrizen  $N_{ij}$  o. B. d. A. reell gewählt werden können (vgl. [4] und [36]).  $\theta_W$  steht für den elektroschwachen Mischungswinkel. Konkret interessieren wir uns für die Kopplung der leichten Neutralinos an das  $A^0$ , d. h. die Kopplung  $T_{A11}$ .

Von entscheidender Bedeutung ist die Kopplung der Quarks im Endzustand an das  $A^0$ . Diese lautet für Down-Quarks (also  $d$ ,  $s$  und  $b$ )

$$-\frac{g_W m_q \tan \beta}{2m_W} \gamma_5. \quad (3.9)$$

Hierin bezeichnet  $m_q$  die Masse des jeweiligen Quarks. Durch die direkte Massenabhängigkeit<sup>22</sup> ist die Kopplung an  $b$ -Quarks deutlich stärker als an  $d$ - und  $s$ -Quarks. Zusätzlich besteht eine direkte Proportionalität zu  $\tan \beta$ , wodurch die Kopplung im Higgs-Funnel dominant wird. Demgegenüber ist die entsprechende Kopplung für Up-Quarks (also  $u$ ,  $c$  und  $t$ )

$$-\frac{g_W m_q \cot \beta}{2m_W} \gamma_5 \quad (3.10)$$

aufgrund der Antiproportionalität zu  $\tan \beta$  im Higgs-Funnel stark unterdrückt.

---

<sup>22</sup>Diese Abhängigkeit besteht, da es sich um eine Yukawa-Kopplung handelt.

Wenn wir nun

$$h_{Abb} = -\frac{g_W m_b \tan \beta}{2m_W} \quad (3.11)$$

definieren und den skalaren Propagator

$$\frac{i}{s - m_A^2} \quad (3.12)$$

für das  $A^0$  verwenden, lässt sich die invariante Amplitude in führender Ordnung („Leading Order“) mithilfe der Feynman-Regeln als

$$i\mathcal{M}_{\text{LO}} = \sqrt{2} \left[ \bar{v}(p_b) \left( -\frac{g_W}{2} T_{A11} \gamma_5 \right) u(p_a) \right] \frac{i}{s - m_A^2} [\bar{u}(p_1) (h_{Abb} \gamma_5) v(p_2)] \quad (3.13)$$

schreiben. Bei der Berechnung des Amplitudenquadrates wird über initiale Spinzustände gemittelt und über finale Spinzustände summiert, wobei die Vollständigkeitsrelationen

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m \quad \text{und} \quad \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m \quad (3.14)$$

benötigt werden (vgl. [24]). Unter Berücksichtigung des Farbfaktors  $N_C = 3$  erhalten wir letztlich

$$|\mathcal{M}_{\text{LO}}|^2 = \frac{N_C}{2} g_W^2 h_{Abb}^2 T_{A11}^2 \frac{s^2}{(s - m_A^2)^2}. \quad (3.15)$$

Im vorliegenden Falle eines  $2 \rightarrow 2$  Prozesses lässt sich der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  im Schwerpunktsystem mittels

$$\frac{d\sigma_{\text{LO}}}{d\Omega} = \frac{1}{2sv} |\mathcal{M}_{\text{LO}}|^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m_b^2}{s}} \quad (3.16)$$

berechnen (vgl. Abschnitt B.3). Hierin bezeichnet  $v$  die Relativgeschwindigkeit der Neutralinos. Da das Amplitudenquadrat aus (3.15) winkelunabhängig<sup>23</sup> ist, ist die Integration über das Raumwinkelement  $d\Omega$  trivial. Mithilfe der Definition

$$\beta_b = \sqrt{1 - \frac{4m_b^2}{s}} \quad (3.17)$$

gelangen wir zu

$$\sigma_{\text{LO}} = \frac{N_C \beta_b}{16\pi v} g_W^2 h_{Abb}^2 T_{A11}^2 \frac{s}{(s - m_A^2)^2}, \quad (3.18)$$

was sich in Übereinstimmung mit [10] zu

$$\sigma_{\text{LO}} v = \frac{N_C \beta_b}{16\pi} g_W^2 h_{Abb}^2 T_{A11}^2 \frac{s}{(s - m_A^2)^2} \quad (3.19)$$

umformen lässt.

---

<sup>23</sup>Der Prozess ist winkelunabhängig, da ein skalares Teilchen ausgetauscht wird.

### 3.3. QCD Korrekturen erster Ordnung

Der Prozess  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  muss nicht zwangsläufig über die in Abbildung 3.3 dargestellte Variante auf Baumniveau ablaufen. Lässt man weitere Wechselwirkungen zu, d. h. berücksichtigt man die nächsthöheren Terme der Störungsrechnung, so werden immer mehr Prozesse möglich. In diesem und dem folgenden Abschnitt werden die *Strahlungskorrekturen der starken Wechselwirkung in erster Ordnung* berechnet. Darunter versteht man alle Korrekturen, die gegenüber dem Wirkungsquerschnitt aus (3.18) einen zusätzlichen Faktor

$$\alpha_S = \frac{g_S^2}{4\pi} \quad (3.20)$$

aufweisen. Dabei ist  $g_S$  die starke Kopplungskonstante. Derartige Berechnungen werden auch als NLO Korrekturen („Next-to-Leading Order“) bezeichnet.

Die in diesem Abschnitt durchgeführte NLO QCD Rechnung gliedert sich wie folgt. In einem ersten Schritt werden die *Selbstenergien* berechnet. Diese Resultate werden für die Renormierung der Massen und Wellenfunktionen benötigt. Anschließend werden die *Vertexkorrekturen* ermittelt. Zusammen mit den Selbstenergien bilden diese die *virtuellen Korrekturen*. Danach erfolgt die Berechnung der *reellen Korrekturen*, d. h. von Prozessen, bei denen es zur Emission eines zusätzlichen Teilchens kommt. In Abschnitt 3.4 werden analog die entsprechenden SUSY QCD Beiträge erster Ordnung ermittelt. Zuletzt wird in Kapitel 3.5 der Wirkungsquerschnitt inklusive aller NLO Korrekturen angegeben.

#### 3.3.1. Selbstenergien

Die einfachste NLO QCD Korrektur wird durch die Quark-Selbstenergie induziert. Der Prozess läuft dabei genau wie auf Baumniveau ab, es bildet sich lediglich eine zusätzliche Quark-Gluon-Schleife beim auslaufenden  $b$ - oder  $\bar{b}$ -Quark. Der entsprechende Teil des Diagramms ist in Abbildung 3.4 zu sehen.

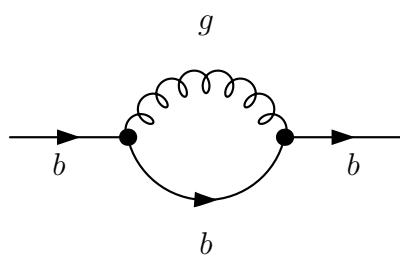


Abbildung 3.4.: Quark-Selbstenergie in der QCD

Die Impulse der ein- und auslaufenden Quarks sollen mit  $p$  bezeichnet werden. Das Quark innerhalb der Schleife besitzt den Impuls  $q$  und das Gluon folglich den Impuls  $q - p$ . Der Schleifenimpuls  $q$  ist völlig unbeschränkt, weshalb über alle möglichen Impulse integriert werden muss. Die auftretenden Schleifenintegrale besitzen ultraviolette Divergenzen, die im Folgenden mithilfe der *dimensionalen Regularisierung* behandelt werden sollen. Dabei werden die Impulse und die zugehörige Integration über  $q$   $D$ -dimensional.

Unter Berücksichtigung einer Referenzmasse  $\mu$  und eines Faktors  $(2\pi)^{-D}$  liefert das Verfahren die Integrationsvorschrift

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D}. \quad (3.21)$$

Die Quark-Gluon-Kopplung ist durch

$$-ig_S \gamma^\mu \lambda_{ij}^a \quad (3.22)$$

gegeben, wobei  $\gamma^\mu$  eine Dirac-Matrix (vgl. Abschnitt B.1.1) und  $\lambda_{ij}^a$  den Generator der  $SU(3)$ -Farbalgebra beschreibt. Diese Generatoren können durch

$$\lambda_{ij}^a = \frac{t_{ij}^a}{2} \quad (3.23)$$

mit den *Gell-Mann-Matrizen*  $t_{ij}^a$  verknüpft werden. Die Auswertung der Farbalgebra ist in der Regel unabhängig von der übrigen Rechnung. Zugunsten der Übersichtlichkeit werden die Farbindices im Folgenden daher nicht mitgeführt und die Resultate der Farbalgebra separat angegeben.

Es verbleibt die Einführung der Propagatoren des Quarks und des Gluons in der Schleife. Diese lauten in der Feynman-Eichung

$$i \frac{\not{q} + m_b}{q^2 - m_b^2} \quad \text{sowie} \quad -i \frac{g_{\mu\nu}}{(q-p)^2}. \quad (3.24)$$

Dabei bezeichnet  $g_{\mu\nu}$  den metrischen Tensor in  $D$  Dimensionen. Das *Kronecker-Delta*  $\delta_{ab}$  für die Farbindices im Gluon-Propagator wird konsequenterweise ebenfalls nicht mitgeführt. Durch die Anwendung der Feynman-Regeln erhalten wir somit

$$i\mathcal{M}_S = \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{u}(p) (-ig_S \gamma^\nu \lambda) \left( i \frac{\not{q} + m_b}{q^2 - m_b^2} \right) (-ig_S \gamma^\mu \lambda) \left( -i \frac{g_{\mu\nu}}{(q-p)^2} \right) u(p). \quad (3.25)$$

Für das weitere Vorgehen ist lediglich die *gestutzte Amplitude*  $\mathcal{T}_S$  von Bedeutung, die durch das Entfernen der äußeren Spinoren definiert ist.

$$\mathcal{M}_S = \bar{u}(p) \mathcal{T}_S u(p). \quad (3.26)$$

Die Farbalgebra liefert in diesem Fall den Faktor  $C_F = 4/3$ , womit sich  $\mathcal{T}_S$  letztlich als

$$\mathcal{T}_S = -\frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \left( Dm_b B_0(p^2, m_b, 0) + (D-2)\not{p} B_1(p^2, m_b, 0) \right) \quad (3.27)$$

schreiben lässt. Dabei werden die Schleifenintegrale auf *Passarino-Veltman-Integrale* zurückgeführt (vgl. Abschnitt B.2). Das oben angegebene Ergebnis entspricht dem in [26] angegebenen<sup>24</sup>.

Die Selbstenergie wird nun in skalare, pseudoskalare, vektorielle und axiale Komponenten zerlegt.

$$\mathcal{T}_S = m_b \mathcal{T}_S^{(s)} + m_b \gamma_5 \mathcal{T}_S^{(p)} + \not{p} \mathcal{T}_S^{(v)} + \not{p} \gamma_5 \mathcal{T}_S^{(a)}. \quad (3.28)$$

---

<sup>24</sup>In diesem Lehrbuch wird die Selbstenergie des Elektrons in der Quantenelektrodynamik berechnet. Der einzige Unterschied zur Selbstenergie eines Quarks in der QCD ist der Faktor  $C_F$ .

Zur Bestimmung der *Counterterme* werden lediglich  $\mathcal{T}_S^{(s)}$  und  $\mathcal{T}_S^{(v)}$  benötigt. Im *on-shell* Renormierungsschema gilt (vgl. [26])

$$\delta Z_{m_b} = \frac{\delta m_b}{m_b} = \mathcal{T}_S^{(s)} + \mathcal{T}_S^{(v)} \quad \text{und} \quad (3.29)$$

$$\delta Z_\psi = -\mathcal{T}_S^{(v)} - 2m_b^2 \left( \frac{\partial \mathcal{T}_S^{(s)}}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_b^2} + \frac{\partial \mathcal{T}_S^{(v)}}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_b^2} \right). \quad (3.30)$$

Hiermit ermitteln wir den Massen-Counterterm  $\delta Z_{m_b}$  und den Counterterm der Wellenfunktion  $\delta Z_\psi$  zu

$$\delta Z_{m_b} = \frac{\alpha_S C_F}{4\pi m_b^2} \left( \frac{2-D}{2} A_0(m_b) - 2m_b^2 B_0(m_b^2, m_b, 0) \right). \quad (3.31)$$

$$\delta Z_\psi = \frac{\alpha_S C_F}{4\pi m_b^2} \left( \frac{2-D}{2} A_0(m_b) + 4m_b^4 \dot{B}_0(m_b^2, m_b, 0) \right). \quad (3.32)$$

Dabei wird die abkürzende Schreibweise

$$\dot{B}_i = \frac{\partial B_i}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_b^2} \quad \text{mit} \quad i = 0, 1 \quad (3.33)$$

verwendet.

### 3.3.2. Vertexkorrektur

Wir widmen uns nun der QCD Vertexkorrektur. Hierbei kommt es gegenüber dem Prozess auf Baumniveau zu einem Gluonaustausch zwischen den beiden Quarks im Endzustand. Der entsprechende Teil des Feynman-Diagramms ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

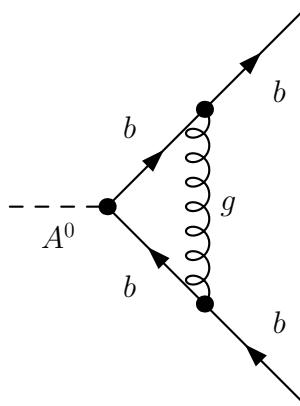


Abbildung 3.5.: Vertexkorrektur zur  $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung in der QCD

Dem oberen Quark in der Schleife wird der Impuls  $q$  zugeordnet. Alle anderen Impulse sind durch die Impulserhaltung an jedem Vertex und die äußereren Impulse fixiert. Die

invariante Amplitude des gesamten Prozesses lautet somit (vgl. Abschnitt 3.2)

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_V &= \sqrt{2} \left[ \bar{v}(p_b) \left( -\frac{g_W}{2} T_{A11} \gamma_5 \right) u(p_a) \right] \frac{i}{s - m_A^2} \\ &\times \left[ \bar{u}(p_1) \left( \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (-ig_S \gamma^\nu \lambda) \left( i \frac{\not{q} + m_b}{q^2 - m_b^2} \right) (h_{Abb} \gamma_5) \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left( i \frac{\not{q} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_b}{(q - p_1 - p_2)^2 - m_b^2} \right) (-ig_S \gamma^\mu \lambda) \left( -i \frac{g_{\mu\nu}}{(q - p_1)^2} \right) \right) v(p_2) \right] \quad (3.34) \end{aligned}$$

$$:= \sqrt{2} \left[ \bar{v}(p_b) \left( -\frac{g_W}{2} T_{A11} \gamma_5 \right) u(p_a) \right] \frac{i}{s - m_A^2} [\bar{u}(p_1) \mathcal{T}_V v(p_2)]. \quad (3.35)$$

Wir werten nun die oben eingeführte gestutzte Amplitude der Vertexkorrektur  $\mathcal{T}_V$  aus und erhalten nach etwas längerer Rechnung

$$\mathcal{T}_V = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \left( DB_0(m_b^2, m_b, m_b) - 2sC_0 + (C_1 + C_2)(2Dm_b^2 - 2s) \right) (h_{Abb} \gamma_5), \quad (3.36)$$

wobei für die Argumente der Dreipunktfunktionen

$$C_i = C_i(m_b^2, m_b^2, s, m_b, 0, m_b) \quad \text{mit} \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.37)$$

gilt.

Die entscheidende Beobachtung ist nun, dass wir die gestutzte Amplitude  $\mathcal{T}_V$  als

$$\mathcal{T}_V = \mathcal{A}_V (h_{Abb} \gamma_5) \quad (3.38)$$

schreiben können. In dieser Schreibweise faktorisiert die Amplitude  $\mathcal{M}_V$  zu

$$i\mathcal{M}_V = i\mathcal{M}_{\text{LO}} \mathcal{A}_V. \quad (3.39)$$

Diese Faktorisierung überträgt sich direkt auf den Wirkungsquerschnitt, was wir an späterer Stelle ausnutzen werden.

### 3.3.3. Addition der virtuellen Korrekturen

Wir verrechnen nun die virtuellen Korrekturen der vorangegangenen beiden Abschnitte. Dabei wird ähnlich wie in [41] vorgegangen. Wir schreiben die invariante Amplitude inklusive virtueller Korrekturen erster Ordnung als

$$i\mathcal{M}_{\text{virt}} = i\mathcal{M}_{\text{LO}}^{\text{ren}} + i\mathcal{M}_V. \quad (3.40)$$

Die Vertexkorrektur wird unverändert übernommen. Die renormierte Amplitude auf Baumniveau  $\mathcal{M}_{\text{LO}}^{\text{ren}}$  erhält man durch die Ersetzungen

$$m_b \rightarrow m_b + \delta Z_{m_b} \quad \text{sowie} \quad \psi \rightarrow \psi + \frac{1}{2} \delta Z_\psi \psi \quad (3.41)$$

in der bornschen Amplitude  $\mathcal{M}_{\text{LO}}$  aus (3.13):

$$i\mathcal{M}_{\text{LO}} = \sqrt{2} \left[ \bar{v}(p_b) \left( -\frac{g_W}{2} T_{A11} \gamma_5 \right) u(p_a) \right] \frac{i}{s - m_A^2} [\bar{u}(p_1) (h_{Abb} \gamma_5) v(p_2)]. \quad (3.42)$$

Dieser Ausdruck enthält einmal die Masse  $m_b$  (in  $h_{Abb}$ ) und zwei Quark-Wellenfunktionen. Wenn wir nur Terme bis zur ersten Ordnung in  $\delta$  mitnehmen, erhalten wir

$$i\mathcal{M}_{\text{LO}}^{\text{ren}} = i\mathcal{M}_{\text{LO}}(1 + 2\frac{1}{2}\delta Z_\psi + \delta Z_{m_b}). \quad (3.43)$$

Das Amplitudenquadrat lässt sich somit als

$$|\mathcal{M}_{\text{virt}}|^2 = (1 + 2\delta Z_{m_b} + 2\delta Z_\psi + 2\mathcal{A}_V)|\mathcal{M}_{\text{LO}}|^2 + \mathcal{O}(\alpha_S^2) \quad (3.44)$$

$$:= (1 + \frac{\alpha_S C_F}{2\pi} \Delta_{\text{QCD}})|\mathcal{M}_{\text{LO}}|^2 + \mathcal{O}(\alpha_S^2) \quad (3.45)$$

schreiben<sup>25</sup>. Nach Einsetzen aller bisherigen Ergebnisse erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{QCD}} &= D \left( B_0(m_b^2, m_b, m_b) - \frac{A_0(m_b)}{m_b^2} \right) - 2 \\ &+ 4m_b^2 \dot{B}_0(m_b^2, m_b, 0) - 2sC_0 + (C_1 + C_2)(2Dm_b^2 - 2s). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die Argumente der Dreipunktfunktionen entsprechen dabei denen aus (3.37). Dieses Ergebnis ist UV-konvergent (vgl. Kapitel B.2.4). Es enthält jedoch noch infrarote Divergenzen, die erst nach der Verrechnung mit den reellen Korrekturen verschwinden<sup>26</sup>.

### 3.3.4. Reelle Korrekturen

In diesem Abschnitt soll es um die Berechnung der reellen Korrekturen gehen. Im vorliegenden Fall versteht man hierunter die Emission eines Gluons im Endzustand  $b\bar{b}$ . Die zugehörigen Ausschnitte der Feynman-Diagramme sind in Abbildung 3.6 zu sehen. Der Anfangszustand  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0$  ist gegenüber der Berechnung auf Baumniveau unverändert.

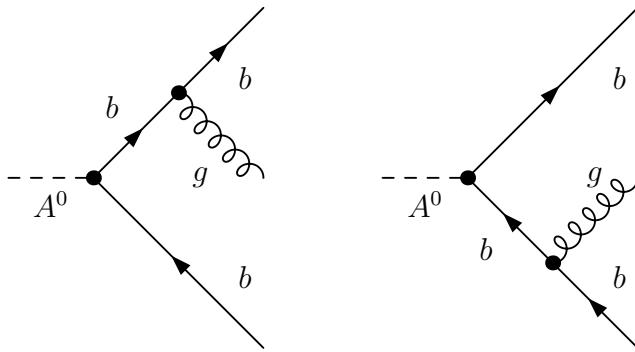


Abbildung 3.6.: Reelle NLO Korrekturen zum Prozess  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$

<sup>25</sup>Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Counterterme  $\delta Z_{m_b}$  und  $\delta Z_\psi$  sowie der Vertexkorrekturfaktor  $\mathcal{A}_V$  rein reell sind.

<sup>26</sup>Die Tatsache, dass die infraroten Divergenzen nach Addition von reellen und virtuellen Korrekturen im Standardmodell in jeder Ordnung der Störungstheorie verschwinden, ist als *Kinoshita-Lee-Nauenberg Theorem* bekannt (vgl. [42] und [43]).

Wenn wir dem Gluon den Impuls  $p_3$  zuordnen, erhalten wir durch Anwenden der Feynman-Regeln folgende Amplituden:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_R^{(1)} &= \left[ \sqrt{2}\bar{v}(p_b) \left( -\frac{g_W}{2} T_{A11} \gamma_5 \right) u(p_a) \right] \frac{i}{s - m_A^2} \\ &\times \left[ \bar{u}(p_1) (-ig_S \gamma_\mu \lambda) \frac{i(\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_b)}{(p_1 + p_3)^2 - m_b^2} (h_{Abb} \gamma_5) v(p_2) \epsilon^{\mu*}(p_3, \sigma) \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_R^{(2)} &= \left[ \sqrt{2}\bar{v}(p_b) \left( -\frac{g_W}{2} T_{A11} \gamma_5 \right) u(p_a) \right] \frac{i}{s - m_A^2} \\ &\times \left[ \bar{u}(p_1) (h_{Abb} \gamma_5) \frac{i(-\not{p}_2 - \not{p}_3 + m_b)}{(p_2 + p_3)^2 - m_b^2} (-ig_S \gamma_\mu \lambda) v(p_2) \epsilon^{\mu*}(p_3, \sigma) \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die Farbindices werden wie zuvor nicht mitgeführt. Der Faktor  $\sqrt{2}$  stammt von der Antisymmetrisierung des Anfangszustandes (vgl. Abschnitt 3.2).  $\epsilon^{\mu*}(p_3, \sigma)$  bezeichnet den Polarisationsvektor des auslaufenden Gluons mit der Polarisierung  $\sigma$ . In der Lorenzezeichnung<sup>27</sup> gilt für die Polarisationsvektoren (vgl. [24])

$$\sum_{\sigma} \epsilon^{\mu}(p_3, \sigma) \epsilon^{\nu*}(p_3, \sigma) = -g^{\mu\nu}. \quad (3.49)$$

Das Amplitudenquadrat ergibt sich mittels

$$|\mathcal{M}_R|^2 = \underbrace{|\mathcal{M}_R^{(1)}|^2}_{:=A} + \underbrace{|\mathcal{M}_R^{(2)}|^2}_{:=B} + \underbrace{\mathcal{M}_R^{(1)*} \mathcal{M}_R^{(2)*}}_{:=C} + \underbrace{\mathcal{M}_R^{(1)*} \mathcal{M}_R^{(2)}}_{:=D}. \quad (3.50)$$

An dieser Stelle wird wie bei der Berechnung auf Baumniveau über die Spinzustände des Anfangszustands gemittelt und über finale Spinzustände summiert. Die Auswertung der  $SU(3)$ -Farbalgebra liefert den Faktor (vgl. [25])

$$\frac{N_C^2 - 1}{2} = N_C C_F = 4. \quad (3.51)$$

Wenn wir abkürzend

$$X = -\frac{N_C^2 - 1}{2} \frac{g_W^2 g_S^2}{2} \frac{T_{A11}^2 h_{Abb}^2}{(s - m_A^2)^2} \quad (3.52)$$

definieren, können wir folgende Zwischenergebnisse angeben:

$$\begin{aligned} A &= \frac{X}{4} \frac{1}{((p_1 + p_3)^2 - m_b^2)^2} \text{Spur} \left( (\not{p}_b - m_\chi)(-\not{p}_a + m_\chi) \right) \\ &\times \text{Spur} \left( (\not{p}_1 + m_b) \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_b) (-\not{p}_2 - m_b) (\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_b) \gamma^\mu \right). \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{X}{4} \frac{1}{((p_2 + p_3)^2 - m_b^2)^2} \text{Spur} \left( (\not{p}_b - m_\chi)(-\not{p}_a + m_\chi) \right) \\ &\times \text{Spur} \left( (\not{p}_1 + m_b) (\not{p}_2 + \not{p}_3 + m_b) \gamma_\mu (-\not{p}_2 - m_b) \gamma^\mu (\not{p}_2 + \not{p}_3 + m_b) \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{X}{4} \frac{1}{((p_1 + p_3)^2 - m_b^2)((p_2 + p_3)^2 - m_b^2)} \text{Spur} \left( (\not{p}_b - m_\chi)(-\not{p}_a + m_\chi) \right) \\ &\times \text{Spur} \left( (\not{p}_1 + m_b) \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_b) (\not{p}_2 + m_b) \gamma^\mu (\not{p}_2 + \not{p}_3 + m_b) \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

<sup>27</sup>Die Lorenzezeichnung ist nach Ludvig Lorenz und nicht nach Hendrik Antoon Lorentz benannt, wie oft fälschlicherweise angenommen (vgl. [44]). Sie ist durch  $\partial_\mu A^\mu = 0$  definiert, wobei  $A^\mu$  das elektromagnetische Viererpotential ist.

Da sich  $C$  gemäß (3.55) durch reelle Vorfaktoren und Spuren über Dirac-Matrizen ausdrücken lässt und derartige Spuren stets reell sind, ist folglich auch  $C$  reell, weshalb wir  $C = D$  folgern können. In der Schreibweise der reduzierten Koordinaten (vgl. Abschnitt B.3.2)

$$x_i = \frac{2E_i}{\sqrt{s}} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.56)$$

erhalten wir als Gesamtergebnis

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_R|^2 &= \frac{2X}{(1-x_1)^2(1-x_2)^2} [2m_b^2(2-x_1-x_2)^2 \\ &\quad - s(1-x_1)(1-x_2)(2+x_1^2+x_2^2-2x_1-2x_2+2x_1x_2)] . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dieses Resultat stimmt mit dem in [8] angegebenen überein<sup>28</sup>. Man beachte die Symmetrie  $x_1 \leftrightarrow x_2$ . Um hieraus den Wirkungsquerschnitt ermitteln zu können, muss über den  $2 \rightarrow 3$  Phasenraum integriert werden, was in Kapitel B.3.2 näher beschrieben wird. Mithilfe von (B.82) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_R}{dx_1 dx_2} &= \frac{Xs}{16} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(1-x_1)^2(1-x_2)^2 \sqrt{s(s-4m_\chi^2)}} (2m_b^2(2-x_1-x_2)^2 \\ &\quad - s(1-x_1)(1-x_2)(2+x_1^2+x_2^2-2x_1-2x_2+2x_1x_2)) . \end{aligned} \quad (3.58)$$

Es ist sehr aufwendig<sup>29</sup>, die Integration über  $x_1$  und  $x_2$  analytisch auszuführen, was nicht zuletzt an den Integrationsgrenzen von  $x_2$  liegt (vgl. (B.84)). Eine vollständige Darstellung durch elementare Funktionen ist nicht möglich. Die Berechnung führt in der Regel über *hypergeometrische Funktionen*, die sich dann zu *eulerschen Dilogarithmen* (vgl. Abschnitt B.2.1) vereinfachen lassen.

Aufgrund dessen wird die Integration von (3.58) in der Praxis numerisch durchgeführt. Dabei ist zu beachten, dass dieser Ausdruck infrarote Divergenzen erhält, die sich erst nach der Integration und anschließender Addition der infraroten Divergenzen der virtuellen Korrekturen aufheben. Um dennoch numerisch verfahren zu können, bietet sich die Methode der *Dipolsubtraktion* an, worauf an dieser Stelle lediglich verwiesen wird (vgl. [46]). Alternativ lassen sich die infraroten Divergenzen durch die formale Einführung einer Gluonmasse  $\Lambda$  behandeln, die nach Verrechnung der reellen mit den virtuellen Korrekturen auf Null gesetzt wird.

## 3.4. SUSY QCD Korrekturen erster Ordnung

### 3.4.1. Selbstenergien

Analog zur Berechnung der Selbstenergien der QCD in Abschnitt 3.3.1 werden in diesem Abschnitt die Selbstenergien der SUSY QCD berechnet. Auch hier läuft der Prozess ähnlich wie auf Baumniveau ab. Der Unterschied besteht in der Ausbildung einer Sbottom-Gluino-Schleife beim auslaufenden  $b$ - oder  $\bar{b}$ -Quark. Der entsprechende Ausschnitt des

<sup>28</sup>Der abweichende globale Faktor  $1/4$  ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass an der entsprechenden Stelle in [8] noch nicht über die initialen Spinzustände gemittelt wird.

<sup>29</sup>Eine detaillierte Beschreibung einer derartigen Integration für den Prozess  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  findet sich in [45], wo sie gut 25 Seiten in Anspruch nimmt.

Feynman-Diagramms ist in Abbildung 3.7 für ein Sbottom mit Index  $j = 1, 2$  dargestellt. Das Gluino besitzt den Schleifenimpuls  $q$  und das ein- und auslaufende Quark den Impuls  $p$ .

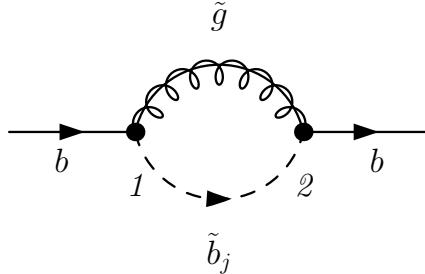


Abbildung 3.7.: Quark-Selbstenergie in der SUSY QCD

Die gestutzte Amplitude lautet

$$i\mathcal{T}_S(\tilde{b}_j) = \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} 1(\tilde{b}_j) \left( i \frac{q + m_{\tilde{g}}}{q^2 - m_{\tilde{g}}^2} \right) 2(\tilde{b}_j) \left( \frac{i}{(q-p)^2 - m_{\tilde{b}_j}^2} \right). \quad (3.59)$$

Im Folgenden sollen lediglich Squark-, jedoch keine Flavourmischungen betrachtet werden (vgl. Abschnitt 2.3.4). In diesem Fall lassen sich die Kopplungen 1 und 2 als

$$1(\tilde{b}_j) = i\sqrt{2}g_S\lambda(W_{2j}P_L - W_{1j}P_R) \quad \text{und} \quad (3.60)$$

$$2(\tilde{b}_j) = i\sqrt{2}g_S\lambda(W_{2j}P_R - W_{1j}P_L) \quad (3.61)$$

schreiben (vgl [36]).  $W$  bezeichnet darin die in Kapitel 2.3.4 eingeführte Mischungsmatrix der Sbottoms.  $P_R$  und  $P_L$  sind Chiralitätsprojektoren, die durch (2.17) definiert sind. Die gesamte Selbstenergie erhalten wir durch Addition der Beiträge der beiden Sbottoms:

$$\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_S(\tilde{b}_1) + \mathcal{T}_S(\tilde{b}_2). \quad (3.62)$$

Diese zerlegen wir gemäß (3.28) erneut in ihre skalaren, pseudoskalaren, vektoriellen und axialen Anteile. Nach Einsetzen der Matrixelemente der Mischungsmatrix  $W$  entsprechend der Definition in (2.20) und ein wenig Rechnung erhalten wir

$$\mathcal{T}_S^{(s)} = \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F \frac{m_{\tilde{g}}}{2m_b} \sin 2\theta_{\tilde{b}} \left( B_0(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) - B_0(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right). \quad (3.63)$$

$$\mathcal{T}_S^{(p)} = 0. \quad (3.64)$$

$$\mathcal{T}_S^{(v)} = -\frac{\alpha_S}{2\pi} C_F \left( B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) + B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right). \quad (3.65)$$

$$\mathcal{T}_S^{(a)} = \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F \cos 2\theta_{\tilde{b}} \left( B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) - B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right). \quad (3.66)$$

Hiermit bestimmen wir entsprechend (3.29) und (3.30) die Counterterme.

$$\begin{aligned} \delta Z_{m_b} &= \frac{\alpha_S C_F}{2\pi} \left[ \frac{m_{\tilde{g}}}{2m_b} \sin 2\theta_{\tilde{b}} \left( B_0(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) - B_0(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) + B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \delta Z_\psi &= \frac{\alpha_S C_F}{2\pi} \left[ B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) + B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right. \\ &\quad \left. - m_b m_{\tilde{g}} \sin 2\theta_{\tilde{b}} \left( \dot{B}_0(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) - \dot{B}_0(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2m_b^2 \left( \dot{B}_1(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) - \dot{B}_1(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

### 3.4.2. Vertexkorrekturen

Die verbleibenden NLO Korrekturen sind die Vertexkorrekturen in SUSY QCD. Der entsprechende Teil des Feynman-Diagramms ist in Abbildung 3.8 zu sehen.

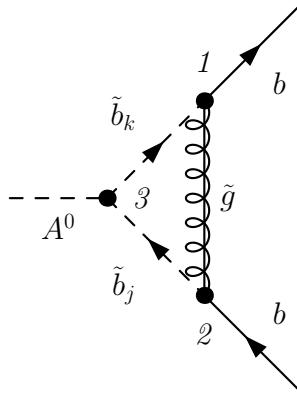


Abbildung 3.8.: Vertexkorrektur zur  $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung in der SUSY QCD

Dem Gluino wird der Impuls  $q$  zugeordnet. Die übrigen Impulse sind durch die äußeren Impulse und die Impulserhaltung festgelegt. Bei der Berechnung der Vertexkorrekturen gehen wir genauso wie in Abschnitt 3.3.2 vor, d. h. wir nutzen erneut die Faktorisierung der Amplitude aus. Demnach gelangen wir zu der gestützten Amplitude

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V(\tilde{b}_k, \tilde{b}_j) &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} 1(\tilde{b}_k) \left( i \frac{\not{q} + m_{\tilde{g}}}{q^2 - m_{\tilde{g}}^2} \right) 2(\tilde{b}_j) 3(\tilde{b}_k, \tilde{b}_j) \\ &\times \frac{i}{(p_2 + q)^2 - m_{\tilde{b}_j}^2} \frac{i}{(p_1 - q)^2 - m_{\tilde{b}_k}^2}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Die Kopplungen  $1(\tilde{b}_k)$  und  $2(\tilde{b}_j)$  können direkt aus (3.60) und (3.61) übernommen werden. Für die Kopplung  $3(\tilde{b}_k, \tilde{b}_j)$  der Sbottoms an das pseudoskalare  $A^0$  gilt

$$3(\tilde{b}_k, \tilde{b}_j) = \begin{cases} 0, & \text{für } k = j, \\ \frac{g_W m_b}{2m_W} (\tan \beta A_b + \mu), & \text{für } k = 1, j = 2, \\ -\frac{g_W m_b}{2m_W} (\tan \beta A_b + \mu), & \text{für } k = 2, j = 1. \end{cases} \quad (3.70)$$

Aufgrund dessen verbleiben von den ursprünglich vier Kombinationsmöglichkeiten ( $k, j = 1, 2$ ) lediglich zwei und wir finden letztlich

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V &= \mathcal{T}_V(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) + \mathcal{T}_V(\tilde{b}_2, \tilde{b}_1) \\ &= \frac{\alpha_S C_F}{2\pi} \frac{g_W m_b}{2m_W} (\tan \beta A_b + \mu) m_{\tilde{g}} C_0(m_b^2, s, m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}, m_{\tilde{b}_2}) \gamma_5. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Somit lautet der Vertexkorrekturfaktor  $\mathcal{A}_V$ , der durch (3.38) und (3.11) definiert ist,

$$\mathcal{A}_V = -\frac{\alpha_S C_F}{2\pi} \left( A_b + \frac{\mu}{\tan \beta} \right) m_{\tilde{g}} C_0(m_b^2, s, m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}, m_{\tilde{b}_2}). \quad (3.72)$$

### 3.4.3. Addition der virtuellen Korrekturen

Die Amplitude inklusive aller virtuellen NLO Korrekturen in SUSY QCD wird völlig analog zu Abschnitt 3.3.3 ermittelt. Wie zuvor gilt

$$|\mathcal{M}_{\text{virt}}|^2 = (1 + 2\delta Z_{m_b} + 2\delta Z_\psi + 2\mathcal{A}_V) |\mathcal{M}_{\text{LO}}|^2 + \mathcal{O}(\alpha_S^2) \quad (3.73)$$

$$:= (1 + \frac{\alpha_S C_F}{2\pi} \Delta_{\text{SUSY QCD}}) |\mathcal{M}_{\text{LO}}|^2 + \mathcal{O}(\alpha_S^2). \quad (3.74)$$

Durch Einsetzen der Counterterme und des Vertexkorrekturfaktors lässt sich  $\Delta_{\text{SUSY QCD}}$  bestimmen.

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{SUSY QCD}} &= -2m_{\tilde{g}} \left( A_b + \frac{\mu}{\tan \beta} \right) C_0(m_b^2, s, m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}, m_{\tilde{b}_2}) \\ &\quad + \frac{m_{\tilde{g}}}{m_b} \sin 2\theta_{\tilde{b}} \left( B_0(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) - B_0(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right) \\ &\quad - 2m_b m_{\tilde{g}} \sin 2\theta_{\tilde{b}} \left( \dot{B}_0(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) - \dot{B}_0(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right) \\ &\quad + 4m_b^2 \left( \dot{B}_1(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) + \dot{B}_1(m_b^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Ebenso wie  $\Delta_{\text{QCD}}$  ist dieses Ergebnis UV-konvergent (vgl. Kapitel B.2.4). Darüber hinaus ist es jedoch auch IR-konvergent, da – im Gegensatz zum Gluon in der QCD – in der SUSY QCD keine masselosen Teilchen innerhalb von virtuellen Korrekturen auftreten. In Übereinstimmung damit existieren auch keine reellen Korrekturen in der SUSY QCD.

## 3.5. Berechnung des Wirkungsquerschnitts in erster Ordnung

Nach der geleisteten Vorarbeit lässt sich der Wirkungsquerschnitt inklusive aller NLO Korrekturen der starken Wechselwirkung leicht angeben. Die bereits zuvor genutzte Faktorisierung der Amplitude bei den Vertexkorrekturen überträgt sich direkt auf den Wirkungsquerschnitt, sodass sich dieser als

$$\sigma_{\text{NLO}} = \left( 1 + \frac{\alpha_S C_F}{2\pi} (\Delta_{\text{QCD}} + \Delta_{\text{SUSY QCD}}) \right) \sigma_{\text{LO}} + \sigma_R + \mathcal{O}(\alpha_S^2) \quad (3.76)$$

schreiben lässt. Die darin verwendeten Größen finden sich in (3.46), (3.75) und (3.18) sowie (3.58). Um  $\sigma_R$  zu erhalten, muss noch über  $x_1$  und  $x_2$  integriert werden. Wie schon erwähnt, müssen dabei die infraroten Divergenzen beachtet werden.

## 3.6. Resummation

### 3.6.1. Das Konzept der Resummation

Der Themenkomplex der *Resummation* ist ein *weites Feld*, um es mit Fontane zu sagen (vgl. [47]). Es liegt außerhalb des Anspruchs dieser Arbeit, eine fundierte Erläuterung der Thematik zu liefern. Im Folgenden soll es vielmehr darum gehen, die grundlegende Idee qualitativ nachzuzeichnen und formale Aspekte zunächst hintan zu stellen. Dieses Vorgehen ist insofern gerechtfertigt, als dass sich zeigen wird, dass die konkret durchgeführte Resummation ohnehin nicht den vollen technischen Apparat benötigt.

Die bisher durchgeführten Rechnungen zum Wirkungsquerschnitt des Prozesses  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  entsprechen einem störungstheoretischen Vorgehen in nullter (vgl. Abschnitt 3.2) bzw. erster Ordnung (vgl. Abschnitte 3.3, 3.4 und 3.5). Grundsätzlich sind perturbative Methoden jedoch nur unter gewissen Prämissen anwendbar bzw. verlässlich. Diese Problematik soll an einem Beispiel erläutert werden.

Wir betrachten dazu als exemplarische perturbative Methode die *Taylorentwicklung*. In der lagrangeschen Schreibweise des Restgliedes lässt sich diese für eine  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit Entwicklungspunkt  $x_0$  als

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)} \quad \text{mit } \xi \in [x_0, x] \quad (3.77)$$

schreiben (vgl. [48]). Dabei bezeichnet  $n$  die Ordnung der Störungsrechnung. In der Praxis hat sich dieses Verfahren als nützlich erwiesen, da das vergleichsweise aufwendig zu bestimmende Restglied in numerischen Studien oftmals vernachlässigt werden kann, sodass man in guter Näherung

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (3.78)$$

verwendet. Falls die Funktion  $f$  nicht  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar ist, lässt sich nach Voraussetzung keine Taylorentwicklung bis zur Ordnung  $n$  durchführen. Darüber hinaus kann es Situationen geben, in denen das Verfahren gemäß (3.78) zwar generell anwendbar, aber unzuverlässig ist. Dieser Fall ist beispielsweise beim natürlichen Logarithmus gegeben, dessen Taylorreihe um den Entwicklungspunkt 1 bis zur Ordnung  $n$

$$\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad (3.79)$$

lautet. Diese bereits 1668 von Nikolaus Mercator entdeckte Reihe konvergiert für  $-1 < x \leq 1$  sehr langsam und für andere  $x$  überhaupt nicht.

Ganz ähnliche Probleme treten im Kontext der Quantenfeldtheorie auf. Es existieren Phänomene, die sich prinzipiell einer perturbativen Analyse entziehen und dementsprechend mit nichtperturbativen Methoden, wie z. B. der Gittertheorie (vgl. [49]), behandelt werden müssen. Zusätzlich kann es passieren, dass perturbative Methoden zwar generell anwendbar sind, jedoch in bestimmten Parameterbereichen (z. B. für gewisse kinematische Konstellationen oder bestimmte Kopplungen) unzuverlässig werden, solange lediglich eine feste Ordnung der Störungsrechnung betrachtet wird.

Das Konzept der Resummation betrifft die Klasse der zuletzt angesprochenen Schwierigkeiten. Im Wesentlichen werden dabei potentiell große und damit die Perturbativität

gefährdende Terme identifiziert, von der Störungsrechnung isoliert und in allen Ordnungen aufsummiert. Ein beliebter Fehler besteht darin, die resummierten Terme nicht aus der eigentlichen Störungsrechnung zu entfernen, sodass diese doppelt gezählt werden. Hierauf ist besonders zu achten.

Im Folgenden wird die Resummation aller führenden Terme in SUSY QCD in  $\mathcal{O}[(\alpha_S \mu \tan \beta)^n]$  durchgeführt. Des Weiteren wird die Resummation der Beiträge in  $\mathcal{O}[\alpha_S^n (\mu \tan \beta)^m A_b^{n-m}]$  und in  $\mathcal{O}[\alpha_S^{n+1} (\mu \tan \beta)^n]$  sowie der elektroschwachen Beiträge diskutiert und skizziert. Die Implementierung dieser Resummation in das Programm DM@NLO (vgl. Abschnitt 4) und damit in den Kontext der Präzisionsrechnungen zu dunkler Materie ist der genuin neue Teil dieser Masterarbeit.

Die Resummation der SUSY QCD Beiträge kann unabhängig von der Resummation der QCD Beiträge erfolgen (vgl. [11]), welche bereits in DM@NLO implementiert ist. Aufgrund dessen wird diese im letzten Unterabschnitt dieses Kapitels lediglich kurz zusammengefasst.

### 3.6.2. Resummation der SUSY QCD Beiträge in $\mathcal{O}[(\alpha_S \mu \tan \beta)^n]$

Die Rechnung dieses Abschnitts folgt dem Vorgehen in [11].

Im vorliegenden Fall treten die kritischen bzw. zu resummierenden Terme in der Renormierung der Bottommasse  $m_b$  für große  $\tan \beta$  und  $\mu$  auf. Auf Baumniveau ist diese durch die Yukawa-Kopplung  $h_b$  festgelegt.

$$m_b = h_b v_1. \quad (3.80)$$

Diese Relation wird durch die Berücksichtigung von NLO Korrekturen modifiziert. Die physikalische Bottommasse  $m_b$ , d. h. die Polmasse, ist auf Einschleifenniveau durch

$$m_b = h_b v_1 + \delta h_b v_1 + h_b v_1 \Delta m_b \quad (3.81)$$

gegeben. Dabei definiert die renormierte Kopplung  $h_b v_1$  die renormierte Masse  $m_b^R$ .  $\delta h_b v_1 = \delta m_b$  ist der Massen-Counterterm. Durch  $h_b v_1 \Delta m_b$  werden die endlichen Einschleifenbeiträge berücksichtigt. Die korrespondierenden Feynman-Diagramme der drei Terme sind in Abbildung 3.9 zu sehen.

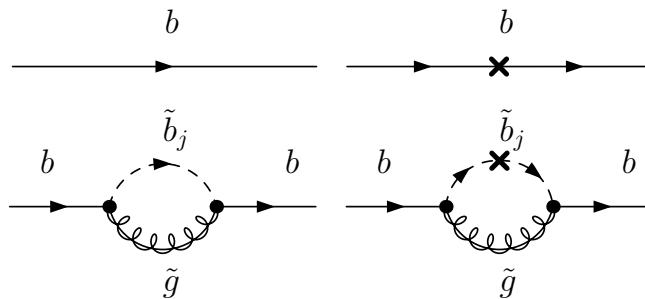


Abbildung 3.9.: Relevante Feynman-Diagramme für die Resummation der SUSY QCD Beiträge in  $\mathcal{O}[(\alpha_S \mu \tan \beta)^n]$ : Renormierte Bottommasse, Counterterm für die Bottommasse, Einschleifenbeiträge in SUSY QCD und Einschleifenbeiträge in SUSY QCD inklusive Counterterm

Im Sinne der Resummation muss diese Rechnung nun auf alle Ordnungen der Störungsrechnung (d. h. auf  $n$ -Schleifenniveau) erweitert werden. An dieser Stelle tritt jedoch eine Eigenheit auf, welche die weitere Rechnung enorm vereinfacht.

**Satz 1.** *Es sei  $m_{\text{SUSY}}$  eine generische Masse eines supersymmetrischen Teilchens. Dann existieren keine Beiträge zu  $\Delta m_b$  der Ordnung  $(\alpha_S \frac{\mu}{m_{\text{SUSY}}} \tan \beta)^n$  für  $n \geq 2$ , die nicht durch einen zusätzlichen Faktor  $m_b^n/m_{\text{SUSY}}^n$  unterdrückt sind.*

*Beweis.* Der vollständige Beweis von Satz 1 findet sich in [11]. Er basiert auf den folgenden Schritten.

1. Die einzige Möglichkeit Beiträge proportional zu  $(\mu \tan \beta)^n$  zu generieren, sind die Nichtdiagonalelemente der Massenmatrix  $M$  (vgl. (2.22)) der Sbottoms. Diese Beiträge liefern notwendigerweise einen zusätzlichen Faktor  $m_b^n$ .
2. Die Massendimensionalität dieses Faktors wird stets durch die Schleifenintegrale aufgehoben, d. h. die Schleifenintegrale liefern einen Faktor mit inverser Massendifdimension.
3. Die Schleifenintegrale können dabei immer nur einen Faktor  $1/m_{\text{SUSY}}^n$  produzieren und niemals einen Faktor  $1/m_b^n$ .

□

Dank dieses Satzes ergibt sich die physikalische Masse auf  $n$ -Schleifenniveau gegenüber (3.81) durch Berücksichtigung exakt eines weiteren Terms, nämlich eines Counterterms in einem Einschleifendiagramm<sup>30</sup>. Das entsprechende Feynman-Diagramm ist rechts unten in Abbildung 3.9 dargestellt. Somit gelangen wir zu

$$m_b = h_b v_1 + \delta h_b v_1 + h_b v_1 \Delta m_b + \delta h_b v_1 \Delta m_b \quad (3.82)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_b}{1 + \Delta m_b} = h_b v_1 + \delta h_b v_1. \quad (3.83)$$

Die Relation (3.83) ist unabhängig vom gewählten Renormierungsschema und ermöglicht die Bestimmung der modifizierten  $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung. Wir finden, dass die Kopplung auf Baumniveau (vgl. (3.9) und (3.11)) wie folgt zu verändern ist.

$$h_{Abb} \gamma_5 \rightarrow \frac{h_{Abb} \gamma_5}{1 + \Delta m_b} \left( 1 - \frac{\Delta m_b}{\tan^2 \beta} \right). \quad (3.84)$$

Der obige Ausdruck lässt sich alternativ durch Einführung einer effektiven Lagrangedichte gewinnen (vgl. [9]). Man beachte, dass positive  $\Delta m_b$  die Yukawa-Kopplung gegenüber dem Baumniveau verringern, während negative  $\Delta m_b$  diese erhöhen. Außerdem soll nochmals betont werden, dass die in  $\Delta m_b$  enthaltenen Einschleifenbeiträge aus der eigentlichen NLO Rechnung entfernt werden müssen, wenn die  $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung gemäß (3.84) verwendet wird. Andernfalls würden diese Beiträge doppelt gezählt.

Es verbleibt die Bestimmung von  $\Delta m_b$ . Diese Größe gleicht der skalaren Selbstenergie in SUSY QCD – welche wir bereits in (3.63) berechnet haben – im Limes verschwindender äußerer Viererimpulse. Demnach gilt

$$\Delta m_b = \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F \frac{m_{\tilde{g}}}{2m_b} \sin 2\theta_{\tilde{b}} \left( B_0(0, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) - B_0(0, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2}) \right). \quad (3.85)$$

<sup>30</sup>Fortan werden entsprechend Satz 1 durch  $m_b^n/m_{\text{SUSY}}^n$  unterdrückte Terme vernachlässigt. Für typische Spektren der SUSY-Teilchen sind diese marginal.

Wir verwenden nun (2.23) und gelangen zu

$$\Delta m_b = \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F m_{\tilde{g}} (A_b - \mu \tan \beta) \frac{B_0(0, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_1}) - B_0(0, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{b}_2})}{m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2}, \quad (3.86)$$

was sich mithilfe von (B.34) als

$$\Delta m_b = \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F m_{\tilde{g}} (A_b - \mu \tan \beta) I(m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{g}}^2) \quad (3.87)$$

schreiben lässt. Dieses Ergebnis stimmt mit dem in der Literatur angegebenen überein (vgl. [9], [10], [11] und [50]).

### 3.6.3. Resummation der SUSY QCD Beiträge in $\mathcal{O}[\alpha_S^n (\mu \tan \beta)^m A_b^{n-m}]$

Das in (3.87) angegebene  $\Delta m_b$  beinhaltet nicht nur Terme proportional zu  $\mu \tan \beta$ , sondern auch solche proportional zu  $A_b$ . Oftmals ist  $A_b$  deutlich kleiner als  $\mu \tan \beta$ , sodass man für die Resummation in  $\mathcal{O}[(\alpha_S \mu \tan \beta)^n]$

$$\Delta m_b \rightarrow \lim_{A_b \rightarrow 0} \Delta m_b = -\frac{\alpha_S}{2\pi} C_F m_{\tilde{g}} \mu \tan \beta I(m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{g}}^2) \quad (3.88)$$

verwendet. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass es Szenarien gibt, in denen  $A_b$  in der gleichen Größenordnung wie  $\mu \tan \beta$  liegt (vgl. [50]). In derartigen Fällen kommt es zu einer Entmischung der Sbottoms (vgl. (2.20) und (2.23)), und eine Resummation der zu  $A_b$  proportionalen Terme ist ebenfalls notwendig.

Diese Resummation wird in [50] durchgeführt, wobei sich zeigt, dass alle Terme in  $\mathcal{O}[\alpha_S^n (\mu \tan \beta)^m A_b^{n-m}]$  mit  $m \leq n$  berücksichtigt werden, wenn statt (3.88)

$$\Delta m_b \rightarrow \frac{\lim_{A_b \rightarrow 0} \Delta m_b}{1 + \lim_{\mu \tan \beta \rightarrow 0} \Delta m_b} = -\frac{\frac{\alpha_S}{2\pi} C_F m_{\tilde{g}} \mu \tan \beta I(m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{g}}^2)}{1 + \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F m_{\tilde{g}} A_b I(m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{g}}^2)} \quad (3.89)$$

genutzt wird.

### 3.6.4. Resummation der SUSY QCD Beiträge in $\mathcal{O}[\alpha_S^{n+1} (\mu \tan \beta)^n]$

Im Rahmen von [50] werden mithilfe der in den Abschnitten 3.6.2 und 3.6.3 vorgestellten Resummationsmethoden die Zerfälle von Higgs-Bosonen untersucht. Dabei stellt sich heraus, dass insbesondere für die Endzustände  $\tau^+ \tau^-$ ,  $gg$  und  $t\bar{t}$  große theoretische Unsicherheiten von etwa  $\mathcal{O}(10\%)$  verbleiben. Diese Unsicherheiten sind systematischer Natur und entspringen im Wesentlichen der Skalenabhängigkeit der laufenden starken Kopplungskonstanten  $\alpha_S(\mu)$ <sup>31</sup>.

<sup>31</sup>Beim Prozess der Renormierung wird – in jedem Schema – eine Renormierungsskala  $\mu$  eingeführt. Diese Skala hat keine unmittelbare physikalische Bedeutung. Das Endergebnis, etwa der Wirkungsquerschnitt, muss folglich unabhängig von der Renormierungsskala sein. Daher führt man eine laufende Kopplungskonstante – z. B.  $\alpha_S(\mu)$  im Falle der QCD – ein, welche diese Abhängigkeit kompensiert (vgl. [25]). Der Zusammenhang zwischen der laufenden Kopplungskonstanten, der Renormierungsskala und dem Wirkungsquerschnitt wird dabei durch eine Differentialgleichung, eine sogenannte *Renormierungsgruppengleichung*, beschrieben. Das Problem ist allerdings, dass die Kompensation der Skalenabhängigkeit nur dann exakt ist, wenn die Störungsrechnung in allen Ordnungen durchgeführt wird. Berechnet man beispielsweise lediglich NLO Korrekturen, so verbleibt eine Skalenabhängigkeit aufgrund der nicht berücksichtigten Terme in zweiter und höherer Ordnung.

Da davon ausgegangen wird, dass künftige Experimente<sup>32</sup> geringere Unsicherheiten besitzen werden, ist es notwendig, die Skalenabhängigkeit zu reduzieren. Dies erfolgt durch eine Berücksichtigung von NNLO Korrekturen („Next-to-Next-to-Leading Order“), d. h. einer Ausdehnung der Resummation auf  $\mathcal{O}[\alpha_S^{n+1}(\mu \tan \beta)^n]$ . Diese Rechnung wird in [9] vollzogen und soll im Folgenden kurz vorgestellt werden.

Das prinzipielle Vorgehen schließt direkt an [11] und [50] an. Zunächst schreiben wir  $\Delta m_b$  als

$$\Delta m_b = \Delta m_b^{\text{QCD}(1)} + \Delta m_b^{\text{QCD}(2)}, \quad (3.90)$$

wobei mit  $\Delta m_b^{\text{QCD}(2)}$  die neuen Beiträge in  $\mathcal{O}[\alpha_S^{n+1}(\mu \tan \beta)^n]$  bezeichnet werden sollen. Zur Bestimmung von  $\Delta m_b^{\text{QCD}(2)}$  wird die Bottom-Selbstenergie auf Zweischleifenniveau benötigt. Hierzu tragen insgesamt zwölf topologisch verschiedene Diagramme bei, von denen zwei in Abbildung 3.10 zu sehen sind. Die übrigen Diagramme finden sich in [9].

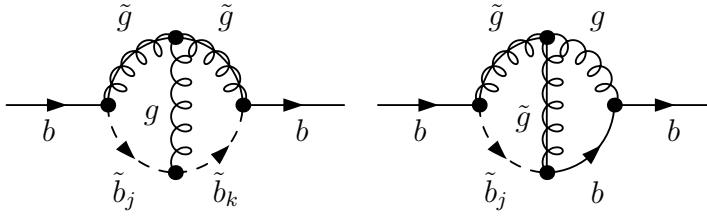


Abbildung 3.10.: Exemplarische Zweischleifendiagramme zur Berechnung von  $\Delta m_b^{\text{QCD}(2)}$

Ganz ähnlich zur Rechnung in Abschnitt 3.6.2 erhält man  $\Delta m_b^{\text{QCD}(2)}$ , indem man alle entsprechenden Zweischleifendiagramme berücksichtigt und zusätzlich Massen-Counterterme in diese einfügt. Dabei wird maximal ein Counterterm gleichzeitig eingefügt<sup>33</sup>. Alle anderen möglichen Beiträge sind in Analogie zu Satz 1 durch einen Faktor  $m_b^n/m_{\text{SUSY}}^n$  unterdrückt.

Das Resultat der Berechnung von  $\Delta m_b^{\text{QCD}(2)}$  wurde in das Programm *HDECAY* (vgl. [51]) implementiert. Wie der Name bereits andeutet, dient *HDECAY* vornehmlich der Berechnung von Zerfällen von Higgs-Bosonen im Standardmodell und im MSSM. Es ist leider nicht möglich, den analytischen Ausdruck für  $\Delta m_b^{\text{QCD}(2)}$  an dieser Stelle wiedergeben, da dieser zu lang ist<sup>34</sup>. Näherungen für bestimmte Grenzfälle sind in [9] angegeben.

Die Resummation der zu  $A_b$  proportionalen Terme erfolgt analog zum Vorgehen in Kapitel 3.6.3, d. h. wir verwenden

$$\Delta m_b \rightarrow \frac{\lim_{A_b \rightarrow 0} \Delta m_b}{1 + \lim_{\mu \tan \beta \rightarrow 0} \Delta m_b} = \frac{\lim_{A_b \rightarrow 0} (\Delta m_b^{\text{QCD}(1)} + \Delta m_b^{\text{QCD}(2)})}{1 + \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F m_{\tilde{g}} A_b I(m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{g}}^2)}. \quad (3.91)$$

Der Nenner hat sich gegenüber (3.89) nicht verändert, da  $\Delta m_b^{\text{QCD}(2)}$  keine Neuerung bezüglich der zu  $A_b$  proportionalen Terme liefert. Insgesamt werden durch dieses Verfahren alle Beiträge in  $\mathcal{O}[\alpha_S^{n+1}(\mu \tan \beta)^m A_b^{n-m}]$  mit  $m \leq n$  berücksichtigt.

<sup>32</sup>In diesem Kontext sind insbesondere zukünftige  $e^+e^-$  Linearbeschleuniger relevant.

<sup>33</sup>Das erste Diagramm aus Abbildung 3.10 taucht somit insgesamt drei Mal in der Rechnung auf. Einmal so, wie es dort abgebildet ist, einmal mit einem Massen-Counterterm im Propagator für  $\tilde{b}_j$  und einmal mit einem Counterterm im Propagator für  $\tilde{b}_k$ .

<sup>34</sup>Die Routine zur Berechnung von  $\Delta m_b^{\text{QCD}(2)}$  umfasst etwa 700 Zeilen Fortran-Code.

### 3.6.5. Resummation der elektroschwachen Beiträge

Interessanterweise existieren neben den bereits diskutierten SUSY QCD Beiträgen auch elektroschwache Beiträge zur Renormierung der Bottommasse, die ebenfalls resummiert werden müssen, da sie für große  $\mu$  und  $\tan \beta$  in derselben Größenordnung liegen können. Diese Tatsache ist bemerkenswert, da die starke Wechselwirkung etwa  $10^5$  mal stärker ist als die schwache Wechselwirkung.

Um die elektroschwachen Prozesse in der Resummation zu berücksichtigen, schreiben wir  $\Delta m_b$  als

$$\Delta m_b = \Delta m_b^{\text{QCD}(1)} + \Delta m_b^{\text{QCD}(2)} + \Delta m_b^{\text{els}(1)} + \Delta m_b^{\text{els}(2)}. \quad (3.92)$$

Die für  $\Delta m_b^{\text{els}(1)}$  relevanten Diagramme sind in Abbildung 3.11 zu sehen. Das propagierende  $b$ -Quark bildet eine Stop-Higgsino-Schleife aus<sup>35</sup>. Völlig analog zu Satz 1 entsteht der einzige weitere Beitrag, der nicht durch einen Faktor  $m_b^n/m_{\text{SUSY}}^n$  unterdrückt ist, durch Einfügen eines Massen-Counterterms.

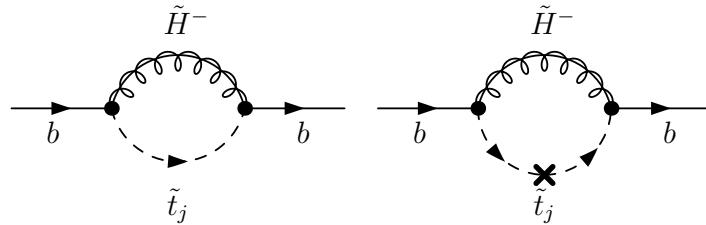


Abbildung 3.11.: Einschleifendiagramme zur Berechnung von  $\Delta m_b^{\text{els}(1)}$

Das Ergebnis für  $\Delta m_b^{\text{els}(1)}$  lautet

$$\Delta m_b^{\text{els}(1)} = -\frac{\lambda_t^2}{(4\pi)^2} A_t \mu \tan \beta I(m_{\tilde{t}_1}^2, m_{\tilde{t}_2}^2, \mu^2). \quad (3.93)$$

Die Notwendigkeit, diese Beiträge ebenfalls zu resumieren, entsteht durch die Yukawa-Kopplung

$$\lambda_t = \frac{m_t g_W}{\sqrt{2} m_W \sin \beta}. \quad (3.94)$$

Aufgrund der Proportionalität zur Topmasse kann (3.93) in derselben Größenordnung wie der entsprechende SUSY QCD Beitrag (3.89) liegen.

Die Berücksichtigung von (3.93) bei der Berechnung von  $\Delta m_b$  entspricht einer Resummation aller Terme in  $\mathcal{O}[(\lambda_t^2 A_t \tan \beta)^n]$ . Im Zuge der Erweiterung der SUSY QCD Resummation in [9] wurde auch die Resummation der elektroschwachen Beiträge verfeinert. Dazu werden zusätzlich starke Schleifenkorrekturen zu den Diagrammen aus Abbildung 3.11 berechnet. Insgesamt tragen acht topologisch verschiedene Diagramme zu  $\Delta m_b^{\text{els}(2)}$  bei, von denen zwei in Abbildung 3.12 dargestellt sind. Die verbleibenden Diagramme sind in [9] abgebildet.

<sup>35</sup>Es bildet sich eine Stop-Chargino-Schleife. Das Chargino besteht aus einer Mischung von geladenen Gauginos und Higgsinos. In diesem Kontext ist jedoch lediglich die starke Top-Yukawa-Kopplung und somit der Higgsino-Anteil relevant.

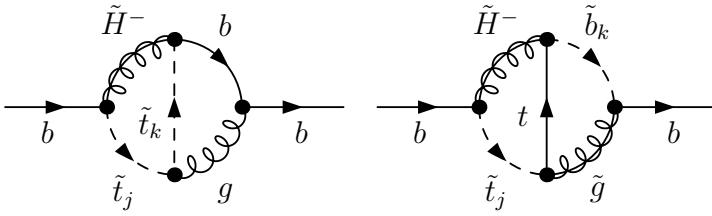


Abbildung 3.12.: Exemplarische Zweischleifendiagramme zur Berechnung von  $\Delta m_b^{\text{els}(2)}$

Das weitere Vorgehen ist vollständig analog zu dem aus Abschnitt 3.6.4. Erneut ist es nicht möglich, hier den analytischen Ausdruck für  $\Delta m_b^{\text{els}(2)}$  anzugeben, da dieser zu lang ist. Die Berechnung von  $\Delta m_b^{\text{els}(2)}$  wurde jedoch wie jene von  $\Delta m_b^{\text{QCD}(2)}$  in das Programm HDECAY implementiert.

Abschließend soll das Endresultat für die Resummation noch einmal geschlossen aufgeführt werden:

$$\Delta m_b = \Delta m_b^{\text{QCD(I)}} + \Delta m_b^{\text{QCD(II)}} + \Delta m_b^{\text{els(I)}} + \Delta m_b^{\text{els(II)}}. \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \Delta m_b^{\text{QCD(I)}} &= \frac{\lim_{A_b \rightarrow 0} \Delta m_b^{\text{QCD(1)}}}{1 + \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F m_{\tilde{g}} A_b I(m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{g}}^2)} \\ &= -\frac{\frac{\alpha_S}{2\pi} C_F m_{\tilde{g}} \mu \tan \beta I(m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{g}}^2)}{1 + \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F m_{\tilde{g}} A_b I(m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{g}}^2)}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\Delta m_b^{\text{QCD(II)}} = \frac{\lim_{A_b \rightarrow 0} \Delta m_b^{\text{QCD(2)}}}{1 + \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F m_{\tilde{g}} A_b I(m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{g}}^2)}. \quad (3.97)$$

$$\Delta m_b^{\text{els(I)}} = \Delta m_b^{\text{els}(1)} = -\frac{\lambda_t^2}{(4\pi)^2} A_t \mu \tan \beta I(m_{\tilde{t}_1}^2, m_{\tilde{t}_2}^2, \mu^2). \quad (3.98)$$

$$\Delta m_b^{\text{els(II)}} = \Delta m_b^{\text{els}(2)}. \quad (3.99)$$

Der Übergang von arabischen zu römischen Zahlen bei der Benennung entspricht dabei der Resummation der zu  $A_b$  proportionalen Terme gemäß (3.91). Diese hat keinen Einfluss auf die elektroschwachen Korrekturen. In Übereinstimmung mit HDECAY wurde die Resummation in obiger Form in das Programm DM@NLO implementiert. Die in Kapitel 5 durchgeführte numerische Untersuchung der Resummation verwendet ebenfalls obige Größen bzw. Bezeichnungen.

### 3.6.6. Resummation der QCD Beiträge

Die bisher durchgeführte Resummation der SUSY QCD und elektroschwachen Beiträge war notwendig, weil die Yukawa-Kopplung Terme proportional zu  $\mu \tan \beta$  enthält, die potentiell groß werden können. Bei der in diesem Kapitel zusammengefassten Resummation der QCD Beiträge entstehen die potentiell großen Terme auf eine andere Weise, nämlich durch eine spezifische kinematische Konstellation. Es lässt sich zeigen (vgl. [10] und [52]), dass die NLO QCD Korrekturen im Limes  $m_b^2 \ll s$  eine logarithmische Singularität entwickeln. Innerhalb der in dieser Arbeit verwendeten Nomenklatur (vgl. (3.76)) entspricht dies einer Proportionalität von

$$\Delta_{\text{QCD}} \sim -3 \ln \frac{s}{m_b^2}, \quad (3.100)$$

welche das Scheitern der Perturbativität deutlich werden lässt. Im betrachteten Limes führt dieses Verhalten zu einem negativen und somit völlig unbrauchbaren Wirkungsquerschnitt. Daher ist es notwendig, die Singularität zu absorbieren, was durch die Einführung einer *laufenden Masse*  $m_b(s)$  in der Yukawa-Kopplung geschieht (vgl. [52]).

Die verbleibenden, endlichen Beiträge sind bis zur vierten Ordnung in  $\alpha_S$  bekannt (vgl. [53]) und lauten

$$\begin{aligned}\delta_{\text{QCD}} &= 1 + \frac{\alpha_S}{\pi} \frac{17}{4} + \left(\frac{\alpha_S}{\pi}\right)^2 (35, 94 - 1, 359n_f) \\ &+ \left(\frac{\alpha_S}{\pi}\right)^3 (164, 14 - 25, 77n_f + 0, 259n_f^2) \\ &+ \left(\frac{\alpha_S}{\pi}\right)^4 (39, 34 - 220, 9n_f + 9, 685n_f^2 - 0, 0205n_f^3),\end{aligned}\quad (3.101)$$

wobei  $n_f$  die Zahl der aktiven Flavours bezeichnet.

Insgesamt führt das Verfahren zu einer erneuten Redefinition der  $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung gemäß

$$h_{Abb}\gamma_5 \rightarrow h_{Abb}\gamma_5\delta_{\text{QCD}} \quad (3.102)$$

mit

$$h_{Abb} = -\frac{g_W m_b \tan \beta}{2m_W} \rightarrow -\frac{g_W m_b(s) \tan \beta}{2m_W}. \quad (3.103)$$

Unter Berücksichtigung aller Resummationseffekte lautet die  $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung also

$$\frac{h_{Abb}\gamma_5}{1 + \Delta m_b} \delta_{\text{QCD}} \left(1 - \frac{\Delta m_b}{\tan^2 \beta}\right). \quad (3.104)$$



## 4. Das Projekt DM@NLO

In diesem Kapitel soll das Programm paket *DM@NLO* (“Dark Matter at Next-to-Leading Order“) vorgestellt werden. *DM@NLO* ist in Fortran geschrieben und dient der numerischen Berechnung der für die Bestimmung der Reliktdichte relevanten Wirkungsquerschnitte im MSSM. Dabei werden – wenn das Projekt vollendet ist – alle relevanten NLO Korrekturen in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  für die folgenden Prozesse berücksichtigt (vgl. [54] und [55]):

- Annihilation von Neutralinos in Quarks:

$$\tilde{\chi}_i^0 \tilde{\chi}_j^0 \rightarrow q\bar{q} \quad \text{mit } i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (4.1)$$

- Annihilation von Charginos in Quarks:

$$\tilde{\chi}_k^\pm \tilde{\chi}_l^\pm \rightarrow q\bar{q} \quad \text{mit } k, l = 1, 2. \quad (4.2)$$

- Ko-Annihilation von Neutralinos und Charginos in Quarks:

$$\tilde{\chi}_i^0 \tilde{\chi}_k^\pm \rightarrow q\bar{q} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{und } k = 1, 2. \quad (4.3)$$

- Ko-Annihilation von Neutralinos und Squarks in ein Quark und ein Vektorboson:

$$\tilde{\chi}_i^0 \tilde{q} \rightarrow qV \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{und } V = g, \gamma, W^\pm, Z^0. \quad (4.4)$$

- Ko-Annihilation von Charginos und Squarks in ein Quark und ein Vektorboson:

$$\tilde{\chi}_k^\pm \tilde{q} \rightarrow qV \quad \text{mit } k = 1, 2 \quad \text{und } V = g, \gamma, W^\pm, Z^0. \quad (4.5)$$

- Ko-Annihilation von Neutralinos und Squarks in ein Quark und ein Higgs-Boson:

$$\tilde{\chi}_i^0 \tilde{q} \rightarrow qH \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{und } H = h^0, H^0, H^\pm, A^0. \quad (4.6)$$

- Ko-Annihilation von Charginos und Squarks in ein Quark und ein Higgs-Boson:

$$\tilde{\chi}_k^\pm \tilde{q} \rightarrow qH \quad \text{mit } k = 1, 2 \quad \text{und } H = h^0, H^0, H^\pm, A^0. \quad (4.7)$$

- Annihilation von Squarks in Vektorbosonen:

$$\tilde{q}\tilde{q}^* \rightarrow VV \quad \text{mit } V = g, \gamma, W^\pm, Z^0. \quad (4.8)$$

- Annihilation von Squarks in Higgs-Bosonen:

$$\tilde{q}\tilde{q}^* \rightarrow HH \quad \text{mit } H = h^0, H^0, H^\pm, A^0. \quad (4.9)$$

- Annihilation von Squarks in ein Vektor- und ein Higgs-Boson:

$$\tilde{q}\tilde{q}^* \rightarrow HV \quad \text{mit} \quad H = h^0, H^0, H^\pm, A^0 \quad \text{und} \quad V = g, \gamma, W^\pm, Z^0. \quad (4.10)$$

Neben den NLO Korrekturen werden in Einzelfällen auch Korrekturen höherer Ordnung berücksichtigt – etwa im Falle der  $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung<sup>36</sup> durch die in Abschnitt 3.6 vorgestellte Resummation.

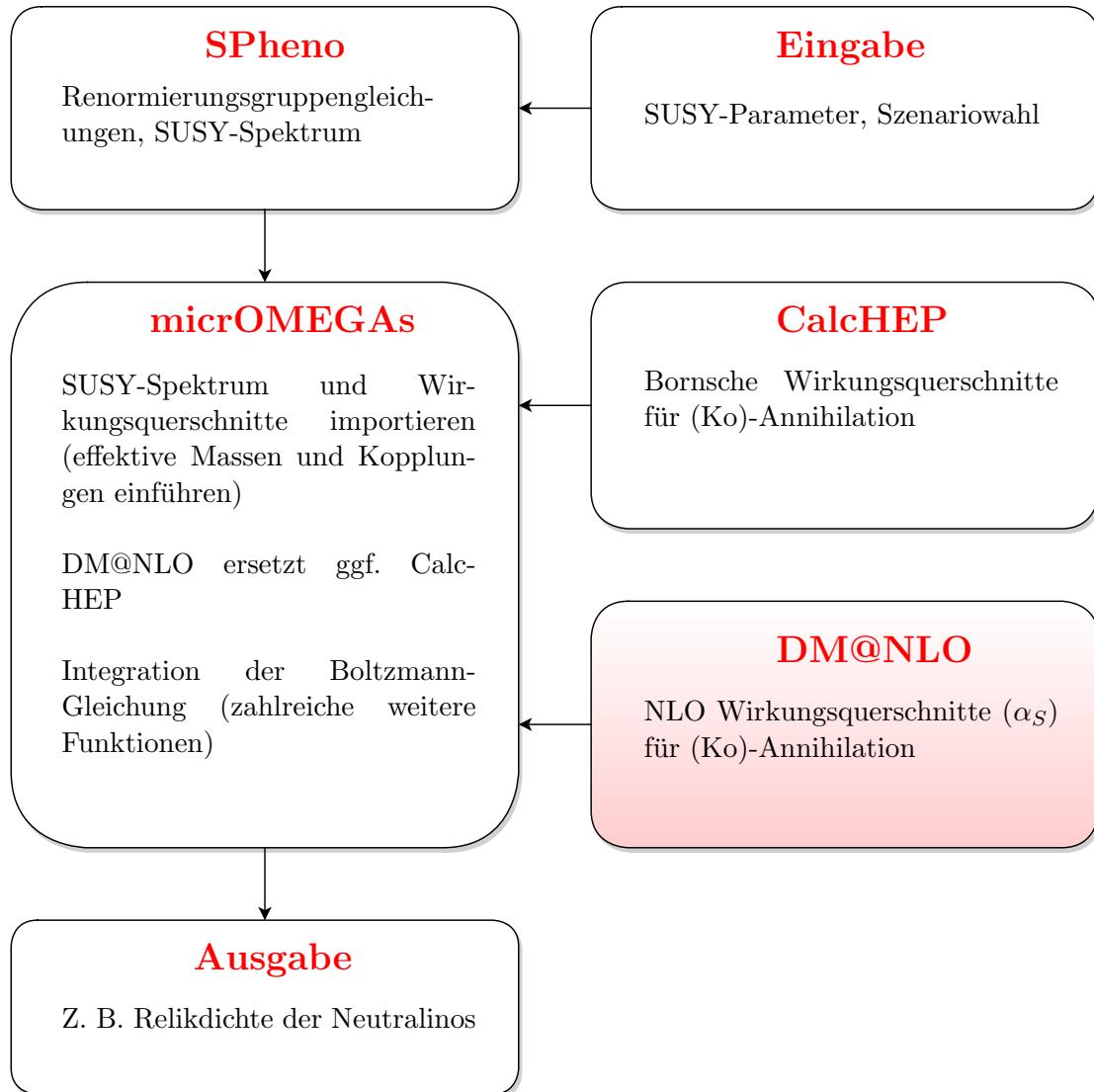


Abbildung 4.1.: Programmablauf von DM@NLO

Der prinzipielle Ablauf des Programms ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Zunächst wird das Szenario festgelegt und die zugehörigen Parameter werden eingegeben – etwa  $m_0$ ,  $m_{1/2}$ ,  $A_0$ ,  $\text{sgn } \mu$  und  $\tan \beta$  im Falle des cMSSM. Mithilfe dieser Parameter berechnet *SPheno* (vgl.

<sup>36</sup>In dieser Masterarbeit liegt der Fokus auf dem Higgs-Funnel, in dem die  $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung besonders interessant, da dominant ist. Im Programm selbst wird das Verfahren jedoch analog für die Kopplungen der übrigen neutralen Higgs-Bosonen an Paare von  $b$ -Quarks verwendet (vgl. [9]).

---

[56] und [57]) im Anschluss das SUSY-Spektrum, d. h. die Massen der supersymmetrischen Teilchen und die Mischungswinkel. Dazu werden die entsprechenden Renormierungsgruppengleichungen numerisch gelöst. Zusätzlich werden physikalische Observable wie z. B. das Verzweigungsverhältnis von  $b \rightarrow s\gamma$  bestimmt. Das so erhaltene Spektrum wird an *micrOMEGAs*<sup>37</sup> (vgl. [59] und [60]) übergeben. Bei micrOMEGAs handelt es sich um ein umfangreiches Programm, das Eigenschaften von dunkler Materie wie die Reliktdichte oder Detektionsraten bestimmt. Die dazu notwendigen Wirkungsquerschnitte werden von *CalcHEP* (vgl. [61] und [62]) importiert. CalcHEP berechnet jedoch lediglich bornsche Wirkungsquerschnitte und keine Strahlungskorrekturen. micrOMEGAs verbessert diese Resultate dahingehend, dass effektive, d. h. schleifenkorrigierte Massen verwendet werden. Nichtsdestotrotz werden keine vollständigen NLO Korrekturen berücksichtigt.

An diesem Punkt tritt DM@NLO auf den Plan. Es wird geprüft, ob micrOMEGAs Wirkungsquerschnitte benötigt, die DM@NLO ebenfalls berechnen kann. Falls ja, werden die Wirkungsquerschnitte von micrOMEGAs bzw. CalcHEP durch die von DM@NLO ersetzt, wodurch die Rechnung präziser wird. Diese Präzision ist insbesondere zur Ermittlung der Reliktdichte vonnöten, um einen adäquaten Vergleich mit den experimentellen Daten zu ermöglichen (vgl. Abschnitt 2.1 sowie [54] und [55]).

Rechenintensiv ist beim vorgestellten Programmablauf insbesondere die Berechnung der reellen Korrekturen sowie die Integration über den zugehörigen Phasenraum. Weitere signifikante Beiträge zur gesamten Rechenzeit liefern die numerische Integration der Boltzmann-Gleichung sowie die Berechnung der virtuellen Korrekturen. Die Berechnung des supersymmetrischen Spektrums mit SPheno beansprucht in der Regel weniger Zeit als die zuvor genannten Teilprozesse. Zudem muss SPheno nur einmalig pro Szenario aufgerufen werden, d. h. dass beispielsweise die kinetische Energie variiert werden kann, ohne dass ein erneuter Aufruf nötig wäre. Insbesondere im Falle von großen  $\tan\beta$  und bei fester kinetischer Energie kann das Lösen der Renormierungsgruppengleichungen mittels SPheno dennoch nennenswerte Zeitbeträge beanspruchen.

Neben micrOMEGAs existiert mit *DarkSUSY* (vgl. [63]) ein weiteres öffentliches Programm zur Berechnung der Reliktdichte dunkler Materie. Ähnlich wie bei micrOMEGAs werden auch bei DarkSUSY bislang keine vollständigen NLO Korrekturen verwendet. Für die Zukunft ist daher geplant, DM@NLO mit DarkSUSY zu verknüpfen, sodass auch mit diesem Programm auf präzisere Wirkungsquerschnitte zurückgegriffen werden kann. Der entsprechende Programmablauf wäre dabei ganz analog zu dem in 4.1 dargestellten, wenn man micrOMEGAs und CalcHEP gegen DarkSUSY austauschte<sup>38</sup>.

Abschließend sei kurz auf das *SLOOPs* Projekt verwiesen (vgl. [64]). Dieses in Frankreich ansässige Projekt kann als komplementär zu DM@NLO aufgefasst werden. Ziel des Projektes ist ebenfalls eine präzisere Bestimmung der Reliktdichte durch die Berücksichtigung von NLO Korrekturen. Der Fokus liegt hier allerdings hauptsächlich auf elektroschwachen Beiträgen.

---

<sup>37</sup>Das Programm ist nach der gleichnamigen Kurzgeschichte Voltaires benannt (vgl. [58]).

<sup>38</sup>Im Gegensatz zu micrOMEGAs werden bei DarkSUSY die Wirkungsquerschnitte nicht importiert, sondern intern berechnet, sodass es in diesem Fall kein Pendant zu CalcHEP gibt. Dadurch existiert keine Schnittstelle zum Einlesen von Wirkungsquerschnitten, was die Verbindung mit DM@NLO leider nicht vereinfacht.



# 5. Numerische Resultate

In diesem Kapitel soll die in Abschnitt 3.6 vorgestellte Resummation numerisch untersucht werden. Das primäre Ziel ist es dabei, die Konsequenzen der Berücksichtigung der Terme höherer Ordnung zu verstehen und abzuschätzen.

In einem ersten Schritt wird die Zusammensetzung von  $\Delta m_b$  genauer analysiert. Es wird untersucht, welcher der Summanden aus (3.95)-(3.99) unter welchen Umständen wie groß ist. Im folgenden Unterkapitel wird der Einfluss der Resummation auf den Wirkungsquerschnitt studiert. Ist dieser Einfluss groß, so lässt sich der Methode für das gewählte Szenario phänomenologische Relevanz zusprechen. Abschließend soll gezeigt werden, dass sich die Auswirkungen der Resummation über den Wirkungsquerschnitt in die Berechnung der Reliktdichte fortprägen.

Dabei wird aus pragmatischen Gründen das cMSSM verwendet. Die Parameterpunkte sind so gewählt, dass das cMSSM grob, aber einigermaßen gleichmäßig gerastert wird, um die angestrebten qualitativen Aussagen zu ermöglichen. Aktuelle Ausschlussgrenzen seitens der Experimente wurden bei der Wahl der Datensätze nicht berücksichtigt. Diesbezüglich sei lediglich auf [65], [66] und [67] verwiesen.

## 5.1. Zusammensetzung und Verhalten von $\Delta m_b$

Um die typische Zusammensetzung von  $\Delta m_b$  zu analysieren, wurden insgesamt 56 Szenarien untersucht, die in Tabelle 5.1 zu sehen sind<sup>39</sup>. In jedem Szenario wurde der Dreierimpuls im Schwerpunktssystem  $|\vec{p}|$  zwischen 200 und 4000 GeV in Schritten von 100 GeV variiert. Dieser hängt im vorliegenden Fall von zwei einlaufenden Neutralinos der Masse  $m_\chi$  mit der Mandelstam-Variablen  $s$  wie folgt zusammen.

$$s = 4(|\vec{p}|^2 + m_\chi^2). \quad (5.1)$$

Unabhängig von  $|\vec{p}|$  durchliefen die Parameter  $m_0$  und  $m_{1/2}$  in Schritten von 50 GeV den Bereich zwischen 400 und 2000 GeV. Insgesamt besteht jeder Datensatz somit aus  $39 \cdot 33 \cdot 33 = 42471$  einzelnen Datenreihen bzw. Parameterpunkten. Die Berechnung eines Datensatzes beanspruchte in der Regel zwischen acht und vierzehn Minuten<sup>40</sup>.

<sup>39</sup>Im Falle von  $\text{sgn } \mu = -1$  wurde dabei  $\tan \beta = 31$  als maximaler Wert verwendet, da SPheno für größere Beträge von  $\tan \beta$  bei negativen  $\mu$  kein physikalisches Spektrum erzeugen kann.

<sup>40</sup>Dabei wurde auf einem 3,5 Jahre alten MacBook Pro mit einem 2,53 GHz Zweikernprozessor gerechnet.

Tabelle 5.1.: Übersicht der untersuchten Szenarien

Nummer	$A_0$ in GeV	$\tan \beta$	$\text{sgn } \mu$	Nummer	$A_0$ in GeV	$\tan \beta$	$\text{sgn } \mu$
1	500	53	+1	29	500	31	-1
2	250	53	+1	30	250	31	-1
3	10	53	+1	31	10	31	-1
4	0	53	+1	32	0	31	-1
5	-10	53	+1	33	-10	31	-1
6	-250	53	+1	34	-250	31	-1
7	-500	53	+1	35	-500	31	-1
8	500	25	+1	36	500	25	-1
9	250	25	+1	37	250	25	-1
10	10	25	+1	38	10	25	-1
11	0	25	+1	39	0	25	-1
12	-10	25	+1	40	-10	25	-1
13	-250	25	+1	41	-250	25	-1
14	-500	25	+1	42	-500	25	-1
15	500	15	+1	43	500	15	-1
16	250	15	+1	44	250	15	-1
17	10	15	+1	45	10	15	-1
18	0	15	+1	46	0	15	-1
19	-10	15	+1	47	-10	15	-1
20	-250	15	+1	48	-250	15	-1
21	-500	15	+1	49	-500	15	-1
22	500	8	+1	50	500	8	-1
23	250	8	+1	51	250	8	-1
24	10	8	+1	52	10	8	-1
25	0	8	+1	53	0	8	-1
26	-10	8	+1	54	-10	8	-1
27	-250	8	+1	55	-250	8	-1
28	-500	8	+1	56	-500	8	-1

Jeder dieser 56 Datensätze wurde mithilfe eines selbstverfassten C++-Programms genauer analysiert. Dabei wurde für die einzelnen Summanden  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$ ,  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$ ,  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$ ,  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  und  $\Delta m_b$  der Mittelwert und die zugehörige Standardabweichung sowie Maximum und Minimum ermittelt. Im Falle der genannten Summanden wurde zwischen absoluten und relativen Beiträgen unterschieden, wobei zur Bestimmung der relativen Beiträge die Absolutbeträge der einzelnen Summanden verwendet wurden, da diese oftmals Beiträge unterschiedlichen Vorzeichens generieren. Das bedeutet, dass beispielsweise der

relative Beitrag von  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  zu  $\Delta m_b$  mittels

$$\frac{|\Delta m_b^{\text{els(I)}}|}{|\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}| + |\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}| + |\Delta m_b^{\text{els(I)}}| + |\Delta m_b^{\text{els(II)}}|} \quad (5.2)$$

berechnet wurde. Das Resultat der Analyse für das Szenario 1 ist in Tabelle 5.2 zu sehen.

Tabelle 5.2.: Auswertung des Szenarios 1

Größe	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
$\Delta m_b$	0,16901	0,02642	0,06727	0,24627
$\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$	0,23482	0,04091	0,08068	0,31767
	62,3719 %	3,59352 %	56,4558 %	77,6493 %
$\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$	0,03791	0,01166	-0,00193	0,06948
	10,1079 %	2,76522 %	0,00373 %	16,8770 %
$\Delta m_b^{\text{els(I)}}$	-0,09653	0,02000	-0,12032	-0,02707
	25,4084 %	1,66940 %	19,5137 %	27,6307 %
$\Delta m_b^{\text{els(II)}}$	-0,00718	0,00558	-0,02059	0,00508
	2,11184 %	1,16361 %	0,00001 %	4,93692 %

An obiger Tabelle lassen sich mehrere Beobachtungen festmachen. Zunächst einmal ist ersichtlich, dass  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  stets den größten Beitrag liefert, sowohl absolut als auch relativ. Diese Tatsache wird zusätzlich dadurch untermauert, dass das absolute Minimum von  $\Delta m_b$  in allen betrachteten Datensätzen mit dem absoluten Minimum von  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  zusammenfällt<sup>41</sup>.

Weiterhin lässt sich konstatieren, dass es tatsächlich notwendig ist, neben den starken auch elektroschwache Beiträge zu berücksichtigen, was die nach (3.93) getroffene Aussage bestätigt. Im betrachteten Szenario besitzt  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  im Mittel einen relativen Anteil von ca. 25 % an  $\Delta m_b$  und trägt somit stärker bei als die durch  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  beschriebenen Korrekturen der starken Wechselwirkung mit etwa 10 %.

Ebenfalls wird deutlich, dass es notwendig ist, die Resummation wie in [9] und Kapitel 3.6 beschrieben auf die Ordnung  $\mathcal{O}[\alpha_S^{n+1}(\mu \tan \beta)^m A_b^{n-m}]$  mit  $m \leq n$  auszudehnen, d. h.  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  zu berücksichtigen. Das suggeriert insbesondere der relative Maximalbeitrag von fast 17 %. Die Erweiterung der elektroschwachen Resummation auf  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  erscheint in dieser Hinsicht zweitrangig. Allerdings kann auch diese Größe die Resummation im Rahmen von knapp 5 % beeinflussen.

Die relativen Minima und Maxima von  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  sind mit Bedacht zu lesen, da die Absolutwerte dieser Größen einen Vorzeichenwechsel durchlaufen. Aufgrund dessen entstehen Absolutbeträge, die bei entsprechend feiner Variation der Parameter  $|\vec{p}|$ ,  $m_0$  und  $m_{1/2}$  prinzipiell beliebig nahe an Null heranreichen. Das erklärt das auffällig kleine relative Minimum von  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$ . Außerdem sei betont, dass gerade in diesen Fällen

<sup>41</sup>Dieser Zusammenhang ist in Tabelle 5.2 nicht zu sehen.

die absoluten und relativen Minima bzw. Maxima nicht notwendigerweise zusammenfallen. Tatsächlich ist es im vorliegenden Fall so, dass das absolute Minimum von  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  zum relativen Maximum führt.

Die Abhängigkeit der vier Summanden von  $|\vec{p}|$  bzw. der Mandelstam-Variablen  $s$  (vgl. (5.1)) ist in Tabelle 5.2 nicht ersichtlich, soll aber dennoch kurz angesprochen werden. Zunächst einmal sind alle Summanden vollständig unabhängig von  $s$ . Innerhalb des Programms DM@NLO wird  $\sqrt{s}$  jedoch als Renormierungsskala verwendet, sodass hierüber eine Abhängigkeit entsteht. Aufgrund der Proportionalität zur starken Kopplung  $\alpha_S$  (vgl. (3.97)) fällt  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  deshalb mit steigendem Dreierimpuls monoton ab<sup>42</sup>. Die Größe  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  ist praktisch unabhängig von der Renormierungsskala, da es sich bei den eingehenden Massen um (physikalische) Polmassen handelt und der Einfluss der Renormierungsskala auf die schwache Kopplungskonstante  $g_W$  vernachlässigbar klein ist (vgl. 3.98). Die Abhängigkeiten von  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  von der Renormierungsskala sind nicht trivial, lassen sich aber leider nicht weiter diskutieren, da keine handhabbaren analytischen Ausdrücke für diese Größen existieren.

Tabelle 5.3.: Auswertung des Szenarios 7

Größe	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
$\Delta m_b$	0,17279	0,02795	0,06835	0,27894
$\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$	0,26814	0,04179	0,10645	0,41174
	59,3213 %	3,68057 %	50,5007 %	70,1393 %
$\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$	0,04404	0,01398	-0,00218	0,09456
	9,69629 %	2,52151 %	0,00962 %	15,2695 %
$\Delta m_b^{\text{els(I)}}$	-0,12907	0,01926	-0,17156	-0,05341
	28,5272 %	0,41850 %	26,4352 %	29,4770 %
$\Delta m_b^{\text{els(II)}}$	-0,01031	0,00806	-0,04042	0,00699
	2,45523 %	1,40485 %	0,00004 %	6,52648 %

In Tabelle 5.3 ist die Auswertung des Szenarios 7 zu sehen. Gegenüber Szenario 1 besitzt dieses eine veränderte trilineare Kopplung  $A_0$ . Der Effekt dessen ist ein genereller Anstieg der Mittelwerte aller Summanden. Bemerkenswert ist dabei jedoch, dass die elektroschwachen Korrekturen im Vergleich stärker zunehmen. Ihre relativen Anteile an  $\Delta m_b$  sind gegenüber Szenario 1 gestiegen. Dieser Trend findet sich auch in den nicht abgedruckten Auswertungen der Szenarien 2 bis 6 wieder.

Es lässt sich folgern, dass die elektroschwachen Korrekturen im Bereich von kleinen bzw. negativen  $A_0$  zusätzliche Relevanz erhalten. Dabei sollte jedoch betont werden, dass sich die relativen Anteile von  $\Delta m_b$  insgesamt nur um wenige Prozentpunkte verschoben haben.

Der beschriebene Einfluss von  $A_0$  auf die Summanden lässt sich auf den Einfluss von  $A_0$  auf  $A_b$ ,  $A_t$  und  $\mu$  zurückführen. Im betrachteten Bereich des Parameterraums sind  $A_b$  und  $A_t$  stets negativ. Ihre Absolutbeträge nehmen mit sinkendem  $A_0$  zu. Unter Berücksichtigung

<sup>42</sup>Die laufende Kopplung  $\alpha_S(\sqrt{s})$  nimmt für größer werdende  $\sqrt{s}$  ab. Dieses Phänomen der QCD führt zur *asymptotischen Freiheit* und dem *Confinement*, also der Bindung der Quarks zu Hadronen.

der Tatsache, dass die Dreiecksfunktion  $I(a, b, c)$  (vgl. Kapitel B.2.2) immer negativ ist, und der Definition von  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  (vgl. (3.98)), erklärt dies, dass  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  minimale (maximal negative) Werte liefert, wenn  $A_0$  minimal wird. Auch wenn keine analytische Formel für  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  vorliegt, kann davon ausgegangen werden, dass hier ähnliche Ursachen wirken.

Der Einfluss von  $A_0$  auf die starken Beiträge  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  ist etwas vertrackter. Das zuvor beschriebene Verhalten führt bei sinkendem  $A_0$  zu einem größeren Nenner (vgl. (3.96) und (3.97)), sodass die Beiträge eigentlich kleiner werden sollten. An dieser Stelle muss jedoch berücksichtigt werden, dass sich mit  $A_0$  neben  $A_b$  und  $A_t$  auch  $\mu$  maßgeblich verändert. Konkret nimmt  $\mu$  zu, wenn  $A_0$  abnimmt. Dieser Effekt überlagert die zuvor beschriebenen und führt letztlich dazu, dass alle vier Summanden mit fallendem  $A_0$  größer werden und der relative Anteil der elektroschwachen Korrekturen zunimmt.

Tabelle 5.4.: Auswertung des Szenarios 22

Größe	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
$\Delta m_b$	0,02200	0,00370	0,00917	0,03324
$\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$	0,03299	0,00594	0,01199	0,04496
	61,0986 %	3,59935 %	55,3853 %	75,3081 %
$\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$	0,00500	0,00170	-0,00074	0,00950
	9,25900 %	2,74814 %	0,00318 %	16,1899 %
$\Delta m_b^{\text{els(I)}}$	-0,01495	0,00312	-0,01876	-0,00456
	27,4584 %	1,67228 %	20,9627 %	29,8631 %
$\Delta m_b^{\text{els(II)}}$	-0,00104	0,00087	-0,00309	0,00090
	2,18393 %	1,20699 %	0,00010 %	5,15721 %

Tabelle 5.5.: Auswertung des Szenarios 50

Größe	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
$\Delta m_b$	-0,02215	0,00369	-0,03341	-0,00936
$\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$	-0,03311	0,00590	-0,04504	-0,01221
	61,1731 %	3,59738 %	55,4592 %	75,3766 %
$\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$	-0,00502	0,00170	-0,00954	0,00074
	9,27358 %	2,74842 %	0,01471 %	16,2139 %
$\Delta m_b^{\text{els(I)}}$	0,01494	0,00309	0,00462	0,01871
	27,3773 %	1,67145 %	20,9209 %	29,7772 %
$\Delta m_b^{\text{els(II)}}$	0,00104	0,00087	-0,00090	0,00308
	2,17594 %	1,20341 %	0,00017 %	5,13749 %

Szenario 22 zeichnet sich durch einen niedrigeren  $\tan \beta$  gegenüber Szenario 1 aus. Die

Auswertung dieses Szenarios ist in Tabelle 5.4 dargestellt. Die relativen Anteile an  $\Delta m_b$  haben sich gegenüber den zuvor diskutierten Szenarien nur geringfügig verändert. Tatsächlich findet sich diese Verteilung mit Abweichungen von wenigen Prozentpunkten in allen untersuchten Szenarien wieder.

Wesentlich ist jedoch, dass die absoluten Werte der Korrekturen in diesem Szenario um eine Größenordnung kleiner ausfallen als zuvor. Im Zwischenbereich liegen die Korrekturen der Szenarien 8-14 mit  $\tan \beta = 25$  bzw. 15-21 mit  $\tan \beta = 15$ . Angesichts der Tatsache, dass Terme proportional zu  $\mu \tan \beta$  resummiert werden, entspricht dieser Fakt der Erwartung.

In Tabelle 5.5 findet sich die Auswertung des Szenarios 50. Dieses weist dieselben Parameter wie Szenario 22 auf, lediglich das Vorzeichen von  $\mu$  ist umgekehrt. Dieser Umstand spiegelt sich auch im direkten Vergleich wider – bis auf marginale Unterschiede gleichen sich die aufgeführten Werte der obigen beiden Tabellen, lediglich die Vorzeichen haben sich geändert. Demzufolge entsprechen die vormaligen Minima nun den Maxima und vice versa.

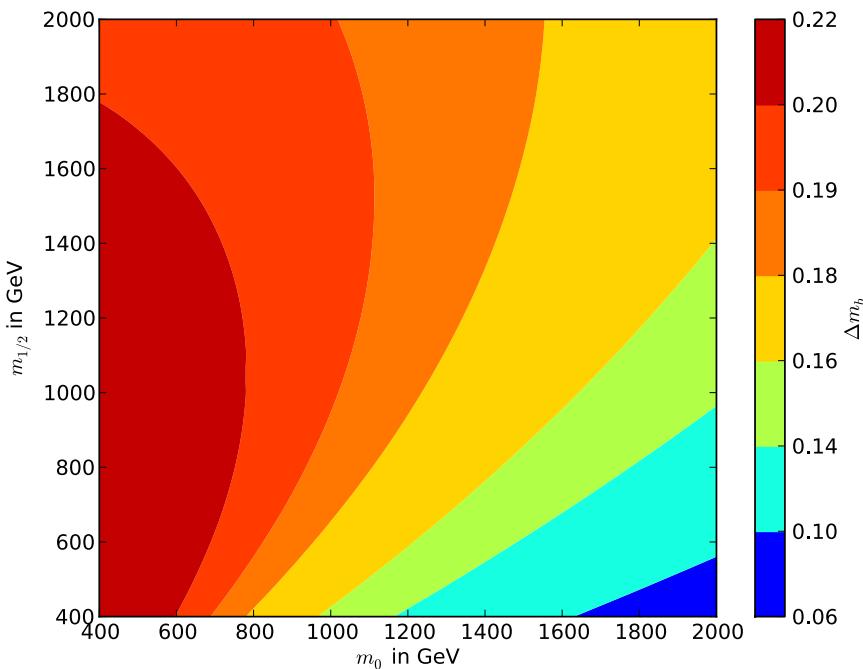


Abbildung 5.1.:  $\Delta m_b$  im Szenario 1 in der  $m_0/m_{1/2}$ -Ebene

Bislang unerwähnt blieb die Abhängigkeit von  $\Delta m_b$  und den zugehörigen Konstituenten von den Massen  $m_0$  und  $m_{1/2}$ . Um diese näher zu untersuchen, werden im Folgenden der Einfachheit halber lediglich Parameterpunkte derselben kinetischen Energie, nämlich mit  $|\vec{p}| = 1 \text{ TeV}$ , berücksichtigt<sup>43</sup>. In Abbildung 5.1 ist der Betrag von  $\Delta m_b$  für das Szenario 1 in der  $m_0/m_{1/2}$ -Ebene dargestellt. Die Farbskala wurde bei diesem und bei den meisten folgenden Plots nichtlinear gewählt, um die Abhängigkeiten besser zu visualisieren.

Wie man erkennen kann, ergeben sich bei kleinem  $m_0$  und mittlerem  $m_{1/2}$  die größten Werte für  $\Delta m_b$ . Erwartungsgemäß ergibt sich dieser Verlauf bereits in guter Näherung,

<sup>43</sup>Aufgrund dessen finden sich in den folgenden Plots die zuvor tabellierten Maxima und Minima der jeweiligen Szenarien nicht unbedingt wieder.

wenn wir die Beiträge von  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  überlagern. Diese sind in den Abbildungen 5.2 und 5.3 zu sehen. Die Maximalwerte von  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  entstehen bei kleinem  $m_0$  und mittlerem bis großem  $m_{1/2}$ . Demgegenüber generiert  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  bei kleinem  $m_0$  und großem  $m_{1/2}$  minimale (maximal negative) Beiträge.

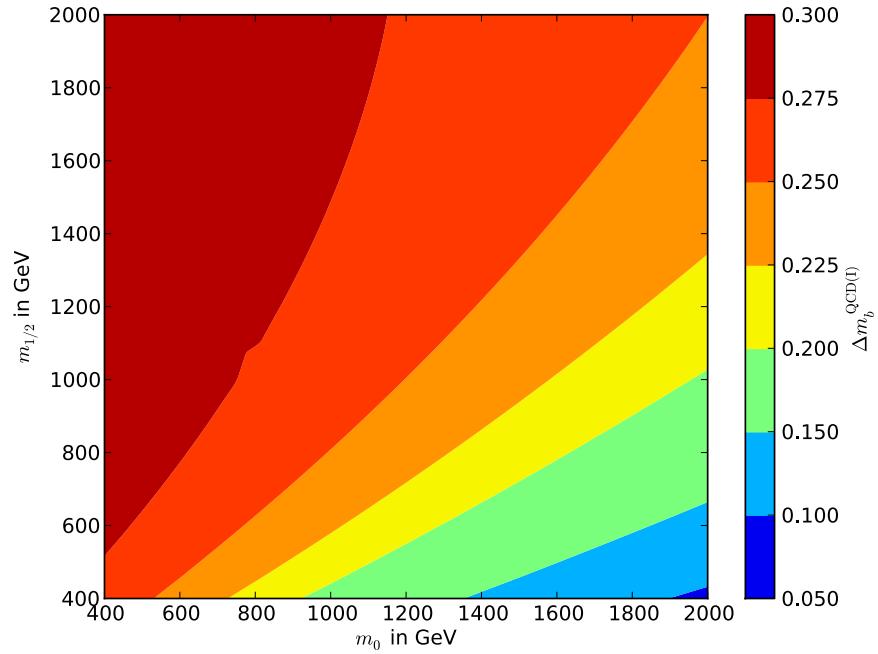


Abbildung 5.2.:  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  im Szenario 1 in der  $m_0/m_{1/2}$ -Ebene

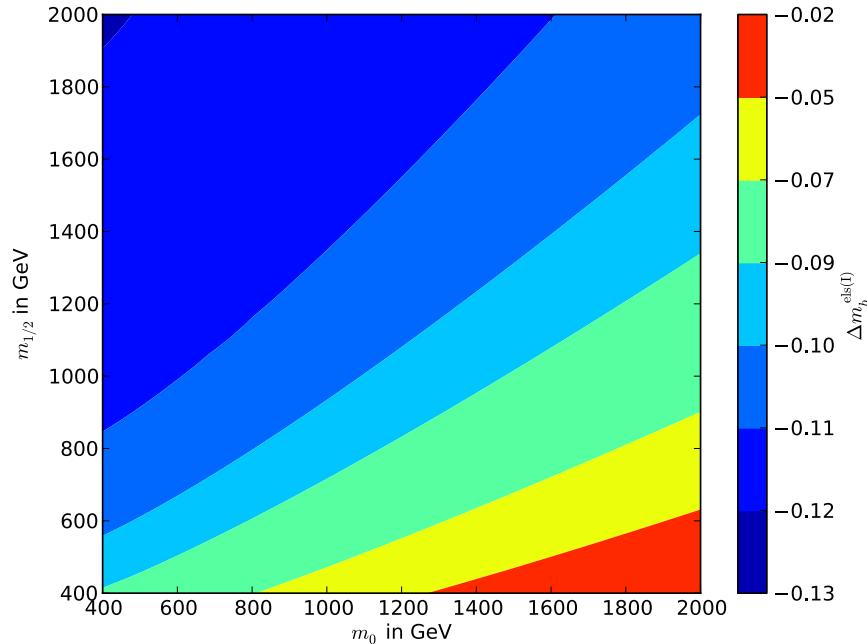


Abbildung 5.3.:  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  im Szenario 1 in der  $m_0/m_{1/2}$ -Ebene

Das Verhalten von  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  bzw.  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  unter Variation von  $m_0$  und  $m_{1/2}$  ist in den Abbildungen 5.4 und 5.5 zu sehen. Beide Größen liefern maximale bzw. maximal negative Werte, wenn sowohl  $m_0$  als auch  $m_{1/2}$  klein ist.

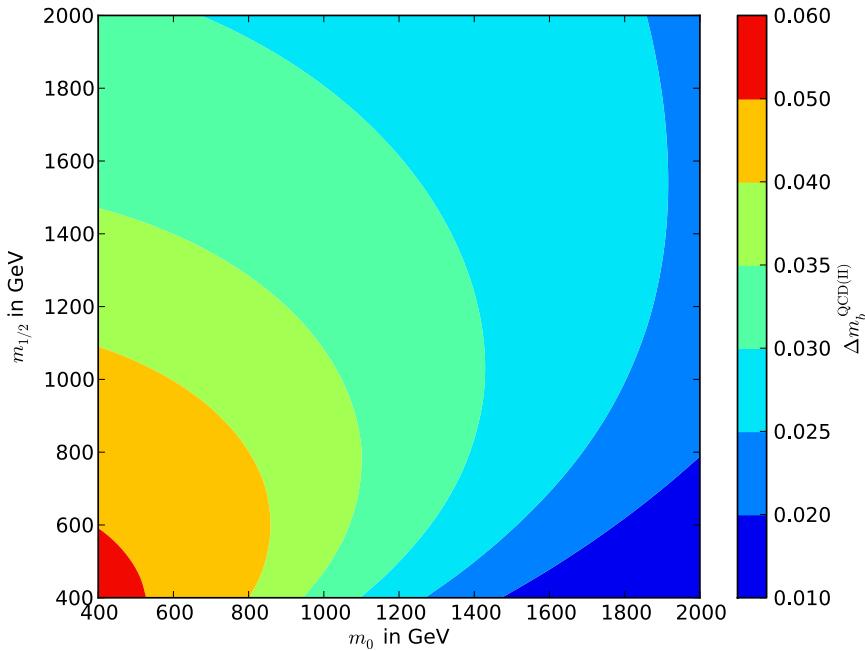


Abbildung 5.4.:  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  im Szenario 1 in der  $m_0/m_{1/2}$ -Ebene

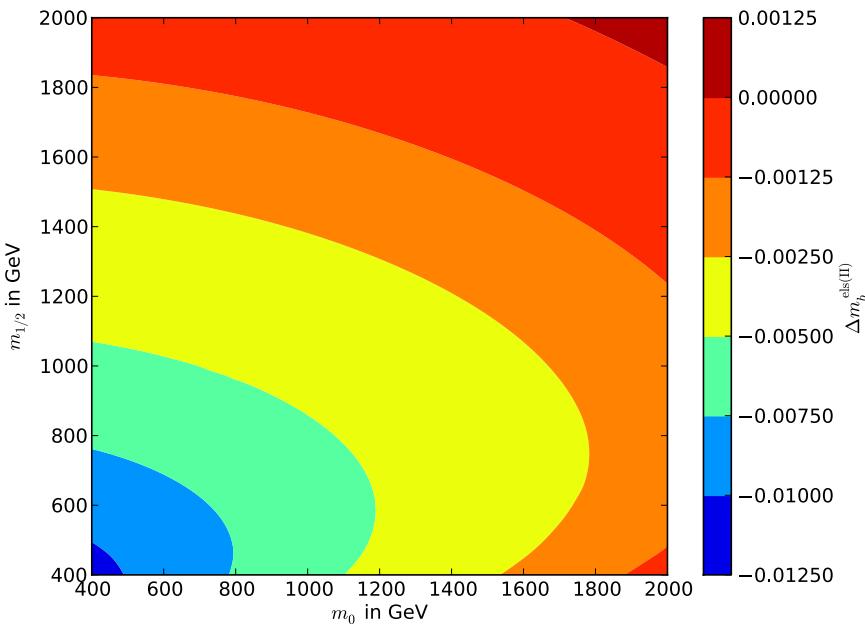


Abbildung 5.5.:  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  im Szenario 1 in der  $m_0/m_{1/2}$ -Ebene

Die Abhängigkeit der Summanden  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  von  $m_0$  und  $m_{1/2}$  kann teil-

weise anhand von (3.96) und (3.98) nachvollzogen werden.  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  ist direkt proportional zur Gluinomasse  $m_{\tilde{g}}$ , welche mit wachsendem  $m_{1/2}$  zunimmt. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 5.2 deutlich zu erkennen. Die Stop- und Sbottommassen erhöhen sich mit größer werdendem  $m_0$  und gehen in die Dreipunktfunktion  $I(a, b, c)$  ein (vgl. Abschnitt B.2.2). Für große  $m_0$  verringert sich diese und damit die Summanden  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$ .

Die gezeigten Konturplots für Szenario 1 können in ihrem Verlauf als repräsentativ für die anderen Szenarien angesehen werden. Eine Verringerung von  $\tan \beta$  führt zwar zu deutlich kleineren Beträgen, die Verteilung in der  $m_0/m_{1/2}$ -Ebene verändert sich jedoch kaum. Ein Vorzeichenwechsel von  $\mu$  kehrt die Vorzeichen der einzelnen Beiträge um, was in einer Invertierung der Farben in den Plots resultiert. Kleinere Werte von  $A_0$  führen zu einer kontinuierlichen Verschiebung der gezeigten Verläufe von  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  gen kleinerem  $m_{1/2}$ . Diese Verschiebung überträgt sich über die Summation auf  $\Delta m_b$ . Als Beispiel ist in Abbildung 5.6  $\Delta m_b$  im Szenario 7 in der  $m_0/m_{1/2}$ -Ebene dargestellt. Für  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  konnte keine nennenswerte Veränderung unter Modifikation von  $A_0$  beobachtet werden.

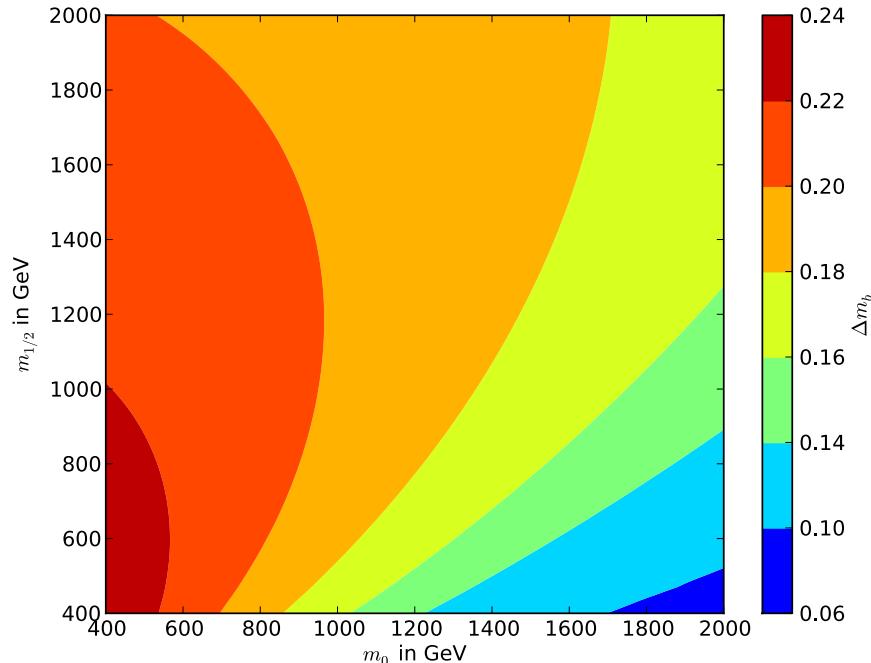


Abbildung 5.6.:  $\Delta m_b$  im Szenario 7 in der  $m_0/m_{1/2}$ -Ebene

Einige der in diesem Abschnitt diskutierten Eigenschaften der Größen  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  werden auch in [68] besprochen. Die dort beschriebenen Befunde decken sich mit den hier aufgeführten Beobachtungen.

## 5.2. Einfluss der Resummation auf den Wirkungsquerschnitt

### 5.2.1. Abgleich des Wirkungsquerschnittes auf Baumniveau

Bevor die Konsequenzen der neu implementierten Resummation auf den Wirkungsquerschnitt untersucht werden können, muss sichergestellt werden, dass das Programm richtig verstanden wurde und korrekt arbeitet. Dazu wird in diesem Abschnitt der bornsche Wirkungsquerschnitt des Prozesses  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$ , also die Ausgangsbasis der in dieser Arbeit bestimmten Korrekturen, unabhängig voneinander mit DM@NLO, CalcHEP und DarkSUSY berechnet. Anschließend werden die Resultate verglichen.

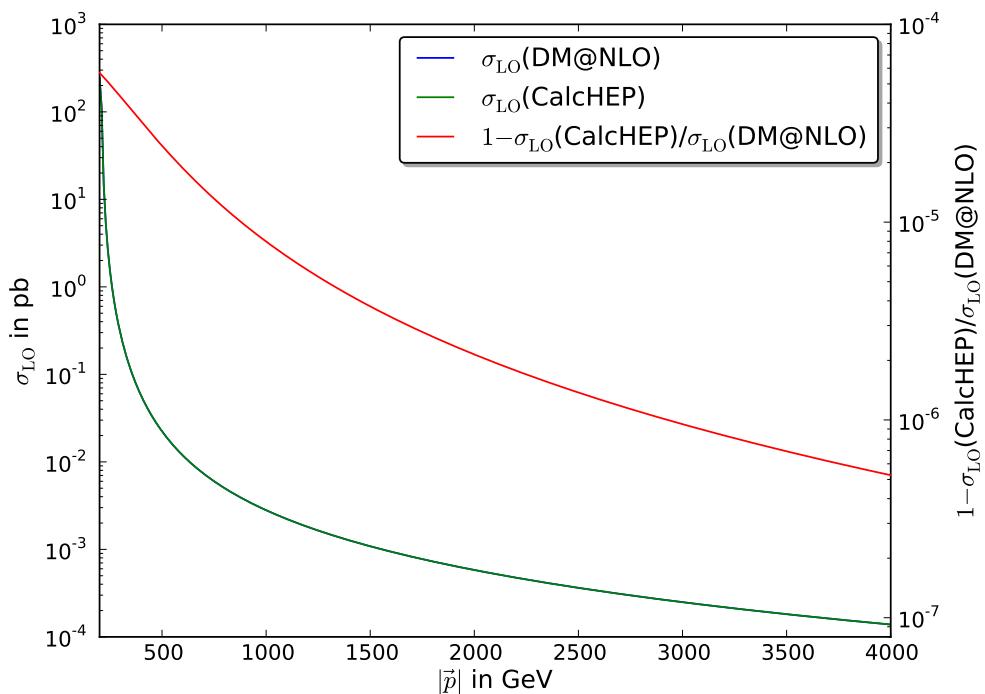


Abbildung 5.7.: Abgleich des bornschen Wirkungsquerschnittes mit CalcHEP

In Abbildung 5.7 ist der bornsche Wirkungsquerschnitt von DM@NLO in blau und derjenige von CalcHEP in grün in Abhängigkeit vom Dreierimpuls im Schwerpunktsystem  $|\vec{p}|$  dargestellt. Damit beide Programme vergleichbare Ergebnisse liefern, wurden effektive Massen und Kopplungen in CalcHEP deaktiviert. Als Eingangswerte wurden  $\tan \beta = 53$ ,  $m_0 = 1200$  GeV,  $m_{1/2} = 800$  GeV,  $A_0 = 0$  und  $\mu = +1$  gewählt.

Die Kurven überdecken sich vollständig, sodass die blaue Linie nicht zu erkennen ist. Insgesamt liegen die Werte im relativ breiten Bereich von etwa  $1,4 \cdot 10^{-4}$  bis  $250$  pb<sup>44</sup>. Weiterhin ist ein Abfall mit größer werdender kinetischer Energie zu beobachten, was sich

<sup>44</sup>Standardmäßig gibt CalcHEP Wirkungsquerschnitte in Picobarn aus. Der Einfachheit halber wurde diese Einheit hier übernommen, sodass in diesem Graphen ausnahmsweise keine natürlichen Einheiten verwendet werden (vgl. Abschnitt A.1).

auch in (3.18) wiederfindet.

Um die Übereinstimmung der beiden Ergebnisse besser zu visualisieren, ist zusätzlich die relative Abweichung der beiden Wirkungsquerschnitte in rot eingetragen. Dieser Graph bezieht sich auf dieselbe horizontale, aber auf die rechte vertikale Achse. Die relative Abweichung liegt in der Größenordnung  $10^{-7}$  bis  $10^{-5}$ .

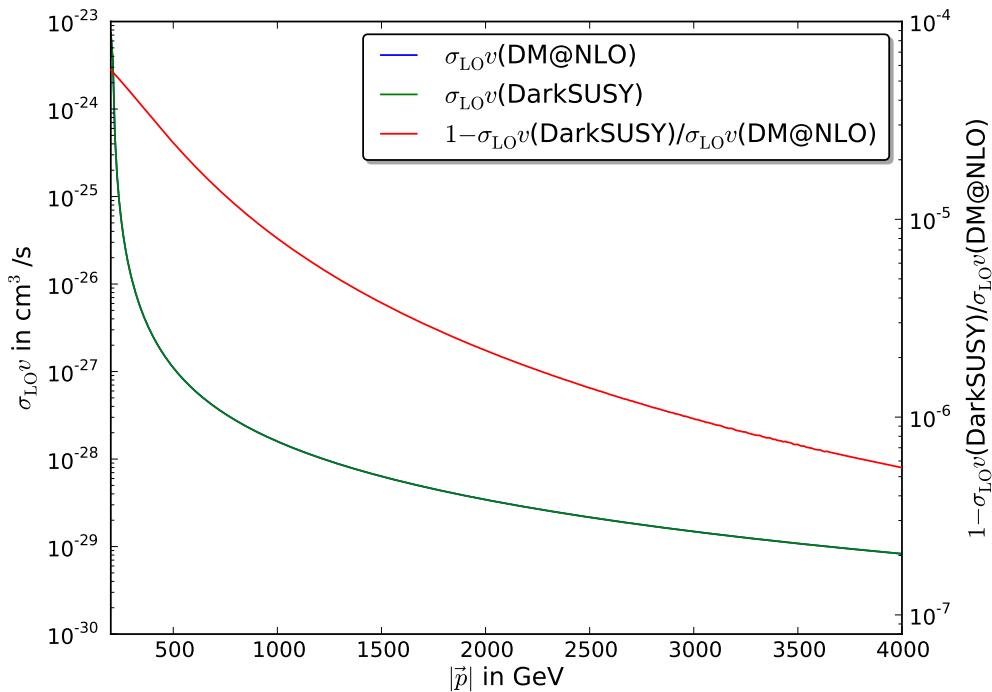


Abbildung 5.8.: Abgleich des bornschen Wirkungsquerschnittes mit DarkSUSY

In Abbildung 5.8 ist analog der Vergleich des bornschen Wirkungsquerschnittes von DM@NLO mit DarkSUSY zu sehen. Die Eingangsparameter sind dieselben wie zuvor. Wie schon bei CalcHEP wurden auch bei DarkSUSY effektive Massen und Kopplungen deaktiviert, um komparabile Werte zu erhalten.

Erneut überlagern sich die grüne (DarkSUSY) und blaue (DM@NLO) Kurve vollständig. Zu beachten ist, dass dieses Mal  $\sigma \cdot v$  in  $\text{cm}^3/\text{s}$  ausgegeben wurde<sup>45</sup>. Die zugehörigen Werte liegen im Intervall von  $8,3 \cdot 10^{-30}$  bis  $7,4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3/\text{s}$  und fallen entsprechend (3.19) mit steigender kinetischer Energie. Die relative Abweichung liegt wiederum in der Größenordnung  $10^{-7}$  bis  $10^{-5}$ .

Abschließend lässt sich festhalten, dass alle drei Programme bis auf marginale Unterschiede übereinstimmende Resultate liefern. Der Prozess  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  wird demnach von DM@NLO auf Baumniveau korrekt berechnet.

<sup>45</sup>Wie zuvor wurde aus pragmatischen Gründen die Standardausgabe des zweiten Programms – in diesem Fall von DarkSUSY – verwendet und diejenige von DM@NLO angepasst. Somit werden auch in diesem Graphen keine natürlichen Einheiten verwendet.

### 5.2.2. Wirkungsquerschnitte unter Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen und Resummationseffekten

In Abbildung 5.9 ist der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  des Prozesses  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  in Abhängigkeit von  $\tan\beta$  in Relation zum bornschen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{LO}}$  zu sehen. Der bornsche Wirkungsquerschnitt wird gemäß (3.18) mit einer Bottommasse von 4,23 GeV berechnet. Für dieses Szenario wurden die Parameter  $m_0 = 1200$  GeV,  $m_{1/2} = 800$  GeV,  $A_0 = 0$  und  $\text{sgn } \mu = +1$  gewählt. Die kinetische Energie wurde auf  $|\vec{p}| = 100$  GeV fixiert. Anhand der genannten Abbildung wird der Einfluss der Strahlungskorrekturen und der Resummation detailliert diskutiert.

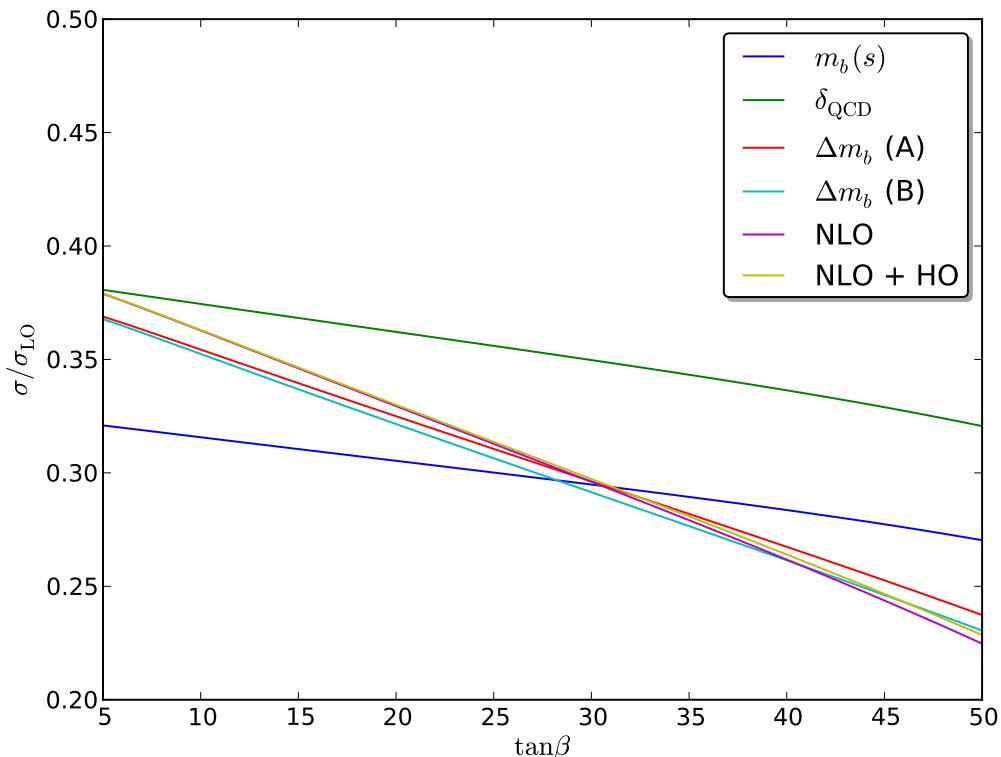


Abbildung 5.9.: Einfluss der Strahlungskorrekturen und der Resummation auf den Wirkungsquerschnitt

Die blaue Linie entspricht der Einführung der laufenden Masse in der Yukawa-Kopplung gemäß (3.103). Der Wirkungsquerschnitt hängt quadratisch von dieser Masse ab (vgl. (3.18)). Die Position des Graphens wird demnach durch

$$\left( \frac{m_b(s)}{m_b} \right)^2 \approx 0,3 \quad (5.3)$$

bestimmt. Anders als in Abschnitt 3.6.6 beschrieben, werden innerhalb von DM@NLO auch gewisse supersymmetrische Korrekturen in die Masse absorbiert. Diese Effekte sind – im Gegensatz zu den reinen QCD Korrekturen – abhängig von  $\tan\beta$ . Sie führen dazu,

dass  $m_b(s)$  von anfänglich etwa 2,4 GeV bei  $\tan\beta = 5$  auf ca. 2,2 GeV bei  $\tan\beta = 50$  abfällt, was sich auch im zugehörigen Wirkungsquerschnitt widerspiegelt.

Bei der grünen Kurve wurden zusätzlich die endlichen QCD-Beiträge gemäß (3.101) und (3.102) berücksichtigt. Der Effekt ist eine Parallelverschiebung gegenüber der blauen Kurve, da der Wirkungsquerschnitt mit einer von  $\tan\beta$  unabhängigen Zahl größer als eins multipliziert wird.

Bei der roten und cyanfarbenen Kurve wurden zusätzlich die supersymmetrischen Beiträge durch  $\Delta m_b$  inkludiert, d. h. es wurde (3.104) verwendet. Im Falle der roten Kurve wurden dabei lediglich  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  betrachtet. Die cyanfarbene Kurve enthält zusätzlich die Beiträge von  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$ . Da in diesem Szenario  $\mu$  positiv ist, ist auch  $\Delta m_b$  positiv (vgl. Abschnitt 5.1). Das führt gemäß (3.84) zu einer Verringerung des Wirkungsquerschnitts. Diese Verringerung ist umso ausgeprägter, je größer  $\Delta m_b$ , d. h. je größer  $\tan\beta$  ist. Dieses Verhalten findet sich in Abbildung 5.9 wieder. Des Weiteren lässt sich beobachten, dass die beiden Kurven zwar sehr nah beieinander liegen, sich aber dennoch unterscheiden. Die Aufspaltung ist gerade bei großen  $\tan\beta$  zu erkennen. Dazu sei auch auf die Detailansicht des Graphen in Abbildung 5.10 verwiesen.

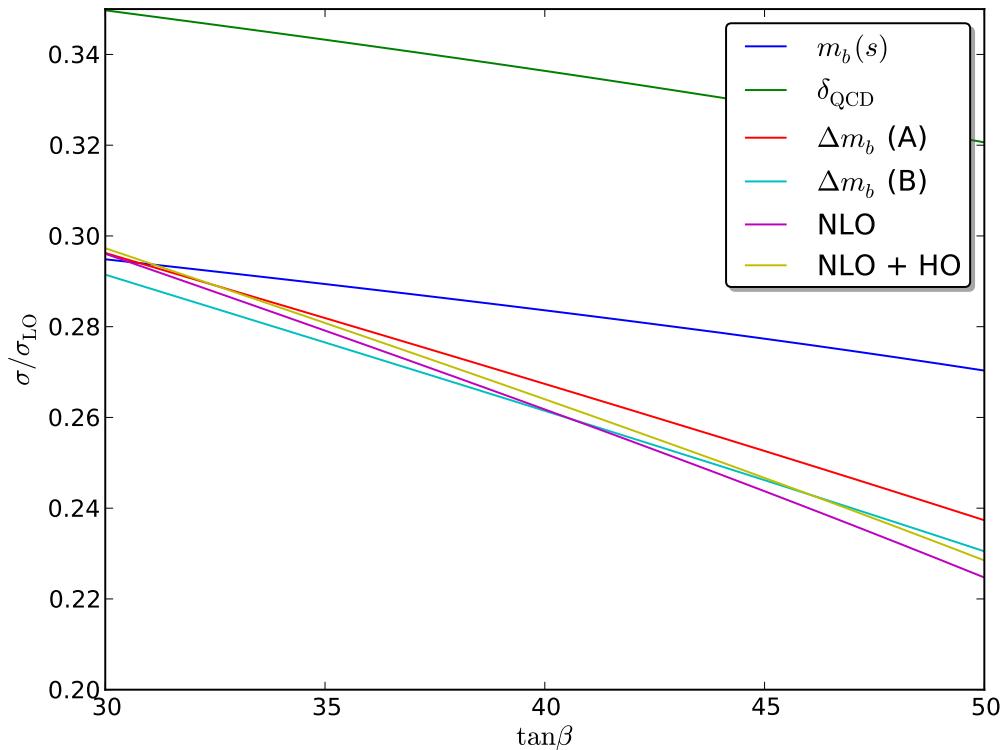


Abbildung 5.10.: Detailansicht aus Abbildung 5.9

Die bisher betrachteten Wirkungsquerschnitte gingen allesamt aus einer Modifikation der  $A^0 b\bar{b}$ -Kopplung hervor. Man bezeichnet diese als Wirkungsquerschnitte auf *effektivem Baumniveau*. Die violette Linie repräsentiert hingegen eine vollständige Einschleifenrechnung entsprechend 3.76. Wie man sieht, unterscheidet diese sich nur geringfügig von der

roten und cyanfarbenen Kurve. Das bedeutet, dass die Resummation bzw. die Rechnung auf effektivem Baumniveau die Einschleifenkorrekturen in diesem Szenario gut approximiert. Dies entspricht der Erwartung, da die Resummation die führenden Einschleifenkorrekturen beinhaltet.

Die gelbe Kurve beinhaltet die mit DM@NLO maximal mögliche Präzision und ist somit als Endresultat zu verstehen. Sie enthält wie die violette Kurve eine vollständige Einschleifenrechnung. Zusätzlich wurden Korrekturen höherer Ordnung – d. h. ab  $\alpha_S^2$  – und elektroschwache Beiträge durch die Resummation berücksichtigt. Dazu wurde der entsprechende Teil des bornschen Wirkungsquerschnittes in (3.76) erneut gemäß (3.104) verändert, wobei die Einschleifenbeiträge der starken Wechselwirkung aus der Resummation entfernt wurden, da diese sonst doppelt gezählt werden. Für kleine  $\tan \beta$  überdeckt die gelbe die violette Kurve. Erst bei hinreichend großen  $\tan \beta$  lassen sich die beiden Linien unterscheiden (vgl. Abbildung 5.10). Diese geringe Abweichung der beiden Kurven entspricht ebenfalls der Erwartung. Entsprechend dem Grundgedanken der Störungsrechnung tragen höhere Ordnungen sukzessive weniger bei.

Zusätzlich lässt sich in Abbildung 5.10 erkennen, dass die gelbe Kurve im Bereich von großen  $\tan \beta$  am besten durch die cyanfarbene Kurve approximiert wird. Demnach macht es in diesem Fall einen Unterschied, ob beim effektiven Baumniveau lediglich  $\Delta m_b^{\text{QCD(I)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(I)}}$  oder zusätzlich  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  berücksichtigt werden. Abschließend soll jedoch festgehalten werden, dass die vier zuletzt beschriebenen Kurven (rot, cyan, violett und gelb) allesamt nur wenige Prozent voneinander abweichen.

### 5.2.3. Analyse der Skalenabhängigkeit

Die ursprüngliche Motivation der Berechnung von  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  war die Reduktion der theoretischen Unsicherheiten, d. h. der Abhängigkeit von der Renormierungsskala  $\mu$  (vgl. Abschnitt 3.6.4 und [9]). Wir überprüfen nun, ob sich dies auch in den numerischen Resultaten wiederfindet.

Dazu betrachten wir in Abbildung 5.11 erneut die rote Kurve aus Abbildung 5.9. Innerhalb von DM@NLO wird  $\mu = \sqrt{s}$  als Renormierungsskala verwendet. Um die Abhängigkeit von dieser Skala zu analysieren, tragen wir zusätzlich die Graphen für  $\mu = 2\sqrt{s}$  (gepunktete Linie) und  $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{s}$  (gestrichelte Linie) auf. Zusätzlich ist in schwarz die Differenz dieser beiden Kurven zu sehen, d. h.  $\frac{\sigma(2\sqrt{s}) - \sigma(\frac{1}{2}\sqrt{s})}{\sigma_{\text{LO}}}$ . Die zuletzt genannte Kurve bezieht sich auf die rechte vertikale Achse.

Die gepunktete und gestrichelte Linie liegen ober- bzw. unterhalb der durchgezogenen Linie liegen. Die schwarze Kurve zeigt, dass die Differenz der beiden Kurven in Relation zu  $\sigma_{\text{LO}}$  auch im Bereich von großen  $\tan \beta$  etwas mehr als 1,5 Prozentpunkte beträgt.

Völlig analog ist in Abbildung 5.12 die cyanfarbene Kurve aus Abbildung 5.9 dargestellt. Wir erinnern uns daran, dass der Unterschied dieser Kurve gegenüber der roten in der Berücksichtigung von  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  besteht. Erneut bilden die gepunktete und gestrichelte Kurve ein Band um die durchgezogene Linie. Dieses fällt jedoch im Bereich von großen  $\tan \beta$  deutlich schmäler aus als zuvor, was sich auch im Verlauf der zugehörigen schwarzen Kurve widerspiegelt. Die Differenz der beiden Kurven fällt in diesem Fall auf etwas mehr als einen halben Prozentpunkt ab.

Das bedeutet, dass sich die Skalenabhängigkeit im Bereich von großen  $\tan \beta$  durch die Berücksichtigung von  $\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  mehr als halbiert hat. Dies entspricht der Vorhersage von [9] und deutet darauf hin, dass die Methoden zur Berechnung von

$\Delta m_b^{\text{QCD(II)}}$  und  $\Delta m_b^{\text{els(II)}}$  korrekt implementiert wurden. Auf eine ausführlichere Diskussion der Skalenabhängigkeit wird an dieser Stelle verzichtet, da sich eine solche in [9] findet.

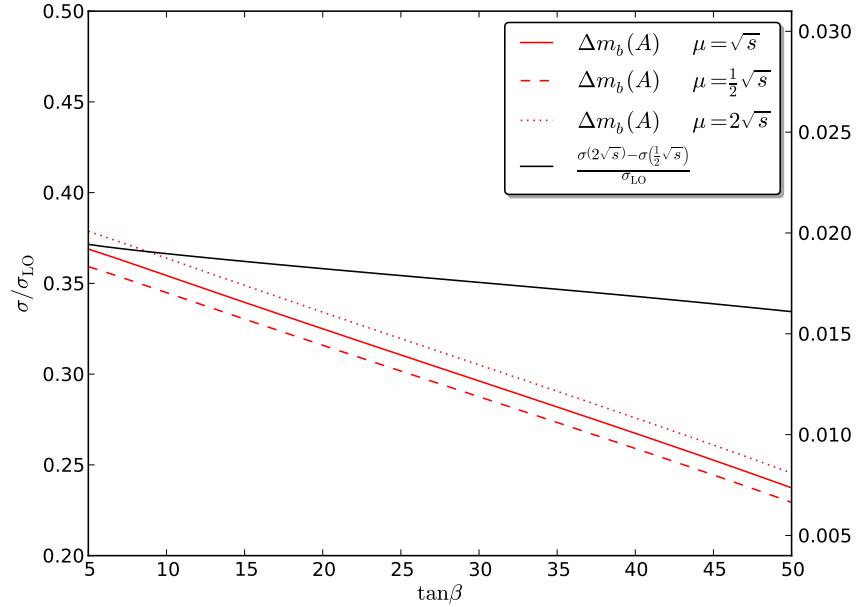


Abbildung 5.11.: Skalenabhängigkeit von  $\Delta m_b(A)$

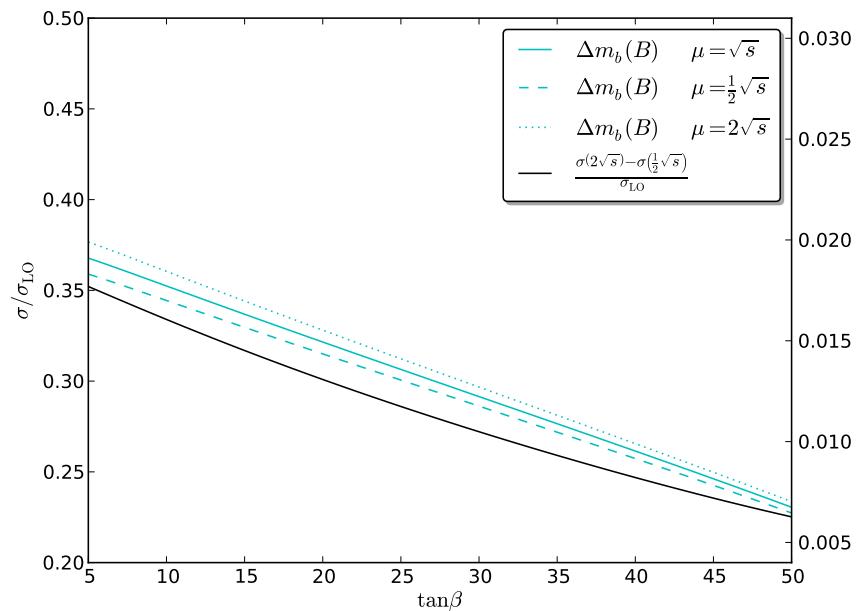


Abbildung 5.12.: Skalenabhängigkeit von  $\Delta m_b(B)$

### 5.3. Einfluss der Resummation auf die Reliktdichte

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, inwieweit präziser bestimmte Wirkungsquerschnitte die resultierende Reliktdichte beeinflussen. Dazu wird die Reliktdichte der Neutralinos mithilfe von DM@NLO bzw. micrOMEGAs berechnet (vgl. Kapitel 4). Dabei wird die Boltzmann-Gleichung gelöst wird, welche alle Annihilations- und Ko-Annihilationsprozesse von Neutralinos berücksichtigt (vgl. Abschnitt 2.4). Die zugehörigen Wirkungsquerschnitte werden mithilfe von CalcHEP berechnet – mit Ausnahme der Wirkungsquerschnitte für den dominanten Endzustand  $b\bar{b}$ . Für diesen werden die Wirkungsquerschnitte von DM@NLO verwendet. Anders als zuvor wird dabei nicht nur der Prozess  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  betrachtet, sondern alle Beiträge zu  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow b\bar{b}$ . Innerhalb von DM@NLO existieren für all diese Prozesse vollständige Einschleifenrechnungen. Zusätzlich wird in diesem Programm die in Abschnitt 3.6 vorgestellte Resummation ganz analog für die übrigen neutralen Higgs-Bosonen  $h^0$  und  $H^0$  genutzt.

Im Folgenden werden diese Wirkungsquerschnitte ähnlich wie in Kapitel 5.2.2 und Abbildung 5.9 in mehreren Varianten berechnet und die resultierenden Reliktdichten miteinander verglichen. Hierbei werden aus Gründen der Übersichtlichkeit allerdings weniger Varianten als zuvor betrachtet.

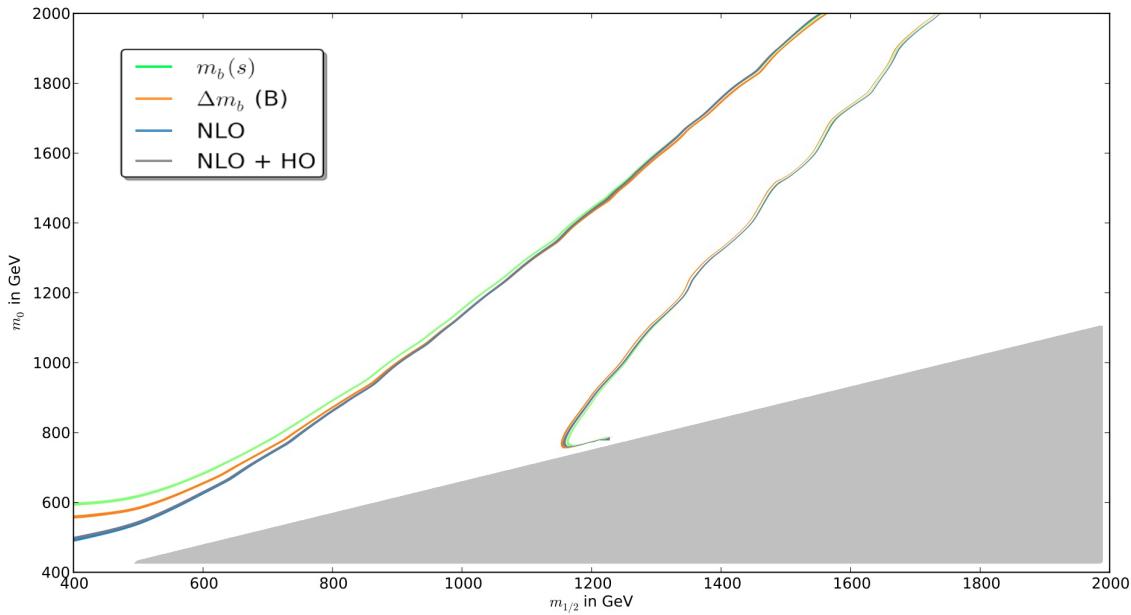


Abbildung 5.13.: Resultierende Reliktdichte im Higgs-Funnel für verschiedene Wirkungsquerschnitte

In Abbildung 5.13 ist die Reliktdichte in Abhängigkeit von  $m_0$  und  $m_{1/2}$  zu sehen. Die weiteren Eingangsparameter sind  $\tan \beta = 53$ ,  $\text{sgn } \mu = +1$  und  $A_0 = 0$ . Wie schon in Abschnitt 3.1 führt der graue Bereich zu einem geladenen LSP, welches nicht als Kandidat für die dunkle Materie in Frage kommt. Die dünnen farbigen Linien entsprechen Bereichen, die kompatibel mit den aktuellen Daten von WMAP sind, also im sehr engen Intervall

$$\Omega_{\text{DM}} h^2 = 0,1157 \pm 0,0023 \quad (5.4)$$

liegen (vgl. [16]). In obiger Darstellung liegen die vier verschiedenen Linien alle sehr nah beieinander. Deshalb ist mit Abbildung 5.14 eine Detailansicht eines ausgewählten Bereichs des Parameterraums gegeben.

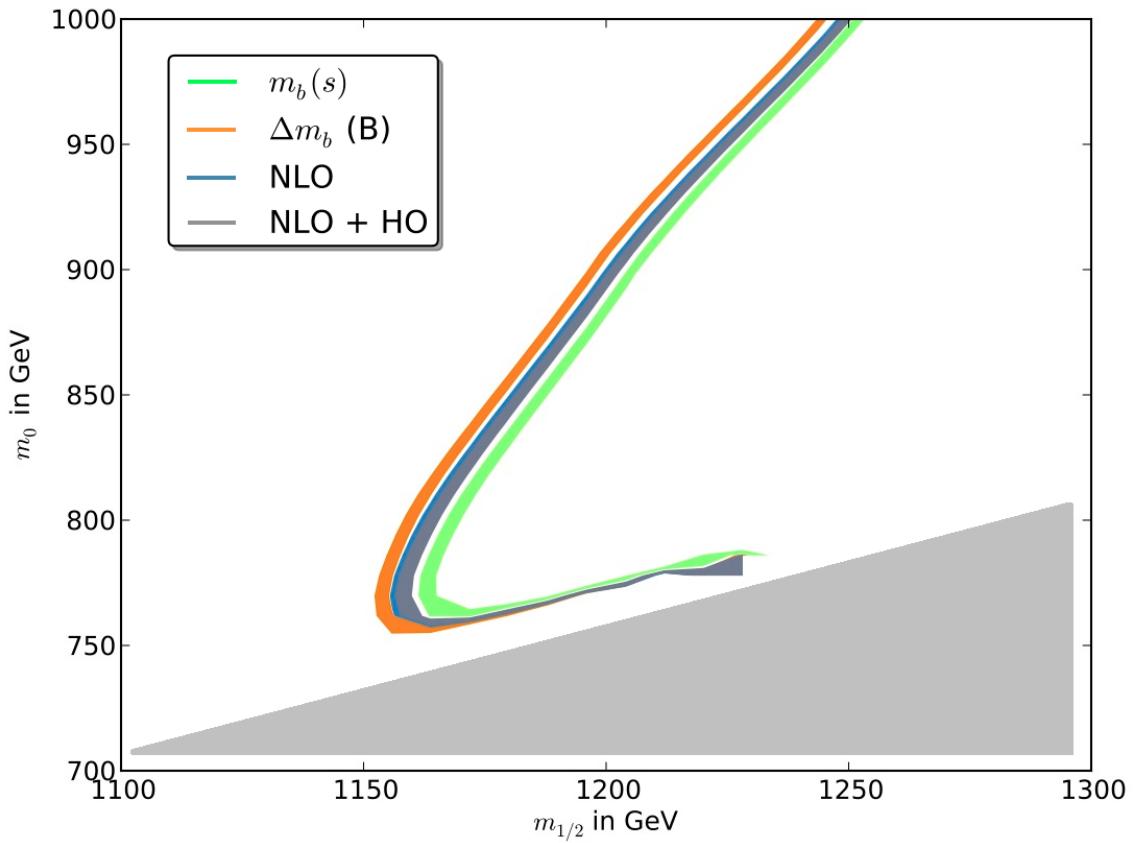


Abbildung 5.14.: Detailansicht aus Abbildung 5.13

Für die grüne Linie wurden die Wirkungsquerschnitte von DM@NLO auf effektivem Baumniveau berechnet. Konkret wurde dabei die laufende Masse  $m_b(s)$  gemäß (3.103) verwendet. Diese Linie entspricht gewissermaßen der blauen Linie in Abbildung 5.9.

Im Falle der orangefarbenen Linie wurden zusätzlich die endlichen QCD-Beiträge mittels  $\delta_{\text{QCD}}$  sowie die Resummation in  $\Delta m_b$  berücksichtigt. Diese Linie korrespondiert daher mit der cyanfarbenen Linie in Abbildung 5.9. Wie bereits erwähnt, führt die Resummation in  $\Delta m_b$  bei positivem  $\mu$  und großem  $\tan \beta$  zu einer Verringerung des Wirkungsquerschnittes (vgl. Abschnitt 5.2.2 und Abbildung 5.10). Entsprechend der Boltzmann-Gleichung führt ein niedrigerer Wirkungsquerschnitt zu einer höheren Reliktdichte (vgl. Abschnitt 2.4 und (2.30)).

Diese Tatsache findet sich auch in der resultierenden Reliktdichte in Abbildung 5.13 wieder. Die grüne Kurve umschließt die orangefarbene Kurve, die sich weiter im Inneren des Peaks befindet. Wenn wir bedenken, dass sich die Reliktdichte bei festem Wirkungsquerschnitt in diese Richtung verringert (vgl. Abbildung 3.1), ergibt sich ein stimmiges Bild. Aufgrund der niedrigeren Wirkungsquerschnitte für den Endzustand  $b\bar{b}$  hat sich die Reliktdichte im Falle der orangefarbenen Kurve insgesamt erhöht. Der mit den Messdaten verträgliche Bereich für die Reliktdichte verschiebt sich daher in das Innere des Peaks.

In Abbildung 5.14 ist deutlich zu erkennen, dass sich die beiden Linien unterscheiden. Das bestätigt, dass die Reliktdichte in diesem Bereich des Parameterraums sensitiv von den Wirkungsquerschnitten des Prozesses  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow b\bar{b}$  abhängt – schließlich wurden alle anderen Prozesse im Falle der grünen und orangefarbenen Linie auf die gleiche Art bestimmt. Da die beiden Kurven nicht überlappen und daher zu unterschiedlichen experimentellen Vorhersagen führen, lässt sich somit konstatieren, dass eine präzise Bestimmung der Wirkungsquerschnitte für den Endzustand  $b\bar{b}$  phänomenologische Relevanz besitzt.

Es verbleibt die Diskussion der blauen und grauen Kurve. In Bezug auf Abbildung 5.9 entsprechen diese der violetten bzw. gelben Linie. Im ersten Fall wurden die Wirkungsquerschnitte mittels einer vollständigen Einschleifenrechnung bestimmt, im zweiten Fall wurden zusätzlich die Korrekturen höherer Ordnung über  $\delta_{\text{QCD}}$  und  $\Delta m_b$  berücksichtigt. Diese beiden Linien überlagern sich im gesamten Parameterraum. Das entspricht der Erwartung, da diese Korrekturen vergleichsweise gering sind. In Abbildung 5.14 lässt sich erkennen, dass die graue und blaue Kurve zwischen der grünen und orangefarbenen Linie liegen und diese nicht berühren.

Die relative Lage der Kurven variiert in verschiedenen Bereichen des Parameterraums, was an dieser Stelle jedoch nicht weiter kommentiert werden soll. Um diesen Effekt genauer zu verstehen, wäre zunächst eine genauere Analyse aller Einschleifenkorrekturen (und nicht nur der für den Prozess  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$ ) nötig.

Wesentlich ist vielmehr, dass diese Kurven wiederum zu einer anderen experimentellen Vorhersage führen. Das bedeutet, dass die Rechnung auf effektivem Baumniveau die Einschleifenkorrekturen nicht immer mit ausreichender Präzision approximiert. Diese Beobachtung entspricht genau der bereits in Abschnitt 4 dargelegten Motivation für das Projekt DM@NLO.

## 6. Fazit

In dieser Arbeit wurde der Wirkungsquerschnitt des Prozesses  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow A^0 \rightarrow b\bar{b}$  inklusive aller Einschleifenkorrekturen der starken Wechselwirkung bestimmt. Zusätzlich wurden via  $\delta_{QCD}$  und  $\Delta m_b$  Korrekturen höherer Ordnung berücksichtigt. Darin eingeschlossen sind insbesondere auch elektroschwache Korrekturen, die aufgrund der Yukawa-Kopplung des Top-Quarks in derselben Größenordnung liegen können, wie typische Korrekturen der starken Wechselwirkung.

Die Motivation für die präzise Bestimmung dieses Prozesses liegt darin begründet, dass jener im Higgs-Funnel den dominanten Zerfallskanal von Neutralinos bildet. Das leichteste Neutralino ist ein potentieller Kandidat für die dunkle Materie. Unter Vorgabe der zugehörigen Annihilations- und Ko-Annihilationswirkungsquerschnitte kann mithilfe der Boltzmann-Gleichung die Reliktdichte eines solchen Kandidaten bestimmt und mit den experimentellen Daten von z. B. WMAP verglichen werden.

In der numerischen Untersuchung mithilfe von DM@NLO wurde in einem ersten Schritt das Verhalten und die Zusammensetzung von  $\Delta m_b$  untersucht. Dabei wurde bestätigt, dass  $\Delta m_b^{QCD(I)}$  die dominierende Komponente dieser Größe ist. Nichtsdestotrotz beeinflussen die Größen  $\Delta m_b^{els(I)}$  und  $\Delta m_b^{QCD(II)}$   $\Delta m_b$  im Rahmen von ca. 27 % bzw. 10 %, was als nicht vernachlässigbar zu bezeichnen ist. Dadurch wurde bestätigt, dass in diesem Kontext neben den starken auch ausgewählte elektroschwache Korrekturen relevant sind.

Nach einem erfolgreichen Abgleich des Programms mit CalcHEP und DarkSUSY auf Baumniveau, wurde der Einfluss der Strahlungskorrekturen und der Resummation auf den Wirkungsquerschnitt detailliert analysiert. Dabei wurde erneut deutlich, dass die supersymmetrischen Beiträge insbesondere im Bereich von großen  $\tan\beta$  wichtig sind, wo sie den Wirkungsquerschnitt merklich verringern. Diese Effekte werden im betrachteten Szenario durch eine Rechnung auf effektivem Baumniveau, d. h. unter Berücksichtigung von der Resummation in  $\delta_{QCD}$  und  $\Delta m_b$  sowie der laufenden Masse  $m_b(s)$ , gut approximiert. Die Abweichung gegenüber einer vollständigen Einschleifenrechnung ist vergleichsweise gering. Insbesondere zeigte sich in diesem Fall, dass die Kurve der mit DM@NLO maximal möglichen Präzision im Bereich von großen  $\tan\beta$  gerade dann gut approximiert wird, wenn neben  $\Delta m_b^{QCD(I)}$  und  $\Delta m_b^{els(I)}$  auch die Zweischleifen-Beiträge von  $\Delta m_b^{QCD(II)}$  und  $\Delta m_b^{els(II)}$  berücksichtigt werden.

Es konnte bestätigt werden, dass sich die Abhängigkeit von der Renormierungsskala  $\mu$  verringert, wenn zusätzlich die zuletzt genannten Zweischleifenbeiträge in die Resummation eingebunden werden. Diese Abhängigkeit ist ein Maß für die theoretische Unsicherheit. Die nachgewiesene geringere Abhängigkeit entspricht der in [9] getroffenen Aussagen und deutet an, dass die zugehörigen Methoden in DM@NLO korrekt implementiert wurden.

Abschließend wurde der Einfluss der präziseren Wirkungsquerschnitte auf die Reliktdichte untersucht. Dabei konnte gezeigt werden, dass sich die mit den Daten von WMAP verträglichen Bereiche in der  $m_0$ - $m_{1/2}$ -Ebene verschieben, wenn sich die Wirkungsquerschnitte für den Endzustand  $b\bar{b}$  durch die Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen und Resummationseffekten ändern. Das bestätigt einerseits, dass dieser Endzustand im

betrachteten Parameterbereich dominant ist. Da die genannte Verschiebung der Reliktdichte größer als gegenwärtige experimentelle Unsicherheit ist, lässt sich weiterhin festhalten, dass eine präzise Bestimmung der Wirkungsquerschnitte für den Endzustand  $b\bar{b}$  phänomenologische Relevanz besitzt.

Zusätzlich konnte beobachtet werden, dass die Rechnung auf effektivem Baumniveau im Vergleich zu einer vollständigen Einschleifenrechnung nicht in allen Teilen des Parameterraums zur gleichen Reliktdichte führt. Diese Tatsache entspricht der ursprünglichen Motivation für das Projekt DM@NLO und illustriert die Notwendigkeit von Präzisionsrechnungen im Kontext von dunkler Materie.

# A. Verwendete Konventionen

## A.1. Einheitensystem

Wie in der theoretischen Teilchenphysik üblich, wird auch in dieser Arbeit mit *natürlichen Einheiten* gearbeitet. Das bedeutet, dass das reduzierte plancksche Wirkungsquantum  $\hbar$ , die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c$  und die Boltzmann-Konstante  $k_B$  auf 1 gesetzt bzw. in den Rechnungen nicht mitgeschrieben werden.

Um ein Resultat vom natürlichen in ein anderes Einheitensystem umzuwandeln, muss so lange mit einer Kombination dieser Konstanten multipliziert oder dividiert werden, bis die Einheit der gewünschten entspricht. Diese Umrechnung ist eindeutig. Einige Beispiele finden sich in Tabelle A.1.

Tabelle A.1.: Zur Umrechnung von natürlichen Einheiten

Größe	Natürliche Einheit	Reale Einheit
Energie	eV	eV
Zeit	$1/\text{eV}$	$\hbar/\text{eV}$
Länge	$1/\text{eV}$	$\hbar c/\text{eV}$
Masse	eV	$\text{eV}/c^2$
Temperatur	eV	$\text{eV}/k_B$

Konkrete Zahlenwerte der Naturkonstanten können [69] entnommen werden.

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s.} \quad (\text{A.1})$$

$$\hbar = 1,054571726 \cdot 10^{-34} \text{ J s.} \quad (\text{A.2})$$

$$k_B = 1,3806488 \cdot 10^{-23} \text{ J/K.} \quad (\text{A.3})$$

## A.2. Zur Notation

In der vorliegenden Arbeit wird die *einsteinische Summenkonvention* verwendet. Diese besagt, dass über doppelt auftretende Indices automatisch summiert und das Summationszeichen weggelassen wird. Als Beispiel ist das Produkt von zwei  $n \times n$ -Matrizen  $A$  und  $B$  angegeben.

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = A_{ik} B_{kj}. \quad (\text{A.4})$$

Des Weiteren wird die *Slash-Notation* benutzt. Mithilfe dieser von Richard Feynman eingeführten Schreibweise lassen sich Kontraktionen von Vierervektoren mit einem Vektor

aus Dirac-Matrizen besonders kompakt darstellen. Es gilt

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu. \quad (\text{A.5})$$

### A.3. Kinematische Variablen

Alle in dieser Arbeit auftretenden Feynman-Diagramme sind in derselben Art beschriftet, welche an dieser Stelle näher erläutert wird. Die Diagramme sind von links nach rechts zu lesen. Teilchen im Anfangszustand werden  $a, b, c$  usw. genannt.  $p_a, p_b, p_c$  etc. sind die zugehörigen Viererimpulse. Analog werden die Teilchen im Endzustand als 1, 2, 3 usw. und ihre Viererimpulse mit  $p_1, p_2, p_3$  etc. bezeichnet. Viererimpulse sind als

$$p_i = (E_i, \vec{p}_i) \quad (\text{A.6})$$

aufzufassen. Dabei bezeichnet  $E_i$  die Energie des jeweiligen Teilchens. Dreierimpulse  $\vec{p}_i$  werden in dieser Arbeit stets durch einen Vektorpfeil gekennzeichnet. Die Spinvariablen der Teilchen werden in der Regel nicht explizit mitgeführt.

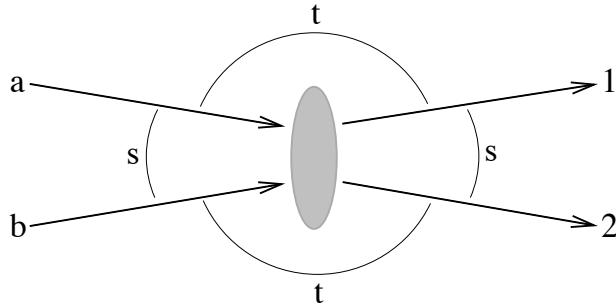


Abbildung A.1.: Kinematik eines  $2 \rightarrow 2$  Prozesses

Im Falle eines  $2 \rightarrow 2$  Prozesses, wie er in Abbildung A.1 (Quelle: [8]) zu sehen ist, lassen sich zusätzlich die *Mandelstam-Variablen*  $s, t$  und  $u$  einführen:

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_1 + p_2)^2. \quad (\text{A.7})$$

$$t = (p_a - p_1)^2 = (p_b - p_2)^2. \quad (\text{A.8})$$

$$u = (p_a - p_2)^2 = (p_b - p_1)^2. \quad (\text{A.9})$$

Aufgrund der Energie- und Impulserhaltung

$$p_a + p_b = p_1 + p_2 \quad (\text{A.10})$$

sind die Mandelstam-Variablen über

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + m_2^2 \quad (\text{A.11})$$

miteinander verknüpft.

# B. Technisches zur Berechnung von Strahlungskorrekturen

An dieser Stelle sollen einzelne technische Feinheiten, die bei der Berechnung von Strahlungskorrekturen auftreten, erläutert und die dazu benötigten Formeln aufgeführt werden.

## B.1. Dirac-Algebra

Bei der Auswertung der invarianten Amplitude eines gegebenen Feynman-Diagramms treten oftmals Produkte von und Spuren über *Dirac-Matrizen* auf. Diese Terme gehen auf die vorkommenden Vertices und Fermionpropagatoren zurück. Im Folgenden werden die wesentlichen Eigenschaften der Dirac-Matrizen sowie Formeln, die zur Auswertung dieser Terme hilfreich sind, aufgelistet.

### B.1.1. Dirac-Algebra in vier Dimensionen

Die Dirac- oder Gamma-Matrizen sind  $4 \times 4$ -Matrizen, welche über den Antikommutator

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad (\text{B.1})$$

definiert sind. Dabei ist  $g^{\mu\nu}$  der metrische Tensor in vier Dimensionen und  $\mathbb{1}$  die vierdimensionale Einheitsmatrix.

Normalisiert man die Dirac-Matrizen mittels

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad \text{und} \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.2})$$

und definiert die fünfte Gamma-Matrix als

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{B.3})$$

so lassen sich die untenstehenden Gleichungen herleiten (vgl. z. B. [70]):

**Eigenschaften von  $\gamma^5$**

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{B.4})$$

**Spurtheoreme**

$$\text{Spur}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}. \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Spur}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Spur}(\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \dots}_{2n+1}) = 0 \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.7})$$

### Kontraktionsidentitäten

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{1}. \quad (\text{B.8})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu. \quad (\text{B.9})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \mathbb{1}. \quad (\text{B.10})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \quad (\text{B.11})$$

#### B.1.2. Dirac-Algebra in $D$ Dimensionen

Im Rahmen der dimensionalen Regularisierung wird der Phasenraum  $D$ -dimensional, wodurch sich auch die Gestalt der Dirac-Matrizen verändert. In geradzahligen Dimensionen  $D$  besitzen diese die Dimension  $2^{D/2}$ . Die definierende Algebra bleibt jedoch unverändert. Es gilt weiterhin

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}, \quad (\text{B.12})$$

wobei  $g^{\mu\nu}$  nun den metrischen Tensor in  $D$  Dimensionen beschreibt. Die Dimension der Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$  entspricht der der Dirac-Matrizen.

Interessanterweise gelten die in Kapitel B.1.1 aufgeführten Spurtheoreme völlig analog, da es in diesem Kontext möglich ist, weiterhin

$$\text{Spur}(\mathbb{1}) = 4 \quad (\text{B.13})$$

zu fordern (vgl. [71] und [72]). Eine triviale Verallgemeinerung der fünften Gamma-Matrix mit den Eigenschaften aus (B.4) auf  $D$  Dimensionen ist allerdings nicht möglich (vgl. [72]). Die in Abschnitt B.1.1 aufgeführten Kontraktionsidentitäten verallgemeinern sich wie folgt:

### Kontraktionsidentitäten

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = D\mathbb{1}. \quad (\text{B.14})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = (2 - D)\gamma^\nu. \quad (\text{B.15})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \mathbb{1} + (D - 4)\gamma^\nu \gamma^\rho. \quad (\text{B.16})$$

## B.2. Passarino-Veltman-Integrale

Bei der Berechnung von Schleifen wird über innere Impulsfreiheitsgrade integriert. Die dabei auftretenden Divergenzen lassen sich z. B. mithilfe der *dimensionalen Regularisierung* isolieren. In diesem Kontext stößt man auf die generischen *Passarino-Veltman-* oder *N-Punkt-Integrale*, welche in diesem Abschnitt präsentiert werden. Die hier verwendeten Konventionen entsprechen denen der empfehlenswerten Einführung in die Thematik [73].

### B.2.1. Skalare Passarino-Veltman-Integrale

Die ersten drei skalaren Passarino-Veltman-Integrale lauten

$$A_0 = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (\text{B.17})$$

$$B_0 = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)((q + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)((q + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon)} \\ &\times \frac{1}{((q + p_2)^2 - m_2^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Dabei ist  $\mu$  eine beliebige Referenzmasse und  $\epsilon$  ein infinitesimaler Parameter zur Umgehung der Pole.  $q$  ist der freie Schleifenimpuls. Man bezeichnet  $A_0$ ,  $B_0$  und  $C_0$  auch als Ein-, Zwei- und Dreipunktfunktionen. Beziiglich der Argumente dieser Funktionen existieren verschiedene Schreibweisen. So findet man in der Literatur beispielsweise die Varianten

$$A_0 = A_0(m) = A_0(m^2). \quad (\text{B.20})$$

$$B_0 = B_0(p_1, m_0, m_1) = B_0(p_1^2, m_0, m_1) = B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2). \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} C_0 &= C_0(p_1, p_2, m_0, m_1, m_2) = C_0(p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2, m_0, m_1, m_2) \\ &= C_0(p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Die Zwei- und Dreipunktfunktionen sind symmetrisch unter jeweils zyklischer Permutation der Impulse und Massen. Es gilt

$$B_0(p_1^2, m_0, m_1) = B_0(p_1^2, m_1, m_0). \quad (\text{B.23})$$

$$C_0(p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2, m_0, m_1, m_2) = C_0((p_1 - p_2)^2, p_2^2, p_1^2, m_1, m_2, m_0). \quad (\text{B.24})$$

Mithilfe einiger geeigneter Substitutionen, der Einführung von *Feynman-Parametern*

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx (a(1-x) + bx)^{-2} \quad (\text{B.25})$$

und

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (a(1-x-y) + bx + cy)^{-3} \quad (\text{B.26})$$

sowie der  $\Gamma$ -Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{x-1} \quad (\text{B.27})$$

lassen sich die skalaren Passarino-Veltman-Integrale weiter auswerten (vgl. [73] und [74]). Letztlich zeigt sich, dass wir  $A_0$  und  $B_0$  als

$$A_0(m) = m^2 \left( \Delta - \ln \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) + 1 \right) + \mathcal{O}(D-4) \quad \text{und} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} B_0(p_1^2, m_0, m_1) &= \Delta - \int_0^1 dx \ln \left( \frac{x^2 p_1^2 - x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) + m_0^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right) \\ &+ \mathcal{O}(D-4) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

schreiben können.

Der deutlich längere analytische Ausdruck für  $C_0$  kann in [74] gefunden werden. Dieser enthält neben gewöhnlichen Logarithmen sogenannte *eulersche Dilogarithmen*. Der eulersche Dilogarithmus ist auch als *Spence-Funktion* bekannt und über

$$\text{Li}_2(z) = \text{Sp}(z) = - \int_0^1 \frac{dt}{t} \ln(1 - zt) = - \int_0^z \frac{dt}{t} \ln(1 - t) \quad (\text{B.30})$$

definiert. Alternativ lässt sich auch die Schreibweise als Reihe

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad (\text{B.31})$$

verwenden.

In (B.28) und (B.29) wird der divergente Faktor

$$\Delta = \frac{2}{4 - D} - \gamma_E + \ln(4\pi) \quad (\text{B.32})$$

eingeführt. Darin bezeichnet

$$\gamma_E = - \left. \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x} \right|_{x=1} \approx 0,57721 \quad (\text{B.33})$$

die *Euler-Mascheroni-Konstante*.

### B.2.2. Zusammenhang zwischen Zweipunkt-, Dreipunkt- und Dreiecksfunktion

Im Kontext der Resummation wird in dieser Arbeit die Identität

$$I(m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \frac{B_0(0, m_1, m_3) - B_0(0, m_2, m_3)}{m_1^2 - m_2^2} \quad (\text{B.34})$$

mit der *Dreiecksfunktion*

$$I(a, b, c) = \frac{ab \ln(\frac{a}{b}) + bc \ln(\frac{b}{c}) + ac \ln(\frac{c}{a})}{(a - b)(b - c)(c - a)}, \quad (\text{B.35})$$

die per definitionem negativ ist, genutzt. Obige Identität soll im Folgenden kurz nachgerechnet werden.

Zunächst verwenden wir (B.29) für den Fall  $p_1^2 = 0$  und erhalten

$$\begin{aligned} B_0(0, m_1, m_3) &= \Delta - \int_0^1 dx \ln \left( \frac{x(m_3^2 - m_1^2) + m_1^2}{\mu^2} \right) \\ &= \Delta + 1 - \frac{1}{m_3^2 - m_1^2} \left( m_3^2 \ln \left( \frac{m_3^2}{\mu^2} \right) - m_1^2 \ln \left( \frac{m_1^2}{\mu^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Nach Subtraktion von  $B_0(0, m_2, m_3)$  eliminieren sich die konstanten und von  $\mu$  abhängigen Terme. Wir gelangen nach ein wenig Algebra zu

$$\begin{aligned} &B_0(0, m_1, m_3) - B_0(0, m_2, m_3) \\ &= \frac{m_1^2 m_2^2 \ln \left( \frac{m_2^2}{m_1^2} \right) + m_1^2 m_3^2 \ln \left( \frac{m_3^2}{m_1^2} \right) + m_2^2 m_3^2 \ln \left( \frac{m_2^2}{m_3^2} \right)}{(m_2^2 - m_3^2)(m_3^2 - m_1^2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Beidseitige Multiplikation mit  $1/(m_1^2 - m_2^2)$  liefert das gewünschte Resultat.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass sich auch die Dreipunktfunktion in einem Spezialfall auf die Dreiecksfunktion zurückführen lässt, was sich mithilfe der bisherigen Ergebnisse leicht zeigen lässt. Aus den Definitionen der Zwei- und Dreipunktfunktion (B.18) sowie (B.19) folgt unmittelbar

$$C_0(0, 0, 0, m_1, m_2, m_3) = \frac{B_0(0, m_1, m_3) - B_0(0, m_2, m_3)}{m_1^2 - m_2^2}, \quad (\text{B.38})$$

woraus wir mit der bereits bewiesenen Identität (B.34)

$$C_0(0, 0, 0, m_1, m_2, m_3) = I(m_1^2, m_2^2, m_3^2) \quad (\text{B.39})$$

folgern können.

### B.2.3. Tensorielle Passarino-Veltman-Integrale

Beispiele für tensorielle Passarino-Veltman-Integrale sind

$$B^\mu = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{q^\mu}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)((q+p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{B.40})$$

$$B^{\mu\nu} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)((q+p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{B.41})$$

$$\begin{aligned} C^\mu &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{q^\mu}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)((q+p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon)} \\ &\times \frac{1}{((q+p_2)^2 - m_2^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu} &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)((q+p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon)} \\ &\times \frac{1}{((q+p_2)^2 - m_2^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

Im Vergleich zu den skalaren Passarino-Veltman-Integralen taucht der Schleifenimpuls  $q$  hier als Vierervektor im Zähler auf. Bei der Lösung dieser Tensorintegrale macht man sich die *Kovariantenzerlegung* zunutze, d. h. man drückt das Ergebnis zunächst o. B. d. A. als Linearkombination aller zur Verfügung stehenden Kovarianten aus.

$$B^\mu = p_1^\mu B_1. \quad (\text{B.44})$$

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} B_{00} + p_1^\mu p_1^\nu B_{11}. \quad (\text{B.45})$$

$$C^\mu = p_1^\mu C_1 + p_2^\mu C_2. \quad (\text{B.46})$$

$$C^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} C_{00} + p_1^\mu p_1^\nu C_{11} + (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu) C_{12} + p_2^\mu p_2^\nu C_{22}. \quad (\text{B.47})$$

Die obigen Ansätze sind symmetrisch unter Vertauschung von  $\mu$  und  $\nu$ . Die darin auftretenden Koeffizienten bzw. skalaren Integrale  $B_1$ ,  $B_{00}$ ,  $B_{11}$  etc. müssen noch bestimmt werden. Dazu führt man eine *Tensorreduktion* durch. Hierbei multipliziert man die Ausdrücke (B.44) bis (B.47) sukzessive mit den äußeren Impulsen und der Metrik. Durch geschicktes Erweitern lässt sich der Zähler des jeweiligen Integranden dann in eine Summe von skalaren Passarino-Veltman-Integralen wie in Kapitel B.2.1 zerlegen. Letztendlich

erhält man somit ein lineares Gleichungssystem, welches die Tensorkoeffizienten aus (B.44) bis (B.47) mit den skalaren Passarino-Veltman-Integralen (B.17) bis (B.19) verknüpft. Für die Koeffizienten  $B_1$ ,  $B_{00}$  und  $B_{11}$  ergibt sich beispielsweise

$$B_1 = \frac{1}{2p_1^2} (A_0(m_0) - A_0(m_1) - (p_1^2 - m_1^2 + m_0^2)B_0). \quad (\text{B.48})$$

$$B_{00} = \frac{1}{2(D-1)} (A_0(m_1) + 2m_0^2B_0 + (p_1^2 - m_1^2 + m_0^2)B_1). \quad (\text{B.49})$$

$$B_{11} = \frac{1}{2(D-1)p_1^2} ((D-2)A_0(m_1) - 2m_0^2B_0 - D(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2)B_1). \quad (\text{B.50})$$

Näheres zur hier lediglich qualitativ beschriebenen Methode der Tensorreduktion sowie die entsprechenden Ausdrücke für die verbliebenen Koeffizienten aus (B.46) und (B.47) finden sich in [73] und [75].

#### B.2.4. Ultraviolettes Verhalten

Berechnet man Strahlungskorrekturen zu einem gegebenen Prozess, so muss das Ergebnis endlich sein. Insbesondere darf das Resultat bereits nach der Regularisierung und anschließender Renormierung aller virtuellen Korrekturen keine Divergenzen im ultravioletten Bereich mehr besitzen. Um das zu kontrollieren, ist es hilfreich, das UV-Verhalten der skalaren Passarino-Veltman-Integrale sowie der damit verbundenen Tensorkoeffizienten zu kennen. Dieses ist in Tabelle B.1 für die gebräuchlichsten skalaren Integrale und Tensorkoeffizienten zusammengefasst.

Tabelle B.1.: UV-Verhalten von einigen skalaren Integralen und Tensorkoeffizienten

Skalares Integral bzw. Tensorkoeffizient	UV-Verhalten
$A_0, B_0, B_1, B_{00}$ und $B_{11}$	Divergent
$\dot{B}_0, \dot{B}_1, C_0, C_1$ und $C_2$	Konvergent

Unter  $\dot{B}_i$  wird hier

$$\dot{B}_i = \left. \frac{\partial B_i}{\partial p^2} \right|_{p_1^2=m^2} \quad \text{mit } i = 0, 1 \quad (\text{B.51})$$

verstanden. Abschließend sollen die UV-Divergenzen der skalaren Größen aus Tabelle B.1 im Limes  $D \rightarrow 4$  spezifiziert werden. Diese lauten

$$(D-4)A_0 = -2m^2 + \mathcal{O}(D-4). \quad (\text{B.52})$$

$$(D-4)B_0 = -2 + \mathcal{O}(D-4). \quad (\text{B.53})$$

$$(D-4)B_1 = 1 + \mathcal{O}(D-4). \quad (\text{B.54})$$

$$(D-4)B_{00} = \frac{1}{6} (p_1^2 - 3(m_0^2 + m_1^2)) + \mathcal{O}(D-4). \quad (\text{B.55})$$

$$(D-4)B_{11} = -\frac{2}{3} + \mathcal{O}(D-4). \quad (\text{B.56})$$

Obige Ergebnisse werden in [73] und [74] hergeleitet.

## B.3. Phasenraumberechnungen

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen dem Amplitudenquadrat  $|\mathcal{M}|^2$  und dem Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  eines Prozesses hergestellt werden. Allgemein gilt

$$\int d\sigma = \frac{1}{F} \int |\mathcal{M}|^2 dPS^{(n)}. \quad (\text{B.57})$$

Hierin bezeichnet  $F$  den sogenannten *Flussfaktor*. Diese Größe kann als eine Normierung des einfallenden Teilchenstrahls aufgefasst werden (vgl. [24]). Da der Flussfaktor nur vom Anfangszustand eines Prozesses abhängt, ist dieser für  $2 \rightarrow 2$  und  $2 \rightarrow 3$  Prozesse identisch. Wenn  $E_a$  und  $E_b$  die Energien der Teilchen im Anfangszustand und  $v$  ihre relative Geschwindigkeit bezeichnen, lautet der Flussfaktor (vgl. [24])

$$F = 4E_a E_b v = 4\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}. \quad (\text{B.58})$$

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich bei den Teilchen  $a$  und  $b$  in der Regel um Neutralinos mit der Masse  $m_\chi$ . In diesem Fall kann der Flussfaktor weiter vereinfacht werden.

$$F = 4\sqrt{\frac{s^2}{4} - sm_\chi^2} = 2\sqrt{s(s - 4m_\chi^2)}. \quad (\text{B.59})$$

Falls man jedoch am Produkt von  $\sigma$  mit der Relativgeschwindigkeit  $v$  interessiert ist, empfiehlt es sich, den Flussfaktor in einer anderen Form zu verwenden. Dazu wechseln wir ins Schwerpunktsystem, welches über

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \quad (\text{B.60})$$

definiert ist. Wenn die eingehenden Teilchen dieselben Massen besitzen, können wir

$$E_a = E_b = \frac{\sqrt{s}}{2} \quad (\text{B.61})$$

folgern. Demnach lässt sich (B.58) als

$$F = sv \quad (\text{B.62})$$

schreiben.

Die Größe  $dPS^{(n)}$  in (B.57) bezeichnet das *Phasenraumelement* („Phase Space“) eines Endzustands mit  $n$  Teilchen. Durch diese Größe werden alle erlaubten Impuls- und Energieverteilungen berücksichtigt. Im Falle eines  $2 \rightarrow n$  Prozesses kann das Phasenraumelement generell als

$$dPS^{(n)} = \left( \prod_{k=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_k}{2E_k(2\pi)^3} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_a + p_b - \sum_{k=1}^n p_k \right) \quad (\text{B.63})$$

geschrieben werden. Darin garantiert die vierdimensionale *diracsche Delta-Distribution*

$$\delta^{(4)} \left( p_a + p_b - \sum_{k=1}^n p_k \right) \quad (\text{B.64})$$

die Energie- und Impulserhaltung.

### B.3.1. Zwei Teilchen im Endzustand

Die Auswertung von  $dPS^{(2)}$  ist Bestandteil zahlreicher Lehrbücher, weshalb an dieser Stelle lediglich das Ergebnis wiedergegeben wird. Eine detaillierte Herleitung findet sich beispielsweise in [24].

In dieser Arbeit handelt es sich bei den auslaufenden Teilchen 1 und 2 um ein  $b$ - und ein  $\bar{b}$ -Quark mit der gemeinsamen Masse  $m_b$ . In diesem Fall findet man im Schwerpunktsystem

$$dPS^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m_b^2}{s}} d\Omega. \quad (\text{B.65})$$

$\Omega$  bezeichnet den Raumwinkel in drei Dimensionen. Unter Berücksichtigung von (B.57) und (B.62) erhalten wir somit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2sv} |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m_b^2}{s}}. \quad (\text{B.66})$$

### B.3.2. Drei Teilchen im Endzustand

Bei der Berechnung von  $dPS^{(3)}$  stellt sich das Problem, dass gegenüber  $dPS^{(2)}$  über drei weitere Freiheitsgrade integriert wird, ohne dass eine zusätzliche diracsche Delta-Distribution zur Verfügung steht. Des Weiteren existieren zahlreiche Möglichkeiten, das Koordinatensystem des Endzustands zu definieren, was das Problem zumindest nicht vereinfacht. Die im Folgenden skizzierte Herleitung orientiert sich an [74].

Ausgangspunkt der Rechnung ist

$$\int dPS^{(3)} = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2 - p_3). \quad (\text{B.67})$$

Im ersten Schritt verwenden wir

$$\int \frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3} = \int d^4p_3 \delta(p_3^2 - m_3^2) \Theta(E_3). \quad (\text{B.68})$$

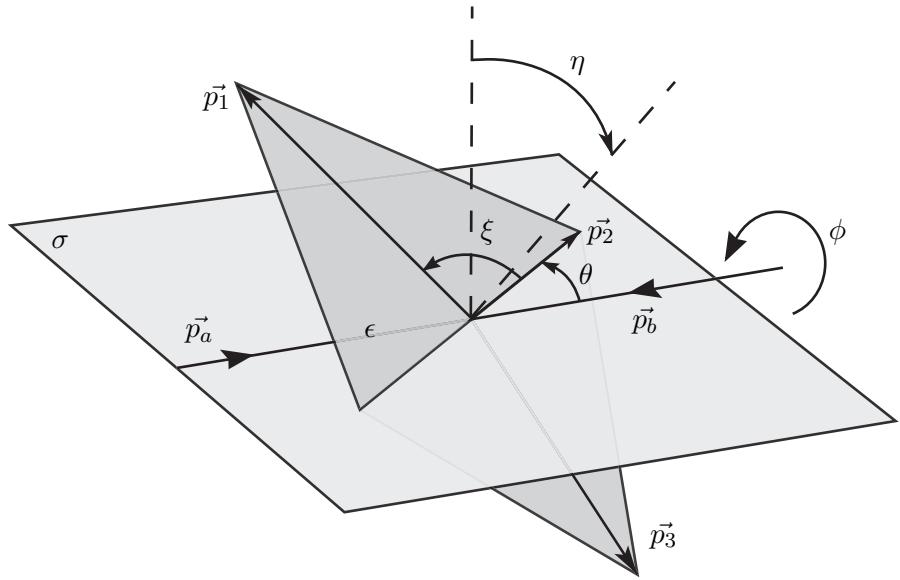
Dabei bezeichnet  $\Theta$  die *Heaviside*- oder *Stufenfunktion*. Sie sorgt dafür, dass nur physikalische Lösungen mit  $E_3 \geq 0$  berücksichtigt werden. In obiger Gleichung wird implizit die Relation

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n) \quad (\text{B.69})$$

genutzt, wobei  $f(x)$  eine differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen  $x_n$  ist. Ein Beweis findet sich beispielsweise in [76]. Nach dieser Ersetzung wird die Integration über  $d^4p_3$  in (B.67) ausgeführt und wir gelangen zu

$$\int dPS^{(3)} = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2(2\pi)^3} 2\pi \delta((p_a + p_b - p_1 - p_2)^2 - m_3^2). \quad (\text{B.70})$$

In (B.70) gibt es insgesamt noch sechs kinematische Freiheitsgrade, von denen einer durch die verbliebene Delta-Distribution fixiert wird. Diese Freiheitsgrade werden wir letztendlich durch vier Winkel und zwei Energien beschreiben. Dazu nutzen wir das in Abbildung B.1 (Quelle: [74]) dargestellte Koordinatensystem, welches wohl einiger Erläuterung bedarf.


 Abbildung B.1.: Kinematik eines  $2 \rightarrow 3$  Prozesses

Die Abbildung ist im Schwerpunktsystem zu lesen. In diesem liegen die eingehenden Dreierimpulse  $\vec{p}_a$  und  $\vec{p}_b$  auf einer Geraden. Die ausgehenden Dreierimpulse  $\vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_2$  und  $\vec{p}_3$  liegen in der Ebene  $\epsilon$ . Zusätzlich definieren die Vektoren  $\vec{p}_a$ ,  $\vec{p}_b$  und  $\vec{p}_2$  die Ebene  $\sigma$ . Der Vektor  $\vec{p}_2$  wird durch seinen Betrag und die Winkel  $\phi$  und  $\theta$  festgelegt.  $\phi$  entspricht dabei einer Rotation um die durch  $\vec{p}_a$  und  $\vec{p}_b$  definierte Gerade.  $\theta$  ist der Winkel zwischen  $-\vec{p}_b$  und  $\vec{p}_2$ . Ganz ähnlich bestimmen wir den Impuls  $\vec{p}_1$  durch seinen Betrag und die Winkel  $\eta$  und  $\xi$ . Dabei bezeichnet  $\eta$  den Winkel zwischen den Normalen der Ebenen  $\epsilon$  und  $\sigma$ . Diese sind in Abbildung B.1 gestrichelt eingezeichnet.  $\xi$  ist der Winkel zwischen  $\vec{p}_2$  und  $\vec{p}_1$ . Demnach gilt für die neu eingeführten Winkel

$$0 \leq \phi \leq 2\pi \quad \text{und} \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (\text{B.71})$$

$$0 \leq \eta \leq 2\pi \quad \text{und} \quad 0 \leq \xi \leq \pi. \quad (\text{B.72})$$

Letztlich ersetzen wir die Beträge der Impulse durch die Energien der Teilchen, wobei wir

$$E_i dE_i = |\vec{p}_i| d|\vec{p}_i| \quad \text{mit} \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.73})$$

nutzen. Dadurch gelangen wir zu

$$\int dPS^{(3)} = \int \frac{1}{8} \frac{1}{(2\pi)^5} dE_1 dE_2 d\eta d\phi d\cos\theta, \quad (\text{B.74})$$

wobei  $\cos\xi$  durch die Delta-Distribution in (B.70) fixiert ist:

$$\cos\xi = \frac{(\sqrt{s} - E_1 - E_2)^2 + m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - E_1^2 - E_2^2}{2\sqrt{E_1^2 - m_1^2}\sqrt{E_2^2 - m_2^2}}. \quad (\text{B.75})$$

Die Mandelstam-Variable  $s$  ist in diesem Fall als

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 \quad (\text{B.76})$$

zu verstehen.

Wir führen nun die reduzierten Koordinaten

$$x_i = \frac{2E_i}{\sqrt{s}} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.77})$$

ein. Aufgrund der Energieerhaltung sind diese über

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (\text{B.78})$$

miteinander verknüpft. In den neuen Koordinaten schreibt sich das Phasenraumelement als

$$\int dPS^{(3)} = \int \frac{s}{32(2\pi)^5} dx_1 dx_2 d\eta d\phi d\cos\theta, \quad (\text{B.79})$$

und die Bedingung (B.75) für den Winkel  $\xi$  wird zu

$$\cos\xi = \frac{s(1 - x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2) + m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2\sqrt{\frac{s}{4}x_1^2 - m_1^2}\sqrt{\frac{s}{4}x_2^2 - m_2^2}}. \quad (\text{B.80})$$

Falls das Amplitudenquadrat nicht von den Winkeln  $\eta$ ,  $\phi$  und  $\theta$  abhängt, kann über diese Größen direkt integriert werden und wir erhalten

$$\int dPS^{(3)} = \int \frac{s}{16(2\pi)^3} dx_1 dx_2. \quad (\text{B.81})$$

Wenn wir uns an die Definition des Wirkungsquerschnittes (B.57) erinnern und den Flussfaktor aus (B.59) verwenden, erhalten wir als Resultat

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2} = \frac{s}{32(2\pi)^3} |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{\sqrt{s(s - 4m_\chi^2)}}. \quad (\text{B.82})$$

Die Integrationsgrenzen für  $x_1$  und  $x_2$  werden für den Fall eines masselosen Teilchens 3 angegeben. Wenn wir zuerst über  $x_2$  und dann über  $x_1$  integrieren, lauten diese

$$2\frac{m_b}{\sqrt{s}} \leq x_1 \leq 1 \quad \text{und} \quad x_2^- \leq x_2 \leq x_2^+. \quad (\text{B.83})$$

Die Grenzen von  $x_1$  sind wie folgt zu verstehen. Im unteren Grenzfall besitzt das Teilchen 1 keine kinetische Energie. Seine Energie gleicht der Ruhemasse. Im oberen Grenzfall besitzt es die maximal verfügbare Energie, welche im Schwerpunktssystem gerade  $\sqrt{s}/2$  entspricht. Die Grenzen von  $x_2$  sind durch

$$x_2^\pm = \frac{(2 - x_1)(1 - x_1 + 2\frac{m_b^2}{s}) \pm (1 - x_1)\sqrt{x_1^2 - 4\frac{m_b^2}{s}}}{2(1 - x_1 + \frac{m_b^2}{s})} \quad (\text{B.84})$$

gegeben. Sie folgen nach ein wenig Algebra aus (B.80) im Falle  $\cos\xi = 1$ .

# Literaturverzeichnis

- [1] FENG, Jonathan ; TRODDEN, Mark: Dark Worlds. In: *Scientific American* **303N5** (2010), S. 20
- [2] RUBIN, Vera C. ; FORD JR., W. K.: Rotation of the Andromeda Nebula from a spectroscopic survey of emission regions. In: *The Astrophysical Journal* **159** (1970), S. 379
- [3] ZWICKY, Fritz: Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. In: *Helvetica Physica Acta* **VI** (1933), S. 110
- [4] JUNGMAN, Gerard ; KAMIONKOWSKI, Marc ; GRIEST, Kim: Supersymmetric Dark Matter. In: *Physics Report* **267** (1996), S. 195
- [5] DE SAINT-EXUPÉRY, Antoine: *Der kleine Prinz*. Rauch, 2000
- [6] WESS, Julius ; ZUMINO, Bruno: Supergauge Transformations in four Dimensions. In: *Nuclear Physics B* **70** (1974), S. 39
- [7] WESS, Julius ; ZUMINO, Bruno: A Lagrangian Model invariant under Supergauge Transformations. In: *Physics Letters B* **49** (1974), S. 52
- [8] HERRMANN, Björn: *(Co-)Annihilation und Detektion dunkler Materie*, Universität Karlsruhe (TH), Diplomarbeit, Februar 2006
- [9] NOTH, David ; SPIRA, Michael: Supersymmetric Higgs Yukawa couplings to bottom quarks at next-to-next-to-leading order. In: *Journal of High Energy Physics* **1106** (2011), S. 084
- [10] HERRMANN, Björn ; KLASSEN, Michael: Supersymmetric QCD corrections to dark matter annihilation in the Higgs funnel region. In: *Physical Review D* **76** (2007), S. 117704
- [11] CARENA, Marcela ; GARCIA, David ; NIERSTE, Ulrich ; WAGNER, Carlos E. M.: Effective lagrangian for the  $\bar{t}bH^+$  interaction in the MSSM and charged Higgs phenomenology. In: *Nuclear Physics B* **577** (2000), S. 88
- [12] NOLTING, Wolfgang: *Grundkurs Theoretische Physik*. Bd. 1 Klassische Mechanik. Springer, 2006
- [13] VAN ALBADA, T. S. ; BAHCALL, J. N. ; BEGEMAN, K. ; SANSCISI, R.: Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198. In: *The Astrophysical Journal* **295** (1985), S. 305

- [14] CLOWE, Douglas ; BRADAČ, Maruša ; GONZALES, Anthony H. ; MARKEVITCH, Maxim ; RANDALL, Scott W. ; JONES, Christine ; ZARITSK, Dennis: A direct empirical proof of the existence of dark matter. In: *The Astrophysical Journal* **648** (2006), S. L109
- [15] <http://apod.nasa.gov/apod/ap060824.html>
- [16] HINSHAW, G. u. a.: *Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results.* – <http://arxiv.org/abs/1212.5226>
- [17] <http://wmap.gsfc.nasa.gov/media/101080/>
- [18] SPRINGEL, Volker u. a.: Simulating the joint evolution of quasars, galaxies and their large-scale distribution. In: *Nature* **435** (2005), S. 629
- [19] EROS-2 KOLLABORATION: Limits on the Macho content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds. In: *Astronomy and Astrophysics* **469** (2007), S. 387
- [20] ELLIS, John ; HAGELIN, J. S. ; NANOPoulos, D. V. ; OLIVE, K. ; SREDNICKI, M.: Supersymmetric relics from the big bang. In: *Nuclear Physics B* **238** (1984), S. 453
- [21] MILGROM, M.: A modification of the newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypotheses. In: *The Astrophysical Journal* **270** (1983), S. 365
- [22] BEKENSTEIN, Jacob D.: *The modified Newtonian dynamics—MOND and its implications for new physics.* – <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0701848v2>
- [23] BEKENSTEIN, Jacob D. ; SANDERS, Robert H.: *A primer to relativistic MOND theory.* – <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0509519v1>
- [24] AITCHISON, Ian J. R. ; HEY, Anthony J. G.: *Gauge Theories in Particle Physics.* Bd. 1 From Relativistic Quantum Mechanics to QED. Institute of Physics Publishing, 2004
- [25] AITCHISON, Ian J. R. ; HEY, Anthony J. G.: *Gauge Theories in Particle Physics.* Bd. 2 Non-Abelian Gauge Theories: QCD and the Electroweak Theory. Institute of Physics Publishing, 2004
- [26] BÖHM, Manfred ; DENNER, Ansgar ; JOOS, Hans: *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction.* Teubner, 2001
- [27] LOHRMANN, Erich: *Hochenergiephysik.* Teubner, 2005
- [28] SALAM, Abdus: Gauge Unification of Fundamental Forces. In: *Reviews of Modern Physics* **52** (1980), S. 525
- [29] WEINBERG, Steven: Conceptual Foundations of the Unified Theory of Weak and Electromagnetic Interactions. In: *Reviews of Modern Physics* **52** (1979), S. 515
- [30] HIGGS, Peter: Broken symmetries and the masses of gauge bosons. In: *Physical Review Letters* **13** (1964), S. 508

- 
- [31] ATLAS KOLLABORATION: Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. In: *Physics Letters B* **716** (2012), S. 1
  - [32] CMS KOLLABORATION: Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. In: *Physics Letters B* **716** (2012), S. 30
  - [33] HAAG, Rudolf ; ŁOPUSZAŃSKI, Jan T. ; SOHNIUS, Martin: All possible generators of supersymmetries of the  $S$ -matrix. In: *Nuclear Physics B* **88** (1975), S. 257
  - [34] NILLES, Hans P.: Dynamically broken supergravity and the hierarchy problem. In: *Physics Letters B* **115** (1982), S. 193
  - [35] HERRMANN, Björn ; KLASSEN, Michael ; LE BOULC'H, Quentin: Impact of squark flavor violation on neutralino dark matter. In: *Physical Review D* **84** (2011), S. 095007
  - [36] DREES, Manuel ; GODBOLE, Rohini M. ; ROY, Probir: *Theory and Phenomenology of Sparticles: An Account of Four-Dimensional N=1 Supersymmetry in High Energy Physics*. World Scientific, 2005
  - [37] CHAMSEDDINE, Ali H. ; ARNOWITT, Richard L. ; NATH, Pran: Locally Supersymmetric Grand Unification. In: *Physical Review Letters* **49** (1982), S. 970
  - [38] GRIEST, Kim ; SECKEL, David: Three exceptions in the calculation of relic abundances. In: *Physical Review D* **43** (1991), S. 3191
  - [39] KOLB, Edward W. ; TURNER, Michael S.: *The Early Universe*. Westview, 1994
  - [40] DENNER, A. ; ECK, H. ; HAHN, O. ; KÜBLBECK, J.: Compact Feynman rules for Majorana Fermions. In: *Physics Letters B* **291** (1992), S. 278
  - [41] DEBOVE, Jonathan ; FUKS, Benjamin ; KLASSEN, Michael: Threshold Resummation for gaugino pair production at hadron colliders. In: *Nuclear Physics B* **842** (2011), S. 51
  - [42] KINOSHITA, Toichiro: Mass Singularities of Feynman Amplitudes. In: *Journal of Mathematical Physics* **3** (1962), S. 650
  - [43] LEE, Tsung-Dao ; NAUENBERG, Michael: Degenerate Systems and Mass Singularities. In: *Physical Review D* **133** (1964), S. B1549
  - [44] SEXL, Roman U. ; URBANTKE, Helmuth K.: *Relativität, Gruppen, Teilchen*. Springer, 1992
  - [45] SCHMIDT, Matthias: *Wirkungsquerschnitte in der  $e^+e^-$ -Annihilation für nicht verschwindende Quarkmassen*, Universität Hamburg, Diplomarbeit, 1991
  - [46] CATANI, S. ; SEYMOUR, M. H.: A general algorithm for calculating jet cross sections in NLO QCD. In: *Nuclear Physics B* **485** (1997), S. 291
  - [47] FONTANE, Theodor: *Elli Briest*. Reclam, 1969

- [48] FORSTER, Otto: *Analysis*. Bd. 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. Vieweg, 2008
- [49] MONTVÁY, Istvan ; MÜNSTER, Gernot: *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, 1994
- [50] GUASCH, Jaume ; HÄFLIGER, Petra ; SPIRA, Michael: MSSM Higgs boson decays to bottom quark pairs reexamined. In: *Physical Review D* **68** (2003), S. 115001
- [51] DJOUADI, Abdelhak ; KALINOWSKI, Jan ; SPIRA, Michael: HDECAY: a Program for Higgs Boson Decays in the Standard Model and its Supersymmetric Extensions. In: *Computer Physics Communications* **108** (1998), S. 56
- [52] BRAATEN, E. ; LEVEILLE, J.P.: Higgs-boson decay and the running mass. In: *Physical Review D* **22** (1980), S. 715
- [53] BAIKOV, P. A. ; CHETYRKIN, K. G. ; KÜHN, J. H.: *Scalar Correlator at  $O(\alpha_s^4)$ , Higgs Decay into b-quarks and Bounds on the Light Quark Masses*. – <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0511063v2>
- [54] HERRMANN, Björn ; KLASSEN, Michael ; KOVAŘÍK, Karol: Neutralino annihilation into massive quarks with supersymmetric QCD corrections. In: *Physical Review D* **79** (2009), S. 061701
- [55] HARZ, Julia ; HERRMANN, Björn ; KLASSEN, Michael ; KOVAŘÍK, Karol ; LE BOULC'H, Quentin: *Neutralino-stop co-annihilation into electroweak gauge and Higgs bosons at one loop*. 2013. – <http://arxiv.org/abs/1212.5241>
- [56] POROD, Werner: SPheno, a program for calculating supersymmetric spectra, SUSY particle decays and SUSY particle production at  $e^+e^-$  colliders. In: *Computer Physics Communications* **153** (2003), S. 275
- [57] POROD, Werner ; STAUB, Florian: SPheno 3.1: extensions including flavour, CP-phases and models beyond the MSSM. In: *Computer Physics Communications* **183** (2012), S. 2458
- [58] VOLTAIRE: *Micromégas*. Flammarion, 2013
- [59] BÉLANGER, G. ; BOUDJEMA, F. ; PUKHOV, A. ; SEMENOV, A.: micrOMEGAs: Version 1.3. In: *Computer Physics Communications* **174** (2006), S. 577
- [60] BÉLANGER, G. ; BOUDJEMA, F. ; PUKHOV, A. ; SEMENOV, A.: micrOMEGAs 2.0: A program to calculate the relic density of dark matter in a generic model. In: *Computer Physics Communications* **176** (2007), S. 367
- [61] PUKHOV, A.: *CalcHEP 2.3: MSSM, structure functions, event generation, batchs, and generation of matrix elements for other packages*. 2009. – <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0412191v2>
- [62] BELYAEV, Alexander ; CHRISTENSEN, Neil D. ; PUKHOV, Alexander: *CalcHEP 3.4 for collider physics within and beyond the Standard Model*. 2012. – <http://arxiv.org/abs/1207.6082v2>

- [63] GONDOLO, P. ; EDSJÖ, J. ; ULLIO, P. ; BERGSTRÖM, L. ; SCHELKE, M. ; BALZ, E. A.: DarkSUSY: Computing supersymmetric dark matter properties numerically. In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **0407** (2004), S. 008
- [64] BARO, N. ; BOUDJEMA, F. ; SEMENOV, A.: Full one-loop corrections to the relic density in the MSSM: A few examples. In: *Physics Letters B* **660** (2008), S. 550
- [65] CABRERA, Maria E. ; CASAS, J. A. ; AUSTRI, Roberto R.: *The health of SUSY after the Higgs discovery and the XENON100 data.* 2012. – <http://arxiv.org/abs/1212.4821>
- [66] FENG, Jonathan: *Naturalness and the Status of Supersymmetry.* 2013. – <http://arxiv.org/abs/1302.6587>
- [67] GHOSH, Diptimoy ; GUCHAIT, Monoranjan ; RAYCHAUDHURI, Sreerup ; SENGUPTA, Dipan: *How Constrained is the cMSSM?* 2012. – <http://arxiv.org/abs/1205.2283v2>
- [68] CARENA, Marcela ; MRENNA, S. ; WAGNER, Carlos E. M.: MSSM Higgs Boson Phenomenology at the Tevatron Collider. In: *Physical Review D* **60** (1999), S. 075010
- [69] MOHR, Peter J. ; TAYLOR, Barry N. ; NEWELL, David B.: CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2010 / National Institute of Standards and Technology. Gaithersburg, Maryland, 2012. – Forschungsbericht
- [70] BJORKEN, James D. ; DRELL, Sidney D.: *Relativistische Quantenmechanik.* Bibliographisches Institut Mannheim, 1966
- [71] COLLINS, John: *Renormalization.* Cambridge University Press, 1984
- [72] GROZIN, Andrey: *Lectures on QED and QCD – Practical Calculation of One- and Multi-Loop Feynman Diagrams.* World Scientific, 2007
- [73] KILIAN, Wolfgang: *Übungen zu Strahlungskorrekturen in Eichtheorien.* 2001. – <http://maria-laach.physik.uni-siegen.de/2001/Folien/Kilian/>
- [74] KOVAŘÍK, Karol: *Hitchhiker's Guide to Renormalization.* 2012. – Bislang unveröffentlicht
- [75] BEENAKKER, Wilhelmus Johannes P.: *Electroweak Corrections: Techniques and Applications,* Universität Leiden, Diss., 1989
- [76] NOLTING, Wolfgang: *Grundkurs Theoretische Physik.* Bd. 3 Elektrodynamik. Springer, 2007
- [77] HERRMANN, Björn: *Phenomenology of Dark Matter Annihilation and Non-Minimal Flavour Violation in the MSSM,* Universität Joseph Fourier Grenoble, Diss., 2008
- [78] DABELSTEIN, A.: Fermionic decays of neutral MSSM Higgs bosons at the one loop level. In: *Nuclear Physics B* **456** (1995), S. 25
- [79] NOTH, David ; SPIRA, Michael: Higgs Boson Couplings to Bottom Quarks: Two-Loop Supersymmetry-QCD Corrections. In: *Physical Review Letters* **101** (2008), S. 181801
- [80] HEISENBERG, Werner: *Quantentheorie und Philosophie.* Reclam, 1979



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Zunächst ist hier Prof. Dr. Michael Klasen zu nennen, dem ich die interessante und facettenreiche Themenstellung verdanke. Es hat mir gefallen, mich im letzten Jahr intensiv mit dem Themenkomplex der dunklen Materie zu befassen und dadurch mit einem aktuellen und fundamentalen Problem der Physik konfrontiert zu werden. Des Weiteren bedanke ich mich für die gut organisierte Koordination der Arbeit und die Ermöglichung von Dienstreisen nach Karlsruhe und Annecy.

Prof. Dr. Gernot Münster danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferats, sowie generell für seine humorvolle Art, die zur angenehmen Atmosphäre im Institut beiträgt.

Bei Prof. Dr. Michael Spira möchte ich mich dafür bedanken, dass er mir in kürzester Zeit sehr hilfreiche Informationen zum Programm HDECAY zur Verfügung gestellt hat.

Von Dr. Karol Kovařík habe ich im vergangenen Jahr viel über Physik und Sarkasmus für Fortgeschrittene gelernt. Ich möchte mich für die kompetente Betreuung und das offene Ohr für Detailfragen – gerade in der letzten Phase der Masterarbeit – bedanken und freue mich darauf, die Zusammenarbeit im Rahmen einer Promotion fortsetzen zu können. Weitere wichtige Betreuungsarbeit wurde von Dr. Björn Herrmann geleistet, wofür ich mich ebenfalls bedanken möchte.

Bei meinen Bürokollegen Sonja Esch und Moritz Meinecke bedanke ich mich für die entspannte Arbeitsatmosphäre.

Weiterhin möchte ich mich bei meinen Eltern Marita und Dipl. Ing. Norbert Steppeler für die Unterstützung im letzten Semester und das Korrekturlesen bedanken.

Meinen langjährigen guten Freunden Matthias Baldwin und Simon Groß danke ich dafür, dass sie mich durch ihr Dasein regelmäßig daran erinnern, dass es mehr im Leben gibt als nur Physik.

Meiner Freundin Anja Teuber danke ich für das schonungslose Korrekturlesen. Außerdem danke ich ihr dafür, dass sie so verrückt ist, mich trotz all meiner Marotten gern zu haben.

Ich versichere hiermit, dass ich meine Masterarbeit „*QCD-Korrekturen zur Annihilation von dunkler Materie im Higgs-Funnel*“ selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe. Alle von anderen Autoren wörtlich übernommenen Stellen sowie Ausführungen, die sich an die Gedankengänge anderer Autoren eng anlehnen, habe ich unter Angabe der Quellen besonders gekennzeichnet.

Münster, den 15. März 2013

---

Patrick Steppeler