



Erzeugung von supersymmetrischer Dunkler Materie am LHC

Production of supersymmetric dark matter at the LHC

Bachelorarbeit Physik
06.06.2016

Autor:	Daniel Schache
Geburtsdatum, -ort:	30.01.1994, Osnabrück
E-Mail:	daniel.schache.ds@gmx.de
Matrikelnummer:	393850
Studiengang:	Bachelor of Science Physik
Erstgutachter:	Herr Prof. Dr. Michael Klasen
Zweitgutachter:	Frau Jun. Prof. Dr. Anna Kulesza

Inhaltsverzeichnis

I	Motivation	4
II	Theorie	8
1	Die Dirac-Gleichung	8
1.1	Herleitungsskizze zur Dirac-Gleichung	8
1.2	Lösungen der Dirac-Gleichung	10
2	Mathematische Grundlagen	12
2.1	Zusammenstellung der verwendeten Feynman-Regeln	12
2.2	Wesentliche Identitäten beim Rechnen mit γ -Matrizen	15
III	Hauptteil	16
3	Der Drell-Yan-Prozess	16
3.1	Bestimmung der Amplitude M	16
3.2	Berechnung der quadrierten Amplitude $ M ^2$	17
3.3	Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts	18
4	Die Bhabha-Streuung	20
4.1	Bestimmung der Amplitude M	20
4.2	Berechnung der quadrierten Amplitude $ M ^2$	21
4.3	Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts	23
5	Die Lepton-Paar-Erzeugung	24
5.1	Bestimmung der Amplitude M	24
5.2	Berechnung der quadrierten Amplitude $ M ^2$	25
5.3	Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts	27
6	Erzeugung von supersymmetrischer Dunkler Materie	28
6.1	Bestimmung der Amplitude M	28
6.2	Berechnung der quadrierten Amplitude $ M ^2$	29
6.3	Numerische Ergebnisse und Diskussion	31
IV	Fazit	36
V	Anhang	37
	Kopplungen des Z^0 -Bosons an Fermionen im GWS-Modell	37
	Beweise zu den in Kapitel 2.2 eingeführten Identitäten	37
	Abbildungsverzeichnis	41
	Tabellenverzeichnis	41

Teil I

Motivation

Einleitung

Wie wir heute aus einer Vielzahl astrophysikalischer und kosmologischer Beobachtungen wissen, besteht unser Universum nur zu etwa 5% aus uns bekannter Materie. Die restlichen 95% teilen sich auf in 73% Dunkle Energie und 22% Dunkle Materie, deren experimentelle Nachweise bis heute nicht gelungen sind.

Der bekannte Materieanteil wird sehr erfolgreich durch das sogenannte Standardmodell der Teilchenphysik beschrieben. Dieses enthält die verschiedenen Elementarteilchen sowie die drei fundamentalen Wechselwirkungen (elektromagnetische, schwache und starke), lediglich die Gravitation muss separat gemäß Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie beschrieben werden.

Es konnten im Lauf der letzten Jahrzehnte jedoch einige Evidenzen für die Existenz Dunkler Materie¹ beobachtet werden. In diesem Zusammenhang sind beispielsweise die Beobachtungen an Spiralgalaxien zu nennen: Vermessung der Rotationskurven umlaufender Objekte deuten auf zusätzliche, riesige Massenansammlungen im Außenbereich der Galaxien hin. Diese Massen beeinflussen durch ihre gravitative Wirkung die gut messbare Umlaufgeschwindigkeit von Sternen, die sich um das Zentrum einer Spiralgalaxie bewegen.

Darüber hinaus deuten auch Beobachtungen durch den Gravitationslinseneffekt auf weitere, bis dato nicht beobachtete Massen hin. Dieser Effekt beschreibt gerade das Phänomen, dass sehr große Massen die Raumzeit lokal krümmen und damit Lichtwege von der geradlinigen Bewegung ablenken können. Vermessung solcher Gravitationslinsenbilder erlauben die Bestimmung der für die Krümmung verantwortlichen Masse. Auch in diesem Fall zeigt die Auswertung eindeutig das Vorhandensein zusätzlicher Massen.

Eine Aufschlüsselung über den Materiehaushalt unseres Universum liefert die präzise Vermessung der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB). Diese weist ein nahezu ideales Schwarzkörperspektrum bei einer (heutigen) Temperatur von $T = (2,725 \pm 0,002) \text{ K}$ auf, wobei allerdings bei sehr genauer Messung Temperaturfluktuationen in der relativen Größenordnung von $2 \cdot 10^{-5}$ beobachtet werden können. Die Winkelverteilung dieser sogenannten Anisotropien erlaubt es, durch passende Modellierung (i.d.R. durch das Λ CDM-Modell) Rückschlüsse auf den Materiehaushalt im Universum zu ziehen. Das zentrale Ergebnis dieses Vorgehens wurde oben bereits vorweggenommen.

Eine direkte Beobachtung von Dunkler Materie ist - nach heutiger Vorstellung und sofern diese überhaupt existiert - nicht möglich, da diese weder Licht absorbiert noch emittiert, folglich also nicht leuchtet. Aus der fehlenden elektromagnetischen Wechselwirkung lässt sich schließen, dass Dunkle Materie elektrisch neutral sein muss. Zudem sollte die Dunkle Materie stabil sein, da wir ihre Effekte auch heute noch messen können.

Im Rahmen des Standardmodells gibt es nur ein Teilchen, das diese beiden Bedingungen erfüllt: Das Neutrino. Da dieses bereits vor einigen Jahrzehnten nachgewiesen wurde und es zudem seit des experimentellen Nachweises der Neutrinooszillation als gesichert

¹Weiterführende Informationen über Dunkle Materie sind [1] zu entnehmen.

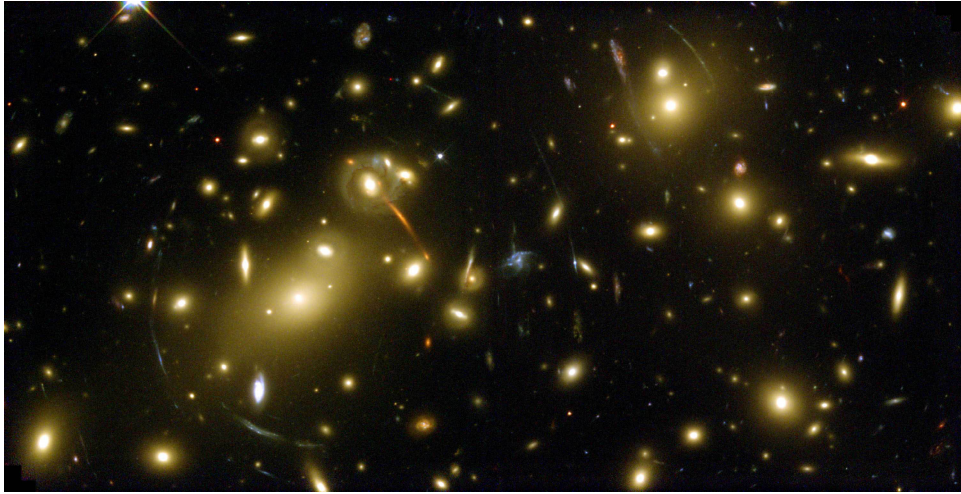


Abbildung 1: Schwacher Gravitationslinseneffekt, beobachtet am Galaxiencluster Abell2218. Man erkennt, wie die Abbildungen der Hintergrundgalaxien verzerrt und um das Zentrum des Clusters gebogen sind.

gilt, dass das Neutrino Masse besitzen muss, galt es lange als vielversprechendster Kandidat für ein Dunkles Materie-Teilchen. Tatsächlich weiß man heute jedoch, dass deren Masse zu gering ist, um die beobachteten Gravitationseffekte erklären zu können. Man kann anhand von Simulationen zeigen, dass, wenn die Dunkle Materie (überwiegend) aus schnellen, leichten Teilchen - sogenannter Heißer Dunkler Materie - bestünde, die Strukturbildung im Universum einem Top-Down-Szenario folgen müsste. Nach diesem hätten sich zuerst Strukturen auf großen Skalen, beispielsweise Galaxienhaufen, und erst später Galaxien, Sterne usw. gebildet. Die experimentellen Beobachtungen lassen jedoch auf das Gegenteil, ein sogenanntes Bottom-Up-Szenario, und damit auf einen überwiegenden Anteil an Kalter Dunkler Materie, schließen.

Folglich kann im Rahmen des Standardmodells der Teilchenphysik also kein passender Kandidat gefunden werden, der den Großteil der Dunklen Materie verträglich mit den experimentellen Ergebnissen beschreibt.

SUSY-Modelle

Es scheint daher sinnvoll, das Standardmodell zu erweitern. Einer der populärsten und vielversprechendsten Ansätze für eine solche Erweiterung sind supersymmetrische Modelle². Diese gehen von einer fundamentalen Raumzeitsymmetrie aus, die zwischen den Materie- und den Austauschteilchen gelten möge und damit eine Umwandlung von Fermionen in Bosonen und umgekehrt erlaubt. Das einfachste dieser SUSY-Modelle ist das MSSM, das minimal supersymmetrische Modell. In diesem wird - neben der Einführung eines zusätzlichen Higgs-Dubletts - jedem Elementarteilchen aus dem Standardmodell ein SUSY-Partner, deren Spin sich um $\frac{1}{2}$ unterscheidet, zugeordnet. Auf diese Weise können zwei der grundlegendsten Probleme des Standardmodells gelöst werden: Die Vereinigung der drei fundamentalen Kräfte und die Auflösung des Hierarchieproblems. Zudem liefert das MSSM auf natürliche Weise gleich mehrere vielversprechende Kandidaten für Dunkle Materie.

²Ausführlichere Informationen über das Konzept der Supersymmetrie findet man bei [2].

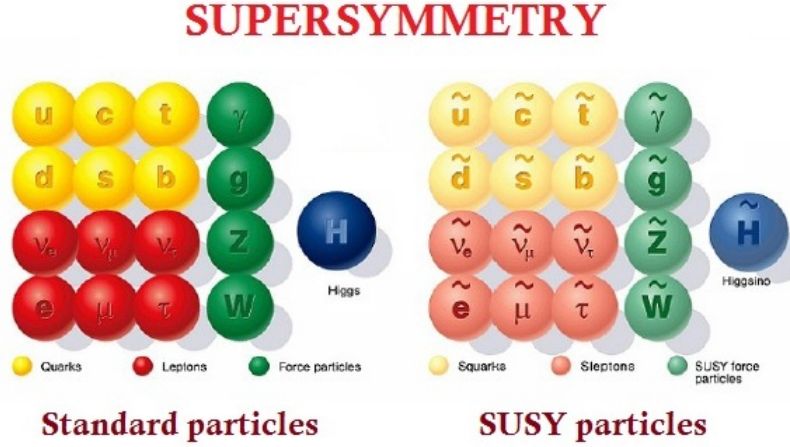


Abbildung 2: Gemäß des Prinzips der Supersymmetrie hat jedes Standardmodell-Teilchen, gezeigt auf der linken Seite, ein supersymmetrisches Partnerteilchen, dargestellt rechts.

Bei der Beschreibung von SUSY-Prozessen geht man - insbesondere wegen der beobachteten Stabilität des Protons - davon aus, dass bei diesen die diskrete R-Parität erhalten sein muss. Dabei ordnet man den Teilchen des Standardmodells eine gerade R-Parität (+1) und den supersymmetrischen Partner einer ungerade Parität (-1) zu. Wäre dies in der Natur erfüllt, würde beim Zerfall eines SUSY-Teilchens stets ein weiteres SUSY-Teilchen, das natürlich leichter sein muss, gebildet werden. Das leichteste Teilchen solch einer Zerfallsreihe wäre dann, obwohl es möglicherweise deutlich schwerer wäre als bekannte Standardmodell-Teilchen, stabil. Man bezeichnet es auch als LSP (leichtestes supersymmetrisches Partnerteilchen).

Man geht heute davon aus, dass im frühen, sehr heißen Universum die Bildung aller Standardmodell- und SUSY-Teilchen möglich war. In der Folge einer Reihe von Zerfallsprozessen und unter Beachtung der R-Paritätserhaltung führen die supersymmetrischen Modelle dann auf einige elektrisch neutrale, stabile und genügend schwere Teilchen, um die beobachteten Dunkle Materie-Effekte erklären zu können. Eines dieser Teilchen ist das leichteste Neutralino $\tilde{\chi}_1^0$.

Das $\tilde{\chi}_1^0$ als Dunkle Materie-Kandidat

Bei den Neutralinos handelt es sich um Mischzustände der SUSY-Partner elektrisch neutraler Bosonen des Standardmodells; genauer sind es Überlagerungszustände der Gauginos \tilde{B}^0 , dem Partner des B^0 , und \tilde{W}^0 , dem Partner des W^0 sowie der Higgsinos \tilde{H}_a^0 und \tilde{H}_b^0 :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_1^0 \\ \tilde{\chi}_2^0 \\ \tilde{\chi}_3^0 \\ \tilde{\chi}_4^0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \tilde{B}^0 \\ \tilde{W}^0 \\ \tilde{H}_a^0 \\ \tilde{H}_b^0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist N die 4×4 -Mischungsmatrix, deren Eigenwerte gerade den Neutralinomassen entsprechen. Im MSSM gibt es insgesamt vier Neutralinos verschiedener Massen, die man typischerweise nach zunehmender Masse mit den Indizes 1 bis 4 kennzeichnet.

Die Neutralinos werden als sogenannte Majorana-Fermionen bezeichnet, d.h. sie sind Spin- $\frac{1}{2}$ - Teilchen, die ihre eigenen Antiteilchen sind. Insbesondere sind die Neutralinos damit

also auch elektrisch neutral. Sie unterliegen damit nur der Gravitation und der schwachen Wechselwirkung. Da man darüber hinaus davon ausgehen kann, dass selbst das leichteste Neutralino $\tilde{\chi}_1^0$ deutlich schwerer ist als die Neutrinos, wurde in diesem Zusammenhang der Begriff des Weakly Interacting Massive Particles, kurz WIMP, eingeführt.

Moderne Computersimulationen erlauben es, ausgehend vom vermuteten Bildungsprozess der Standardmodell- und SUSY-Teilchen im frühen heißen Universum, Rückschlüsse auf die zu erwartende Neutralinodichte im Universum zu ziehen. Die damit ermittelte Dichte stimmt gut mit der aus den beobachteten Gravitationseffekten erwarteten Dichte der Dunklen Materie überein. Zudem sollte es sich bei den $\tilde{\chi}_1^0$ aufgrund ihrer Masse um Kalte Dunkle Materie handeln. Diese beiden Erkenntnisse führen - in Einklang mit den zuvor bereits geforderten und für Neutralinos erfüllte Eigenschaften Dunkler Materie - dazu, dass das $\tilde{\chi}_1^0$ heute als einer der vielversprechendsten Kandidaten für Dunkle Materie gilt.

Die experimentelle Verifizierung der Existenz der Neutralinos ist ein aktuelles Forschungsgebiet an Teilchenbeschleunigern wie dem LHC. Man erhofft sich hier eine Produktion der Neutralinos infolge einer Proton-Proton-Kollision bei genügend großer Energie. Mit aktuellen Methoden sind diese jedoch noch nicht erreichbar, eine Erzeugung in naher Zukunft ist aber denkbar.

Es bliebe dann aber immer noch das Problem des Nachweises: Da das $\tilde{\chi}_1^0$ elektrisch neutral und stabil ist, ist es nur indirekt über die Energie-Impuls-Beziehung detektierbar. Daher ist es für einen gelungenen Nachweis Dunkler Materie elementar wichtig, sich auch von theoretischer Seite sehr genau mit der Neutralinoerzeugung infolge einer Proton-Proton-Kollision zu beschäftigen um den Prozess detailliert beschreiben zu können.

Im Rahmen dieser Arbeit soll daher ein erster theoretischer Einblick in den zugrundeliegenden Prozess geliefert werden. Dabei wird insbesondere ein Schwerpunkt auf die Darstellung und das analytische Berechnen quantenfeldtheoretischer Prozesse mithilfe von Feynman-Diagrammen und den zugehörigen Regeln gelegt. Um die Anwendung dieser Regeln einzuüben, werden vor dem Prozess der Neutralinoerzeugung drei weitere 2-nach-2-Prozesse - ein Drell-Yan Prozess, die Bhabha-Streuung und die Lepton-Paar-Produktion - berechnet. Bei all diesen Berechnungen soll lediglich die führende Ordnung betrachtet werden.

Abschließend wird noch eine kurze Analyse der Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der LHC-Energie sowie der Masse der zu erzeugenden Neutralinos folgen.

Teil II

Theorie

1 Die Dirac-Gleichung

1.1 Herleitungsskizze zur Dirac-Gleichung

Die theoretische Beschreibung von Streuprozessen, wie sie beispielsweise an den großen Teilchenbeschleunigern durchgeführt werden, erfordert eine die Dynamik des Systems beschreibende Gleichung. Die naheliegendste Lösung für dieses Problem ist die Schrödingergleichung. Dabei werden hier und im Folgenden natürliche Einheiten, also $c = \hbar = 1$, verwendet.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi. \quad (1.1)$$

Dabei ist $H = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 + V$ der Hamiltonoperator des Systems in einem äußeren Potential V und ψ die Wellenfunktion eines Teilchens der Masse m . Man stellt jedoch fest, dass die Schrödingergleichung nicht lorentzinvariant und damit nur für die Beschreibung nicht-relativistischer Phänomene geeignet ist. Dies hängt damit zusammen, dass hier Zeit- und Ortsableitung nicht in gleicher Potenz auftreten. Eine scheinbare Lösung dieses Dilemmas ist es, sowohl in der Zeit als auch im Ort die zweite Ableitung zu betrachten - dieser Ansatz führt auf die Klein-Gordon-Gleichung (KGG):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2\right)\psi = (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi = 0, \quad (1.2)$$

aus deren Lösung man Energieeigenwerte $E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ erhält. Die Teilchen mit negativer Energie scheinen sich zeitlich rückwärts zu bewegen, man interpretiert sie daher i.d.R. als Antiteilchen positiver Energie, die sich zeitlich vorwärts bewegen. Ein nicht auf ähnlich elegante Weise interpretierbares Problem bleibt jedoch erhalten: Aus der Betrachtung der Kontinuitätsgleichung lässt sich ableiten, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ proportional zur Energie ist. Da negative Wahrscheinlichkeitsdichten jedoch physikalisch keinen Sinn machen, ist die KGG nicht für die Beschreibung relativistischer Einteilchensysteme geeignet.

Die Lösung dieses Problems gelang 1927 Paul Dirac. Sein Ansatz war eine Beschreibung, die in Zeit- und Ortsableitung in 1.Ordnung ist, also:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H_D\psi \quad (1.3)$$

mit

$$H_D := -i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m = \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m, \quad (1.4)$$

wobei $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und β noch zu bestimmen sind. Dies gelingt durch den Vergleich von

$$H_D^2\psi = \left(-\sum_i \alpha_i^2 \partial_i \partial_i - \sum_{i<j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \partial_i \partial_j - im \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \partial_i + \beta^2 m^2\right)\psi \quad (1.5)$$

und dem aus der KGG gewonnenen Zusammenhang

$$H_D^2 \psi = (\vec{p}^2 + m^2) \psi = \left(- \sum_i \partial_i \partial_i + m^2 \right) \psi \quad (1.6)$$

mit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, 2, 3$.

Aus dem Vergleich von (1.5) und (1.6) lassen sich dann die folgenden Bedingungen ableiten:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 \\ 0 &= \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i \quad (i \neq j) \\ 0 &= \alpha_i \beta + \beta \alpha_i \\ 1 &= \beta^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Diese können offensichtlich weder von reellen noch von komplexen Zahlen erfüllt werden. Die einfachste Lösung für die gesuchten Koeffizienten sind 4×4 -Matrizen, die häufig in der Pauli-Dirac-Darstellung angegeben werden:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dabei ist σ_i die i -te Pauli-Matrix und $\mathbb{1}_2$ die (zweidimensionale) Einheitsmatrix.

Um die Dirac-Gleichung kompakter schreiben zu können, führt man an dieser Stelle die aus $\vec{\alpha}$ und β abgeleiteten Gamma-Matrizen ein. Für diese gilt:

$$\gamma^0 := \beta \quad \text{und} \quad \gamma^k := \beta \alpha^k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.9)$$

Mit $\gamma^\mu := (\beta, \beta \alpha^k)$ lässt sich dann die Dirac-Gleichung formulieren als

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \psi = 0 \quad (\textit{kovariante Form}) \quad (1.10)$$

bzw.

$$(\not{p} - m) \psi = 0 \quad (\textit{Impulsdarstellung}) \quad (1.11)$$

unter Einführung der Feynman-Slash-Notation

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu. \quad (1.12)$$

Die Wellenfunktion ψ ist dabei ein 4-komponentiger (Zeilen-)Vektor, ein sogenannter "Dirac-Spinor". Den zugehörigen Spaltenvektor $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$ bezeichnet man als adjungierten Spinor.

Für die γ -Matrizen gilt dabei die folgende Algebra:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (1.13)$$

und damit

$$(\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu} \quad \Rightarrow \quad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}_4, (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}_4 \quad (1.14)$$

Wegen (1.9) gilt weiterhin

$$(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \text{ und } (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0. \quad (1.15)$$

Zudem ist es für die spätere Betrachtung nützlich, eine weitere Gamma-Matrix zu definieren, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (1.16)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (1.17)$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}_4 \quad (1.18)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0 \quad (1.19)$$

Es lässt sich dann zeigen (siehe [3, S.103]), dass die Dirac-Gleichung das Problem der negativen Wahrscheinlichkeitsdichten, das im Rahmen der Betrachtung der KGG aufgetreten war, auflöst - hier gilt stets $\rho \geq 0$. Damit eignet sie sich auch zur Beschreibung relativistischer quantenmechanischer Einteilchensysteme.

1.2 Lösungen der Dirac-Gleichung

Da es sich bei der Dirac-Gleichung um eine Differentialgleichung 1.Ordnung handelt, wird als Ansatz eine ebene Welle

$$\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{p})e^{-ipx} = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} e^{-ipx} \quad (1.20)$$

mit den zwei Spinoren u_A und u_B gewählt.

Wegen

$$\not{p} - m = \gamma^\mu p_\mu - m = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma}\vec{p} - m = \begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -E - m \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

erhält man dann durch Einsetzen in (1.11) ein System aus zwei gekoppelten Gleichungen:

$$u_A = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E - m} u_B \quad (1.22)$$

$$u_B = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E + m} u_A.$$

Einsetzen der obigen beiden Gleichungen ineinander und Ausnutzung des Zusammenhangs $(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = \vec{p}^2$ führt auf:

$$u_A = \frac{\vec{p}^2}{E^2 - m^2} u_A \quad \Rightarrow \quad (E^2 - m^2)u_A = \vec{p}^2 u_A. \quad (1.23)$$

Das Ergebnis entspricht damit gerade dem bereits aus der KGG bekannten Energie-Impuls-Zusammenhang $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Bei der Suche nach den allgemeinen Lösungen wählt man typischerweise

$$\begin{aligned} u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow u_B = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\ u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \Rightarrow u_B = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.24)$$

und

$$\begin{aligned} u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow u_A = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E-m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{E-m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\ u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow u_B = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E-m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E-m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Die ersten beiden Lösungen entsprechen dabei jenen positiver Energie, die zweiten beiden jenen negativer Energie. Man erhält damit insgesamt vier unabhängige Lösungen:

$$u^{(1)}(p) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(p) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad \text{mit } E \geq 0 \quad (1.26)$$

$$u^{(3)}(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)}(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } E < 0 \quad (1.27)$$

mit $N = \sqrt{|E| + m}$ als Normierungsfaktor. Die einzelnen Lösungen sind dabei zueinander orthogonal:

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 2|E| \delta_{r,s} \quad \text{mit } r, s = 1, 2, 3, 4. \quad (1.28)$$

Weiterhin lässt sich dann der adjungierte Spinor $\bar{u} := u^\dagger \gamma^0$ definieren.

Die Spinoren negativer Energie lassen sich dabei - analog zum Vorgehen bei der Interpretation der KGG - als Antiteilchen-Zustände mit positiver Energie interpretieren.

Man beschreibt den Zustand eines solchen Antiteilchens dann durch Einführung der v -Spinoren gemäß

$$u^{(3,4)}(-\vec{p}) e^{-i(-p)x} := v^{(2,1)}(\vec{p}) e^{ipx}. \quad (1.29)$$

Die zugehörige Dirac-Gleichung kann nun direkt durch Einsetzen von $-E$ und $-\vec{p}$ in (1.11) bestimmt werden:

$$(-\not{p} - m)u(-\vec{p}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0. \quad (1.30)$$

In diesem Zusammenhang lässt sich zeigen, dass die Vollständigkeitsrelationen

$$\begin{aligned} \sum_s u^{(s)} \bar{u}^{(s)} &= \not{p} + m \\ \sum_s v^{(s)} \bar{v}^{(s)} &= \not{p} - m, \end{aligned} \quad (1.31)$$

zuweilen auch als Casimir-Identitäten bezeichnet, erfüllt sind³.

Detailliertere Beschreibungen zur Herleitung und Lösung der Dirac-Gleichung sind unter [3] zu finden.

³Einen Beweis hierzu findet man in [3, S.361].

2 Mathematische Grundlagen

Im folgenden Kapitel soll das mathematische Handwerkszeug, das bei den analytischen Berechnungen der Wirkungsquerschnitte verwendet wird, möglichst kompakt und übersichtlich präsentiert werden. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, es werden bewusst nur jene Regeln und Identitäten aufgeführt, die bei den Berechnungen auch verwendet werden. Eine Zusammenstellung der Beweise zu den mathematischen Identitäten befindet sich im Anhang, eine ausführlichere Einführung der Feynman-Regeln inklusive verschiedener Beispiele ist bspw. in [3] zu finden.

2.1 Zusammenstellung der verwendeten Feynman-Regeln

Ein Feynman-Diagramm ist die bildliche Veranschaulichung eines quantenfeldtheoretischen Prozesses, bei dem eine bestimmte Anzahl Teilchen im Eingangskanal über einen bestimmten Wechselwirkungsprozess in eine bestimmte Anzahl an Teilchen im Ausgangskanal überführt wird. Aus der Darstellung lässt sich durch Anwendung der zugehörigen Feynman-Regeln die Amplitude des Prozesses berechnen.

Die Diagramme bestehen dabei aus drei Grundbausteinen: Den externen Linien, den Vertices und den internen Linien (Propagatoren). Jedes dieser Elemente liefert einen multiplikativen Beitrag zur Amplitude.

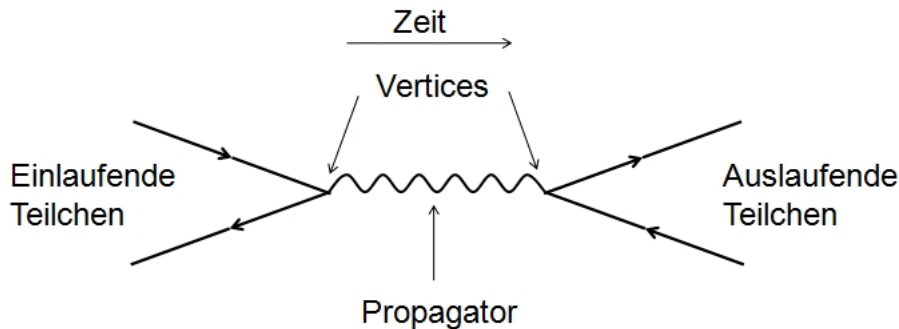


Abbildung 3: Prinzipieller Aufbau eines Feynman-Diagramms

Die **externen Linien** beschreiben dabei die (messbaren) ein- und auslaufenden Teilchen. Für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen bzw. -Antiteilchen - wie sie im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich betrachtet werden - verwendet man die folgende Symbolik:

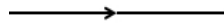


Abbildung 4: Für ein einlaufendes Teilchen ist der Beitrag $u^{(s)}(p)$.

Für ein auslaufendes Teilchen ist der Beitrag $\bar{u}^{(s)}(p)$.

Dabei ist s der Spin und p der Viererimpuls des Teilchens.

Dabei entsprechen u und v respektive \bar{u} und \bar{v} den in Kapitel 1.2 eingeführten (adjungierten) Spinoren.



Abbildung 5: Für ein einlaufendes Antiteilchen ist der Beitrag $\bar{v}^{(s)}(p)$.
Für ein auslaufendes Antiteilchen ist der Beitrag $v^{(s)}(p)$.
Dabei ist s der Spin und p der Viererimpuls des Antiteilchens.

Die **Vertices** sind jene Punkte, an denen mindestens drei Linien zusammenlaufen. An diesen Wechselwirkungspunkten können unter Beachtung der Viererimpulserhaltung Teilchen erzeugt, vernichtet oder gestreut werden. Jeder dieser Punkte liefert bei der Berechnung einen Vertexfaktor ig , der von der Kopplungsstärke der jeweiligen Wechselwirkung abhängt.

Die **internen Linien** beschreiben nicht beobachtbare, virtuelle Teilchen, die sich als Vermittler des stattfindenden Wechselwirkungsprozesses interpretieren lassen. Auch hier hängt die Symbolik wiederum von der Art der Austauscheteilchen ab. Im Rahmen dieser Arbeit werden wir es ausschließlich mit Prozessen der elektromagnetischen Wechselwirkung, die durch das Photon vermittelt werden, und mit jenen der schwachen Wechselwirkung, die durch den Austausch massiver Eichbosonen (W^\pm, Z^0) beschrieben werden können, zu tun haben. Da es sich hierbei jeweils um Spin-1-Teilchen handelt, nutzen wir lediglich folgende Symbolik:



Abbildung 6: Feynman-Symbolik für Photon- und Z^0 -Propagator.

Für ein Photon als Austauscheteilchen hat der Propagator die Form

$$\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \quad (2.1)$$

mit der Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ und dem Impulsübertrag q . Für ein massives Z^0 -Eichboson ist zusätzlich die Masse des Bosons M_Z zu berücksichtigen:

$$\left(\frac{-i \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_Z^2} \right)}{q^2 - M_Z^2} \right). \quad (2.2)$$

Die Z^0 -Boson-Fermion-Kopplung ist gegeben durch

$$\left(-i \frac{g_z}{2} \gamma^\nu \left(c_V^f - c_A^f \gamma^5 \right) \right). \quad (2.3)$$

Dabei ist $g_z = \frac{g_e}{\sin(\theta_W) \cos(\theta_W)}$ der zum Z^0 -Boson gehörende Vertexfaktor, θ_W der Weinbergwinkel über den die Massen und Kopplungen zusammenhängen und c_V bzw. c_A die vertikale bzw. die axiale Kopplung⁴.

⁴Diese sind durch das sogenannte GWS-Modell bestimmt. Eine Übersicht befindet sich im Anhang.

Bei der Berechnung der Amplitude eines quantenfeldtheoretischen Prozesses muss allerdings beachtet werden, dass hierbei theoretisch beliebig viele Feynman-Diagramme auszuwerten sind. Dies hängt damit zusammen, dass die internen Linien gerade virtuellen Teilchen entsprechen. Man könnte folglich beliebig viele dieser Linien hinzufügen und würde immer noch denselben Prozess beschreiben. Da hierbei alle so konstruierten Feynman-Diagramme zur Gesamtamplitude beitragen, wäre eine solche Berechnung unmöglich.

Die Lösung dieses Dilemmas ist das sogenannte Feynman-Kalkül: Je mehr interne Linien man einfügt, desto mehr Vertices enthält das Diagramm. Da nun - speziell für die hier betrachteten Prozesse der e.m. und der schwachen Wechselwirkung - die Wechselwirkungskonstanten deutlich kleiner als eins sind und die Beiträge jeweils multiplikativ eingehen, trägt ein Feynman-Diagramm umso geringer zur Gesamtamplitude bei, je mehr Vertices es besitzt. Man spricht, abhängig von der Anzahl der Vertices, auch von verschiedenen Ordnungen. Im Rahmen dieser Arbeit soll - wie anfänglich bereits erwähnt - lediglich die niedrigste Ordnung⁵ $n = 2$ als einfachste Näherung der tatsächlichen Amplitude betrachtet werden. Die genauere Auswertung höherer Ordnungen geschieht typischerweise numerisch, da mit jeder Ordnung die Anzahl der möglichen Feynman-Diagramme um den Faktor $n!$ zunimmt.

Die Darstellung mittels Feynman-Diagrammen ist nicht nur auf quantenmechanische Prozesse im Standardmodell, sondern auch auf jene in SUSY-Modellen anwendbar. Damit ist es beispielsweise möglich, die Amplitude und damit letztlich auch den Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung von Neutralinos zu berechnen. Dabei sind im Wesentlichen folgende - für diese Arbeit relevante - Neuerungen zu beachten:

- (i) Die Symbolik für die Neutralinos ist eine Überlagerung einer geraden und einer geschwungenen Linie.



Abbildung 7: Symbolik für Neutralinos im Feynman-Diagramm

Hierbei ist nun allerdings zu beachten, dass die Neutralinos Majorana-Fermionen sind. Dies stellt zunächst einmal vor dem Hintergrund der Bezeichnung mit u -bzw. v -Spinoren ein Problem dar, denn hier kann nicht zwischen Teilchen und Antiteilchen unterschieden werden. Das richtige Vorgehen ist es nun, für eine Majorana-Linie eine Pfeilrichtung frei auszuwählen; die übrigen Majorana-Linien sind durch diese Wahl dann festgelegt. Eine einlaufende Linie mit einem Pfeil in einlaufende Richtung heißt dann Teilchenlinie, in umkehrte Pfeilrichtung bezeichnet man diese demnach als Antiteilchenlinie. Bei den auslaufenden Linien mit entsprechender Pfeilrichtung spricht man von einer Teilchenlinie, ist der Pfeil umgekehrt von einer Antiteilchenlinie.

- (ii) Die Z^0 -Boson-Neutralino-Neutralino-Wechselwirkung ist proportional zu den Kopp-

⁵Dies wird häufig auch als LO ("leading order") bezeichnet.

lungen

$$\begin{aligned} O_{ij}^{nL} &= \frac{1}{2}[N_{i4}N_{j4}^* - N_{i3}N_{j3}^*] \\ O_{ij}^{nR} &= \frac{1}{2}[N_{i3}^*N_{j3} - N_{i4}^*N_{j4}] \end{aligned} \quad (2.4)$$

mit $O_{ij}^{nR} = -O_{ij}^{nL*}$ und N_{ab} als Element der Mischungsmatrix.

(iii) Die Z^0 -Boson-Quark-Quark-Kopplung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_{Zqq}^L &= 2I_q^3 \cdot (1 - 2s_w^2 |e_q|) \\ C_{Zqq}^R &= -2s_w^2 e_q, \end{aligned} \quad (2.5)$$

wobei I_q die dritte Komponente des Isospins und e_q die Quarkladung ist. Weiterhin gilt hier $s_w = \sin(\theta_W)$ und $c_w = \cos(\theta_W)$ mit dem Weinbergwinkel θ_W .

Eine umfangreiche Übersicht zu den Kopplungen findet man in [7].

2.2 Wesentliche Identitäten beim Rechnen mit γ -Matrizen

Da die Spur eine lineare Abbildung ist, gelten die folgenden **Spureigenschaften**:

$$Tr[A + B] = Tr[A] + Tr[B] \quad (2.6)$$

$$Tr[xA] = x \cdot Tr[A], \quad (2.7)$$

wobei A, B $n \times n$ -Matrizen sind und $x \in \mathbb{R}$.

Für die Gamma-Matrizen gelten die folgenden **Spuridentitäten**:

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad (2.8)$$

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}) \quad (2.9)$$

$$Tr[\underbrace{\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega}_n] = 0 \quad , \text{falls } n \text{ ungerade} \quad (2.10)$$

$$Tr[\gamma^5] = Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0 \quad (2.11)$$

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^5] = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (2.12)$$

$$Tr[\gamma^5 \underbrace{\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega}_n] = 0 \quad , \text{falls } n \text{ ungerade.} \quad (2.13)$$

Dabei ist $g^{\mu\nu}$ die Minkowski-Metrik und $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ der Levi-Civita-Tensor.

Weiterhin nützlich sind einige aus der Definition der **Feynman-Slash-Notation** (1.12) folgende Identitäten:

$$\gamma^\alpha \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\alpha = -2 \not{c} \not{b} \not{a} \quad (2.14)$$

$$\gamma^\alpha \not{a} \not{b} \gamma_\alpha = 4(a \cdot b) \quad (2.15)$$

$$Tr[\not{a} \not{b}] = 4(a \cdot b). \quad (2.16)$$

Hier sind a, b und c beliebige Vierervektoren.

Teil III

Hauptteil

3 Der Drell-Yan-Prozess

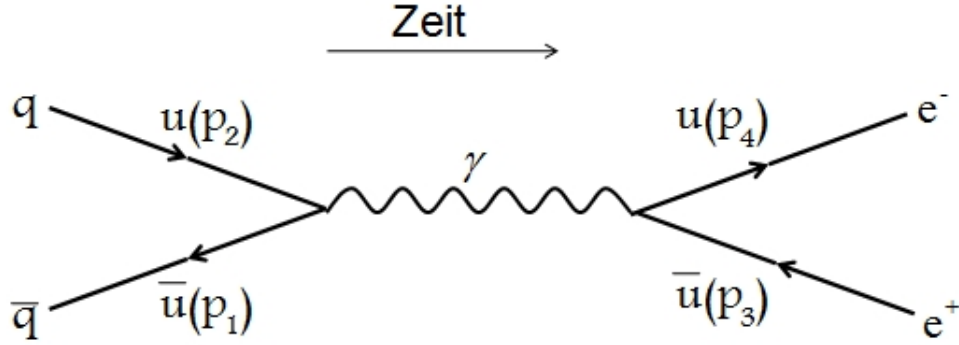


Abbildung 8: Feynman-Diagramm zum Drell-Yan-Prozess

Als einführendes Beispiel für das grundsätzliche Vorgehen zur Berechnung eines Streuprozesses mithilfe eines Feynman-Diagramms soll zunächst ein Drell-Yan-Prozess in leading order (LO) untersucht werden. Als Drell-Yan-Prozess bezeichnet man ganz allgemein einen Hadron-Hadron-Streuprozess, bei dem ein Quark aus einem Hadron mit einem Antiquark aus einem zweiten Hadron annihiliert. Dabei wird ein virtuelles Photon oder ein Z^0 -Boson gebildet, das in ein entgegengesetzt geladenes Leptonenpaar zerfällt. Wir betrachten hier die Produktion eines Elektron-Positron-Paares aus einem virtuellen Photon.

3.1 Bestimmung der Amplitude M

Zur Bestimmung der Amplitude müssen zunächst Ausdrücke für die beiden beteiligten Teilchenströme j_i gemäß den in Kapitel 2.1 eingeführten Feynman-Regeln gefunden werden. Es gilt hierbei dann für den linken Strom

$$j_l = [u^{(s_2)}(p_2)(ig_q\gamma^\nu)\bar{u}^{(s_1)}(p_1)] \quad (3.1)$$

und für den rechten Strom analog

$$j_r = [u^{(s_4)}(p_4)(ig_e\gamma^\mu)\bar{u}^{(s_3)}(p_3)]. \quad (3.2)$$

Dabei sind $g_e = e$ und $g_q = ee_q$ die zu berücksichtigenden Vertexfaktoren, e ist die Elementarladung und e_q die Quarkladung.

Mit dem γ -Propagator (2.1) und der verkürzten Schreibweise $u_i = u^{(s_i)}(p_i)$ folgt dann für die Amplitude:

$$M = -e^2 e_q \cdot \frac{[u_4 \gamma^\mu \bar{u}_3][u_2 \gamma_\mu \bar{u}_1]}{(p_3 + p_4)^2}. \quad (3.3)$$

3.2 Berechnung der quadrierten Amplitude $|M|^2$

Durch Bildung des Betragsquadrats erhält man:

$$|M|^2 = \frac{e^4 e_q^2}{(p_3 + p_4)^4} \cdot [u_4 \gamma^\mu \bar{u}_3][u_2 \gamma_\mu \bar{u}_1] \cdot [u_4 \gamma^\nu \bar{u}_3]^* [u_2 \gamma_\nu \bar{u}_1]^*. \quad (3.4)$$

Darüber hinaus muss über die Spins der Teilchen im Anfangszustand gemittelt und über die im Endzustand summiert werden, da wir den unpolarisierten Zustand betrachten wollen. Für diesen gilt dann also:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{(2s_q + 2s_e)^2} \cdot \sum_{s_q, s'_q} \sum_{s_e, s'_e} |M|^2 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{s_1, s_2} \sum_{s_3, s_4} |M|^2. \quad (3.5)$$

Die Berechnung der beiden Summen erfolgt mithilfe des sogenannten Casimir-Tricks (1.31). Dies führt am Beispiel der Summe über s_3 und s_4 auf folgendes Zwischenergebnis:

$$\sum_{s_3, s_4} [u_4 \gamma^\mu \bar{u}_3][u_4 \gamma^\nu \bar{u}_3]^* = \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_4 + m_e)]. \quad (3.6)$$

Analog erhält man die zweite Summe, sodass sich schließlich für das Amplitudenquadrat des unpolarisierten Zustandes ein Produkt aus Spuren über Delta-Matrizen ergibt:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{e^4 e_q^2}{4(p_3 + p_4)^4} \cdot \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_4 + m_e)] \cdot \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{p}_1 + m_q) \gamma_\nu (\not{p}_2 + m_q)]. \quad (3.7)$$

Die Berechnung der Spuren erfolgt dann unter Verwendung der zuvor in Kapitel 2.2 eingeführten Identitäten. Es gilt daher beispielhaft für die Spur über \not{p}_3 und \not{p}_4 :

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_4 + m_e)] &= \text{Tr}[\gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_4 + \gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu m_e + \gamma^\mu m_e \gamma^\nu \not{p}_4 + m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &\stackrel{(2.6)+(2.10)}{=} \text{Tr}[\gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_4] + m_e^2 \cdot \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &\stackrel{(2.8)+(2.9)}{=} 4 \cdot [p_3^\mu p_4^\nu - g^{\mu\nu} (p_3 p_4) + p_4^\mu p_3^\nu + m_e^2 g^{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Berechnung der zweiten Spur erfolgt analog, man erhält also:

$$\text{Tr}[\gamma_\mu (\not{p}_1 + m_q) \gamma_\nu (\not{p}_2 + m_q)] = 4 \cdot [p_{1\mu} p_{2\nu} - g_{\mu\nu} (p_1 p_2) + p_{2\mu} p_{1\nu} + m_q^2 g_{\mu\nu}]. \quad (3.9)$$

Damit folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} \langle |M|^2 \rangle &= \frac{16e^4 e_q^2}{4(p_3 + p_4)^4} \cdot [p_3^\mu p_4^\nu - g^{\mu\nu} (p_3 p_4) + p_4^\mu p_3^\nu + m_e^2 g^{\mu\nu}] \\ &\quad \cdot [p_{1\mu} p_{2\nu} - g_{\mu\nu} (p_1 p_2) + p_{2\mu} p_{1\nu} + m_q^2 g_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Im Grenzfall hoher Energien, dem sogenannten ultrarelativistischen Limes, lassen sich dann sowohl die Quark- als auch die Elektronenruhemassen vernachlässigen. Die Multiplikation der Viererimpulse liefert dann:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{8e^4 e_q^2}{(p_3 + p_4)^4} \cdot [(p_1 p_3)(p_2 p_4) + (p_1 p_4)(p_2 p_3)]. \quad (3.11)$$

Durch Einführung der Mandelstam-Variablen

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \approx 2p_1p_2 \approx 2p_3p_4 \\ t &= (p_2 - p_4)^2 = (p_1 - p_3)^2 \approx -2p_2p_4 \approx -2p_1p_3 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \approx -2p_1p_4 \approx -2p_2p_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

erhält man schließlich

$$\langle |M|^2 \rangle = 2e^4 e_q^2 \cdot \frac{t^2 + u^2}{s^2}. \quad (3.13)$$

3.3 Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Im Schwerpunktsystem gilt für die Viererimpulse der beteiligten Teilchen:

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, \vec{p}) \\ p_2 &= (E, -\vec{p}) \\ p_3 &= (E, \vec{p}') \\ p_4 &= (E, -\vec{p}') \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit $\vec{p}^2 = E^2 - m^2 \approx E^2$ sowie $|\vec{p}|^2 = |\vec{p}'|^2$ aus Gründen der Viererimpulserhaltung.

Mit dem Streuwinkel θ folgt dann für die Mandelstam-Variablen

$$\begin{aligned} s &\approx 4E^2 \\ t &\approx -2E^2 \cdot (1 - \cos(\theta)) \\ u &\approx -2E^2 \cdot (1 + \cos(\theta)), \end{aligned} \quad (3.15)$$

sodass man durch Einsetzen in (3.13) schließlich

$$\langle |M|^2 \rangle = e^4 e_q^2 \cdot (1 + \cos^2(\theta)) \quad (3.16)$$

für das Amplitudenquadrat erhält.

Mit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|p_f|}{|p_i|} \langle |M|^2 \rangle \quad (3.17)$$

(vgl. [5, S.294]), wobei hier und bei den beiden folgenden Prozessen stets $|p_f| \approx |p_i|$ gilt⁶, folgt dann für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{CM}^{Drell-Yan} = \frac{e^4 e_q^2}{64\pi^2 \cdot 4E^2} \cdot (1 + \cos^2(\theta)) \quad (3.18)$$

$$= \frac{\alpha^2 e_q^2}{4s} \cdot (1 + \cos^2(\theta)) \quad (3.19)$$

mit der elektromagnetischen Feinstrukturkonstanten $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

⁶Dies hängt damit zusammen, dass das Verhältnis entscheidend von den Massenquadratsummen und -differenzen der Teilchen im Eingangs- und Ausgangskanal abhängt. Da diese jedoch im ultrarelativistischen Limes vernachlässigbar klein sind, kann das Verhältnis näherungsweise als 1 betrachtet werden.

Das Ergebnis für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma|_{CM}^{Drell-Yan} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}|_{CM}^{Drell-Yan} d\Omega = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot e_q^2 \quad (3.20)$$

stimmt dann mit jenem aus [3, 248] überein.

Im Rahmen der theoretischen Physik ist auch die Angabe des differentiellen Wirkungsquerschnitts gemäß

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi s^2} < |M|^2 > \quad (3.21)$$

für masselose 2-nach-2-Prozesse anzutreffen [5, S.89]. Mit (3.13) ergibt sich für diesen:

$$\frac{d\sigma}{dt}|_{Drell-Yan} = 2\pi\alpha^2 e_q^2 \cdot \frac{t^2 + u^2}{s^4}. \quad (3.22)$$

4 Die Bhabha-Streuung

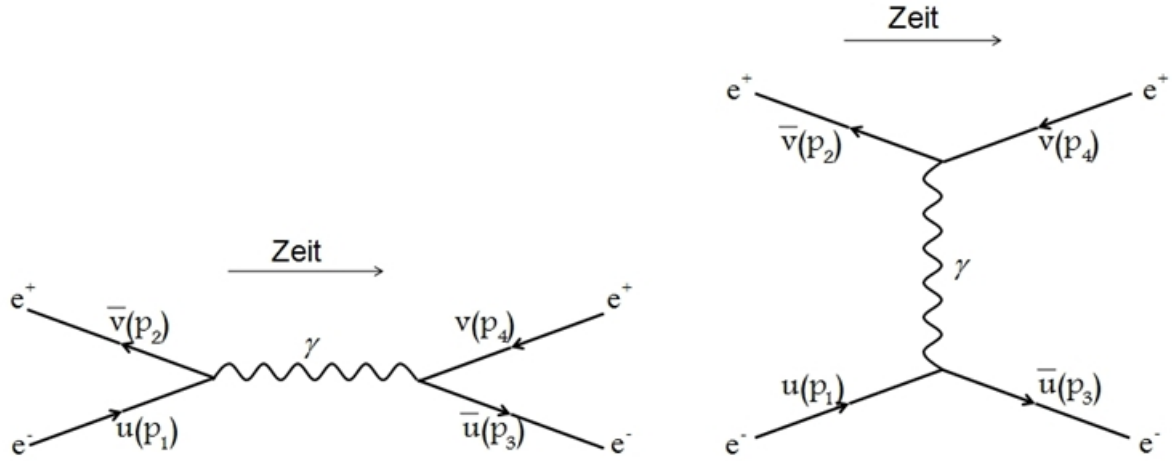


Abbildung 9: Feynman-Diagramme zur Bhabha-Streuung (s-Kanal links, t-Kanal rechts)

Im zweiten Schritt soll nun die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts der Bhabha-Streuung in LO erfolgen. Als Bhabha-Streuung bezeichnet man den nach dem indischen Physiker Homi J. Bhabha benannten Prozess der Elektron-Positron-Streuung. Er ist damit also ein Prozess der Quantenelektrodynamik.

Die Berechnung dieser Wechselwirkung geschieht im Wesentlichen analog zum Vorgehen beim Drell-Yan-Prozess. Hier ist allerdings darauf zu achten, dass der Prozess durch zwei Feynman-Diagramme führender Ordnung, einem sogenannten s- und einem t-Kanal, beschrieben wird. Entsprechend sind bei der Berechnung des Amplitudenquadrats zusätzliche Interferenzterme zu erwarten.

4.1 Bestimmung der Amplitude M

In einem ersten Schritt sollen wiederum zunächst die beteiligten Ströme ermittelt werden:

$$s - \text{Kanal} : j_l = [\bar{v}_2(ig_e\gamma^\mu)u_1] \quad (4.1)$$

$$j_r = [\bar{u}_3(ig_e\gamma^\nu)v_4]$$

$$t - \text{Kanal} : j_o = [\bar{v}_2(ig_e\gamma^\mu)v_4] \quad (4.2)$$

$$j_u = [\bar{u}_3(ig_e\gamma^\nu)u_1].$$

Da der Prozess hier ebenso wie bei Drell-Yan durch den Austausch eines virtuellen Photons beschrieben werden kann, ist wiederum der Photonpropagator (2.1) zu verwenden. Es ergibt sich somit:

$$M_s = \frac{-e^2}{(p_1 + p_2)^2} \cdot [\bar{v}_2\gamma^\mu u_1][\bar{u}_3\gamma_\mu v_4] \quad (4.3)$$

$$M_t = \frac{-e^2}{(p_2 - p_4)^2} \cdot [\bar{v}_2\gamma^\lambda v_4][\bar{u}_3\gamma_\lambda u_1]. \quad (4.4)$$

Da im Anfangs- und im Endzustand dieselben Fermionen auftauchen, liegt eine Antisymmetrisierung der beiden Amplituden M_s und M_t vor, sodass für die Gesamtamplitude M gilt:

$$M = M_t - M_s = \frac{-e^2}{(p_2 - p_4)^2} \cdot [\bar{v}_2\gamma^\lambda v_4][\bar{u}_3\gamma_\lambda u_1] + \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} \cdot [\bar{v}_2\gamma^\mu u_1][\bar{u}_3\gamma_\mu v_4]. \quad (4.5)$$

4.2 Berechnung der quadrierten Amplitude $|M|^2$

Nun ist wiederum das Betragsquadrat zu bilden; wie anfänglich bereits angesprochen, treten nun neben den quadratischen Termen zusätzliche Interferenzterme auf, die berechnet werden müssen. Man erhält den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 |M|^2 = e^4 \cdot \underbrace{\left| \frac{[\bar{v}_2 \gamma^\lambda v_4][\bar{u}_3 \gamma_\lambda u_1]}{(p_2 - p_4)^2} \right|^2}_{\text{Streuung}} &- e^4 \cdot \underbrace{\left(\frac{[\bar{v}_2 \gamma^\lambda v_4][\bar{u}_3 \gamma_\lambda u_1]}{(p_2 - p_4)^2} \right)^* \cdot \left(\frac{[\bar{v}_2 \gamma^\mu u_1][\bar{u}_3 \gamma_\mu v_4]}{(p_1 + p_2)^2} \right)}_{\text{Interferenzterm1}} \\
 &- e^4 \cdot \underbrace{\left(\frac{[\bar{v}_2 \gamma^\lambda v_4][\bar{u}_3 \gamma_\lambda u_1]}{(p_2 - p_4)^2} \right) \cdot \left(\frac{[\bar{v}_2 \gamma^\mu u_1][\bar{u}_3 \gamma_\mu v_4]}{(p_1 + p_2)^2} \right)^*}_{\text{Interferenzterm2}} + e^4 \cdot \underbrace{\left| \frac{[\bar{v}_2 \gamma^\mu u_1][\bar{u}_3 \gamma_\mu v_4]}{(p_1 + p_2)^2} \right|^2}_{\text{Annihilation}}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dabei ist zur Berechnung des unpolarisierten Zustandes wiederum über die Spins der einlaufenden Teilchen zu mitteln und über die der auslaufenden zu summieren. Da hier lediglich Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen beteiligt sind, erhält man so:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |M|^2. \tag{4.7}$$

Nun gilt es also, die vier Summanden in (4.6) zu berechnen.

Die Berechnungen des Streu- und des Annihilationsterms verlaufen im Wesentlichen analog zu der des Drell-Yan-Prozesses. Betrachten wir zunächst den Streuterm:

$$\begin{aligned}
 \langle |M|_s^2 \rangle &= \frac{e^4}{4(p_2 - p_4)^4} \sum_{\text{Spins}} ([\bar{v}_2 \gamma^\nu v_4][\bar{v}_2 \gamma^\lambda v_4]^* \cdot [\bar{u}_3 \gamma_\nu u_1][\bar{u}_3 \gamma_\lambda u_1]^*) \\
 &\stackrel{(1.31)}{=} \frac{e^4}{(p_2 - p_4)^4} \cdot \text{Tr}[\gamma^\nu (\not{p}_2 - m_e) \gamma^\lambda (\not{p}_4 - m_e)] \cdot \text{Tr}[\gamma_\nu (\not{p}_3 + m_e) \gamma_\lambda (\not{p}_1 + m_e)].
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.9)

Die Berechnung der Spuren über die Gamma-Matrizen erfolgt vollkommen analog zu (3.8), sodass man mit den ausgewerteten Spuren

$$\begin{aligned}
 \langle |M|_s^2 \rangle &= \frac{4e^4}{(p_2 - p_4)^4} \cdot [p_2^\nu p_4^\lambda - g^{\nu\lambda}(p_2 p_4) + p_2^\lambda p_4^\nu + m_e^2 g^{\nu\lambda}] \\
 &\quad \cdot [p_{3\nu} p_{1\lambda} - g_{\nu\lambda}(p_1 p_3) + p_{3\lambda} p_{1\nu} + m_e^2 g_{\nu\lambda}]
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

erhält. Unter Vernachlässigung der Elektron-/ Positronmassen lässt sich dies im Grenzfall großer Energien zusammenfassen zu

$$\langle |M|_s^2 \rangle = \frac{8e^4}{(p_2 - p_4)^4} \cdot [(p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_2)(p_3 p_4)], \tag{4.11}$$

sodass man schließlich unter Einführung der Mandelstam-Variablen (3.12) den kompakten Ausdruck

$$\langle |M|_s^2 \rangle = 2e^4 \cdot \frac{u^2 + s^2}{t^2} \tag{4.12}$$

erhält.

Das Ergebnis für den Annihilationsterm lässt sich unter Beachtung zweier Aspekte direkt aus dem des Streutermes ablesen. Einerseits ist der Impulsübertrag $q_{\text{Streuung}} = (p_2 - p_4)^2$ durch $q_{\text{Annihilation}} = (p_1 + p_2)^2$ zu ersetzen, andererseits gehen die Diagramme durch Vertauschung von p_1 und p_4 ineinander über. Es ist somit direkt ablesbar, dass für den Annihilationsterm

$$\begin{aligned} \langle |M|_a^2 \rangle &= \frac{8e^4}{(p_1 + p_2)^4} \cdot [(p_4 p_1)(p_2 p_3) + (p_4 p_2)(p_3 p_1)] \\ &\stackrel{(3.12)}{=} 2e^4 \cdot \frac{u^2 + t^2}{s^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

gelten muss.

Die Berechnung der beiden Interferenzterme erfordert hingegen eine detailliertere Betrachtung, da hier insbesondere strukturell andere Spuren auftreten, die es zu berechnen gilt. Wir wollen beispielhaft Interferenzterm 1 näher betrachten:

$$\begin{aligned} |M|_{Int1}^2 &= \frac{-e^4}{(p_2 - p_4)^2(p_1 + p_2)^2} \cdot ([\bar{v}(2)\gamma^\lambda v(4)]^* [\bar{u}(3)\gamma_\lambda u(1)]^* \cdot [\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)][\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)]) \\ &= \frac{-e^4}{(p_2 - p_4)^2(p_1 + p_2)^2} \cdot ([\bar{v}(4)\gamma^\lambda v(2)] \cdot [\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)] \cdot [\bar{u}(1)\gamma_\lambda u(3)] \cdot [\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)]) . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Wie zuvor muss wiederum über die einfallenden Teilchenspins gemittelt und über die auslaufenden summiert werden. Man erhält damit für den unpolarisierten Zustand im Grenzfall hoher Energien:

$$\begin{aligned} \langle |M|_{Int1}^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{Spins} |M|_{Int1}^2 \\ &\stackrel{(1.31)}{=} \frac{-e^4}{4(p_2 - p_4)^2(p_1 + p_2)^2} \cdot Tr[(\not{p}_4 - m_e)\gamma^\lambda(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma_\lambda(\not{p}_3 + m_e)\gamma_\mu] \\ &= \frac{-e^4}{4(p_2 - p_4)^2(p_1 + p_2)^2} \cdot Tr[\not{p}_4\gamma^\lambda\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1\gamma_\lambda\not{p}_3\gamma_\mu] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dieser Ausdruck lässt sich vereinfachen, indem man vor der Spurbildung über λ und μ summiert. Mit (2.14) und (2.15) erhält man dann unter Ausnutzung der Assoziativität der Matrizenmultiplikation Folgendes:

$$\begin{aligned} \langle |M|_{Int1}^2 \rangle &= \frac{-e^4}{4(p_2 - p_4)^2(p_1 + p_2)^2} \cdot Tr[\not{p}_4(\gamma^\lambda\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1\gamma_\lambda)\not{p}_3\gamma_\mu] \\ &\stackrel{(2.14)}{=} \frac{e^4}{2(p_2 - p_4)^2(p_1 + p_2)^2} \cdot Tr[\not{p}_4\not{p}_1(\gamma^\mu\not{p}_2\not{p}_3\gamma_\mu)] \\ &\stackrel{(2.15)}{=} \frac{8e^4}{(p_2 - p_4)^2(p_1 + p_2)^2} \cdot (p_2 p_3)(p_1 p_4) \\ &\stackrel{(3.12)}{=} 2e^4 \cdot \frac{u^2}{s \cdot t} . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Berechnung des zweiten Interferenzterms erfolgt völlig analog - daher seien an dieser Stelle nur die wesentlichen Zwischenschritte der Nachvollziehbarkeit halber kurz auf-

geführt. Es gilt für das Amplitudenbetragsquadrat

$$\begin{aligned}
|M|_{Int2}^2 &= \frac{-e^4}{(p_2 - p_4)^2(p_1 + p_2)^2} \cdot ([\bar{v}(2)\gamma^\lambda v(4)][\bar{u}(3)\gamma_\lambda u(1)] \cdot [\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)]^* [\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)]^*) \\
&= \frac{-e^4}{(p_2 - p_4)^2(p_1 + p_2)^2} \cdot ([\bar{v}(2)\gamma^\lambda v(4)] \cdot [\bar{v}(4)\gamma_\mu u(3)] \cdot [\bar{u}(3)\gamma_\lambda u(1)] \cdot [\bar{u}(1)\gamma^\mu v(2)])
\end{aligned} \tag{4.17}$$

und damit für einen unpolarisierten Zustand

$$\langle |M|_{Int2}^2 \rangle = \frac{-e^4}{4(p_2 - p_4)^2(p_1 + p_2)^2} \cdot Tr[(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\lambda(\not{p}_4 - m_e)\gamma_\mu(\not{p}_3 + m_e)\gamma_\lambda(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\mu] \tag{4.18}$$

sowie speziell im Grenzfall hoher Energien

$$\begin{aligned}
\langle |M|_{Int2}^2 \rangle &= \frac{-e^4}{4(p_2 - p_4)^2(p_1 + p_2)^2} \cdot Tr[\not{p}_2\gamma^\lambda\not{p}_4\gamma_\mu\not{p}_3\gamma_\lambda\not{p}_1\gamma^\mu] \\
&= 2e^4 \cdot \frac{u^2}{s \cdot t}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Nun lässt sich die gesamte Wahrscheinlichkeitsamplitude durch Zusammenfassen der Ergebnisse (4.12),(4.13),(4.16) und (4.19) bestimmen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\langle |M|^2 \rangle &= \langle |M|_s^2 \rangle + \langle |M|_a^2 \rangle + \langle |M|_{Int1}^2 \rangle + \langle |M|_{Int2}^2 \rangle \\
&= 2e^4 \cdot \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{2u^2}{st} \right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem Literaturwert, wie man ihn bei [3, S.145] findet, überein.

4.3 Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Entsprechend der Überlegungen zur Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts im Schwerpunktsystem beim Drell-Yan-Prozess - (3.14) und (3.15)- lässt sich das zuvor ermittelte Amplitudenquadrat als Funktion der Energie E ⁷ und des Streuwinkels θ formulieren.

$$\begin{aligned}
\frac{\langle |M|^2 \rangle}{2e^4} &= \left(\frac{(1 - \cos(\theta))^2 + (1 + \cos(\theta))^2}{4} \right) + \left(\frac{(1 + \cos(\theta))^2 + 4}{(1 - \cos(\theta))^2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{(1 - \cos(\theta))(1 + \cos(\theta)) - 2(1 + \cos(\theta))}{(1 - \cos(\theta))} \right).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Mit (3.17) lässt sich dann der differentielle Wirkungsquerschnitt der Bhabha-Streuung im CM-System unter Ausnutzung elementarer Additionstheoreme bestimmen. Man erhält so:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{CM}^{Bhabha} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \cdot \left(\left(\frac{1 + \cos^2(\theta)}{2} \right) + \left(\frac{1 + \cos^4(\frac{\theta}{2})}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} \right) - \left(\frac{2\cos^4(\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \right) \right). \tag{4.22}$$

Häufig findet man stattdessen auch die Angabe des differentiellen Wirkungsquerschnitts als Funktion der Mandelstam-Variablen:

$$\frac{d\sigma}{dt}|_{Bhabha} = \frac{2\pi\alpha^2}{s^2} \cdot \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{2u^2}{st} \right). \tag{4.23}$$

Dies stimmt mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt aus [4, S.82] überein.

⁷Die Energieabhängigkeit kürzt sich dabei an dieser Stelle gerade raus.

5 Die Lepton-Paar-Erzeugung

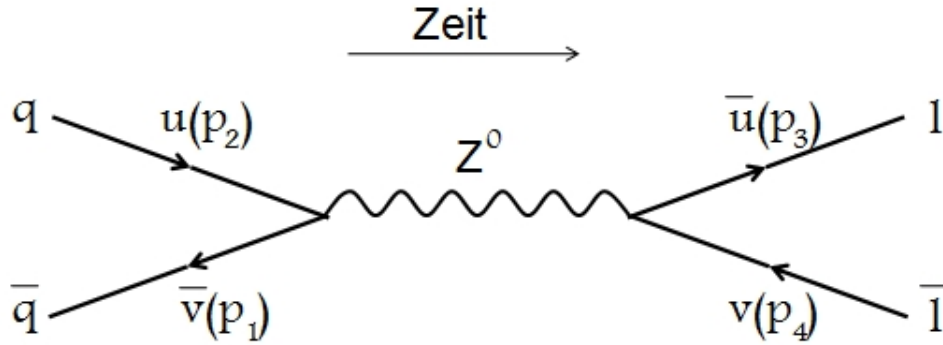


Abbildung 10: Feynman-Diagramm zur Lepton-Paar-Erzeugung

In diesem Abschnitt soll nun der Wirkungsquerschnitt für die Lepton-Paar-Erzeugung aus einem Quark-Antiquark-Paar berechnet werden. Bei diesem Prozess handelt es sich - im Gegensatz zu den beiden vorherigen - um einen der schwachen Wechselwirkung. Der Prozess kann durch den Austausch eines massiven Z^0 -Eichbosons beschrieben werden, es handelt sich also um einen semileptonischen neutralen Prozess.

Um der Paritätsverletzung im Rahmen der schwachen Wechselwirkung gerecht zu werden, ist zudem die Identifizierung eines rechts- und eines linkshändigen Anteils bei allen beteiligten Fermionen nötig.

5.1 Bestimmung der Amplitude M

Wie auch in den vorherigen Abschnitten sind zunächst die Ströme zu bestimmen. Dazu werden die in Kapitel (2.1) vorgestellten Feynman-Regeln für QCD verwendet. Man erhält auf diese Weise folgende Ströme:

$$\begin{aligned} j_l &= \left[\bar{v}_1 \left(-i \frac{g_z}{2} \gamma^\mu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) \right) u_2 \right] \\ j_r &= \left[\bar{u}_3 \left(-i \frac{g_z}{2} \gamma^\nu (c_V^l - c_A^l \gamma^5) \right) v_4 \right]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Unter Berücksichtigung des multiplikativen Faktors für den Z^0 -Propagator (2.2) erhält man insgesamt für die Amplitude den folgenden Ausdruck:

$$M = \left(\frac{-g_z^2}{4(q^2 - M_Z^2)} \right) \cdot [\bar{u}_3 \gamma^\mu (c_V^l - c_A^l \gamma^5) v_4] \cdot \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_Z^2} \right) \cdot [\bar{v}_1 \gamma^\nu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) u_2]. \quad (5.2)$$

Aufgrund der deutlich geringeren Massen der Fermionen gegenüber der des massiven Z^0 -Eichbosons kann der Beitrag des Terms $\frac{q_\mu q_\nu}{M_Z^2}$ in erster Näherung vernachlässigt werden. Es bleibt dann noch:

$$M = \left(\frac{-g_z^2}{4(q^2 - M_Z^2)} \right) \cdot [\bar{u}_3 \gamma^\mu (c_V^l - c_A^l \gamma^5) v_4] \cdot [\bar{v}_1 \gamma_\mu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) u_2]. \quad (5.3)$$

5.2 Berechnung der quadrierten Amplitude $|M|^2$

In einem zweiten Schritt zur Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts ist wiederum das Betragsquadrat zu bilden:

$$|M|^2 = \left| \frac{g_z^2}{4(q^2 - M_Z^2)} \right|^2 \cdot |[\bar{u}_3 \gamma^\mu (c_V^l - c_A^l \gamma^5) v_4]|^2 \cdot |[\bar{v}_1 \gamma_\mu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) u_2]|^2. \quad (5.4)$$

Für die Betrachtung des unpolarisierten Zustandes ergibt die Mittelung über die Spins der einlaufenden Teilchen und die Summation über die der auslaufenden Teilchen wiederum einen Vorfaktor $\frac{1}{4}$. Zusätzlich ist über die Farben zu summieren: Da Leptonen natürlich keine Farbladung besitzen, führt dies auf einen weiteren Vorfaktor gemäß

$$\frac{1}{N_c^2} \cdot \sum_{\substack{\text{Farben} \\ \text{Ausgangszustand}}} \sum_{\substack{\text{Farben} \\ \text{Eingangszustand}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \sum_{\substack{\text{Farbe} \\ \text{Quarks}}} = \frac{1}{3} \quad (5.5)$$

mit $N_c = 3$ als Anzahl möglicher Farben. Insgesamt erhält man damit:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{g_z^2}{8(q^2 - M_Z^2)} \right|^2 \cdot \sum_{s_1, s_2} \sum_{s_3, s_4} |[\bar{u}_3 \gamma^\mu (c_V^l - c_A^l \gamma^5) v_4]|^2 \cdot |[\bar{v}_1 \gamma_\mu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) u_2]|^2. \quad (5.6)$$

Mit (1.31) und unter Vernachlässigung der Massen führt dies wiederum auf die Berechnung von Spuren über Gamma-Matrizen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{g_z^2}{8(q^2 - M_Z^2)} \right|^2 \cdot & Tr[\gamma_\mu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) \not{p}_2 \gamma_\nu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) \not{p}_1] \\ & \cdot Tr[\gamma^\mu (c_V^l - c_A^l \gamma^5) \not{p}_4 \gamma^\nu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) \not{p}_3]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die explizite Berechnung der Spuren - insbesondere die Multiplikation beider Spuren - ist hier etwas aufwendiger als zuvor. Da allerdings dennoch das explizite Berechnen im Vordergrund dieser Arbeit stehen soll, wird hier ein Mittelweg angestrebt, anhand dessen die Rechnung gut nachvollziehbar sein sollte⁸. Zu diesem Zweck betrachten wir beispielhaft die Spur mit den Quark-Kopplungen:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_\mu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) \not{p}_2 \gamma_\nu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) \not{p}_1] & \stackrel{(1.19)}{=} Tr[\gamma_\mu (c_V^q - c_A^q \gamma^5)^2 \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_1] \\ & \stackrel{(1.18)}{=} Tr[\gamma_\mu ((c_V^q)^2 + (c_A^q)^2 - 2c_V^q c_A^q \gamma^5) \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_1] \\ & \stackrel{(1.12)}{=} ((c_V^q)^2 + (c_A^q)^2) \cdot Tr[\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_1] \\ & \quad - 2c_V^q c_A^q \cdot Tr[\gamma_\mu \gamma^5 \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_1]. \end{aligned}$$

Die Spuren lassen sich wie bisher mithilfe der in der Theorie zusammengefassten Spureidentitäten berechnen; für jene ohne γ^5 wird wie in vorherigen Rechnungen auch (2.9) genutzt, für die Spur mit γ^5 kann (2.12) verwendet werden. Man erhält dann insgesamt:

$$\begin{aligned} & Tr[\gamma_\mu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) \not{p}_2 \gamma_\nu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) \not{p}_1] \\ & = 8i \cdot c_V^q c_A^q \cdot p_2^\rho p_1^\sigma \epsilon_{\mu\rho\nu\sigma} + 4 \left((c_V^q)^2 + (c_A^q)^2 \right) \cdot (p_2^\mu p_1^\nu - g_{\mu\nu} (p_2 p_1) + p_2^\nu p_1^\mu). \end{aligned} \quad (5.8)$$

⁸Natürlich ließen sich die Spuren auch numerisch, beispielsweise mit dem *Tracer*-Paket für *Mathematica*, berechnen.

Und für die zweite Spur analog:

$$\begin{aligned} & Tr[\gamma^\mu (c_V^l - c_A^l \gamma^5) \not{p}_4 \gamma^\nu (c_V^l - c_A^l \gamma^5) \not{p}_3] \\ &= 8i \cdot c_V^l c_A^l \cdot p_{4\rho} p_{3\sigma} \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma} + 4 \left((c_V^l)^2 + (c_A^l)^2 \right) \cdot (p_{4\mu} p_{3\nu} - g^{\mu\nu} (p_4 p_3) + p_{4\nu} p_{3\mu}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Für das Produkt der beiden Spuren sind dann im Wesentlichen drei Arten von Ausdrücken zu unterscheiden:

- Terme ohne Levi-Civita-Symbol:

Die Terme ohne das Permutationssymbol ϵ lassen sich wie bei den vorherigen Berechnungen direkt aus den Rechenvorschriften für Viererimpulse unter Beachtung der Minkowski-Metrik bestimmen. Diese liefern - nach Einführung der Mandelstam-Variablen (3.12) - insgesamt vier Summanden (entsprechend der verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten der Kopplungskonstanten $c_{V,A}^{q,l}$):

$$8 \left((c_A^q)^2 (c_A^l)^2 + (c_A^q)^2 (c_V^l)^2 + (c_V^q)^2 (c_A^l)^2 + (c_V^q)^2 (c_V^l)^2 \right) \cdot (t^2 + u^2). \quad (5.10)$$

- Term mit einem Produkt aus Levi-Civita-Symbolen:

Dieser Term lässt sich ebenfalls direkt berechnen. Es ergibt sich:

$$8i \cdot c_V^q c_A^q \cdot p_2^\rho p_1^\sigma \epsilon_{\mu\rho\nu\sigma} \cdot 8i \cdot c_V^l c_A^l \cdot p_{4\rho} p_{3\sigma} \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma} = 32 c_V^q c_A^q c_V^l c_A^l \cdot (t^2 - u^2). \quad (5.11)$$

- Terme mit einem Levi-Civita-Symbol:

Man kann zeigen, dass sich die Terme, in denen jeweils nur ein ϵ enthalten ist, gerade gegenseitig zu null ergeben. Die Rechnung ist aufgrund der Vielzahl der Terme zu länglich, um sie hier vollständig zu präsentieren, eine beispielhafte Rechnung scheint auch nicht sinnvoll, da nicht jeder einzelne Term null ist, sondern lediglich ihre gemeinsame Summe.

Mit diesen Vorüberlegungen erhält man insgesamt für das Amplitudenquadrat der Lepton-Paar-Erzeugung für einen unpolarisierten Zustand:

$$< |M|^2 > = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{g_z^2}{8(s - M_Z^2)} \right|^2 \cdot 8[(t^2 - u^2)d_1 + (t^2 + u^2)(d_2 + d_3)] \quad (5.12)$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &= 4c_V^q c_A^q c_V^l c_A^l \\ d_2 &= (c_A^q)^2 \cdot \left((c_A^l)^2 + (c_V^l)^2 \right) \\ d_3 &= (c_V^q)^2 \cdot \left((c_A^l)^2 + (c_V^l)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

bzw. mit $g_z = \frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{\sin(\theta_W)\cos(\theta_W)}$

$$< |M|^2 > = \frac{2\pi^2 \alpha^2 \cdot [(t^2 - u^2)d_1 + (t^2 + u^2)(d_2 + d_3)]}{3\sin^4(\theta_W)\cos^4(\theta_W) \cdot |s - M_Z^2|^2}. \quad (5.14)$$

5.3 Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Schließlich lässt sich analog zu den vorherigen Kapiteln zunächst das zuvor ermittelte Amplitudenquadrat als Funktion der Energie E und des Streuwinkels θ formulieren. Dazu nutzen wir (3.14) und (3.15) - man erhält dann:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{16\pi^2 \alpha^2 \cdot E^4}{3\sin^4(\theta_W)\cos^4(\theta_W) \cdot |s - M_Z^2|^2} \cdot [-2\cos(\theta)d_1 + (1 + \cos^2(\theta))(d_2 + d_3)]. \quad (5.15)$$

Mit (3.17) lässt sich dann der differentielle Wirkungsquerschnitt der Lepton-Paar-Erzeugung im CM-System bestimmen:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM}^{Lepton-Paar-Erzeugung} = \frac{\alpha^2 \cdot E^2}{48\sin^4(\theta_W)\cos^4(\theta_W) \cdot |s - M_Z^2|^2} \cdot [-2\cos(\theta)d_1 + (1 + \cos^2(\theta))(d_2 + d_3)]. \quad (5.16)$$

Häufig findet man stattdessen auch die Angabe des differentiellen Wirkungsquerschnitts als Funktion der Mandelstam-Variablen:

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{Lepton-Paar-Erzeugung} = \pi\alpha^2 \cdot \frac{[(t^2 - u^2)d_1 + (t^2 + u^2)(d_2 + d_3)]}{s^2 \cdot 24\sin^4(\theta_W)\cos^4(\theta_W) \cdot |s - M_Z^2|^2}. \quad (5.17)$$

Eine genauere Analyse dieses Prozesses inklusive einer Betrachtung der Korrekturen höherer Ordnung findet man bei [5, S.302ff.].

6 Erzeugung von supersymmetrischer Dunkler Materie

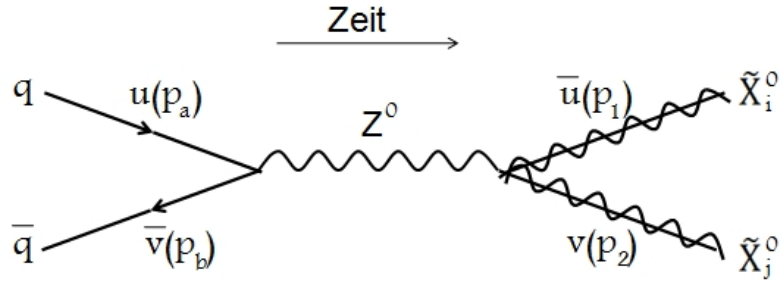


Abbildung 11: Feynman-Diagramme zur Erzeugung supersymmetrischer Dunkler Materie (s-Kanal)

In diesem Abschnitt soll schließlich die Produktion zweier ungeladener Neutralinos in Folge einer Proton-Proton-Kollision untersucht werden. Dabei vernichten sich ein Quark aus einem Proton und ein Antiquark aus einem anderen Proton gegenseitig unter Bildung eines Z^0 -Bosons. Dieses virtuelle Austauschteilchen zerfällt dann in zwei Neutralinos.

Dieser Prozess ist bisher nur theoretisch beschrieben; er konnte bis heute noch nicht experimentell nachgewiesen werden. Die Verifizierung dieses Prozess und damit insbesondere der Existenz von SUSY-Teilchen ist ein aktuelles Forschungsgebiet am LHC. Die $\tilde{\chi}_1^0$ sind vielversprechende Kandidaten für Dunkle Materie.

Bei der analytischen Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für diesen Prozess wollen wir neben der Beschränkung auf die führende Ordnung zusätzlich nur den s-Kanal betrachten - die Squark⁹-Massen werden hier also vernachlässigt.

Im Anschluss an die analytische Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts soll zudem abschließend noch der totale Wirkungsquerschnitt numerisch ermittelt und hinsichtlich seiner Abhängigkeit von der (noch unbekannten) Neutralinomasse und der zur Verfügung stehenden LHC-Energie untersucht werden.

6.1 Bestimmung der Amplitude M

Zunächst gilt es wiederum die Ströme aufzustellen; unter Verwendung der benötigten Kopplungen (2.5) und (2.4) erhält man:

$$\begin{aligned} j_l &= (ig_e) \cdot [\bar{v}_b \gamma^\mu (C_{Zqq}^L P_L + C_{Zqq}^R P_R) u_a] \\ j_r &= \left(\frac{ig_e}{2c_w^2} \right) \cdot [\bar{u}_1 \gamma^\nu (O_{ij}^{L} P_L + O_{ij}^{R} P_R) v_2] \end{aligned} \quad (6.1)$$

mit $g_e = \frac{e}{s_w}$ und $P_{R/L} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$ als Projektionsoperatoren für die rechts- bzw. die linkshändige Komponente. Dabei ist zu beachten, dass es sich bei Neutralinos um Majorana-Fermionen

⁹Squarks sind die SUSY-Partner der Quarks.

handelt, diese also ihre eigenen Antiteilchen sind. Durch geeignete Wahl der Pfeilrichtungen¹⁰ können die Ströme dann wie oben angegeben aufgestellt werden. Für die Amplitude des s-Kanals folgt somit:

$$M_s = \frac{-g_e^2}{2c_w^2(q^2 - M_Z^2)} \cdot [\bar{u}_1 \gamma_\mu (O_{ij}^L P_L + O_{ij}^R P_R) v_2] \cdot [\bar{v}_b \gamma^\mu (C_{Zqq}^L P_L + C_{Zqq}^R P_R) u_a]. \quad (6.2)$$

6.2 Berechnung der quadrierten Amplitude $|M|^2$

Mit den vorherigen Überlegungen lässt sich leicht das gesuchte Betragsquadrat bilden:

$$|M_s|^2 = \frac{g_e^2}{2c_w^2} \frac{1}{|q^2 - M_Z^2|^2} \cdot |[\bar{u}_1 \gamma_\mu (O_{ij}^L P_L + O_{ij}^R P_R) v_2]|^2 \cdot |[\bar{v}_b \gamma^\mu (C_{Zqq}^L P_L + C_{Zqq}^R P_R) u_a]|^2. \quad (6.3)$$

Da Quarks und Neutralinos Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen sind, erhält man aus der Spin-Mittelung einen Vorfaktor $\frac{1}{4}$. Die Mittelung über die Farben führt auf einen weiteren Faktor $\frac{1}{3}$. Darüber hinaus muss beachtet werden, dass für $i = j$ ein Korrekturfaktor einzuführen ist, da in diesem Fall ansonsten ein doppelt so großer Wirkungsquerschnitt erwartet werden würde¹¹. Insgesamt erhält man mit diesen Überlegungen für einen unpolarisierten Zustand:

$$\begin{aligned} \langle |M_s|^2 \rangle &= \frac{g_e^4}{48c_w^4} \left(\frac{1}{2} \right)^{\delta_{ij}} \frac{1}{|q^2 - M_Z^2|^2} \\ &\cdot \sum_{s_1, s_2} \sum_{s_a, s_b} |[\bar{u}_1 \gamma_\mu (O_{ij}^L P_L + O_{ij}^R P_R) v_2]|^2 \cdot |[\bar{v}_b \gamma^\mu (C_{Zqq}^L P_L + C_{Zqq}^R P_R) u_a]|^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Nun müssen die beiden Spinsummen ausgewertet werden. Dazu werden die folgenden Eigenschaften der Projektionsoperatoren, die sich direkt aus deren Definition ergeben, benötigt:

$$\begin{aligned} (P_{R/L})^2 &= P_{R/L} \\ (P_{R/L})^\dagger &= P_{R/L} \\ P_{R/L} \cdot P_{L/R} &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Wir wollen zunächst die Spur über s_1 und s_2 auswerten:

$$\begin{aligned} \sum_{s_1, s_2} |[\bar{u}_1 \gamma_\mu (O_{ij}^L P_L + O_{ij}^R P_R) v_2]|^2 &= \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}_1 \gamma_\mu (O_{ij}^L P_L + O_{ij}^R P_R) v_2] \cdot [\bar{v}_2 (O_{ij}^L P_L + O_{ij}^R P_R)^\dagger \gamma_\nu u_1] \\ &\stackrel{(1.31)}{=} \text{Tr} \left[\gamma_\mu (O_{ij}^L P_L + O_{ij}^R P_R) (\not{p}_2 - m_{\tilde{\chi}_j^0}) \gamma_\nu (O_{ij}^L P_L + O_{ij}^R P_R)^\dagger (\not{p}_1 + m_{\tilde{\chi}_i^0}) \right] \\ &\stackrel{(1.19)}{=} \text{Tr} \left[\gamma_\mu (\not{p}_2 + m_{\tilde{\chi}_j^0}) \gamma_\nu (O_{ij}^L P_L + O_{ij}^R P_R) (O_{ij}^L P_L + O_{ij}^R P_R)^\dagger (\not{p}_1 + m_{\tilde{\chi}_i^0}) \right] \\ &\stackrel{(6.5)}{=} \text{Tr} \left[\gamma_\mu (\not{p}_2 + m_{\tilde{\chi}_j^0}) \gamma_\nu (|O_{ij}^L|^2 P_L + |O_{ij}^R|^2 P_R) (\not{p}_1 + m_{\tilde{\chi}_i^0}) \right]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

¹⁰Siehe dazu die Vorüberlegungen in Kapitel 2.1.

¹¹Für $i = j$ wären die Neutralinos im Ausgangskanal nicht mehr zu unterscheiden, folglich würde man das Ereignis also doppelt so häufig messen wie im Fall $i \neq j$.

Durch Einsetzen der Definition der Projektionsoperatoren und Aufteilung der Spur in einzelne Summanden gemäß (2.6) lässt sich dieser Ausdruck auf 16 mittels (2.8) - (2.12) direkt berechenbare Spuren über Gamma-Matrizen zurückführen. Die entsprechende Auswertung führt insgesamt auf:

$$\begin{aligned} \sum_{s_1, s_2} & \left| [\bar{u}_1 \gamma_\mu (O_{ij}^L P_L + O_{ij}^R P_R) v_2] \right|^2 \\ &= 2 \cdot |O_{ij}^L|^2 \left[p_{2\mu} p_{1\nu} - g_{\mu\nu} (p_2 p_1) + p_{2\nu} p_{1\mu} + i p_2^\rho p_1^\sigma \epsilon_{\mu\rho\nu\sigma} + m_{\tilde{\chi}_j^0} m_{\tilde{\chi}_i^0} g_{\mu\nu} \right] \\ &+ 2 \cdot |O_{ij}^R|^2 \left[p_{2\mu} p_{1\nu} - g_{\mu\nu} (p_2 p_1) + p_{2\nu} p_{1\mu} - i p_2^\rho p_1^\sigma \epsilon_{\mu\rho\nu\sigma} + m_{\tilde{\chi}_j^0} m_{\tilde{\chi}_i^0} g_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Die Berechnung der zweiten Summe über die Spins der Quarks s_a und s_b verläuft fast völlig analog - es ist jedoch zu beachten, dass die Massen der Quarks (im Gegensatz zu jenen der Neutralinos) vernachlässigbar klein sind. Daher ergibt sich hier folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \sum_{s_a, s_b} & \left| [\bar{v}_b \gamma^\mu (C_{Zqq}^L P_L + C_{Zqq}^R P_R) u_a] \right|^2 \\ &= 2 \cdot |C_{Zqq}^L|^2 [p_b^\mu p_a^\nu - g^{\mu\nu} (p_b p_a) + p_b^\nu p_a^\mu + i p_{2\rho} p_{1\sigma} \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}] \\ &+ 2 \cdot |C_{Zqq}^R|^2 [p_b^\mu p_a^\nu - g^{\mu\nu} (p_b p_a) + p_b^\nu p_a^\mu - i p_{2\rho} p_{1\sigma} \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Nachdem die Summen ausgewertet wurden, muss nun gemäß (6.4) im Wesentlichen nur noch das Produkt bestimmt werden. Die Berechnung der Viererimpulse geschieht dabei analog zum Vorgehen in den vorherigen entsprechenden Kapiteln, die Terme mit den Levi-Civita-Symbolen heben sich aufgrund der unterschiedlichen Vorzeichen gerade gegenseitig auf, sodass man insgesamt

$$\begin{aligned} < |M_s|^2 > = \frac{g_e^4}{12c_w^4} \left(\frac{1}{2} \right)^{\delta_{ij}} \frac{1}{|q^2 - M_Z^2|^2} \\ \cdot [|O_{ij}^L|^2 |C_{Zqq}^L|^2 + |O_{ij}^L|^2 |C_{Zqq}^R|^2 + |O_{ij}^R|^2 |C_{Zqq}^L|^2 + |O_{ij}^R|^2 |C_{Zqq}^R|^2] \cdot Y \end{aligned} \quad (6.9)$$

mit $Y = 2(p_2 p_b)(p_1 p_a) + 2(p_1 p_b)(p_2 p_a) - 2m_{\tilde{\chi}_j^0} m_{\tilde{\chi}_i^0} (p_a p_b)$ erhält.

Da hier - anders als bei den bisherigen Prozessen - nicht alle Teilchenmassen vernachlässigbar sind, ist die Einführung reduzierter Mandelstam-Variablen sinnvoll:

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 \approx 2p_a p_b \\ t_{\tilde{\chi}_{i,j}^0} &= t - m_{\tilde{\chi}_{i,j}^0}^2 \approx -2p_a p_1 \approx -2p_b p_2 \\ u_{\tilde{\chi}_{i,j}^0} &= u - m_{\tilde{\chi}_{i,j}^0}^2 \approx -2p_b p_1 \approx -2p_a p_2. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Einsetzen in den obigen Ausdruck führt schließlich auf:

$$\begin{aligned} < |M_s|^2 > = \frac{g_e^4}{12c_w^4} \left(\frac{1}{2} \right)^{\delta_{ij}} \frac{1}{|s - M_Z^2|^2} \cdot [|C_{Zqq}^L|^2 + |C_{Zqq}^R|^2] \\ \cdot \left[O_{ij}^{L*} O_{ij}^{L*} \left[t_{\tilde{\chi}_i^0} t_{\tilde{\chi}_j^0} + u_{\tilde{\chi}_i^0} u_{\tilde{\chi}_j^0} \right] - [|O_{ij}^L|^2 + |O_{ij}^R|^2] \cdot m_{\tilde{\chi}_j^0} m_{\tilde{\chi}_i^0} s \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

bzw. speziell für die Erzeugung zweier $\tilde{\chi}_1^0$ -Neutralinos:

$$\begin{aligned} < |M_s|^2 > = \frac{g_e^4}{24c_w^4} \frac{1}{|s - M_Z^2|^2} \cdot [|C_{Zqq}^L|^2 + |C_{Zqq}^R|^2] \\ \cdot \left[O_{11}^{L*} O_{11}^{L*} \left[t_{\tilde{\chi}_1^0}^2 + u_{\tilde{\chi}_1^0}^2 \right] - [|O_{11}^L|^2 + |O_{11}^R|^2] \cdot m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 s \right], \end{aligned} \quad (6.12)$$

wobei $|O_{ij}^{''L}|^2 + |O_{ij}^{''R}|^2 = 2O_{ij}^{''L}O_{ij}^{''L*}$ ausgenutzt wurde.

Dieses Ergebnis deckt sich mit dem aus [6, S.3f.]. In diesem Artikel sind weiterhin auch die Teilergebnisse bei Berücksichtigung der Squark-Massen, also bei zusätzlicher Berechnung des u- und des t-Kanals, enthalten.

6.3 Numerische Ergebnisse und Diskussion

Zur Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts $\sigma_{q\bar{q} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0}$ ist zunächst einmal der differentielle Wirkungsquerschnitt zu bestimmen. Dieser ergibt sich aus dem zuvor berechneten Amplitudenbetragsquadrat gemäß (3.21) zu:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = & \frac{\pi\alpha^2}{24c_w^4 s_w^4} \frac{1}{s^2 |s - M_Z^2|^2} \cdot [|C_{Zqq}^L|^2 + |C_{Zqq}^R|^2] \\ & \cdot \left[O_{11}^{''L} O_{11}^{''L*} \left[t_{\tilde{\chi}_1^0}^2 + u_{\tilde{\chi}_1^0}^2 \right] - [|O_{11}^{''L}|^2 + |O_{11}^{''R}|^2] \cdot m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 s \right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt in LO bei gegebenen (Anti-)Quark Helizitäten kann in [7, S.2f.] gefunden werden.

Um davon ausgehend nun den totalen Wirkungsquerschnitt zu berechnen, muss beachtet werden, dass bei den Streuexperimenten nicht einzelne Quark-Antiquark-Paare kollidieren. Dies hängt damit zusammen, dass lediglich farbneutrale Teilchen beobachtet werden können. Es können somit insbesondere also keine einzelnen (Anti-)Quarks erzeugt werden - man bezeichnet dieses Phänomen als Confinement.

Im Rahmen des dynamischen Protonmodells geht man heute im Einklang mit den experimentellen Ergebnissen davon aus, dass sich im Inneren des Protons neben den drei Valenzquarks (up, up, down) zusätzlich eine Vielzahl an Gluonen und virtuellen Quark-Antiquark-Paaren, den Seequarks, die sich kurzzeitig unter Beachtung der Energie-Zeit-Unschärfe infolge von Vakuumfluktuationen bilden, befinden.

Zur Beschreibung der Struktur von Hadronen verwendet man daher sogenannte Partonverteilungsfunktionen $f_i(x, \mu^2)$, häufig kurz als PDFs bezeichnet. Diese experimentell bestimmten Größen geben die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür an, das i-te Parton bei einer Energieskala μ^2 und einem Impulsanteil x am gesamten Protonimpuls zu finden. Es bietet sich für diesen Prozess an, $\mu^2 = m_{\tilde{\chi}_1^0}^2$ zu setzen. Man erhält dann einen, durch die PDFs bestimmten, Korrekturfaktor zum rein hadronischen Wirkungsquerschnitt, sodass hier für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \sigma_{q\bar{q} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0}(S, m_{\tilde{\chi}_1^0}) = & \left[\int_{\tau_-}^1 d\tau \cdot \left[\int_{\tau}^1 dx_a \frac{1}{x_a} \left[f_{a,A}(x_a, \mu^2) f_{b,B}\left(\frac{\tau}{x_a}, \mu^2\right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + f_{b,A}(x_a, \mu^2) f_{a,B}\left(\frac{\tau}{x_a}, \mu^2\right) \right] \right] \right] \cdot \int_{t_-}^{t^+} dt \frac{d\sigma}{dt} \end{aligned} \quad (6.14)$$

gilt.

Dabei ist

$$x_{a,b} = \frac{p_{a,b} \cdot P_{B,A}}{P_A \cdot P_B} \quad (6.15)$$

die Bjorkensche Skalenvariable¹² und $\tau = x_a \cdot x_b$. Mit $p_{a,b}$ bzw. $P_{A,B}$ werden die Parton- bzw. die Protonimpulse bezeichnet, wobei

$$p_{a,b}^\mu = x_{a,b} \cdot P_{A,B}^\mu \quad (6.16)$$

sowie

$$P_A \cdot P_B = \frac{1}{2} (P_A + P_B)^2 = \frac{1}{2} S \quad (6.17)$$

gilt. \sqrt{S} ist dabei die zur Verfügung stehende LHC-Energie.

Ergebnis der analytischen Integration

Die Berechnung des hadronischen Anteils des Wirkungsquerschnitt durch die Integration über die Mandelstam-Variable t kann noch analytisch geschehen. Die Grenzen lassen sich bestimmen zu

$$t^\pm = \frac{1}{2} \left[\left(2m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 - s \right) \pm \sqrt{\left(s - 2m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 \right)^2 - 4m_{\tilde{\chi}_1^0}^4} \right]. \quad (6.18)$$

Wegen des Zusammenhangs

$$s + t + u = p_1 + p_2 + p_a + p_b \approx 2m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 \quad (6.19)$$

$$\Leftrightarrow u = 2m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 - t - s \quad (6.20)$$

erhält man:

$$\int_{t_-}^{t^+} dt \frac{d\sigma}{dt} = \frac{A}{24s} \int_{t_-}^{t^+} dt \cdot \left[b \cdot \left[(m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 - t)^2 + (t + s - m_{\tilde{\chi}_1^0}^2)^2 \right] - c \cdot m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 s \right] \quad (6.21)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi \alpha^2}{c_w^4 s_w^4 s |s - M_Z^2|^2} \cdot [|C_{Zqq}^L|^2 + |C_{Zqq}^R|^2] \\ b &= O_{11}^{''L} O_{11}^{''L*} \\ c &= [|O_{11}^{''L}|^2 + |O_{11}^{''R}|^2]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Für eine Integration bei festem s führt dies schließlich auf:

$$\int_{t_-}^{t^+} dt \frac{d\sigma}{dt} = \frac{A}{24s} \frac{\sqrt{s(s - 4m_{\tilde{\chi}_1^0}^2)}}{3} \cdot (2b \cdot (3m_{\tilde{\chi}_1^0}^4 - 4m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 s + s^2) - 3cm_{\tilde{\chi}_1^0}^2 s). \quad (6.23)$$

¹²Sie beschreibt den Anteil des Impulses eines Partons am gesamten Protonenimpuls und stimmt damit mit dem x aus der Definition der PDFs überein. Es lässt sich dabei zeigen, dass sie auch ein Maß für die Inelastizität eines Streuprozesses ist: Man erkennt direkt aus der Definition, dass $x \in [0, 1]$. Für $x = 1$ spricht man von einem elastischen, anderenfalls von einem inelastischen Streuprozess. Dies ermöglicht einen experimentellen Zugang zur Bestimmung der PDFs mittels tiefinelastischer Lepton-Proton-Streuung.

Ergebnisse der numerischen Integration

Es wurde hier die Variablentransformation $\tau = x_a \cdot x_b$ eingeführt; daraus folgt direkt, dass $\tau \in [0, 1]$. Die Bestimmung der unteren Grenze ergibt sich aus der Forderung, dass die Energie der einlaufenden Teilchen mindestens groß genug ist, um die Massenenergie der zwei Neutralinos im Endkanal aufzubringen, also

$$s \geq 4m_{\tilde{\chi}_1^0}^2, \quad (6.24)$$

woraus sich wegen $s = \tau S$ die untere Grenze ableiten lässt:

$$\tau_- = \frac{4m_{\tilde{\chi}_1^0}^2}{S}, \quad (6.25)$$

Die Integration kann nun nach Bestimmung aller benötigten Grenzen gemäß (6.14) numerisch - hier unter Verwendung des PDF Sets "CT10" aus der LHAPDF library für *Python 2.7* - durchgeführt werden. Die Darstellungen der so gewonnenen Zusammenhänge geschieht mithilfe von *Wolfram Mathematica 10.1*. Dabei soll der totale Wirkungsquerschnitt in willkürlichen Einheiten dargestellt werden, da hier vor allem dessen qualitativer Zusammenhang mit der Neutralinomasse und der LHC-Energie untersucht wird.

Wir wählen dabei die folgenden Parameter (vgl. [6, S.9]):

$M_Z = 91,1876 \text{ GeV}$, $\alpha^{-1} = 137,036$, $\sin^2(\theta_W) = 0,231$ und $\tan(\beta) = 45$.

Bezüglich der Betrachtung der Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts von der am LHC zur Verfügung stehenden Energie wird ein Intervall von 7 TeV bis 14 TeV untersucht. Dies umfasst jene Energiebereiche, die bei Streuprozessen am LHC bis vor wenigen Jahren erreicht wurden, die, die derzeit erreicht werden und die, die zukünftig erreicht werden sollen (vgl. [8]). Man erhält folgendes Ergebnis:

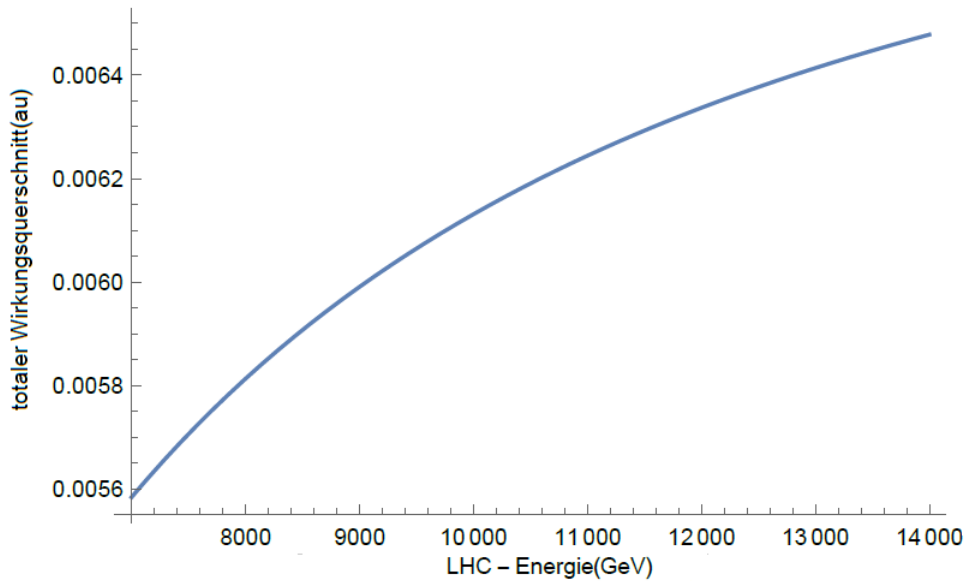


Abbildung 12: Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts von der LHC-Energie im Bereich von 7 TeV bis 14 TeV in LO und unter Vernachlässigung der Squark-Massen für den Prozess $q\bar{q} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0$ bei einer angenommenen Neutralinomasse von $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 100 \text{ GeV}$.

Bei der Untersuchung der Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts für Neutralinoerzeugung von deren Masse wird ein Bereich von 100 GeV bis 1000 GeV untersucht. Da es sich bei Neutralinos um Mischzustände handelt (vgl. I), hängen die genauen Zusammenhänge hier stark mit den Details der Mischung zusammen. Genauere Informationen diesbezüglich sind bei [6] und [9] zu finden. Bisherige Erkenntnisse deuten jedoch auf den hier betrachteten Massenbereich hin.

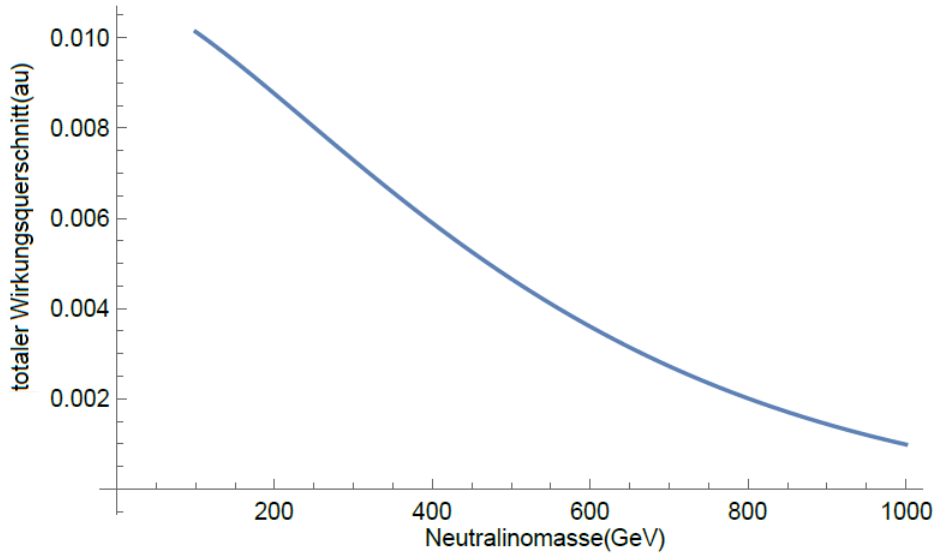


Abbildung 13: Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts von der Neutralinomasse im Bereich von 100 GeV bis 1000 GeV in LO und unter Vernachlässigung der Squark-Massen für den Prozess $q\bar{q} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0$ bei einer festen LHC-Energie von $\sqrt{S} = 13$ TeV.

Diskussion der Ergebnisse

Man erkennt bei der Betrachtung von Abbildung 12, dass der totale Wirkungsquerschnitt für die Neutralinoerzeugung mit steigender Energie des LHCs zunimmt. Dies lässt sich damit erklären, dass gemäß (6.17) eine höhere Beschleunigerenergie auch eine größere Schwerpunktenenergie, die bei der Proton-Proton-Kollision zur Verfügung steht, bedeutet. Damit wird es wahrscheinlicher, dass bei einer Quark-Antiquark-Annihilation eine genügend große Energie zur Verfügung steht, um ein Neutralino-Paar zu erzeugen, da es - unter Betrachtung der PDFs - eine größere Wahrscheinlichkeitsdichte gibt, dass bei der Kollision Partonen mit einem genügend großen Impulsanteil wechselwirken. Eine Verdopplung der LHC-Energie von 7 TeV auf 14 TeV führt hier allerdings nur zu einer Vergrößerung des Wirkungsquerschnitts um etwa $\frac{1}{6}$.

Aus Abbildung 13 lässt sich ablesen, dass der totale Wirkungsquerschnitt mit zunehmender Masse der gebildeten Neutralinos abnimmt. Eine größere Masse bedeutet eine größere Massenenergie zur Bildung der Dunklen Materie-Teilchen und damit gemäß (6.24) eine größere bei der Proton-Proton-Kollision benötigte Energie. Auch hier spielen die Partonverteilungsfunktionen, also letztlich die Aufteilung des Protonimpulses auf die einzelnen Partonen, eine entscheidende Rolle. Ist die Neutralinomasse sehr groß, ist es unwahrscheinlich, dass das Quark-Antiquark-Paar eine genügend große Energie zur Bildung der SUSY-Teilchen aufweist. Der Wirkungsquerschnitt nimmt daher ab. Es lässt sich dabei eine starke Abhängigkeit von der Neutralinomasse beobachten: Der totale Wirkungsquer-

schnitt ist bei einer Masse von 100 GeV etwa fünfmal größer als bei 1000 GeV.

Insbesondere lässt sich unter der Annahme, dass das $\tilde{\chi}_1^0$ das leichteste der vier Neutralinos ist, darauf schließen, dass der Prozess $q\bar{q} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0$ der dominante bei einer möglichen Neutralinoproduktion und damit ein vielversprechender Kandidat für einen ersten experimentellen Nachweis eines SUSY-Teilchens ist.

Teil IV

Fazit

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wurden verschiedene quantenfeldtheoretische Prozesse mithilfe von Feynman-Diagrammen und den zugehörigen Regeln berechnet. Dabei lag der Schwerpunkt auf dem Einarbeiten in die recht komplexe Thematik und der analytischen Berechnung verschiedener Prozesse der QED, der QCD und der Supersymmetrie. Diese analytischen Berechnungen erlaubten es zwar, ein grundlegendes Verständnis für die theoretische Beschreibung von Wechselwirkungsprozessen zu gewinnen, es muss allerdings kritisch angemerkt werden, dass der Mehrwert solcher Berechnungen für den heutigen wissenschaftlichen Standard eher gering ist und lediglich - wie auch in diesem Fall - zu Lehrzwecken dient. Vor diesem Hintergrund wurde im Zuge dieser Arbeit auch ein großer Wert darauf gelegt, die verschiedenen analytischen Rechnungen ausführlich und nachvollziehbar zu präsentieren.

Für genauere, wissenschaftliche relevante Berechnungen, ist jedoch eine numerische Berechnung der Wirkungsquerschnitte über die führende Ordnung hinaus sinnvoll, um Abweichungen zwischen theoretischer Vorhersage und experimentellem Ergebnis möglichst gering zu halten und somit die stattfindenden Wechselwirkungen gut beschreiben zu können.

Die Ergebnisse für die Berechnung der Wirkungsquerschnitte eines Drell-Yan-Prozesses (3.20), der Bhabha-Streuung (4.23) und der Lepton-Paar-Erzeugung (5.17) decken sich dabei jeweils im Rahmen der getroffenen Näherungen mit den Literaturwerten.

Bei der Beschreibung der Erzeugung eines Neutralino-Paares infolge einer Proton-Proton-Kollision konnte der unter (6.13) ermittelte differentielle Wirkungsquerschnitt berechnet werden. Eine Untersuchung der Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts von der zur Verfügung stehenden Beschleunigerenergie und der bis heute unbekannten Neutralinomasse sind Abbildung 12 und Abbildung 13 zu entnehmen.

Zwar sind die $\tilde{\chi}_1^0$ vielversprechende Kandidaten für Dunkle-Materie, es sollte allerdings kritisch angemerkt werden, dass bis heute weder ein experimenteller Nachweis eines Neutralinos noch eine andere etwaige Bestätigung der Supersymmetrie gelungen ist. Dass die Messung eines SUSY-Teilchens bis dato nicht erfolgreich ist, lässt darauf schließen, dass, wenn die Supersymmetrie in der Tat in der Natur realisiert ist, diese im uns mit dem heutigen technischen Standard zugänglichen Energiebereich gebrochen zu sein scheint. Die Frage nach der zugehörigen Brechungsenergie und dem Brechungsmechanismus ist ebenfalls ein aktuelles Forschungsgebiet.

Die experimentelle Suche nach den Neutralinos wird u.a. durch die Weiterentwicklung der großen Teilchenbeschleuniger vorangetrieben. Man erhofft sich hierbei, bei höheren Energien möglicherweise schon recht bald einen ersten experimentellen Beweis für deren Existenz zu erhalten (vgl. Abbildung 12).

Damit stellt die Beschäftigung mit der Thematik Dunkle Materie sicherlich sowohl hinsichtlich seiner theoretischen Beschreibung als auch eines experimentellen Nachweises eine der interessantesten Herausforderungen der modernen Physik dar.

Teil V

Anhang

Kopplungen des Z^0 -Bosons an Fermionen im GWS-Modell

Die vertikale bzw. die axiale Kopplung c_V bzw. c_A des Z^0 -Bosons an ein Fermion f sind im GWS-Modell [5, S.284] gegeben durch:

Tabelle 1: Übersicht der Z^0 -Boson-Fermion-Kopplungen

f	c_V	c_A
ν_l	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
l^-	$-\frac{1}{2} + 2\sin^2(\theta_W)$	$-\frac{1}{2}$
q_u	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2(\theta_W)$	$\frac{1}{2}$
q_d	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2(\theta_W)$	$-\frac{1}{2}$

Beweise zu den in Kapitel 2.2 eingeführten Identitäten

Hier die Beweise zu den verwendeten **Spuridentitäten**:

Es gilt für die Spur über zwei Gamma-Matrizen:

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}, \quad (6.26)$$

denn:

$$\begin{aligned}
 Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= \frac{1}{2} \cdot (Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] + Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu]) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] + Tr[\gamma^\nu \gamma^\mu]) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot Tr[\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2g^{\mu\nu} Tr[\mathbb{1}_4] \\
 &= 4g^{\mu\nu}.
 \end{aligned}$$

Es gilt für die Spur über vier Gamma-Matrizen:

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma] = 4(g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}). \quad (6.27)$$

Für den Beweis betrachte man:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma] &= \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu (2g^{\lambda\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\lambda)] \\ &= 2g^{\lambda\sigma} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\lambda]. \end{aligned}$$

Für den rechten Term gilt dann analog:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\lambda] = 2g^{\nu\sigma} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\lambda] - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda].$$

Wendet man nochmal denselben Trick auf den rechten Term an, erhält man:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda] = 2g^{\mu\sigma} \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\lambda] - \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda].$$

Die linken Terme lassen sich jeweils direkt mit (2.8) berechnen:

$$\begin{aligned} 2g^{\lambda\sigma} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= 8g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} \\ 2g^{\nu\sigma} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\lambda] &= 8g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} \\ 2g^{\mu\sigma} \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\lambda] &= 8g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}. \end{aligned}$$

Setzt man all dies in obigen Ausdruck ein, so erhält man:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma] = 8g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} - 8g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} + 8g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda],$$

wobei

$$\text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda] = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma]$$

wegen zyklischer Vertauschung gilt. Damit ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma] &= 8g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} - 8g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} + 8g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} \\ \Rightarrow \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma] &= 4 (g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}). \end{aligned}$$

Die Spur über eine ungerade an Gamma-Matrizen ist stets null

$$\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega}_n] = 0 \quad \text{, falls } n \text{ ungerade,} \quad (6.28)$$

denn es gilt:

$$\text{Tr}[\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega] = \text{Tr}[\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega \gamma^5 \gamma^5],$$

da $\gamma^5 \gamma^5 = \mathbb{1}_4$. Da γ^5 mit den anderen Gamma-Matrizen antikommutiert, folgt weiterhin:

$$\text{Tr}[\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega \gamma^5 \gamma^5] = (-1)^n \cdot \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega \gamma^5],$$

wobei n die Anzahl der Gamma-Matrizen in der Spur ist. Unter Ausnutzung von zyklischer Vertauschung folgt dann:

$$\begin{aligned} (-1)^n \cdot \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega \gamma^5] &= (-1)^n \cdot \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega] \\ &= (-1)^n \cdot \text{Tr}[\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega] \\ \Rightarrow \text{Tr}[\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega] &= (-1)^n \cdot \text{Tr}[\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega]. \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich für n gerade immer erfüllt, für n ungerade ist dies nur erfüllt, falls die Spur gleich null ist.

Ebenso verschwindet die Spur über γ^5 . Es gilt hier sogar:

$$Tr[\gamma^5] = Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0. \quad (6.29)$$

Für den ersten Teil des Beweises wird zunächst

$$Tr[\gamma^5] = Tr[\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5], \quad (6.30)$$

betrachtet, wobei $\gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{1}_4$ genutzt wurde. Da γ^5 und γ^0 antikommutieren, gilt weiterhin unter Ausnutzung zyklischer Vertauschung:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5] &= -Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0] \\ &= -Tr[\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5] \\ &= -Tr[\gamma^5]. \end{aligned}$$

Damit folgt offensichtlich:

$$Tr[\gamma^5] = -Tr[\gamma^5] \Rightarrow Tr[\gamma^5] = 0.$$

Analog lässt sich auch zeigen, dass

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0.$$

gilt. Dazu ergänzt man einfach zwei Gamma-Matrizen γ^α , wobei $\alpha \neq \mu, \nu$, antikommutiert dreimal, was wiederum auf ein negatives Vorzeichen $(-1)^3$ führt und nutzt die zyklische Vertauschbarkeit der Spur aus.

Um zu zeigen, dass

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^5] = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (6.31)$$

gilt, lässt sich zunächst einmal analog zum vorherigen Beweis argumentieren, dass die Spur gleich null ist, falls $(\mu\nu\lambda\sigma)$ keine Permutation von (0123) ist, also ein Wert doppelt auftritt.

Sollten alle vier Gamma-Matrizen auftreten, führt das Vertauschen der Reihenfolge zu einem wechselnden Vorzeichen wegen der Antikommutatoridentität. Also muss die Spur proportional zu $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ sein.

Das Vorzeichen $4i$ ergibt sich direkt, da man - falls alle Gamma-Matrizen auftreten - $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ausnutzen kann. Es bleibt dann in diesem Fall also noch:

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^5] = Tr[i\gamma^5 \gamma^5] = i \cdot Tr[\mathbb{1}_4] = 4i$$

Die Spur über γ^5 mal einer ungeraden Anzahl an Gamma-Matrizen ist ebenfalls gleich null:

$$Tr[\gamma^5 \underbrace{\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega}_n] = 0 \quad , \text{falls } n \text{ ungerade.} \quad (6.32)$$

Auch dies folgt direkt aus der Antikommutatorrelation: Man kann γ^5 einfach von links nach rechts "durchrutschen" lassen. Wegen zyklischer Vertauschung ist die Spur dann immer noch dieselbe. Bei jeder Vertauschung erhält man einen Vorzeichenwechsel; es gilt also:

$$Tr[\gamma^5 \underbrace{\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega}_n] = (-1)^n \cdot Tr[\gamma^5 \underbrace{\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega}_n],$$

was offensichtlich für n ungerade nur für $Tr[\gamma^5 \underbrace{\gamma^\alpha \cdot \dots \cdot \gamma^\omega}_n] = 0$ erfüllt wird.

Weiterhin nützlich sind einige aus der Definition der **Feynman-Slash-Notation** $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$ folgende Identitäten.

Es gilt in diesem Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\alpha &= \gamma^\alpha \gamma^\mu a_\mu \gamma^\nu b_\nu \gamma^\lambda c_\lambda \gamma_\alpha \\ &= \underbrace{\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\alpha}_{=-2\gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu} a_\mu b_\nu c_\lambda \\ &= -2\gamma^\lambda c_\lambda \gamma^\nu b_\nu \gamma^\mu a_\mu \\ &= -2\not{c} \not{b} \not{a}, \end{aligned} \tag{6.33}$$

sowie:

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha \not{a} \not{b} \gamma_\alpha &= \gamma^\alpha \gamma^\mu a_\mu \gamma^\nu b_\nu \gamma_\alpha \\ &= \gamma^\alpha (\gamma^\mu \gamma^\nu) \gamma_\alpha a_\mu b_\nu \\ &= \gamma^\alpha (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma_\alpha a_\mu b_\nu \\ &= \gamma^\alpha 2g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu \gamma_\alpha - \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\alpha a_\mu b_\nu \\ &= 2(a \cdot b) \gamma^\alpha \gamma_\alpha - 4g^{\nu\mu} a_\mu b_\nu \\ &= 8(a \cdot b) - 4(a \cdot b) \\ &= 4(a \cdot b) \end{aligned} \tag{6.34}$$

und außerdem:

$$\begin{aligned} Tr[\not{a} \not{b}] &= \frac{1}{2} \cdot (Tr[\not{a} \not{b}] + Tr[\not{b} \not{a}]) \\ &= \frac{1}{2} \cdot Tr[\not{a} \not{b} + \not{b} \not{a}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot Tr[\{\not{a}, \not{b}\}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot Tr[2(a \cdot b)] \\ &= 4(a \cdot b). \end{aligned} \tag{6.35}$$

Hier sind a , b und c beliebige Vierervektoren.

Abbildungsverzeichnis

1	Schwacher Gravitationslinseneffekt am Beispiel des Galaxienclusters Abell2218. Entnommen aus [1], ursprünglich von NASA, ESA, Richard Ellis (Caltech) und Jean-Paul Kneib (Observatoire Midi-Pyrenees, Frankreich)	5
2	Veranschaulichung der Supersymmetrie. URL: http://www.lhc-closer.es/taking_a_closer_look_at_lhc/0.supersymmetry , Autoren: Xabier Cid Vidal und Ramon Cid Manzano, Stand: 20.4.2016.	6
3	Prinzipieller Aufbau eines Feynman-Diagramms	12
4	1. Feynman-Regel für externe Linien	12
5	2. Feynman-Regel für externe Linien	13
6	Feynman-Regeln für Photon- und Z^0 -Propagator	13
7	3. Feynman-Regel für externe Linien	14
8	Feynman-Diagramm zum Drell Yan-Prozess	16
9	Feynman-Diagramme zur Bhabha-Streuung	20
10	Feynman-Diagramm zur Lepton-Paar-Erzeugung	24
11	Feynman-Diagramm zur Erzeugung supersymmetrischer Dunkler Materie	28
12	Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts von der LHC-Energie im Bereich von 7 TeV bis 14 TeV in LO und unter Vernachlässigung der Squark- Massen für den Prozess $q\bar{q} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0$	33
13	Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts von der Neutralinomasse im Bereich von 100 GeV bis 1000 GeV in LO und unter Vernachlässigung der Squark-Massen für den Prozess $q\bar{q} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0$	34

Tabellenverzeichnis

1	Übersicht der Z^0 -Boson-Fermion-Kopplungen	37
---	---	----

Literatur

- [1] Cecilia Levy. Light propagation and reflection off teflon in liquid xenon detectors for the xenon100 and xenon1t dark matters experiments. Doktorarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2014.
- [2] Harald Kalka & Gerhard Soff. *Supersymmetrie*. Teubner Studienbücher Physik ISBN 978-3519032380, 1997.
- [3] Francis Halzen & Alan D. Martin. *QUARKS AND LEPTONS: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, Inc. ISBN 978-0471887416, 1984.
- [4] Herbi K. Dreiner & Howard E. Haber & Stephen P. Martin. Two-component spinor techniques and feynman rules for quantum field theory and supersymmetry. *Phys.Rept.* *494*, 1-196, 2010.
- [5] R. Keith Ellis & W. James Stirling & Bryan R. Webber. *QCD and Collider Physics*. Cambridge University Press ISBN 978-0521545891, 2003.
- [6] M. Demirci & A.I. Ahmadov. Search for neutralino pair production at the cern lh. *Phys.Rev. D89 (2014) no.7*, 2014.
- [7] Jonathan Debove & Benjamin Fuks & Michael Klasen. Threshold resummation of gaugino pair production at hadron colliders. *Nucl.Phys. B842 (2011) 51*, 2011.
- [8] <http://www.lhc-facts.ch/>, 2016. Online; Stand 14.04.2016.
- [9] Stephen P. Martin. A supersymmetry primer. *Adv.Ser.Direct.High Energy Phys.* *21*, 2010.

Plagiatserklärung der / des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über _____
_____ selbstständig verfasst worden ist, dass
keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass
die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Werken - dem Wortlaut
oder dem Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Ent-
lehnung kenntlich gemacht worden sind.

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung
von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung
der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

(Datum, Unterschrift)