

WESTFÄLISCHE WILHELMС-UNIVERSITÄT MÜNSTER
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

MONTE-CARLO-GENERATION SCHWACHER FERMIONISCHER PROZESSE

BACHELORARBEIT

Peter Risse

Erstkorrektor

Prof. Dr. Michael Klasen

Zweitkorrektor

Dr. Karol Kovařík

8. August 2018

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Theoretische Vorbereitungen	3
2.1. Das Standardmodell der Teilchenphysik	3
2.2. Elektromagnetische Wechselwirkung	4
2.3. Die schwache Wechselwirkung	5
2.4. Kinematik I	8
2.5. Berechnung der quadrierten invarianten Amplitude	9
2.5.1. Photonische Wechselwirkung	10
2.5.2. Interferenzterm	12
2.5.3. Schwache Wechselwirkung	15
2.6. Differentieller Wirkungsquerschnitt	18
3. Leptonischer Speicherring	20
3.1. Kinematik II	20
3.2. Winkelverteilung bei konstanter Schwerpunktsenergie	20
3.3. Variation der Schwerpunktsenergie	22
3.4. Zusammenfassung	24
4. Hadronischer Speicherring	25
4.1. Phänomenologie	25
4.2. Parton-Verteilungsfunktionen	26
4.3. Kinematik III	27
4.4. Monte-Carlo-Integration	28
4.5. Eventgenerierung und -filterung	30
4.6. Produktion von W-Bosonen	34
5. Schlussfolgerung	36
A. Theoretische Grundlagen	37
A.1. Dirac-Gleichung	37
A.2. Herleitung der invarianten Amplitude	38
A.3. Feynman-Regeln	40
A.4. Herleitung des differentiellen Wirkungsquerschnitts	42
A.5. Ein Überblick über die Monte-Carlo-Integration	44
A.6. Monte-Carlo-Eventgenerierung	45
B. Identitäten und Rechnungen	47
B.1. Identitäten der Gamma-Matrizen	47
B.2. Tensorauswertungen für die Berechnung der invarianten Amplitude	48
Literatur	50

1. Einleitung

In dieser Bachelorarbeit sollen Reaktionen im Rahmen der schwachen Wechselwirkung zwischen Fermionen untersucht werden. Konzentriert wird sich dabei auf den Austausch von einem Photon oder einem Z_0 -Boson.

Zu Beginn wird der theoretische Hintergrund erläutert. Dazu wird diskutiert, wie Wechselwirkungen im Standardmodell der Teilchenphysik beschrieben werden und wie diese Beschreibung zu einem differentiellen Wirkungsquerschnitt führt. Mithilfe der Monte-Carlo-Eventgenerierung kann dieser verwendet werden um realistische Daten für ein Experiment zu erzeugen. Hierbei wird sich Bezug auf zwei konkrete Experimente genommen: Einen leptonischen und einen hadronischen Speicherring. Da sich die Betrachtung des leptonischen Speicherrings als weniger kompliziert darstellt, wird dieser als Erstes untersucht. Dabei wird auf das Verhalten des differentiellen Wirkungsquerschnittes genauer eingegangen. Im hadronischen Speicherring werden die bisherigen Methoden angepasst, da die reagierenden Teilchen die Konstituenten des eigentlichen Strahlteilchens sind. Infolgedessen wird beschrieben, wie aus dem Detektorsignal auf die zugrundeliegende Wechselwirkung geschlossen werden kann. In dem letzten Kapitel wird rekapituliert und als Ausblick formuliert, in welcher Form man diese Arbeit weiterführen könnte.

Die theoretischen Vorbereitungen sind vielschichtig, weswegen einige Teile in dem Anhang vorbereitet werden. Der erfahrene Leser, der mit Konzepten der Monte-Carlo-Eventgenerierung, den Feynman-Diagrammen und -regeln, der invarianten Amplitude und dem differentiellen Wirkungsquerschnitt vertraut ist, kann direkt mit dem Lesen des nächsten Kapitels beginnen. Studenten im fünften oder sechsten Bachelorsemester wird jedoch zunächst der Anhang A geraten. Hier wird nur Wissen über die Dirac-Gleichung vorausgesetzt, da diese bereits in der Vorlesung behandelt worden sein sollte. Die essentiellen Ergebnisse werden dennoch kurz wiederholt.

Die Monte-Carlo-Eventgenerierung wird mit der Programmiersprache `Python` vorgenommen. Um die Vorgehensweise beim Programmieren leichter nachvollziehbar zu machen, werden die relevanten Teile des Codes eingebunden. Es wird jedoch von einer Darstellung des gesamten Codes abgesehen, da dies den Lesefluss unterbrechen würde.

Die Feynman-Diagramme wurden mit dem Programm `JaxoDraw` [4] erstellt.

Ein weiteres wichtiges Thema sind die benutzten Konventionen. Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten wird wie üblich das natürliche Einheitensystem mit $c = \hbar = 1$ gewählt. Die relevanten Ergebnisse sind in SI-Einheiten angegeben. Des weiteren wird mit Einsteinscher Summenkonvention gerechnet. Dabei laufen griechische Indizes von 0 bis 3, wenn sie sich hoch- und niedrig-gestellt in der selben Zeile befinden. Offensichtliche Multiplikationen von Vektoren und Matrizen werden nicht mit Indizes versehen, da sonst die Übersichtlichkeit verloren geht und damit die Interpretation erschwert wird.

Bei der computergestützten Berechnung von Ergebnissen werden die numerischen Werte

1. Einleitung

von Konstanten und Einheiten aus dem aktuellsten Satz der Daten der Particle Data Group [1] entnommen. Dabei wurden die Werte auf die letzte Nachkommastelle übernommen. Die Werte sind hier angegeben:

```
alpha=1./137.035999139
sinW=0.23122      #sin**2 von dem Weinbergwinkel
cosW=1-sinW
MZ0=91.1876       #GeV/c**2
FWZ0 = 2.4952      #GeV/c**2, Gamma_Z -> Breite
MW=80.379         #GeV/c**2
FWW = 2.085        #GeV/c**2, Gamma_W -> Breite
h=6.582119514*10**(-16) #h/2pi in eVs
c=299792458.       #m/s
```

Die Werte werden als exakt angenommen und deren Unsicherheiten werden nicht in die Betrachtung miteinbezogen.

2. Theoretische Vorbereitungen

Da diese Arbeit darauf abzielt, die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung für verschiedene Speicherringe im Rahmen einer Monte-Carlo-Simulation zu untersuchen, ist es sinnvoll zunächst die relevanten Prozesse, die für beide Arten von Experimenten gleich sind, zu diskutieren. Dabei wird zu Beginn sowohl auf die Natur der Wechselwirkung, als auch auf invariante Amplituden beider Wechselwirkungskanäle eingegangen. Daraus wird der differentielle Wirkungsquerschnitt gewonnen, mit dem im weiteren Verlauf die Monte-Carlo-Eventgenerierung für die Speicherringe vorgenommen wird.

In der Herleitung wird angenommen, dass eine Elektron-Positron-Kollision stattfindet. Dieser Fall ist natürlich nicht richtig für einen hadronischen Speicherring. Dazu wird zu Beginn von Abschnitt 4 gezeigt, wie aus einem Wirkungsquerschnitt einer leptonischen eine hadronische Reaktion gewonnen werden kann. Das Endprodukt, ein Muon-Antimuon-Paar, bleibt über den gesamten Verlauf erhalten.

2.1. Das Standardmodell der Teilchenphysik

Mit dem Standardmodell der Teilchenphysik lässt sich eine große Spanne der Beobachtungen auf Elementarteilchen-Ebene beschreiben. Im Rahmen des Standardmodells wird jede Wechselwirkung über ein Austauschteilchen, ein sogenanntes Eichboson beschrieben. Bosonen werden dabei Teilchen genannt, die einen ganzzahligen Spin besitzen. Abgesehen von der Gravitation kann damit nachweislich jeder Wechselwirkung ein Austauschteilchen zugewiesen werden: Die elektromagnetische Wechselwirkung wird über Photonen beschrieben, die starke Wechselwirkung über acht verschiedene Gluonen und die schwache Wechselwirkung wird über drei sogenannten Vektorbosonen ($W^+ -$, $W^- -$ und Z_0 -Boson) vermittelt. Im Rahmen der elektroschwachen Wechselwirkung ist es zusätzlich möglich (wie der Name schon andeutet) die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung zu vereinen.

Jeder Wechselwirkung wird dabei eine bestimmte Symmetriegruppe zugeordnet, das bedeutet, dass die Austauschteilchen gewissermaßen als Symmetrioperation in dieser Symmetriegruppe angesehen werden und können ein Teilchen, also ein Objekt der Symmetriegruppe, in ein weiteres Teilchen, also ein anderes Objekt der Symmetriegruppe, umwandeln. Die elektroschwache Wechselwirkung wird dabei als direktes Produkt von zwei Symmetriegruppen gesehen, welche mit der sogenannten spontanen Symmetriebrechung in zwei unterschiedliche Wechselwirkungen übergegangen sind.

Das Higgs-Feld weist über den Higgs-Mechanismus den Teilchen ihre Masse zu. Das Higgsfeld selbst besitzt eine Anregung, das sogenannte Higgs-Boson mit dem Spin 0. Fermionen sind Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$. Zu ihnen gehört jeweils ein komplementäres Antiteilchen, welches beschrieben werden kann, wie ein Teilchen, welches sich rückwärts durch die Zeit bewegt. Fermionen sind die Teilchen, die untereinander über Austauschteilchen

2. Theoretische Vorbereitungen

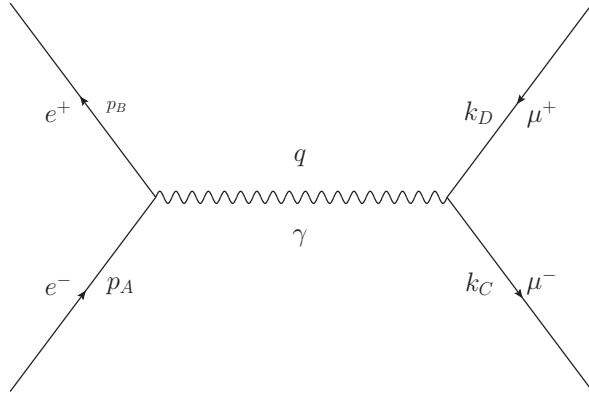


Abbildung 1: Feynman-Diagramm für eine Elektron-Positron-Kollision, wobei als Austauschteilchen ein Photon und als Endprodukt ein Muon-Antimuon-Paar vorausgesetzt wird.

wechselwirken. Sie bauen die gesamte bisher entdeckte Materie auf und treten in zwei unterschiedlichen Kategorien auf: Quarks und Leptonen. Diese Kategorien besitzen jeweils drei Familien mit zwei Mitgliedern, d.h. zwölf Teilchen plus ihr jeweiliges Antiteilchen. Die Quarks werden von den Leptonen unterschieden, da diese an der starken Wechselwirkung teilhaben, also über Gluonen eine Farbladung austauschen. Sie treten nicht alleine auf, sondern als farbneutrale Hadronen, welche gebundene Zustände von mindestens zwei Quarks sind. Da die Gluonen jedoch auch mit sich selber wechselwirken, sind gebundene Zustände von Quarks sehr kompliziert aufgebaut und besitzen eine Unterstruktur. Die Leptonen sind jeweils drei verschiedene Teilchen mit negativer elektrischer Elementarladung und drei neutrale Teilchen, sogenannte Neutrinos. Diese Teilchen nehmen nicht an der Wechselwirkung mit Gluonen teil.

2.2. Elektromagnetische Wechselwirkung

Wie oben erwähnt wird angenommen, dass eine Elektron-Positron-Kollision stattfindet, welche über ein Photon, das Austauschteilchen, in ein Muon-Antimuon-Paar übergeht. Das zugehörige Feynman-Diagramm ist in Abb. 1 zu sehen. Eine Herleitung der Feynman-Regeln für Photonen ist nicht mehr notwendig, da dies implizit in Anhang A.2 vorgenommen wurde. Zusammengefasst muss an jeden Vertex der Faktor $ie\gamma^\eta$ multipliziert werden und der Propagator wird über $\frac{-ig_{\eta\theta}}{q^2}$ parametrisiert. Daraus lässt sich die invariante Amplitude gewinnen:

$$\begin{aligned}
 -i\mathfrak{R}_\gamma &= Q_e Q_\mu \bar{v}(p_B) ie\gamma_\eta u(p_A) \frac{-ig^{\eta\theta}}{q^2} \bar{u}(k_C) ie\gamma_\theta v(k_D) \\
 \Leftrightarrow \mathfrak{R}_\gamma &= \frac{-e^2 Q_e Q_\mu}{q^2} \bar{v}(p_B) \gamma_\eta u(p_A) \bar{u}(k_C) \gamma^\eta v(k_D)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

2. Theoretische Vorbereitungen

mit dem Impulsübertrag $q = p_A + p_B$ und der Impulserhaltung $p_A + p_B = k_C + k_D$. Als zusätzliche Faktoren wurde noch die Ladungszahl $Q_{e,\mu}$ eingefügt, die die Ladung in Anteilen der Elementarladung e parametrisiert, damit im späteren Verlauf der Arbeit Teilchen mit unterschiedlicher Ladung zu Kollision gebracht werden können.

2.3. Die schwache Wechselwirkung

Das Ziel dieses Abschnittes ist es die relevanten Ströme für einen Prozess in der Art von Abb. 3 zu finden, da daraus die Feynman-Regeln gewonnen werden können. Eine Herleitung des Propagators wird nicht vorgenommen.

Die schwache Wechselwirkung wird von massiven, vektoriellen Austauschteilchen, den beiden geladenen W^+ - und W^- -Bosonen und dem neutralen Z_0 -Boson, vermittelt. Diese Teilchen koppeln unterschiedlich an die beiden Chiralitätskomponenten (siehe Anhang A.1) $\Psi_L = \Pi^- \Psi = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\Psi$ und $\Psi_R = \Pi^+ \Psi = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\Psi$. Beispielsweise koppeln die W -Bosonen nur an den linkshändigen Anteil, während das Z_0 -Boson an beide (allerdings unterschiedlich stark) koppelt.

Um die Wirkung von den W^\pm -Bosonen auf Fermionen zu beschreiben, fasst man diese Teilchen in sogenannte Isospin-Dubletts und -Singulett zusammen. Die jeweils linkshändige Komponente des Elektrons und des Elektroneutrinos bilden zusammen ein schwaches Isospin-Dublett, während die rechtshändigen Komponenten jeweils ein schwaches Isospin Singulett darstellen (mit t als der schwache Isospin):

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \text{ mit } t = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad (e^-)_R \ (\nu_e)_R \text{ mit } t = 0 \quad (2.2)$$

Um eine vereinfachte Darstellung zu erhalten wurde für den Spinor des Elektrons (und für das Neutrino analog) $u_{e-} \equiv e^-$ geschrieben. Für die dritte Komponente t_3 des schwachen Isospin gilt für den oberen Eintrag des Dubletts $t_3 = \frac{1}{2}$ und für die untere $t_3 = -\frac{1}{2}$. Der schwache Isospins ist also als Analogon des normalen Spins zu betrachten. Diese Kategorisierung wird gewählt, weil bei der schwachen Wechselwirkung nur Prozesse innerhalb einer Leptonenfamilie beobachtet wird. Das bedeutet, für die Muonen und den Taus wird dieselbe Kategorisierung gewählt und für die Quark-Familien ebenfalls. Die geladenen Vektorbosonen W^\pm können nun ein Elektroneutrino in ein Elektron umwandeln und vice versa.

Einzig notwendig bleibt es noch einen Ausdruck für Strom des schwachen Isospins zu finden. Dazu werden die Eigenschaften und Wirkungen der W^\pm -Bosonen genutzt. Zur besseren Veranschaulichung wird die Situation aus Abb. 2 benutzt: Das abgestrahlte W^- -Boson hat das Muon in sein Neutrino umgewandelt. Da die W -Bosonen nur auf die linkshändige Komponente der Spinoren wirkt, wird der schwache Isostrom J^3 über den Vertex mittels $cJ_\eta^3 = c\bar{\nu}_L \gamma_\eta \mu_L$ definiert. Wobei mit c der Kopplungsfaktor parametrisiert

2. Theoretische Vorbereitungen

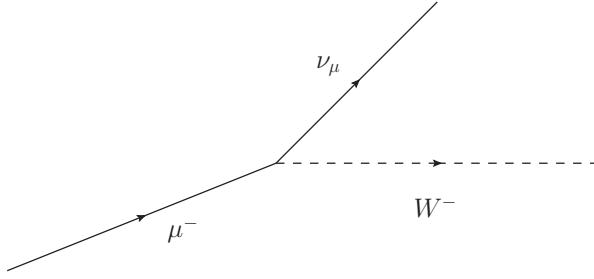


Abbildung 2: Das Muon zerfällt in sein Neutrino und strahlt dabei ein W^- -Boson ab.

wird. Mit einer kurzen Rechnung kann der Vertex-Faktor gewonnen werden:

$$\begin{aligned}
 \bar{\nu}_{\mu,L} \gamma_\eta \mu_L &= \nu_{\mu,L}^\dagger \gamma_0 \gamma_\eta \mu_L \\
 &= \nu_\mu^\dagger \frac{1}{2} (1 - \gamma^5)^\dagger \gamma_0 \gamma_\eta \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \mu \\
 &= \frac{1}{4} \nu_\mu^\dagger \gamma_0 \gamma_\eta (1 - \gamma^5)^2 \mu \\
 &= \frac{1}{4} \bar{\nu}_\mu \gamma_\eta (2 - 2\gamma^5) \mu \\
 &= \bar{\nu}_\mu \gamma_\eta \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \mu,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

wobei die Identitäten aus Gl. (B.4) bis (B.6) benutzt wurden. Der Kopplungsfaktor c kann mittels der Kopplung der schwachen Wechselwirkung g ausgedrückt werden: $c = \frac{g}{\sqrt{2}}$. Für g kann jedoch mittels des Weinbergwinkels θ_W ein Zusammenhang zwischen elektromagnetischer und schwacher Kopplungsstärke gefunden werden:

$$e = g \sin(\theta_W) \tag{2.4}$$

Letztlich ergibt sich der Vertexfaktor mit dem Vorfaktor $-i$, der Konvention bei der Definition von Feynman-Regeln ist, zu: $-i \frac{e}{\sqrt{2} \sin(\theta_W)} \gamma_\eta \frac{1}{2} (1 - \gamma^5)$.

Das neutrale Z_0 -Boson koppelt unterschiedlich stark an beide Komponenten. Um dies beschreiben zu können, wird der neutrale Strom J^N definiert. Er setzt sich aus dem Strom des schwachen Isospins und der elektromagnetischen Wechselwirkung zusammen:

$$J^N = J^3 - \sin^2(\theta_W) j^{\text{em}} \tag{2.5}$$

Diese Überlagerung von Strömen kann wieder durch den Weinbergwinkel ausgedrückt werden. Die Kopplungsstärke des neutralen Stroms ist über $\frac{g}{\cos(\theta_W)} = \frac{e}{\cos(\theta_W) \sin(\theta_W)}$ parametrisiert.

Um nun den Vertexfaktor zu bestimmen, müssen die bekannten Ströme in Gl. (2.5)

2. Theoretische Vorbereitungen

Tabelle 1: Eine Auflistung der Quantenzahlen von Leptonen und Quarks, die für die schwache Wechselwirkung von Relevanz sind. Für alle anderen Lepton- bzw. Quark-Familien bleiben die Quantenzahlen gleich. Die rechtshändigen Neutrinos besitzen eine besondere Stellung, da sie keine Quantenzahl ungleich Null besitzen und somit an keiner Wechselwirkung des Standardmodells teilhaben.

Lepton	t	t_3	Q	Quark	t	t_3	Q
$\nu_{e,L}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	u_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
e_L^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	d_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\nu_{e,R}$	0	0	0	u_R	0	0	$\frac{2}{3}$
e_R^-	0	0	-1	d_R	0	0	$-\frac{1}{3}$

eingesetzt werden. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 J_\eta^N &= \bar{f} \left[\gamma_\eta \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) t_3 - \sin^2(\theta_W) \gamma_\eta Q \right] f \\
 &= \bar{f} \left[\gamma_\eta \left(\frac{1}{2} t_3 - \sin^2(\theta_W) Q \right) - \gamma_\eta \frac{1}{2} t_3 \gamma^5 \right] f \\
 &= \bar{f} \left[\gamma_\eta \frac{1}{2} (c_V - c_A \gamma^5) \right] f
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

wobei die Umstellung in den letzten beiden Zeilen dazu benutzt wurde um die sogenannte Vektor- und Axialvektorkopplung einzuführen. Die Vektorkopplung gibt an, wie groß der Teil des Spinors ist, der sich unter Invertierung des Raumes negativ darstellt, während die Axialvektorkopplung den Anteil angibt, der invariant unter Invertierung des Raumes ist. Multipliziert man den Term in der großen Klammer mit der Kopplungsstärke und dem Konvektionsfaktor $-i$ erhält man den Vertexfaktor: $\frac{-ie}{\cos(\theta_W) \sin(\theta_W)} \gamma_\eta \frac{1}{2} (c_V - c_A \gamma^5)$. Die Vektor- und Axialvektorkopplung

$$c_V = t_3 - 2 \sin^2(\theta_W) Q \tag{2.7}$$

$$c_A = t_3 \tag{2.8}$$

können durch die Zusammenstellung der Quantenzahlen in Tabelle 1 ermittelt werden. Der Propagator von Vektorbosonen wird in Unitär-Eichung besitzt folgende Form:

$$P^{\eta\tau} = \frac{M^2 g^{\eta\tau} - q^\eta q^\tau}{M^2 (q^2 - M^2 + iM\Gamma)}, \tag{2.9}$$

wobei q der Impulsübertrag ist und Γ die Breite der Verteilung ist. Die Breite hängt über $\frac{1}{\Gamma} = \tau$ mit der Lebensdauer τ zusammen. Es ist zu erkennen, dass der Wert des Propagators für Impulsüberträge nahe der Masse M des Bosons groß wird. Eine weitere Besonderheit ist, dass der Propagator unterscheidet, in welche Richtung der Impulsübertrag geschieht. Folgt man den Feynman-Regeln aus Anhang A.3, ergibt sich für das Feynman-Diagramm

2. Theoretische Vorbereitungen

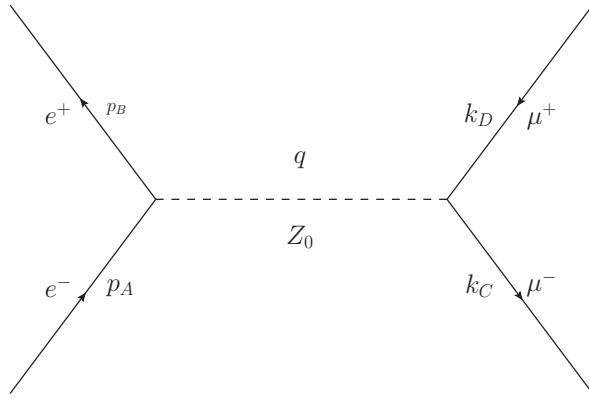


Abbildung 3: Feynman-Diagramm für eine Elektron-Positron-Kollision, wobei als Austauschteilchen eine Z_0 -Boson und als Endprodukt ein Muon-Antimuon-Paar vorausgesetzt wird.

Abb. 3 folgende Invariante Amplitude:

$$\mathfrak{R}_{Z_0} = \frac{-e^2}{4s_W^2 c_W^2} \bar{v}(p_B) \gamma_\eta (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_A) \frac{M_Z^2 g^{\eta\tau} - q^\eta q^\tau}{M_Z^2 (q^2 - M_Z^2 + i M_Z \Gamma_Z)} \bar{u}(p_C) \gamma_\tau (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) v(p_D) \quad (2.10)$$

mit den Abkürzungen $s_W = \sin(\theta_W)$ und $c_W = \cos(\theta_W)$.

2.4. Kinematik I

Da in den obigen Kapiteln die relevanten invarianten Amplituden aufgestellt wurden, fällt auf, dass diese abhängig von den Impulsen der Teilchen sind. Dieser Abschnitt soll nun die Konvention für die Impulse festlegen.

In dieser Arbeit wird auf die häufig auftretende Situation eingegangen, dass in dem Beschleuniger die Teilchen mit gleicher Energie, aber mit entgegengesetzter Bewegungsrichtung zur Kollision gebracht werden. Hier wird angenommen, dass diese Teilchen dieselbe Masse besitzen, so dass das Ruhesystem der Kollision gleichzeitig auch das Laborsystem ist. Dies wird in Beschleunigern benutzt, da so die gesamte Bewegungsenergie in die Energie der Kollision eingeht. Die Strahlen besitzen also eine Energie E und die Bewegungsrichtung wird in bzw. entgegen der z -Achse gelegt. Es folgt mit der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 2E$:

$$\begin{aligned} p_A &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{2} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{s}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{2} \\ -\vec{p} \end{pmatrix} \\ k_C &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{2} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\vec{k}| = \frac{\sqrt{s}}{2} \quad \text{und} \quad k_D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{2} \\ -\vec{k} \end{pmatrix} \\ q &= p_A + p_B = k_C + k_D = \begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ \vec{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2. Theoretische Vorbereitungen

Hier wurden bereits die Massen vernachlässigt, weswegen $|p_A| = |p_B| = |k_C| = |k_D| = 0$ gilt. In Anhang A.4 wurde der Winkel θ als der Winkel zwischen \vec{p}_A und \vec{k}_C definiert. Damit gilt:

$$p_A \cdot p_B = \frac{s}{2} \quad \& \quad k_C \cdot k_D = \frac{s}{2} \quad \& \quad q \cdot q = s \quad (2.12)$$

$$p_A \cdot k_C = p_B \cdot k_D = \frac{s}{4}(1 - \cos(\theta)) \quad \& \quad p_A \cdot k_D = p_B \cdot k_C = \frac{s}{4}(1 + \cos(\theta)) \quad (2.13)$$

$$q \cdot p_A = q \cdot p_B = q \cdot k_C = q \cdot k_D = \frac{s}{2}, \quad (2.14)$$

wobei die Skalarprodukte nur noch von der Schwerpunktsenergie und θ abhängig sind. Hierbei ist zu beachten, dass die Kinematik bei der Berechnung erst in den letzten Schritten zur Vereinfachung der Terme eingesetzt wird. Die Ergebnisse davor gelten für eine beliebige Wahl des Koordinatensystems.

2.5. Berechnung der quadrierten invarianten Amplitude

Wie aus Anhang A.4 deutlich wird, ist für den Wirkungsquerschnitt nur das Betragsquadrat der invarianten Amplitude von Relevanz. Zusätzlich dazu ist es bei den Experimenten üblich, dass die eingehenden Teilchenstrahlen unpolarisiert sind. Das bedeutet, dass es nicht möglich ist, weder vor noch nach der Reaktion, festzustellen, in welchem Spinzustand die beiden Teilchen waren, die am Prozess teilgenommen haben. Des Weiteren werden die entstehenden Teilchen nicht nach ihrem Spinzustand sortiert. Um dies zu simulieren wird über den Spinzustand der eingehenden Teilchen gemittelt und über die Spins der ausgehenden Teilchen summiert. Diese Vorgehensweise vereinfacht die Rechnung, da die Spin-Vollständigkeitsrelation [5, Kap. 5]

$$\sum^{\text{Spin}} \bar{u}(p)u(p) = \gamma_\eta p^\eta + m \equiv \not{p} + m, \quad (2.15)$$

angewendet werden kann, wobei in diesem Fall durch die Näherung der Massenterm wegfällt. Wie diese Relation angewendet wird, ist in den Unterkapiteln gezeigt. Der in dieser Arbeit betrachtete Prozess kann über zwei Austauschteilchen vonstatten gehen: ein Photon oder ein Z_0 -Boson. Die gesamte invariante Amplitude bestimmt sich aus der Summe der einzelnen Amplituden aus Abschnitt 2.2 und Abschnitt 2.3. Damit gilt für das Betragsquadrat:

$$|\mathfrak{R}_{ges}|^2 = |\mathfrak{R}_\gamma + \mathfrak{R}_{Z_0}|^2 = |\mathfrak{R}_\gamma|^2 + 2\text{Re}[\mathfrak{R}_\gamma^* \mathfrak{R}_{Z_0}] + |\mathfrak{R}_{Z_0}|^2 \quad (2.16)$$

2. Theoretische Vorbereitungen

Mit * wird eine komplexe Konjugation bezeichnet. Die Mittelung wird nun über $\frac{1}{2} \sum^{\text{Spin}}$ und die Summation über \sum^{Spin} vorgenommen, d.h.

$$|\overline{\mathfrak{R}_{ges}}|^2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{e^-}^{\text{Spin}} \frac{1}{2} \sum_{e^+}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^-}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^+}^{\text{Spin}} |\mathfrak{R}_{ges}|^2. \quad (2.17)$$

Hier wurde mit dem Strich über \mathfrak{R}_{ges} die gemittelte und summierte Version bezeichnet. Diese Konvention wird im Folgenden beibehalten, ist aber streng von dem adjungierten Spinor z.B. \bar{u} zu unterscheiden.

Im Folgenden sollen die Terme, die sich durch Einsetzen des Betragsquadrats (Gl. (2.16)) in die Mittlung und Summation über die Spins von Gl. (2.17) ergeben, getrennt ausgerechnet werden. Der erste Summand beinhaltet dabei die photonische Wechselwirkung, der Zweite den Interferenzterm, der sich aus einer Kombination von photonischer und neutraler, schwacher Wechselwirkung ergibt, und der Letzte die neutrale, schwache Wechselwirkung. Der erste und der letzte Term würden sich auch jeweils (aber ohne den jeweils anderen) ergeben, wenn nur photonische oder nur neutrale, schwache Wechselwirkung betrachtet werden würde.

2.5.1. Photonische Wechselwirkung

Um die Wechselwirkung mit einem Photon als Austauschteilchen zu berechnen, wird zunächst das komplexe Konjugierte der invarianten Amplitude bestimmt, dann die Spinsummation ausgeführt, was zu einer Spur von einem Produkt von Gamma-Matrizen führt. Dieses kann über die Eigenschaften der Gamma-Matrizen ausgewertet werden und erhält eine Summe von Skalarprodukten, die in Abschnitt 2.4 bereits angegeben wurden.

Der zu berechnende Term aus Gl. (2.17) lässt sich, wenn man in R die gesamte Abhängigkeit von den Spinoren zusammenfasst, schreiben als:

$$|\overline{\mathfrak{R}_\gamma}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{e^-}^{\text{Spin}} \frac{1}{2} \sum_{e^+}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^-}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^+}^{\text{Spin}} \mathfrak{R}_\gamma \mathfrak{R}_\gamma^* = \frac{e^4 Q_e^2 Q_\mu^2}{q^4} \frac{1}{2} \sum_{e^-}^{\text{Spin}} \frac{1}{2} \sum_{e^+}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^-}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^+}^{\text{Spin}} R_\gamma R_\gamma^* \quad (2.18)$$

$$\mathfrak{R}_\gamma = \frac{-e^2 Q_e Q_\mu}{q^2} \bar{v}(p_B) \gamma_\eta u(p_A) \bar{u}(k_C) \gamma^\eta v(k_D) \equiv \frac{-e^2 Q_e Q_\mu}{q^2} R_\gamma$$

Um die Rechnung durchzuführen, ist es zunächst notwendig die komplexe Konjugation durchzuführen. $\bar{v}(p_B) \gamma_\eta u(p_A)$ ist offensichtlich ein Skalar. Dies bedeutet, möchte man eine komplexe Konjugation durchführen, können die Skalare einzeln konjugiert werden. Weiterhin hilfreich ist, dass komplexe und hermitesche Konjugation (bezeichnet mit \dagger) für ein Skalar äquivalent sind. Es folgt mit den Identitäten aus Anhang B.1:

$$[\bar{v}(p_B) \gamma_\eta u(p_A)]^\dagger = [v^\dagger(p_B) \gamma_0 \gamma_\eta u(p_A)]^\dagger = u^\dagger(p_A) \gamma_\eta^\dagger \gamma_0^\dagger v(p_B)$$

$$\stackrel{(B.3)}{=} u^\dagger(p_A) \gamma_0 \gamma_\eta \gamma_0^2 v(p_B) = \bar{u}(p_A) \gamma_\eta v(p_B) \quad (2.19)$$

2. Theoretische Vorbereitungen

Die komplexe Konjugation vertauscht in diesem Fall die Spinoren und deren Adjungation. Setzt man dieses Ergebnis ein, lässt sich durch Umsortieren eine Struktur erkennen:

$$\begin{aligned} R_\gamma R_\gamma^* &= [\bar{v}(p_B)\gamma_\eta u(p_A)][\bar{u}(k_C)\gamma^\eta v(k_D)][\bar{u}(p_A)\gamma_\vartheta v(p_B)][\bar{v}(k_D)\gamma^\vartheta u(k_C)] \\ &= [\bar{v}(p_B)\gamma_\eta u(p_A)][\bar{u}(p_A)\gamma_\vartheta v(p_B)][\bar{u}(k_C)\gamma^\eta v(k_D)][\bar{v}(k_D)\gamma^\vartheta u(k_C)] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Die linken beiden Klammern hängen nur noch von den einfallenden Teilchen ab und die rechten beiden Klammern nur noch von den Auslaufenden. Außerdem stehen $u(p_A)$ und $\bar{u}(p_A)$ direkt nebeneinander, so dass mit der Spinsummation für das Elektron die Spin-Vollständigkeitsrelation (2.15) eingesetzt werden kann. Die gleiche Argumentation gilt für das Antimuon.

$$\begin{aligned} \overline{R_\gamma R_\gamma^*} &= \frac{1}{2} \sum_{e^-}^{\text{Spin}} \frac{1}{2} \sum_{e^+}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^-}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^+}^{\text{Spin}} [\bar{v}(p_B)\gamma_\eta u(p_A)][\bar{u}(p_A)\gamma_\vartheta v(p_B)][\bar{u}(k_C)\gamma^\eta v(k_D)][\bar{v}(k_D)\gamma^\vartheta u(k_C)] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{e^+}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^-}^{\text{Spin}} [\bar{v}(p_B)\gamma_\eta \not{p}_A \gamma_\vartheta v(p_B)][\bar{u}(k_C)\gamma^\eta \not{k}_D \gamma^\vartheta u(k_C)] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die linke und die rechte Klammer sind weiterhin Skalare. Das bedeutet, dass die Matrizen, die in den Klammern auftreten, nur in skalaren Komponenten auftreten. Dies wird deutlicher, wenn beispielhaft die implizite Summierung explizit aufgeschrieben wird:

$$[\bar{v}(p_B)\gamma_\eta \not{p}_A \gamma_\vartheta v(p_B)] = \bar{v}_\kappa \gamma_\eta^{\kappa\lambda} (\not{p}_A)_{\lambda\sigma} \gamma_\varphi^{\sigma\tau} v_\tau \quad (2.22)$$

Auf der rechten Seite wurde zur besseren Übersicht die Abhängigkeit von p_B weggelassen. Das bedeutet $\bar{v}(p_B)$ kann auf die rechte Seite von $v(p_B)$ geschoben werden und die Spin-Vollständigkeitsrelation kann eingesetzt werden, was den Term in die Bildung einer Spur von Matrizen verwandelt.

$$\Rightarrow \sum_{e^+}^{\text{Spin}} v_\tau \bar{v}_\kappa \gamma_\eta^{\kappa\lambda} (\not{p}_A)_{\lambda\sigma} \gamma_\varphi^{\sigma\tau} = (\not{p}_B)_{\tau\kappa} \gamma_\eta^{\kappa\lambda} (\not{p}_A)_{\lambda\sigma} \gamma_\varphi^{\sigma\tau} = \text{Tr} [\not{p}_B \gamma_\eta \not{p}_A \gamma_\vartheta] \quad (2.23)$$

Diese Spur ist in dem mittleren Teil der Gleichung mit dem Index τ zu erkennen, da dieser die gesamte Multiplikation der Matrizen umfasst. Die Argumentation kann wieder analog auf $\bar{u}(k_C)$ übertragen werden und es folgt:

$$\overline{R_\gamma R_\gamma^*} = \frac{1}{4} \text{Tr} [\not{p}_B \gamma_\eta \not{p}_A \gamma_\vartheta] \text{Tr} [\not{k}_C \gamma^\eta \not{k}_D \gamma^\vartheta] \quad (2.24)$$

Mit den Eigenschaften der Gamma-Matrizen innerhalb einer Spur kann diese Gleichung weiter vereinfacht werden. Dazu schreibt man beide Spuren aus (2.24) um und verwendet

2. Theoretische Vorbereitungen

Gl. (B.7), hier beispielsweise für die erste Spur:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\not{p}_B \gamma_\eta \not{p}_A \gamma_\vartheta] &= p_B^\kappa p_A^\lambda \text{Tr} [\gamma_\kappa \gamma_\eta \gamma_\lambda \gamma_\vartheta] = p_B^\kappa p_A^\lambda 4 (g_{\kappa\eta} g_{\lambda\vartheta} + g_{\kappa\vartheta} g_{\eta\lambda} - g_{\kappa\lambda} g_{\eta\vartheta}) \\ &= 4 [(p_B)_\eta (p_A)_\vartheta + (p_B)_\vartheta (p_A)_\eta - (p_B \cdot p_A) g_{\eta\vartheta}] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dies kann analog für die andere Spur benutzt werden und man erhält:

$$\overline{R_\gamma R_\gamma^*} = \frac{16}{4} [(p_B)_\eta (p_A)_\vartheta + (p_B)_\vartheta (p_A)_\eta - (p_B \cdot p_A) g_{\eta\vartheta}] [(k_D)^\eta (k_C)^\vartheta + (k_D)^\vartheta (k_C)^\eta - (k_D \cdot k_C) g^{\eta\vartheta}] \quad (2.26)$$

Es ist leicht zu erkennen, dass in beiden Klammern jeweils der erste und der zweite Term vertauschte Indizes besitzen. Damit und mit den Symmetrien der Skalarprodukte aus Abschnitt 2.4 lässt sich diese Gleichung leicht vereinfachen, wobei der letzte Term seinen Vorfaktor von $g_{\eta\vartheta} g^{\eta\vartheta} = 4$ erhält:

$$\begin{aligned} \overline{R_\gamma R_\gamma^*} &= 4 [2(p_B \cdot k_D)(p_A \cdot k_C) + 2(p_B \cdot k_C)(p_A \cdot k_D) - 4(p_B \cdot p_A)(k_D \cdot k_C) + 4(p_B \cdot p_A)(k_D \cdot k_C)] \\ &= 8 [(p_B \cdot k_D)(p_A \cdot k_C) + (p_B \cdot k_C)(p_A \cdot k_D)] \\ &= 8 \left[\frac{s^2}{16} (1 - \cos(\theta))^2 + \frac{s^2}{16} (1 + \cos(\theta))^2 \right] \\ &= \frac{s^2}{2} [2 + 2 \cos^2(\theta)] = s^2 (1 + \cos^2(\theta)) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Damit bleibt nur noch das Einsetzen in die Ursprungsgleichung (2.18),

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_\gamma|^2 &= \frac{e^4 Q_e^2 Q_\mu^2}{s^2} \overline{R_\gamma R_\gamma^*} = \frac{e^4 Q_e^2 Q_\mu^2}{s^2} s^2 (1 + \cos^2(\theta)) \\ &= e^4 Q_e^2 Q_\mu^2 (1 + \cos^2(\theta)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

wobei für $q^2 = q \cdot q = s$ eingesetzt wurde. Damit ist die Betrachtung des ausschließlich photonischen Teils der Wechselwirkung abgeschlossen. Wollte man ausschließlich photonische Wechselwirkung betrachten, müsste dieser Term allein in die Formel für den Differentiellen Wirkungsquerschnitt eingesetzt werden.

2.5.2. Interferenzterm

Die Vorgehensweise der Berechnung wird analog zum vorherigen Abschnitt (Abschnitt 2.5.1) vorgenommen, wobei näher auf die Veränderungen durch die γ^5 -Matrix eingegangen wird. Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten wird der Propagator $P^{\eta\tau} = \frac{M_Z^2 g^{\eta\tau} - q^\eta q^\tau}{M_Z^2 (q^2 - M_Z^2 + i M_Z \Gamma_Z)}$ in seinen Nenner und seinen Zähler $\tilde{P}^{\eta\tau} = M_Z^2 g^{\eta\tau} - q^\eta q^\tau$ zerlegt. Ebenfalls werden die Spinoren folgendermaßen angegeben: $u(p_A) \rightarrow u_A$.

2. Theoretische Vorbereitungen

Der zu berechnende Term ist

$$\begin{aligned}
2\text{Re}[\mathfrak{R}_\gamma^* \mathfrak{R}_{Z_0}] &= \text{Re} \left[\frac{e^4 Q_e Q_\mu}{2q^2 s_W^2 c_W^2 M_Z^2 (q^2 - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z)} \frac{1}{2} \sum_{e^-}^{\text{Spin}} \frac{1}{2} \sum_{e^+}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^-}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^+}^{\text{Spin}} \mathbf{R}_\gamma^* \mathbf{R}_Z \right] \\
\mathfrak{R}_\gamma^* &= \frac{-e^2 Q_e Q_\mu}{q^2} \bar{u}_A \gamma_\vartheta v_B \bar{v}_D \gamma^\vartheta u_C = \frac{-e^2 Q_e Q_\mu}{q^2} \mathbf{R}_\gamma^* \\
\mathfrak{R}_Z &= \frac{-e^2}{4s_W^2 c_W^2} \bar{v}_B \gamma_\eta (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u_A \frac{M_Z^2 g^{\eta\tau} - q^\eta q^\tau}{M_Z^2 (q^2 - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z)} \bar{u}_C \gamma_\tau (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) v_D \\
&= \frac{-e^2}{4s_W^2 c_W^2 M_Z^2 (q^2 - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z)} \mathbf{R}_{Z_0}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Dazu wird zunächst die Spinsummation ausgeführt. Mit den Argumenten aus Abschnitt 2.5.1 wird deutlich, dass diese direkt vollzogen werden kann.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{e^-}^{\text{Spin}} \frac{1}{2} \sum_{e^+}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^-}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^+}^{\text{Spin}} \mathbf{R}_\gamma^* \mathbf{R}_{Z_0} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{e^-}^{\text{Spin}} \frac{1}{2} \sum_{e^+}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^-}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^+}^{\text{Spin}} [\bar{u}_A \gamma_\vartheta v_B] [\bar{v}_D \gamma^\vartheta u_C] [\bar{v}_B \gamma_\eta (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u_A] \tilde{P}^{\eta\tau} [\bar{u}_C \gamma_\tau (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) v_D] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{e^-}^{\text{Spin}} \frac{1}{2} \sum_{e^+}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^-}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^+}^{\text{Spin}} [\bar{u}_A \gamma_\vartheta v_B] [\bar{v}_B \gamma_\eta (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u_A] \tilde{P}^{\eta\tau} [\bar{u}_C \gamma_\tau (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) v_D] [\bar{v}_D \gamma^\vartheta u_C] \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} [\not{p}_A \gamma_\vartheta \not{p}_B \gamma_\eta (c_V^e - c_A^e \gamma^5)] \tilde{P}^{\eta\tau} \text{Tr} [\not{k}_C \gamma_\tau (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) \not{k}_D \gamma^\vartheta]
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Die erhaltenen Spuren können in zwei Teile zerlegt werden, da die Spur linear ist. Der Teil ohne die γ^5 -Matrix wurde bereits in Gl. (2.25) berechnet. Der Teil mit der γ^5 -Matrix kann über die Identität von Gl. (B.8) ausgewertet werden. Es folgt:

$$\text{Tr} [\not{p}_A \gamma_\vartheta \not{p}_B \gamma_\eta c_V^e] = 4c_V^e [(p_B)_\vartheta (p_A)_\eta + (p_B)_\eta (p_A)_\vartheta - (p_B \cdot p_A) g_{\vartheta\eta}] \equiv 4c_V^e T_{\vartheta\eta}^1 \tag{2.31}$$

$$\text{Tr} [\not{p}_A \gamma_\vartheta \not{p}_B \gamma_\eta \gamma^5 (-c_V^e)] = -4ic_A^e \epsilon_{\kappa\vartheta\lambda\eta} p_A^\kappa p_B^\lambda \equiv -4ic_A^e T_{\vartheta\eta}^2 \tag{2.32}$$

$$\text{Tr} [\not{k}_C \gamma_\tau c_V^\mu \not{k}_D \gamma^\vartheta] = 4c_V^\mu [(k_C)_\tau (k_D)^\vartheta + (k_C)^\vartheta (k_D)_\tau - (k_C \cdot k_D) g_\tau^\vartheta] \equiv 4c_V^\mu T_\tau^{3,\vartheta} \tag{2.33}$$

$$\text{Tr} [\not{k}_C \gamma_\tau (-c_A^\mu) \gamma^5 \not{k}_D \gamma^\vartheta] = -c_A^\mu \text{Tr} [\not{k}_C \gamma_\tau \not{k}_D \gamma^\vartheta \gamma^5] = -4ic_A^\mu \epsilon_\kappa^\vartheta \epsilon_{\lambda\tau} k_C^\kappa k_D^\lambda \equiv -4ic_A^\mu T_\tau^{4,\vartheta}, \tag{2.34}$$

wobei die letzte Zeile durch die Vertauschungsrelation (B.5) erhalten wird. Das bedeutet, dass durch unterschiedliche Kopplung an den linkshändigen Anteil der Spinoren erhält man zusätzliche Terme mit dem Levi-Civita-Symbol. Mit den Abkürzungen $T^{1 \rightarrow 4}$ lässt sich Gl. (2.30) zu

$$\overline{\mathbf{R}_\gamma^* \mathbf{R}}_{Z_0} = 4 [c_V^e T_{\vartheta\eta}^1 - ic_A^e T_{\vartheta\eta}^2] \tilde{P}^{\eta\tau} [c_V^\mu T_\tau^{3,\vartheta} - ic_A^\mu T_\tau^{4,\vartheta}] \tag{2.35}$$

2. Theoretische Vorbereitungen

zusammenfassen. Bei genauerer Betrachtung des Tensors $T_{\vartheta\eta}^2$ wird deutlich, dass das Levi-Civita-Symbol über p_A und p_B summiert. Die Summe aus diesen Vektoren bildet den Impulsübertrag q , der in dem Propagator $\tilde{P} = M_Z^2 g^{\eta\tau} - q^\eta q^\tau$ auftaucht. Der Index η summiert über genau diesen Impulsübertrag, weswegen linear abhängige Vektoren über das Levi-Civita-Symbol summiert werden. Eine zentrale Eigenschaft dieses Symbols ist jedoch, dass die Summation über linear abhängige Vektoren Null ergibt. Deswegen gilt für beide Tensoren T^2 und T^4 , dass die Summation über den hinteren Teil des Propagators Null ergibt. Das Produkt aus $T_{\vartheta\eta}^2 M_Z^2 g^{\eta\tau} T_\tau^{3,\vartheta}$, also T^2 mit T^3 und dem vorderen Teil des Propagators, beinhaltet entweder eine Summation über das Levi-Civita-Symbol mit allen vier Vektoren, die auch linear abhängig sind, oder es werden zwei Indizes des Symbols gleichgesetzt (über $g_\tau^\vartheta g^{\eta\tau} = g^{\eta\vartheta}$ und dieser Term gibt nur einen Wert ungleich Null, wenn $\eta = \vartheta$ gilt), was das Symbol per Definition Null setzt. Analoges gilt für das Produkt aus T^1 und T^4 .

Zusammengefasst bleiben nach diesen Überlegungen nur noch zwei Terme übrig:

$$\overline{R_\gamma^* R}_{Z_0} = 4 \left[c_V^e c_V^\mu T_{\vartheta\eta}^1 \tilde{P}^{\eta\tau} T_\tau^{3,\vartheta} - c_A^e c_A^\mu T_{\vartheta\eta}^2 \tilde{P}^{\eta\tau} T_\tau^{4,\vartheta} \right]. \quad (2.36)$$

Unter Ausnutzung der Symmetrien in den Skalarprodukten und dass der Propagator bei Vertauschung der Indizes gleich bleibt, können die Produkte in kürzere Schreibweise zusammengefasst werden. Eine Auswertung der notwendigen Tensorprodukte ist in Anhang B.2 zu finden. Mit Gl. (B.15) bis (B.18) folgt:

$$\begin{aligned} T_{\vartheta\eta}^1 \tilde{P}^{\eta\tau} T_\tau^{3,\vartheta} &= \tilde{P}^{\eta\tau} \left[2(p_A \cdot k_C) p_{B,\eta} k_{D,\tau} + 2(p_A \cdot k_D) p_{B,\eta} k_{C,\tau} - 4(k_C \cdot k_D) p_{A,\eta} p_{B,\tau} + (p_A \cdot p_B)^2 g_{\eta\tau} \right] \\ &= 2 \left[\frac{s}{4} (1 - \cos(\theta)) \left(\frac{M_Z^2 s}{4} (1 - \cos(\theta)) - \frac{s^2}{4} \right) + \frac{s}{4} (1 + \cos(\theta)) \left(\frac{M_Z^2 s}{4} (1 + \cos(\theta)) - \frac{s^2}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{s}{2} \left(\frac{M_Z^2 s}{2} - \frac{s^2}{4} \right) + \frac{s^2}{4} (4M_Z^2 - s) \right] \\ &= 2 \left[\frac{M_Z^2 s^2}{16} (2 + 2 \cos^2(\theta)) - \frac{s^3}{8} \right] + \frac{s^3}{4} \\ &= \frac{M_Z^2 s^2}{4} (1 + \cos^2(\theta)) \end{aligned} \quad (2.37)$$

und mit Gl. (B.19):

$$\begin{aligned} T_{\vartheta\eta}^2 \tilde{P}^{\eta\tau} T_\tau^{4,\vartheta} &= \left(M_Z^2 g^{\eta\tau} - q^\eta q^\tau \right) \epsilon_{\kappa\vartheta\lambda\eta} \epsilon_\phi^{\vartheta}{}_{\rho\tau} p_A^\kappa p_B^\lambda k_C^\phi k_D^\rho \\ &= -\frac{M_Z^2 s^2}{2} \cos(\theta) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Damit wurde die Spinsummation erfolgreich durchgeführt. Es gilt

$$\overline{R_\gamma^* R}_{Z_0} = c_V^e c_V^\mu M_Z^2 s^2 (1 + \cos^2(\theta)) + 2c_A^e c_A^\mu M_Z^2 s^2 \cos(\theta) \quad (2.39)$$

2. Theoretische Vorbereitungen

und kann in die Anfangsgleichung (Gl. (2.29)) eingesetzt werden. Da die Spinsummation keine komplexen Terme produziert hat, muss nur der Realteil des Propagators genommen werden. Mit

$$\text{Re} \left[\frac{1}{s - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z} \right] = \frac{s - M_Z^2}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2}, \quad (2.40)$$

wobei $q^2 = s$ eingesetzt wurde, folgt

$$\begin{aligned} 2\text{Re}[\mathfrak{R}_\gamma^* \mathfrak{R}_{Z_0}] &= \frac{e^4 Q_e Q_\mu (s - M_Z^2)}{2s_W^2 c_W^2 M_Z^2 s ((s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2)} \left[c_V^e c_V^\mu M_Z^2 s^2 (1 + \cos^2(\theta)) + 2c_A^e c_A^\mu M_Z^2 s^2 \cos(\theta) \right] \\ &= \frac{e^4 Q_e Q_\mu (s - M_Z^2) s}{s_W^2 c_W^2 ((s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2)} \left[\frac{c_V^e c_V^\mu}{2} (1 + \cos^2(\theta)) + c_A^e c_A^\mu \cos(\theta) \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

Damit wurde der Interferenzterm vollständig bestimmt. Analog zu der photonischen Wechselwirkung ist der erhaltene Term nur von dem Winkel zwischen \vec{p}_A und \vec{k}_C und der Schwerpunktsenergie abhängig. Ebenfalls ist eine $[1 + \cos^2(\theta)]$ -Struktur zu erkennen, jedoch ist durch die γ^5 -Matrix, also durch die unterschiedliche Kopplung des Z_0 -Bosons an die links- bzw. rechtshändige Komponente des Spinors, ein weiterer Term, der nur von $\cos(\theta)$ abhängt, entstanden.

2.5.3. Schwache Wechselwirkung

In diesem Teil wird der letzte Term der invarianten Amplitude quadriert. Zunächst wird die komplexe Konjugation angegangen und über die Spinsummation in eine Tensorstruktur gebracht. Die auftretenden Tensorprodukte werden zwei Propagatoren beinhalten. Die Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 wurden übernommen.

Der zu berechnende Term ist

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{R}_{Z_0}}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{e^-}^{\text{Spin}} \frac{1}{2} \sum_{e^+}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^-}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^+}^{\text{Spin}} \mathfrak{R}_{Z_0} \mathfrak{R}_{Z_0}^* \\ \mathfrak{R}_{Z_0} &= \frac{-e^2}{4s_W^2 c_W^2} \bar{v}_B \gamma_\eta (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u_A \frac{M_Z^2 g^{\eta\tau} - q^\eta q^\tau}{M_Z^2 (q^2 - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z)} \bar{u}_C \gamma_\tau (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) v_D \\ &= \frac{-e^2}{4s_W^2 c_W^2 M_Z^2 (q^2 - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z)} R_{Z_0}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Zunächst muss die komplexe Konjugation vorgenommen werden. Da für die fünfte Gamma-Matrix gilt $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$, ist die Konjugation für die Spinoren analog zu der aus Abschnitt 2.5.1; die Spinoren müssen vertauscht werden. Im Propagator ändert sich das Vorzeichen vor dem komplexen Teil des Nenners, damit folgt:

$$|\overline{\mathfrak{R}_{Z_0}}|^2 = \frac{e^4}{16s_W^4 c_W^4 M_Z^4 ((q^2 - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2)} \overline{R_{Z_0}} \overline{R_{Z_0}^*} \quad (2.43)$$

$$R_{Z_0}^* = \bar{u}_A \gamma_\kappa (c_V^e - c_A^e \gamma^5) v_B \tilde{P}^{\kappa\lambda} \bar{v}_D \gamma_\lambda (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) u_C \quad (2.44)$$

2. Theoretische Vorbereitungen

Damit sind alle Vorbereitungen für die Spinsummation abgeschlossen. Analog zu Abschnitt 2.5.2 wird diese durchgeführt:

$$\begin{aligned}
\overline{R_{Z_0} R_{Z_0}^*} &= \frac{1}{2} \sum_{e^-}^{\text{Spin}} \frac{1}{2} \sum_{e^+}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^-}^{\text{Spin}} \sum_{\mu^+}^{\text{Spin}} \left[\bar{v}_B \gamma_\eta (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u_A \right] \tilde{P}^{\eta\tau} \left[\bar{u}_C \gamma_\tau (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) v_D \right] \\
&\quad \times \left[\bar{u}_A \gamma_\kappa (c_V^e - c_A^e \gamma^5) v_B \right] \tilde{P}^{\kappa\lambda} \left[\bar{v}_D \gamma_\lambda (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) u_C \right] \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_\eta (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \not{p}_A \gamma_\kappa (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \not{p}_B \right] \tilde{P}^{\eta\tau} \tilde{P}^{\kappa\lambda} \\
&\quad \times \text{Tr} \left[\gamma_\tau (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) \not{k}_D \gamma_\lambda (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) \not{k}_C \right]
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Um diese Spuren in die Form aus dem oben genannten Abschnitt zu bringen, wird die Invarianz der Spur unter zyklischer Vertauschung ausgenutzt. Mit den Relationen $(\gamma^5)^2 = I_4$ und $\gamma^5 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \gamma^5$ kann weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left[\gamma_\eta (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \not{p}_A \gamma_\kappa (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \not{p}_B \right] &= \text{Tr} \left[\not{p}_A \gamma_\kappa (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \not{p}_B \gamma_\eta (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \right] \\
&= \text{Tr} \left[\not{p}_A \gamma_\kappa \not{p}_B \gamma_\eta (c_V^e - c_A^e \gamma^5) (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \right] = \text{Tr} \left[\not{p}_A \gamma_\kappa \not{p}_B \gamma_\eta \left((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 - 2c_V^e c_A^e \gamma^5 \right) \right]
\end{aligned}$$

Diese Rechnung kann analog für die zweite Spur übernommen werden und mit der Einführung der Tensoren $T^{5 \rightarrow 8}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left[\not{p}_A \gamma_\kappa \not{p}_B \gamma_\eta \left((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 \right) \right] &= 4 \left((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 \right) [(p_B)_\kappa (p_A)_\eta + (p_B)_\eta (p_A)_\kappa - (p_B \cdot p_A) g_{\kappa\eta}] \\
&\equiv 4 \left((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 \right) T_{\kappa\eta}^5
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\text{Tr} \left[\not{p}_A \gamma_\kappa \not{p}_B \gamma_\eta \gamma^5 (-2c_V^e c_A^e) \right] = -8ic_V^e c_A^e \epsilon_{\varphi\kappa\chi\eta} p_A^\varphi p_B^\chi \equiv -8ic_V^e c_A^e T_{\kappa\eta}^6 \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left[\not{k}_D \gamma_\lambda \not{k}_C \gamma_\tau \left((c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2 \right) \right] &= 4 \left((c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2 \right) [(k_D)_\lambda (k_C)_\tau + (k_D)_\tau (k_C)_\lambda - (k_C \cdot k_D) g_{\lambda\tau}] \\
&\equiv 4 \left((c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2 \right) T_{\lambda\tau}^7
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\text{Tr} \left[\not{k}_C \gamma_\lambda \not{k}_D \gamma_\tau \gamma^5 (-2c_V^\mu c_A^\mu) \right] = -8ic_V^\mu c_A^\mu \epsilon_{\varphi\lambda\chi\tau} k_C^\varphi k_D^\chi \equiv -8ic_V^\mu c_A^\mu T_{\lambda\tau}^8 \tag{2.49}$$

Zusammengefasst erhält man eine weitaus kompliziertere Struktur, als noch in Abschnitt 2.5.2:

$$\overline{R_Z R_Z^*} = 4 \left[\left((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 \right) T_{\kappa\eta}^5 - 2ic_V^e c_A^e T_{\kappa\eta}^6 \right] \tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} \left[\left((c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2 \right) T_{\lambda\tau}^7 - 2ic_V^\mu c_A^\mu T_{\lambda\tau}^8 \right], \tag{2.50}$$

jedoch gelten dieselben Argumentationen, was dazu führt, dass nur die Terme mit $T_{\kappa\eta}^5 \tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} T_{\lambda\tau}^7$ und $T_{\kappa\eta}^6 \tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} T_{\lambda\tau}^8$ ausgewertet werden müssen. Somit fallen alle komplexwertigen Terme weg, was auch der Fall sein muss, da dieser Teil der invarianten Amplitude ein vollständiges Betragsquadrat ist, und daher keine komplexwertigen Terme auftreten dürfen. Die Auswertung der Tensoren ist in Anhang B.2 (Gl. (B.20) bis (B.23) für $T^5 T^7$ und Gl. (B.24) für $T^6 T^8$) vorgerechnet. Weiterhin werden wieder die Symmetrien

2. Theoretische Vorbereitungen

der Vektoren aus Abschnitt 2.4 benutzt.

$$\begin{aligned}
T_{\kappa\eta}^5 \tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} T_{\lambda\tau}^7 &= \tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} [2p_{B,\kappa} p_{A,\eta} k_{D,\lambda} k_{C,\tau} + 2p_{B,\eta} p_{A,\kappa} k_{D,\lambda} k_{C,\tau} \\
&\quad - 4(p_B \cdot p_A) g_{\kappa\eta} k_{D,\lambda} k_{C,\tau} + 4(p_B \cdot p_A)^2 g_{\kappa\eta} g_{\lambda\tau}] \\
&= \left[2 \left(\frac{M_Z^2 s}{4} (1 - \cos(\theta)) - \frac{s^2}{4} \right)^2 + 2 \left(\frac{M_Z^2 s}{4} (1 + \cos(\theta)) - \frac{s^2}{4} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - 4 \frac{s}{2} \left(\frac{M_Z^4 s}{2} - \frac{M_Z^2 s^2}{2} + \frac{s^3}{4} \right) + 4 \frac{s^2}{4} (4M_Z^4 - 2M_Z^2 s + s^2) \right] \\
&= \frac{s^2}{8} [2M_Z^4 (1 + \cos^2(\theta)) - 4M_Z^2 s + 2s^2] + \frac{M_Z^2 s^3}{2} - \frac{s^4}{4} \\
&= \frac{M_Z^4 s^2}{4} (1 + \cos^2(\theta))
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}
T_{\kappa\eta}^6 \tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} T_{\lambda\tau}^8 &= \tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} \epsilon_{\varphi\kappa\chi\eta} \epsilon_{\varphi\lambda\chi\tau} p_A^\varphi p_B^\chi k_C^\varphi k_D^\chi \\
&= -\frac{M_Z^4 s^2}{2} \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Es ergibt sich das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\overline{R_Z} \overline{R_Z^*} &= 4 \left[((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2) ((c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2) \frac{M_Z^4 s^2}{4} (1 + \cos^2(\theta)) + 4c_V^e c_A^e c_V^\mu c_A^\mu \frac{M_Z^4 s^2}{2} \cos(\theta) \right] \\
&= M_Z^4 s^2 \left[((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2) ((c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2) (1 + \cos^2(\theta)) + 8c_V^e c_A^e c_V^\mu c_A^\mu \cos(\theta) \right]
\end{aligned}$$

Die Spinsummation wurde damit abgeschlossen und die obige Gleichung kann in die Anfangsgleichung (2.42) eingesetzt werden, wobei sich der Faktor M_Z^4 kürzt und es gilt:

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{R}_{Z_0}}|^2 &= \frac{e^4 s^2}{16s_W^4 c_W^4 ((s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2)} \left[((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2) ((c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2) (1 + \cos^2(\theta)) \right. \\
&\quad \left. + 8c_V^e c_A^e c_V^\mu c_A^\mu \cos(\theta) \right]
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Damit wurde der Term der schwachen Wechselwirkung bestimmt. Analog zu dem Interferenzterm ergibt sich ein $[1 + \cos^2(\theta)]$ -Term und ein Term der proportional zu $\cos(\theta)$ ist. Dieser zweiter Term sorgt für eine Asymmetrie zwischen Vorwärts- und Rückwärtsstreuung, da \vec{p}_A parallel zu \vec{k}_C bevorzugt wird, wenn der Vorfaktor positiv ist. Wollte man die invariante Amplitude für eine Wechselwirkung mit einem geladenem W -Boson bestimmen, müsste man diese invariante Amplitude benutzen und (abgesehen von den Anfangs- und Endteilchen) alle Vektor- und Axialvektorkomponenten auf den Wert Eins setzen, wobei natürlich zusätzlich noch die Masse des W -Bosons im Propagator benutzt werden müsste, anstatt der Masse des neutralen Vektorbosons. Es ändert sich ebenfalls

2. Theoretische Vorbereitungen

die Kopplungsstärke, was lediglich den Vorfaktor ändert. Damit folgt:

$$|\bar{\mathfrak{R}}_{W^\pm}|^2 = \frac{e^4 s^2}{32 s_W^4 ((s - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2)} \left[4(1 + \cos^2(\theta)) + 8 \cos(\theta) \right] \quad (2.54)$$

2.6. Differentieller Wirkungsquerschnitt

Eine Herleitung des differentiellen Wirkungsquerschnittes ist in Anhang A.4 gegeben. Das allgemeine Ergebnis für eine Berechnung in dem Schwerpunktsystem der Reaktion ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{cm} = \frac{|\vec{k}_C|}{64\pi^2 s |\vec{p}_A|} |\mathfrak{R}|^2 \quad (2.55)$$

Mit der Kinematik (Abschnitt 2.4) lässt sich der Bruch $\frac{|\vec{k}_C|}{|\vec{p}_A|}$ zu Eins kürzen. Des Weiteren ist es üblich den Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit der Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ auszudrücken. Es folgt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4e^4 s} |\mathfrak{R}|^2, \quad (2.56)$$

wobei die invariante Amplitude aus dem Abschnitt 2.5 eingesetzt werden muss. Da in jedem einzelnen Term der Amplitude ein e^4 vorkommt, kann dieser Faktor gekürzt werden. Der besseren Übersicht wegen werden für die Vorfaktoren vor den einzelnen Amplituden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$F_\gamma = Q_e^2 Q_\mu^2 \quad (2.57)$$

$$F_{Int} = \frac{Q_e Q_\mu}{s_W^2 c_W^2} \quad (2.58)$$

$$F_{Z_0} = \frac{1}{16 s_W^4 c_W^4} \quad (2.59)$$

und für die Terme innerhalb:

$$A_1 = \frac{c_V^e c_V^\mu}{2} \quad A_2 = c_A^e c_A^\mu \quad (2.60)$$

$$A_3 = ((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2) ((c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2) \quad A_4 = 8 c_V^e c_A^e c_V^\mu c_A^\mu. \quad (2.61)$$

Damit lässt sich der Wirkungsquerschnitt zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{cm} &= \frac{\alpha^2}{4} \left[\frac{F_\gamma}{s} (1 + \cos^2(\theta)) \right. \\ &+ \frac{s - M_Z^2}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2} F_{Int} (A_1(1 + \cos^2(\theta)) + A_2 \cos(\theta)) \\ &\left. + \frac{s}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2} F_{Z_0} (A_3(1 + \cos^2(\theta)) + A_4 \cos(\theta)) \right] \end{aligned} \quad (2.62)$$

2. Theoretische Vorbereitungen

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist nur noch von der Schwerpunktsenergie s der Kollision und dem Winkel θ zwischen \vec{p}_A und \vec{k}_C abhängig. Falls die Schwerpunktsenergie genau die Masse M_Z des Z_0 -Bosons erreicht, ist eine Resonanz zu erkennen. Ansonsten fällt auf, dass es eine Asymmetrie durch die Terme mit $\cos(\theta)$ zwischen Vorwärts- und Rückwärtsstreuung gibt. Das bedeutet, es ist wahrscheinlicher, dass das entstehende Muon in Richtung des einfallenden Elektronenstahls abgestrahlt wird, als dass es in die entgegengesetzte Richtung, also die Richtung des Positronstrahls, abgestrahlt wird. Eine Einheitenanalyse zeigt, dass, wenn man den Wirkungsquerschnitt in SI-Einheiten haben möchte, dieser noch mit dem Faktor $c^2\hbar^2$ multipliziert werden muss, damit die Einheit m^2 erhalten wird.

3. Leptonischer Speicherring

Ziel dieses Kapitels ist es für einen Elektron-Positron-Speicherring Vorhersagen über das Endprodukt von einem Muon-Antimuon-Paar zu machen, vorausgesetzt, dass nur Photonen oder Z_0 -Bosonen als Austauschteilchen fungieren. Der dazu relevante Wirkungsquerschnitt wurde oben in dem Abschnitt 2.6 berechnet, wobei letztlich die Schwerpunktsenergie und der Winkel zwischen einfallendem und ausgehendem Teilchen die einzigen beiden Parameter eingehen. Um somit einen Überblick über das Spektrum in dem Detektor zu erhalten, wird zunächst bei konstanter Energie die Winkelverteilung untersucht und im weiteren Verlauf über den Winkel integriert und das Verhalten unter Variation der Schwerpunktsenergie betrachtet. Im Zuge dieser Erörterung werden Elemente der Monte-Carlo-Eventgenerierung benutzt. Zu Beginn wird die Kinematik im Speicherring näher erläutert.

3.1. Kinematik II

Bei einem leptonischen Speicherring kann für eine Messung nur eine konstante Energie eingestellt werden. Das bedeutet, Untersuchungen zur Variation der Schwerpunktsenergie können in dieser Art von Experiment nicht kontinuierlich gemacht werden, sondern nur schrittweise abgetastet werden.

Das Koordinatensystem und die daraus folgenden Impulse aus Abschnitt 2.4 werden hier weiter verwendet. Die einzige zu spezifizierende Größe ist der räumliche Impulsvektor \vec{k}_C des ausgehenden Muons. Allgemein kann der Vektor über

$$\vec{k}_C = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ausgedrückt werden, wobei der neue Winkel φ in der Ebene, die senkrecht zum Strahl steht, liegt. Während θ der Wahrscheinlichkeitsverteilung des differentiellen Wirkungsquerschnittes folgt, ist φ unspezifiziert, d.h. für alle Werte gleich verteilt. Im Folgenden wird der Wirkungsquerschnitt über diesen Winkel integriert, was für das Experiment bedeutet, dass nicht nach diesem Winkel φ unterteilt wird. Die Integration kann elementar ausgeführt werden und resultiert in einem Faktor von 2π .

3.2. Winkelverteilung bei konstanter Schwerpunktsenergie

Da alle Vorbereitungen bereits abgeschlossen sind, kann die Untersuchung der Winkelverteilung direkt begonnen werden. Dazu wird mit Hilfe von Monte-Carlo-Eventgenerierung (siehe Anhang A.6) das analytische Ergebnis des Wirkungsquerschnittes (Gl. (2.62)) aus Abschnitt 2.6 in eine statistische Verteilung verarbeitet. Von einer Betrachtung der Detek-

3. Leptonischer Speicherring

toreffizienz wird abgesehen. Als Schwerpunktsenergie wird $\sqrt{s} = 34 \text{ GeV}$ gewählt.

Um eine Eventgenerierung vorzunehmen, muss zunächst das Maximum der Funktion in dem gegebenem Intervall gefundene werden. Um dies zu erhalten, wird eine Monte-Carlo-Integration (siehe Anhang A.5) vorgenommen und der maximale Wert gespeichert. Die zu berechnende Integration über den Wirkungsquerschnitt, der im Code mit `DW` gekennzeichnet wird, läuft über θ von $x_1=0$ bis $x_2=\pi$. Die Werte für θ werden zufällig im Intervall $[x_1, x_2]$ gewählt.

```
def xi(x):
    return (x2-x1)*x + x1
for i in range(N):
    rho = np.random.random()
    x = xi(rho)
    W[i] = np.abs(x2-x1)*DW(s,x)
    if W[i] > Wmax:
        Wmax = W[i]
    I += W[i]
    Qabw += W[i]**2
    I = I/float(N)
sigma = np.sqrt((Qabw/float(N) - I**2)/float(N))
```

Dabei wurde der maximale gewichtete Funktionswert in `Wmax` gespeichert. Die Integration wurde über eine Millionen Iterationen durchgeführt und es wurde ein Integralwert von $I = (133,135 \pm 0,034) \text{ pB}$ erhalten.

Um eine statistische Verteilung für die Muonen zu gewinnen, werden im Folgenden Events erzeugt. Es wird für jedes Teilchen ein zufälliger Winkel x gewählt und seine korrespondierende Wahrscheinlichkeit $\frac{(x2-x1)DW(x)}{Wmax}$ mit einer weiteren Zufallszahl zwischen 0 und 1 verglichen. Ist die korrespondierende Wahrscheinlichkeit größer als die Zufallszahl, wird das Teilchen als Event akzeptiert. Diese Iteration wird solange fortgeführt bis die gewünschte Anzahl an Events erreicht wurde; in diesem Fall 500.000. Mit dem Programmcode

```
Wi = np.zeros(Nevents)
i=0
while i<Nevents:
    rho = np.random.random()
    x = xi(rho)
    Wtest = np.abs(x2-x1)*DW(s,x)
    if Wtest/Wmax > np.random.random():
        Wi[i] = xi(rho)
        i +=1
```

3. Leptonischer Speicherring

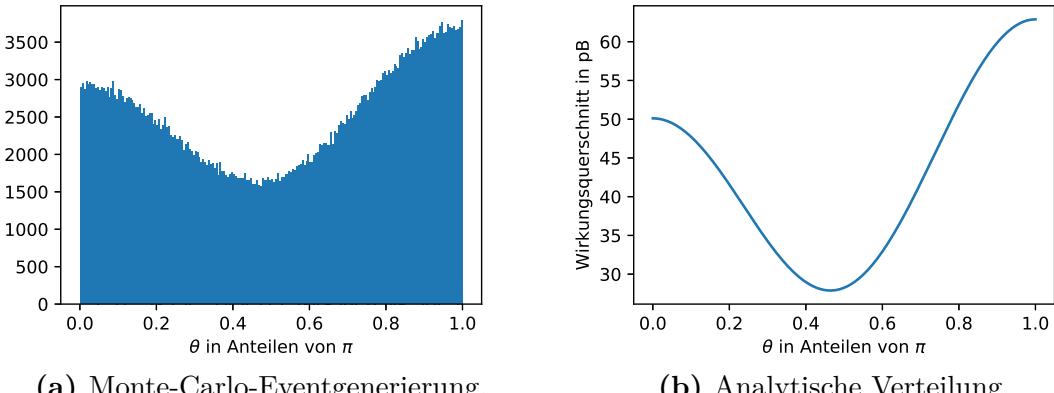


Abbildung 4: Vergleich der eventgenerierten und analytischen Verteilung des Wirkungsquerschnittes bei einer Schwerpunktsenergie von 34 GeV.

wird dies realisiert. Die entstehende Verteilung ist in Abb. 4 zu sehen. Die Monte-Carlo-Eventgenerierung besitzt eine Verteilung, die direkt der analytischen Verteilung folgt. Des Weiteren ist zu erkennen, dass eine Asymmetrie zwischen der Erzeugung der Muonen in Richtung der Elektronen ($\theta = 0$) und entgegengesetzt ($\theta = \pi$) vorliegt. Dies liegt den Termen, in welchen der $\cos(\theta)$ linear eingeht, zu Grunde. In diesem Energiebereich besitzt der Interferenzterm einen größeren Einfluss als der Term der schwachen Wechselwirkung. Und da der Interferenzterm mit einem Faktor $s - M_Z^2$ eingeht, wird in diesem Energiebereich ($s < M_Z^2$) das Vorzeichen vor dem $\cos(\theta)$ gedreht, was dazu führt, dass ein Muon weniger wahrscheinlich mit einem Impuls in Richtung des Elektronenstrahls erzeugt wird. Für das Antimuon gilt entsprechend das Gegenteil.

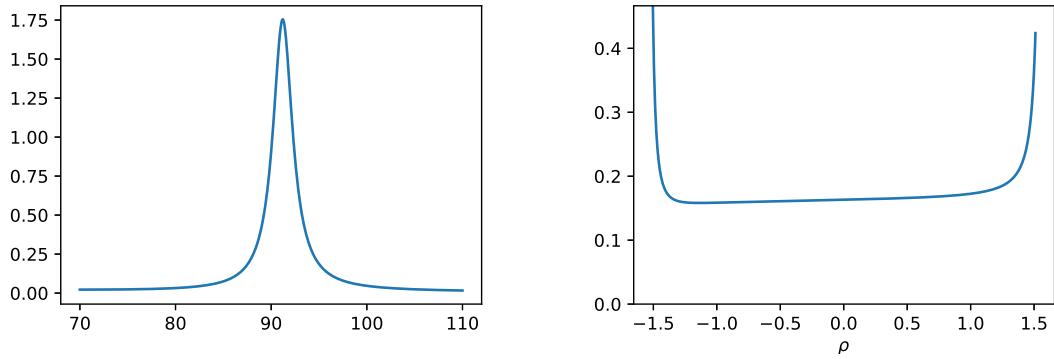
3.3. Variation der Schwerpunktsenergie

Eine weitere Anwendung eines leptonischen Speicherrings ist die Untersuchung des Wirkungsquerschnittes bei Veränderung der Schwerpunktsenergie. Dazu wird über die Winkelabhängigkeit von 0 bis π integriert, wobei die Terme mit $\cos(\theta)$ wegfallen, da diese in dem gegebenem Intervall asymmetrisch sind. Es folgt:

$$\begin{aligned} \sigma|_{cm} &= \frac{\alpha^2}{4} \left[\frac{8F_\gamma}{3s} + F_{Int} \frac{8A_1(s - M_Z^2)}{3((s - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2)} + F_{Z_0} \frac{8A_3s}{3((s - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2)} \right] \\ &= \frac{2\alpha^2}{3} \left[\frac{F_\gamma}{s} + F_{Int} \frac{A_1(s - M_Z^2)}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2} + F_{Z_0} \frac{A_3s}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Diese Terme sind wegen der Resonanz bei $s = M_Z^2$ nicht ohne Vorbereitung zur Generation von Events geeignet, da die Fläche, die die Funktion einschließt, nur ein kleiner Teil von dem Rechteck ist, in dem die Events zufällig erzeugt werden. Um den Integrationsbereich flacher zu gestalten, bietet sich eine Substitution der Form $s = M_Z\Gamma_Z \tan(\rho) + M_Z^2$ an

3. Leptonischer Speicherring



(a) Der Integrationsbereich vor der Substitution.
 (b) Der Integrationsbereich nach der Substitution.

Abbildung 5: Vergleich der Integrationsbereiche vor und nach der Substitution. Nach der Substitution nimmt die Funktion einen größeren Bereich der Fläche ein, womit die Eventgenerierung schneller abgeschlossen werden kann.

(siehe Anhang A.6), da damit die Resonanz verschwindet. Der Integrand wird damit zu

$$\tilde{\sigma}|_{cm} = \frac{2\alpha^2}{3} \left[F_\gamma \frac{1 + \tan^2(\rho)}{\frac{M_Z}{\Gamma_Z} + \tan(\rho)} + F_{Int} A_1 \tan(\rho) + F_{Z_0} A_3 \left(\tan(\rho) + \frac{M_z}{\Gamma_Z} \right) \right]. \quad (3.3)$$

Wie an dem ersten Term auffällt, ist diese Substitution nicht für geringe Energien geeignet, also in dem Bereich, in welchem die elektromagnetische Wechselwirkung den größten Beitrag liefert. Um dieses Problem zu umgehen, wird nur ein Energieintervall von 70 bis 110 GeV betrachtet. Damit folgt für die Substitution $\rho_{max} = 1.51$ und $\rho_{min} = -1.5$. Ein Vergleich der Integrationsbereiche vor und nach der Substitution ist in Abb. 5 zu sehen. Bei niedrigeren Energien divergiert die linke Flanke von Abb. 5b stärker, was die relative Fläche unter dem Integranden verringert, bei höheren Energien analog.

Die Integration und Eventgenerierung wird analog zu Abschnitt 3.2 vorgenommen, nur dass anstatt des Winkels über die Schwerpunktsenergie integriert und generiert wird. Nachdem die Events generiert wurden, müssen die gespeicherten ρ -Werte wieder resubstituiert und nach der Schwerpunktsenergie in ein Histogramm sortiert werden. Das Ergebnis für 500.000 Events ist in Abb. 6 zu sehen. Ein Vergleich mit Abb. 5a zeigt, dass die Eventgenerierung dasselbe Verhalten zeigt wie die analytische Lösung. Die Resonanz ist leicht asymmetrisch bezüglich der Masse $M_Z = 91,19$ GeV des Z_0 -Bosons. Dies kann damit erklärt werden, dass der Interferenzterm einen Faktor $s - M_Z^2$ im Zähler besitzt und damit den Wirkungsquerschnitt nach Überschreiten der Resonanz leicht anhebt, dominiert wird das Verhalten von dem Betragsquadrat des Z_0 -Boson Übergangs. Der elektromagnetische Teil spielt in diesem Bereich wegen seiner $\frac{1}{s}$ Abhängigkeit nur eine kleine Rolle.

Die meisten Events werden bei der Resonanz, also der Masse des Z_0 -Bosons erwartet. Das bedeutet für das Experiment, dass, wenn man die Schwerpunktsenergie erhöht und in die

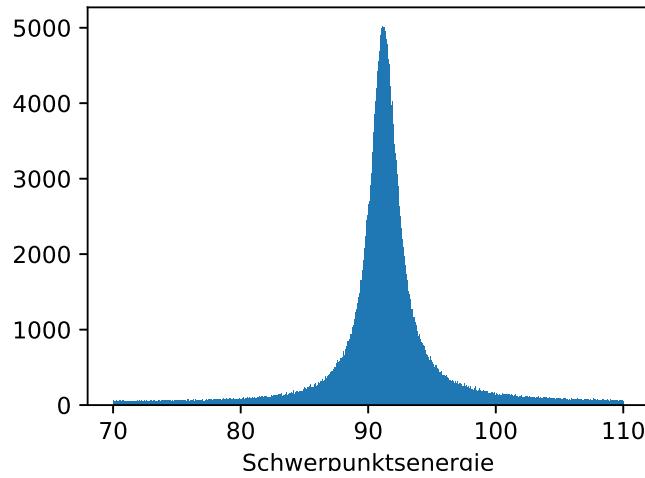


Abbildung 6: Die Monte-Carlo-Eventgenerierung für einen Energiebereich von 70 bis 110 GeV. Die meisten Events werden für Resonanz bei der Masse des Z_0 -Bosons erwartet.

Nähe von 91,19 GeV kommt, die Reaktionsrate im Detektor stark ansteigen sollte.

3.4. Zusammenfassung

Es wurden anhand eines Leptonischen Speicherringes die grundlegenden Anwendungen der Monte-Carlo-Eventgenerierung gezeigt und das Verhalten des differentiellen Wirkungsquerschnittes erläutert.

Dazu wurde bei fester Energie auf die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bei der Erzeugung der Muonen eingegangen und aufgezeigt, wie aus einer analytischen Verteilung eine statistische Verteilung der Events gewonnen werden kann. Des Weiteren wurde anhand der Variation der Schwerpunktsenergie ein Vorgehen erklärt, wie bei einer starken Resonanz die Effizienz der Monte-Carlo-Eventgenerierung gesteigert werden kann.

4. Hadronischer Speicherring

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, wie aus den bisherigen Ergebnissen und Methoden die Eventgenerierung auf einen hadronischen Speicherring angewendet werden kann. Die erste grundlegende Änderung zu einem leptonischen Speicherring ist, dass nicht mehr darauf rückgeschlossen werden kann, welche Teilchen an der Reaktion teilgenommen haben, da Protonen und Neutronen ein Zusammenschluss aus mehreren Quarks sind. Des Weiteren ist der Schwerpunkt der reagierenden Teilchen nicht mehr automatisch im Ruhesystem des Labors, da die Quarks unterschiedliche Anteile der Energien des Hadrons besitzen. Eine definierte Energie kann jedoch nur den Hadronen zugewiesen werden. Die jeweiligen Anteile der Energien pro Quark werden über Wahrscheinlichkeitsverteilungen, den sogenannten Parton-Verteilungsfunktionen, modelliert. Das Muon-Antimuon-Paar besitzt dadurch nicht mehr das Laborsystem als Schwerpunktssystem und wird von dem Laborsystem mit einem Lorentz-Boost detektiert.

Es wird außerdem gezeigt, wie das Detektorsignal über eine geeignete Filterung so dargestellt werden kann, dass trotzdem auf die zugrundeliegende Wechselwirkung geschlossen werden kann. Dabei wird sich auf den Fall eines Proton-Proton-Speicherrings bezogen, aber die Ergebnisse lassen sich leicht auf einen Proton-Antiproton-Speicherring anwenden.

4.1. Phänomenologie

Im Falle eines Proton-Proton-Speicherrings werden die Strahlen mit sehr hohen Energien zur Kollision gebracht. Da die Konstituenten des Protons jedoch jeweils nur einen Anteil der Energie besitzen, ist die Schwerpunktsenergie der reagierenden Teilchen, im Folgenden mit \hat{s} bezeichnet, variabel. Das führt dazu, dass, obwohl eine definierte Strahlenenergie angegeben werden kann, die entstehenden Muon-Antimuon-Paare mit den unterschiedlichsten Energien erzeugt werden und dass das Schwerpunktssystem des Paars nicht mit dem Ruhesystem des Labors übereinstimmt. Der Wirkungsquerschnitt wird jedoch im Schwerpunktssystem der Quarks berechnet und wird deswegen im Folgenden mit $\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos(\theta)}$ bezeichnet.

Um das Verhalten zu beschreiben, werden verschiedene Größen eingeführt: Mit S wird die Schwerpunktsenergie der Protonen-Kollision bezeichnet, mit x_1 und x_2 soll der Energieanteil der beiden Quarks q_1 und q_2 von den jeweiligen kollidierenden Protonen angegeben werden, wobei die Bedingung

$$\hat{s} \stackrel{!}{=} x_1 x_2 S \quad (4.1)$$

erfüllt sein muss. Auf die Wahrscheinlichkeitsdichten $f_q(x_1, \hat{s})$ für die einzelnen Quarks wird im folgenden Abschnitt (4.2) eingegangen.

Für den oben bestimmten Wirkungsquerschnitt kann nur eine Reaktion von Quark und Antiquark desselben Flavours stattfinden. Da jedoch die Quarks der dritten Generation

4. Hadronischer Speicherring

(Top- und Bottom-Quark) sehr große Massen besitzen und die Massen vernachlässigbar klein sein sollten, werden diese von der Betrachtung ausgeschlossen. Damit folgt, dass die Reaktion über vier verschiedene Anfangsteilchen laufen kann und aus dem Endprodukt nicht mehr zu entscheiden ist, welche diese waren.

Eine weitere Unbekannte bei der Reaktion ist die Farbladung der Quarks. Da jedoch die hier betrachtete Wechselwirkung nicht von der Farbladung abhängt, kann diese über eine Mittelung ausgedrückt werden. Der resultierende Faktor ergibt sich zu $\frac{1}{3}$, da die Wahrscheinlichkeit für ein Quark eine bestimmte Farbladung zu haben jeweils $\frac{1}{3}$ ist, es aber drei Möglichkeiten gibt für das Quark-Paar farbneutral zu bleiben. Diese letzte Forderung muss erfüllt sein, da das resultierende Muon-Antimuon-Paar farbneutral ist. Alle Effekte zusammengefasst, gelangt man zu folgendem Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\cos(\theta)} = \frac{1}{3} \sum_{q,\bar{q}} \int_{S_{\min}}^S d\hat{s} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \delta(Sx_1x_2 - \hat{s}) f_q(x_1, \hat{s}) f_{\bar{q}}(x_2, \hat{s}) \frac{d\hat{\sigma}(\hat{s}, \cos(\theta))}{d\cos(\theta)} \quad (4.2)$$

Während die Parton-Verteilungsfunktionen für die richtige Gewichtung bei den unterschiedlichen Energieanteilen sorgt, stellt die δ -Funktion sicher, dass Gl. (4.1) erfüllt ist. Die Summe über die Quark-Antiquark-Paare läuft über die vier möglichen Quarktypen: Up-, Down-, Charm- und Strange-Quark. Die minimale Energie S_{\min} wurde wie zuvor eingeführt, damit der Photon-Übergang nicht divergiert.

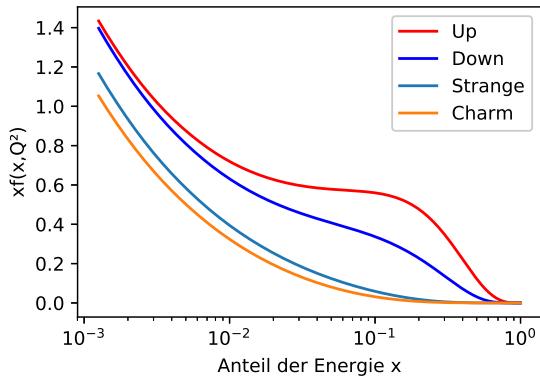
Eine finale Komplikation ist, dass es keine Möglichkeit gibt zu entscheiden, aus welchen der beiden Protonen das Antiteilchen entstammt. Da jedoch der Winkel θ entgegengesetzt zu der Bewegungsrichtung des Antiteilchens definiert wurde, muss für den Fall $\bar{q}q$, bei dem das Antiquark dem ersten Proton entstammt, der $\cos(\theta)$ zu $-\cos(\theta)$ gedreht werden. Wie später deutlich wird, kürzt sich damit die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie der erzeugten Muonen aus Abschnitt 3.2 weg. Bei einer Proton-Antiproton Kollision würde sich die Asymmetrie bemerkbar machen, da in diesem Fall eine ausgezeichnete Strahlrichtung vorliegt und das Antiquark mit einer größeren Wahrscheinlichkeit aus dem Antiproton entstammt.

4.2. Parton-Verteilungsfunktionen

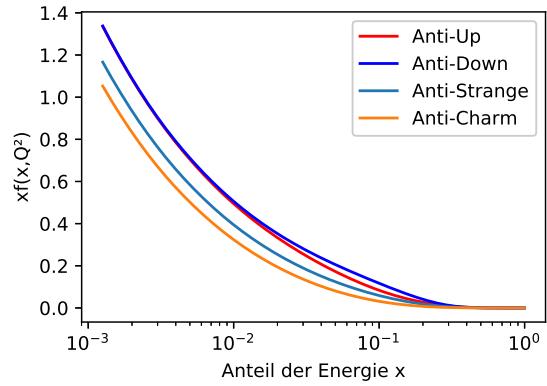
Die Parton-Verteilungsfunktionen (PDF) geben die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_q(x, Q^2)$ an, ein Quark in einem Hadron mit der Energie Q zu finden, wenn diese genau der Anteil x der Energie des Protons ist. Hierbei wird angenommen, dass das Proton eine sehr hohe Energie besitzt, damit die Quarks als masselos angenommen werden können und sich Energie und Impuls des Quarks ausgleichen.

Durch die PDF's lassen sich hadronische Prozesse bei großer Energie vollständig mit Subprozessen der Konstituenten des Hadrons beschreiben [7]. Die Dichten multipliziert mit den Energieanteilen sind in Abb. 7 für ein Proton abgebildet. Zur Implementierung

4. Hadronischer Speicherring



(a) Verteilungen für Quarks.



(b) Verteilungen für Anti-Quarks.

Abbildung 7: Die Parton-Verteilungsfunktionen für verschiedene Flavours und ihre korrespondierenden Anti-Teilchen bei $Q = 90 \text{ GeV}$. Als PDF-Set wurde 'CT14nlo' [3] verwendet.

der Verteilungsfunktionen wurde 'LHAPDF6' [2] verwendet. Das benutzte PDF-Set ist 'CT14nlo' [3].

Bei großen Energieanteilen dominieren im Proton die Up- und Down-Quarks, die sogenannten Valenzquarks. Bei geringen Anteilen steigen jedoch ebenfalls die Quarks der anderen Flavours an, was für den Speicherring von enormer Bedeutung ist, da die Protonen mit Energien im Bereich von TeV kollidieren, während die Reaktion zum größten Teil (siehe Abschnitt 3.3) im Bereich von 90 GeV stattfindet.

Würde man einen Proton-Antiproton-Speicherring simulieren wollen, müsste man anstatt der Proton-Verteilungsfunktionen Antiproton-Verteilungsfunktionen benutzen, was effektiv bedeutet, dass alle Teilchenfunktionen von den Proton-Verteilungsfunktionen zu Antiteilchenfunktionen werden und vice versa.

4.3. Kinematik III

Da im folgenden zwischen zwei Lorentz-Systemen gewechselt wird, werden die Impulse im Labor-System mit Großbuchstaben und im Schwerpunktsystem der Quarks mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Das Koordinatensystem wird so eingeführt, dass die kollidierenden Protonen sich in z -Richtung mit den Impulsen $P_{A,B}$ bewegen. Die Massen werden vernachlässigt. Die Quarks besitzen nun einen Impuls $p_1 = x_1 P_A$ und $p_2 = x_2 P_B$, was dazu führt, dass diese sich mit einem Gesamtimpuls P in dem Laborsystem bewegen.

$$P_A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{S}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{S}}{2} \end{pmatrix} \quad P_B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{S}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{S}}{2} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) \frac{\sqrt{S}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ (x_1 - x_2) \frac{\sqrt{S}}{2} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

4. Hadronischer Speicherring

Somit ist die Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$ gegeben durch $\beta = \frac{|\vec{p}|}{p^0} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ und der Lorentz-Boost kann berechnet werden. Da die Bewegung nur in Richtung der z -Achse liegt, bleiben die ersten und zweiten Komponenten davon unbeeinflusst. Dies ist praktisch, wenn die Impulsvektoren des entstehenden Muon-Antimuon-Paares in dem Laborsystem berechnet werden sollen. Die allgemeinen Vektoren für ein Muon und ein Antimuon besitzen in dem Schwerpunktsystem der Quarks folgende Form:

$$p_\mu = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad p_{\bar{\mu}} = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos(\varphi) \sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

mit θ, φ in der üblichen Definition. Mittels einer Lorentz-Transformation können nun die Impulse in dem Laborsystem berechnet werden. Mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ folgt:

$$P_\mu = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \begin{pmatrix} \gamma(1 - \beta \cos(\theta)) \\ \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \gamma(\cos(\theta) - \beta) \end{pmatrix} \quad P_{\bar{\mu}} = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \begin{pmatrix} \gamma(1 + \beta \cos(\theta)) \\ -\cos(\varphi) \sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ -\gamma(\cos(\theta) + \beta) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Bemerkenswert ist hierbei, dass die transversalen Komponenten der Muonen-Impulse nicht von der Lorentz-Transformation betroffen sind und somit die volle Information über die Reaktion in sich tragen. Diese Eigenschaft wird später enorme Wichtigkeit erhalten.

4.4. Monte-Carlo-Integration

Das Ziel ist es Gl. (4.2) zu integrieren, um eine Eventgenerierung zu ermöglichen. Zunächst kann über die δ -Funktion integriert werden. Um später geschickt substituieren zu können, wird x_2 gewählt. Mit $\delta(f(x)) \Rightarrow \sum_i |f'(x)|^{-1}$ folgt:

$$\frac{d\sigma}{d\cos(\theta)} = \frac{1}{3} \sum_{q,\bar{q}} \int_{S_{\min}}^S d\hat{s} \int_{\hat{s}/S}^1 dx_1 \frac{1}{\hat{s}x_1} f_q(x_1, \hat{s}) f_{\bar{q}} \left(\frac{\hat{s}}{Sx_1}, \hat{s} \right) \frac{d\hat{\sigma}(\hat{s}, \cos(\theta))}{d\cos(\theta)}, \quad (4.6)$$

wobei sich die untere Grenze von x_1 geändert hat, da sonst die Bedingung nicht erfüllt wird und somit die δ -Funktion nicht gelöst werden kann. Um nun den Bruch $\frac{1}{\hat{s}x_1}$ zu eliminieren, wird $\hat{s} = \tau S$ (also $\tau = x_1 x_2$) substituiert und die Rapidity y mit der Definition von P aus Abschnitt 4.3 via

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{P^0 + P_z}{P^0 - P_z} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \quad (4.7)$$

4. Hadronischer Speicherring

eingeführt. Somit ergeben sich $x_{1,2} = \sqrt{\tau}e^{\pm y}$ und die gewünschte Jacobi-Determinante so, dass $d\hat{s}dx_1 = \hat{s}x_1d\tau dy$ gilt. Die Integrale transformieren sich zu:

$$\frac{d\sigma}{d\cos(\theta)} = \frac{1}{3} \sum_{q,\bar{q}} \int_{S_{\min}/S}^1 d\tau \int_{\frac{1}{2}\ln(\tau)}^{-\frac{1}{2}\ln(\tau)} dy f_q(\sqrt{\tau}e^y, \tau S) f_{\bar{q}}(\sqrt{\tau}e^{-y}, \tau S) \frac{d\hat{\sigma}\left(\frac{\tau}{S}, \cos(\theta)\right)}{d\cos(\theta)}, \quad (4.8)$$

wobei sich die Grenzen von y durch $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x_1^2}{\tau}\right)$ mit $x_1^{\max} = 1$ und $x_1^{\min} = \frac{\hat{s}}{S} = \tau$ ergeben. Hier tritt der Spezialfall auf, dass die Grenzen von y von τ abhängig sind. In der Monte-Carlo-Integration wird dies gelöst, indem zuerst der Wert von τ zufällig generiert wird und damit der Wert von y erzeugt wird.

Damit sind alle Vorbereitungen abgeschlossen und die Monte-Carlo-Integration kann durchgeführt werden. Um eine bessere Eventgenerierung zu erhalten, wird die Resonanz bei M_Z wieder mit der bekannten Substitution aus dem leptonischen Speicherring (Abschnitt 3.3) substituiert. Das bedeutet für diesen Fall:

$$\tau = \frac{\hat{s}}{S} = \frac{M_Z \Gamma_Z \tan(\rho) + M_Z^2}{S}. \quad (4.9)$$

Diese Substitution transformiert den Integranden durch die Divergenzen von der elektromagnetischen Wechselwirkung und zusätzlich der Parton-Verteilungsfunktionen bei niedrigen Impulsanteilen nicht in eine optimal flache Funktion, weswegen die Integration eine starke Varianz aufweist, die sich hier nur durch besonders viele Iterationen abschwächen lässt. Deswegen wurde bei der Verwendung dieses Codes $N=100.000.000$ gewählt:

```

Smin = 20.**2
S = 8000.**2
Einheiten = (alpha*h*c)**2/(3.*S*10**18)
RH0minZ = np.arctan((Smin-MZ0**2)/(FWZ0*MZ0))
RH0maxZ = np.arctan((S-MZ0**2)/(FWZ0*MZ0))
Integralgrenzen = 2.*np.pi*(1-(-1))*(RH0maxZ-RH0minZ)

for i in range(N):
    cos = 2.*np.random.random() - 1.
    rho = RH0minZ + (RH0maxZ-RH0minZ)*np.random.random()
    t = (MZ0*FWZ0*np.tan(rho)+MZ0**2)/S
    ymax = -0.5*np.log(t)
    y = (2.*np.random.random()-1)*ymax
    x1 = np.sqrt(t)*np.exp(y)
    x2 = np.sqrt(t)*np.exp(-y)
    W[i] = 2.*ymax*Integralgrenzen*D(W(x1,x2,t*S,rho,cos))
    if W[i] > Wmax:

```

4. Hadronischer Speicherring

```

Wmax = W[i]
I += W[i]
Qabw += W[i]**2
I *= 1./float(N)
sigma = Einheiten*np.sqrt(np.abs(Qabw/float(N) - I**2)/float(N))
I *= Einheiten

```

Die Integralgrenzen ergeben sich durch die Integration über φ von 0 bis 2π und $\cos(\theta)$ von -1 bis 1.

Die Funktion `DW` beinhaltet die Summation über die Flavours. Eine Parton-Verteilungsfunktion wird über die Methode `proton.xfxQ2(#Flavour,x,s)` aufgerufen, was die Verteilungsfunktion, multipliziert mit ihrem Impulsanteil x , zurückgibt. Deswegen wird in jeder Zeile nochmal durch $x_1 x_2$ geteilt. Wie im letzten Absatz von Abschnitt 4.1 beschrieben, muss über die Möglichkeiten summiert werden, dass das Quark von dem ersten Proton oder dem zweiten Proton gestellt wird. Dies dreht den $\cos(\theta)$ zu $-\cos(\theta)$.

```

def DW(x1,x2,s,rho,cos):
    #up- & charm-Quarks -> quark=1
    value = hatDW(rho,cos,1)*(proton.xfxQ2(2,x1,s)*proton.xfxQ2(-2,x2, s)
        + proton.xfxQ2(4,x1,s)*proton.xfxQ2(-4,x2,s))/(x1*x2)
    value += hatDW(rho,-cos,1)*(proton.xfxQ2(2,x2,s)*proton.xfxQ2(-2,x1,s)
        + proton.xfxQ2(4,x2,s)*proton.xfxQ2(-4,x1,s))/(x1*x2)
    #down- & strange- & bottom-Quarks -> quark=2
    value += hatDW(rho,cos,2)*(proton.xfxQ2(1,x1,s)*proton.xfxQ2(-1,x2,s)
        + proton.xfxQ2(3,x1,s)*proton.xfxQ2(-3,x2,s))/(x1*x2)
    value += hatDW(rho,-cos,2)*(proton.xfxQ2(1,x2,s)*proton.xfxQ2(-1,x1,s)
        + proton.xfxQ2(3,x2,s)*proton.xfxQ2(-3,x1,s))/(x1*x2)
    return value

```

Als letztes wird noch die Methode `hatDW` aufgerufen. Diese ruft den berechneten Wirkungsquerschnitt für die unterschiedlichen Quark-Typen auf, da sich von Up- zu Down-Quark (und von Charm- zu Strange-Quark) die Vektor- (c_V) und Axialvektorkopplungen (c_A) ändern.

Insgesamt ergibt sich ein Integralwert von $(1319,36 \pm 2,03)$ pB. Die große Unsicherheit bei Einhundertmillionen Iterationen zeigt deutlich, dass der Integrationsbereich nicht optimal flach ist.

4.5. Eventgenerierung und -filterung

Der Code für die Eventgenerierung ergibt sich fast analog zu dem Code zur Berechnung des Integrals. Eine weitere Besonderheit ist, dass für jedes Teilchen alle generierten Parameter

4. Hadronischer Speicherring

gespeichert werden, damit die angesprochene Lorentz-Transformation aus Abschnitt 4.3 durchgeführt und das reale Detektorsignal gewonnen werden kann. Die Generierung wird über diesen Code vorgenommen:

```
Wi = np.zeros((Nevents,4)) # Aufbau: [x1,x2,cos(theta),sin(phi)]
Ecm = np.zeros(Nevents)      # Energie CMS der Quarks
i=0
while i<Nevents:
    cos = 2.*np.random.random() - 1.
    sin = np.sin(2.*np.pi*np.random.random())
    rho = RHominZ + (RHmaxZ-RHominZ)*np.random.random()
    t = (MZ0*FWZ0*np.tan(rho)+MZ0**2)/S
    ymax = -0.5*np.log(t)
    y = (2.*np.random.random()-1)*ymax
    x1 = np.sqrt(t)*np.exp(y)
    x2 = np.sqrt(t)*np.exp(-y)
    Wtest = 2.*ymax*Integralgrenzen*DW(x1,x2,t*S,rho,cos)
    if Wtest/Wmax > np.random.random():
        Wi[i,0]=x1
        Wi[i,1]=x2
        Wi[i,2]=cos
        Wi[i,3]=sin
        Ecm[i]=np.sqrt(t*S)
        i +=1
```

Es wurden Einhunderttausend Events generiert. Die Ergebnisse sind in zwei Histogrammen, einmal die Energie in dem Schwerpunktsystem der Quarks und einmal die detektierbare Energie im Labor-System, in Abb. 8 dargestellt. Man beachte, dass die gesamte Energie des Muon-Antimuon-Paars aufgetragen ist und nicht nur die von einem Muon. Damit wäre die Resonanz nicht bei 91,19 GeV sondern bei 45,6 GeV. Da die Events nur bis zu einer Minimalenergie von 20 GeV generiert wurden, ist der Bereich für kleinere Energien von der Auswertung auszuschließen.

In der Grafik ist deutlich zu erkennen, dass die Events in dem Schwerpunktsystem der Quarks genau der erwarteten Verteilung folgen, aber das Signal im Labor-System nicht mehr deutlich zu erkennen ist. Würde noch Detektoreffizienz und Untergrundrauschen hinzugefügt werden, wäre das Signal in keiner Weise zu erkennen. Um dennoch beispielsweise auf die Masse des Z_0 -Bosons schließen zu können, wird das Signal geeignet gefiltert. In Abschnitt 4.3 wurde bereits angedeutet, dass es sinnvoll ist, die Impulse der Muonen in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil zur ursprünglichen Strahlrichtung zu zerlegen, da nur der longitudinale Impulsanteil von der Lorentz-Transformation beeinflusst

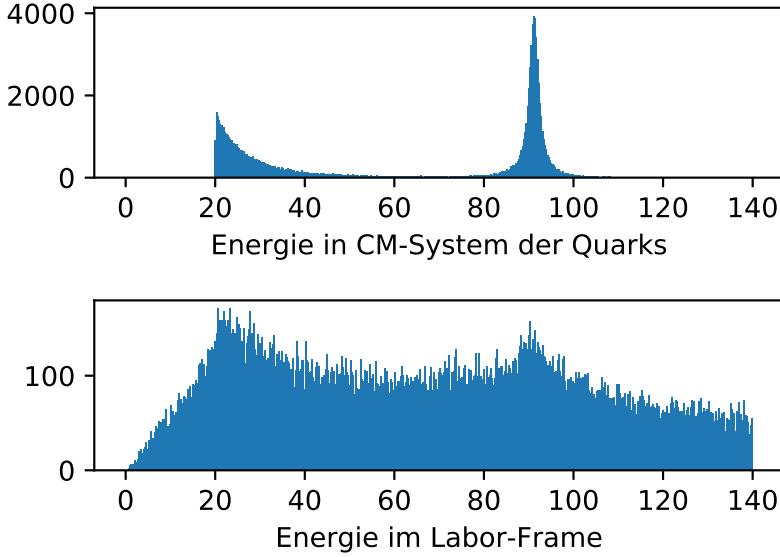


Abbildung 8: Die generierten Events nach ihrer Energie im Schwerpunktsystem der Quarks und im Labor-Frame in einem Histogramm dargestellt. In dem Energiebereich unterhalb von 20 GeV werden keine Events erzeugt, weswegen dieser Bereich für die Auswertung ausgeklammert werden muss.

wird. Es wird definiert:

$$\vec{P}_{\mu, \text{long}} = \frac{\hat{s}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma(\cos(\theta) - \beta) \end{pmatrix} \quad \vec{P}_{\mu, \text{trans}} = \frac{\hat{s}}{2} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Mit den gespeicherten Daten aus der Generierung lassen sich die Beträge und somit die Energien in longitudinaler und transversaler Richtung bestimmen. Die transversale Komponente beinhaltet noch die unveränderte Wechselwirkung der Reaktion, weswegen in ihr das beste Signal zu erwarten ist. Die Ergebnisse sind in Abb. 9 abgebildet, wo in der longitudinalen Energiekomponente keine Struktur zu erkennen ist, während in der transversalen Komponente eine deutlich Resonanz bei 91,19 GeV zu erkennen ist, die kurz dahinter zu beinahe Null abfällt. Dies ist das typische Verhalten für eine Resonanz in einem hadronischen Speicherring.

Ein weiterer Punkt der Auswertung ist die Verteilung des $\cos(\theta)$'s. Hierzu werden von allen produzierten Muonen (unabhängig von der Schwerpunktsenergie) die Winkelinformationen in einem Histogramm zusammengetragen. Dies ist zulässig, da die Terme des Wirkungsquerschnittes, die die Winkelverteilung beschreiben, nicht untereinander unterschiedlich mit der Energie gewichtet werden. Das bedeutet, die Winkelverteilung ist für alle Energien gleich. In Abb. 10 ist die bisher beobachtete Asymmetrie zwischen Vorwärts- und Rückwärtsstreuung nicht zu erkennen. Dies ist dem Fakt geschuldet, dass im Detektor nicht unterschieden werden kann, in welchem Proton das Antiteilchen erzeugt wurde. Deswegen

4. Hadronischer Speicherring

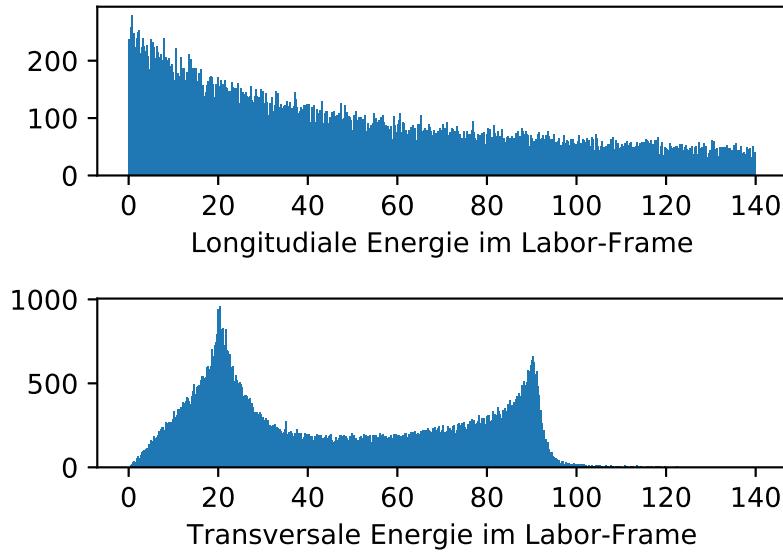


Abbildung 9: Die longitudinale und transversale Impulskomponente des erzeugten Muon-Antimuon-Paares im Labor-System. Mit dieser Filterung ist die Resonanz der Reaktion deutlich zu erkennen.

mussten beide Möglichkeiten, wobei diese mit gedrehten $\cos(\theta)$ zu berücksichtigen sind, mit einbezogen werden. Damit kürzt sich effektiv der ungerade Teil (also der Term mit linearem $\cos(\theta)$), der die Asymmetrie gewährleistet, raus.

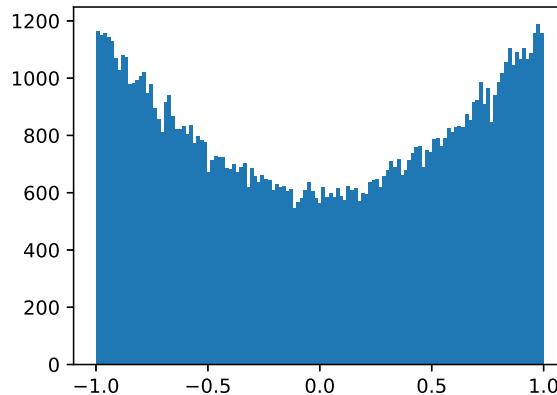


Abbildung 10: Die Verteilung von $\cos(\theta)$. Es ist keine Asymmetrie zwischen $\cos(\theta) = 1$ und $\cos(\theta) = -1$ zu erkennen. Dies ist damit zu erklären, dass nicht unterschieden werden kann, ob das Antiteilchen aus dem ersten oder zweiten Proton entstammt und damit beide Fälle gleich, aber mit gedrehtem Cosinus (also $\cos(\theta) \leftrightarrow -\cos(\theta)$) berücksichtigt werden.

4.6. Produktion von W-Bosonen

Es gibt eine weitere Teilchenreaktion, die in einem hadronischen Speicherring auftritt und mit einer leichten Anpassung der bisherigen Methoden simuliert werden kann: eine Teilchenreaktion, bei der ein virtuelles W -Boson ausgetauscht wird. In Abschnitt 2.5.3 wurde bereits erläutert, wie aus der quadrierten invarianten Amplitude mit einem Z_0 -Boson als Austauschteilchen die hier gewünschte Amplitude erhalten werden kann. Im Folgenden wird sich auf ein W^- -Boson beschränkt. Um ein W^+ -Boson zu beschreiben, müsste nur bei den Anfangs- und Endteilchen eine Konjugation von Teilchen zu Antiteilchen und vice versa vorgenommen werden.

Da hier eine Proton-Proton-Kollision betrachtet wird, kommen als Anfangsteilchen $\bar{u}d$ und $\bar{c}s$ vor. Auch hier kann nicht unterschieden werden, welches Proton das Antiteilchen stellt. Beide Möglichkeiten müssen mit 180° gedrehtem Winkel berücksichtigt werden und die Asymmetrie zwischen Vorwärts- und Rückwärtsstreuung ist nicht zu erkennen. Als Endteilchen wird ein Muon und ein Antimuon-Neutrino gewählt. Zu bemerken ist, dass bis auf die Partonverteilungsfunktionen keine teilchenspezifischen Parameter in die Reaktion mit dem Wirkungsquerschnitt (aus Gl. (2.54) und (2.56))

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{cm} = \frac{\alpha^2 s}{32s_W^4((s - M_W^2)^2 + M_W^2\Gamma_W^2)} \left[(1 + \cos^2(\theta)) + 2\cos(\theta) \right] \quad (4.11)$$

eingehen. Das zu berechnende Integral ist der gleichen Form wie in Abschnitt 4 und die Vorgehensweise der Monte-Carlo-Integration und -Eventgenerierung wird analog durchgeführt.

Die Integrationsparameter (Schwerpunktsenergie und minimale Schwerpunktsenergie der Quarks) werden zur Vergleichbarkeit mit Abschnitt 4.5 genauso gewählt. Mit einer Millionen Iterationen wurde der Wirkungsquerschnitt zu $(215,42 \pm 0,15) \text{ pB}$ berechnet. Hier ist bereits auffällig, dass trotz geringerer Iterationen der Wirkungsquerschnitt genauer bestimmt werden kann. Dies liegt daran, dass keine $\frac{1}{s}$ Divergenz durch ein Photon als Austauschteilchen existiert und die Substitution effektiver ist. Trotzdem werden nicht mehr Events als im vorherigen Abschnitt generiert, um die Vergleichbarkeit hoch zu halten.

Die Ergebnisse sind ungefiltert in Abb. 11 und gefiltert in Abb. 12 zu sehen. Es ist zu erkennen, dass auch in diesem Fall die Filterung nach longitudinalen und transversalen Energiekomponenten die Deutlichkeit der Resonanz enorm verbessern. Im Gegensatz zu den bisherigen Ergebnissen steigt die Zählrate bei kleinen Energien nicht an, da hier keine Divergenz des Photons zu berücksichtigen ist. Dies verbessert zusätzlich die Deutlichkeit der Resonanz. Für ein W^+ -Boson als Austauschteilchen ergeben sich in dieser Betrachtungsweise bis auf Anfangs- und Endteilchen keine Unterschiede.

4. Hadronischer Speicherring

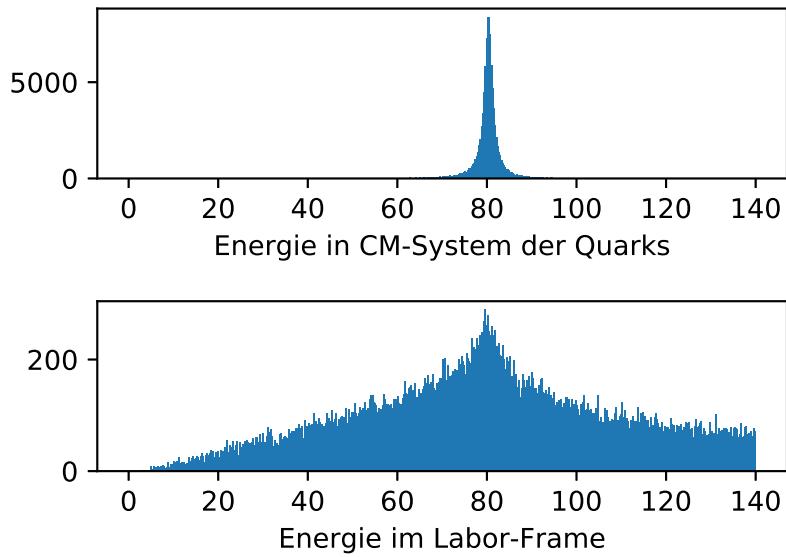


Abbildung 11: Die Energien des Muon-Antimuon-Neutrino-Paars in ihrem Schwerpunktsystem und in dem Laborsystem.

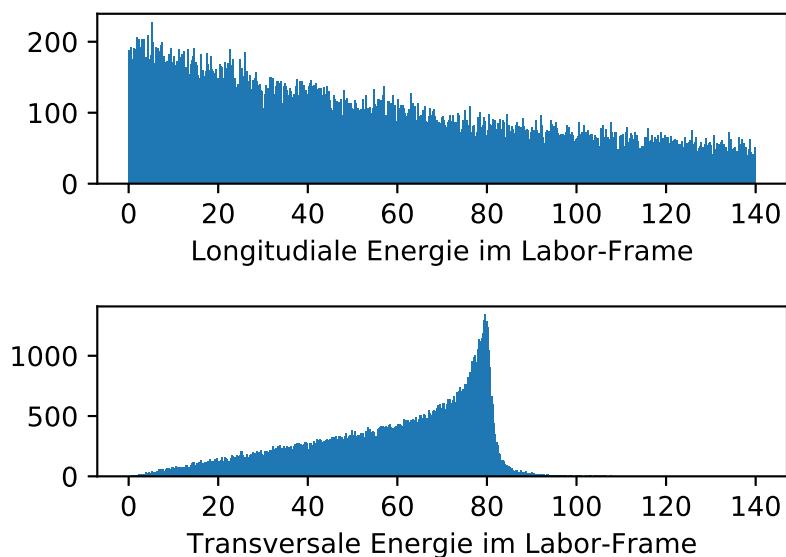


Abbildung 12: Die gefilterten longitudinalen und transversalen Energien für ein W^- -Boson als Austauschteilchen.

5. **Schlussfolgerung**

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wurde gezeigt, wie der differentielle Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion mit einem Photon oder einem Z_0 -Boson aus einem Feynman-Diagramm erhalten werden kann. Dazu wurde erörtert, wie die relevanten Wechselwirkungen im Standardmodell beschrieben werden und die daraus folgende Rechnung wurde im Detail durchgeführt.

Zur Auswertung des erhaltenen Wirkungsquerschnittes wurden zwei relevante Experimente aus theoretischer Sicht aufbereitet und es wurde gezeigt, wie man mit Methoden der Monte-Carlo-Integration und -Eventgenerierung aus der theoretischen Beschreibung mit dem Experiment vergleichbare Ergebnisse produzieren kann. Als erstes Experiment wurde die Reaktion in einem leptonischen Speicherring untersucht und im Rahmen dessen die Winkelverteilung bei konstanter Strahlenenergie und die Resonanz des Propagators eines massiven Vektorbosons mittels Variation der Strahlenenergie analysiert. Mit diesen Ergebnissen und Methoden konnte ein hadronischer Speicherring simuliert werden. Mit Hilfe von Parton-Verteilungsfunktionen konnte eine Proton-Proton-Kollision in der Art beschrieben werden, dass nur die Teilchenreaktionen stattfinden, die mit dem berechneten Wirkungsquerschnitt wiedergegeben werden. Des Weiteren wurde gezeigt, wie durch Zerlegung in longitudinale und transversale Impulskomponenten das Signal im Detektor so aufbereitet werden kann, dass Aussagen über die zugrundeliegende Wechselwirkung getroffen werden können.

Im Verlauf dieser Arbeit wurden verschiedene Näherungen und Vereinfachungen vorgenommen, die im Nachhinein noch korrigiert werden könnten. Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes wurde der Prozess auf niedrigster Ordnung untersucht. Eine Untersuchung der höheren Ordnungen der Störungsreihe würde die berechneten Wirkungsquerschnitte korrigieren. Des Weiteren wurden in der Berechnung die Massen aller Anfangs- und Endteilchen vernachlässigt. Dies würde ebenfalls die Berechnung des Wirkungsquerschnittes verändern. Bei der Beschreibung der Detektoren wurden weder Anpassungen hinsichtlich der Detektoreffizienz getroffen, noch wurde Rauschen im Detektor miteinbezogen. Um eine realistisches Detektorsignal zu erhalten, müssten diese Effekte miteinbezogen werden. Ebenfalls hat sich bei der Monte-Carlo-Eventgenerierung des hadronischen Speicherringes die Vorgehensweise als ineffizient erwiesen, da die minimale Schwerpunktsenergie des Quark-Paars so gering gewählt wurde, für eine dauerhafte Anwendung würde es sich empfehlen eine andere Methode des 'Importance Sampling's zu finden.

A. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen, die für das Verständnis der Arbeit essentiell sind, erläutert werden.

A.1. Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung ist die Zustandsgleichung für relativistische Fermionen und lautet mit den Gamma-Matrizen γ^μ für ein freies Teilchen

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0. \quad (\text{A.1})$$

Die Gamma-Matrizen sind über die Vertauschungsrelation $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{I}_4$, mit $g^{\mu\nu}$ als Minkowskimetrik mit Signatur $(+, -, -, -)$ definiert. Da die Vertauschungsrelation eine Freiheit in der Wahl der Basis besitzen, wird im Folgenden die Dirac-Basis gewählt. Damit gilt für die Matrizen (σ^i sind die Pauli-Matrizen):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die γ^5 -Matrix ist das Produkt aus den vier Gamma-Matrizen und wird im späteren Verlauf für die Behandlung der Chiralität benötigt.

Die allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen lautet $\psi = u(p)e^{-\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu}$ mit dem Spinor $u(p)$, der nach Einsetzen der Lösung in die Dirac-Gleichung

$$(\not{p} - mc)u(p) \equiv (\gamma^\mu p_\mu - mc)u(p) = 0 \quad (\text{A.2})$$

erfüllen muss. Daraus ergibt sich, aufgeteilt in die verschiedenen Spinzustände $s = 1$ oder 2 (für Spin 'up' oder 'down') und Teilchen von Antiteilchen (mit $v(p, s)$ bezeichnet) getrennt folgende Lösung:

$$u(p, s=1) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E+mc^2} \\ \frac{p_1+ip_2}{E+mc^2} \end{pmatrix} \quad u(p, s=2) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_1-ip_2}{E+mc^2} \\ \frac{-p_3}{E+mc^2} \end{pmatrix} \quad \text{für } E > 0 \quad (\text{A.3})$$

$$v(p, s=1) = N \begin{pmatrix} \frac{p_1-ip_2}{E+mc^2} \\ \frac{-p_3}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v(p, s=2) = N \begin{pmatrix} \frac{p_3}{E+mc^2} \\ \frac{p_1+ip_2}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } E < 0 \quad (\text{A.4})$$

A. Theoretische Grundlagen

N ist jeweils die Normierungskonstante, welche, wenn man die Norm einer Wellenfunktion mit $2E$ gleichsetzt, zu $N = \sqrt{E + mc^2}$ berechnet werden kann. Die Norm soll $2E$ ergeben, damit sich die Gesamtwahrscheinlichkeit bei einer Lorentz-Transformation nicht ändert. Zu beachten ist, dass hier nur der Spinor normiert wurde und nicht die Exponentialfunktion, da diese nicht normierbar ist. Eine genauere Betrachtung würde die Verwendung von Wellenpaketen verlangen. Jedoch ergeben sich dadurch für den Rahmen dieser Arbeit keine entscheidenden Unterschiede.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist nach obiger Betrachtung eine Energie, was nützlich ist, weil sie so als nullte Komponente des Wahrscheinlichkeitsstroms aufgefasst werden kann. Dieser kann wie folgt definiert werden:

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{A.5})$$

$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ ist der adjungierte Spinor.

Da die schwache Wechselwirkung zwischen den Chiralitätskomponenten eines Spinors unterscheidet, ist es sinnvoll ebenfalls die Chiralität zu diskutieren. Es ist möglich einen Zustand in seine Chiralitätskomponenten Ψ_L und Ψ_R zu zerlegen. Diese werden als links- bzw. rechtshändig bezeichnet und sind Eigenzustände der bereits erwähnten γ^5 -Matrix. Es gilt:

$$\gamma^5 \Psi_R = \Psi_R \quad \text{und} \quad \gamma^5 \Psi_L = -\Psi_L \quad (\text{A.6})$$

Da die γ^5 -Matrix für Teilchen mit Masse nicht mit dem Dirac-Hamiltonian vertauscht, sind die Chiralitätskomponenten keine Eigenzustände der Dirac-Gleichung. Über den Projektionsoperator $\Pi^\pm = \frac{1}{2}(I_4 \pm \gamma^5)$ lässt sich aus einem allgemeinen Spinor Ψ seine links- bzw. rechtshändige Komponente gewinnen. So gilt beispielsweise:

$$\Pi^- \Psi = \Psi_L \quad (\text{A.7})$$

Mit $\Pi^+ + \Pi^- = I_4$ und $\Pi^+ \Pi^- = 0$ genügen die Operatoren den Vollständigkeitsrelationen von Projektionsoperatoren, so dass sich jeder Spinor vollständig in seine chiralen Komponenten zerlegen lässt: $\Psi = \Psi_R + \Psi_L$. Diese Komponenten haben die spezielle Eigenschaft unter Raumspiegelung ineinander überzugehen. So wird beispielsweise die linkshändige Komponente unter Raumspiegelung zur rechtshändigen Komponente und vice versa. Das bedeutet, dass wenn ein Prozess unterschiedlich an Ψ_L und Ψ_R koppelt, eine Asymmetrie unter Raumspiegelung auftritt.

A.2. Herleitung der invarianten Amplitude

Das Ziel ist es, die Übergangsamplitude in erster Ordnung Störungstheorie für einen Wechselwirkungsprozess auf Teilchenebene zu bestimmen. Die Schwierigkeit hierbei ist,

A. Theoretische Grundlagen

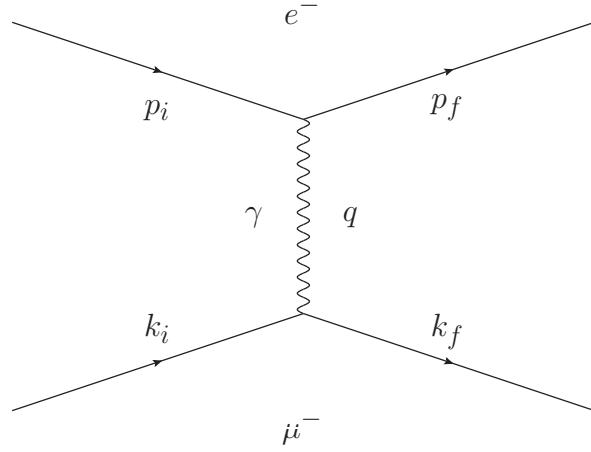


Abbildung 13: Feynman-Diagramm für Elektron-Muon-Streuung. Der Impuls q wird über ein virtuelles Photon übertragen, wobei gilt $q = k_i - k_f = p_f - p_i$ (eigene Darstellung).

dass die Dirac-Gleichung eine Einteilchen-Theorie ist, die Übergangsamplitude jedoch (in diesem Fall) zwei verschiedenen Teilchen beinhaltet. Die Übergangsamplitude ist mit dem Störpotential A^μ definiert als:

$$T_{fi} = ie \int \bar{\Psi}_f^e \gamma_\rho A^\rho \Psi_i^e d^4x = -i \int j_{\rho}^{e,fi} A^\rho d^4x \quad (\text{A.8})$$

Die Situation, die beschrieben werden soll, ist in Abb. 13 zu sehen und die Bezeichnungen aus der Grafik wurden übernommen. Analog zu (A.5) wurde der geladene Elektronenstrom $j^{e,fi}$ eingeführt. Da diese Herleitung im Rahmen der Störungstheorie vorgenommen wird, werden für die Spinoren der Elektronen die Lösungen der Dirac-Gleichung für freie Teilchen aus Anhang A.1 angesetzt.

Das Störpotential, dass von dem Muon erzeugt wird und auf das Elektron wirkt, kann über die Maxwell-Gleichungen gewonnen werden. Der geladene Muon-Strom $j_\lambda^{\mu,fi} = -e \bar{\Psi}^{\mu,f} \gamma_\lambda \Psi^i$ muss (in Lorenz-Eichung)

$$\partial^\nu \partial_\nu A_\lambda = j_\lambda^{\mu,fi} \quad (\text{A.9})$$

erfüllen. Für die Spinoren des Muons werden ebenfalls die Lösungen der Dirac-Gleichung für freie Teilchen angesetzt. Damit lässt sich die Differentialgleichung lösen:

$$\begin{aligned} \partial^\nu \partial_\nu A_\lambda &= -e \bar{u}(k_f) \gamma_\lambda u(k_i) e^{-i(k_i^\nu - k_f^\nu)x_\nu} \\ \Rightarrow A_\lambda &= e \frac{\bar{u}(k_f) \gamma_\lambda u(k_i)}{(k_i - k_f)^2} e^{-i(k_i^\nu - k_f^\nu)x_\nu} = \frac{j_\lambda^{\mu,fi}}{(k_i - k_f)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

In der zweiten Zeile wurde ausgenutzt, dass die einzige Ortsabhängigkeit der rechten Seite in der Exponentialfunktion steckt und zusätzlich $\partial^\nu \partial_\nu e^{-iq^\sigma x_\sigma} = -q^2 e^{-iq^\sigma x_\sigma}$ gilt. Das bedeutet, dass das Störpotential direkt von dem Impulsübertrag $q^\nu = (k_i - k_f)^\nu$ abhängt. Mit diesem Ergebnis lässt sich nun die Integration (A.8) ausführen und damit die Über-

A. Theoretische Grundlagen

gangsamplitude bestimmen.

$$\begin{aligned}
T_{fi} &= -i \int j_\rho^{e,fi} A^\rho d^4x \\
&= \frac{i}{q^2} \int (-e \bar{\Psi}_f^e \gamma_\rho \Psi_i^e) (-e \bar{\Psi}_f^\mu \gamma^\rho \Psi_i^\mu) d^4x \\
&= \frac{ie^2}{q^2} \int \bar{u}(p_f) \gamma_\rho u(p_i) e^{-i(p_i^\nu - p_f^\nu)x_\nu} \bar{u}(k_f) \gamma^\rho u(k_i) e^{-i(k_i^\nu - k_f^\nu)x_\nu} d^4x \\
&= \bar{u}(p_f) \gamma_\rho u(p_i) \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(k_f) \gamma^\rho u(k_i) \int e^{-i(p_i^\nu - p_f^\nu + k_i^\nu - k_f^\nu)x_\nu} d^4x \\
&= \bar{u}(p_f) \gamma_\rho u(p_i) \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(k_f) \gamma^\rho u(k_i) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f + k_i - k_f) \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Um von der vierten zur letzten Zeile zu kommen wurde ein zentrales Ergebnis der Fourieranalyse benutzt: Die Fouriertransformierten einer Konstanten ist eine Delta-Funktion im Ursprung. Damit besteht für diesen Prozess die Impulserhaltung. Der Impuls des Elektrons muss nach der elektromagnetischen Wechselwirkung mit dem Muon genau dem Impulsgewinn/-verlust entsprechen, den das Muon verloren/gewonnen hat. Das Photon überträgt als den Impuls $q = k_i - k_f = p_f - p_i$, wie bereits in Abb. 13 eingezeichnet.

Es zeigt sich, dass die Übergangsamplitude symmetrisch bezüglich Elektron und Muon ist. Das bedeutet, es ist irrelevant gewesen, dass in diesem Fall das Elektron ein Störpotential von dem Muon gespürt hat. Die Herleitung wäre zu demselben Ergebnis gekommen, wenn man das Muon ein Störpotential des Elektrons hätte spüren lassen.

Die invariante Amplitude ist nun definiert als:

$$T_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f + k_i - k_f) \Re \tag{A.12}$$

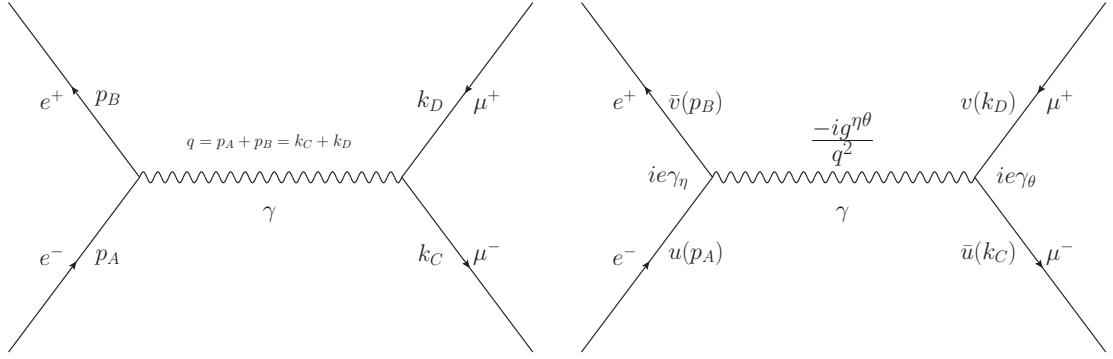
$$\Rightarrow -i\Re = [\bar{u}(p_f) ie \gamma_\rho u(p_i)] \frac{-iq^{\rho\eta}}{q^2} [\bar{u}(k_f) ie \gamma_\eta u(k_i)] \tag{A.13}$$

Die -invariante für diesen Prozess wurde deswegen so kompliziert aufgeschrieben, da man so die Struktur besser erkennen kann: Für eine Wechselwirkung mit einem Photon wird zwischen die Spinoren ein sogenannter Vertexfaktor $ie\gamma_\rho$ bzw. $ie\gamma_\eta$ multipliziert und die dadurch entstehenden Ströme werden mittels eines Propagators $\frac{-iq^{\rho\eta}}{q^2}$ miteinander verknüpft. Diese Amplitude ließe sich einfacher durch Anwendung der Feynman-Regeln gewinnen.

A.3. Feynman-Regeln

Mit den Feynman-Regeln lassen sich die invarianten Amplituden sehr einfach bilden. Die Regeln sind sehr eng mit den Feynman-Diagrammen verknüpft, welche bildliche Veranschaulichungen eines Wechselwirkungsprozesses (mit üblicherweise horizontaler Zeitachse und vertikaler Ortsachse) sind.

A. Theoretische Grundlagen



(a) Feynman-Diagramm in Darstellung der Impulse.
 (b) Feynman-Diagramm in Darstellung der multiplikativen Faktoren.

Abbildung 14: Feynman-Diagramm für Elektron-Positron-Abschaltung, dessen Energie über photonische Wechselwirkung zur Erzeugung eines Muon-Antimuon-Paares führt. Das linke Bild ist die übliche Darstellung des Prozesses und verweist auf die relevanten Impulse. Das rechte Bild zeigt die mathematische Interpretation, welche durch Multiplikation zur invarianten Amplitude $-i\mathfrak{R} = \bar{v}(p_B)ie\gamma_\eta u(p_A)\frac{-ig^{\eta\theta}}{q^2}\bar{u}(k_C)ie\gamma_\theta v(k_D)$ führt (eigene Darstellung).

Die generelle Vorgehensweise um eine Amplitude zu bestimmen, ist das zugehörige Feynman-Diagramm zu skizzieren, was für den beispielhaften Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ in Abb. 14 zu sehen ist. Dazu wird für jedes ein- und ausfallende Teilchen eine Linie gemalt und deren Impuls festgelegt. Für diese Teilchen muss ein Ende der Linie frei bleiben. Das andere Ende wird mit zwei weiteren Linien zu einem Vertex verbunden, sodass ein Vertex immer aus drei Linien besteht. Um dies zu vollführen, müssen interne Linien gezogen werden. An jedem Vertex bleiben alle Quantenzahlen und der Impuls erhalten. Auf "tree level", das bedeutet in niedrigster Ordnung Störungstheorie, sind damit alle Impulse definiert. Höhere Ordnungen werden hier nicht verwendet, aber deren Behandlung in Feynman-Diagrammen ist beispielsweise von M. Srednicki [10, Kap. 10] diskutiert worden. Es ist üblich für unterschiedliche Typen von Teilchen unterschiedliche Arten von Linien zu verwenden. Das Photon beispielsweise wird mit einer Sinuswelle dargestellt, während Quarks und Fermionen durch einfache und massive Vektorbosonen (Z_0 - und W^\pm -Boson) durch gestrichelte Linien gekennzeichnet werden.

Die invariante Amplitude lässt sich nun erhalten, indem ein Feynman-Diagramm als mathematische Operation verstanden wird. Da diese Arbeit nur die Grundlagen verwendet, wird in dieser Diskussion nicht auf alle möglichen Situationen eingegangen. Falls die ein- bzw. auslaufenden Teilchen nur Spin- $\frac{1}{2}$ sind und nur die niedrigste Ordnung Störungsrechnung berechnet wird, bestimmt sich die invariante Amplitude folgendermaßen: Über die Vertices der ein- und ausfallenden Teilchen wird mittels ihrer Spinoren ein Strom definiert. Die Natur des Stroms wird durch die Kopplung und damit implizit durch das Wechselwirkungsteilchen bestimmt. Die Kopplung wird über einen Vertexfaktor (zu sehen beispielsweise in Gl. (A.13)) parametrisiert. Interne Linien erhalten je nach Natur ihrer

A. Theoretische Grundlagen

Wechselwirkung einen Propagator, der die beiden Vertices miteinander verknüpft, an denen die interne Linie anschließt.

Kann ein Prozess über mehrere nicht äquivalente Feynman-Diagramme ausgedrückt werden, muss für jedes Diagramm die invariante Amplitude bestimmt werden und zu einer gesamten invarianten Amplitude summiert werden.

A.4. Herleitung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Der Wirkungsquerschnitt σ – mit Einheit m^2 – ist die wichtigste Größe bei der Berechnung von Streuprozessen. Um für ein Experiment in einem Teilchenbeschleuniger die Reaktionsrate zu erhalten, muss der Wirkungsquerschnitt nur noch mit der Luminosität (die Anzahl der Teilchen, die pro Einheitszeit und Einheitsstrahlquerschnitt aneinander im Reaktionspunkt vorbei bewegen) multipliziert werden [7]. Möchte man diese raumwinkelauflöst, mit dem Raumwinkelement Ω , haben, muss der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ bestimmt werden. Da die Wirkungsquerschnitte für Elementarteilchen in Größenordnungen von 10^{-40} m^2 auftreten, wird die in der Teilchenphysik übliche Einheit "Barn" ($\hat{=} \text{ SScheune}$) verwendet. Dabei gilt: $1 \text{ pB} \hat{=} 10^{-40} \text{ m}^2$.

$d\sigma$ ist definiert als [6, Kap. 3.6]:

$$d\sigma = \frac{\text{Übergangsrate}}{\text{Einheitsvolumen}} \times \frac{1}{\text{anfänglicher Teilchenfluss}} \times \frac{\text{Anzahl Endzustände}}{\text{Zielteilchendichte}} \quad (\text{A.14})$$

Da für diese Arbeit nur 'zwei nach zwei'-Prozesse (zwei Anfangs- und zwei Endteilchen mit A, B bzw. C, D bezeichnet) von Bedeutung sind, wird eine Analyse in diesem Rahmen vorgestellt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Reaktion innerhalb eines Zeitintervalls T und einem Volumen V abläuft, also in dem sogenannten Einheitsvolumen TV . Dies ist für den ersten Teil der Rechnung notwendig, im späteren Verlauf geht diese Abhängigkeit verloren.

Die Übergangsrate ($\hat{=} |T_{fi}|^2$) beinhaltet letztlich die Natur der Wechselwirkung und ist mit ihrer Abhängigkeit von der invarianten Amplitude die wichtigste und am schwierigsten zu bestimmende Größe des Wirkungsquerschnittes. Aus Anhang A.2 kann die Übergangsrate ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschrieben werden als

$$|T_{fi}|^2 = \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{in} - p_{out}) \right]^2 |\mathfrak{R}|^2 = (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p_{in} - p_{out}) \delta^{(4)}(0) |\mathfrak{R}|^2, \quad (\text{A.15})$$

wobei zum zweiten Gleichheitszeichen eine Eigenschaft der Delta-Funktion genutzt wurde. Die Delta-Funktion wurde in der Übergangsamplitude als Fourier-Transformation einer

A. Theoretische Grundlagen

Konstanten erhalten, das bedeutet $\delta^{(4)}(0)$ kann auch formuliert werden als:

$$\begin{aligned}\delta^{(4)}(0) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-i0 \cdot x} d^4x \\ &= \frac{TV}{(2\pi)^4}\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

Die Integration wurde über das Raumzeitelement TV ausgeführt. Damit kann als Ergebnis für die Übergangsrate festgehalten werden:

$$|T_{fi}|^2 = (2\pi)^4 TV \delta^{(4)}(p_{in} - p_{out}) |\mathfrak{R}|^2 \quad (\text{A.17})$$

Der anfängliche Teilchenfluss zweier Teilchen ist durch das Produkt der Normen mit dem Volumen und der relativen Geschwindigkeit definiert. Aus Anhang A.1 ist bekannt, dass die Norm gerade zwei mal der Energie des Teilchens entspricht. Damit folgt: Anfänglicher Teilchenfluss $\hat{=} 4|\vec{v}_A - \vec{v}_B|E_A E_B V^2$. Mit $\vec{v}_{A,B} = \frac{\vec{p}_{A,B}}{E_{A,B}}$ lässt sich der Term umschreiben zu:

$$\text{anfänglicher Teilchenfluss} \hat{=} 4|\vec{p}_A E_B - \vec{p}_B E_A| \quad (\text{A.18})$$

Die Anzahl der Endzustände in einem Volumen V eines freien Teilchens sind $\frac{V d^3 p}{(2\pi)^3}$, ein Ergebnis der statistischen Physik.

Alles in (A.14) eingesetzt liefert (die Impulse der ausgehenden Teilchen mit k bezeichnet):

$$\begin{aligned}d\sigma &= \frac{(2\pi)^4 TV \delta^{(4)}(p_{in} - p_{out}) |\mathfrak{R}|^2}{TV} \times \frac{1}{4|\vec{p}_A E_B - \vec{p}_B E_A| V^2} \times \frac{V^2 d^3 k_C d^3 k_D}{(2\pi)^6 4 E_C E_D} \\ &= \frac{\delta^{(4)}(p_A + p_B - k_C - k_D) d^3 k_C d^3 k_D}{64\pi^2 |\vec{p}_A E_B - \vec{p}_B E_A| E_C E_D} |\mathfrak{R}|^2\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

Wie oben erwähnt, hängt der Wirkungsquerschnitt nicht mehr von dem Einheitsvolumen ab. An diesem Punkt ist es sinnvoll die Impulse zu spezifizieren. Im Schwerpunktsystem ("cm") gilt $\vec{p}_A + \vec{p}_B = 0$ und $E_A + E_B = \sqrt{s}$ mit dem Quadrat der Schwerpunktsenergie s . Damit vereinfacht sich die Delta-Funktion zu $\delta(\sqrt{s} - E_C - E_D) \delta^{(3)}(\vec{k}_C + \vec{k}_D)$ und die Integration über $d^3 k_D$ kann mit der dreidimensionalen Delta-Funktion zu einer effektiven Eins ausgeführt werden:

$$d\sigma = \frac{\delta(\sqrt{s} - E_C - E_D) |\mathfrak{R}|^2 d^3 k_C}{64\pi^2 |\vec{p}_A| \sqrt{s} E_C E_D} \quad \text{mit} \quad \vec{k}_C = -\vec{k}_D \quad (\text{A.20})$$

Hier wurde ebenfalls $|p_A E_B - p_B E_A| = |\vec{p}_A| \sqrt{s}$ eingesetzt. Da eine Delta-Funktion verbleibt, kann eine weitere Variable eliminiert werden. Dazu ist es sinnvoll für $d^3 k_C$ in Kugelkoordinaten überzugehen.

$$d^3 k_C = |\vec{k}_C|^2 d|\vec{k}_C| d\cos(\theta) d\varphi = |\vec{k}_C|^2 d|\vec{k}_C| d\Omega_{cm} \quad (\text{A.21})$$

A. Theoretische Grundlagen

θ ist hierbei der Winkel zwischen \vec{p}_A und \vec{k}_C . Mit einer weiteren Eigenschaft der Delta-Funktion $\delta(f(x)) \Rightarrow \sum_i |f'(x)|^{-1}$, wobei über die Nullstellen von $f(x)$ summiert wird, kann die Integration über den Betrag des Impulses ausgeführt werden. Die Funktion in der Delta-Funktion hat nur eine Nullstelle: $E_C + E_D = \sqrt{s}$ und für E_C und E_D gilt nach der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung, unter Beachtung von (A.20):

$$E_C = \sqrt{|\vec{k}_C|^2 + m_C^2} \quad E_D = \sqrt{|\vec{k}_C|^2 + m_D^2} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial |\vec{k}_C|} (\sqrt{s} - E_C - E_D) &= -\frac{|\vec{k}_C|}{E_C} - \frac{|\vec{k}_C|}{E_D} \\ &= -|\vec{k}_C| \frac{E_C + E_D}{E_C E_D} \\ &= -|\vec{k}_C| \frac{\sqrt{s}}{E_C E_D} \quad \text{mit} \quad \sqrt{s} = E_C + E_D \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Betraglich invers in (A.20) eingesetzt folgt:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\delta(\sqrt{s} - E_C - E_D) |\vec{k}_C|^2 |\mathfrak{R}|^2 d|\vec{k}_C| d\Omega_{cm}}{64\pi^2 |\vec{p}_A| \sqrt{s} E_C E_D} \\ &= \frac{|\vec{k}_C| |\mathfrak{R}|^2}{64\pi^2 s |\vec{p}_A|} d\Omega_{cm} \\ \Leftrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{cm} &= \frac{|\vec{k}_C|}{64\pi^2 s |\vec{p}_A|} |\mathfrak{R}|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Damit wurde eine allgemein gültige Form des differentiellen Wirkungsquerschnittes gefunden.

A.5. Ein Überblick über die Monte-Carlo-Integration

Das zugrundeliegende Prinzip der Monte-Carlo-Integration ist, dass ein Integral als Mittlung über den Integranden berechnet werden kann:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx f(x) = (x_2 - x_1) \langle f(x) \rangle. \quad (\text{A.25})$$

Um eine Mittelung zu approximieren, wird der Integrand an N zufälligen Stellen ausgewertet, summiert und durch N geteilt. Die Positionen x_i können mit Hilfe einer Zufallszahl ρ_i im Intervall $[0, 1]$ über

$$x_i = (x_2 - x_1)\rho_i + x_1 \quad (\text{A.26})$$

generiert werden. Bei dieser Form der Integralapproximation kann der Fehler als Varianz einer Normalverteilung abgeschätzt werden, da die Bedingungen des Zentralen Grenzwertsatzes erfüllt sind [9, Kap. 3]. Die Varianz berechnet sich aus $\sigma_{MC} = \sigma / \sqrt{N}$, wobei σ die

A. Theoretische Grundlagen

Standardabweichung von $f(x_i)$ ist:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(x_2 - x_1)^2}{N} \left[\sum_i f^2(x_i) - \frac{1}{N} \left(\sum_i f(x_i) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_i W_i^2 - \left[\frac{1}{N} \sum_i W_i \right]^2 \quad \text{mit} \quad W_i = (x_2 - x_1) f(x_i)\end{aligned}\quad (\text{A.27})$$

In der zweiten Zeile wurden die gewichteten Funktionswerte W_i eingeführt. Das gesamte Integral kann somit geschrieben werden als

$$I \approx \frac{x_2 - x_1}{N} \sum_i f(x_i) \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \equiv I_N \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (\text{A.28})$$

Die Genauigkeit dieser Integration kann verbessert werden, indem zum Einen eine größere Anzahl von Auswertungspunkten gewählt wird oder zum Anderen die Standardabweichung σ reduziert wird. Um Letzteres zu erreichen, wird eine Methode verwendet, die 'Importance Sampling' [8] genannt wird. Hierbei wird der Integrand so substituiert, dass eine möglichst konstante Funktion zu integrieren ist. Das bedeutet, wenn die Stammfunktion bekannt ist, kann mittels 'Importance Sampling' die Varianz zu Null reduziert werden. Diese Vorgehensweise wird im folgenden Abschnitt (Anhang A.6) ebenfalls von hoher Bedeutung sein.

Das Prinzip der Monte Carlo Integration kann mit Leichtigkeit auf höherdimensionale Integrale verallgemeinert werden: Für jede einzelne Integrationsvariable wird in dem Integrationsintervall ein zufälliger Wert ausgewählt, in die Funktion eingesetzt und zuletzt mit dem Integrationsintervall gewichtet.

A.6. Monte-Carlo-Eventgenerierung

Die Monte-Carlo-Eventgenerierung wird dazu verwendet, um aus theoretischen Vorhersagen Daten zu gewinnen, die direkt mit den experimentellen Daten verglichen werden können. Die zugrundeliegende Idee ist, dass versucht wird, die stochastische Natur der individuellen Events zu simulieren, anstatt die Eigenschaften von einer großen Summe an Events zu untersuchen [9, Kap. 3].

Ab hier wird eine positive Funktion $f(x)$ gefordert, da ansonsten eine Eventgenerierung in dieser Form weder möglich noch sinnvoll ist.

Um Events nach ihrer Wahrscheinlichkeit, mit der sie auftreten, zu generieren, ist es (offensichtlicherweise) zunächst notwendig ihre Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Dies kann getan werden, indem der gewichtete Funktionswert an der Stelle x mit dem gewichteten Maximalwert der Funktion innerhalb des gegebenen Intervalls normiert wird. Um ein Event an dieser Stelle x zu akzeptieren, muss seine Wahrscheinlichkeit größer sein als eine

A. Theoretische Grundlagen

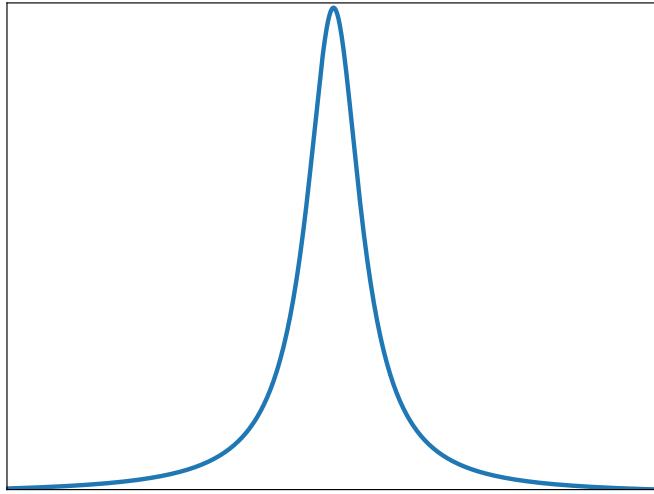


Abbildung 15: Eine Breit-Wigner-Resonanz mit Parametern $M = 90$ und $\Gamma = 2$. Die Funktion schließt eine vergleichsweise geringe Fläche der Abbildung ein (eigene Darstellung).

Zufallszahl im Intervall $[0, 1]$:

$$\frac{W_x}{W_{max}} > R \quad \text{mit} \quad R \in [0, 1] \quad (\text{A.29})$$

Ist die Wahrscheinlichkeit des Events kleiner als R , wird das Event verworfen. Eine Iteration über dieses Vorgehen bis die gewünschte Anzahl an Events erreicht ist, liefert eine stochastische Verteilung an Events in der Form der erzeugenden Funktion $f(x)$, wenn man sie mittels eines Histogramms darstellt.

Äquivalent ausgedrückt wird die Funktion in dem relevanten Intervall auf einen maximalen Wert von Eins normiert und es werden zufällige Punkte in diesem Rechteck ausgewählt und mit der Funktion verglichen. Diese Vorgehensweise ist sehr ineffizient für eine Funktion mit einer starken Resonanz in dem Intervall, oder allgemein wenn sie eine geringe Fläche in dem Intervall einschließt. Eine Eventgenerierung kann deshalb viel Zeit in Anspruch nehmen. Um diesen Prozess zu beschleunigen, wird für die Generierung wieder die Methode des Importance Sampling aus Anhang A.5 benutzt. Die Substitution sollte dabei so gewählt werden, dass die resultierende Funktion möglichst flach ist.

Ein sinnvolles Beispiel ist eine Breit-Wigner-Resonanz, da diese Form der Resonanz im Verlaufe dieser Arbeit zu integrieren ist. Sie wird über

$$f_{BW}(x) = \frac{1}{(x - M^2)^2 + M^2\Gamma^2} \quad (\text{A.30})$$

B. Identitäten und Rechnungen

definiert und ist in Abb. 15 zu sehen. Während M die Position der Resonanz bestimmt, beeinflusst Γ die Breite. Eine Substitution der Form $x = M\Gamma \tan(\rho) + M^2$ vereinfacht die Integration:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \frac{1}{(x - M^2)^2 + M^2\Gamma^2} \\
 &= \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} d\rho M\Gamma(1 + \tan^2(\rho)) \frac{1}{M^2\Gamma^2(1 + \tan^2(\rho))} \\
 &= \frac{1}{M\Gamma} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} d\rho
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

Der resultierende Integrand ist eine Konstante, und damit wird jeder zufällig generierte Punkt als Event akzeptiert. Damit die Events die Form der Resonanz widerspiegeln, müssen sie bezüglich der ursprünglichen Variablen (in diesem Fall x) in einem Histogramm dargestellt werden.

B. Identitäten und Rechnungen

B.1. Identitäten der Gamma-Matrizen

Relevante Identitäten bzgl. der Gamma-Matrizen.

$$(\gamma_0)^2 = I_4 \tag{B.1}$$

$$(\gamma_k)^2 = -\gamma_k \quad k = 1, 2, 3 \tag{B.2}$$

$$(\gamma_\mu)^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \tag{B.3}$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \tag{B.4}$$

$$\gamma^5 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \gamma^5 \tag{B.5}$$

$$(\gamma^5)^2 = I_4 \tag{B.6}$$

$$\text{Tr} [\gamma_\kappa \gamma_\eta \gamma_\lambda \gamma_\vartheta] = 4 (g_{\kappa\eta} g_{\lambda\vartheta} + g_{\kappa\vartheta} g_{\eta\lambda} - g_{\kappa\lambda} g_{\eta\vartheta}) \tag{B.7}$$

$$\text{Tr} [\gamma_\kappa \gamma_\eta \gamma_\lambda \gamma_\vartheta] = 4i \epsilon_{\kappa\eta\lambda\vartheta} \quad \epsilon \text{ ist das 4D Levi-Civita-Symbol} \tag{B.8}$$

B.2. Tensorauswertungen für die Berechnung der invarianten Amplitude

Ein Nachweis der Behauptungen aus Abschnitt 2. Zunächst benutzte Identitäten des Levi-Civita-Symbols ϵ und des verallgemeinerten Kronecker-Deltas δ .

$$\epsilon_{...i...j...} = -\epsilon_{...j...i...} \quad (\text{B.9})$$

$$\epsilon_{...i...i...} = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\epsilon_{\mu\nu\eta\tau} p^\mu k^\nu q^\eta x^\tau = 0 \quad \text{falls linear abhängig} \quad (\text{B.11})$$

$$\epsilon_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} \epsilon^{i_1 \dots i_k j_{k+1} \dots j_n} = k! \delta_{i_{k+1} \dots i_n}^{j_{k+1} \dots j_n} \quad (\text{B.12})$$

$$\delta_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} = \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \dots & \delta_{j_n}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_n} & \dots & \delta_{j_n}^{i_n} \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Notwendige Tensorauswertungen mit dem Propagator $\tilde{P}^{\eta\tau} = M_Z^2 g^{\eta\tau} - q^\eta q^\tau$. Zur Erinnerung: $p_A + p_B = k_C + k_D = q$ und die Skalarprodukte folgen aus der Kinematik (Abschnitt 2.4).

$$\tilde{P}^{\eta\tau} = \tilde{P}^{\tau\eta} \quad (\text{B.14})$$

$$\tilde{P}^{\eta\tau} p_{B,\eta} k_{D,\tau} = M_Z^2 (p_B \cdot k_D) - (q \cdot p_B)(q \cdot k_D) = \frac{M_Z^2 s}{4} (1 - \cos(\theta)) - \frac{s^2}{4} \quad (\text{B.15})$$

$$\tilde{P}^{\eta\tau} p_{B,\eta} k_{C,\tau} = M_Z^2 (p_B \cdot k_C) - (q \cdot p_B)(q \cdot k_C) = \frac{M_Z^2 s}{4} (1 + \cos(\theta)) - \frac{s^2}{4} \quad (\text{B.16})$$

$$\tilde{P}^{\eta\tau} p_{A,\eta} p_{B,\tau} = M_Z^2 (p_A \cdot p_B) - (q \cdot p_A)(q \cdot p_B) = \frac{M_Z^2 s}{2} - \frac{s^2}{4} \quad (\text{B.17})$$

$$\tilde{P}^{\eta\tau} g_{\eta\tau} = 4M_Z^2 - (q \cdot q) = 4M_Z^2 - s \quad (\text{B.18})$$

B. Identitäten und Rechnungen

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^{\eta\tau} \epsilon_{\kappa\vartheta\lambda\eta} \epsilon_{\phi}^{\vartheta} \rho\tau p_A^\kappa p_B^\lambda k_C^\phi k_D^\rho &= \left(M_Z^2 g^{\eta\tau} - q^\eta q^\tau \right) \epsilon_{\kappa\vartheta\lambda\eta} \epsilon_{\phi}^{\vartheta} \rho\tau p_A^\kappa p_B^\lambda k_C^\phi k_D^\rho \\
&= M_Z^2 \epsilon_{\kappa\vartheta\lambda\eta} \epsilon_{\phi}^{\vartheta} \rho\tau p_A^\kappa p_B^\lambda k_C^\phi k_D^\rho g^{\eta\tau} \\
&= M_Z^2 \epsilon_{\kappa\vartheta\lambda\eta} \epsilon_{\phi}^{\vartheta} \rho^\eta p_A^\kappa p_B^\lambda k_C^\phi k_D^\rho \\
&= M_Z^2 \epsilon_{\vartheta\eta\kappa\lambda} \epsilon^{\vartheta\eta} \phi\rho p_A^\kappa p_B^\lambda k_C^\phi k_D^\rho \\
&= M_Z^2 2! \delta_{\kappa\lambda}^{\phi\rho} p_A^\kappa p_B^\lambda k_{C,\phi} k_{D,\rho} \\
&= 2M_Z^2 (\delta_\kappa^\phi \delta_\lambda^\rho - \delta_\kappa^\rho \delta_\lambda^\phi) p_A^\kappa p_B^\lambda k_{C,\phi} k_{D,\rho} \\
&= 2M_Z^2 [(p_A \cdot k_C)(p_B \cdot k_D) - (p_A \cdot k_D)(p_B \cdot k_C)] \\
&= 2 \frac{M_Z^2 s^2}{16} [(1 - \cos(\theta))^2 - (1 + \cos(\theta))^2] \\
&= - \frac{M_Z^2 s^2}{2} \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Ab hier mit zwei Propagatoren:

$$\tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} 2p_{B,\kappa} p_{A,\eta} k_{D,\lambda} k_{C,\tau} \stackrel{(B.15)}{=} \left(\frac{M_Z^2 s}{4} (1 - \cos(\theta)) - \frac{s^2}{4} \right)^2 \tag{B.20}$$

$$\tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} 2p_{B,\eta} p_{A,\kappa} k_{D,\lambda} k_{C,\tau} \stackrel{(B.16)}{=} \left(\frac{M_Z^2 s}{4} (1 + \cos(\theta)) - \frac{s^2}{4} \right)^2 \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} g_{\kappa\eta} k_{D,\lambda} k_{C,\tau} &= \left(M_Z^2 k_C^\eta - (q \cdot k_C) q^\eta \right) \left(M_Z^2 g_\eta^\lambda - q_\eta q^\lambda \right) k_{D,\lambda} \\
&= \left(M_Z^2 k_C^\eta - (q \cdot k_C) q^\eta \right) \left(M_Z^2 k_{D,\eta} - (q \cdot k_D) q_\eta \right) \\
&= M_Z^4 (k_C \cdot k_D) - 2M_Z^2 (q \cdot k_C)(q \cdot k_D) + (q \cdot k_C)(q \cdot k_D)(q \cdot q) \\
&= \frac{M_Z^4 s}{2} - \frac{M_Z^2 s^2}{2} + \frac{s^3}{4}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} g_{\kappa\eta} g_{\lambda\tau} &= \left(M_Z^2 g_\eta^\lambda - q_\eta q^\lambda \right) \left(M_Z^2 g_\lambda^\eta - q^\eta q_\lambda \right) \\
&= 4M_Z^4 - 2M_Z^2 s + s^2
\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^{\kappa\lambda} \tilde{P}^{\eta\tau} \epsilon_{\varphi\kappa\chi\eta} \epsilon_{\varphi\lambda\chi\tau} p_A^\varphi p_B^\chi k_C^\varphi k_D^\chi &= \left(M_Z^2 g^{\kappa\lambda} - q^\kappa q^\lambda \right) \left(M_Z^2 g^{\eta\tau} - q^\eta q^\tau \right) \epsilon_{\varphi\kappa\chi\eta} \epsilon_{\varphi\lambda\chi\tau} p_A^\varphi p_B^\chi k_C^\varphi k_D^\chi \\
&= M_Z^4 \epsilon_{\varphi\kappa\chi\eta} \epsilon_{\varphi\lambda\chi\tau} g^{\kappa\lambda} g^{\eta\tau} p_A^\varphi p_B^\chi k_C^\varphi k_D^\chi \\
&= M_Z^4 \epsilon_{\varphi\kappa\chi\eta} \epsilon_{\varphi}^{\kappa} \chi^{\eta} p_A^\varphi p_B^\chi k_C^\varphi k_D^\chi \\
&\stackrel{(B.19)}{=} - \frac{M_Z^4 s^2}{2} \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Literatur

- [1] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). „2018 Review of Particle Physics“. In: *Physical Review* D98.030001 (2018).
- [2] Andy Buckley et al. „LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era“. In: *European Physical Journal* C75 (2015). URL: <http://arxiv.org/abs/1412.7420>.
- [3] Sayipjamal Dulat et al. „New parton distribution functions from a global analysis of quantum chromodynamics“. In: *Physical Review* D93.033006 (2016). URL: <https://arxiv.org/abs/1506.07443>.
- [4] L. Theufl D. Binosi. „JaxoDraw: A graphical user interface for drawing Feynman diagrams“. In: *Computer Physics Communications* 161 (Aug. 2004). URL: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2004.05.001>.
- [5] Alan Martin Francis Halzen. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley und Sons, 1984.
- [6] Mike Guidry. *Gauge Field Theories - An Introduction With Applications*. Wiley Science Paperback Series, 1999.
- [7] Tao Han. „Collider Phenomenology - Basic Knowledge an Techiques“. In: *High Energy Physics - Phenomenology* (2005). URL: <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0508097>.
- [8] Andreas Papaefstathiou. „How to write your own Monte Carlo event generator“. In: *Journal of High Energy Physics* (2014). URL: <http://www.physik.uzh.ch/~andreas/mchowto.pdf>.
- [9] Michael Seymour. „Predictions for Higgs and Electroweak Boson Production“. Diss. University of Cambridge, 1992.
- [10] Mark Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2006. URL: <https://web.physics.ucsb.edu/~mark/qft.html>.

Plagiatserklärung der / des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über

_____ selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

(Datum, Unterschrift)