



Bachelorarbeit

Gluino-Annihilation in Gluonen im Minimalen supersymmetrischen Standardmodell

Anne Poppe

Münster, den 17. September 2020

Institut für theoretische Physik

Erstprüfer: Priv.-Doz. Dr. Karol Kovařík

Zweitprüfer: Prof. Dr. Michael Klasen

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	2
2. Supersymmetrie	3
3. Dunkle Materie	5
3.1. Hinweise auf Dunkle Materie	5
3.2. Kandidaten für Dunkle Materie	6
3.3. Berechnung der Reliktdichte von WIMPs	7
3.4. Einfluss anderer Teilchen auf die Reliktdichte	9
4. Berechnungen der Wirkungsquerschnitte	10
4.1. Amplitudenquadrat des s-Kanals	12
4.2. Faddeev-Popov-Geister	15
4.3. Amplitudenquadrat des t-Kanals	16
4.4. Amplitudenquadrat des u-Kanals	19
4.5. Interferenz der Amplituden von s- und t-Kanal	19
4.6. Interferenz der Amplituden von s- und u-Kanal	24
4.7. Interferenz der Amplituden von t- und u-Kanal	24
5. Numerische Auswertung	25
5.1. Wirkungsquerschnitte	27
5.2. Beiträge anderer Prozesse zur Reliktdichte	29
6. Schlussfolgerungen	31
A. Dirac-Algebra	32
A.1. γ -Matrizen	32
A.2. Vollständigkeitsrelationen	32
A.3. Spurtheoreme	32
A.4. Relationen in der $SU(3)$	32
B. Feynman-Regeln	33
B.1. Vertices	33
B.2. Propagatoren	34
B.3. externe Linien	35

1. Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Einfluss der Gluino-Annihilation in Gluonen auf die Reliktdichte des LSP. Das Ziel ist die Berechnung des Wirkungsquerschnitts dieser Annihilation sowie die Betrachtung verschiedener Szenarien, in welchen dieser Prozess eine große Relevanz besitzt.

Dazu wird in Kapitel 2 zunächst eine kurze Einführung in die Idee der Supersymmetrie gegeben. Die von der Theorie vorhergesagten Zustände außerhalb des Standardmodells der Teilchenphysik werden kurz eingeführt. Von besonderem Interesse für diese Arbeit ist hierbei das leichteste der supersymmetrischen Teilchen (LSP). Da bislang keine supersymmetrischen Effekte experimentell nachgewiesen wurden, existiert eine Reihe freier Parameter, die zum Beispiel über die Stärke der supersymmetrischen Wechselwirkungen und die Massen der supersymmetrischen Teilchen entscheidet. Folglich führen verschiedene Konfigurationen der freien Parameter auch zu einer unterschiedlichen Dynamik der supersymmetrischen Teilchen. Die Rechnungen dieser Arbeit werden alle im Rahmen des Minimalen supersymmetrischen Standardmodells (MSSM) vorgenommen.

Kapitel 3 führt in das Themengebiet der Dunklen Materie ein. Zur Motivation wird kurz auf einige experimentelle und theoretische Befunde eingegangen, die auf die Existenz Dunkler Materie hindeuten. Besonders interessant dabei ist das Λ_{CDM} -Modell, welches, beruhend auf den Planck-Messungen, eine Dichte von kalter Dunkler Materie von $\Omega h^2 = 0,120 \pm 0,001$ fordert. Anschließend werden mögliche Teilchen vorgestellt, die das Phänomen der Dunklen Materie erklären könnten. Eine der aktuell populärsten Ideen für kalte Dunkle-Materie-Teilchen sind die WIMPs (weakly interacting massive particles). An dieser Stelle wird der Zusammenhang mit der Supersymmetrie klar, da das Neutralino als LSP ein mögliches WIMP ist. In Abschnitt 3.3 wird eine Übersicht über die Lösung der Boltzmann-Gleichung gegeben, die zur Reliktdichte des LSP führt. Diese sollte mit der oben genannten Dichte übereinstimmen, um mit den experimentellen Befunden in Einklang zu sein.

Relevant für die Entwicklung der Anzahldichte des LSP ist allerdings nicht nur dessen eigene Annihilation, sondern auch die anderer supersymmetrischer Teilchen, zu denen das LSP streuen kann. Sowohl der Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines LSP mit einem Standardmodell-Teilchen zu einem anderen SUSY-Teilchen, als auch die Annihilation der SUSY-Teilchen sind stark abhängig von der Wahl der freien Parameter im MSSM.

In Kapitel 4 wird detailliert das Betragsquadrat der Streuamplitude berechnet. Dies geschieht für alle möglichen Kanäle und Interferenzterme unter Beachtung der Feynman-Regeln.

Im Anschluss werden in Kapitel 5 die zwei betrachteten MSSM-Szenarien vorgestellt und die Relevanz der hier untersuchten Annihilation bezüglich dieser Szenarien beur-

teilt. In Abschnitt 5.1 sind die Beiträge der einzelnen Kanäle und Interferenzen zum gesamten Wirkungsquerschnitt dargestellt. Im letzten Abschnitt 5.2 werden neben der Gluino-Annihilation in Gluonen noch andere Prozesse betrachtet, welche einen Einfluss auf die Reliktdichte des LSP nehmen können. Durch Variation geeigneter MSSM-Parameter werden die Bereiche an Parameter-Konstellationen identifiziert, in denen die einzelnen Prozesse eine hohe Relevanz besitzen.

2. Supersymmetrie

Die Theorie der Supersymmetrie basiert auf einer Symmetrie zwischen bosonischen und fermionischen Freiheitsgraden [13]. Diese wird durch den Operator Q beschrieben:

$$Q |Boson\rangle = |Fermion\rangle ; \quad Q |Fermion\rangle = |Boson\rangle$$

Jeder Ein-Teilchen-Zustand in der Supersymmetrie wird einem Supermultiplett zugeordnet. Die Bosonen und Fermionen im selben Supermultiplett bezeichnet man als Superpartner. Damit sagt diese Theorie eine Reihe von Teilchen voraus, die sich alle außerhalb des Standardmodells der Teilchenphysik befinden. So werden beispielsweise Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen wie Leptonen oder Quarks jeweils zwei Spin-0-Teilchen als Superpartner zugeordnet. Diese skalaren Teilchen bezeichnet man als Sleptonen und Squarks. Dem skalaren Higgs-Boson und den vektoriellen Eichbosonen werden fermionische Superpartner mit Spin $\frac{1}{2}$ zugewiesen (sogenannte Higgsinos, Gluinos etc.). Außerdem ergeben sich durch die Supersymmetrie neue Wechselwirkungen, deren Stärke durch eine Reihe von freien Parametern beschrieben wird. Eine Liste der Teilchen im Minimalen supersymmetrischen Standardmodell (MSSM) findet sich in folgender Tabelle:

SM-Teilchen	Spin	MSSM-Teilchen	Spin	Leptonen-/ Baryonenzahl
Quark q	$s = \frac{1}{2}$	2x Squark \tilde{q}	$s = 0$	$L = 0, B = \frac{1}{3}$
Lepton l	$s = \frac{1}{2}$	2x Slepton \tilde{l}	$s = 0$	$L = 1, B = 0$
Higgs-Boson H	$s = 0$	Higgsino \tilde{H}	$s = \frac{1}{2}$	$L = 0, B = 0$
Gluon g	$s = 1$	Gluino \tilde{g}	$s = \frac{1}{2}$	$L = 0, B = 0$
W-Boson W^\pm, W^0	$s = 1$	Wino $\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$	$s = \frac{1}{2}$	$L = 0, B = 0$
B-Boson B^0	$s = 1$	Bino \tilde{B}^0	$s = \frac{1}{2}$	$L = 0, B = 0$

Dabei ist zu beachten, dass nicht jedem der SM-Teilchen ein eindeutiger Superpartner zugeordnet werden kann. Im MSSM existieren statt einem gleich fünf verschiedene Higgs-Bosonen (nicht alle in der Tabelle aufgeföhrt), von denen einige neutral und einige geladen¹ sind.

So wie im Standardmodell die Wechselwirkungszustände der Eichbosonen selbst keine Masseneigenzustände sind, gilt dies auch für ihre Superpartner. Daher betrachtet man Mischungen der Wechselwirkungseigenzustände. Die Mischzustände des neutralen Winos \tilde{W}^0 , des Binis \tilde{B}^0 und der neutralen Higgsinos werden als Neutralinos χ^0 bezeichnet. Analog mischen die geladenen Winos \tilde{W}^\pm und die geladenen Higgsinos zu den Charginos χ^\pm . Die genauen Zusammensetzungen der Mischungen sind abhängig von der Wahl der freien Parameter im MSSM.

Der Operator Q kommutiert mit den Generatoren der Eichtransformationen, sodass alle Teilchen eines Supermultipletts die gleichen Eigenzustände bezüglich der Eich-Gruppen besitzen müssen (also identische elektrische Ladung, Hyperladung, schwachen Isospin und Farbfreiheitsgrade). Wäre die Supersymmetrie eine exakte Symmetrie, würden die jeweiligen Superpartner auch identische Massen besitzen. Da diese allerdings den gleichen Wechselwirkungen unterliegen, die auch für die Teilchen des Standardmodells gelten, sollten jene längst experimentell nachgewiesen worden sein. Bislang konnte jedoch keins der von der Supersymmetrie vorhergesagten Teilchen gefunden werden, daher wird angenommen, dass

¹Der Begriff Ladung bezieht sich hier auf die elektroschwache Wechselwirkung.

die Supersymmetrie gebrochen ist. Durch den Symmetriebruch besitzen die Superpartner deutlich höhere Massen als ihre Vorbilder im Standardmodell, sodass für ihre Detektion sehr viel Energie aufgebracht werden müsste.

Während im Standardmodell Leptonen- und Baryonenzahl immer erhalten sind, gilt dies für die Supersymmetrie nicht mehr. Hier wird eine neue Erhaltungsgröße, die R-Parität

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s} \quad (2.1)$$

eingeführt. Wie sich schnell sehen lässt, besitzt somit jedes Teilchen des Standardmodells gerade R-Parität ($P_R = 1$) und jedes supersymmetrische Teilchen ungerade R-Parität ($P_R = -1$). Die Erhaltung dieser Parität verhindert die Existenz von gemischten Zuständen aus Standardmodell- und supersymmetrischen Teilchen.

Eine weitere Konsequenz ist die Stabilität des leichtesten der supersymmetrischen Teilchen (LSP). Je nach Wahl der freien Parameter können unterschiedliche MSSM-Teilchen wie zum Beispiel Neutralinos, Gluinos oder das skalare Top-Quark die Rolle des LSP einnehmen. Wie im nächsten Kapitel deutlich wird, sind für die Suche nach Dunkler Materie jene Szenarios besonders interessant, für die eines der Neutralinos das LSP ist. Dessen Masse liegt dabei oft in der Größenordnung 1 TeV.

3. Dunkle Materie

3.1. Hinweise auf Dunkle Materie

In den letzten Jahrzehnten wurden viele Hinweise (theoretischer und experimenteller Natur) auf die Existenz von Dunkler Materie gefunden, von denen hier nur einige kurz erläutert werden sollen.

Zum einen sprechen die Rotationskurven vieler Spiralgalaxien für die Existenz sogenannter Dunkle-Materie-Halos [7]. Die Rotationsgeschwindigkeit der beobachteten Galaxien bleibt bei zunehmendem Abstand von dem Zentrum der Galaxie konstant. Dies steht im Widerspruch mit der Dichteverteilung der beobachtbaren Masse innerhalb der Galaxie. Demnach müsste die Rotationsgeschwindigkeit für höhere Radien abfallen. Dieses Problem lässt sich durch die Annahme Dunkler Materie in Form eines Halos, das die gesamte Galaxie umgibt, lösen.

Doch auch die Dynamiken auf größeren Skalen lassen auf nicht sichtbare Materie schließen. Die Rotverschiebung stellarer Objekte gibt an, mit welcher relativen Geschwindigkeit zur Erde diese sich bewegen. Bei einer Untersuchung der Geschwindigkeiten einzelner Galaxien

im Coma-Galaxienhaufen [18], fällt auf, dass die mittlere Geschwindigkeit stark von der aufgrund der sichtbaren Masse erwarteten Geschwindigkeit abweicht. Das Vorhandensein Dunkler Materie in diesem Galaxienhaufen würde diese Abweichung gut erklären.

Als letztes Argument sei hier noch die Strukturbildung des frühen Universums genannt, welche durch N-Body-Simulationen kann abgeschätzt werden kann. Anfänglich geringe Fluktuationen der Dichte bilden sich dabei zu größeren Materieansammlungen aus. Diese Dichtefluktuationen sind heute außerdem noch in der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB) beobachtbar. Geht man in den Simulationen von einem Universum bestehend nur aus sichtbarer Materie aus, sind die ursprünglichen Fluktuationen zu gering, um die heute sichtbare Struktur des Universums zu erklären. Bezieht man allerdings die Existenz von kalter Dunkler Materie (CDM) mit in die Berechnungen ein, führt dies zu Strukturen wie Galaxien und Clustern [7]. Dieses als Λ_{CDM} bezeichnete Modell kann auf Grundlage der CMB-Messungen Vorhersagen über die heute noch vorhandene Masse von kalter Dunkler Materie machen. Aus den Daten der Planck-Kollaboration [3] ergibt sich ein Wert von $\Omega h^2 = 0,1200$ für die Reliktdichte Dunkler Materie.

3.2. Kandidaten für Dunkle Materie

Theoretisch besteht die Möglichkeit für Dunkle Materie aus Baryonen. Potenzielle Kandidaten dafür wären zum Beispiel braune Zwerge oder Neutronensterne. Dort laufen, im Gegensatz zu anderen Sternen, keine Kernfusionsprozesse ab, sodass diese nicht direkt beobachtet werden können, aber dennoch zur Masse einer Galaxie beitragen. Diese Objekte werden unter dem Begriff MACHOs (massive compact halo objects) zusammengefasst, können jedoch allein nicht alle angesprochenen Phänomene erklären.

Bei den nicht-baryonischen Dunkle-Materie-Kandidaten wird zwischen heißer und kalter Dunkler Materie unterschieden. Diese Beschreibung der „Temperatur“ bezieht sich auf die Geschwindigkeit der Teilchen während der Entstehungsphase der Galaxien. Heiße Dunkle Materie könnte beispielsweise aus Neutrinos bestehen. Diese bewegen sich mit relativistischer Geschwindigkeit als im Universum die Bildung der Galaxien begann. Aufgrund dieser hohen Geschwindigkeit können sie allerdings das Problem der Strukturbildung nicht lösen. N-Body-Simulationen mit ausschließlich sichtbarer und heißer Dunkler Materie führen nicht auf die heute vorherrschende Struktur des Universums [17].

Mögliche Kandidaten für kalte Dunkle Materie sind Axionen, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll, und WIMPs (weakly interacting massive particle). Diese bewegen sich während der Phase der Strukturbildung im Universum mit nichtrelativistischen Geschwindigkeiten. Die Gravitationskräfte zwischen den CDM-Teilchen sind daher höher als deren

kinetische Energie, sodass sich Ansammlungen mit höherer CDM-Teilchenkonzentration bilden. Die baryonische (sichtbare) Materie wird dann ihrerseits von diesen Ansammlungen Dunkler Materie gravitativ angezogen und es bilden sich die Strukturen von Galaxien aus. Im Rahmen von N-Body-Simulationen konnte unter Einbeziehung von CDM (und unter Berücksichtigung anderer Faktoren) die Entwicklung der heutigen Strukturen modelliert werden [8].

Ein solches WIMP könnte durch eines der Neutralinos als LSP gegeben sein. Um zu überprüfen, inwiefern diese Theorie mit der heute beobachteten Dichte an Dunkler Materie im Universum übereinstimmt, soll im folgenden Kapitel erläutert werden, durch welche Prozesse sich die Dichte von WIMPs im Universum mit der Zeit verändert. Im Folgenden meint χ das Neutralino als LSP im MSSM mit Masse m_χ .

3.3. Berechnung der Reliktdichte von WIMPs

Die Anzahldichte eines WIMPs wird im Allgemeinen durch die Boltzmann-Gleichung beschrieben:

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3Hn_\chi = -\langle\sigma_A v\rangle (n_\chi^2 - n_{\chi,TG}^2) \quad (3.1)$$

Dabei bezeichnet $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ die Expansionsrate des Universums, σ_A den Wirkungsquerschnitt der Annihilation, v die Relativgeschwindigkeit der WIMPs und

$$n_{\chi,TG} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(p) d^3p \quad (3.2)$$

die Anzahldichte der WIMPs im thermischen Gleichgewicht. Diese wird durch die Anzahl der Freiheitsgrade g und die Fermi-Dirac-Verteilung $f(p)$ bestimmt.

Im frühen strahlungsdominierten Universum herrschte eine sehr hohe Temperatur. Somit war nicht nur die Annihilation $\chi\chi \rightarrow l\bar{l}$ zweier Neutralinos, sondern auch die Rückreaktion $l\bar{l} \rightarrow \chi\chi$ energetisch möglich. Für das Teilchen l kommen hier Teilchen mit $m_l \ll m_\chi$ (zum Beispiel Quarks und Leptonen) in Frage. Diesen Zustand bezeichnet man als thermisches Gleichgewicht. Für diesen Fall gilt also $n_\chi = n_{\chi,TG}$, sodass die rechte Seite der Boltzmann-Gleichung (3.1) verschwindet:

$$\frac{dn_{\chi,TG}}{dt} + \frac{3}{a} \frac{da}{dt} n_{\chi,TG} = 0 \quad (3.3)$$

Hier ist die Boltzmann-Gleichung noch auf einfache Weise analytisch lösbar und die Anzahldichte in Abhängigkeit von dem Skalenfaktor ergibt sich zu

$$n_{\chi,TG} = \frac{1}{a^3}. \quad (3.4)$$

Da sich im strahlungsdominierten Universum die Temperatur antiproportional zum Skalenfaktor verhält ($a \sim \frac{1}{T}$), gilt dort $n_{\chi,TG} \sim T^3$. Dasselbe Ergebnis erhält man bei einer Näherung für hohe Temperaturen aus Gleichung (3.2).

Solange die Temperatur des Universums hoch genug ist, um die Rückreaktion energetisch zu ermöglichen, entspricht die Anzahl der Neutralinos etwa der Anzahl der γ -Quanten, welche die Energie für die Rückreaktion zur Verfügung stellen.

Da das Universum kontinuierlich expandiert, kann es hilfreich sein, nicht die absolute Anzahl der Teilchen pro Raumvolumen zu betrachten, sondern die Anzahldichte bezogen auf das physikalische Kovolumen. Letzteres berücksichtigt die Expansion des Universums. Eine mögliche Definition dieser skalierten Anzahldichte ist

$$Y = \frac{n}{T^3} \quad (3.5)$$

Damit bleibt bei konstanter Gesamtanzahl der Teilchen im Universum auch Y konstant. Kühlt das Universum weiter ab, ist die Rückreaktion ab einer bestimmten Temperatur nicht mehr möglich. Da nun nur noch Annihilationen stattfinden, sinkt die Anzahldichte der Neutralinos exponentiell.

Diese Abnahme dauert so lange an bis die Expansionsrate H des Universums die Annihilationsrate $\Gamma = \langle \sigma_{A\nu} \rangle n_{\chi}$ übersteigt. Ab diesem Zeitpunkt (bei einer Temperatur von etwa $T \approx \frac{m_{\chi}}{20}$) beginnt das sogenannte Ausfrieren der Anzahldichte. Hier ist keine Annihilation der Neutralinos mehr möglich, sodass Y stagniert. Diese heute noch vorhandene Anzahldichte der WIMPs bezeichnet man auch als Reliktdichte.

Der gesamte zeitliche Verlauf der Anzahldichte ist in Abb. 1 (entnommen aus [9]) dargestellt. Dort wird die skalierte Anzahldichte Y gegen $x = \frac{m}{T}$ aufgetragen. Da die Temperatur des Universums mit der Zeit sinkt, ist x als Maß für die Zeit zu interpretieren. Die durchgezogene Linie beschreibt den Abfall der Anzahldichte im hypothetischen Fall, dass die Expansion des Universums nicht stetig zunimmt und es daher zu keinem Ausfrieren kommt. Die drei gestrichelten Linien beschreiben den Verlauf für verschieden große thermisch gemittelte Wirkungsquerschnitte $\langle \sigma_{A\nu} \rangle$. Je größer dieser Wirkungsquerschnitt der Neutralino-Annihilation ist, desto kleiner ist ihre Reliktdichte, da $H > \Gamma$ umso später eintritt.

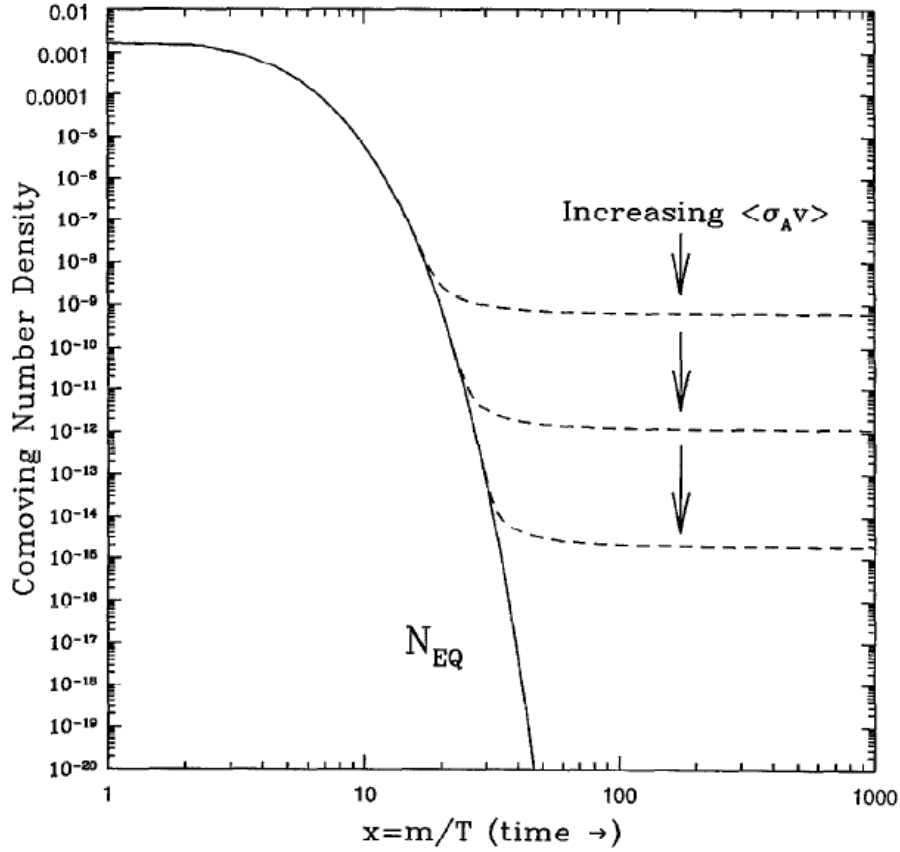


Abbildung 1: Entwicklung der Anzahldichte eines WIMPs im Laufe der Zeit

In dieser späten Phase des Ausfrierens herrscht wieder ein thermisches Gleichgewicht. Für den Grenzfall sehr kleiner Temperaturen wird aus Gl. (3.2) eine Boltzmann-Verteilung:

$$n_\chi = g \left(\frac{m_\chi T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_\chi}{T}} \quad (3.6)$$

3.4. Einfluss anderer Teilchen auf die Reliktdichte

Bisher wurde zur Berechnung der Reliktdichte nur die Annihilation zweier WIMPs betrachtet. Es gibt allerdings noch andere Faktoren die diese beeinflussen.

Wenn im MSSM eines der Neutralinos die Rolle des LSP einnimmt, können die Massen von Squarks und Gluinos je nach Wahl der Parameter nur wenig größer sein als die des Neutralinos m_χ . Durch Streuungen mit Standardmodell-Teilchen kann das Neutralino also zu einem Squark oder Gluino werden. Dann ist für die Berechnung der Reliktdichte der Neutralinos natürlich nicht nur ihre eigene Annihilationsrate, sondern auch die der Squarks und Gluinos von Bedeutung. Folgende Differenzialgleichung aus [5] beschreibt die

Anzahldichte aller relevanten Teilchensorten $i = 1, \dots, N$, wobei relevant hier meint, dass $m_i - m_\chi$ ausreichend klein ist.

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dt} = & -3Hn_i - \sum_{j=1}^N \langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle (n_i n_j - n_{i,TG} n_{j,TG}) \\ & - \sum_{i \neq j} [\langle \sigma'_{Xij} v_{ij} \rangle (n_i n_X - n_{i,TG} n_{X,TG}) - \langle \sigma'_{Xji} v_{ij} \rangle (n_j n_X - n_{j,TG} n_{X,TG})] \\ & - \sum_{i \neq j} [\Gamma_{ij}(n_i - n_{i,TG}) - \Gamma_{ji}(n_j - n_{j,TG})] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Der erste Term beschreibt, genau wie in der Einteilchen-Boltzmann-Gleichung (3.1), die Expansion des Universums. Im zweiten Term werden die Annihilationen aller relevanten supersymmetrischen Teilchen berücksichtigt. Dabei bezeichnet σ_{ij} den Wirkungsquerschnitt der Annihilation der Teilchen i und j in ein Teilchen des Standardmodells. Die Umwandlung des Teilchens i in Teilchen j unter Streuung mit einem Standardmodell-Teilchen X wird durch σ'_{Xij} im dritten Term ausgedrückt. Der Ausdruck Γ_{ij} beschreibt die Zerfallsrate des Teilchens i in Teilchen j .

In dieser Arbeit wird der Einfluss der Gluinos auf die Reliktdichte des leichtesten Neutralinos untersucht. Gluinos sind wie die Neutralinos Majorana-Teilchen, das heißt sie annihilieren mit sich selbst. Hier soll zunächst die Annihilation in Gluonen betrachtet und der entsprechende Wirkungsquerschnitt $\sigma(\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow gg)$ ermittelt werden.

Die Annihilation, bei der ein Neutralino direkt mit einem anderen supersymmetrischen Teilchen annihiliert, wird auch als Koannihilation bezeichnet. Insgesamt führen alle diese Effekte allgemein zur Absenkung der Reliktdichte des LSP.

4. Berechnungen der Wirkungsquerschnitte

Im diesem Kapitel soll der Wirkungsquerschnitt σ der Annihilation von Gluinos in Gluonen berechnet werden. Dies geschieht auf tree-level, das heißt es werden nur Streuungen in niedrigster Ordnung berücksichtigt. Tatsächlich sind auch Streuungen in höheren Ordnungen (sogenannte Schleifen-Korrekturen) möglich, welche hier jedoch vernachlässigt werden.

Der Wirkungsquerschnitt für einen Prozess, bei dem zwei Teilchen mit Impuls p_1 und p_2 und Massen m_1 und m_2 zu zwei anderen Teilchen mit Impuls k_1 und k_2 und Massen m_3 und m_4 streuen, wird im Allgemeinen wie folgt berechnet [10]:

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \int \frac{1}{2E_1} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) |\overline{M}|^2 \quad (4.1)$$

Dabei bezeichnen $E_1 = \frac{s+m_3^2-m_4^2}{2\sqrt{s}}$ und $E_2 = \frac{s-m_3^2+m_4^2}{2\sqrt{s}}$ die Energien der ausgehenden Teilchen. Für den hier betrachteten Prozess gilt $m_1 = m_2 = m_{\text{Gluino}}$ (im Folgenden oft einfach als m bezeichnet) und $m_3 = m_4 = 0$, da Gluonen keine Masse besitzen. Die Energien der Gluonen vereinfachen sich damit zu $E_1 = E_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}$.

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts wird das über Farb- und Spinanteile gemittelte Quadrat der gesamten Streuamplitude benötigt:

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{(2s_{\tilde{g}} + 1)^2} \frac{1}{(N^2 - 1)^2} \sum_{\text{Spin}} \sum_{\text{Farbe}} |M|^2 \quad (4.2)$$

Dabei mittelt der erste Faktor über die Spins der einkommenden Teilchen und der zweite Faktor über die Farbanteile der einkommenden Teilchen. Ein großer Teil dieser Arbeit besteht in der analytischen Berechnung der quadrierten Streuamplitude $|M|^2$.

In erster Ordnung ist die Annihilation über den s-, t- und u-Kanal möglich. Für diese Prozesse wird jeweils das Feynman-Diagramm erstellt und daraus die Streuamplitude unter Berücksichtigung der Feynman-Regeln aufgestellt (siehe z. B. [6] für die Feynman-Regeln des Standardmodells). Die zusätzlich benötigten Feynman-Regeln im MSSM sind in Anhang B aufgelistet und stammen aus [11].

Zusätzlich zu den Betragsquadraten der Amplituden der einzelnen Kanäle müssen auch die Interferenzterme zwischen den Kanälen berechnet werden.

Um die Berechnung zu vereinfachen, wird bei der Ermittlung des Quadrats der Amplitude des s-Kanals teilweise über unphysikalische Polarisationsrichtungen summiert. Die Einführung eines Geister-Teilchens (siehe Kapitel 4.2) gleicht dies wieder aus, indem hier nur die unphysikalischen Polarisationsrichtungen berücksichtigt werden. Entsprechend geht das Quadrat der Amplituden der Geister-Teilchen negativ in das gesamte Amplitudenquadrat ein:

$$\begin{aligned} |M^2| &= |M_s|^2 + |M_t|^2 + |M_u|^2 + M_s M_t^\dagger + M_s^\dagger M_t + M_s M_u^\dagger + M_s^\dagger M_u + M_t M_u^\dagger + M_t^\dagger M_u - 2 \cdot |M_{\text{FPG}}|^2 \\ &= |M_s|^2 + |M_t|^2 + |M_u|^2 + 2 \cdot \Re(M_s M_t^\dagger) + 2 \cdot \Re(M_s M_u^\dagger) + 2 \cdot \Re(M_u M_t^\dagger) - 2 \cdot |M_{\text{FPG}}|^2 \end{aligned}$$

Im Folgenden werden die einzelnen Beiträge des Amplitudenquadrats berechnet. Neben den Rechnungen „per Hand“ wurden die Ergebnisse der einzelnen Beiträge auch mit dem Programm *FeynCalc* überprüft und bestätigt. Der masselose Grenzfall der Gluino-Annihilation in Gluonen entspricht bis auf Farb-Faktoren der Quark-Antiquark-Annihilation in Gluonen. Die Ergebnisse von letzterem Prozess finden sich zum Beispiel in [12] und stimmen mit dem hier errechneten Ergebnis für $m_{GI} = 0$ überein.

4.1. Amplitudenquadrat des s-Kanals

Das Feynman-Diagramm der Annihilation zweier Gluinos über den s-Kanal ist in Abb. 2 zu sehen.

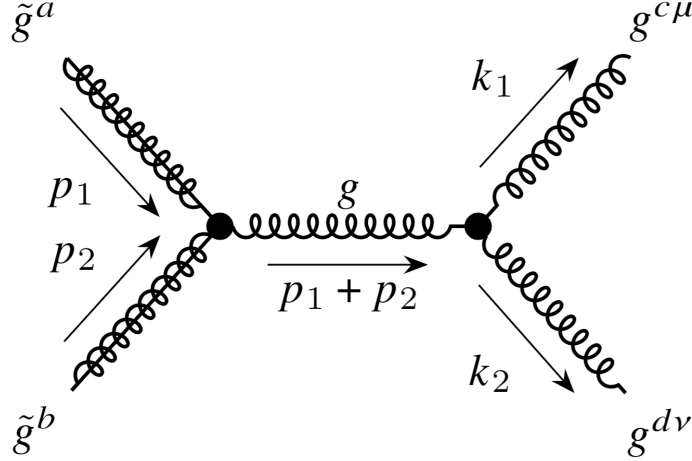


Abbildung 2: Gluino-Annihilation in Gluonen über den s-Kanal

Wendet man darauf die im Anhang B aufgeführten Feynman-Regeln an, ergibt sich daraus die folgende Streuamplitude:

$$\begin{aligned}
 M_s = & \underbrace{\bar{v}(p_2)(-g_s f_{eba} \gamma_\lambda) u(p_1)}_{\text{Gluino-Kette}} \underbrace{\left(-\frac{ig^{\lambda\phi} \delta_{ef}}{(k_1 + k_2)^2} \right)}_{\text{Gluon-Propagator}} \underbrace{\epsilon^{*\mu}(k_1) \epsilon^{*\nu}(k_2)}_{\text{Gluon-Polarisationsvektoren}} \\
 & \underbrace{(-g_s f_{fdc}) [(2k_1 + k_2)_\nu g_{\mu\phi} + (k_2 - k_1)_\phi g_{\mu\nu} - (k_1 + 2k_2)_\mu g_{\nu\phi}]}_{\text{Dreier-Gluon-Kopplung}}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Das entsprechend hermitesch Konjugierte der Streuamplitude beträgt:

$$\begin{aligned}
 M_s^\dagger = & \bar{u}(p_1)(-g_s f_{gba} \gamma_\gamma) v(p_2) \left(\frac{ig^{\gamma\delta} \delta_{gh}}{(k_1 + k_2)^2} \right) \epsilon^\alpha(k_1) \epsilon^\beta(k_2) \\
 & (-g_s f_{hdc}) [(2k_1 + k_2)_\beta g_{\alpha\delta} + (k_2 - k_1)_\delta g_{\alpha\beta} - (k_1 + 2k_2)_\mu g_{\beta\delta}]
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Bei der Summation über die Gluino-Kette und ihr hermitesch Konjugiertes werden die Vollständigkeitsrelationen (A.6) und (A.7) ausgenutzt. Außerdem wird die Summation über die Strukturkonstanten (A.15) angewendet. Die Summe über alle Polarisationen wird hier in Form der Feynman-Eichung (A.8) verwendet. Diese liefert metrische Tensoren, sodass die Rechnung stark vereinfacht wird. Wie bereits erwähnt, sind jedoch nicht alle Polarisationsrichtungen, über welche dort summiert wird, tatsächlich physikalisch sinnvoll.

Die Korrektur dieses Fehlers erfolgt in Kapitel 4.2 durch die Einführung der Geister-Teilchen.

Fügt man dies alles zusammen, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{Spin} \sum_{Farbe} |M_s|^2 = & N^2 \cdot \delta_{eg} \delta_{eg} \frac{g_s^4}{(k_1 + k_2)^4} (\not{p}_2 - m) \gamma_\lambda (\not{p}_1 + m) \gamma_\gamma g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\lambda\phi} g^{\delta\gamma} \cdot \\ & [(2k_1 + k_2)_\nu g_{\mu\phi} + (k_2 - k_1)_\phi g_{\mu\nu} - (k_1 + 2k_2)_\mu g_{\nu\phi}] \cdot \\ & [(2k_1 + k_2)_\beta g_{\alpha\delta} + (k_2 - k_1)_\delta g_{\alpha\beta} - (k_1 + 2k_2)_\mu g_{\beta\delta}] \end{aligned}$$

Nun schreibt man die verkürzende Slash-Notation (A.1) aus und multipliziert die aus der Gluino-Kette entstandenen Terme aus.

$$\begin{aligned} \sum_{Spin} [(\not{p}_2 - m) \gamma_\lambda (\not{p}_1 + m) \gamma_\gamma] &= \text{Sp}[(\not{p}_2 - m) \gamma_\lambda (\not{p}_1 + m) \gamma_\gamma] \\ &= p_{2\alpha} p_{1\beta} \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\gamma] + p_{2\alpha} m \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\gamma] \\ &\quad - p_{1\beta} m \text{Sp}[\gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\gamma] - m^2 \text{Sp}[\gamma^\lambda \gamma^\gamma] \end{aligned}$$

Dabei verschwinden die Terme mit ungeraden Anzahlen von Gamma-Matrizen, da ihre Spur Null ergibt (siehe (A.9) und (A.10)). Für die Spuren mit gerader Anzahl an Gamma-Matrizen werden die jeweiligen Identitäten (A.11) und (A.12) verwendet:

$$\sum_{Spin} [(\not{p}_2 - m) \gamma_\lambda (\not{p}_1 + m) \gamma_\gamma] = 4p_{2\alpha} p_{1\beta} (g^{\alpha\lambda} g^{\beta\gamma} - g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\lambda}) - m^2 4g^{\lambda\gamma}$$

Im nächsten Schritt werden alle Terme ausmultipliziert und gemäß

$p_\mu k_\nu g^{\mu\nu} = p_\mu k^\mu$ vereinfacht. Außerdem wird Gleichung (A.13) zur Verrechnung der

Kronecker-Deltas angewendet:

$$\begin{aligned}
\sum_{Spin} \sum_{Farbe} |M_s|^2 &= \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{(k_1 + k_2)^4} \cdot \\
&\{ 8p_{1\mu}p_2^\mu [- (2k_1 + k_2)_\nu(2k_1 + k_2)^\nu - 2(k_2 - k_1)_\nu(k_2 - k_1)^\nu \\
&\quad - (k_1 + 2k_2)_\nu(k_1 + 2k_2)^\nu - (2k_1 + k_2)_\nu(k_2 - k_1)^\nu \\
&\quad + (2k_1 + k_2)_\nu(k_1 + 2k_2)^\nu + (k_2 - k_1)_\nu(k_1 + 2k_2)^\nu] \\
&\quad + 8[p_{2\mu}(2k_1 + k_2)^\mu p_{1\nu}(k_2 - k_1)^\nu - p_{2\mu}(k_1 + 2k_2)^\mu p_{1\nu}(2k_1 + k_2)^\nu \\
&\quad + p_{2\mu}(k_2 - k_1)^\mu p_{1\nu}(2k_1 + k_2)^\nu + 4p_{2\mu}(k_2 - k_1)^\mu p_{1\nu}(k_2 - k_1)^\nu \\
&\quad - p_{2\mu}(k_2 - k_1)^\mu p_{1\nu}(k_1 + 2k_2)^\nu - p_{2\mu}(2k_1 + k_2)^\mu p_{1\nu}(k_1 + 2k_2)^\nu \\
&\quad - p_{2\mu}(k_1 + 2k_2)^\mu p_{1\nu}(k_2 - k_1)^\nu] \\
&\quad - 8m^2 [2(2k_1 + k_2)_\mu(2k_1 + k_2)^\mu + 2(k_2 - k_1)_\mu(k_2 - k_1)^\mu \\
&\quad + 2(k_1 + 2k_2)_\mu(k_1 + 2k_2)^\mu + (2k_1 + k_2)_\mu(k_2 + k_1)^\mu \\
&\quad - (2k_1 + k_2)_\mu(k_1 + 2k_2)^\mu - (k_2 - k_1)_\mu(k_1 + 2k_2)^\mu] \}
\end{aligned}$$

Jene Spinoren, die über den gleichen Lorentz-Index gekoppelt sind, können durch Mandelstam-Variablen ersetzt werden. Mit der Identität $s+t+u = 2m^2$ können die verschiedenen Produkte der Spinoren wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
p_1^2 &= m^2 \\
p_2^2 &= m^2 \\
k_1^2 &= 0 \\
k_2^2 &= 0 \\
p_1 p_1 &= \frac{s}{2} - m^2 \\
k_1 k_2 &= \frac{s}{2} \\
p_1 k_1 &= \frac{m^2 - t}{2} \\
p_2 k_2 &= \frac{m^2 - t}{2} \\
p_1 k_2 &= \frac{s + t - m^2}{2} \\
p_2 k_1 &= \frac{s + t - m^2}{2}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich nach Einsetzen und Zusammenfassen aller Terme das Ergebnis des

Amplitudenquadrats in Abhängigkeit von m , s und t :

$$\begin{aligned} \overline{|M_s|^2} &= -\frac{1}{4} \frac{1}{(N^2 - 1)^2} N^2 (N^2 - 1) \frac{4g_s^4}{s^4} (5m^4 + m^2(3s - 10t) + 4s^2 + 5st + 5t^2) \\ &= -\frac{N^2}{N^2 - 1} \cdot \frac{g_s^4}{s^4} \cdot (5m^4 + m^2(3s - 10t) + 4s^2 + 5st + 5t^2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2. Faddeev-Popov-Geister

Bei der Berechnung des Amplitudenquadrats im vorherigen Abschnitt wurde zu Beginn im Rahmen der Feynman-Eichung über alle möglichen Polarisationsrichtungen summiert. Davon sind jedoch nicht alle im Rahmen der Eichbedingungen physikalisch möglich. Um dies zu korrigieren werden die skalaren Faddeev-Popov-Geister eingeführt [12]. Diese entsprechen keinen realen physikalischen Teilchen, sondern sind mathematisch so konstruiert, dass sie nur die unphysikalischen Polarisationsrichtungen enthalten. Es sind zwei Prozesse möglich, bei denen Faddeev-Popov-Geister entstehen. Diese unterscheiden sich nur in der Richtung der Geister und sind in Abb. 3 dargestellt.

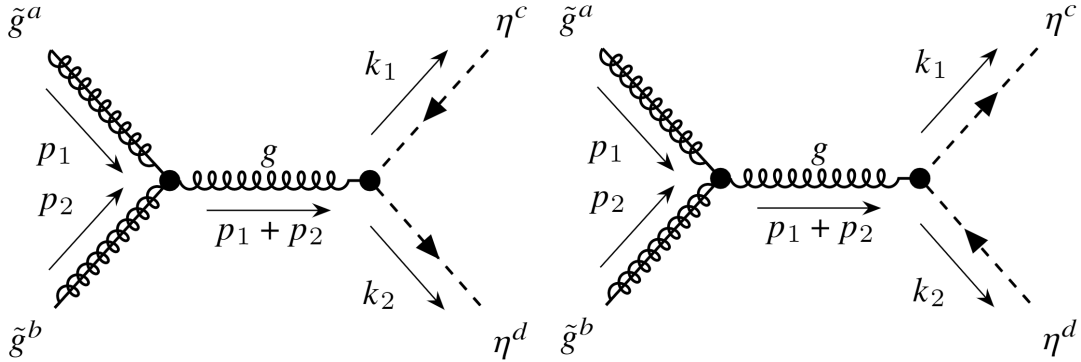


Abbildung 3: Gluino-Annihilation in Faddeev-Popov-Geister über den s-Kanal

Offensichtlich ergeben die Amplitudenquadrate beider Diagramme denselben Ausdruck, daher wird im Folgenden nur das gemittelte Amplitudenquadrat eines Prozesses berechnet. Die Korrektur zum gesamten Amplitudenquadrat beträgt daher:

$$\overline{|M_{FPG,1}|^2} + \overline{|M_{FPG,2}|^2} = 2 \cdot \overline{|M_{FPG}|^2} \quad (4.6)$$

Die Streuamplitude und ihr hermitesch Konjugiertes ergeben sich hier zu folgenden Termen:

$$\begin{aligned}
 M_{FPG} &= \bar{v}(p_2)(-g_s f_{eba} \gamma_\lambda) u(p_1) \left(\frac{i g^{\lambda\phi} \delta_{ef}}{(k_1 + k_2)^2} \right) (-g_s f_{fdc} k_{2\phi}) \\
 M_{FPG}^\dagger &= \bar{u}(p_1)(-g_s f_{gba} \gamma_\gamma) v(p_2) \left(-\frac{i g^{\gamma\delta} \delta_{egh}}{(k_1 + k_2)^2} \right) (-g_s f_{hdc} k_{2\delta})
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Für das gemittelte Amplitudenquadrat folgt damit:

$$\begin{aligned}
 \overline{|M_{FPG}|^2} &= \frac{1}{4(N^2 - 1)^2} N^2 (N^2 - 1) \frac{g_s^4}{s^2} (\not{p}_2 - m) \gamma_\lambda (\not{p}_1 + m) \gamma_\gamma k_2^\lambda k_2^\gamma \\
 &= \frac{N^2}{4(N^2 - 1)} \frac{g_s^4}{s^2} [p_{2\alpha} p_{1\beta} \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\gamma] - m^2 \text{Sp}[\gamma^\lambda \gamma^\gamma]] k_2^\lambda k_2^\gamma \\
 &= \frac{N^2}{4(N^2 - 1)} \frac{g_s^4}{s^2} k_2^\lambda k_2^\gamma \left[4 p_{2\alpha} p_{1\beta} (g^{\alpha\lambda} g^{\beta\gamma} - g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\lambda\beta}) - 4 m^2 g^{\lambda\gamma} \right] \\
 &= \frac{N^2}{4(N^2 - 1)} \frac{g_s^4}{s^2} \left[2 \cdot k_{2\alpha} p_2^\alpha k_{2\beta} p_1^\beta - k_2^\lambda k_{2\lambda} p_{2\alpha} p_1^\alpha - m^2 k_{2\lambda} k_2^\lambda \right] \\
 &= \frac{N^2}{4(N^2 - 1)} \frac{2g_s^4}{s^2} (m^2 - t)(m^2 - u) \\
 &= \frac{N^2}{(N^2 - 1)} \frac{g_s^4}{2s^2} (m^2 - t)(m^2 - u)
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

4.3. Amplitudenquadrat des t-Kanals

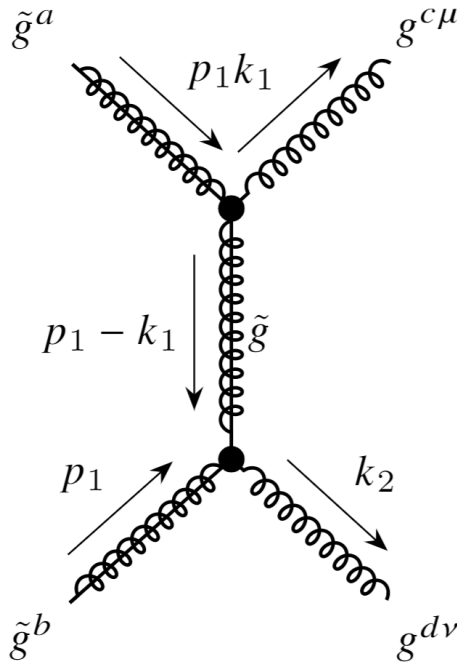


Abbildung 4: Gluino-Annihilation in Gluonen über den t-Kanal

Die Amplitude für den t-Kanal (siehe Feynman-Diagramm in Abb. 4) lautet

$$M_t = \bar{v}(p_2) \underbrace{(-g_s f_{dbf} \gamma_\nu)}_{g-\tilde{g}\text{-Kopplung}} \underbrace{\frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \delta_{ef}}{(p_1 - k_1)^2 - m^2}}_{\text{Gluino-Propagator}} (-g_s f_{cea} \gamma_\mu) u(p_1) \epsilon^{*\mu}(k_1) \epsilon^{*\nu}(k_2) \quad (4.9)$$

und die hermitesch konjugierte Amplitude entsprechend

$$M_t^\dagger = \bar{u}(p_1) (-g_s f_{dbh} \gamma_\alpha) \left(-\frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \delta_{gh}}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \right) (-g_s f_{cga} \gamma_\beta) v(p_2) \epsilon^\alpha(k_1) \epsilon^\beta(k_2) \quad (4.10)$$

Nun soll wieder das Amplitudenquadrat bestimmt werden. Die Summation über die Strukturkonstanten liefert hier das gleiche Ergebnis wie bei der Rechnung zum s-Kanal. Zuerst werden hier wieder die Vollständigkeitsrelationen (A.6), (A.7) und (A.8) angewandt und die metrischen Tensoren verrechnet:

$$\begin{aligned} \overline{|M_t|^2} &= \frac{N^2 g_s^4}{4(N^2 - 1)[(p_1 - k_1)^2 - m^2]^2} (\not{p}_2 - m) \gamma_\nu (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\alpha \\ &\quad (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \gamma_\beta g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \\ &= \frac{N^2 g_s^4}{4(N^2 - 1)[(p_1 - k_1)^2 - m^2]^2} \{ p_{2\alpha} (p_1 - k_1)_\beta p_{1\gamma} (p_1 - k_1)_\delta \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \gamma_\mu \gamma^\gamma \gamma^\mu \gamma^\delta \gamma^\nu] \\ &\quad + m^2 p_{2\alpha} (p_1 - k_1)_\beta \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &\quad + m^2 p_{2\alpha} p_{1\gamma} \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\gamma \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &\quad + m^2 p_{2\alpha} (p_1 - k_1)_\delta \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\delta \gamma^\nu] \\ &\quad - m^2 (p_1 - k_1)_\beta p_{1\gamma} \text{Sp}[\gamma_\nu \gamma^\beta \gamma_\mu \gamma^\gamma \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &\quad - m^2 (p_1 - k_1)_\beta (p_1 - k_1)_\delta \text{Sp}[\gamma_\nu \gamma^\beta \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\delta \gamma^\nu] \\ &\quad - m^2 p_{1\gamma} (p_1 - k_1)_\delta \text{Sp}[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\gamma \gamma^\mu \gamma^\delta \gamma^\nu] \\ &\quad - m^4 \text{Sp}[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu] \} \end{aligned}$$

Um die Ausdrücke innerhalb der Spuren zu vereinfachen, werden Identitäten (A.4) und (A.5) für die Multiplikation von γ -Matrizen verwendet. Außerdem dürfen die γ -Matrizen innerhalb der Spur zyklisch rotiert werden, um die Berechnungen zu vereinfachen. Anschließend werden wieder (A.11) und (A.12) verwendet, um die Spuren auszuwerten.

$$\begin{aligned} \overline{|M_t|^2} &= \frac{N^2 g_s^4}{4(N^2 - 1)[(p_1 - k_1)^2 - m^2]^2} \{ 4p_{2\alpha} (p_1 - k_1)_\beta p_{1\gamma} (p_1 - k_1)_\delta \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta] \\ &\quad + m^2 [-8p_{2\alpha} (p_1 - k_1)_\beta + 4p_{2\alpha} p_{1\beta} \\ &\quad - 8p_{2\alpha} (p_1 - k_1)_\beta + 8(p_1 - k_1)_\alpha p_{1\beta} \\ &\quad - 16(p_1 - k_1)_\alpha (p_1 - k_1)_\beta + 8p_{1\alpha} (p_1 - k_1)_\beta] \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m^4 16 \text{Sp}[1] \} \\
& = \frac{N^2 g_s^4}{4(N^2 - 1)[(p_1 - k_1)^2 - m^2]^2} \{ 4p_{2\alpha}(p_1 - k_1)_\beta p_{1\gamma}(p_1 - k_1)_\delta (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \\
& \quad + m^2 [-8p_{2\alpha}(p_1 - k_1)_\beta + 4p_{2\alpha} p_{1\beta} \\
& \quad \quad - 8p_{2\alpha}(p_1 - k_1)_\beta + 8(p_1 - k_1)_\alpha p_{1\beta} \\
& \quad \quad - 16(p_1 - k_1)_\alpha (p_1 - k_1)_\beta + 8p_{1\alpha}(p_1 - k_1)_\beta] g^{\alpha\beta} \\
& \quad - 64m^4 \} \\
& = \frac{N^2 g_s^4}{4(N^2 - 1)[(p_1 - k_1)^2 - m^2]^2} \{ 32p_{2\alpha}(p_1 - k_1)^\alpha p_{1\beta}(p_1 - k_1)^\beta \\
& \quad - 16p_{2\alpha} p_1^\alpha (p_1 - k_1)_\beta (p_1 - k_1)^\beta \\
& \quad + m^2 [-8p_{2\alpha}(p_1 - k_1)^\alpha + 4p_{2\alpha} p^{1\alpha} \\
& \quad \quad - 8p_{2\alpha}(p_1 - k_1)^\alpha + 8(p_1 - k_1)_\alpha p^{1\alpha} \\
& \quad \quad - 16(p_1 - k_1)_\alpha (p_1 - k_1)^\alpha + 8p_{1\alpha}(p_1 - k_1)^\alpha] \\
& \quad - 64m^4 \}
\end{aligned}$$

Die gekoppelten Spinoren werden auch hier durch Mandelstam-Variablen und die Gluino-Masse ausgedrückt, allerdings aus praktischen Gründen nicht in Abhängigkeit von m , s und t , sondern von m , u und t :

$$\begin{aligned}
p_1^2 &= m^2 \\
p_2^2 &= m^2 \\
k_1^2 &= 0 \\
k_2^2 &= 0 \\
p_1 k_1 &= \frac{m^2 - t}{2} \\
p_2 k_2 &= \frac{m^2 - t}{2} \\
p_1 p_2 &= \frac{-t - u}{2} \\
k_1 k_2 &= m^2 - \frac{t + u}{2} \\
p_1 k_2 &= \frac{m^2 - u}{2} \\
p_2 k_1 &= \frac{m^2 - u}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{|M_t|^2} = -\frac{N^2}{N^2 - 1} \frac{2g_s^4}{(t - m^2)^2} (m^4 + m^2(3t + u) + ut) \quad (4.11)$$

4.4. Amplitudenquadrat des u-Kanals

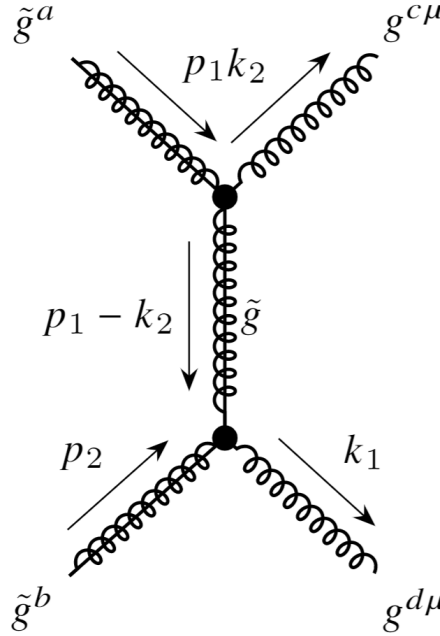


Abbildung 5: Gluino-Annihilation in Gluonen über den u-Kanal

Die Amplitude des u-Kanals (siehe Feynman-Diagramm in Abb. 5) lautet

$$M_u = \bar{v}(p_2)(-g_s f_{cbf} \gamma_\nu) \frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \delta_{ef}}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} (-g_s f_{dea} \gamma_\mu) u(p_1) \epsilon^{*\mu}(k_2) \epsilon^{*\nu}(k_1) \quad (4.12)$$

und entspricht damit der Amplitude des t-Kanals nach Vertauschung von $k_1 \leftrightarrow k_2$ und $c \leftrightarrow d$. Letzteres spielt hier noch keine Rolle, da die Strukturkonstanten in der konjugiert komplexen Amplitude dieselbe Vertauschung erfahren und sich damit der Farbanteil der Amplitude nicht ändert. Da $t = (p_1 - k_1)^2$ und $u = (p_1 - k_2)^2$ ist $k_1 \leftrightarrow k_2$ äquivalent zu $t \leftrightarrow u$ und damit gilt:

$$\overline{|M_u|^2} = -\frac{N^2}{N^2 - 1} \frac{2g_s^4}{(u - m^2)^2} (m^4 + m^2(t + 3u) + ut) \quad (4.13)$$

4.5. Interferenz der Amplituden von s- und t-Kanal

Bei der Berechnung von $\overline{M_s M_t^\dagger}$ ist das Produkt der Strukturkonstanten mit den Farbinformationen deutlich komplizierter als bisher, sodass dieses zunächst separat berechnet wird.

Dafür werden die Strukturkonstanten mithilfe von Gleichung (A.16) durch die Generatoren der SU(3) ausgedrückt:

$$\begin{aligned}
f^{eba} \delta^{ef} f^{fdc} f^{dbh} \delta^{gh} f^{cga} &= f^{eba} f^{edc} f^{dbg} f^{cga} \\
&= (-2i \operatorname{Sp}(T^e [T^b, T^a])) (-2i \operatorname{Sp}(T^e [T^d, T^c])) \\
&\quad (-2i \operatorname{Sp}(T^g [T^d, T^b])) (-2i \operatorname{Sp}(T^g [T^a, T^c])) \\
&= 16 T_{ij}^e [T^b, T^a]_{ji} T_{kl}^e [T^d, T^c]_{lk} T_{mn}^g [T^d, T^b]_{nm} T_{op}^g [T^a, T^c]_{po}
\end{aligned}$$

Die implizite Summierung über doppelte Indizes erfolgt mit Gleichung (A.17):

$$\begin{aligned}
f^{eba} f^{edc} f^{dbg} f^{cga} &= 16 \cdot \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) [T^b, T^a]_{ji} [T^d, T^c]_{lk} \\
&\quad \frac{1}{2} \left(\delta_{mp} \delta_{no} - \frac{1}{N} \delta_{mn} \delta_{op} \right) [T^d, T^b]_{nm} [T^a, T^c]_{po} \\
&= 4 [T^b, T^a]_{ji} [T^d, T^c]_{ij} [T^d, T^b]_{nm} [T^a, T^c]_{mn}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle wird zunächst das Produkt zweier Kommutatoren berechnet:

$$\begin{aligned}
[T^d, T^c]_{ij} [T^d, T^b]_{nm} &= (T_{il}^d T_{lj}^c - T_{il}^c T_{lj}^d) (T_{nk}^d T_{km}^b - T_{nk}^b T_{km}^d) \\
&= T_{il}^d T_{lj}^c T_{nk}^d T_{km}^b - T_{il}^d T_{lj}^c T_{nk}^b T_{km}^d - T_{il}^c T_{lj}^d T_{nk}^d T_{km}^b + T_{il}^c T_{lj}^d T_{nk}^b T_{km}^d
\end{aligned}$$

Hier wird erneut Gleichung (A.17) für die doppelten Indizes angewandt:

$$\begin{aligned}
[T^d, T^c]_{ij} [T^d, T^b]_{nm} &= \frac{1}{2} \left(\delta_{ik} \delta_{ln} - \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{nk} \right) T_{lj}^c T_{km}^b - \frac{1}{2} \left(\delta_{im} \delta_{lk} - \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{km} \right) T_{lj}^c T_{nk}^b \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\delta_{lk} \delta_{jn} - \frac{1}{N} \delta_{lj} \delta_{nk} \right) T_{il}^c T_{km}^b + \frac{1}{2} \left(\delta_{lm} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{lj} \delta_{km} \right) T_{il}^c T_{nk}^b \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(T_{nj}^c T_{im}^b - \frac{1}{N} T_{ij}^c T_{nm}^b \right) - \left(T_{kj}^c T_{nk}^b \delta_{im} - \frac{1}{N} T_{ij}^c T_{nm}^b \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(T_{ik}^c T_{km}^b \delta_{jn} - \frac{1}{N} T_{ij}^c T_{nm}^b \right) + \left(T_{im}^c T_{nj}^b - \frac{1}{N} T_{ij}^c T_{nm}^b \right) \right]
\end{aligned}$$

Durch Ausführung der Kronecker-Deltas ergibt sich schließlich:

$$[T^d, T^c]_{ij} [T^d, T^b]_{nm} = \frac{1}{2} \left(T_{nj}^c T_{im}^b - T_{kj}^c T_{nk}^b \delta_{im} - T_{ik}^c T_{km}^b \delta_{jn} + T_{im}^c T_{nj}^b \right) \quad (4.14)$$

Aufgrund der Antisymmetrie des Kommutators ergibt sich analog:

$$\begin{aligned}
[T^b, T^a]_{ji} [T^a, T^c]_{mn} &= -[T^a, T^b]_{ji} [T^a, T^c]_{mn} \\
&= -\frac{1}{2} \left(T_{mi}^b T_{jn}^c - T_{li}^b T_{ml}^c \delta_{jn} - T_{jl}^b T_{ln}^c \delta_{im} + T_{jn}^b T_{mi}^c \right)
\end{aligned}$$

Dies kann nun beides oben eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
 f^{eba} f^{edc} f^{dbg} f^{cga} &= - \left(T_{nj}^c T_{im}^b - T_{kj}^c T_{nk}^b \delta_{im} - T_{ik}^c T_{km}^b \delta_{jn} + T_{im}^c T_{nj}^b \right) \cdot \\
 &\quad \left(T_{mi}^b T_{jn}^c - T_{li}^b T_{ml}^c \delta_{jn} - T_{jl}^b T_{ln}^c \delta_{im} + T_{jn}^b T_{mi}^c \right) \\
 &= - \left(T_{nj}^c T_{im}^b T_{mi}^b T_{jn}^c + T_{nj}^c T_{im}^b T_{jn}^b T_{mi}^c + T_{im}^c T_{nj}^b T_{mi}^b T_{jn}^c + T_{im}^c T_{nj}^b T_{jn}^b T_{mi}^c \right. \\
 &\quad \left. + T_{kj}^c T_{jk}^b T_{li}^b T_{il}^c + T_{ik}^c T_{ki}^b T_{jn}^b T_{ln}^c + T_{kj}^c T_{nk}^b T_{jl}^b T_{ln}^c \delta_{ii} + T_{ik}^c T_{km}^b T_{li}^b T_{ml}^c \delta_{jj} \right)
 \end{aligned}$$

Die ersten sechs Terme können wegen der gleichen tiefgestellten Indizes auch als Produkte von Spuren geschrieben werden. Auf die letzten beiden Terme wird wieder Gleichung (A.17) angewandt:

$$\begin{aligned}
 f^{eba} f^{edc} f^{dbg} f^{cga} &= - \left[2 \text{Sp}[T^b T^b] \text{Sp}[T^c T^c] + 4 \text{Sp}[T^b T^c] \text{Sp}[T^b T^c] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\delta_{kn} \delta_{jl} - \frac{1}{N} \delta_{kj} \delta_{ln} \right) \frac{1}{2} \left(\delta_{nl} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{nk} \delta_{jl} \right) \delta_{ii} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{km} - \frac{1}{N} \delta_{ik} \delta_{ml} \right) \frac{1}{2} \left(\delta_{ki} \delta_{ml} - \frac{1}{N} \delta_{km} \delta_{li} \right) \delta_{jj} \right]
 \end{aligned}$$

Für die Spuren gilt nun Gleichung (A.18). Während die Kronecker-Deltas mit hochgestellten Indizes eine Summation von 1 bis $N^2 - 1$ implizieren (siehe Gl. (A.14)), müssen die Kronecker-Deltas mit tiefgestellten Indizes von 1 bis N summiert werden (siehe Gl.(A.13):

$$\begin{aligned}
 f^{eba} f^{edc} f^{dbg} f^{cga} &= - \left[2 \cdot \frac{1}{2} \delta^{cc} \frac{1}{2} \delta^{dd} + \delta^{cc} + \frac{1}{2} \left(\delta_{jj} - \frac{1}{N} \delta_{kk} \delta_{jj} - \frac{1}{N} \delta_{kk} \delta_{ll} + \frac{1}{N^2} \delta_{ll} \right) \delta_{ii} \right] \\
 &= - \left[\frac{(N^2 - 1)^2}{2} + (N^2 - 1) + \frac{1}{2} \left(N - \frac{N^2}{N} - \frac{N^2}{N} + \frac{N}{N^2} \right) N \right] \\
 &= \frac{1}{2} N^2 (1 - N^2)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Nun verbleibt noch die Berechnung der restlichen Terme nach dem bekannten Schema.

$$\begin{aligned}
 \sum_{\text{Spin Farbe}} M_s M_t^\dagger &= - \frac{N^2(1 - N^2)}{2} \cdot \frac{g_s^4}{(k_1 + k_2)^2 \cdot (p_1 - k_1)^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\lambda u(p_1) g^{\lambda\phi} \\
 &\quad [(2k_1 + k_2)_\nu g_{\mu\phi} + (k_2 - k_1)_\phi g_{\mu\nu} - (k_1 + 2k_2)_\mu g_{\nu\phi}] \\
 &\quad \bar{u}(p_1) \gamma_\alpha (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \gamma_\beta v(p_2) \epsilon^{*\mu}(k_1) \epsilon^{*\nu}(k_2) \epsilon^\alpha(k_1) \epsilon^\beta(k_2) \\
 &= \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{2s(t - m^2)} (\not{p}_2 - m) \gamma_\lambda (\not{p}_1 + m) \gamma_\alpha (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \gamma_\beta \\
 &\quad [(2k_1 + k_2)_\nu g_{\mu\phi} + (k_2 - k_1)_\phi g_{\mu\nu} - (k_1 + 2k_2)_\mu g_{\nu\phi}] g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\lambda\phi}
 \end{aligned}$$

Wie schon zuvor wurden hier die Vollständigkeitsrelationen (A.6), (A.7) und (A.8) verwendet. Nun werden die metrischen Tensoren auf die γ -Matrizen angewandt, alle auftretenden γ -Matrizen in Spuren zusammengefasst und anschließend die Summe der Spuren mit dem Vertex-Faktor der Dreier-Gluon-Kopplung ausmultipliziert:

$$\begin{aligned}
\sum_{Spin} \sum_{Farbe} M_s M_t^\dagger &= \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{2s(t - m^2)} (\not{p}_2 - m) \gamma^\phi (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \gamma^\nu \\
&\quad [(2k_1 + k_2)_\nu g_{\mu\phi} + (k_2 - k_1)_\phi g_{\mu\nu} - (k_1 + 2k_2)_\mu g_{\nu\phi}] \\
&= \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{2s(t - m^2)} p_{2\alpha} p_{1\beta} (p_1 - k_1)_\gamma \left(\text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\phi \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma^\nu] + m^2 p_{2\alpha} \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\nu] \right. \\
&\quad \left. - m^2 p_{1\beta} \text{Sp}[\gamma^\phi \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] - m^2 (p_1 - k_1)_\gamma \text{Sp}[\gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma^\nu] \right) \\
&\quad [(2k_1 + k_2)_\nu g_{\mu\phi} + (k_2 - k_1)_\phi g_{\mu\nu} - (k_1 + 2k_2)_\mu g_{\nu\phi}] \\
&= \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{2s(t - m^2)} \left[p_{2\alpha} p_{1\beta} (p_1 - k_1)_\gamma \left((2k_1 + k_2)_\nu \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma^\nu] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (k_2 - k_1)_\phi \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\phi \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma_\mu] - (k_1 + 2k_2)_\mu \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma^\nu] \right) \right. \\
&\quad \left. + m^2 p_{2\alpha} \left((2k_1 + k_2)_\nu \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu] + (k_2 - k_1)_\phi \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\phi \gamma^\mu \gamma_\mu] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (k_1 + 2k_2)_\mu \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu] \right) \right. \\
&\quad \left. - m^2 p_{1\beta} \left((2k_1 + k_2)_\nu \text{Sp}[\gamma_\mu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] + (k_2 - k_1)_\phi \text{Sp}[\gamma^\phi \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma_\mu] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (k_1 + 2k_2)_\mu \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu] \right) \right. \\
&\quad \left. - m^2 (p_1 - k_1)_\gamma \left((2k_1 + k_2)_\nu \text{Sp}[\gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\mu \gamma^\nu] + (k_2 - k_1)_\phi \text{Sp}[\gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma_\mu] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (k_1 + 2k_2)_\mu \text{Sp}[\gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma^\nu] \right) \right]
\end{aligned}$$

Nun können die Ausdrücke innerhalb der Spuren wieder mithilfe von (A.2) und (A.3) vereinfacht und dann mit (A.11) und (A.12) ausgewertet werden.

$$\begin{aligned}
\sum_{Spin} \sum_{Farbe} M_s M_t^\dagger &= \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{2s(t - m^2)} \left[-2p_{2\alpha} p_{1\beta} (p_1 - k_1)_\gamma \left((2k_1 + k_2)_\nu \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\nu] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (k_2 - k_1)_\phi \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\phi \gamma^\beta \gamma^\gamma] - (k_1 + 2k_2)_\mu \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma] \right) \right. \\
&\quad \left. + m^2 p_{2\alpha} \left(4(2k_1 + k_2)_\nu \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\nu] + 4(k_2 - k_1)_\phi \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\phi] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(k_1 + 2k_2)_\mu \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\mu] \right) \right. \\
&\quad \left. - m^2 p_{1\beta} \left(-2(2k_1 + k_2)_\nu \text{Sp}[\gamma^\beta \gamma^\nu] + 4(k_2 - k_1)_\phi \text{Sp}[\gamma^\phi \gamma^\beta] \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4(k_1 + 2k_2)_\mu \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\mu] \Big) \\
 & -m^2(p_1 - k_1)_\gamma \Big(4(2k_1 + k_2)_\nu \text{Sp}[\gamma^\mu \gamma^\nu] - 2(k_2 - k_1)_\phi \text{Sp}[\gamma^\phi \gamma^\gamma] \\
 & -4(k_1 + 2k_2)_\mu \text{Sp}[\gamma^\mu \gamma^\gamma] \Big) \Big] \\
 & = \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{2s(t - m^2)} \Big[-2p_{2\alpha}p_{1\beta}(p_1 - k_1)_\gamma \Big((2k_1 + k_2)_\nu 4(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\nu} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\gamma}) \\
 & + (k_2 - k_1)_\phi 4(g^{\alpha\phi}g^{\beta\gamma} - g^{\alpha\beta}g^{\phi\gamma} + g^{\alpha\gamma}g^{\phi\beta}) - (k_1 + 2k_2)_\mu 4(g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma}g^{\beta\mu}) \Big) \\
 & + m^2p_{2\alpha} \Big(4(2k_1 + k_2)_\nu g^{\alpha\nu} + 4(k_2 - k_1)_\phi g^{\alpha\phi} + 2(k_1 + 2k_2)_\mu g^{\alpha\mu} \Big) \\
 & - m^2p_{1\beta} \Big(-2(2k_1 + k_2)_\nu g^{\beta\nu} + 4(k_2 - k_1)_\phi g^{\phi\beta} - 4(k_1 + 2k_2)_\mu g^{\alpha\mu} \Big) \\
 & - m^2(p_1 - k_1)_\gamma \Big(4(2k_1 + k_2)_\nu g^{\mu\nu} - 2(k_2 - k_1)_\phi g^{\phi\gamma} - 4(k_1 + 2k_2)_\mu g^{\mu\gamma} \Big) \Big]
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle werden alle metrischen Tensoren ausgewertet, sodass sich Produkte von Impulsen mit gleichen Indizes ergeben:

$$\begin{aligned}
 \sum_{Spin} \sum_{Farbe} M_s M_t^\dagger &= \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{2s(t - m^2)} \Big[-8 \Big(p_{2\alpha}p^{1\alpha}(p_1 - k_1)_\gamma (2k_1 + k_2)^\gamma - p_{2\alpha}p_{1\beta}(p_1 - k_1)^\alpha (2k_1 + k_2)^\beta \\
 & + p_{2\alpha}p_{1\beta}(p_1 - k_1)^\beta (2k_1 + k_2)^\alpha + p_{2\alpha}p_{1\beta}(p_1 - k_1)^\beta (k_2 - k_1)^\alpha \\
 & - p_{2\alpha}p^{1\alpha}(p_1 - k_1)_\beta (k_2 - k_1)^\beta + p_{2\alpha}p_{1\beta}(p_1 - k_1)^\alpha (k_2 - k_1)^\beta \\
 & - p_{2\alpha}p^{1\alpha}(p_1 - k_1)_\gamma (k_1 + 2k_2)^\gamma + p_{2\alpha}p_{1\beta}(p_1 - k_1)^\beta (k_1 + 2k_2)^\alpha \\
 & - p_{2\alpha}p_{1\beta}(p_1 - k_1)^\alpha (k_1 + 2k_2)^\beta \Big) \\
 & + 2m^2p_{2\alpha} \Big(2(2k_1 + k_2)^\alpha + 2(k_2 - k_1)^\alpha + (k_1 + 2k_2)^\alpha \Big) \\
 & - 2m^2p_{1\beta} \Big(-(2k_1 + k_2)^\beta + 2(k_2 - k_1)^\beta - 2(k_1 + 2k_2)^\beta \Big) \\
 & - 2m^2(p_1 - k_1)_\gamma \Big(2(2k_1 + k_2)^\gamma - (k_2 - k_1)^\gamma - 2(k_1 + 2k_2)^\gamma \Big) \Big]
 \end{aligned}$$

Ersetzt man diese durch die gleichen Ausdrücke in Mandelstam-Variablen wie in Kap. 4.3, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \overline{M_s M_t^\dagger} &= \frac{1}{4} \frac{N^2(N^2 - 1)}{(N^2 - 1)^2} \frac{8g_s^4}{s(t - m^2)} (3m^4 - m^2(3t + u) + t^2) \\
 &= \frac{N^2}{N^2 - 1} \frac{2g_s^4}{s(t - m^2)} (3m^4 - m^2(3t + u) + t^2)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

4.6. Interferenz der Amplituden von s- und u-Kanal

Wie schon in Kapitel 4.4 erläutert, lässt sich der Impulsanteil von $\overline{M_s M_u^\dagger}$ aus dem Impulsanteil von $M_s M_t^\dagger$ durch Vertauschung von $t \leftrightarrow u$ gewinnen. Im Farbanteil der Interferenz der Amplituden tauchen die einzelnen Farbindizes nicht mehr auf, sodass die Vertauschung $c \leftrightarrow d$ auch hier keine Rolle spielt und somit zum selben Ergebnis führt:

$$\overline{M_s M_u^\dagger} = \frac{N^2}{N^2 - 1} \frac{2g_s^4}{s(u - m^2)} (3m^4 - m^2(t + 3u) + u^2) \quad (4.17)$$

4.7. Interferenz der Amplituden von t- und u-Kanal

Bei der Berechnung des Farbanteils können auch hier die Ergebnisse aus Kapitel 4.5 verwendet werden:

$$\begin{aligned} f^{dbf} \delta^{ef} f^{cea} f^{cbh} \delta^{gh} f^{dga} &= f^{dbe} f^{cea} f^{cbg} f^{dga} \\ &= 4[T^d, T^b]_{ji} [T^a, T^c]_{ij} [T^c, T^b]_{nm} [T^a, T^d]_{mn} \end{aligned}$$

Hier wird wieder zweimal Gleichung (4.14) angewendet. Im Unterschied zu (4.15) müssen dafür zwei statt nur einem Kommutator negiert werden, sodass sich das Ergebnis zu (4.15) nur im Vorzeichen unterscheidet:

$$f^{dbe} f^{cea} f^{cbg} f^{dga} = \frac{1}{2} N^2 (N^2 - 1) \quad (4.18)$$

Für die restlichen Terme folgt ein zu den vorherigen Kapiteln analoges Vorgehen, beginnend mit der Anwendung der Vollständigkeitsrelationen und der Auswertung der beiden metrischen Tensoren.

$$\begin{aligned} \sum_{Spin} \sum_{Farbe} M_t M_u^\dagger &= \frac{N^2(N^2 - 1)}{2} \cdot \frac{g_s^2}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \frac{g_s^2}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \bar{v}(p_2) \gamma_\nu (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \\ &\quad \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma_\alpha (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma_\beta v(p_2) \varepsilon^{*\mu}(k_1) \varepsilon^{*\nu}(k_2) \varepsilon^\beta(k_1) \varepsilon^\alpha(k_2) \\ &= \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{2(t - m^2)(u - m^2)} (\not{p}_2 - m) \gamma_\nu (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\alpha \\ &\quad (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma_\beta g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \\ &= \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{2(t - m^2)(u - m^2)} (\not{p}_2 - m) \gamma_\nu (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu \\ &\quad (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma^\mu \end{aligned}$$

Wieder werden alle γ -Matrizen in Spuren dargestellt, in den Spuren vereinfacht und ausgewertet.

$$\begin{aligned}
 \sum_{Spin} \sum_{Farbe} M_t M_u^\dagger &= \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{2(t - m^2)(u - m^2)} \left[p_{2\alpha}(p_1 - k_1)_\beta p_{1\gamma}(p_1 - k_2)_\delta \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \gamma_\mu \gamma^\gamma \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma^\mu] \right. \\
 &\quad + m^2 p_{2\alpha}(p_1 - k_1)_\beta \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu] + m^2 p_{2\alpha} p_{1\beta} \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\mu] \\
 &\quad + m^2 p_{2\alpha}(p_1 - k_2)_\beta \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu] - m^2(p_1 - k_1)_\alpha p_{1\beta} \text{Sp}[\gamma_\nu \gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\mu] \\
 &\quad - m^2(p_1 - k_1)_\alpha(p_1 - k_2)_\beta \text{Sp}[\gamma_\nu \gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu] \\
 &\quad \left. - m^2 p_{1\alpha}(p_1 - k_1)_\beta \text{Sp}[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu] - m^4 (\text{Sp}[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu]) \right] \\
 &= \frac{N^2(N^2 - 1)g_s^4}{2(t - m^2)(u - m^2)} \left[-32 \cdot p_{2\alpha}(p_1 - k_1)_\beta p_{1\gamma}(p_1 - k_2)_\delta g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \right. \\
 &\quad + 4m^2 g^{\alpha\beta} \left(p_{2\alpha}(p_1 - k_1)_\beta + p_{2\alpha} p_{1\beta} + p_{2\alpha}(p_1 - k_2)_\beta - (p_1 - k_1)_\alpha p_{1\beta} \right. \\
 &\quad \left. \left. - (p_1 - k_1)_\alpha(p_1 - k_2)_\beta - p_{1\alpha}(p_1 - k_1)_\beta \right) + 32m^4 \right]
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt werden die durch gleiche Indizes gekoppelten Impulse wieder durch die Ausdrücke aus Kapitel 4.3 ersetzt und zusammengefasst.

$$\begin{aligned}
 \sum_{Spin} \sum_{Farbe} M_t M_u^\dagger &= \frac{2N^2(N^2 - 1)g_s^4}{(t - m^2)(u - m^2)} \left[-8 \left(\frac{-t - u}{2} \right) \left(m^2 - \frac{m^2 - u}{2} - \frac{m^2 - t}{2} + m^2 - \frac{t + u}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + m^2 \left(-3 \cdot \frac{t + u}{2} + \frac{m^2 - u}{2} + \frac{m^2 - t}{2} - 3m^2 - m^2 + \frac{t + u}{2} \right) + 8m^4 \right] \\
 &= - \frac{16N^2(N^2 - 1)g_s^4}{(t - m^2)(u - m^2)} m^2(2m^2 + t + u)
 \end{aligned}$$

Das gemittelte Produkt der Amplituden von u-Kanal und t-Kanal ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}
 \overline{M_u M_t^\dagger} &= - \frac{16}{4} \frac{N^2(N^2 - 1)}{(N^2 - 1)^2} \frac{g_s^4}{(t - m^2)(u - m^2)} m^2(2m^2 + t + u) \\
 &= - \frac{N^2}{N^2 - 1} \frac{4g_s^4}{(t - m^2)(u - m^2)} m^2(2m^2 + t + u)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

5. Numerische Auswertung

Für die Auswertung wurden zwei verschiedene phänomenologische MSSM-Szenarien ausgewählt. Die Einstellungen der Parameter des Szenarios I sind dabei von einer Arbeit inspiriert, die für diesen Bereich an Parametern eine hohe Relevanz der Gluino-Annihilation in Gluonen vorhersagt [16]. In der folgenden Tabelle sind die für die numerische Auswertung

relevanten Parameter dieser zwei Szenarien aufgelistet. Alle dimensionsbehafteten Größen sind dabei in GeV angegeben.

	M_1	M_2	M_3	$M_{\tilde{q}_L}$	$M_{\tilde{t}_R}$	$M_{\tilde{b}_R}$	A_t	A_b
Szenario I	1430,0	2093,5	1267,8	2535.04	1620	3303.77	2755.29	2320.9
Szenario II	1005,54	1088,51	864,6	3401,05	2908,72	3661,15	-2795,76	2160,9

	μ	m_{A^0}	$\tan\beta$	Q_{SUSY}
Szenario I	-3952,55	3624,81	15,5	1784,638
Szenario II	2290,38	3781,1	45,27	3146,951

Das Programm *SPheno* ([15],[14]) berechnet aus diesen Parametern die Massen der supersymmetrischen Teilchen:

	$m_{\tilde{\chi}_1^0}$	$m_{\tilde{\chi}_2^0}$	$m_{\tilde{\chi}_1^\pm}$	$m_{\tilde{t}_1}$	$m_{\tilde{b}_1}$	$m_{\tilde{g}}$	m_{h^0}	m_{H^0}	$\Omega_{\tilde{\chi}_1^0} h^2$
Szenario I	1432,1	2153,6	2153,5	1647,8	2554,7	1500,3	125,57	3624,62	0,1200
Szenario II	997,0	1133,7	1133,8	2907,6	3404,2	1073,7	124,07	3781,08	0,1200

Dabei fällt auf, dass in beiden Szenarien die Differenz zwischen der Masse des leichtesten Neutralinos $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ und der Masse des Gluinos $m_{\tilde{g}}$ vergleichsweise klein ist. Wie schon in Kapitel 3.4 erläutert, wächst der Einfluss der Annihilation anderer supersymmetrischer Teilchen auf die Reliktdichte des LSP je kleiner ihre Massendifferenz ist. Im ersten Szenario ist auch die Masse des skalaren Top-Quarks $m_{\tilde{t}_1}$ nur geringfügig höher als die des LSP. Der Effekt dieser Tatsache wird sich in der weiteren Auswertung noch bemerkbar machen.

Die resultierenden Reliktdichten $\Omega_{\tilde{\chi}_1^0} h^2$ in der letzten Spalte der obigen Tabelle liefert das Programm *micrOMEGAs* [4]. Dieses ermittelt bei gegebenem Szenario zunächst wie stark welche Prozesse zur Reliktdichte beitragen. In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Prozesse mit Beiträgen $> 1\%$ für die beiden Szenarien angegeben:

Beitragende Prozesse	Szenario I	Szenario II
$\tilde{g} \tilde{g} \rightarrow g g$	65,2%	59,7%
$\tilde{g} \tilde{g} \rightarrow c \bar{c}$	7,3%	5,7%
$\tilde{g} \tilde{g} \rightarrow u \bar{u}$	7,3%	5,7%
$\tilde{g} \tilde{g} \rightarrow d \bar{d}$	6,2%	6,5%
$\tilde{g} \tilde{g} \rightarrow s \bar{s}$	6,2%	6,5%
$\tilde{g} \tilde{g} \rightarrow b \bar{b}$	4,4%	8,2%
$\tilde{g} \tilde{g} \rightarrow t \bar{t}$	1,7%	7,5%

Die Gluino-Annihilation in Gluonen liefert also in beiden Fällen den größten Beitrag zur Reliktdichte. Doch auch die Gluino-Annihilationen in ein Quark-Antiquark-Paar desselben Flavours sind zur Berechnung relevant.

An dieser Stelle wird nun das Programm *CalcHEP* [1] aufgerufen, welches für jeden benötigten Prozess den Wirkungsquerschnitt berechnet. Aus diesen Wirkungsquerschnitten und Gewichtungen der Prozesse bestimmt *micrOMEGAs* letztlich die Reliktdichte. Dabei sind die Parameter der beiden Szenarien so gewählt, dass die resultierenden Reliktdichten des LSP mit $\Omega_{\tilde{\chi}_1^0} h^2 = 0,1200$ genau dem aktuellsten Messergebnis der kosmischen Hintergrundstrahlung der Planck-Kollaboration [3] entsprechen (siehe Kapitel 3.1).

Um das im vorherigen Kapitel berechnete Ergebnis der quadrierten Streuamplitude auszuwerten, wird $|M|^2$ in dem Programm *DM@NLO* [2] implementiert, welches daraus zunächst den differentiellen und durch anschließende Integration den totalen Wirkungsquerschnitt berechnet. Zum Vergleich wurde mittels *CalcHEP* auch der Wirkungsquerschnitt der Gluino-Annihilation in Gluonen ausgegeben. Unabhängig von dem Impuls der einfallenden Teilchen weichen die Wirkungsquerschnitte von *CalcHEP* um etwa 1,6 % von den mit *DM@NLO* berechneten Wirkungsquerschnitten ab. Dieser Unterschied ist durch eine unterschiedlich präzise Berechnung der laufenden Kopplung der starken Kopplungskonstante zurück zu führen.

5.1. Wirkungsquerschnitte

In den Abbildungen 6 und 7 ist das Produkt aus Wirkungsquerschnitt und Geschwindigkeit der Gluinos gegen den Impuls der Gluinos halblogarithmisch aufgetragen. Neben dem gesamten Wirkungsquerschnitt sind auch die Beiträge der einzelnen Kanäle und Interferenzen dargestellt. Da die Beiträge des s-Kanal-Quadrats und der Geister-Korrektur negative Vorzeichen besitzen, sind deren Beträge dargestellt.

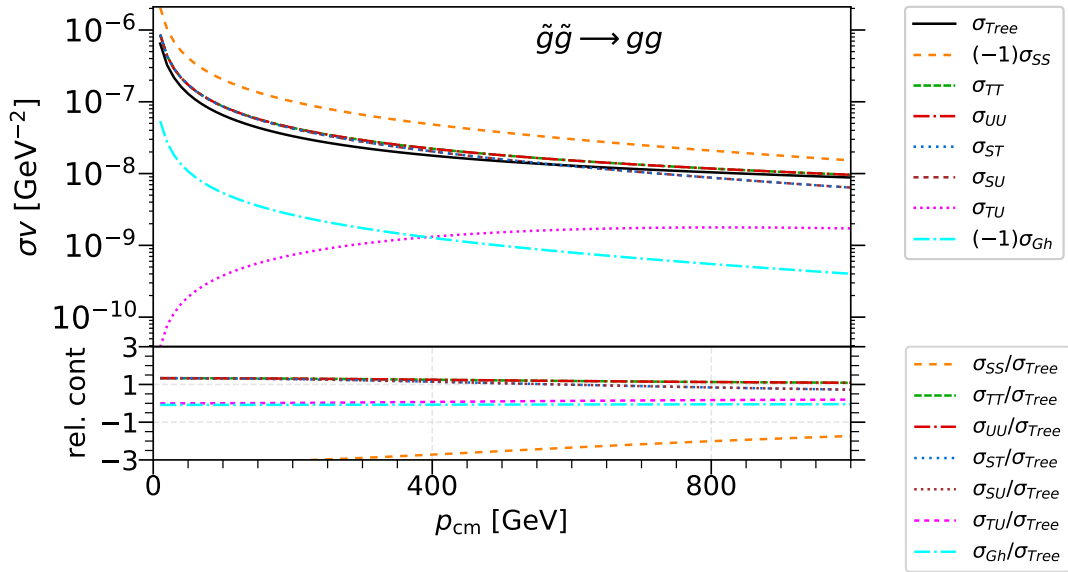


Abbildung 6: Produkt aus Wirkungsquerschnitt und Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Impuls für Szenario 1

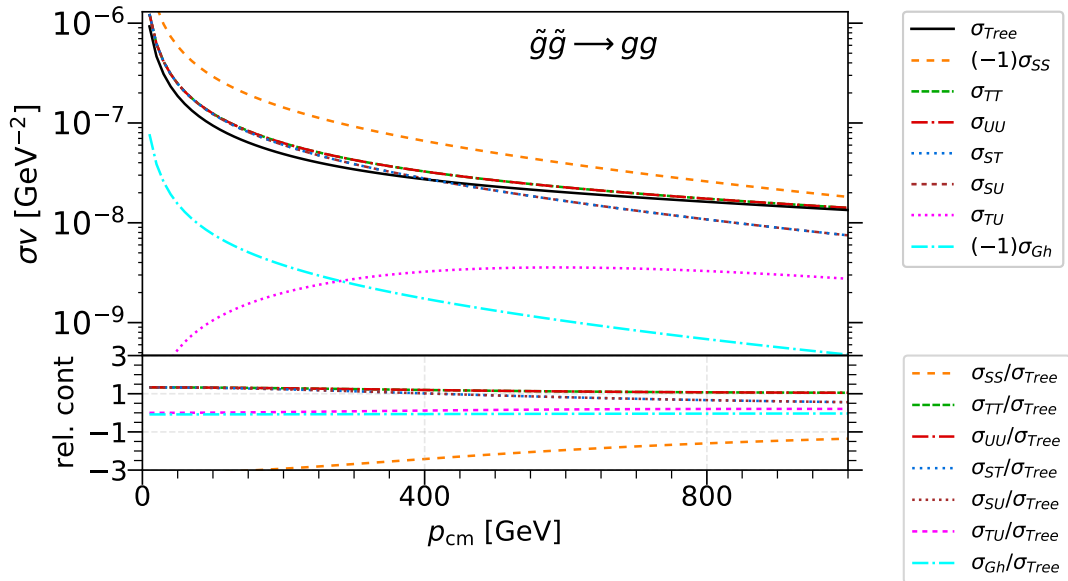


Abbildung 7: Produkt aus Wirkungsquerschnitt und Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Impuls für Szenario 2

Die Beiträge zum gesamten Wirkungsquerschnitt verhalten sich in beiden Szenarien recht ähnlich. Das s-Kanal-Quadrat liefert den (betraglich) größten Beitrag, gefolgt von den t- und u-Kanal-Quadraten und den st- und su- Interferenzen, die jeweils den gleichen Beitrag liefern. Die Geister-Korrektur liegt in der Größenordnung weit unter den anderen Teilprozessen, genauso wie auch die tu-Interferenz. Letztere verschwindet für kleine Impulse,

im Gegensatz zu allen anderen Beiträgen, welche mit steigendem Impuls immer weiter abfallen.

Unterhalb dieser Plots sind die Wirkungsquerschnitte der einzelnen Prozesse jeweils im Verhältnis zum gesamten Wirkungsquerschnitt aufgetragen.

5.2. Beiträge anderer Prozesse zur Reliktdichte

Je nach Einstellung der MSSM-Parameter tragen verschiedene Prozesse unterschiedlich stark zur Reliktdichte des LSP bei. In den Abbildungen 8 bis 11 werden jeweils die Neutralinomasse (M_1) und die Masse des skalaren rechtshändigen Top-Quarks (M_{tR}) variiert. Nur bestimmte Kombinationen dieser Massen-Parameter stimmen mit der Planck-Messung der heutigen Mikrowellenhintergrundstrahlung überein. Diese sind in den Abbildungen durch die orangefarbene Linie gekennzeichnet. Der rote Punkt auf dieser Linie markiert die in Szenario I gewählten Parameter. In den grau gefärbten Bereichen liegt die Gluinomasse oder die Masse der skalaren Top-Quarks unterhalb der Masse des leichtesten Neutralinos. Damit wäre Letzteres nicht mehr das LSP der MSSM, also kein Kandidat für dunkle Materie mehr. Diese Bereiche sind daher für die Auswertung irrelevant. Die oben angesprochenen geringen Massendifferenzen dieser Teilchen in Szenario I werden in den Graphiken also durch den geringen Abstand der orangefarbenen Linie von den grauen Bereichen sichtbar. Die Intensität der grünen Bereiche gibt die Höhe des Beitrags des betrachteten Prozesses an.

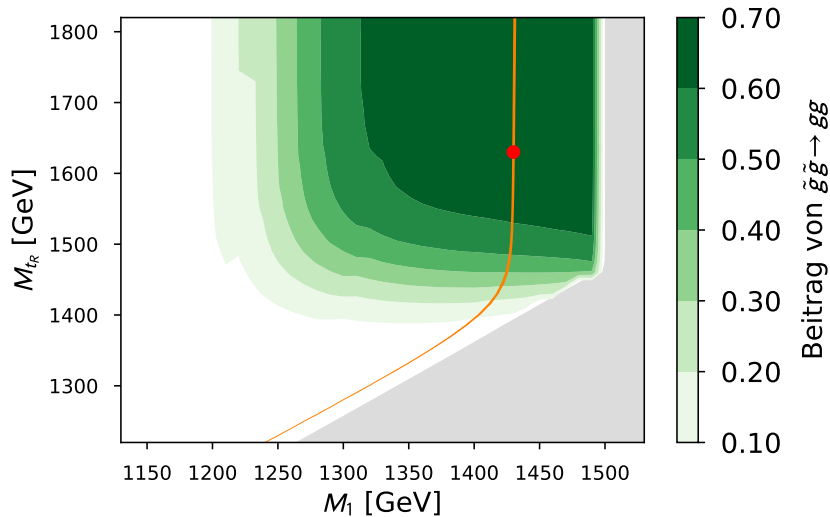


Abbildung 8: Beiträge des $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow gg$ Prozesses zur Reliktdichte des LSP

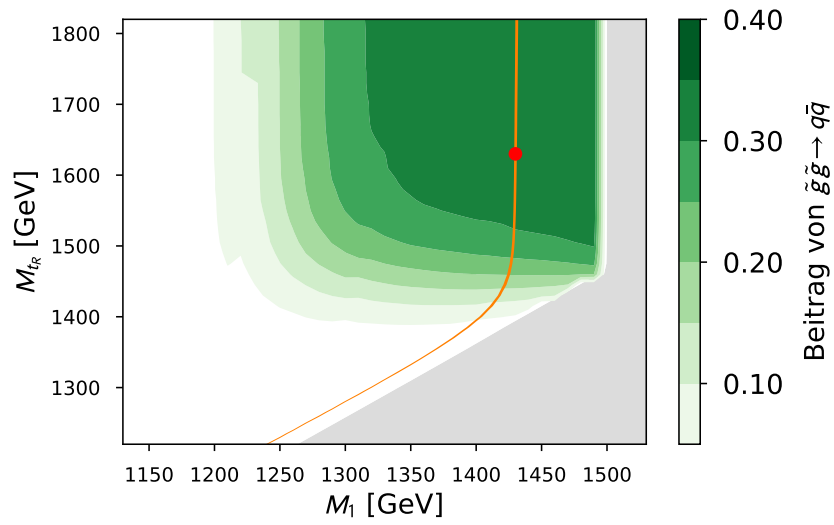


Abbildung 9: Beiträge des $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow q\bar{q}$ Prozesses zur Reliktdichte des LSP

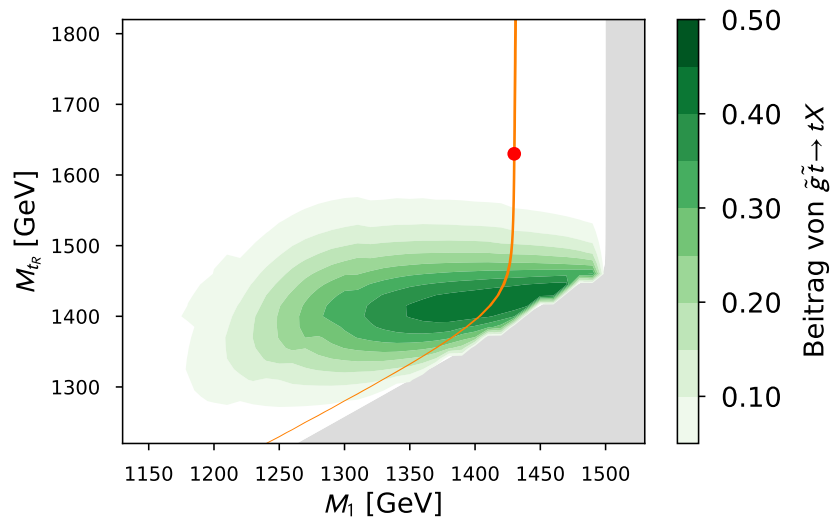


Abbildung 10: Beiträge des $\tilde{g}\tilde{t} \rightarrow tX$ Prozesses zur Reliktdichte des LSP;
X steht hierbei für ein beliebiges Teilchen, welches die Erhaltungssätze für diesen Prozess erfüllt

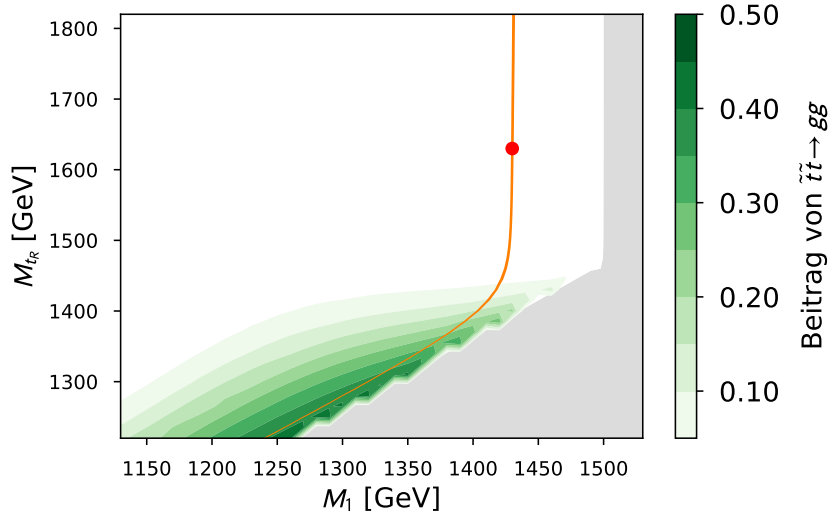


Abbildung 11: Beiträge des $\tilde{t}\tilde{t} \rightarrow gg$ Prozesses zur Reliktdichte des LSP

Wie schon der Tabelle oben zu entnehmen ist, tragen für Szenario I also hauptsächlich die Gluino-Annihilation in Gluonen (Abb. 8) und in Quark-Antiquark-Paare (Abb. 9) zur Reliktdichte bei. Für geringere Massen des skalaren Top-Quarks als in diesem Szenario angenommen, nimmt die Relevanz der Annihilation der skalaren Top-Quarks in Gluonen (Abb. 11) und anderer Prozesse (Abb. 10) deutlich zu.

6. Schlussfolgerungen

Abschließend lässt sich sagen, dass es gelungen ist, das Betragsquadrat der Streuamplitude analytisch zu berechnen und mit diesem Ergebnis den Wirkungsquerschnitt der Gluino-Annihilation in Gluonen zu bestimmen. Durch diese Vorgehensweise können die Beiträge der einzelnen Kanäle und Interferenzen dieses Prozesses separat untersucht werden. Dies ist beispielsweise mit *CalcHEP* nicht möglich.

Die numerische Analyse zeigt Szenarios im MSSM auf, für die der betrachtete Prozess eine erhebliche Rolle bei der Berechnung der Reliktdichte des LSP spielt. Außerdem wurde auf andere Prozesse hingewiesen (wie beispielsweise die Gluino-Annihilation in Quark-Antiquark-Paare), die bei geringfügigen Abweichungen der Gluino-Masse oder der Masse des skalaren rechtshändigen Top-Quarks deutlich an Relevanz gewinnen.

A. Dirac-Algebra

A.1. γ -Matrizen

$$\gamma_\mu p^\mu = \not{p} \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = N \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha = (2 - N) \gamma^\mu \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\alpha = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\alpha = -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \quad (\text{A.5})$$

A.2. Vollständigkeitsrelationen

$$\sum_{\text{Spins}} u(p) \bar{u}(p) = \not{p} + m \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{\text{Spins}} v(p) \bar{v}(p) = \not{p} - m \quad (\text{A.7})$$

$$\sum_{\lambda=1}^4 \epsilon_{(\lambda)}^\mu(k) \cdot \epsilon_{(\lambda)}^{*\nu}(k) = -g^{\mu\nu} \quad (\text{A.8})$$

A.3. Spurtheoreme

$$\text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu] = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda] = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Sp}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] = 4(g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) \quad (\text{A.12})$$

A.4. Relationen in der SU(3)

$$\sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = N \quad (\text{A.13})$$

$$\sum_{a=1}^8 \delta^{aa} = N^2 - 1 \quad (\text{A.14})$$

$$\sum_{a,b=1}^8 f_{eab} \cdot f_{gab} = N \delta_{eg} \quad (\text{A.15})$$

$$f^{abc} = -2i \text{Sp}(T^a [T^b, T^c]) \quad (\text{A.16})$$

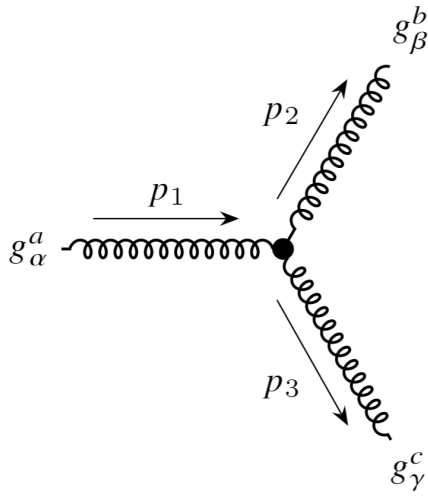
$$\sum_a T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$\text{Sp}[T^a T^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (\text{A.18})$$

B. Feynman-Regeln

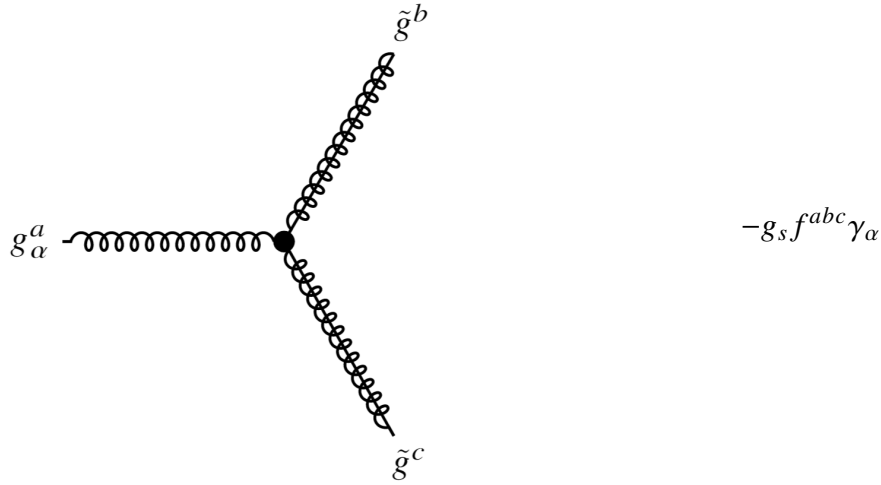
B.1. Vertices

Dreier-Gluon-Kopplung

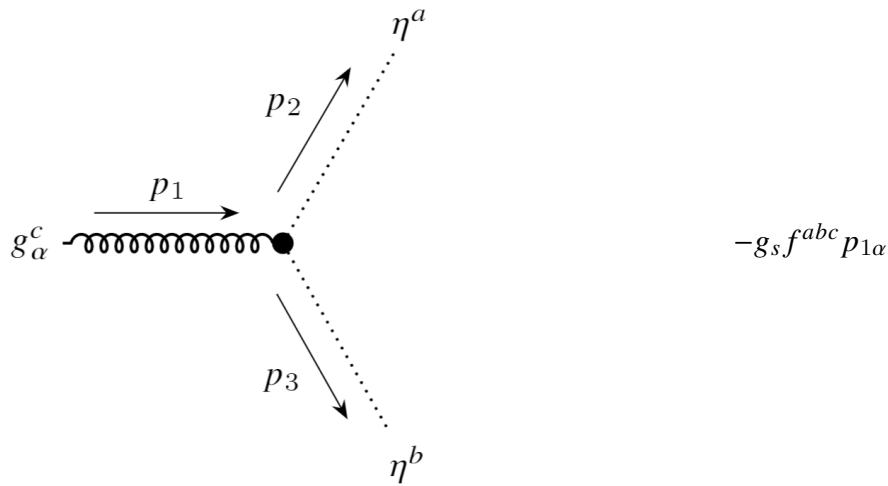


$$-g_s f^{abc} [g_{\alpha\beta} (p_1 + p_2)_\gamma + g_{\beta\gamma} (p_3 - p_2)_\alpha - g_{\gamma\alpha} (p_1 + p_3)_\beta]$$

Gluon-Gluino-Gluino-Kopplung

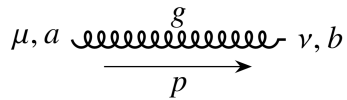


Gluon-FPGeist-FPGeist-Kopplung



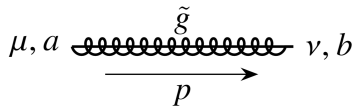
B.2. Propagatoren

Gluon-Propagator



$$-\frac{ig^{\mu\nu} \delta_{ab}}{p^2}$$

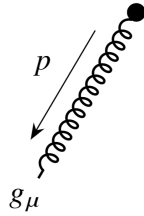
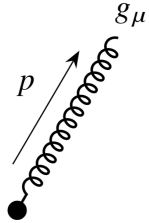
Gluino-Propagator



$$\frac{i(\not{p}+m)^{\mu\nu} \delta_{ab}}{p^2-m^2}$$

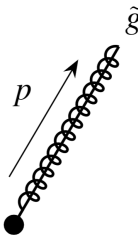
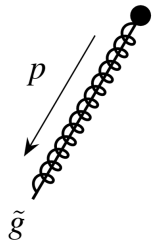
B.3. externe Linien

Gluon



einlaufendes Gluon: $\varepsilon_\mu(p)$
 auslaufendes Gluon: $\varepsilon_\mu^*(p)$

Gluino



einlaufendes Gluino: $u(p)$
 auslaufendes Gluino: $\bar{u}(p)$

Da Gluinos Majorana-Teilchen sind, entspricht hier $u = \bar{v}$ und $v = \bar{u}$. Der Übersichtlichkeit halber wird in den Rechnungen trotzdem die Schreibweise der Antiteilchen genutzt, um die Vollständigkeitsrelationen darin zu erkennen.

Literatur

- [1] URL: <https://theory.sinp.msu.ru/~pukhov/calchep.html>.
- [2] URL: <https://dmnlo.hepforge.org>.
- [3] N. Aghanim u. a. „Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters“. In: (Juli 2018). arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO].
- [4] G. Belanger u. a. „Indirect search for dark matter with micrOMEGAs2.4“. In: *Comput. Phys. Commun.* 182 (2011), S. 842–856. DOI: 10.1016/j.cpc.2010.11.033. arXiv: 1004.1092 [hep-ph].
- [5] Paolo Gondolo und Joakim Edsjo. „Neutralino relic density including coannihilations“. In: *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* 70 (1999). Hrsg. von A. Bottino, Alessandra Di Credico und Piero Monacelli, S. 120–122. DOI: 10.1016/S0920-5632(98)00401-0. arXiv: hep-ph/9711461.
- [6] F. Halzen und Alan D. Martin. *QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS*. Jan. 1984. ISBN: 978-0-471-88741-6.
- [7] G. Jungman, M. Kamionkowski und K. Griest. „Supersymmetric dark matter“. In: *Physics Report* 267 (1996), S. 195–373.
- [8] M. Kamionkowski u. a. „CBR Anisotropy in an Open Inflation, CDM Cosmogony“. In: *Astrophysical Journal* 434 (1994), S. L1–L4.
- [9] E. W. Kolb und M. S. Turner. „The Early Universe“. In: *Frontiers of Physics* 69 (1990), S. 1–547.
- [10] K. Kovařík. „Hitchhikers Guide to Renormalization“. In: (2018).
- [11] Sabine Kraml. „Stop and sbottom phenomenology in the MSSM“. Other thesis. März 1999. arXiv: hep-ph/9903257.
- [12] M. L. Mangano. *Introduction to QCD*.
- [13] S. P. Martin. *A Supersymmetry Primer*. 1997. URL: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356>.
- [14] W. Porod und F. Staub. „SPHeno 3.1: Extensions including flavour, CP-phases and models beyond the MSSM“. In: *Comput. Phys. Commun.* 183 (2012), S. 2458–2469. DOI: 10.1016/j.cpc.2012.05.021. arXiv: 1104.1573 [hep-ph].
- [15] Werner Porod. „SPHeno, a program for calculating supersymmetric spectra, SUSY particle decays and SUSY particle production at e+ e- colliders“. In: *Comput. Phys. Commun.* 153 (2003), S. 275–315. DOI: 10.1016/S0010-4655(03)00222-4. arXiv: hep-ph/0301101.

- [16] S. Schiemann u. a. „Squark-pair annihilation into quarks at next-to-leading order“. In: *Phys. Rev. D* 99.9 (2019), S. 095015. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.095015. arXiv: 1903.10998 [hep-ph].
- [17] S. D. M. White, C. S. Frenk und M. Davis. „Clustering in a neutrino-dominated universe“. In: *Astrophysical Journal* 274 (1983), S. L1–L5.
- [18] G. Zwicky. „Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln“. In: *Helvetica Physica Acta* 6 (1933), S. 110–127.

Plagiatserklärung der / des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über Gluino-Annihilation in Gluonen im MSSM selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

3.9.20, A. Poyne
(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

3.9.20, A. Poyne
(Datum, Unterschrift)