



Institut für Theoretische Physik
Arbeitsgruppe Prof. Michael Klasen

BACHELORARBEIT

**Beschreibung der Partonverteilungsfunktionen
mithilfe der DGLAP-Gleichungen**

Anthony Pietz

Münster 24.09.2019

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	4
2. Streuprozesse	6
2.1. Elektron-Myon-Kollision	6
2.2. Elektron-Proton-Kollision	10
2.3. Vergleich beider Wirkungsquerschnitte	12
2.4. Partonmodell	13
2.4.1. Motivation	13
2.4.2. Partonformalismus	14
3. Herleitung der DGLAP-Gleichungen	18
3.1. Splitting-Funktionen	18
3.2. Wahl einer neuen Basis	22
3.3. Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung	23
4. Analytische Arbeit zum Programmcode	24
4.1. Lagrange-Interpolation	24
4.2. Diskretisierung der Integraldarstellung	25
4.3. Lösung der Splitting-Funktionen	26
4.3.1. Konvergierender Teil	26
4.3.2. Divergierender Teil	26
4.4. Runge-Kutta-4-Verfahren	27
4.4.1. Entkoppelte Differentialgleichung	27
4.4.2. Gekoppelte Differentialgleichung	28
4.5. Anfangsbedingungen	30
5. Diskussion	31
6. Schlussbemerkungen	41
A. Anhang	43
A.1. Feynmann-Regeln	43
A.2. Elektron-Myon-Kollision	43
A.3. Aufstellen des differentiellen Wirkungsquerschnittes	44
A.4. Partonmodell	45

1. Einleitung

Seit einigen tausend Jahren beschäftigt sich die Menschheit mit der Frage wie Materie im Innersten ausschaut? Dabei entstanden verschiedene Lösungsansätze. In der griechischen Philosophie vertraten Leukipos und Demokrit die Idee vom „Atomos“; dem kleinsten unteilbaren Bestandteil. Doch hatten Sie keine technischen Realisierungsmöglichkeiten gehabt, mit denen er eine mathematische Beschreibung des kleinsten Bauteils der Materie ausarbeiten konnte. Somit entstanden konträre Ansätze woraus Materie bestehen könnte. Immanuel Kant hat im 18.Jh die Hypothese aufgestellt, dass die Materie unendlich häufig aufgespalten werden könne. Auch ihm fehlten die Realisierungsmöglichkeiten zur Bestätigung seiner Theorie.

Mit heutigen Methoden, den Teilchenbeschleunigern, kann gezeigt werden, dass die Materie aus Elementarteilchen, den kleinsten Objekt im Universums, besteht. Dazu werden in Teilchenbeschleunigern zum Beispiel Elektronen gegen Protonen beschleunigt. Wenn der Impuls des beschleunigten Elektrons groß genug ist, kann er zu einer Aufspaltung des Protons führen. Hieraus kann ermittelt werden, dass die Protonen aus Quarks und Gluonen bestehen, welche durch die starke Wechselwirkung, dessen Austauschteilchen Gluonen sind, zusammengehalten werden. Das Proton besteht wiederum aus Partonen die Elementarteilchen sind. Hier findet die Suche nach den kleinsten Bestandteilen des Universums ein Ende.

In Abb. 1.1 ist skizzenhaft der Aufbau dieser Arbeit dargestellt. Zuerst wird sich mit der Theorie des



Abbildung 1.1.: Hier ist skizzenhaft der Aufbau der Bachelorarbeit zu sehen. Zuerst wird sich der Theorie des Protons gewidmet und mathematisch dargestellt. Aus der Theorie heraus können die DGLAP-Gleichungen hergeleitet werden. Diese Gleichungen können analytisch nicht berechnet werden, sodass hier ein numerischer Ansatz gewählt wird. Die Resultate werden zum Schluss der Arbeit diskutiert.

Protons beschäftigt. Dieses findet sich in dem Kapitel „Streuprozesse“ wieder. Hier wird diskutiert, wie das heutige Partonenbild zustande gekommen ist und wie es mathematisch behandelt werden kann. Alle Informationen, welche ermittelt werden, werden nur aus streutheoretischen Berechnungen heraus geschlossen, sodass hier der differentiellen Wirkungsquerschnitt die fundamentale Größe ist. Von den theoretischen Überlegungen, welche im Kapitel „Streuprozesse“ unternommen wurden, kann auf die DGLAP-Gleichungen geschlossen werden. Sich ein einheitliches Bild des Protons zu

machen, wird sich als problematisch herausstellen, da das Proton je nach Kollisionsenergie des Elektrons eine andere Verteilung der Quarks und Gluonen besitzt. So kann die Kollisionsenergie als Auflösungsskala des Protons betrachtet werden. Je höher der Impulsübertrag auf das Proton ist, desto mehr Partonen können innerhalb des Protons beobachtet werden. Diese verschiedenen Prozesse sind im Kapitel „Herleitung der DGLAP-Gleichungen“¹ beschrieben. Die DGLAP-Gleichungen sind nicht analytisch lösbar, sodass hier ein numerischer Ansatz gewählt wurde. Der numerische Ansatz ist im Kapitel „Analytische Arbeit zum Programmcode“ dargelegt. Die DGLAP-Gleichungen werden im Ortsraum gelöst, mithilfe des Runge-Kutta-4-Algorithmus. So kann bei einer vorgegebenen Energie die jeweilige Verteilung der Quarks und Gluonen im Proton bestimmt werden. Am Ende werden die numerischen Resultate diskutiert. was zum letzten Themengebiet dieser Arbeit führt.

¹Diese Gleichungen wurden unabhängig von den Wissenschaftlern Yuri Dokshitzer, Wladimir Naumowitsch Gribow, Lew Nikolajewitsch Lipatow, Guido Altarelli und Giorgio Parisi entwickelt, nach dessen Anfangsbuchstaben diese Gleichungen benannt wurden.

2. Streuprozesse

Die experimentell zugängliche Größe bei Streuexperimenten ist der Wirkungsquerschnitt. Dieser wird in allen vorliegenden Fällen modelliert. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ($d\sigma$) ist im allgemeinen definiert, als der auslaufenden Teilchenstrom (j_{aus}), welcher durch den einlaufenden Teilchenstrom (j_{ein}) normiert wird, pro Raumwinkel ($d\Omega$). Dieser ist proportional zum Betragsquadrat der Streuamplitude ($|f|^2$).

$$d\sigma = \frac{j_{\text{aus}}}{j_{\text{ein}}} d\Omega \sim |f|^2. \quad (2.1)$$

Die Streuamplitude kann mittels Feynman-Amplituden berechnet werden. Die betrachteten Prozesse laufen alle nach demselben Muster ab. Elektronen werden auf Energien im GeV-Bereich beschleunigt und an anderen Teilchen (hier Myon, Proton oder Parton) gestreut. Die Kollisionspartner streuen und es lässt sich ein Wirkungsquerschnitt ermitteln, indem die Impulse des ein- und auslaufenden Elektrons und des/der auslaufenden Teilchen gemessen werden. Die theoretisch ermittelten Werte können im Folgenden mit experimentellen Daten verglichen werden¹. Da das Elektron mit einer im relativistischen Sinne nicht zu vernachlässigenden hohen Geschwindigkeit auf das Teilchen trifft, wird im Folgenden relativistisch gerechnet. Dazu wird der Formalismus aus der speziellen Relativitätstheorie benutzt. Die Wellengleichung ist durch die Diracgleichung beschrieben und die Impulse erhalten die Form von Vierervektoren². An drei Beispielen wird der Feynmann-Formalismus³ behandelt.

1. *Elektron-Myon-Kollision*
2. *Elektron-Proton-Kollision*
3. *Elektron-Parton-Kollision*

2.1. Elektron-Myon-Kollision

Um uns der Diskussion von Elektron-Proton-Kollision zu nähern betrachten wir zunächst den einfacheren Fall von $e^- \mu^-$ -Streuung⁴ $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ ⁵. In Abb. 2.1 ist das führende Feynmann-Diagramm dieses Prozesses dargestellt. Das Elektron wechselwirkt über ein Photon mit Impuls (q) mit dem Myon. Das einlaufende/auslaufende Elektron besitze einen Impuls (k/k') und das

¹Auf eine experimentelle Bestätigung der Theorie wird innerhalb dieser Arbeit nicht eingegangen.

²Eine Herleitung der Diracgleichung kann in [1] nachgeschlagen werden.

³Mit dem Feynmann-Formalismus ist die Berechnung der Feynman-Diagramme mittels der Regeln in Gleichung (A.1) bis Gleichung (A.3) gemeint.

⁴Die Beschreibung einer Streuung an einem Elementarteilchen wird vor allem im Partonmodell des Protons wieder aufgegriffen.

⁵Der Formalismus für die Elektron-Myon-Kollision wurde aus [1] entnommen.

einlaufende/auslaufende Myon besitze den Impuls (p/p'). Die Konstruktion der Streuamplituden

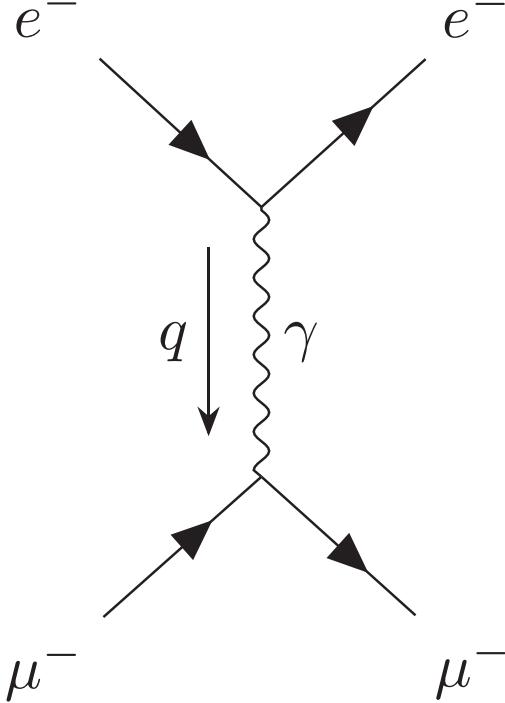


Abbildung 2.1.: Hier ist ein Feynmann-Diagramm aufgetragen. Ein einlaufendes Elektron (e^-) trifft auf ein einlaufendes Myon (μ^-). Dabei wird der Photonenimpuls (q) übertragen. Nach der Kollision werden beide Teilchen gestreut.

von Gleichung (2.2) und Gleichung (2.3) können mit den „Feynmann-Regeln“, siehe im Anhang Gleichung (A.1) bis Gleichung (A.3), beschrieben werden⁶.

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= [\bar{u}_e(k', s)ie\gamma^\mu u_e(k, s')] \frac{-ig_{\mu\bar{\nu}}}{(k - k')^2} [\bar{u}_\mu(p', s'')ie\gamma^{\bar{\nu}} u_\mu(p, s''')] \\ &= ie^2 [\bar{u}_e(k', s)\gamma^\mu u_e(k, s')] \frac{1}{q^2} [\bar{u}_\mu(p', s'')\gamma_\mu u_\mu(p, s''')]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Auf die adjungierte Streuamplitude kann mittels der Relationen Gleichung (A.4) bis Gleichung (A.7) geschlossen werden.

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}^\dagger &= -e^2 [\bar{u}_e(k', s)\gamma^\mu u_e(k, s')]^\dagger \frac{-ig_{\mu\bar{\nu}}}{q^2} [\bar{u}_\mu(p', s'')\gamma^{\bar{\nu}} u_\mu(p, s''')]^\dagger \\ &= -e^2 [\bar{u}_e(k, s')\gamma^\mu u_e(k', s)] \frac{1}{q^2} [\bar{u}_\mu(p, s''')\gamma_\mu u_\mu(p', s'')]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Da jedes Teilchen in jedem möglichen Spinzustand vorkommen kann, muss über alle möglichen Spinzustände summiert werden, sodass auf das Betragsquadrat der Streuamplitude geschlossen

⁶Hierbei steht der Index beim ein- und auslaufenden Fermion für die Teilchensorte. Der Index μ steht für das Myon und der Index e für das Elektron. $s - s'''$ beschreiben die Spinzustände, welche im allgemeinen für jedes Teilchen verschieden sind.

werden kann, welcher proportional zum Wirkungsquerschnitt ist.

$$\sum_{s,s',s'',s'''} \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger = \sum_{s,s',s'',s'''} \frac{e^4}{q^4} [\bar{u}_e(k', s)\gamma^\mu u_e(k, s')][\bar{u}_\mu(p', s'')\gamma^\mu u_\mu(p, s''')] \\ [\bar{u}_e(k, s')\gamma^\mu u_e(k', s)][\bar{u}_\mu(p, s'')\gamma^\mu u_\mu(p', s'')]. \quad (2.4)$$

Da die Terme für die ein- und auslaufenden Fermionen durch Vektoren dargestellt werden und die Propagatoren für die Quantenelektrodynamik (QED) durch Tensoren dargestellt werden, kann mittels Relationen aus der linearen Algebra Gleichung (2.4) zu Gleichung (2.5) umgeschrieben werden. Dazu werden Gleichung (A.8) bis Gleichung (A.9) benötigt.

$$\sum_{s,s',s'',s'''} \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger = \frac{e^4}{q^4} \text{Tr}((\gamma_\mu k'^\mu + m_e)\gamma^\mu(\gamma_\mu k^\mu + m_e)\gamma^\nu) \quad (2.5) \\ \text{Tr}((\gamma_\mu p'^\mu + m_\mu)\gamma^\mu(\gamma_\mu p^\mu + m_\mu)\gamma^\nu).$$

Aus Gleichung (2.5) können die Leptonentensoren von Myon und Elektron aufgestellt werden.

$$\mathcal{L}_e^{\mu\nu} = 4(k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k' \cdot k - m_e^2)g^{\mu\nu}), \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}^{\text{myon}} = 4(p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - (p' \cdot p - m_\mu^2)g_{\mu\nu}). \quad (2.7)$$

Dabei kann erkannt werden, dass sich die Streuamplitude aus beiden Leptonentensoren wie in Gleichung (2.8) zusammensetzt. Setzt man Gleichung (2.6) und Gleichung (2.7) in Gleichung (2.8) ein, erhält man:

$$\sum_{s,s',s'',s'''} \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger = \frac{e^4}{q^4} \mathcal{L}_e^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mu\nu}^{\text{Myon}} = \quad (2.8)$$

$$\frac{16e^4}{q^4} (k'^\mu k^\nu p'_\mu p_\nu + k'^\mu k^\nu p'_\nu p_\mu + k'^\nu k^\mu p'_\mu p_\nu + k'^\nu k^\mu p'_\nu p_\mu) - \quad (2.9)$$

$$k'^\mu k^\nu (p' \cdot p - m_\mu^2) g_{\mu\nu} - k'^\nu k^\mu (p' \cdot p - m_\mu^2) g_{\mu\nu} -$$

$$p'_\mu p_\nu (k' \cdot k - m_e^2) g^{\mu\nu} - p'_\nu p_\mu (k' \cdot k - m_e^2) g^{\mu\nu} +$$

$$4(k' \cdot k - m_e^2)(p' \cdot p - m_\mu^2).$$

Man sieht, dass die Streuamplitude durch die Leptonentensoren ausgedrückt wird⁷. Durch Multiplikation beider Tensoren kann die Streuamplitude beschrieben werden. Mit Gleichung (A.10) und Gleichung (A.11) können diese Terme vereinfacht werden:

$$\sum_{s,s',s'',s'''} \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger = \quad (2.10) \\ \frac{8e^4}{q^4} ((k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') - k' \cdot k m_\mu^2 - p' \cdot p m_e^2 + 2m_e^2 m_\mu^2).$$

⁷An dieser Stelle kann ein Vergleich mit der Berechnung des Wirkungsquerschnittes des Protons gezogen werden. An dieser Stelle kann der Leptonentensor des Myons durch den Hardronentensor des Protons ausgetauscht werden. So erkennt man direkt die Analogie zwischen den beiden Diagrammen, siehe Abb. 2.2

Die Elektronenmassen sind im Verhältnis zu den Myonmassen und den gegebenen Impulsen klein, somit können Terme in denen die Elektronenmasse auftritt vernachlässigt werden. Die Gleichung vereinfacht sich mithilfe von Gleichung (A.15) zu:

$$|M|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left(-\frac{1}{2} q^2 (k \cdot p - k' \cdot p) + 2(k' \cdot p)(k \cdot p) + \frac{1}{2} m_\mu^2 q^2 \right). \quad (2.11)$$

Um einen einfacheren Ausdruck für den differenziellen Wirkungsquerschnitt zu erhalten, betrachten wir das Ruhesystem des Protons. Es wird Gleichung (A.17) verwendet:

$$\begin{aligned} |M|^2 &= \\ \frac{8e^4}{q^4} \left(-\frac{1}{2} q^2 m_\mu (E - E') + 2m_\mu^2 (EE') + \frac{1}{2} m_\mu^2 q^2 \right) &= \\ \frac{8e^4}{q^4} 2m_\mu^2 EE' \left(1 - \frac{q^2 m_\mu (E - E')}{4m_\mu^2 EE'} + \frac{q^2}{4EE'} \right) &= \\ \frac{8e^4}{q^4} 2m_\mu^2 EE' (\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m_\mu^2} \sin^2(\theta/2)). & \end{aligned} \quad (2.12)$$

Daraus ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt, indem eine Proportionalitätskonstante modelliert wird. Die konzeptionelle Vorgehensweise den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu modellieren, findet sich in Gleichung (A.18).

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4} (\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m_\mu^2} \sin^2(\theta/2)) \delta(\nu + \frac{q^2}{2m_\mu}) \quad (2.14)$$

mit

$$\alpha = \frac{e^4}{16\pi^2}.$$

Somit ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt im Ruhesystem. Diese Formel kann zu einer, innerhalb der Delta-Funktion, dimensionslosen Formel umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE' d\Omega} &= \\ \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4} \left(\frac{1}{\nu} \cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m_\mu^2 \nu} \sin^2(\theta/2) \right) \delta \left(1 + \frac{q^2}{2m_\mu \nu} \right) &= \\ \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4 \nu} (\cos^2(\theta/2) - x \sin^2(\theta/2)) \delta(1 + x) & \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit

$$\begin{aligned} Q^2 &= -q^2, \\ \frac{q^2}{2m_\mu \nu} &= x. \end{aligned}$$

Die Form wird im Partonmodell wieder auftreten, wobei dem x eine besondere Bedeutung zu kommt. Wir wollen x im Folgenden Bjorken- x nennen⁸.

2.2. Elektron-Proton-Kollision

In Abb. 2.2 ist das Feynmann-Diagramm einer Elektron-Proton-Kollision dargestellt⁹. Im Ruhe-system des Protons trifft ein beschleunigtes Elektron mit Impuls k in den Wechselwirkungsbereich des Protons ein. Da das Elektron negativ und das Proton positiv geladen ist, ist das Austauschteilchen, welches zwischen den Teilchen wechselwirkt, ein Photon. Das Photon besitzt einen Impuls $q = k - k'$ und das auslaufende Elektron besitzt einen Impuls k' . Je nachdem wie viel Energie auf das Photon übertragen wird, kommt es entweder zur elastischen oder zur inelastischen Streuung. Da hier der Anspruch besteht, das Innerste eines Protons zu beschreiben, wird der Fall der inelastischen Streuung betrachtet. Hierbei wird das Proton, welches den Impuls p hat, in mehrere Partonen aufgebrochen. Wie bereits im obigen Prozess beschrieben, kann der differentielle Wirkungsquerschnitt

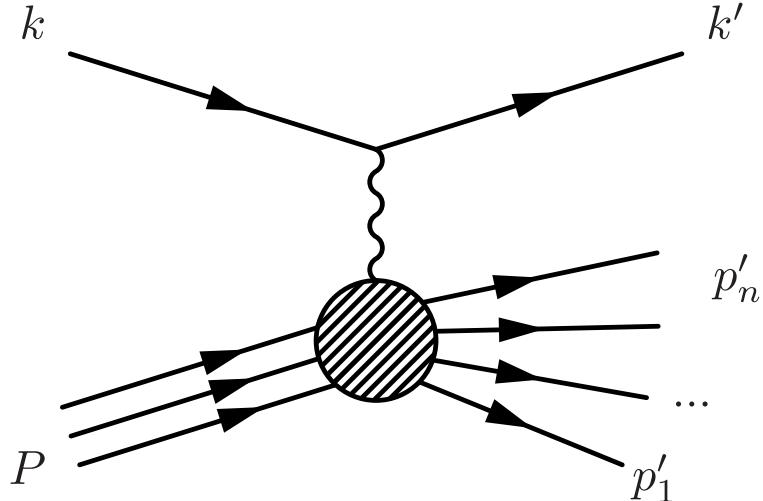


Abbildung 2.2.: Hier ist ein Feynmann-Diagramm aufgetragen. In diesem Fall trifft ein Elektron auf ein Proton. Diese wechselwirken über ein virtuelles Photon. Nach dem Impulsübertrag, spaltet sich das Proton in mehrere Partonen auf [2].

über die Kontraktion des Leptonentensors für das Elektron und des Hardronentensors für das Proton, mittels einer Proportionalitätskonstanten und der Amplitude beschrieben werden. Die Relation für den Wirkungsquerschnitt kann im Laborsystem durch folgende Gleichung beschrieben werden.

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \mathcal{L}_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} \mathcal{W}_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

In Abb. 2.2 kann dem Elektron ein leptonischer Tensor und dem Proton ein hardronischer Tensor zugewiesen werden. Eine explizite Darstellung des leptonischen Tensors wurde bereits in Gleichung (2.6) hergeleitet. Dieser lässt sich ebenfalls für die Elektron-Proton-Kollision verwenden.

⁸Nähere Diskussionen zu dem Bjorken- x im Kapitel „Das Partonmodell“.

⁹Der Formalismus für die Elektron-Proton-Kollision wurde bis auf einige Ausnahmen, auf die im Text verwiesen wird, aus [1] entnommen.

Weiterhin muss der Leptonenfluss konstant sein, was durch die Kontinuitätsgleichung folgt. Es gilt dabei:

$$q_\mu \mathcal{L}_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} = q_\nu \mathcal{L}_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.17)$$

Somit fehlt nur noch der hadronische Tensor. Dieser wird so allgemein wie möglich angesetzt. Dazu werden alle möglichen symmetrischen und antisymmetrischen Kombinationen des Protonenimpulses p^μ und des Impulsübertrages q^μ zusammengesetzt¹⁰.

$$\mathcal{W}^{\mu\nu} = -\mathcal{W}_1 g^{\mu\nu} + \frac{\mathcal{W}_2}{m_\mu^2} p^\mu p^\nu + \frac{i\mathcal{W}_3}{2m_\mu^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} p_\rho p_\lambda + \frac{\mathcal{W}_4}{m_\mu^2} q^\mu q^\nu + \frac{\mathcal{W}_5}{m_\mu^2} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu). \quad (2.18)$$

Der Term \mathcal{W}_3 ist C-paritätsverletzend und kann deshalb in der Quantenchromodynamik (QCD) nicht vorkommen. Der Hardronenfluss muss ebenfalls erhalten bleiben:

$$q_\mu \mathcal{W}^{\mu\nu} = q_\nu \mathcal{W}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.19)$$

Aufgrund von Gleichung (2.17) und Gleichung (2.19) werden Terme linear abhängig, sodass nur noch zwei Terme linear unabhängig sind. Somit geht Gleichung (2.18), unter Berücksichtigung von Gleichung (2.17) und Gleichung (2.19), in

$$\mathcal{W}^{\mu\nu} = \mathcal{W}_1 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \frac{1}{m_\mu^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right). \quad (2.20)$$

über. Als nächstes setzt man den hardonischen Tensor und den leptonischen Tensor in die Gleichung zur Berechnung der Streuamplitude ein.

$$\begin{aligned} & \sum_{s,s',s'',s'''} \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger = \\ & \frac{e^4}{q^4} \mathcal{L}_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} \mathcal{W}_{\mu\nu} = \\ & \frac{e^4}{q^4} \mathcal{L}_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} \left[\mathcal{W}_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + W_2 \frac{1}{m_\mu^2} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \right] = \\ & \frac{e^4}{q^4} (4\mathcal{W}_1(k' \cdot k - 2m_e^2) + \frac{2\mathcal{W}_2}{m_\mu^2} ((k' \cdot p)(p \cdot k) - (k' \cdot k - m_e^2)p \cdot p)). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Im Ruhesystem des Protons erhält man unter Vernachlässigung der Elektronenmasse:

$$\mathcal{L}_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} \mathcal{W}_{\mu\nu} = 4\mathcal{W}_1(k' \cdot k) + \frac{2\mathcal{W}_2}{m_\mu^2} (2(k' \cdot p)(p \cdot k) - m_\mu^2(k' \cdot k)). \quad (2.22)$$

¹⁰Gleichung (2.18) ist aus [4] entnommen worden

Aufgrund von geometrischen Überlegungen, welche analog zu den Überlegungen von Gleichung (A.17) geschlussfolgert werden können, kann diese Formel in Gleichung (2.23) umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} \mathcal{W}_{\mu\nu} = & (2.23) \\
 & -2\mathcal{W}_1 q^2 + \frac{\mathcal{W}_2}{m_\mu^2} (4(p \cdot k)(k' \cdot p) + m_\mu^2 q^2) = \\
 & -2\mathcal{W}_1 q^2 + \frac{\mathcal{W}_2}{m_\mu^2} (4(p \cdot k)(p \cdot k') - 4m_\mu^2 E E' \sin(\theta/2)^2) = \\
 & 8\mathcal{W}_1 E E' \sin(\theta/2)^2 + 4E E' \mathcal{W}_2 \left(\frac{(p \cdot k)(p \cdot k')}{E E' m_\mu^2} - \sin(\theta/2)^2 \right) = \\
 & 4E E' (2\mathcal{W}_1 \sin(\theta/2)^2 + \mathcal{W}_2 (1 - \sin(\theta/2)^2)) = \\
 & 4E E' (\mathcal{W}_2 \cos(\theta/2)^2 + 2\mathcal{W}_1 \sin(\theta/2)^2).
 \end{aligned}$$

Wird Gleichung (2.23) in Gleichung (2.16) eingesetzt, erhalten wir den differentielle Wirkungsquerschnitt.

$$\begin{aligned}
 & \frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = & (2.24) \\
 & \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \mathcal{L}_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} \mathcal{W}_{\mu\nu} = \\
 & \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin(\theta/2)^4} (\mathcal{W}_2 \cos(\theta/2)^2 + 2\mathcal{W}_1 \sin(\theta/2)^2)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 &= \frac{e^4}{16\pi^2}, \\
 \nu &= \frac{p \cdot q}{m_\mu}.
 \end{aligned}$$

Somit ist der differentielle Wirkungsquerschnitt des Protons berechnet worden.

2.3. Vergleich beider Wirkungsquerschnitte

In den vorangehenden Kapiteln wurde der Wirkungsquerschnitt der Elektron-Myon-Kollision und der Elektron-Proton-Kollision gefunden. Um einen direkten Vergleich zu ermöglichen, werden die Wirkungsquerschnitte im Einzelnen miteinander verglichen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{e\mu \rightarrow e\mu} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E'}{E} \left(\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m^2} \sin^2(\theta/2) \right) \delta(\nu + \frac{q^2}{2m}), \quad (2.25)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{eP \rightarrow ep_i} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E'}{E} (\mathcal{W}_2(\nu, q^2) \cos^2(\theta/2) + 2\mathcal{W}_1(\nu, q^2) \sin^2(\theta/2)). \quad (2.26)$$

An diesen Wirkungsquerschnitten ist zu sehen, dass die Elektron-Myon-Kollision eine Kollision zwischen zwei Elementarteilchen ist, da hier eine Delta-Funktion im differentiellen Wirkungsquer-

schnitt auftaucht. Bei der Elektron-Proton-Kollision hingegen ist keine Delta-Funktion vorhanden, sondern es sind zwei „Amplituden“ zu beobachten: \mathcal{W}_1 und \mathcal{W}_2 . Beide Amplituden sind von zwei Größen abhängig:

1. *Dem Bjorken- x , der den Bruchteil des Impulses, welches ein Parton nach der Kollision erhalten hat, beschreibt.*
2. q^2 , *welches den Impulsübertrag des Elektrons an das Proton beschreibt*

Bei der Auswertung des Wirkungsquerschnittes werden hier mehrere Teilchen abhängig vom jeweiligen Bjorken- x und der Energie des übertragenen Impulses des Elektrons detektiert. Diese beiden freien Parameter werden unabhängig voneinander variiert. An dieser Stelle können zwei weitere Fragen gestellt werden:

1. *Wie sehen die Strukturfaktoren des Protons aus?*
2. *Mit welcher Häufigkeit treten die verschiedenen Partonen, beim jeweiligen Impulsübertrag auf?*

Die erste Frage kann darüber geklärt werden, indem dem Elektron immer mehr Energie beim Stoß zugeführt wird. Bei sehr großen Energiewerten ist zu beobachten, dass sich das Proton wie eine Zusammensetzung aus Punktteilchen verhält. Dies wird mathematisch im Partonmodell erklärt. Die zweite Frage kann mittels der DGLAP-Gleichungen erklärt werden, da diese die Häufigkeitsverteilung der Quarks und Gluonen für verschiedene Kollisionsenergien angibt. Hier treten Einflüsse der Quantenchromodynamik auf, welche im Kapitel „Herleitung der DGLAP-Gleichungen“ erklärt werden.

2.4. Partonmodell

2.4.1. Motivation

Wie bei der Elektron-Proton-Kollision kann der Prozess $eP \rightarrow eX$ als Aufspaltung des Protons P in viele Partonen X beschrieben werden, wobei die Streuung nicht am gesamten Proton betrachtet wird, sondern an den jeweiligen Partonen¹¹. Partonen sind alle Elementarteilchen, aus denen ein Proton aufgebaut ist¹². Somit werden die Strukturterme in obiger Rechnung dieselbe Form bekommen, wie die eines Dirac-Punktteilchens. Wenn dieser Strukturterm wieder durch die Anschauung der Partonen ersetzt wird, wandelt sich Gleichung (2.26) in die Form von Gleichung (2.25) um, mit

$$2m\mathcal{W}_1^{point} = x\delta(1-x), \quad (2.27)$$

$$\nu\mathcal{W}_2^{point} = \delta(1-x). \quad (2.28)$$

Anhand dieser Gleichungen kann beobachtet werden, dass die Strukturfunktionen für ein festes aber beliebiges Bjorken- x unabhängig von Q^2 sind. Das entspricht dem Experiment, vergleiche Abb. 2.4.

¹¹Die theoretische Ausarbeitung orientiert sich an [1].

¹²In führenden Berechnungen werden nur up-, down-, und strange-Quarks betrachtet.

2.4.2. Partonformalismus

Um die Q^2 -Unabhängigkeit zu rechtfertigen, wird der Parton-Formalismus eingeführt. Dieser ist nur bei größeren Energien gerechtfertigt. In Abb. 2.3 ist der Übergang der beiden Modelle dargestellt. Im Kapitel „Elektron-Proton-Kollision“ wurde der Impulsübertrag eines Photons am Proton dargestellt. Dies ist im linken Bild zu erkennen. Wenn die Kollisionsenergie weiter erhöht wird, streut das Photon nicht am Proton, sondern an den Bestandteilen des Protons, an den Partonen. Dies ist im rechten Bild zu erkennen. Somit besitzt jedes Parton einen Bruchteil der Energie des Protons. Die Summe über die Energien aller Partonen müssen dabei die Energie des Protons liefern. Hier stellt ξ das Verhältnis zwischen Partonenenergie und Protonenenergie dar. Im Folgenden sollen dem Proton die Größen $P = \text{Impuls des Protons}$, $M = \text{Masse des Protons}$ zugeordnet werden und dem Parton die Größen $p = \text{Impuls des Partons}$, $m = \text{Masse des Partons}$. Somit lässt sich der Impuls des Partons durch Gleichung (2.29) und Gleichung (2.30) beschreiben.

$$p = \xi P, \quad (2.29)$$

$$m = \xi M. \quad (2.30)$$

Die Beschreibung ist nur unter der Prämisse, dass ein System gewählt werden muss, indem die Masse vernachlässigt werden kann, gültig, da eine variable Masse unphysikalisch ist. Dies ist der Fall, wenn in ein System gewechselt wird, welches die Voraussetzung ($|p| >> m_{\text{Parton}}, m_{\text{Proton}}$) erfüllt, so dass der Impuls des Elektronen viel größer ist, als dessen Masse. Aufgrund der großen kinetischen Energien, welche als Voraussetzung existieren, liegt der Fall vor. Ebenfalls lässt sich das oben beschriebene Bjorken- x auf das einzelne Parton übertragen.

$$z\xi = x = \frac{Q^2}{2p \cdot q}. \quad (2.31)$$

Diese Relationen können in folgendem Bild visualisiert werden.

Zudem können Parton-Verteilungsfunktionen (f_i) definiert werden. Sie erfüllen die Beziehung:

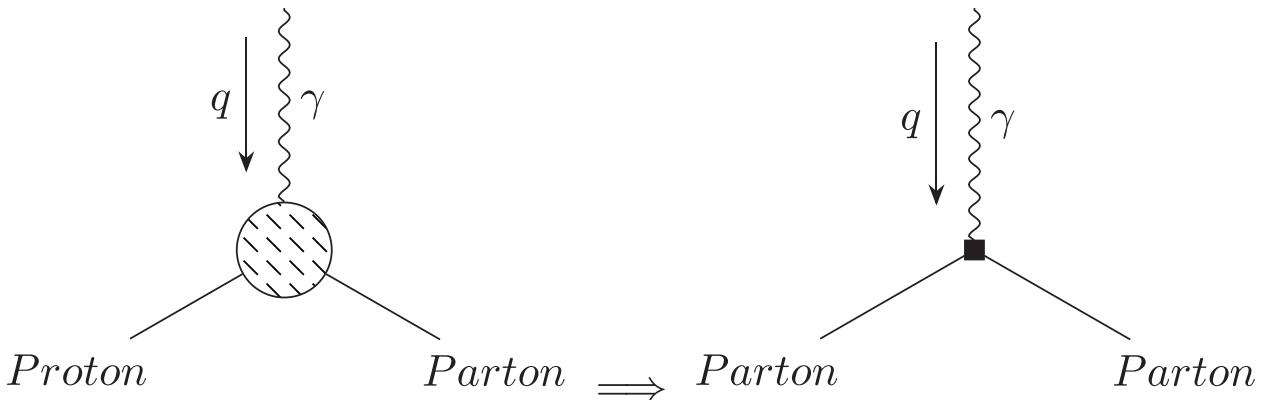


Abbildung 2.3.: Veranschaulichung des Übergangs vom Protonmodell zum einzelnen Parton. Im linken Bild ist die Kollision eines Protons mit dem eines Photons dargestellt. Nach der Kollision spaltet sich das Proton in mehrere Partonen auf. Hier ist im Bild zur Vereinfachung des Sachverhaltes anstatt mehrerer Partonen nur ein Parton eingezeichnet worden. Im rechten Bild wurde das Proton gegen ein Parton ersetzt.

$$f_i(\xi) = \frac{dP_i}{d\xi}. \quad (2.32)$$

Dies beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass das i -te Parton¹³ den Bruchteil ξ des Protonenimpulses P besitzt. Aufgrund der Wahrscheinlichkeitsinterpretation folgt, dass die Summe über alle Erwartungswerte der Parton-Verteilungsfunktionen eins ergeben muss.

$$\sum_i \int \xi f_i(\xi) d\xi = 1. \quad (2.33)$$

Mit diesen Definitionen ist es möglich, die Q^2 -Unabhängigkeit zu zeigen. Hierfür wird der differentielle Wirkungsquerschnitt mithilfe von Gleichung (2.33) aufgestellt¹⁴.

$$\frac{d\sigma(ep \rightarrow eX)}{dE'd\Omega} = \sum_i \int_0^1 d\xi f_i(\xi) \frac{d\sigma(ep_i \rightarrow ep_i)}{dE'd\Omega}. \quad (2.34)$$

Setzt man hier das Ergebnis einer Dirac-Punktteilchen-Streuung ein¹⁵, unter der Berücksichtigung das jedes Parton eine unterschiedliche Ladung (e_i) besitzen kann, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(ep \rightarrow eX)}{dE'd\Omega} &= \\ \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \sum_i e_i^2 \int_0^1 d\xi f_i(\xi) &\left(\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m^2} \sin^2(\theta/2) \right) \delta(\nu + \frac{q^2}{2m}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Mithilfe von Gleichung (A.21) kann der Wirkungsquerschnitt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(ep \rightarrow eX)}{dE'd\Omega} &= \\ \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \sum_i e_i^2 f_i(x) &\left(\frac{2m}{Q^2} x^2 \cos^2(\theta/2) + \frac{1}{m} \sin^2(\theta/2) \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Gleichung (2.24) ergibt sich das folgende Resultat.

$$\mathcal{W}_1^{point} = 2\pi \sum_i e_i^2 f_i(x), \quad (2.37)$$

$$Q^2 \mathcal{W}_2^{point} = 8\pi x^2 \sum_i e_i^2 f_i(x). \quad (2.38)$$

Hier zeigt sich die Unabhängigkeit der Strukturfunktionen von Q^2 für ein festes aber beliebiges x . Nachfolgend eine Illustration: Dazu wird Abb. 2.5 betrachtet. In Abb. 2.5 ist eine skizzenhafte Beschreibung des Protons dargestellt¹⁶. Das Proton spaltet sich in drei Quarks auf, den Valenzquarks. Die Anzahl der Valenzquarks bleibt erhalten, sodass ein Proton immer aus uud-Quarks dargestellt werden kann. Diese Beziehung äußerst sich in Abb. 2.5 durch die drei parallelen Linien, welche mit up-, up- und down-Quark bezeichnet sind. Diese drei Linien bleiben während allen Prozessen

¹³Hier zählt i alle möglichen Partonen, welche mit dem Photon interagieren.

¹⁴Die Herleitung zur Bestimmung des Wirkungsquerschnittes kann in [7] nachgelesen werden.

¹⁵Das Ergebnis ist Analog dem Myon Prozess zu übernehmen

¹⁶Das Photon (die geschlängelte Linie) wird in diesem Bild wieder dargestellt, um den Streuprozess zu visualisieren.

Dieser findet am einzelnen Parton statt, wie es bereits in Abb. 2.3 diskutiert wurde.

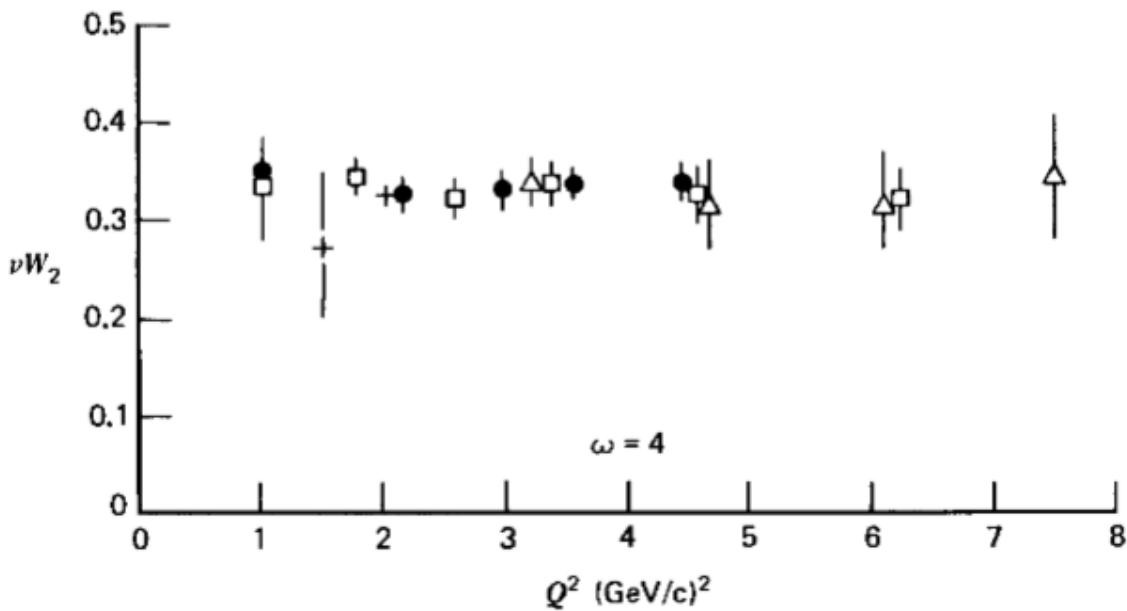


Abbildung 2.4.: Auf der x -Achse ist Q^2 in $(\text{GeV}/c)^2$ aufgetragen. Auf der y -Achse ist νW_2 aufgetragen. Die Messwerte zeigen die Unabhängigkeit von Q^2 , da die Abhängigkeit zum Strukturfaktor konstant ist.[1]

unverändert. Die Valenzquarks können einen Impuls in Form eines Gluons abgeben. Die Gluonen sind die gekringelten Linien in Abb. 2.5. Hier gibt es mehrere Möglichkeiten, wie sich die Gluonen von einem Quark lösen beziehungsweise wieder mit einem Quark verschmelzen können. Ein Quark kann Gluonen aufnehmen oder abgeben. Ebenfalls kann ein Gluon sich in ein Quark-Antiquark-Paar aufspalten oder durch ein Quark aufgenommen werden (Selbstwechselwirkung)¹⁷. Der Fall auf den hier gesondert eingegangen wird, ist das Gluonen sich in Quark-Antiquark-Paare aufzuspalten. Dies kann nur bei genügend hohen Energien der Gluonen geschehen, sodass hier nur Paarbildungen bezüglich der up-, down- und strange-Quarks angenommen werden. Diese nennt man See-Quarks. Im Bild sind die See-Quarks durch zwei Pfeile gekennzeichnet, welche einen Winkel untereinander einschließen. Zur Verdeutlichung wurden hier nur die up- und strange- Flavour aufgezeichnet. Ebenfalls wären down- und anti down- Kombinationen möglich. Im strange-Flavour ist ein weiteres Gluon dargestellt, welches von einem strange-Quark ausgeht. Falls dieses Gluon genug Energie besitzt, kann hier ebenfalls eine Paarbildung stattfinden. Wenn mit Hilfe dieses Bildes eine Verteilung von Quarks im Proton durchgeführt wird, ergibt sich Abb. 2.6. Der Peak der Verteilungsfunktion liegt gerade bei $\frac{1}{3}$ des Bjorken- x , da drei Valenzquarks vorliegen und jedes Quark gleichberechtigt einen Bruchteil des Impulses mit sich führt. Wird häufiger an Seequarks gestreut, ist es verständlich, dass sich die Verteilungsfunktion unterhalb der $\frac{1}{3}$ -Grenze erhöhen wird, da der Bruchteil der Impulse auf mehrere Quarks verteilt werden können. Je höher die Energie der Elektronen ist, desto häufiger wird an See-Quarks gestreut. Dieses Verhalten ist aus der Numerik ersichtlich geworden, welcher über die DGLAP-Gleichungen modelliert wurde.

¹⁷Diese Möglichkeiten werden im Kapitel „Splitting-Funktionen“ diskutiert und Anhand vereinfachter Grafiken erläutert.

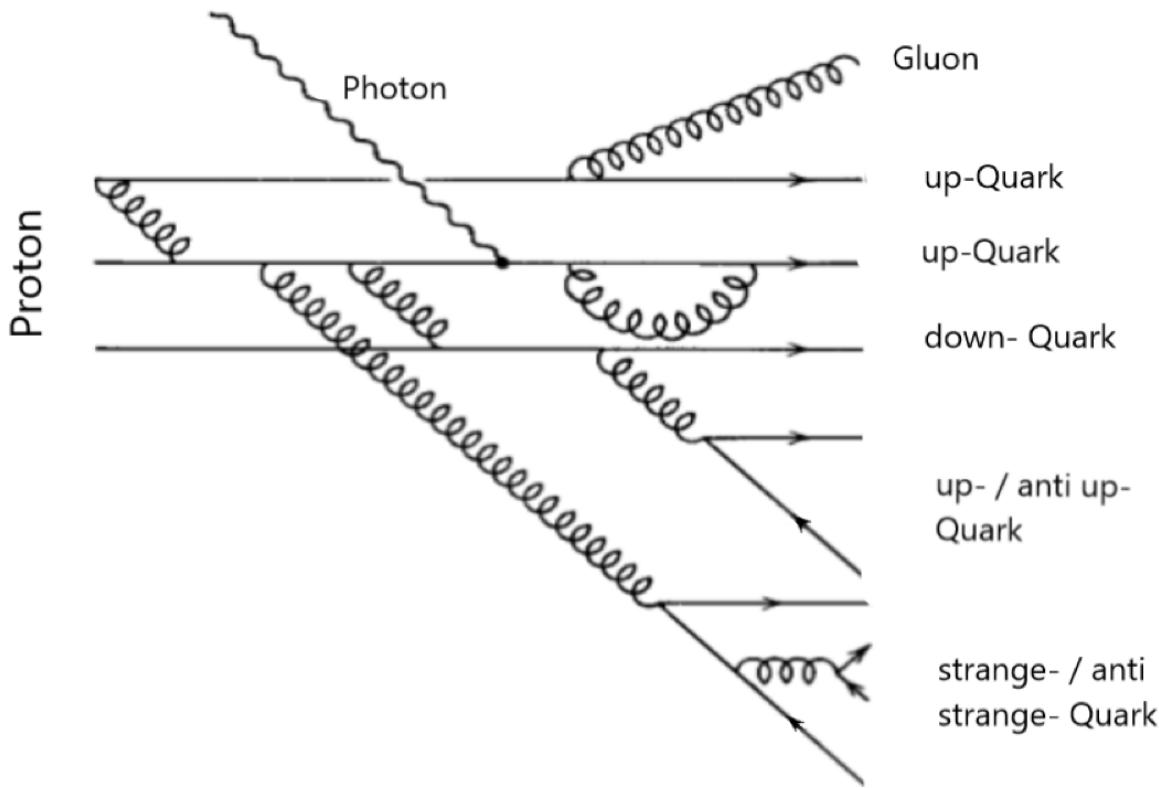


Abbildung 2.5.: Hier ist beispielhaft dargestellt, was sich innerhalb eines Protons abspielen kann. Die geraden Linien stellen dabei die Valenzquarks dar. Die gekringelten Linien stellen die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung dar, die Gluonen. Weiterhin können verschiedene Interaktionen betrachtet werden: Die Aufspaltung eines Gluons in ein Quark-Antiquark-Paar oder die Selbstwechselwirkung eines Quarks und eines Gluons, sowie die Aufnahme und Abgabe von Gluonimpulsen [1].

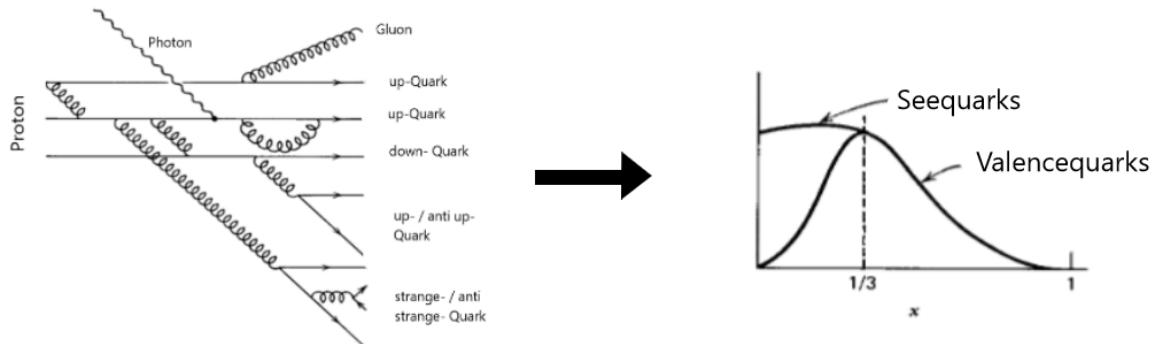


Abbildung 2.6.: Hier ist die Verteilungsfunktion des Protons dargestellt, indem das Partonmodell verwendet wird, welches durch den Formalismus im Kapitel „Partonmodell“ berechnet wurde. Die Verteilungsfunktion ist sehr schematisch dargestellt und stellt eine erste Veranschaulichung der numerischen Resultate dar[1].

3. Herleitung der DGLAP-Gleichungen

In Kapitel 2.4 wurde der differentielle Wirkungsquerschnitt des Protons berechnet. Durch Koeffizientenvergleich, in dem der differentielle Wirkungsquerschnitt der Elektron-Proton-Kollision einbezogen wird, können die Strukturfunktionen berechnet werden. Diese Terme wurden idealisiert dargestellt, da keine Prozesse höherer Ordnung betrachtet wurden. Wenn Wechselwirkungen zwischen den Quarks und den Gluonen zugelassen werden, wie es in Abb. 2.5 veranschaulicht wurde, führen diese Annahmen zu den DGLAP-Gleichungen. Für die Herleitung der DGLAP-Gleichungen, wie Sie als Grundlage für den numerischen Code benutzt wurden, müssen zwei weitere Verfahren verwendet werden. Zuerst müssen die Splitting-Funktionen eingeführt werden¹. Diese Beschreiben die Dynamik innerhalb des Protons. Einige Splitting-Funktionen können durch Symmetrievergleichungen, mittels der C-Parität gleichgesetzt werden, da die C-Parität in der starken Wechselwirkung erhalten bleibt und jede Verletzung dagegen Einschränkungen liefert. Das zweite Verfahren, welches benutzt wird, ist der Übergang in eine neue Basis. Die DGLAP-Gleichungen werden in dieser neuen Basis diagonalisiert. Da eine komplett diagonalisierte Basis durch Experimente nicht ermittelt werden kann, wird eine andere weit verbreitete Wahl einer neuen Basis verwendet, diese wird im Kapitel „Wahl einer neuen Basis“ beschrieben.²

3.1. Splitting-Funktionen

Bei der Berechnung der tiefinelastische Streuung eines Elektrons mit dem Proton wurden als auslaufende Teilchen nach dem Hardronentensor n-Partonen angenommen. Idealisiert konnten diese Partonen als nicht wechselwirkende Teilchen bezüglich der starken Wechselwirkung angenommen werden. Um die nächst höhere Ordnung mit zu berücksichtigen, müssen weitere Korrekturen berücksichtigt werden. Diese Korrekturen können ebenfalls mittels des Feynman-Formalismus berechnet werden. Hier werden die Splitting-Funktionen eingeführt. Bei der nächst höheren Ordnung können mehrere Fälle eintreten.

1. *Ein Quark spaltet sich vor dem Austausch mit dem Photon in ein Gluon und in ein Quark auf. Nach dem tiefinelastischen Stoß mit dem Elektron wird das Gluon von dem Quark wieder aufgenommen.*
2. *Ein Quark wird tiefinelastisch gestreut und danach spaltet sich das Quark in ein Quark und ein Gluon auf.*
3. *Ein Quark spaltet sich in ein Gluon und in ein Quark auf. Nach dem tiefinelastischen Stoß*

¹Die Grundidee der Splitting Funktionen ist bereits in Abb. 2.5 und Abb. 2.6 angesprochen worden

²Das Kapitel „Herleitung der DGLAP-Gleichungen“ hat sich maßgeblich (es sei denn es wurde etwas anderes angegeben) an [2] orientiert.

sind beide Partonen voneinander getrennt.

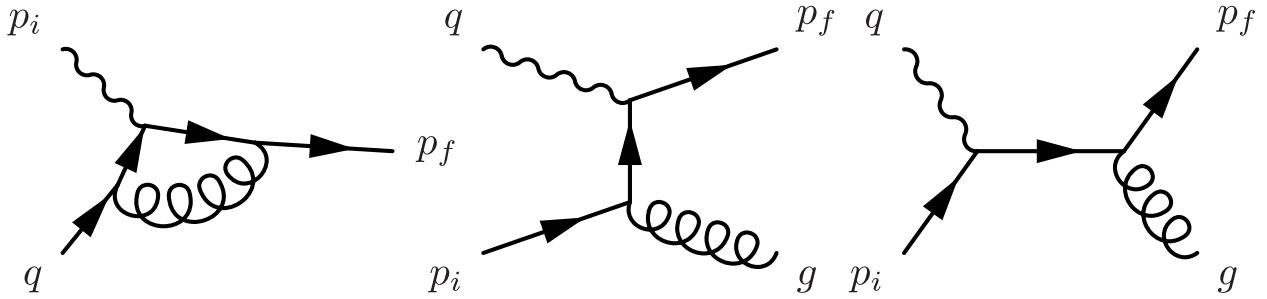


Abbildung 3.1.: Hier sind die drei Prozesse zur näheren Berechnung der Kollision von Elektron und Protonen dargestellt. Die Prozesse sind von links nach rechts chronologisch den oben genannten Zahlen zuzuordnen [7].

Diese drei Prozesse sind in Abb. 3.1 zu sehen, in der die Splitting-Funktionen visualisiert werden. Dies ist die erste Näherung, welche gemacht wurde, um das Verhalten der Protonen unter Energieeinwirkung eines Elektrons genauer beschreiben zu können. Hierbei stellt P_{ab} die Wahrscheinlichkeit dar, dass ein Parton a, mit einem Bruchteil des Impulses ξ , vom Parton b, detektiert wird. Somit beschreibt Gleichung (3.1) die Wahrscheinlichkeit, dass das Quark q_j den Bruchteil des Impulses ξ , vom Quark q_i erhalten hat. Dabei hat das Gluon, welches bei diesem Prozess abgestrahlt wurde, den Impuls $1 - \xi$ erhalten. Durch Symmetrie-Argumente der C-Parität, können mehrere Relationen zwischen verschiedenen Splitting-Funktionen gefunden werden. Die C-Parität sagt aus, dass bei Streuung oder Zerfall sich die ladungsgespiegelten Zustände genauso verhalten, wie die ursprünglichen Zustände. Somit können weitere Relationen angenommen werden³.

$$P_{q_i q_j} = P_{\bar{q}_i \bar{q}_j}, \quad (3.1)$$

$$P_{\bar{q}_i q_j} = P_{q_i \bar{q}_j}, \quad (3.2)$$

$$P_{q_i \bar{q}_j} = P_{\bar{q}_i q_j}, \quad (3.3)$$

$$P_{q_i g} = P_{\bar{q}_i g} = P_{q g}, \quad (3.4)$$

$$P_{g q_i} = P_{g \bar{q}_i} = P_{g q}. \quad (3.5)$$

Dabei stellen die verschiedenen Indizes die Quarkflavour da.

$q[1] = u \hat{=} \text{up-Quark}$,

$q[2] = d \hat{=} \text{down-Quark}$,

$q[3] = s \hat{=} \text{strange-Quark}$,

$q[4] = c \hat{=} \text{charm-Quark}$,

$q[5] = b \hat{=} \text{bottom-Quark}$,

$q[6] = t \hat{=} \text{top-Quark}$

Das i wird als Notation in den Splitting Funktionen weggelassen, da sich die Quarks nicht transformieren lassen und in dem Prozess erhalten bleiben⁴. Im Folgenden werden die schweren Quarks

³Die kompletten Ausführungen können aus [2] entnommen werden.

⁴Hier werden die Splitting-Funktionen in führender Ordnung betrachtet. Die Ordnungen können berechnet werden, indem die Splitting-Funktionen in einen Anteil aufgeteilt werden, welcher die Valenzquarks betrachtet und in

weggelassen, da diese kaum zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Es werden nur drei Flavour betrachtet, die up-, down- und strange-Quarks. Mittels dieser Symmetrien bleiben vier verschiedene Splitting-Funktionen übrig, welche berechnet werden können⁵.

1. *Abstrahlung eines Quark unter Umwandlung eines Gluons,*
2. *Gluonabstrahlung eines Quarks,*
3. *Paarbildung von Quarks aus einem Gluon,*
4. *Aufspaltung eines Gluons in zwei Gluonen.*

Bei den verschiedenen Fällen müssen alle Erhaltungsgrößen der starken Wechselwirkung betrachtet werden⁶.

$$P_{qq}(x) = C_F \left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right], \quad (3.6)$$

$$P_{qg}(x) = T_F [x^2 + (1-x^2)], \quad (3.7)$$

$$P_{gg}(x) = C_F \left[\frac{1+(1-x^2)}{x} \right], \quad (3.8)$$

$$P_{gg}(x) = 2C_A \left[\frac{x}{(1-x)_+} + (1-x)(x+\frac{1}{x}) \right] + \frac{11C_A - 4n_f T_F}{6} \delta(1-x). \quad (3.9)$$

(3.10)

mit der Plus-Distribution, welche folgendermaßen definiert ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz f(z) \frac{1}{[1-z]_+} &= \int_0^1 \frac{f(z) - f(1)}{1-z} && \text{für } z \neq 1, \\ \frac{1}{[1-z]_+} &= \frac{1}{1-z} && \text{für } z = 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

und den Koeffizienten $C_A = 3$, $C_F = 4/3$ und $T_F = 1/2$, welche aus gruppentheoretischen Überlegungen stammen. Diese vier Möglichkeiten sind in Abb. 3.2 visualisiert worden. Drei davon wurden bereits in Abb. 2.5 dargestellt. Die vierte Möglichkeit wurde in Abb. 2.5 nicht berücksichtigt. Dies stellt die Möglichkeit dar, dass ein Gluon zu zwei weiteren Gluonen „zerfällt“. Mittels der Strukturfaktoren, welche in der Elektron-Proton-Kollision aufgetaucht sind und den Splitting-Funktionen lässt sich eine allgemeine Form der DGLAP-Gleichungen herleiten.

$$\frac{\partial q_i(x, t)}{\partial t} = \alpha_s(t) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[\sum_{j=1}^{2n_f} P_{q_i q_j}(z, \alpha_s(t)) q_j \left(\frac{x}{z}, t \right) + P_{q_i g}(z, \alpha_s(t)) g \left(\frac{x}{z}, t \right) \right], \quad (3.12)$$

einen Anteil aufgeteilt werden, welcher die Seequarks betrachtet. Weiterführende Rechnungen finden sich in [2].

⁵Eine Berechnung der Splitting-Funktionen findet sich im [7]

⁶Diese Möglichkeiten wurden in Abb. 2.5 bereits visuell veranschaulicht.

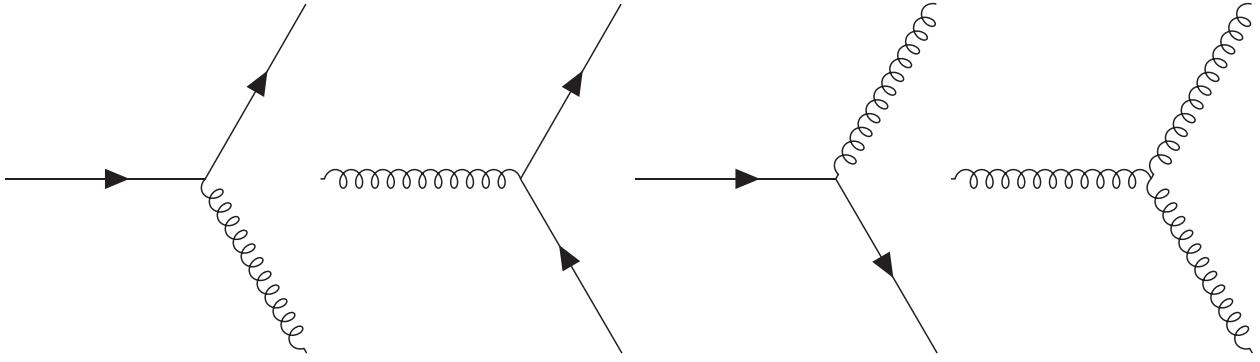


Abbildung 3.2.: Hier sind die verschiedenen Prozesse dargestellt. Die Nummerierung der Prozesse ist von links nach rechts durchgenommen worden. Auf dem ersten Bild ist die Gluonabstrahlung eines Quarks dargestellt (P_{qq}). Auf dem zweiten die Paarbildung von Quarks aus einem Gluon (P_{gg}). Auf dem dritten die Abstrahlung eines Quarks unter Umwandlung eines Gluons (P_{gq}) und auf dem letzten die Aufspaltung eines Gluons in zwei Gluonen (P_{gg}).

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = \alpha_s(t) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[\sum_{j=1}^{2n_f} P_{gq_j}(z, \alpha_s(t)) q_j\left(\frac{x}{z}, t\right) + P_{gg}(z, \alpha_s(t)) g\left(\frac{x}{z}, t\right) \right], \quad (3.13)$$

mit

$$t = \log(Q^2).$$

Dabei stellt n_f die aktiven Flavour dar⁷, welche in den Rechnungen verwendet werden. Wenn man diese DGLAP-Gleichungen in Matrix-Darstellung schreibt, ergibt sich folgende Darstellung.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \\ d \\ \bar{d} \\ s \\ \bar{s} \\ g \end{pmatrix} = \alpha_s(t) \int_x^1 \frac{dz}{z} \begin{pmatrix} P_{q_1 q_1} & P_{q_1 q_2} & P_{q_1 q_3} & P_{q_1 q_4} & P_{q_1 q_5} & P_{q_1 q_6} & P_{q_1 g} \\ P_{q_2 q_1} & P_{q_2 q_2} & P_{q_2 q_3} & P_{q_2 q_4} & P_{q_2 q_5} & P_{q_2 q_6} & P_{q_2 g} \\ P_{q_3 q_1} & P_{q_3 q_2} & P_{q_3 q_3} & P_{q_3 q_4} & P_{q_3 q_5} & P_{q_3 q_6} & P_{q_3 g} \\ P_{q_4 q_1} & P_{q_4 q_2} & P_{q_4 q_3} & P_{q_4 q_4} & P_{q_4 q_5} & P_{q_4 q_6} & P_{q_4 g} \\ P_{q_5 q_1} & P_{q_5 q_2} & P_{q_5 q_3} & P_{q_5 q_4} & P_{q_5 q_5} & P_{q_5 q_6} & P_{q_5 g} \\ P_{q_6 q_1} & P_{q_6 q_2} & P_{q_6 q_3} & P_{q_6 q_4} & P_{q_6 q_5} & P_{q_6 q_6} & P_{q_6 g} \\ P_{g q_1} & P_{g q_2} & P_{g q_3} & P_{g q_4} & P_{g q_5} & P_{g q_6} & P_{g g} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \\ d \\ \bar{d} \\ s \\ \bar{s} \\ g \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Splitting-Funktionen alle von der Integrationsvariablen abhängig. Diese Abhängigkeit wurde aufgrund der Übersichtlichkeit weggelassen. Aufgrund der Symmetrie vereinfacht sich diese Matrix, da sich ein q_i -Quark nicht in ein q_j -Quark in führender Ordnung überführen lässt.

⁷In dieser Auswertung beträgt $n_f = 3$

Hier würde eine Verletzung der C-Parität auftreten.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \\ d \\ \bar{d} \\ s \\ \bar{s} \\ g \end{pmatrix} = a_s \int_x^1 \frac{dz}{z} \begin{pmatrix} P_{q_1 q_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{q_1 g} \\ 0 & P_{q_2 q_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{q_2 g} \\ 0 & 0 & P_{q_3 q_3} & 0 & 0 & 0 & P_{q_3 g} \\ 0 & 0 & 0 & P_{q_4 q_4} & 0 & 0 & P_{q_4 g} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{q_5 q_5} & 0 & P_{q_5 g} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{q_6 q_6} & P_{q_6 g} \\ P_{g q_1} & P_{g q_2} & P_{g q_3} & P_{g q_4} & P_{g q_5} & P_{g q_6} & P_{g g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \\ d \\ \bar{d} \\ s \\ \bar{s} \\ g \end{pmatrix}.$$

Durch die Wahl einer neuen Basis lässt sich diese Matrix vereinfachen. So kann eine Diagonalgestalt erreicht werden. Aufgrund von messtechnischen Komplikationen, wird keine komplette Diagonalgestalt benutzt, sondern nur eine Diagonalgestalt in den oberen fünf Komponenten. Die anderen beiden Komponenten werden nicht mit diagonalisiert.

3.2. Wahl einer neuen Basis

Das allgemeine Vorgehen um eine gekoppelte Partielle Differentialgleichung (PDGL) zu lösen, besteht darin eine neue Basis zu erstellen, welche die PDGL entkoppelt. Dazu wird die PDGL diagonalisiert. Wir verwenden hier die Basis:

$$\text{Singulett : } \Sigma = \sum_{i=0}^{n_f} (q_i + \bar{q}_i), \quad (3.14)$$

$$\text{Non-Singulett : } q_{ij}^\pm = (q_i \pm \bar{q}_i) - (q_j \pm \bar{q}_j), \quad (3.15)$$

$$\text{Valenz : } q_\nu = \sum_{i=1}^{n_f} (q_i - \bar{q}_i), \quad (3.16)$$

$$\text{Gluon : } g = g. \quad (3.17)$$

Die vorherige Basis hatte nur 7 Dimensionen, somit werden aus den Non-Singulett-Kombinationen nur solche gewählt, welche den up-Flavour an zweiter Stelle haben. Mittels Gleichung (3.18) kann eine Basiswechselmatrix zur neuen Basis aufgestellt werden.

$$P' = U^{-1} P U. \quad (3.18)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der bereits ermittelten DGLAP-Gleichungen, welche mithilfe der Splitting-Funktionen vereinfacht werden konnte, folgt über die gewählte Basis folgende Gestalt für die Matrix.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} q_\nu \\ q_{du}^+ \\ q_{su}^+ \\ q_{du}^- \\ q_{su}^- \\ \Sigma \\ g \end{pmatrix} = a_s(t) \int_x^1 \frac{dz}{z} \begin{pmatrix} P_{q_1 q_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{q_2 q_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{q_3 q_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{q_4 q_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{q_5 q_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{q_6 q_6} & P_{q_6 g} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{g q_6} & P_{gg} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_\nu \\ q_{du}^+ \\ q_{su}^+ \\ q_{du}^- \\ q_{su}^- \\ \Sigma \\ g \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Basis können die DGLAP-Gleichungen, in der neuen Basis, gelöst werden⁸. Nach der Lösung der DGLAP-Gleichungen in dieser Basis wird wieder eine Basistransformation durchgeführt, sodass am Ende die Verteilungsfunktion der tatsächlichen Basis herausbekommt.

3.3. Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung

In den DGLAP-Gleichungen ist ein Term enthalten, welcher gesondert diskutiert werden muss: Die Kopplungskonstante $\alpha_s(t)$ der starken Wechselwirkung [5]. Die Energieabhängigkeit der starken Kopplungskonstanten besitzt die Eigenschaft, dass die Kopplungskonstante bei hohen Energien abnimmt und bei geringen Energien zunimmt. Der funktionale Zusammenhang ist logarithmisch. Das Phänomen wird asymptotische Freiheit genannt. Der benutzte Zusammenhang ist:

$$a_s(t) = \frac{12\pi}{33 - 2n_f} (t - \log(91,1876 \exp(-\frac{12\pi}{(33 - 2n_f)0,1185}))). \quad (3.19)$$

⁸In Anbetracht von Gleichung (3.6) können die Indizes bei den Splitting-Funktionen weggelassen werden, da für jede Kombination dieselbe mathematische Form hergeleitet wurde [2].

4. Analytische Arbeit zum Programmcode

Der Programmcode ist in mehrere Teilbereiche zu gliedern. Um die Differentialgleichung zu lösen, wird das Runge-Kutta-4-Verfahren verwendet. So ist die Aufgabe das Integral über die Splitting-Funktionen in der neuen Basis zu lösen. Dies geschieht auf einem Gitter im Ortsraum. Die Anfangsbedingungen der Partonverteilungsfunktionen werden über eine Lagrange-Interpolation genähert und mittels des Runge-Kutta-4-Verfahren zeitlich entwickelt. So teilt sich die Beschreibung in mehrere Unterpunkte auf:

1. *Lagrange-Interpolation*
2. *Diskretisierung der Integraldarstellung*
3. *Lösung der Splitting-Funktionen*
4. *Runge-Kutta-4-Verfahren*

Desweiteren werden die DGLAP-Gleichungen über Parton-Impulsverteilungsfunktionen beschrieben, sodass hier immer der jeweilige Impuls des Quark-Teilchen vorkommt. Dies geschieht, indem $q \rightarrow xq$ umgeschrieben wird.¹

4.1. Lagrange-Interpolation

$$\frac{\partial(xq)}{\partial t} = \alpha_s \int_x^1 dz P(z, t) (xq(\frac{x}{z}, t)). \quad (4.1)$$

Die Impulsdichteverteilungen werden auf einem äquidistanten Gitter mit N_x Gitterpunkten aufgetragen. Es wird nicht das Bjorken- x , sondern $y = \log \frac{1}{x}$ aufgetragen. Wenn man x in N_x Punkte aufteilt und dies mit x_α kennzeichnet, so wird $y_\alpha = \log \frac{1}{x_\alpha}$ bezeichnet. Dabei ist y Äquidistant zu wählen. Somit kann die Lagrange-Interpolation definiert werden als

$$xq(y, t) = \sum_{\alpha=0}^n \lambda_\alpha(y) x_\alpha q(y_\alpha, t) \quad (4.2)$$

mit

$$\lambda_\alpha(y) = \prod_{i \neq \alpha} \frac{y - y_i}{y_\alpha - y_i}. \quad (4.3)$$

Hierbei ist zu beachten, dass das Lagrange-Polynom für große Ordnungen ungenau für große y wird, sodass hier recht leicht Divergenzen auftreten. Um dies zu verhindern werden immer nur 6

¹Dieses Kapitel hat sich an [2] orientiert.

Punkte nebeneinander, mittels eines Lagrange-Verfahrens, interpoliert.

4.2. Diskretisierung der Integraldarstellung

Genauso wie die Impulse der Quarks auf einem Gitter angeordnet wurden, kann die Zeitentwicklung auf einem Gitter dargestellt werden. Somit wird die Integro-Differentialgleichung durch folgende Gleichung dargestellt.

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \alpha_s \int_x^1 \frac{dz}{z} (z, t) q\left(\frac{x}{z}, t\right) = \alpha_s (P \otimes q)(y, t). \quad (4.4)$$

Die Transformation dieser Differentialgleichung sieht wie folgt aus:

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial t} = \alpha_s (P \otimes q)_\alpha(y, t). \quad (4.5)$$

Die zeitliche Entwicklung der Impulsverteilungsfunktionen kann wie in Gleichung (4.2) beschrieben werden. Ebenfalls kann das Faltungsprodukt auf dem Gitter mithilfe der Lagrange-Interpolation dargestellt werden durch Gleichung (4.6).

$$(P \otimes q)(y, t) = \sum_{\alpha=0}^{N_x} \lambda_\alpha(y) (P \otimes q)_\alpha(t) \quad (4.6)$$

Durch den Hauptsatz der Variationsrechnung lässt sich Gleichung (4.5) herleiten. Weiterhin muss die Faltung im Gitter ermittelt werden:

$$(P \otimes q)_\alpha(t) = \int_{x_\alpha}^1 dz P(z, t) q\left(\frac{x_\alpha}{z}, t\right) \quad (4.7)$$

Es gilt weiter:

$$(P \otimes q)_\alpha(t) = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_i^{i+1} x q(y, t) \int_{\exp(-y_{i+1})}^{\exp(-y_i)} dz P(z, t) \lambda(y_\alpha + \ln z) \quad (4.8)$$

wobei $\alpha = N_x$ die Anzahl der Gitterpunkte ist². Die Grenzen $\exp(-y_i)$ und $\exp(-y_{i+1})$ stellen die oberen und unteren Grenzen der auszuwertenden Bereiche dar. Hier muss eine Fallunterscheidung angesetzt werden. Die Lösung der Funktion kann in drei Teile unterteilt werden.

$$\int_{\exp(-y_i)}^1 dz P(z, t) \lambda(y_\alpha + \ln z), \quad (4.9)$$

$$\int_{\exp(-y_{i+1})}^{\exp(-y_i)} dz P(z, t) \lambda(y_\alpha + \ln z), \quad (4.10)$$

$$\int_0^{\exp(-y_{i+1})} dz P(z, t) \lambda(y_\alpha + \ln z). \quad (4.11)$$

²In der Implementierung ist zu beachten, dass immer 6 Punkte zu einer Lagrange-Interpolation beitragen.

In Gleichung (4.9) wird die Plus-Distribution divergieren, sodass hier eine speziellere Form der Auswertung betrachtet werden muss. In Gleichung (4.10) sind alle Distributionen „gutartig“, sodass hier numerisch integriert werden kann. In Gleichung (4.11) divergiert die Plus-Distribution.

4.3. Lösung der Splitting-Funktionen

Um die Darstellung der Splitting-Funktionen im Ortsraum zu lösen muss die Plus-Distribution ausgewertet werden. Die Distribution ist in einen konvergenten Teil und einen divergenten Teil zu separieren. Die Plus-Distribution wird für $x \rightarrow 1$ und $x \rightarrow 0$ divergieren. Für die restlichen Fälle konvergiert die Plus-Distribution. Die Splitting-Funktionen lassen sich in verschiedene Terme separieren, sodass diese geschrieben werden können als

$$P(x) = A(x) + R(x)[S(x)]_+ + K(x)\delta(1-x). \quad (4.12)$$

Hierbei verweist der +-Index auf die Plus-Distribution.

4.3.1. Konvergierender Teil

Um den konvergierenden Teil auszuwerten muss das Integral, aus Gleichung (4.10) gelöst werden.

$$\begin{aligned} (P \otimes q)_\alpha(t) &= \\ &\int_{\exp -y_\alpha}^{\exp -y^1} P(z, t) \lambda(y_\alpha + \ln z) dz = \\ &\int_{\exp -y_\alpha}^{\exp -y^1} [A(z) + B(z) + R(z)S(z)] \lambda(y_\alpha + \ln z) dz. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Hierbei stellen die Grenzen die Integranden dar, an denen die Plus-Distribution nicht divergiert. Dabei wurde das letzte Element y_1 und das erste Element y_α genannt.

4.3.2. Divergierender Teil

Der divergierende Teil kann ausgewertet werden, indem das Integral in einen Teil von 0 bis y_α und einen Teil von y_1 bis 1 eingeteilt wird. Der Teil für $x \rightarrow 0$ kann vernachlässigt werden, da alle Splitting-Funktionen, welche im Integral vorkommen, nur eine Singularität für $x \rightarrow 1$ besitzen.

D.h. es taucht nur der zweite Fall auf³. Der zweite Teil wird folgendermaßen ausgewertet:

$$\begin{aligned}
 (P \otimes q)_\alpha(t) = & \\
 \int_{\exp -y_1}^1 A(x) \lambda(y_\alpha + \ln z) dz + & \\
 \int_{\exp -y_1}^1 \frac{R(z) \lambda(y_\alpha + \ln z) - R(1) \lambda(y_\alpha)}{1-z} dz + & \\
 R(1) \lambda(y_\alpha) \ln(1 - \exp(-y_1)) + & \\
 K(1) \lambda(y_\alpha).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ein Summand des Integranden divergiert im Grenzwert für $z \rightarrow 1$, sodass dieser nochmal gesondert, wie folgt, ausgewertet werden muss.

$$\lim_{z \rightarrow 1} \int_{\exp -y_1}^1 \frac{R(z) \lambda(y_\alpha + \ln z) - R(1) \lambda(y_\alpha)}{1-z} dz = -[R'(1) \lambda(y_\alpha) + R(1) \frac{d}{dz} \lambda(y_\alpha + \ln y_\alpha + \ln z)]. \tag{4.15}$$

Die Ableitung der Interpolation ergibt sich für $z \rightarrow 1$ zu

$$\frac{d}{dz} \lambda(y_\alpha + \ln y_\alpha + \ln z) = \frac{-1}{\delta y}. \tag{4.16}$$

4.4. Runge-Kutta-4-Verfahren

In diesem Programm wurde für den Impulsübertrag ($t = \ln Q^2$) das klassische Runge-Kutta-Verfahren verwendet. Unsere Ausgangslage besteht darin, dass die Anfangsbedingung für alle möglichen x -Positionen vorgegeben sind. Jedem dieser Punkte muss eine Entwicklung über die Zunahme des Impulsaustausches zugewiesen werden. Unsere Differentialgleichung besitzt die Form 4.17 für die entkoppelte Differentialgleichung und 4.18 für den gekoppelten Fall der Differentialgleichung.

$$q(y, t) = f(t, q(y, t)), \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 q(y, t) &= f(t, q(y, t), g(y, t)), \\
 g(y, t) &= f'(t, q(y, t), g(y, t)).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Auf diese Differentialgleichungen kann das klassische Runge-Kutta-Verfahren angewendet werden.

4.4.1. Entkoppelte Differentialgleichung

Für die entkoppelte Differentialgleichung gilt folgende Vorschrift.

$$q_{n+1}(y, t) = q_n(y, t) + h \sum_{j=1}^s b_j k_j \tag{4.19}$$

³Der Fall $x \rightarrow 0$ kann wie in Gleichung (4.10) ausgewertet werden.

mit

$$k_j = f(t_n + hc_j, q_n(y, t_n) + h \sum_{l=1}^s a_{jl} k_l), \quad (4.20)$$

wobei die verschiedenen k_j folgendermaßen berechnet werden.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, q_n(y, t_n)), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, q_n(y, t_n) + \frac{h}{2} k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, q_n(y, t_n) + \frac{h}{2} k_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, q_n(y, t_n) + h k_3). \end{aligned}$$

Somit kann der nächste Punkt $q_{n+1}(y, t)$ über folgende Rekursionsgleichung beschrieben werden.

$$q_{n+1}(y, t) = q_n(y, t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4). \quad (4.21)$$

4.4.2. Gekoppelte Differentialgleichung

Für die gekoppelte Differentialgleichung ergeben sich folgende Rechenvorschriften.

$$q_{n+1}(y, t) = q_n(y, t) + h \sum_{j=1}^s b_j k_j, \quad (4.22)$$

$$g_{n+1}(y, t) = g_n(y, t) + h \sum_{j=1}^s b'_j k'_j. \quad (4.23)$$

mit

$$k_j = f(t_n + hc_j, q_n(y, t_n) + h \sum_{l=1}^s a_{jl} k_l), \quad (4.24)$$

$$k'_j = f(t_n + hc_j, q_n(y, t_n) + h \sum_{l=1}^s a_{jl} k'_l), \quad (4.25)$$

wobei die verschiedenen k_j folgendermaßen berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_n, q_n(y, t_n), g_n(y, t_n)), \\
 k'_1 &= f'(t_n, q_n(y, t_n), g_n(y, t_n)), \\
 k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, q_n(y, t_n) + \frac{h}{2}k_1, g_n(y, t_n) + \frac{h}{2}k'_1\right), \\
 k'_2 &= f'\left(t_n + \frac{h}{2}, q_n(y, t_n) + \frac{h}{2}k_1, g_n(y, t_n) + \frac{h}{2}k'_1\right), \\
 k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, q_n(y, t_n) + \frac{h}{2}k_2, g_n(y, t_n) + \frac{h}{2}k'_2\right), \\
 k'_3 &= f'\left(t_n + \frac{h}{2}, q_n(y, t_n) + \frac{h}{2}k_2, g_n(y, t_n) + \frac{h}{2}k'_2\right), \\
 k_4 &= f(t_n + h, q_n(y, t_n) + hk_3, g_n(y, t_n) + hk'_3), \\
 k'_4 &= f'(t_n + h, q_n(y, t_n) + hk_3, g_n(y, t_n) + hk'_3).
 \end{aligned}$$

Somit kann der nächste Punkt $q_{i+1}(y, t)$ und $g_{i+1}(y, t)$ über folgende Rekursionsgleichungen beschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 q_{i+1}(y, t) &= q_i(y, t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4) \\
 g_{i+1}(y, t) &= g_i(y, t) + \frac{h}{6}(k'_1 + 2(k'_2 + k'_3) + k'_4)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Die Koeffizienten in den Gleichungen kommen aus der Butcher-Tabelle Abschnitt 4.4.2. Die Butcher-Tabellen sind Tabellen, welche empirisch ermittelt wurden. Alle leeren Tabellenglieder sind Null.

Tabelle 4.1.: Eine mögliche Butchertabelle für das klassische Runge-Kutta-Verfahren

	$b_1 = \frac{1}{6}$	$b_2 = \frac{2}{6}$	$b_3 = \frac{2}{6}$	$b_4 = \frac{1}{6}$
$c_1 = 0$				
$c_2 = \frac{1}{2}$	$a_{21} = \frac{1}{2}$			
$c_3 = \frac{1}{2}$	$a_{31} = 0$	$a_{32} = \frac{1}{2}$		
$c_4 = 1$	$a_{41} = 0$	$a_{42} = 0$	$a_{43} = 1$	

4.5. Anfangsbedingungen

Damit der Runge-Kutta-Algorithmus eindeutig gelöst werden kann, werden dazu weitere Anfangsbedingungen benötigt. Die Anfangsbedingungen [2] die zur Implementierung verwendet wurden, betrachten nur drei Quarksorten.

$$\begin{aligned} xu_\nu &= 5,107200x^{0,8}(1-x)^3, \\ xd_\nu &= 3,064320x^{0,8}(1-x)^4, \\ x\bar{d} &= 0,1939875x^{-0,1}(1-x)^6, \\ x\bar{u} &= (1-x)x\bar{d}, \\ xs = x\bar{s} &= 0,2(x_d + x_u), \\ xg &= 1,7x^{-0,1}(1-x)^5. \end{aligned}$$

5. Diskussion

Anhand der Grafiken Abb. 5.1 und Abb. 5.2 bis Abb. 5.13 und Abb. 5.14 ist die Entwicklung für die up-, down- und strange-Quarks, bei verschiedenen Energien, dargestellt¹. Auf der x -Achse ist das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt, mit der ein Parton einen Bruchteil des Impulses erhalten hat. In Abb. 5.1 und Abb. 5.2 sind die gegebenen Anfangsbedingungen aufgezeigt.

- Der blaue Graf stellt die Partonverteilungsfunktion der up- Quarks im Proton dar.*
- Der orange Graf stellt die Partonverteilungsfunktion der anti up- Quarks im Proton dar.*
- Der grüne Graf stellt die Partonverteilungsfunktion der down- Quarks im Proton dar.*
- Der rote Graf stellt die Partonverteilungsfunktion der anti down- Quarks im Proton dar.*
- Der violette Graf stellt die Partonverteilungsfunktion der strange- Quarks im Proton dar.*
- Der braune Graf stellt die Partonverteilungsfunktion der anti strange- Quarks im Proton dar.*
- Der pinke Graf stellt die Partonverteilungsfunktion der Gluonen im Proton dar.*

Es sind vier Aspekte zu beobachten:

1. *Das Maximum der Partonverteilungsfunktionen bei der eindrittel-Grenze.*
2. *Das Verhältnis der Flächen der up- und down- Quarks zueinander.*
3. *Das Verhältnis der Flächen der anti up- und anti down- Quarks zu den strange- und anti strange- Quarks.*
4. *Der Anstieg der Seequarks bei kleinen Bjorken- x .*

Erstens: Das Maximum der Partonverteilungsfunktionen bei der eindrittel-Grenze.

Es zeigt sich, dass für große Impulsüberträge die Verteilungsfunktionen gegen Null konvergieren. Dies bedeutet, dass einzelne Partonen eine sehr gerine Wahrscheinlichkeit besitzen den ganzen Impuls vom Elektron aufzunehmen. Der wahrscheinlichste Wert eines Impulsübertrages liegt in etwa bei der eindrittel Grenze, welche in Abb. 2.6 angegeben wird. Dieses Maximum bleibt über die ganze Zeit erhalten, da das Proton immer aus drei Valenzquarks aufgebaut ist und nur die Anzahl der Seequarks von der Kollisionsenergie abhängig ist.

Zweitens: Das Verhältnis der Flächen der up- und down- Quarks zueinander.

Weiterhin ist zu erkennen, dass die Verteilungsfunktionen der up-Quarks, abgesehen vom Gluon, am meisten Fläche einschließt. Nachfolgend kommen das down-Quark, das anti up- und anti down-Quark und zuletzt das strange- und anti strange- Quark. Diese Staffelung der Verteilungsfunktionen

¹Die jeweiligen Energien sind auf die zuletzt angegebene Stelle gerundet worden. Die Energie wird in jeder Iteration um 0.5 GeV erhöht und beide Diagramme enthalten 1200 Datenpunkte.

ist durch Abb. 2.5 und Abb. 2.6 zu erklären. Das Proton besteht aus einer up-, up-, down- Quark Kombination und einer Anzahl an variierender Seequarks. Die anti Quark Kombinationen können sich im Proton nur über den Prozess der Aufspaltung von einem Gluon in ein Quark-Antiquark-Paar erklären. Somit muss die Fläche, welche die up-Quarks einschließen größer sein als die anderen. Nachfolgend muss, aufgrund derselben Argumentation, das down- Quark an zweiter Stelle kommen. Ebenfalls lässt sich daraus schließen, dass die Verteilungsfunktionen der Antiquarks, bei dem up- und down- Quark, sowie die Verteilungsfunktionen der strange- und anti strange Quarks eng aneinander liegen müssen. Beim strange-Flavour müssen die Verteilungsfunktionen sogar identisch sein. Das liegt daran, da keine strange- Quarks außerhalb der Seequarks existieren. Analytisch wurden diese Eigenschaften in Gleichung (2.33) hineingeschrieben².

$$\int_0^1 dx f_{u\nu}(x, Q_0) = 2, \quad (5.1)$$

$$\int_0^1 dx f_{d\nu}(x, Q_0) = 1. \quad (5.2)$$

Somit ist die Fläche unterhalb der up- und anti up- Verteilungsfunktionen doppelt so groß, wie die Fläche unterhalb der down- und anti down- Verteilungsfunktionen.

Drittens: Das Verhältnis der Flächen der anti up- und anti down- Quarks zu den strange- und anti strange- Quarks.

Zusätzlich kann der Unterschied in den Häufigkeiten der anti up- und anti down- Verteilungsfunktionen zu den strange- und anti strange- Verteilungsfunktionen erklärt werden. Dies liegt an der Wahrscheinlichkeit der Aufspaltung eines Gluons in ein Quark-Antiquark-Paar. Gluonen können sich nur dann in ein Quark-Antiquark-Paar aufspalten, wenn dessen Energie mindestens genau der Summe beider Ruheenergien des Quarks und Antiquarks entspricht. Folglich hängt die Wahrscheinlichkeit mit der Masse der verschiedenen Quarks ab. Die Masse des up- Quarks beträgt $2,2\text{MeV}/c^2$ und das des down- Quarks $4,8\text{MeV}/c^2$, wohingegen die Masse des strange- Quarks $95\text{MeV}/c^2$ beträgt³. Der Unterschied zwischen der up- und down- Quark Verteilung ist nicht zu beobachten, da die Massenunterschiede geringfügig sind.

Viertens: Der Anstieg der Seequarks bei kleinen Bjorken- x .

Wenn sich im weiteren die Entwicklung über die Erhöhung der Kollisionsenergie angeschaut wird, wird folgendes Verhalten beobachtet. Bei kleinen Bjorken- x steigt die Verteilungsfunktion an. Mit zunehmender Energie streut das Elektron häufiger an den Seequarks, sodass Beiträge der Seequarks hinzu addiert werden müssen. Die Addition der Seequarks führt dazu, dass die einzelnen Quarks prozentual weniger Impuls vom Elektron erhalten, da effektiv mehr Partonen im Proton vorhanden sind. Somit kommt es zu einer Erhöhung der Wahrscheinlichkeit bei kleinen Bjorken- x . Diese Entwicklung ist in folgenden Bildern dargestellt:

²Dies wurde aus [3] entnommen

³Diese Werte wurden aus [6] entnommen.

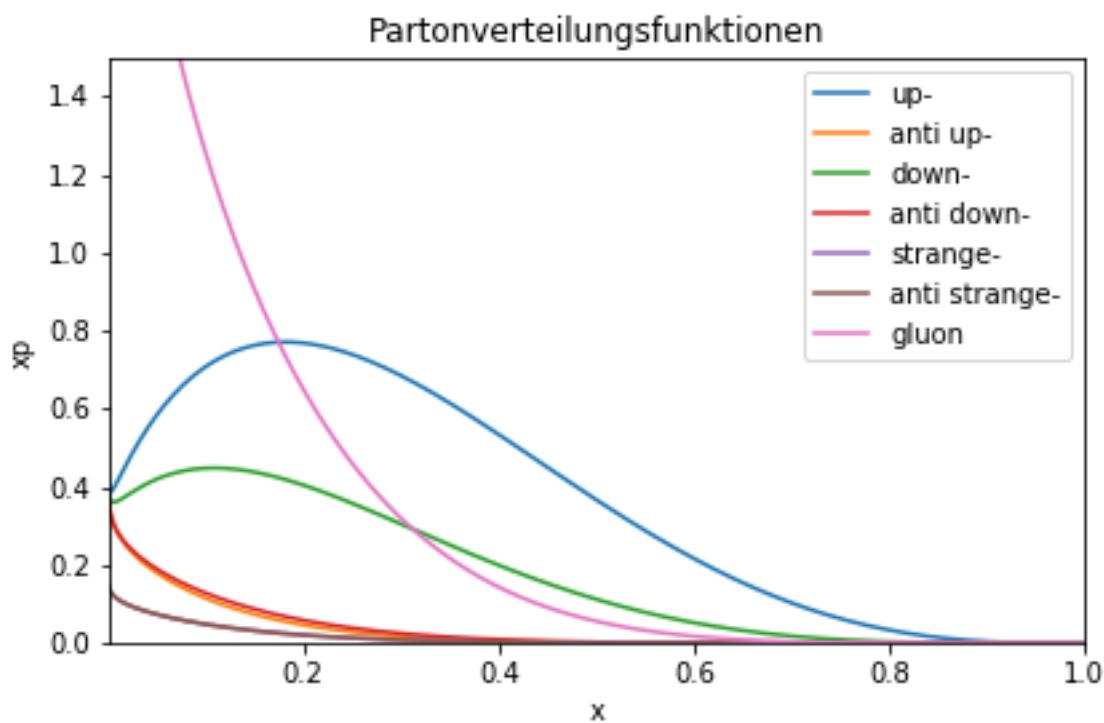


Abbildung 5.1.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 1 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

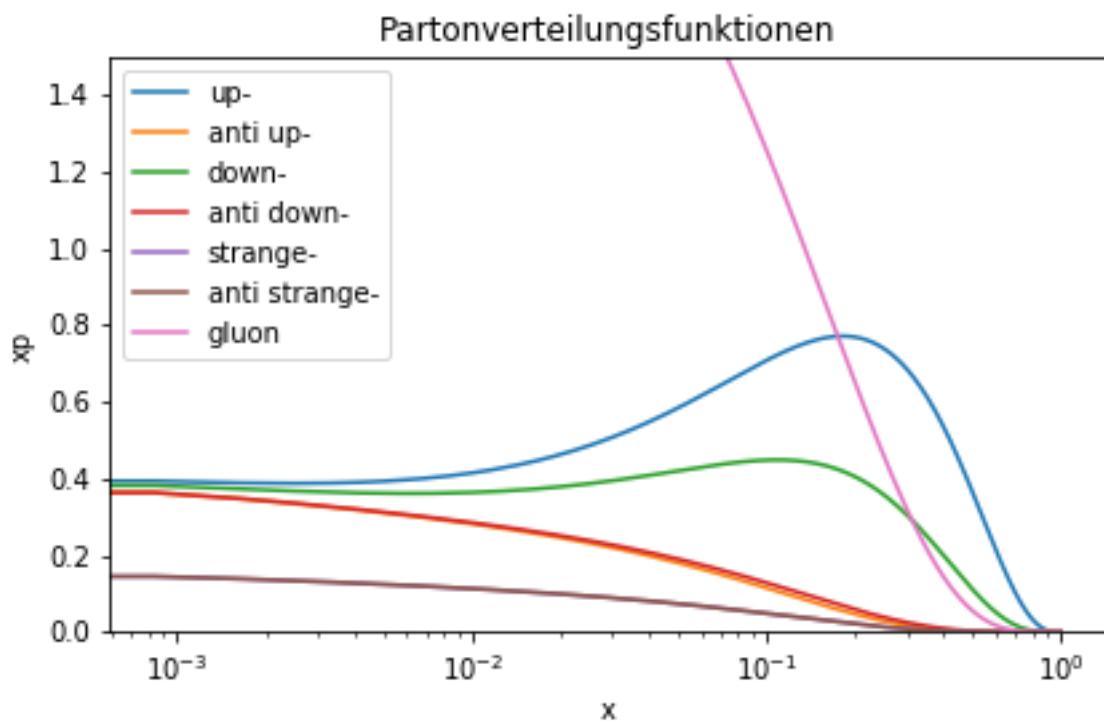


Abbildung 5.2.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 1 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist logarithmisch das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

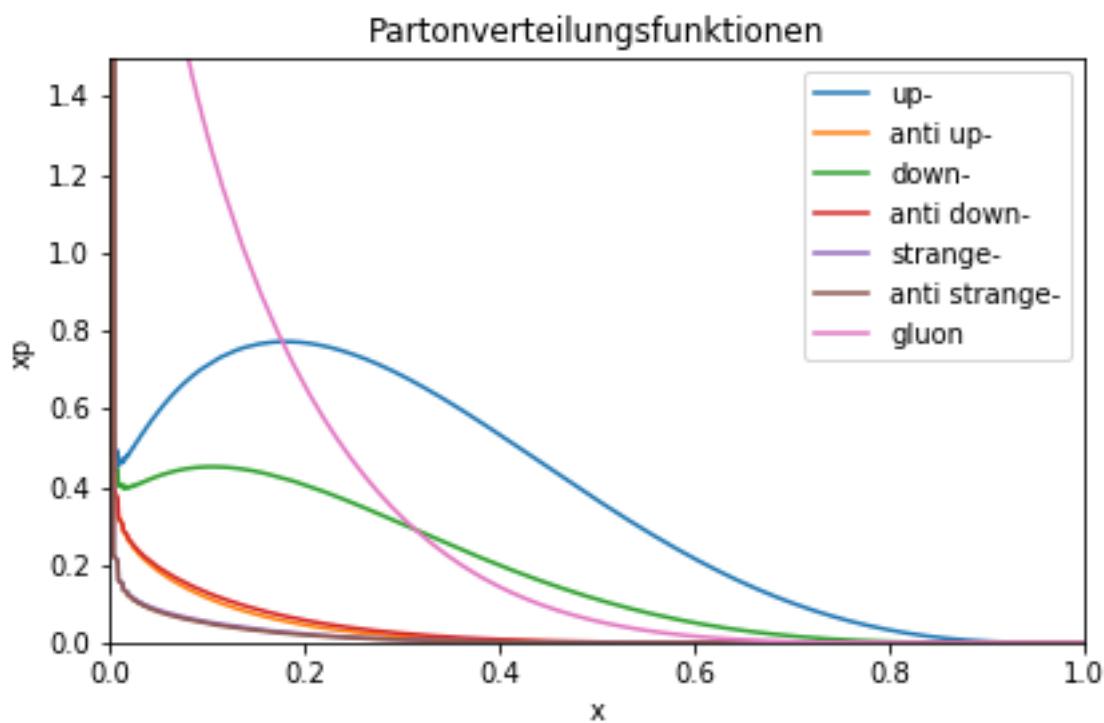


Abbildung 5.3.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 1.3 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

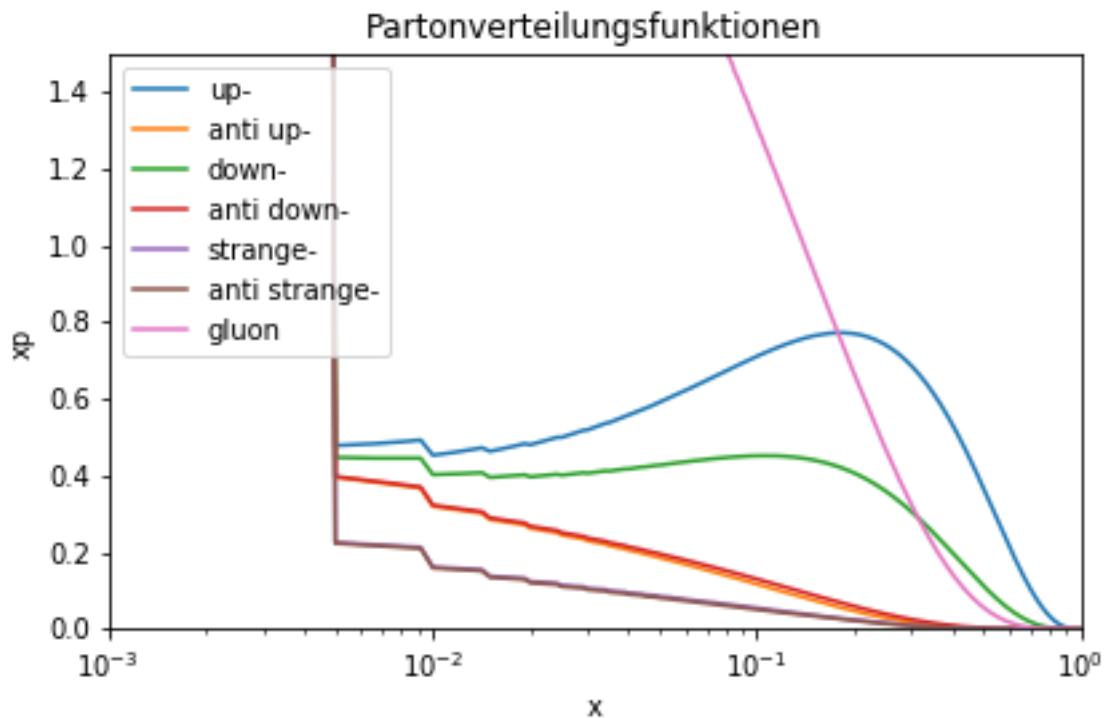


Abbildung 5.4.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 1.3 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist logarithmisch das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

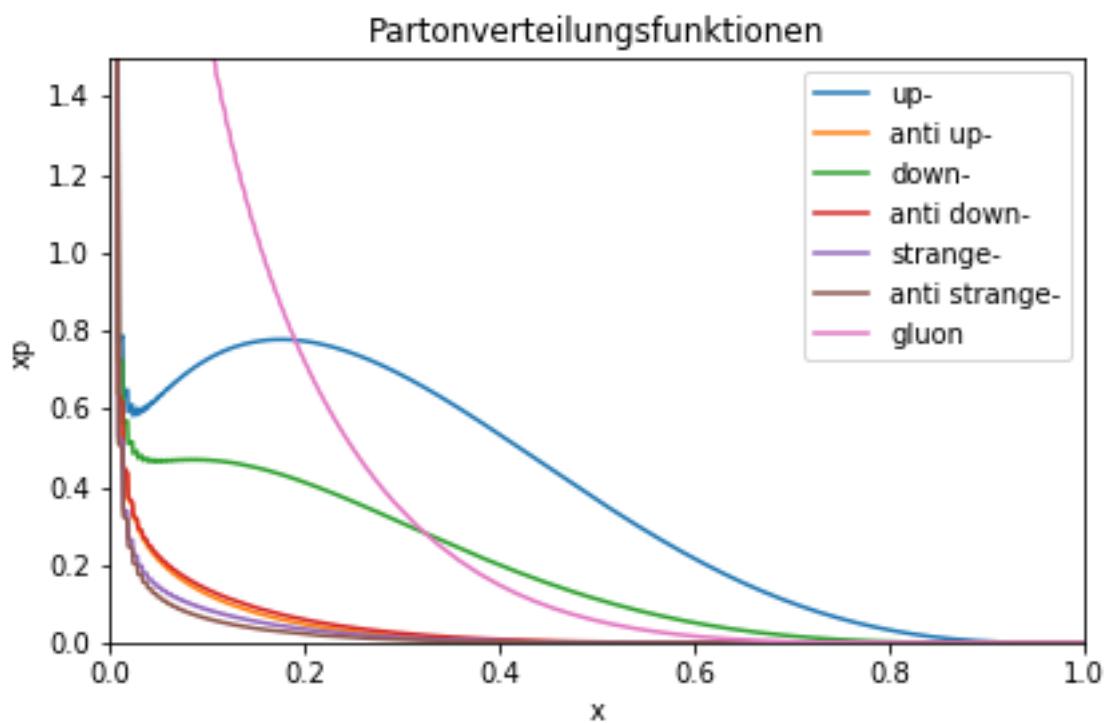


Abbildung 5.5.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 6 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

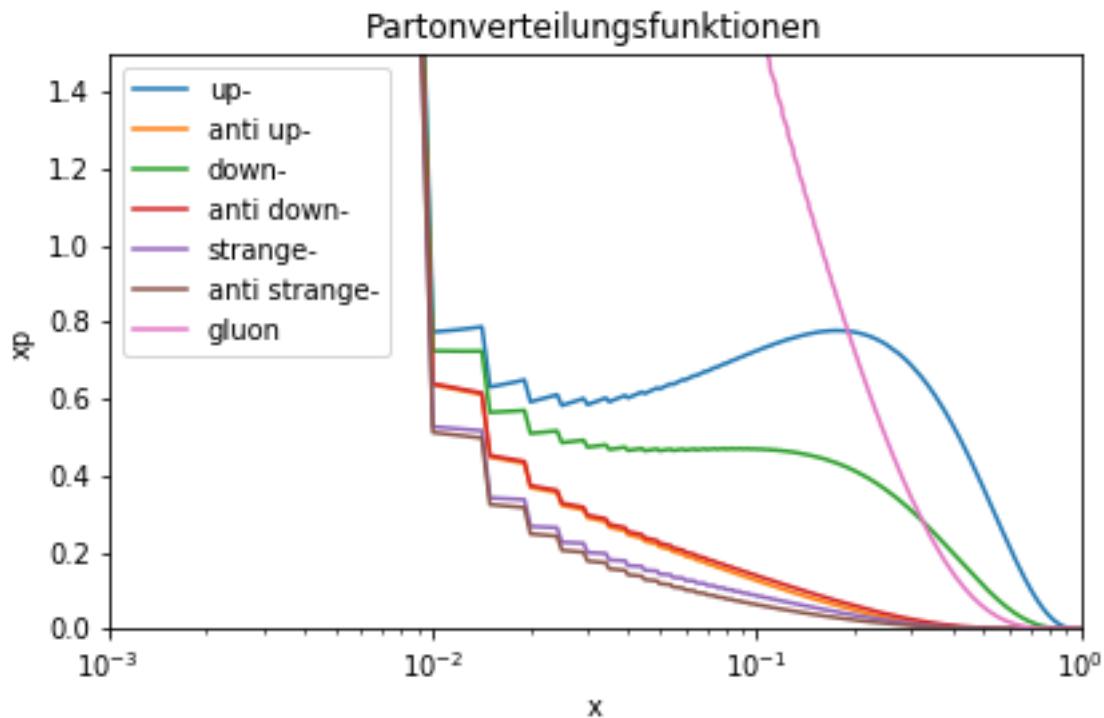


Abbildung 5.6.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 6 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist logarithmisch das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

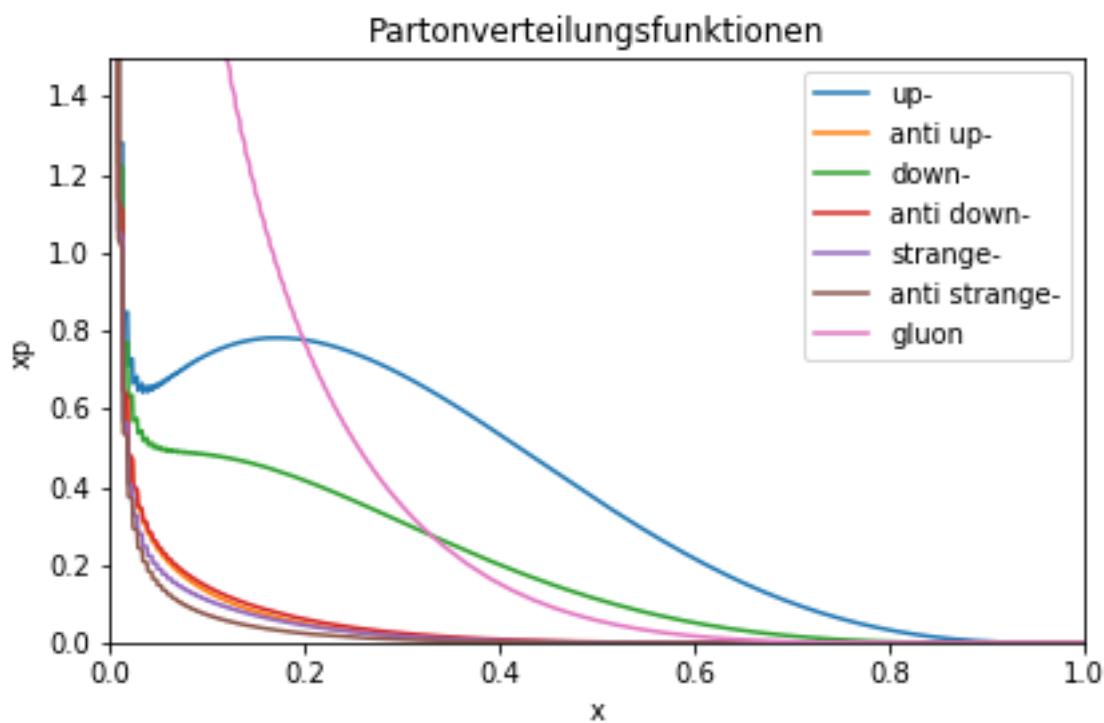


Abbildung 5.7.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 26 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

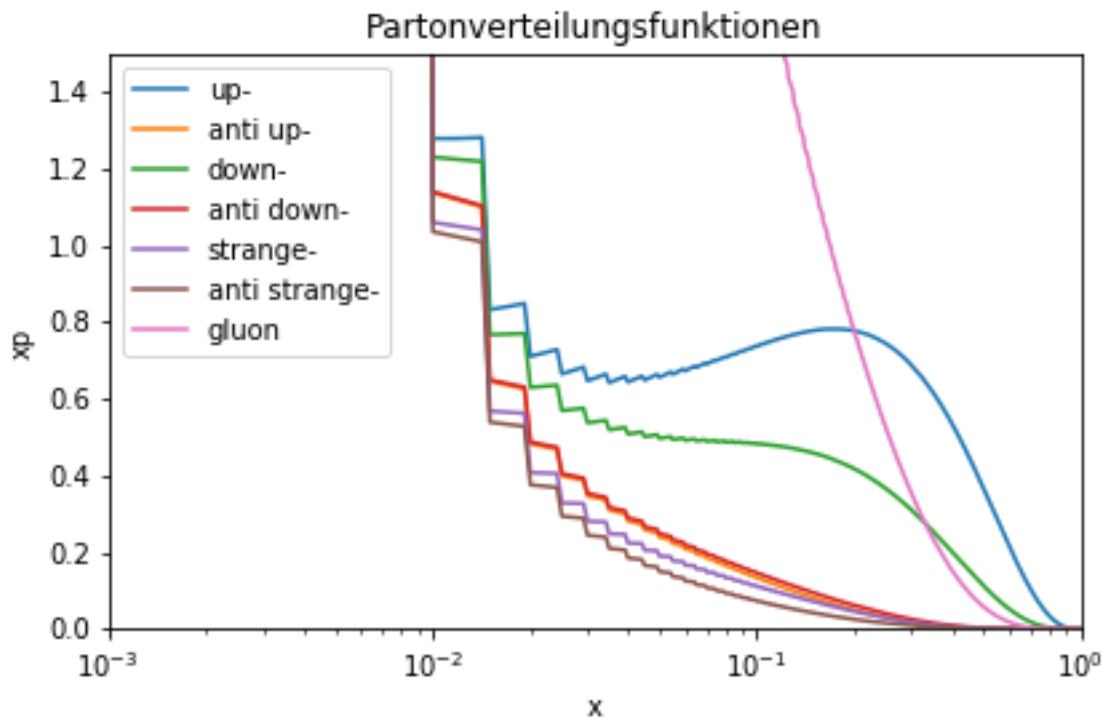


Abbildung 5.8.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 26 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist logarithmisch das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

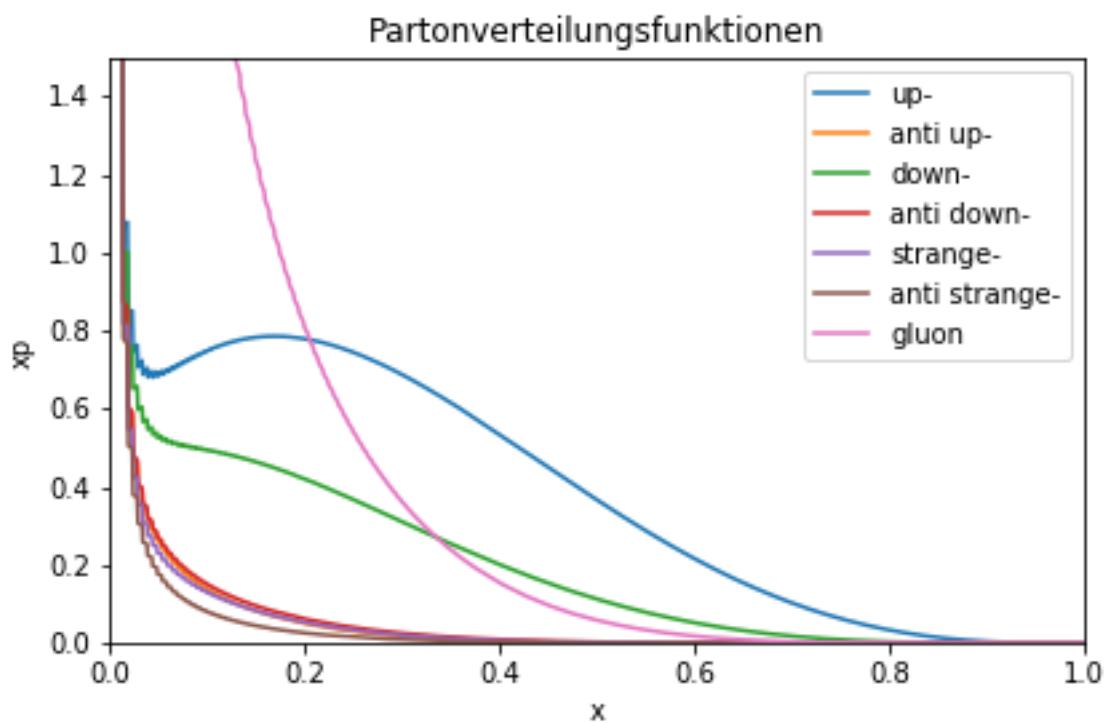


Abbildung 5.9.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 90 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

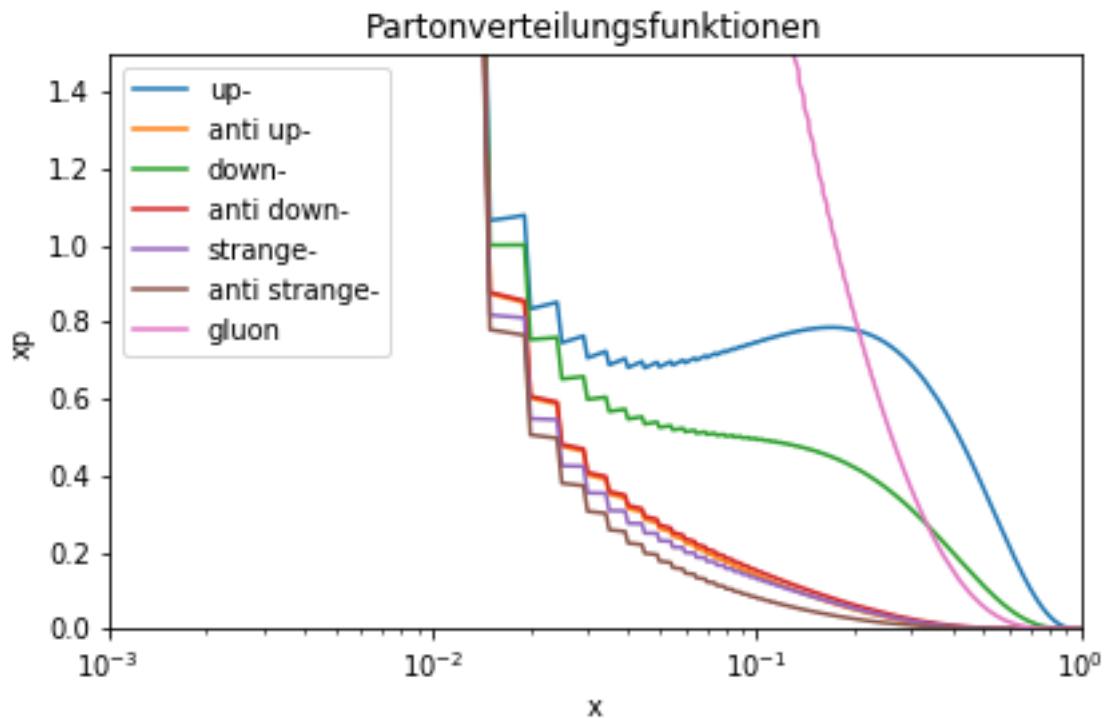


Abbildung 5.10.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 90 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist logarithmisch das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

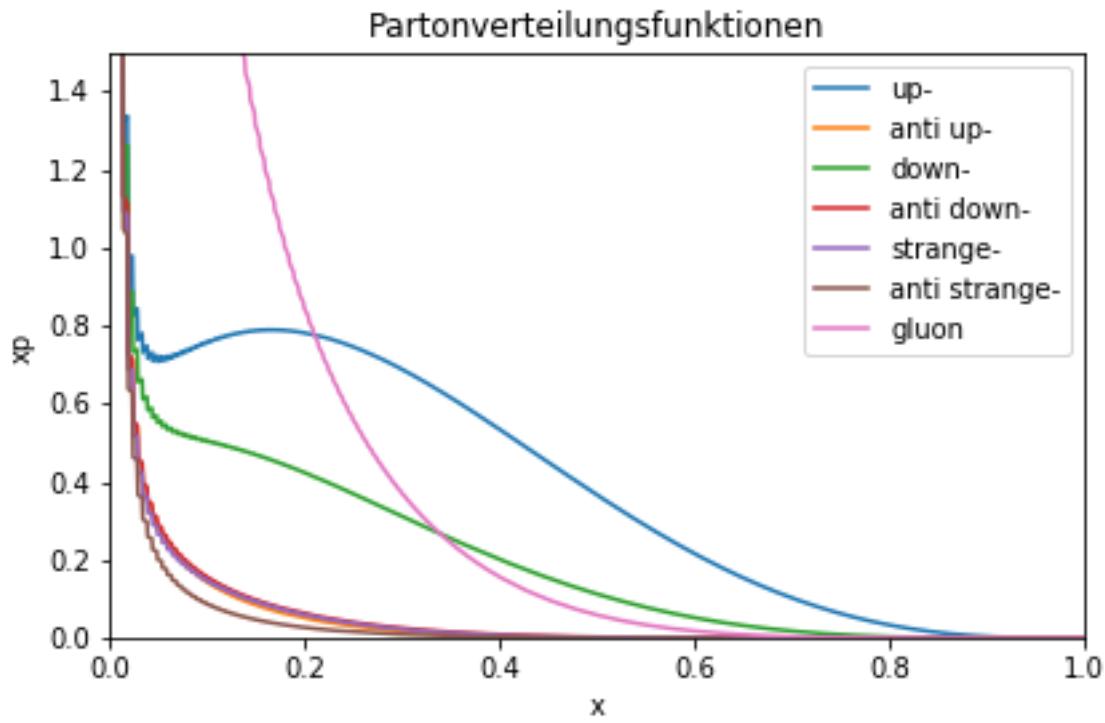


Abbildung 5.11.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 518 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

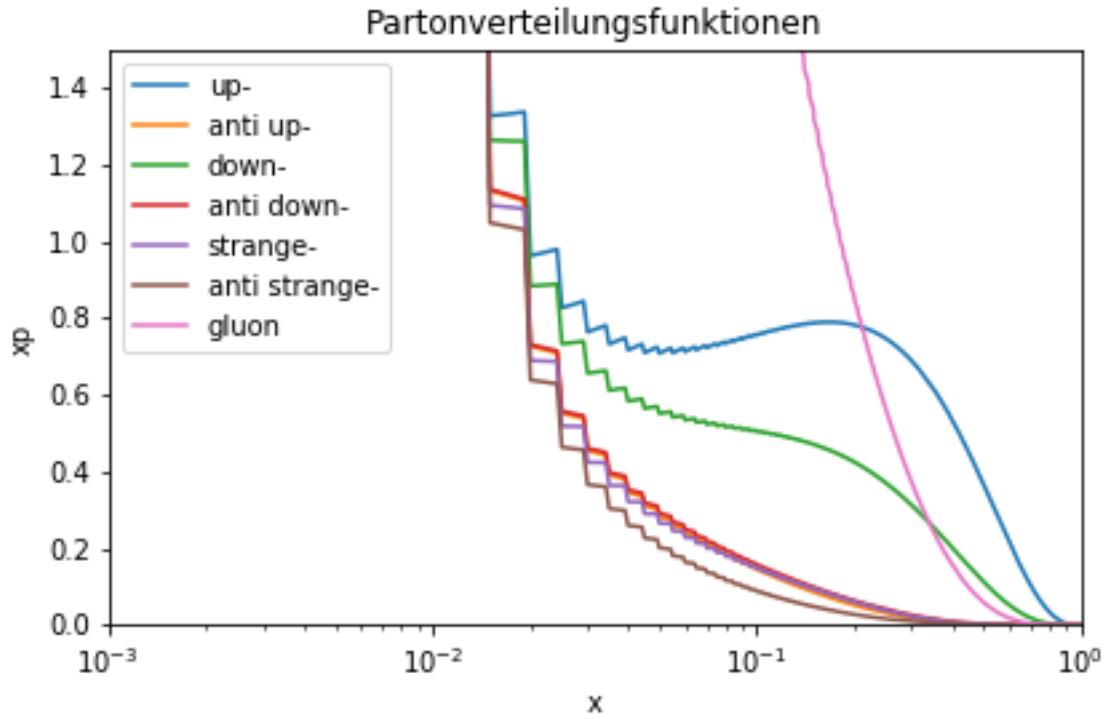


Abbildung 5.12.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 518 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist logarithmisch das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

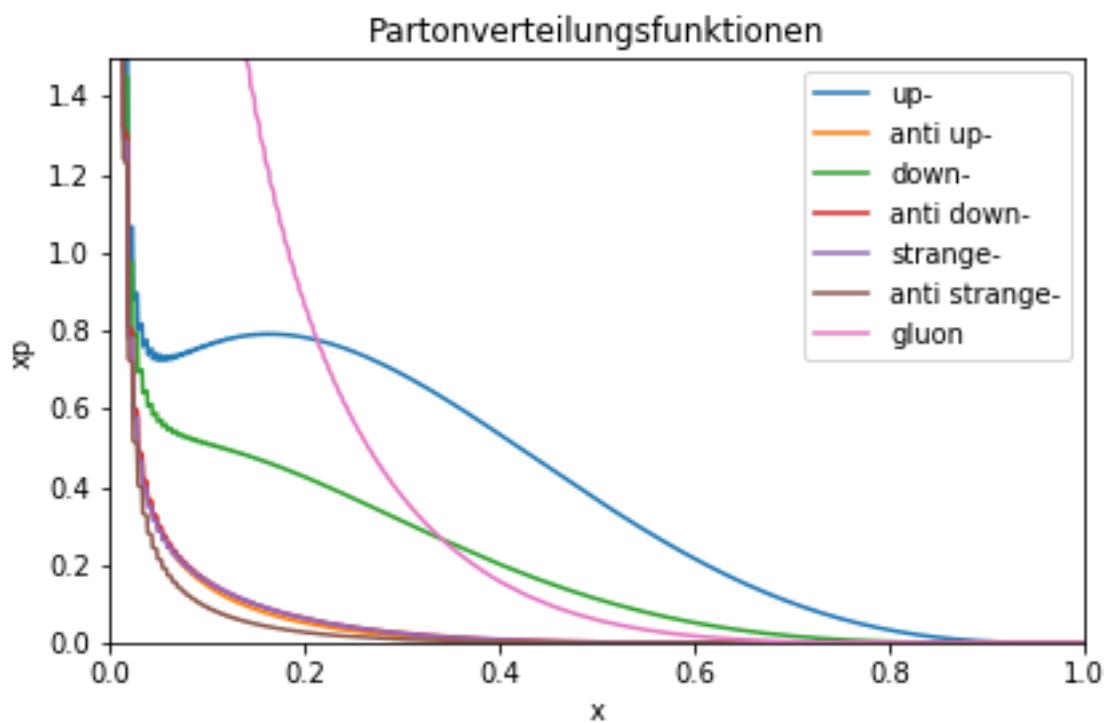


Abbildung 5.13.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 1096 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

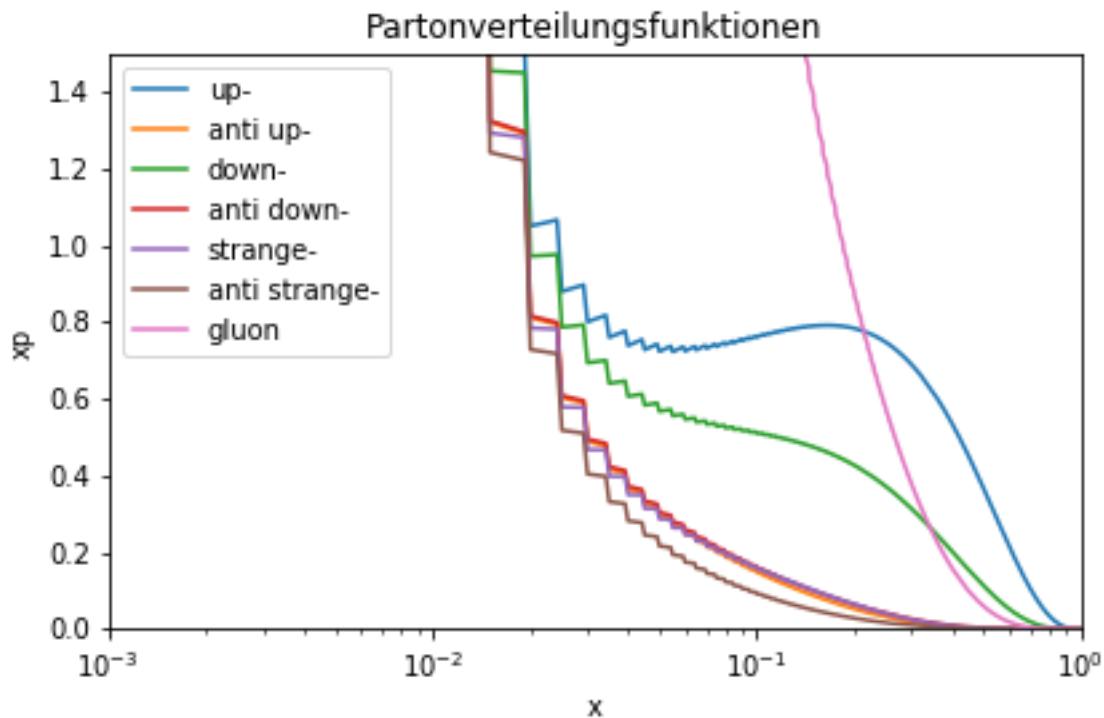


Abbildung 5.14.: In diesem Bild ist die Partonverteilungsfunktion für eine Kollisionsenergie von 1096 GeV dargestellt. Auf der x -Achse ist logarithmisch das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt.

Wenn sich im Gegensatz zu diesen Grafiken die Grafiken aus dem Werk „Quantum Field Theory and the Standard Model“ [7] betrachtet werden, welche in Abb. 5.15 dargestellt sind, können Abweichungen zu den in dieser Arbeit gefundenen Partonverteilungsfunktionen beobachtet werden. Wo in Abb. 5.15 das Maximum bei der eindritteln-Grenze bereits bei 200 GeV überwunden

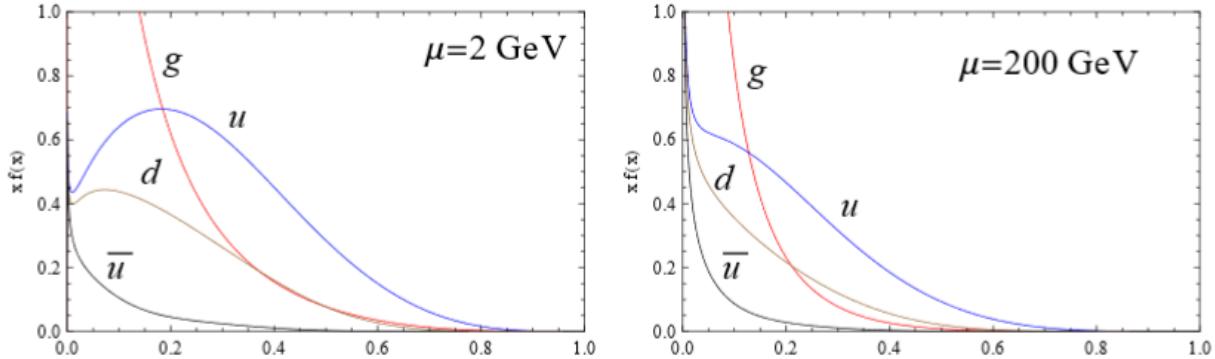


Abbildung 5.15.: In diesem Bildern ist die Partonverteilungsfunktion für zwei Kollisionsenergien dargestellt. Auf der x -Achse ist das Bjorken- x aufgetragen und auf der y -Achse ist die Häufigkeit dargestellt [7].

wurde, ist bei den in dieser Arbeit konstruierten Grafiken das Maximum noch nicht einmal bei einer Kollisionsenergie von 1096 GeV überschritten. Das kann durch zwei Aspekte geklärt werden. Zuerst sind die Anfangsbedingungen, welche verwendet wurden, eine vereinfachte Darstellung der Wirklichkeit gewesen. Das zweite Argument wieso eine Abweichung zu beobachten ist, ist das in „Quantum Field Theory and the Standard Model“ die analytische Arbeit nicht nach der „next to leading order“ abgebrochen wurde, sondern weitere Ordnungen innerhalb der DGLAP-Gleichungen mit einbezogen wurden.

6. Schlussbemerkungen

Mittels dieser Arbeit sollte die Frage, wie die Materie im Innersten ausschaut, am Beispiel des Protons beantwortet werden. Im Innersten besteht die Materie aus Elementarteilchen. Somit ist mithilfe der heutigen Methoden, den Teilchenbeschleunigern, die Idee von Leukipos und Demokrit zu bestätigen. Kant ist hingegen mit seiner Idee von einer immer weiter zerteilbaren Materie falsch. Des Weiteren konnte ein Formalismus ausgearbeitet werden, welches die Struktur des Protons bei hohen Energien beschreibt. Dazu wurde sich dem Feynmann-Formalismus bedient. In der Betrachtung des Protons wurden weitere Vereinfachungen gemacht, welche zu einer Integro-Differentialgleichung geführt haben, welche numerisch gelöst wurde. Diese numerische Lösung hat Eigenschaften des Verhaltens des Protons dargestellt. Es konnte herausgelesen werden, dass das Proton aus up-, up, down-Quarks besteht und diese Kombination über jede Kollisionenergie erhalten bleibt. Ebenfalls wurde die Erhöhung der Verteilungsfunktionen bei größere Energien für kleine Bjorken- x bestätigt. Dennoch beschreiben die gefundenen Resultate nicht exakt die Naturgegebenheiten wider. Dies konnte durch vereinfachte Anfangsbedingungen, welche verwendet wurden, sowie durch analytisch vereinfachte Rechnungen erklärt werden. Somit wurden einige Übereinstimmungen mit moderneren Grafiken gefunden, wie Sie in [7] einzusehen sind.

Literatur

- [1] Francis Halzen und Alan D. Martin. *Quarks and Leptons: An Interductory Course in Modern Particle Physics*. New York: John Wiley Sons, 1984.
- [2] Florian Herrmann. „Evolution of Parton Distribution Functions.“ Master Thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster. 2015.
- [3] K.Kovarik A.Kusina T.Jezo D.B.Clark C.Keppel F.Lyonnet J.G.Morfin F.I.Olness J.F.Owens I.Schienbein und J.Y.Yu. „Global analysis of nuclear parton distributions with uncertainties in the CTEQ framework.“ *Revisited. arXiv:1509.00792v2 [hep-ph]* (15.Feb 2016).
- [4] Karol Kovarik. „Hitchhiker’s Guide to Renormalisation.“ Private Notizen, Westfälische Wilhelms-Universität Münster. 2017.
- [5] K.A. Oliver. *Particle Physics Booklet*. University of California: Chineses Physics C, July 2014.
- [6] Owe Philipsen. *Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik*. Frankfurt am Main: Springer-Verlag GmbH, 2018.
- [7] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

A. Anhang

A.1. Feynmann-Regeln

Die Streuamplitude kann, mittels der Feynmann-Regeln, über ein Feynmann-Diagramm berechnet werden. Den verschiedenen geometrischen Formen in den Feynmann-Diagramme lassen sich mathematischen Objekten zuordnen. Es gibt drei verschiedene Objekte:

$$\text{ein-/auslaufendes Fermion} = \bar{u}(p')/u(p), \quad (\text{A.1})$$

$$\text{virtuelles Photon} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}, \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Vertexfaktor in QED} = ie\gamma^\mu. \quad (\text{A.3})$$

A.2. Elektron-Myon-Kollision

Mittels der Feynmann-Regeln kann die Amplitude \mathcal{M} berechnet werden. Um das Inverse der Amplitude zu berechnen, müssen folgende Relationen ausgenutzt werden.

$$\begin{aligned} [\bar{u}(k', s)\gamma^\mu u(k, s')]^\dagger &= \\ [u^\dagger(k', s)\gamma^0\gamma^\mu u(k, s')]^\dagger &= \\ [u(k, s')^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 u(k', s)] &= \\ [u(k, s')^\dagger\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 u(k', s)] &= \\ [\bar{u}(k, s')\gamma^\mu u(k', s)] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Hierfür müssen noch weitere Relationen ausgenutzt werden:

$$\bar{u} = u^\dagger\gamma^0, \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma^0\gamma^0 = 1, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (\text{A.7})$$

Als weitere mathematische Relationen um die Leptonentensoren zu erhalten, können die Diagramme in Spuren umgeschrieben werden.

$$Tr(\not{a}\not{b}) = 4ab, \quad (\text{A.8})$$

$$Tr(\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4) = 4(\gamma^{12}\gamma^{34} + \gamma^{14}\gamma^{23} - \gamma^{13}\gamma^{24}), \quad (\text{A.9})$$

$$Tr(\gamma^1\gamma^2) = 4\gamma^{12}. \quad (\text{A.10})$$

Um die Leptonentensoren zu vereinfachen kann eine Näherung benutzt werden.

$$p' \cdot p - m_\mu^2 = E_\mu^2 - p^2 - m_\mu^2 = m_\mu^2, \quad (\text{A.11})$$

$$k' \cdot k - m_e^2 = E_e^2 - p^2 - m_e^2 = m_e^2. \quad (\text{A.12})$$

Um ins Ruhesystem ($p = (m_\mu, 0, 0, 0)$) zu gelangen, kann mittels vektorieller und geometrischer Überlegungen, welche auf Abb. 2.1 gezeigt werden, folgende Größen umgeschrieben werden. Bei den folgenden Konstruktionen schließen die Vektoren k und k' den Winkel θ ein. Ist dazu $k^2 = k'^2 \approx 0$ kann mit

$$q = k' \sin \frac{\theta}{2} - k \sin \frac{\theta}{2}, \quad (\text{A.13})$$

$$q = p' \sin \frac{\theta}{2} - p \sin \frac{\theta}{2}, \quad (\text{A.14})$$

auf eine Abhängigkeit in q^2 geschlossen werden.

$$q^2 = (k' - k)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx -2k \cdot k', \quad (\text{A.15})$$

$$q^2 = (p' - p)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx -2p \cdot p'. \quad (\text{A.16})$$

Um Gleichung (2.13) zu erhalten muss zusätzlich folgende kinematische Relation ausgenutzt werden.

$$q^2 \approx -2k \cdot k' = -2EE'(1 - \cos \theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (\text{A.17})$$

A.3. Aufstellen des differentiellen Wirkungsquerschnittes

Um den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu bestimmen, muss der Proportionalitätsfaktor bezüglich der Streuamplitude bekannt sein. Die Feynmann-Diagramme, welche in dieser Arbeit verwendet werden, können auf folgendes Feynmann-Diagramm verallgemeinert werden. Dann kann der differentielle Wirkungsquerschnitt modelliert werden als

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{F} dQ. \quad (\text{A.18})$$

Dabei ist der Fluss (F) definiert durch

$$F = 4\sqrt{((p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2)} \quad (\text{A.19})$$

und

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^4(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}. \quad (\text{A.20})$$

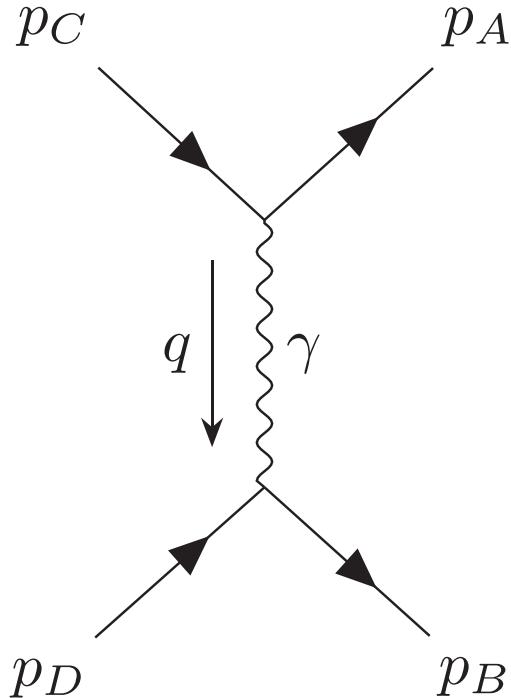


Abbildung A.1.: Hier ist ein Feynmann-Diagramm dargestellt. Dabei stellen p_C und p_D die einlaufenden Teilchen dar, wohingegen p_A und p_B die auslaufenden Teilchen darstellen. γ ist das Austauschteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung; das Photon. Dieses besitzt einen impuls q .

A.4. Partonmodell

Um den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Partonmodell zu errechnen, muss Gleichung (A.21) verwendet werden.

$$\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m}\right) = \delta\left(\frac{q^2}{2m\xi} - \frac{q^2}{2mx}\right) = \frac{2m}{Q^2}x^2\delta(\xi - x). \quad (\text{A.21})$$

Plagiatserklärung des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über die „*Beschreibung der Partonverteilungsfunktion mithilfe der DGLAP-Gleichungen*“ selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

(Datum, Unterschrift)