



WESTFÄLISCHE WILHELMС-UNIVERSITÄT MÜNSTER

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

BACHELORARBEIT

Monte-Carlo-Generation von Top-Quark-Zerfällen

Gisbert Hetkamp

betreut von
Dr. Karol KOVAŘÍK

29. August 2018

Erstgutachter: Prof. Dr. Michael Klasen
Zweitgutachter: Dr. Karol Kovařík

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	4
2. Das Top-Quark	4
2.1. Das Top-Quark im Standardmodell	4
2.1.1. Teilchen und Wechselwirkungen im Standardmodell	5
2.2. Top-Quark Zerfall	8
2.3. Theoretische Beschreibung des Zerfalls	9
3. Die Monte-Carlo-Methode	14
3.1. Monte-Carlo-Integration	14
3.2. Monte-Carlo-Generation	17
4. Vorbereitung des Integrals	18
4.1. Splitting relation	18
4.2. Ausintegrieren der Delta-Funktionen	19
4.3. Varianz-Reduktion durch Substitution	20
4.4. Lorentz-Boost	20
5. Integration und Event-Generation	22
5.1. Unpolarisiertes Top-Quark	22
5.1.1. Integration	22
Nomenklatur	22
Definition von Funktionen und Parametern	22
Die Schleife	24
Einsetzen und Ausgeben	27
Ergebnis der Integration	27
5.1.2. Event-Generation	28
Verfahren	28
Erwartungen	29
Ergebnisse der Event-Generation	31
Speicherung der Events	33
5.2. Polarisiertes Top-Quark	33
5.2.1. Neue Mittelung	33
5.2.2. Integration	34
Erwartung	35
Ergebnis der Integration	35
5.2.3. Event-Generation	35
Erwartungen	35
Ergebnisse der Event-Generation	36
6. Fazit	37

A. Rechnungen	39
A.1. Die gemittelte invariante Amplitude	39
A.2. Die gemittelte invariante Amplitude, Top-Quark polarisiert	41
A.3. Modifikation des Integrals für den Top-Quark-Zerfall	43
A.3.1. Ausintegration der Delta-Funktionen	43
A.3.2. Geschickte Substitution	43
B. Programmcode für die Integration und Event-Generation	45

1. Einführung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Zerfall eines Top-Quarks in ein Bottom-Quark, ein Positron und ein Elektronneutrino. Es wird zunächst erklärt, wie der Zerfall im Rahmen des Standardmodells und Störungstheorie erster Ordnung theoretisch beschrieben werden kann. Letztendlich führt die Beschreibung auf einen Ausdruck für die differenzielle Zerfallsbreite $d\Gamma$, welche Informationen über Wahrscheinlichkeiten der Endzustände enthält.

Daran anschließt sich eine Vorstellung der Monte-Carlo-Methode und der Idee bei ihrer Anwendung auf den betrachteten Zerfall. Die Monte-Carlo-Methode bietet eine recht einfache umsetzbare Möglichkeit, sich numerisch einem Problem wie dem Top-Quark-Zerfall oder auch weitaus komplexeren Teilchenprozessen anzunehmen. Man kann damit neben der Zerfallsbreite Γ auch Winkelverteilungen der Zerfallsprodukte zu Tage tragen. Die besagten Winkelverteilungen erhält man im Zuge der Titel gebenden Event-Generation. Wie das im konkreten Fall aussehen kann, wird anhand des für diese Arbeit verfassten *Python*-Codes erläutert.

Es folgen die Ergebnisse der Event-Generation und der Abgleich dieser mit auf anderem Wege getätigten Abschätzung über die Verteilungen. Zunächst geschieht dies für den Zerfall eines unpolarisierten Top-Quarks und darauffolgend für den eines polarisierten Top-Quarks.

Noch ein kleiner Hinweis vorab: Alle Rechnungen in dieser Arbeit geschehen in natürlichen Einheiten, d.h. $\hbar = 1 = c$. Daraus folgt u.a. $e^2 \approx \frac{4\pi}{137}$ mit der Elementarladung e und der Feinstrukturkonstante $\alpha \approx \frac{1}{137}$.

2. Das Top-Quark

2.1. Das Top-Quark im Standardmodell

Bei dem Standardmodell der Teilchenphysik handelt es sich um ein Modell zur Beschreibung des Verhaltens der bisher bekannten und nachgewiesenen Elementarteilchen. Der Begriff Elementarteilchen bezieht sich dabei auf die bislang kleinste Ebene von Teilchen, aus denen Materie aufgebaut ist. Da mit dem Standardmodell alleine nicht alle Phänomene im Universum erklärt werden können, existieren zahlreiche Vorschläge zur Erweiterung des Standardmodells, wie beispielsweise die Hinzunahme der Supersymmetrie (SUSY), aus welcher Möglichkeiten zur Beschreibung dunkler Materie hervorgehen. Neben der dunklen Materie findet auch die Gravitation keine Berücksichtigung im Standardmodell. Diese ist jedoch vergleichsweise so schwach, dass sie bei Prozessen der übrigen drei fundamentalen Wechselwirkungen nicht auffällt. Die genannten drei anderen fundamentalen Wechselwirkungen sind namentlich die starke Wechselwirkung, die schwache Wechselwirkung und die elektromagnetische Wechselwirkung. Der Grund, warum Gravitation im Universum trotzdem eine sehr wichtige Rolle spielt, ist der, dass

ganz allgemein die Anhäufung von Materie z.B. zu einem Planeten seine gravitative Anziehungskraft erhöht, während die elektromagnetische Wechselwirkung im Fall von diesem und einem damit interagierenden zweiten Planeten in der Summe verschwindend gering ist, da Planeten und andere astronomische Körper meistens ladungsneutral sind, also so gut wie keine elektrostatische Anziehung oder Abstoßung zustande kommt. Auch die starke und die schwache Wechselwirkung haben zwischen Teilchen, deren Entfernung sich auf astronomischen Längenskalen bewegen, keinen Einfluss, da ihre jeweilige Reichweite ohnehin subatomare Dimensionen nicht übersteigt.

Da es in dieser Arbeit allerdings weder um gravitative Einflüsse auf subatomare Teilchen, noch um dunkle Materie, sondern um den Zerfall des im Standardmodell enthaltenen Top-Quarks gehen soll, wird nun eine kurze Vorstellung der Teilchen und Wechselwirkungen im Standardmodell erfolgen.

2.1.1. Teilchen und Wechselwirkungen im Standardmodell

Das Standardmodell umfasst jeweils sechs Quarks und Leptonen, dazu vier Arten von Austauschteilchen der elektromagnetischen, starken und schwachen Wechselwirkung und das Higgs-Boson. Die Quarks und Leptonen sind Spin $1/2$ -Teilchen und damit Fermionen. Als Fermionen werden allgemein alle Teilchen mit halbzahligem Spin bezeichnet. Bosonen sind entsprechend Teilchen mit ganzzahligem Spin und unterscheiden sich in einigen Eigenschaften grundlegend von Fermionen. Nach dem Pauli-Prinzip können zwei Fermionen nicht den gleichen quantenmechanischen Zustand einnehmen¹. Bosonen hingegen sind dazu im Stande, weshalb Phänomene wie die Bose-Einstein-Kondensation auftreten können, bei der eine makroskopische Anzahl von Bosonen den gleichen Zustand einnimmt. Eine Aufzählung der Quarks ist in Tabelle 1 und eine der Leptonen in Tabelle 2 zu sehen. Zu jedem der aufgeführten Teilchen existiert ein Antiteilchen, dessen Ladung das jeweils andere Vorzeichen trägt. Der prinzipielle Unterschied zwischen den beiden Teilchenarten ist, dass die Leptonen nicht der starken Wechselwirkung unterliegen. Die ungeladenen Neutrinos wechselwirken zudem nicht einmal elektromagnetisch, sodass für diese auf Elementarteilchenebene lediglich die schwache Wechselwirkung (wegen Vernachlässigbarkeit der Gravitation) eine Rolle spielt. Das ist der Grund, aus dem Neutrinos trotz ihres hohen Teilchenflusses auf der Erde (allein von der Sonne kommend mit mehreren Milliarden pro cm^2 pro Sekunde) nur unter hohem Aufwand in abzählbarer Anzahl registriert werden können.

¹Bei einer Vertauschung von zwei Fermionen muss das Vorzeichen der Gesamtwellenfunktion eines Systems aus Fermionen wechseln. Wären die Zustände der vertauschten Fermionen identisch, müsste also die Gesamtwellenfunktion 0 sein und wäre nicht existent. Bei Bosonen wechselt das Vorzeichen nicht.

Tabelle 1: Bezeichnungen und Eigenschaften der sechs Quarks im Standardmodell [1]. Die IDs sind Konventionen und dienen unter anderem der Bezeichnung der Teilchen in Monte-Carlo-Generatoren.

Quark	Symbol	Ladung [e]	Spin	Masse [GeV]	ID
Up-Quark	u	2/3	1/2	0.0022 ^{+0.0005} _{-0.0004}	2
Down-Quark	d	-1/3	1/2	0.0047 ^{+0.0005} _{-0.0003}	1
Charm-Quark	c	2/3	1/2	1.275 ^{+0.025} _{-0.035}	4
Strange-Quark	s	-1/3	1/2	0.096 ^{+0.009} _{-0.003}	3
Top-Quark	t	2/3	1/2	173.1(9)	6
Bottom-Quark	b	-1/3	1/2	4.18 ^{+0.04} _{-0.03}	5

Das Antiquark zu einem Quark q wird meistens durch \bar{q} gekennzeichnet. Da Quarks der starken Wechselwirkung unterliegen, kommen sie in der Natur nicht einzeln, sondern nur Verbindung mit anderen Quarks vor. Dieser Umstand wird durch eine den Quarks immanente Farbladung erklärt, welche den „Angriffspunkt“ der starken Wechselwirkung darstellt. Mögliche Farbladungen werden bezeichnet als r, g und b (rot, grün, blau) mit den entsprechenden Antifarben \bar{r} , \bar{g} und \bar{b} . Ähnlich wie bei elektrisch geladenen Teilchen, bestreben auch farbgeladene Teilchen Neutralität, in diesem Fall Farbneutralität. Der Unterschied zur elektrischen Ladung besteht darin, dass Neutralität nicht nur durch zwei entgegengesetzte Ladungen ($+e$ und $-e$) erreicht werden kann, also beispielsweise mit r und \bar{r} , sondern auch durch die Kombination von r, g und b (bzw. \bar{r} , \bar{g} und \bar{b}). Im additiven Farbkreis ergibt gerade die Mischung aus rot, grün und blau weiß, was dann für Farbneutralität steht. Teilchen, die aus drei verschiedenfarbigen Quarks bestehen, oder besser, die solche drei Quarks als Valenz-Quarks besitzen, werden Baryonen genannt. So sind beispielsweise die Valenz-Quarks im Proton zwei Up-Quarks und ein Down-Quark, welche für die Interaktion mit der Umgebung verantwortlich sind (wie auch Valenzelektronen im Atom das Reaktionsverhalten bestimmen). Daneben existieren allerdings kurzlebige, virtuelle Quark-Antiquark-Paare im Proton, die sogenannten See-Quarks. Teilchen aus Quark und Antiquark (z.B. mit Farben r und \bar{r}), sind Mesonen. Ein bekannter Vertreter ist das π -Meson (auch Pion), welches die Wechselwirkung zwischen Nukleonen im Atomkern vermittelt. Diese sogenannte starke Kernkraft, ist gewissermaßen die Restwechselwirkung zwischen farbneutralen Nukleonen (vergleichbar mit der Anziehungladungsneutraler Atome durch die Van-der-Waals-Kraft).

Wie im Falle der starken Kernkraft werden auch die elektromagnetische, die starke und die schwache Wechselwirkung durch Austauschteilchen vermittelt. Das bedeutet, die Interaktion von Teilchen erfolgt durch den Austausch eines weiteren Teilchens, welches Energie und Impuls von einem Teilchen auf ein anderes überträgt. Dieser Übertrag muss allerdings nicht zwingend der relativistischen Energie-Impuls-Relation

$$E^2 - p^2 = m^2 \quad (2.1)$$

(in natürlichen Einheiten, d.h. $\hbar = 1 = c$, E Energie, p Impuls, m Masse) des Austauschteilchens genügen, sodass jenes auch virtuell sein kann. Eine kurze Übersicht der Austauschteilchen ist in Tabelle 3 gegeben. In Abb. 1 ist beispielhaft eine Elektron-Myon-Streuung dargestellt.

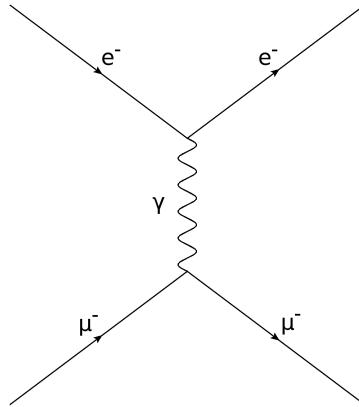


Abbildung 1: Feynman-Diagramm für die Elektron-Myon-Streuung über die elektromagnetische Wechselwirkung (Austausch eines virtuellen Photons).

Tabelle 2: Bezeichnungen und Eigenschaften der sechs Leptonen im Standardmodell [1]. Die IDs sind Konventionen und dienen unter anderem der Bezeichnung der Teilchen in Monte-Carlo-Generatoren.

Lepton	Symbol	Ladung [e]	Spin	Masse [GeV]	ID
Elektronneutrino	ν_e	0	$1/2$	≈ 0	12
Elektron	e^-	-1	$1/2$	$5.109989461(31) \cdot 10^{-4}$	11
Myonneutrino	ν_μ	0	$1/2$	≈ 0	14
Myon	μ^-	-1	$1/2$	$0.1056583745(24)$	13
Tauneutrino	ν_τ	0	$1/2$	≈ 0	16
Tauon	τ^-	-1	$1/2$	$1.77686(12)$	15

Der einem Lepton ℓ zugehörige Antipartner wird meistens mit $\bar{\ell}$ bezeichnet.

Tabelle 3: Bezeichnungen und Eigenschaften der Austauschteilchen im Standardmodell [1]. Das W^- ist das Antiteilchen zum W^+ . Die IDs sind Konventionen und dienen unter anderem der Bezeichnung der Teilchen in Monte-Carlo-Generatoren.

Teilchen	Symbol	Ladung [e]	Spin	vermittelt Ww.	Masse [GeV]	ID
Photon	γ	0	1	elektromagnetische	0	22
Gluon	g	0	1	starke	0	21
Z-Boson	Z	0	1	schwache	91.1876(21)	23
W-Boson	W^\pm	± 1	1	schwache	80.379(12)	± 24

2.2. Top-Quark Zerfall

Das Top-Quark ist das mit Abstand schwerste der sechs Quarks und nimmt aufgrund der daraus resultierenden sehr kurzen Lebensdauer von $\tau \approx 5 \cdot 10^{-25}$ s[1] eine Sonderstellung ein. Anders als die anderen Quarks, welche sich durch die starke Wechselwirkung schnell zu Baryonen und Mesonen vereinen, hat das Top-Quark dazu oft keine Zeit, bevor es zerfällt, wodurch Beobachtung des Verhaltens eines „quasifreien“ Quarks möglich sind. Der Zerfall des Top-Quarks verläuft über die schwache Wechselwirkung und führt fast ausschließlich zur Produktion eines Bottom-Quarks und eines W^+ -Bosons. Statt der eines Bottom-Quarks ist theoretisch auch die Produktion eines anderen down-artigen Quarks (Down-Quark, Strange-Quark) möglich, da der schwache Isospin-Partner des Top-Quarks eine Überlagerung aus den Quarks d, s und b ist. Bei einem Zerfall über einen ladungssenkenden Strom (Abgabe des W^+) oder einen ladungshebenden Strom (Abgabe eines W^-) kann nur der entsprechende Isospin-Partner des zerfallenen Teilchens entstehen. Es hängt dann von der Zusammensetzung ab, welche der drei Komponenten letztendlich beobachtet wird. Die schwachen Isospin-Partner der Leptonen e^- , μ^- und τ^- sind ihre jeweiligen Neutrinos. Daher bleibt bei dem Zerfall eines W -Bosons die Leptonenfamilienzahl erhalten (bei Neutrinooszillation allerdings nicht). Die Leptonenfamilienzahl eines W ist für alle drei Flavours (e , μ , τ) null, daher entstehen bei dessen Zerfall in Leptonen immer nur ein Lepton und das Antiteilchen seines jeweiligen Isospin-Partners, da die Leptonenzahlen für Antiteilchen ein umgekehrtes Vorzeichen erhalten.

Wie sich die schwachen Isospin-Partner der Quarks tatsächlich zusammensetzen, ergibt sich aus der CKM-Matrix (CKM für Cabibbo-Kobayashi-Maskawa).

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Der schwache Isospin-Partner des Bottom-Quarks ist b' . Der Eintrag V_{tb} der CKM-Matrix, der den Übergang des t zum b beschreibt (und umgekehrt), beträgt 0.99915 ± 0.00005 [7]. Die Wahrscheinlichkeit für den schwachen ladungssenkenden Strom eines t

zu einem b ergibt sich aus dem Betragsquadrat $|V_{tb}|^2$. Der Übergang zum Down-Quark oder Strange-Quark wird daher im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt. Zudem wird sich auf den Zerfall des W^+ in Positron und Elektronneutrino konzentriert. Der gesamte Zerfall ist in Abb. 2 einmal dargestellt.

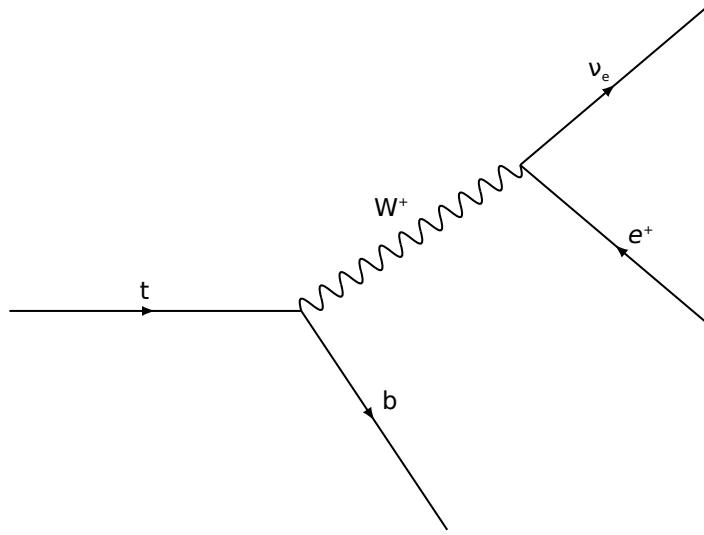


Abbildung 2: Feynman-Diagramm für den Zerfall eines Top-Quarks in Bottom-Quark, Positron und Elektronneutrino.

2.3. Theoretische Beschreibung des Zerfalls

Das Top-Quark als Fermion kann mit Hilfe der Dirac-Gleichung beschrieben werden. Die Dirac-Gleichung ergibt sich aus der Forderung, linear in $\frac{\partial}{\partial t}$ und in ∇ zu sein, also

$$(\alpha \cdot P + \beta m) \psi = H\psi = i \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (2.3)$$

mit dem Impulsoperator $P = -i\nabla$ und dem Hamilton-Operator H . Die Wellenfunktion ψ soll dabei zusätzlich die relativistische Energie-Impuls-Relation (Gleichung (2.1)) erfüllen, insofern, dass

$$(P^2 + m^2) \psi = H^2 \psi \quad (2.4)$$

Diesen beiden Forderungen können unter Betrachtung von α_i ($i = 1, 2, 3$) und β als 4×4 -Matrizen und Berücksichtigung der Bedingungen

$$(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) = 0 = (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \text{ und } \alpha_i^2 = 1 \quad (2.5)$$

erfüllt werden. Eine mögliche Wahl der vier Matrizen ist die häufig verwendete Dirac-Pauli Darstellung. In dieser ist

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

mit den drei Pauli Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

und

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1_{(2 \times 2)} \\ 1_{(2 \times 2)} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Führt man die Diracschen γ -Matrizen

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (\beta, \beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \beta\alpha_3) \quad (2.9)$$

und die Kurzschreibweise

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.10)$$

ein, lässt sich die Dirac-Gleichung schreiben als

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (2.11)$$

Mit dem Ansatz einer ebenen Welle

$$\psi = u(p) e^{-ix \cdot p} \quad (2.12)$$

für ein freies Fermion ergibt sich für den Dirac Spinor $u(p)$ die Gleichung

$$(\not{p} - m) u = 0 \quad (2.13)$$

mit $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. Es existieren nun vier orthogonale Lösungen für Gleichung (2.13), zwei für Energien $E > 0$ ($u^{(1,2)}$) und zwei für $E < 0$ ($u^{(3,4)}$). Diese können lauten

$$u^{(1,2)} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi^{(1,2)} \\ \frac{\sigma \cdot p}{E + m} \chi^{(1,2)} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$u^{(3,4)} = \sqrt{|E| + m} \begin{pmatrix} \frac{-\sigma \cdot p}{|E| + m} \chi^{(1,2)} \\ \chi^{(1,2)} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

mit beispielsweise

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

wobei der Faktor $\sqrt{E + m}$ aus der Normierung von u auf $2E$ herröhrt und $\sigma \cdot p$ eine Kurzschreibweise für $\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z$ ist. Die beiden Lösungen für $E < 0$ mit dem Impuls p stellen die Spinoren mit $E > 0$ und Impuls $-p$ für ein Antiteilchen dar. Man schreibt daher auch

$$u^{(3,4)}(-p) = v^{(2,1)}(p) \quad (2.17)$$

und erhält so einen Spinor v für Antiteilchen. Für diesen lautet die Dirac-Gleichung dann einfach

$$(\not{p} + m) v = 0 \quad (2.18)$$

Durch geschickte Verrechnung der Dirac-Gleichung (Gleichung (2.13)) mit ihrer adjunktiven Version lässt sich die Gleichung

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0, \text{ mit } \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (2.19)$$

erhalten, welche als Kontinuitätsgleichung aufgefasst werden kann. Somit ist die Vierer-Wahrscheinlichkeitsstromdichte gegeben durch

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.20)$$

Auf weitere Ausführungen zur Dirac-Gleichung wird an dieser Stelle verzichtet und stattdessen auf die von Halzen und Martin verfasste Einführung in die Teilchenphysik, Quelle [4] verwiesen.

Nach der Beschreibung der an dem Zerfall beteiligten Fermionen mittels der Dirac-Gleichung ist nun das Ziel, einen differentiellen Ausdruck der Zerfallswahrscheinlichkeit $d\Gamma$ in Abhängigkeit von den jeweiligen Energien und Impulsen der Teilchen zu erhalten. Anschließend kann dann durch Integration über den Phasenraum der möglichen Ausgangszustände aller Teilchen die Zerfallswahrscheinlichkeit Γ des Top-Quarks in dem betrachteten Zerfall errechnet werden und es können Events, welche als zufällige Zerfälle interpretiert werden können, generiert werden. In erster Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude T_{fi} für den Übergang eines Zustandes $\psi_i(x)$ in den Zustand $\psi_f(x)$ unter Einfluss eines Störpotentials $V(x)$ gegeben durch

$$T_{fi} = -i \int \psi_f^\dagger(x) V(x) \psi_i(x) d^4x \quad (2.21)$$

Für ein elektromagnetisches Feld A^μ beispielsweise hat das Störpotential die Form $V = -e\gamma^0\gamma_\mu A^\mu$. Damit kann Gleichung (2.21) auf die Form

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad (2.22)$$

gebracht werden. Der elektrische Strom $j_\mu^{fi} = -e\bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i$ beschreibt den Übergang von Zustand ψ_i nach ψ_f . Im Falle einer Teilchenkollision wird A^μ selbst durch ein zweites Teilchen erzeugt. Dann wird A^μ durch den Strom des zweiten Teilchens, zusammen mit einem Propagator des für die Wechselwirkung verantwortlichen Photons bestimmt, sodass

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{(1)} \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_\mu^{(2)} d^4x \quad (2.23)$$

mit dem vom Photon getragenen Viererimpulsübertrag $q = p_f - p_i$. Da vor und nach der Interaktion die Teilchen als frei betrachtet werden, erhält man (Ansatz für ebene Wellen,

Gleichung (2.12)) mit $j_\mu^{(1)} = -e\bar{u}_c\gamma_\mu u_a e^{-ix \cdot (p_a - p_c)}$ (analog für den Strom $\psi_b \rightarrow \psi_d$)

$$T_{fi} = -i(-e\bar{u}_c\gamma_\mu u_a) \left(-\frac{1}{q^2}\right) (-e\bar{u}_d\gamma^\mu u_b) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a - p_c + p_b - p_d) \quad (2.24)$$

Die Delta-Funktion sowie die $(2\pi)^4$ stammen von der Integration der Exponentialfunktionen der einzelnen Ströme. Anschaulich erhält die Delta-Funktion den Gesamtviereimpuls. Die sogenannte invariante Amplitude \mathfrak{M} ist hierbei definiert als

$$\mathfrak{M} = (-e\bar{u}_c\gamma_\mu u_a) \left(-\frac{1}{q^2}\right) (-e\bar{u}_d\gamma^\mu u_b) = (ie\bar{u}_c\gamma^\mu u_a) \left(\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) (ie\bar{u}_d\gamma^\nu u_b) \quad (2.25)$$

Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ (Minkowski-Metrik) verbindet dabei die beiden Ströme $\psi_a \rightarrow \psi_c$ und $\psi_b \rightarrow \psi_d$. Für eine genaue und übersichtliche Herleitung siehe wieder Halzen und Martin ([4]).

Das betrachtete Beispiel beschreibt die Interaktion von Fermionen über die elektromagnetische Wechselwirkung. Für den Top-Quark-Zerfall, der über die schwache Wechselwirkung erfolgt, ändern sich im Wesentlichen drei Dinge. Zum einen besitzt das Austauschteilchen für diesen Prozess (das W^+ -Boson) im Gegensatz zum Photon eine Masse, sodass im Propagator neben den zwei transversalen auch ein Anteil der longitudinale Polarisierung auftaucht. Der neue Propagator (multipliziert mit i) ist

$$\frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2}}{q^2 - m_W^2 + im_W\Gamma_W} \quad (2.26)$$

Der imaginäre Zusatz im Nenner enthält die Zerfallsbreite des W^+ -Bosons Γ_W und bezieht dadurch in gewisser Weise die Lebensdauer des W^+ mit in den Propagator ein. So entsteht keine Singularität, falls $q^2 = m_W^2$ ist. Des Weiteren werden die beiden Ströme nun statt der elektrischen Elementarladung e über die schwache Kopplung $\frac{g}{\sqrt{2}}$ gekoppelt. Diese hängt über den Weinbergwinkel mit der Elementarladung zusammen, in Zahlen:

$$g \sin \theta_W = e \quad \text{mit} \quad \sin^2 \theta_W \approx 0.231 [7] \quad (2.27)$$

Zuletzt muss noch beachtet werden, dass die schwache Wechselwirkung die Erhaltung der Parität verletzt. Im Fall des schwachen geladenen Stromes (bei Austausch von W^+ bzw. W^-) wird die Paritätserhaltung sogar maximal verletzt, was sich dadurch äußert, dass sie nur an den linkshändigen Anteil eines Teilchens und den rechtshändigen eines Antiteilchens koppelt. Links- und Rechtshändigkeit beziehen sich dabei auf die Projektion des Spins auf die Richtung des Impulses. Ist der Spin eines Teilchens parallel zu seinem Impuls, ist seine Helizität $+\frac{1}{2}$, es ist rechtshändig. Bei antiparalleler Ausrichtung des Spins zum Impuls ist die Helizität $-\frac{1}{2}$, das Teilchen ist linkshändig. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, wird im jeweiligen schwachen Strom $\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ mit

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (2.28)$$

ergänzt. Dieser Operator projiziert den entsprechenden Anteil eines Spinors heraus, so dass nur dieser in die Wechselwirkung eingeht. Die invariante Amplitude lässt sich dann schreiben als

$$\mathfrak{M} = \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_c \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_a \right] \left(\frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2}}{q^2 - m_W^2 + im_W \Gamma_W} \right) \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_d \gamma^\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_b \right] \quad (2.29)$$

Der gewünschte differentielle Ausdruck für die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Teilchens a in die Teilchen b, c und d ergibt sich nun aus dem Betragsquadrat der invarianten Amplitude $|\mathfrak{M}|^2$, welches die Wahrscheinlichkeit des Stromes $a \rightarrow b$, gefolgt von der Propagation des W -Bosons, gefolgt der des Stromes $c \rightarrow d$ enthält, multipliziert mit dem lorentzinvarianten Phasenraumelement dQ , welches neben den Phasenraumelementen der Teilchen b, c und d auch die Sicherstellung der Viererimpulserhaltung, die mit $(2\pi)^4$ multiplizierte Deltafunktion (siehe Gleichung (2.24)) beinhaltet. Aufgrund der vorherigen Normierung auf $2E$ Teilchen pro Einheitsvolumen wird schließlich noch der Faktor $\frac{1}{2E_a}$ benötigt, wobei E_a die Energie des Teilchens a ist und in seinem Schwerpunktsystem einfach seine Masse m_a beträgt. Es gilt also im Schwerpunktsystem des Teilchens a

$$d\Gamma_1 = \frac{1}{2m_a} |\mathfrak{M}_1|^2 dQ \quad (2.30)$$

mit

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a - p_b - p_c - p_d) \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3 2E_b} \frac{d^3 p_c}{(2\pi)^3 2E_c} \frac{d^3 p_d}{(2\pi)^3 2E_d} \quad (2.31)$$

Der Index 1 soll andeuten, dass es noch weitere differentielle Zerfallsbreiten gibt, die alle von der Wahl der einzelnen Spinoren abhängen. Will man eine allgemeine Zerfallsbreite für einen unpolarisierten Top-Quark-Zerfall ermitteln, sollte eine Mittelung über die möglichen Spinoren vorgenommen werden, also

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{Spins} |\mathfrak{M}|^2 \quad (2.32)$$

wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ aufgrund der zwei möglichen Spinzuständen eingefügt wird, in denen Teilchen a vorliegen kann. Die vollständige Zerfallsbreite für den Zerfall $a \rightarrow b, c, d$ ist dann

$$\Gamma = \int d\Gamma = \int \frac{1}{2m_a} |\overline{\mathfrak{M}}|^2 dQ \quad (2.33)$$

Dieses Integral gilt es später zu lösen bzw. mittels Monte-Carlo-Integration anzunähern. Eine ausführliche Berechnung des mittleren Betragsquadrates der invarianten Amplitude für den zu behandelnden Top-Quark-Zerfall ist in Anhang A.1 zu finden. Das Vorgehen bei der Monte-Carlo-Integration und auch der Event-Generation wird im folgenden Abschnitt 3 beschrieben.

3. Die Monte-Carlo-Methode

Monte-Carlo-Methode ist der Oberbegriff für eine Vielzahl von Techniken, die sowohl im Bereich der numerischen Integration als auch in dem der Simulation von Prozessen eingesetzt werden. Ein wesentlicher Unterschied zu anderen numerischen Integrationsverfahren ist, dass die zu integrierende Funktion nicht wie etwa bei der Trapez- oder Simpsonregel an vorher festgelegten Punkten ausgewertet wird, sondern die Punkte zufällig aus dem Raum, über den die Funktion integriert werden soll, ausgewählt werden. Der entscheidende Vorteil dieser zufälligen Auswahl von Punkten liegt unter anderem in der schneller sinkenden Abweichung des numerisch genäherten Integrals vom exakten Wert bei Integration über viele Dimensionen, da diese unabhängig von der Dimension proportional ist zu $1/\sqrt{N}$ mit N als Zahl der ausgewerteten Punkte, während die Abweichung bei anderen Approximationsverfahren, wie z.B. der schon genannten Trapez- oder Simpsonregel mit zunehmender Zahl an Dimensionen langsamer sinkt.

Die Monte-Carlo-Generation, also das Generieren von Events mittels der schon für die Integration genutzten zufälligen Auswahl von Punkten innerhalb bestimmter Abgrenzungen funktioniert sehr ähnlich. Die betrachtete Funktion wird zunächst wieder am jeweiligen Punkt ausgewertet. Jetzt wird allerdings ein weiterer Wert ausgewürfelt und geprüft, ob er am entsprechenden Punkt unter die Funktion fällt, also kleiner als der Funktionswert an dieser Stelle ist, oder nicht. In erstem Fall wird der gesamte Vorgang als Treffer (Hit) verbucht, in zweitem einfach nicht. Wiederholt man das Ganze in ausreichender Anzahl und merkt sich für jeden Treffer den ausgewürfelten Punkt im Raum, kann man Erkenntnisse darüber gewinnen, wie die Häufigkeit von Treffern mit der Wahl der einzelnen Koordinaten in Zusammenhang steht. Dieser Umstand ist im Rahmen dieser Arbeit besonders interessant, da das Generieren von Events in Bezug auf die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Teilchens als die Simulation zufälliger Zerfälle dieses Teilchens interpretiert werden kann. So können unter anderem Winkelverteilungen der Zerfallsprodukte erhalten werden.

Da es aber ohnehin gängig und sinnvoll ist, zunächst eine Monte-Carlo-Integration durchzuführen, bevor dann tatsächlich die Events generiert werden, wird im Folgenden erst einmal auf die Integration eingegangen.

3.1. Monte-Carlo-Integration

Das Vorgehen bei der Monte-Carlo-Integration beruht auf der Tatsache, dass ein Integral I durch den Erwartungswert der zu integrierenden Funktion $f(x)$ multipliziert mit dem Raum, über den integriert wird, ausgedrückt werden kann, also

$$\int_a^b f(x)dx = \langle f(x) \rangle (b - a) \quad (3.1)$$

Dabei ist $\langle f(x) \rangle$ natürlich der Erwartungswert nur innerhalb des betrachteten Raumes (bzw. des Intervalls). Eine Näherung für den Erwartungswert kann erhalten werden, in-

dem Funktionswerte $f(x_i)$ von verschiedenen Stellen $x_i \in [a, b]$ aufsummiert und schließlich durch die Anzahl der Summanden geteilt werden:

$$\langle f(x) \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (3.2)$$

Errechnet man unter Verwendung dieses Erwartungswertes die Varianz σ^2 von $f(x)$, also die Mittlere quadratische Abweichung von $f(x)$ vom Erwartungswert $\langle f(x) \rangle$, erhält man

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\langle f(x) \rangle - f(x_i))^2 = \langle f(x)^2 \rangle - \langle f(x) \rangle^2 \quad (3.3)$$

Die Standardabweichung von $f(x)$ ist dann einfach σ . Ein durch einen einzigen Funktionswert approximierter Erwartungswert müsste also mit

$$\langle f(x) \rangle \approx f(x) \pm \sigma \quad (3.4)$$

angegeben werden. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass in diesem Fall die Varianz einer Summe von Zufallsvariablen lediglich die Summe der einzelnen Varianzen ist, sodass für das ursprünglich in Gleichung (3.2) definierte $\langle f(x) \rangle$ gilt

$$\sigma_{\langle f(x) \rangle} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma^2} = \frac{\sqrt{N}}{N} \sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (3.5)$$

mit der Standardabweichung $\sigma_{\langle f(x) \rangle}$ des errechneten Erwartungswertes in Bezug auf den tatsächlichen. Und somit ist

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} \right) (b - a) \quad (3.6)$$

Der Fehler der Integration durch diese Anwendung der Monte-Carlo-Methode ist proportional zu $1/\sqrt{N}$, es müssen also 100-mal mehr zufällige Punkte generiert und ausgewertet werden, um die Genauigkeit der Integration um eine Nachkommastelle zu verbessern. Man geht dabei davon aus, dass der Wert des Integrals für große N eine Normalverteilung um den exakten Wert bildet (Zentraler Grenzwertsatz). Das bedeutet für die Interpretation der errechneten Abweichung, dass sich der exakte Wert des Integrals mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 68.3% innerhalb der durch $\sigma_{\langle f(x) \rangle}(b - a)$ gegebenen Reichweite des genäherten Wertes befindet (entsprechend mit einer von etwa 95.5% innerhalb der durch $2\sigma_{\langle f(x) \rangle}(b - a)$ gegebenen usw.). Für ein Integral in einer Dimension gibt es, wie schon oben angedeutet, deutlich effizientere Näherungsverfahren. Die gerade errechnete Standardabweichung verbleibt jedoch in ihrer Proportionalität zu $1/\sqrt{N}$, während der Exponent des N bei vielen anderen numerischen Integrationsmethoden mit wachsender Zahl an Dimensionen gegen Null geht.

Zur Veranschaulichung der Monte-Carlo-Integration wird im Folgenden einmal das Verfahren in einfachster Form mit Hilfe der Programmiersprache *Python* auf die Sinusfunktion über dem Intervall $[0, \pi]$ angewandt. Die Essenz des dafür geschriebenen Programm-codes sieht folgendermaßen aus:

```
In [6]: summe_f = 0      #Summe aller Funktionswerte f
summe_f_quad = 0 #Summer aller f^2

for k in range(10000):    #Schleife mit 10000 Durchläufen
    r = rd.random()*np.pi #Zufallswert r zwischen 0 und pi
    f = np.sin(r)          #Funktionswert von r
    summe_f += f           #Addieren von f zur Summe der f
    summe_f_quad += f**2  #analog für f^2

f_erw = summe_f/10000           #Errechnung der Erwartungswertes von f
f_quad_erw = summe_f_quad/10000 #analog für f^2
sigma_f_quad = f_quad_erw - f_erw**2 #Sigma^2 von f

sigma_erw = np.sqrt(sigma_f_quad/10000) #Sigma des Erwartungswertes

I = f_erw * np.pi           #Wert des genäherten Integrals
sigma_I = sigma_erw * np.pi #Sigma davon

print('Wert des Integrals = ', I, '+-', sigma_I) #Ausgabe der Ergebnisse
```

Wert des Integrals = 2.00076682497 +- 0.00967335731959

In jedem der 10000 Schleifendurchläufe wird die vorher zu null gesetzte Summe der Funktionswerte, wie auch die der Quadrate davon um den entsprechenden neuen Wert erhöht. Der in der Schleife definierte Wert r ist hier der entscheidende Zufallspunkt aus dem Intervall $[0, \pi]$. Im Anschluss werden daraus dann die Erwartungswerte und daraus wiederum das Integral und seine Abweichung errechnet. In diesem Fall ergab sich:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx \approx 2.00077 \pm 0.00967 \quad (3.7)$$

Der exakte Wert (2) liegt also im berechneten Unsicherheitsintervall. Wiederholt man den gesamten Vorgang, können allerdings auch Ergebnisse zustande kommen, bei denen das nicht so ist. Zwecks Veranschaulichung des Zentralen Grenzwertsatzes und der Aussagekraft der errechneten Abweichung sind deshalb die (normierten) Häufigkeiten der Ergebnisse von 10000 Integrationen der Sinusfunktion mit jeweils 10000 Zufallspunkten inklusive der erwarteten Normalverteilung für eines der errechneten σ in Abb. 3 dargestellt. Der Anteil der in das Intervall $[2 - \sigma_I, 2 + \sigma_I]$ gefallenen Ergebnisse betrug bei diesem Durchlauf 0.679 und der der in $[2 - 2\sigma_I, 2 + 2\sigma_I]$ gefallenen 0.9559. Genau diesen Umstand erwartet man von einem normalverteilten Erwartungswert.

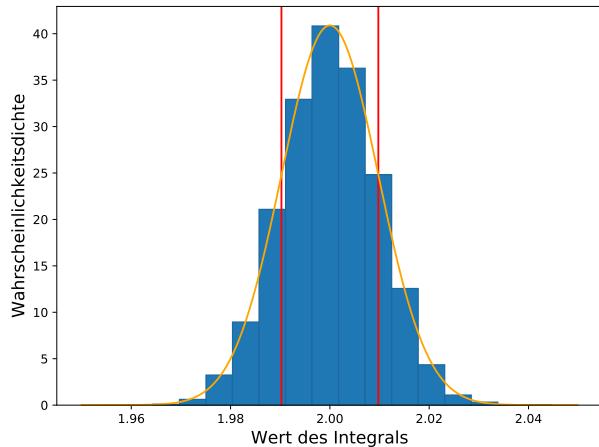


Abbildung 3: Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der Werte von 10000 Integrationen der Sinusfunktion über dem Intervall $[0, \pi]$ mit jeweils 10000 Zufallspunkten (blaues Histogramm, normiert). Außerdem dargestellt ist die Normalverteilung bezüglich $\sigma_I = \sigma_{\langle \sin(x) \rangle} \pi$ des zuletzt errechneten Integrals (orange) und das Intervall $[2-\sigma_I, 2+\sigma_I]$ (rot).

Darüber hinaus ist deutlich die Ähnlichkeit der eingezeichneten Normalverteilung mit der erhaltenen Werteverteilung erkennbar.

3.2. Monte-Carlo-Generation

Das Vorgehen bei der Event-Generation ist, wie schon angedeutet, dem der Integration sehr ähnlich. Es werden wieder zufällig Koordinaten in dem Raum, in dem die Events generiert werden sollen ausgewählt und die entsprechenden Funktionswerte bestimmt. Diese Funktionswerte vergleicht man mit einem weiteren Zufallswert innerhalb des Intervalls der möglichen Funktionswerte. Ist der Wert kleiner als der entsprechende Funktionswert, wurde die Funktion „getroffen“, man zählt einen Hit. Andernfalls werden die Koordinaten verworfen und der nächste Versuch wird gestartet. Je nach Funktion kann es dazu kommen, dass verhältnismäßig viele Punkte verworfen werden müssen, sodass eine Menge Rechenaufwand für wenige Hits benötigt wird. Wenige Hits bedeuten ein ungenaues und mutmaßlich von Durchlauf zu Durchlauf stark verschiedenes Bild von der exakten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Um dem entgegen zu wirken, könnte man natürlich den Rechenaufwand erhöhen oder aber die Effizienz steigern. Letzteres ist z.B. möglich, wenn man Kenntnisse vom ungefähren Verlauf der Funktion hat. Das bisher beschriebene Vorgehen kann man sich als den Wurf von Punkten in ein (meist höherdimensionales) Rechteck vorstellen, wie es am Beispiel der Sinusfunktion in Abb. 4 (rechter Plot) verdeutlicht ist. Effizienter wäre es, die Punkte nicht homogen in einem Rechteck, sondern unter einer dem Verlauf der Funktion folgenden Kurve zu verteilen. Diese Kurve sollte natürlich überall einen gleichen oder größeren Wert als die zu behandelnde Funktion besitzen. Auf diese Weise platziert man weniger Punkte in Bereichen

niedriger Funktionswerte und Punkte, die trotzdem dort landen, werden mit einer höheren Wahrscheinlichkeit unter der Funktion platziert. Für die Event-Generation beim Top-Quark-Zerfall wird allerdings nur die zu erst beschriebene („stumpfe“) Methode angewandt. Trotzdem wird die Effizienz durch verschiedene in Abschnitt 4 vorgestellte Verfahren gesteigert.

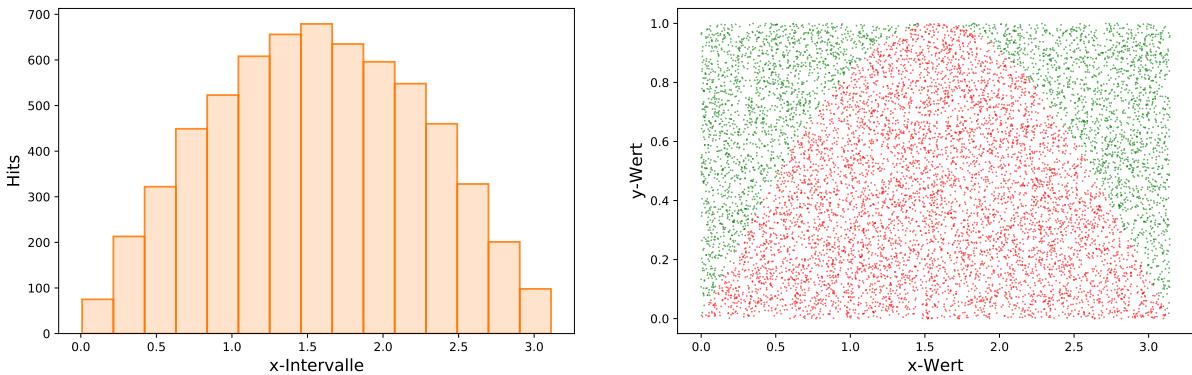


Abbildung 4: Monte-Carlo-Generation für eine Sinuskurve im Intervall $[0, \pi]$ mit 10000 Zufallspunkten. Links dargestellt ist ein Histogramm, das die Anzahl der Hits für das jeweilige Intervall auf der x-Achse angibt. Rechts sind alle 10000 generierten Zufallspunkte eingetragen. Der entsprechende y-Wert zu einem x-Wert wurde jeweils zufällig aus dem Intervall $[0, 1]$ ausgewählt. Dabei entstandene Hits sind rot eingefärbt, restliche Punkte grün.

4. Vorbereitung des Integrals

Um das in Gleichung (2.33) erhaltene Integral möglichst effizient mittels Monte-Carlo-Techniken anzunähern, ist es sinnvoll, dieses ein wenig zu modifizieren. Die Folgen sollten nach Möglichkeit nicht nur eine bessere Nutzung der Leistung des zur Verfügung stehenden Rechners, sondern auch eine Steigerung der Genauigkeit der Integration sein. Ein paar hilfreiche Techniken werden daher im Folgenden erläutert.

4.1. Splitting relation

Die *splitting relation* (siehe dazu auch [5]) stellt im Prinzip eine Aufteilung des Integrals in mehrere Integrale dar, von denen jedes den Zerfall eines Teilchens in zwei Teilchen beschreibt. Der gesamte Zerfall eines Teilchens in eine Vielzahl von anderen Teilchen wird sich dann als eine sukzessive Abfolge von Zwei-Teilchen-Zerfällen vorgestellt, die man in ihrem jeweiligen Schwerpunktssystem auswerten kann. So ein Vorgang entspricht nicht zwingend der physikalischen Realität, es ist aber natürlich egal, wie man ein Integral auswertet, solange man mathematisch korrekt vorgeht.

Da bei dem betrachteten Top-Quark-Zerfall das Top-Quark lediglich in drei Teilchen (b, e^+ und ν_e) zerfällt, wird nur einmal „gesplittet“. Der erste Schritt ist die Umschreibung der impulserhaltenden Delta-Funktion derart, dass

$$\delta^{(4)}(p_t - p_b - p_e - p_{\nu_e}) = \int \delta^{(4)}(p_t - p_b - q) \delta^{(4)}(q - p_e - p_{\nu_e}) d^4q \quad (4.1)$$

Der nächste Schritt ist die Multiplikation des gesamten Integrals mit

$$1 = \int_0^\infty \delta(q^2 - m_q^2) dm_q^2 \quad (4.2)$$

Nach anschließender (manueller) Durchführung der q_0 -Integration

$$\int \dots \delta(q^2 - m_q^2) d^4q = \int \dots \frac{1}{2E_q} d^3q \quad \text{mit} \quad E_q = q_0 = \sqrt{q^2 + m_q^2} \quad (4.3)$$

erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int \frac{1}{2m_t} |\mathfrak{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_t - p_b - p_e - p_{\nu_e}) \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3 2E_b} \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3 2E_e} \frac{d^3p_{\nu_e}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_e}} \\ &= \frac{1}{2^5 m_t} \frac{1}{(2\pi)^5} \int_0^\infty \int \delta^{(4)}(p_t - p_b - q) \frac{d^3p_b}{E_b} \frac{d^3q}{E_q} \int |\mathfrak{M}|^2 \delta^{(4)}(q - p_e - p_{\nu_e}) \frac{d^3p_e}{E_e} \frac{d^3p_{\nu_e}}{E_{\nu_e}} dm_q^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dieses Integral lässt sich wie oben schon angedeutet als Zerfall des Top-Quarks in Bottom-Quark und reelles W^+ -Boson der variablen Masse m_q interpretieren, welches dann weiter in Positron und Elektroneutrino zerfällt. Die Grenzen der Masse m_q , welche hier noch formal 0 und ∞ betragen, lassen sich weiter spezifizieren, da die Produktion reeller Teilchen b, e und ν_e das Ende des Zerfall darstellen sollte. Es gilt dann

$$m_e + m_{\nu_e} \leq m_q \leq m_t - m_b \quad (4.5)$$

4.2. Ausintegrieren der Delta-Funktionen

Da Integrationen über Delta-Funktionen mittels Monte-Carlo-Integration nicht behandelbar sind, werden diese einfach manuell ausgeführt. Man erhält

$$\Gamma = \frac{1}{2^5 m_t} \frac{1}{(2\pi)^5} \int_{m_q^2_{min}}^{m_q^2_{max}} \int \frac{q}{m_t} \sin \theta_q d\phi_q d\theta_q \int |\mathfrak{M}|^2 \frac{p_e}{m_q} \sin \theta_e d\phi_e d\theta_e dm_q^2 \quad (4.6)$$

wobei die Winkel mit Index q für das Schwerpunktssystem (auch CMS genannt) des Top-Quarks und solche mit Index e für das des „q“ definiert sind. Zudem gilt $\vec{p}_b = -\vec{q}$ im Top-CMS und $\vec{p}_{\nu_e} = -\vec{p}_e$ im q-CMS. Die ausführliche Herleitung findet sich in Anhang A.3.1.

4.3. Varianz-Reduktion durch Substitution

Die Varianz einer Funktion bezüglich ihres Erwartungswertes hängt von der Größe ihrer Schwankungen auf dem gegebenen Intervall (bzw. Raum) ab. Integriert man beispielsweise mittels Monte-Carlo-Integration einen konstanten Wert über einem Intervall, wird die Varianz null betragen, da an jedem Punkt der Funktionswert gleich ist und selbst bei kleinen Zahlen von Zufallspunkten (einer reicht schon) der Wert des Integrals exakt errechnet wird. Das Ziel einer Substitution ist nun also, die Funktion zu glätten. Ein guter Ansatzpunkt im Fall der errechneten invarianten Amplitude ist der scharfe Peak im Bereich der Resonanz bei $q^2 \approx m_W^2$. Mit der Substitution

$$m_q^2 = m_W \Gamma_W \tan \rho + m_W^2 \quad (4.7)$$

und der Abkürzung (siehe Anhang A.1)

$$|\mathfrak{M}|^2 = \frac{1}{(m_q^2 - m_W^2)^2 + m_W^2 \Gamma_W^2} g^4[\dots] \quad (4.8)$$

ergibt sich (siehe dazu Anhang A.3.2)

$$\Gamma = \frac{1}{2^5 m_t} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{m_W \Gamma_W} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \int \frac{q}{m_t} \sin \theta_q d\phi_q d\theta_q \int [\dots] \frac{p_e}{m_q} \sin \theta_e d\phi_e d\theta_e d\rho \quad (4.9)$$

Der scharfe Resonanzpeak taucht also nicht mehr in der Integration auf.

4.4. Lorentz-Boost

Der Lorentz-Boost wird nach Ausnutzung der splitting relation benötigt, um die im CMS des W^+ -Bosons zufällig erzeugten Viererimpulse für Positron und Elektronneutrino in das Top-Quark-CMS zu übertragen. Dort kann man sie dann in der invarianten Amplitude mit den im Top-Quark-CMS erzeugten Viererimpulsen für Bottom-Quark und W^+ -Boson verrechnen. Da die invariante Amplitude sich unter Lorentz-Transformation nicht ändert, könnte man natürlich auch alle Viererimpulse in ein völlig anderes Bezugssystem transformieren und dann die Amplitude auswerten. Die Transformation erfolgt folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -n_x \beta \gamma & -n_y \beta \gamma & -n_z \beta \gamma \\ -n_x \beta \gamma & 1 + (\gamma - 1)n_x^2 & (\gamma - 1)n_x n_y & (\gamma - 1)n_x n_z \\ -n_y \beta \gamma & (\gamma - 1)n_x n_y & 1 + (\gamma - 1)n_y^2 & (\gamma - 1)n_y n_z \\ -n_z \beta \gamma & (\gamma - 1)n_x n_z & (\gamma - 1)n_y n_z & 1 + (\gamma - 1)n_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Speziell für das eben beschriebene Vorgehen ist p' ein Viererimpuls im Top-Quark-CMS und p einer im W^+ -CMS. Der Einheitsvektor $-\vec{n}$, welcher im allgemeinen Fall die negative Boostrichtung angibt, entspricht dann der Impulsrichtung des W^+ im Top-CMS.

Die entsprechenden Werte für γ und $\beta\gamma$ ergeben sich aus der jeweiligen Geschwindigkeit des W^+ gegenüber dem Top-Quark. Man erhält

$$\gamma = \frac{E_q}{m_q}, \quad \beta\gamma = \frac{q}{m_q} \Rightarrow -\beta\gamma\vec{n} = \frac{\vec{q}}{m_q} \quad (4.11)$$

mit der Energie E_q , der Masse m_q und dem betraglichen Impuls q des W^+ , sodass die Transformation sich umschreiben lässt zu

$$\begin{pmatrix} E' \\ \vec{p}' \end{pmatrix} = \frac{E}{m_q} \begin{pmatrix} E_q \\ \vec{q} \end{pmatrix} + \left(\frac{\frac{\vec{q} \cdot \vec{p}}{m_q}}{\frac{\vec{q} \cdot \vec{p}}{m_q} + m_q} \vec{q} + \vec{p} \right) \quad (4.12)$$

Als kleiner Test kann die Transformation aus Gleichung (4.12) einmal auf den Viererimpuls des ruhenden W^+ ($m_q, 0, 0, 0$) angewendet werden. Es ergibt sich dann einfach (E_q, \vec{q}) , also der Viererimpuls des W^+ im Top-Quark-CMS. Betrachtet man eine gleichmäßige Verteilung betraglich gleicher Impulse in einem Inertialsystem B, erhält man für einen in einem System A ruhenden und sich zu System B in positive z-Richtung bewegenden Beobachter eine in negative z-Richtung verschobene Verteilung. Als Veranschaulichung sind in Abb. 5 einmal die Winkelverteilungen in zwei sich zueinander bewegenden Systemen dargestellt.

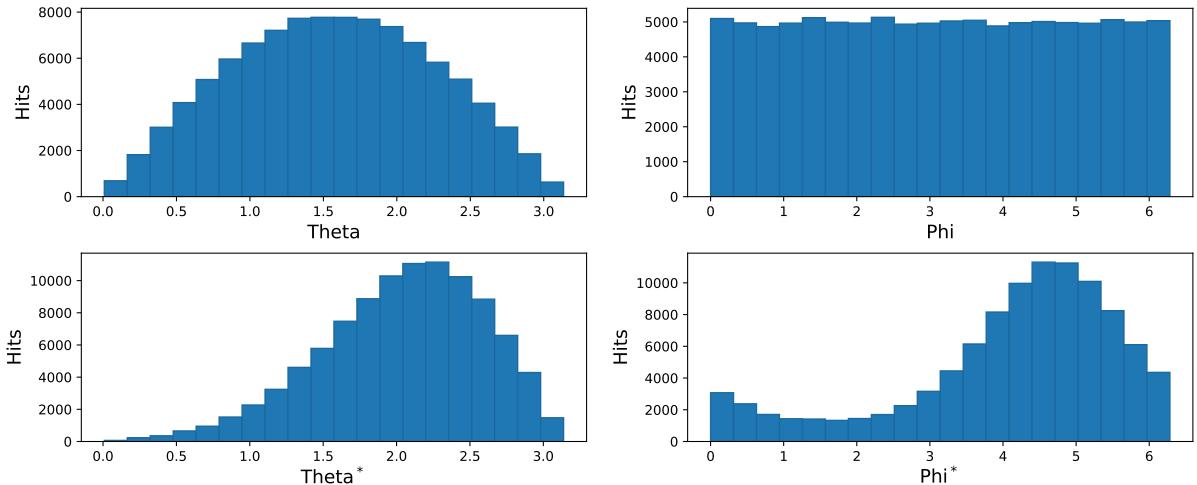


Abbildung 5: Vergleich der Winkelverteilungen von Teilchen gleicher Masse (= 50 GeV) in zwei verschiedenen, zu einander bewegten Inertialsystemen. Theta ist der Polarwinkel im System B, in dem alle betraglichen Impulse identisch (= 40 GeV) sind und die Impulsrichtungen gleichmäßig verteilt. Phi ist dort der Azimutalwinkel. Das System $B^* = A$ bewegt sich gegenüber B mit $\beta = 0.5$ in Richtung von $\Theta = \frac{\pi}{4}$ und $\Phi = \frac{\pi}{2}$.

5. Integration und Event-Generation

Da alle Vorbereitungen getroffen sind, folgt nun die programmiertechnische Umsetzung des Vorhabens. Zunächst wird die Integration ausgeführt. Dabei wird der maximale Wert des Integranden gespeichert, um ihn als spätere Obergrenze für die Zufallswerte bei der Event-Generation zu benutzen. Bei dem Beispiel an der Sinusfunktion (Abschnitt 3.2) wurde dieser als bekannt (= 1) vorausgesetzt. Um das explizite Vorgehen zu demonstrieren, werden jetzt die wesentlichen Teile des geschriebenen Codes gezeigt und erläutert. Der vollständige Code ist angehängt in Anhang B. Es schließt sich dann die Vorstellung der Ergebnisse an.

5.1. Unpolarisiertes Top-Quark

Der folgende Teil bezieht sich auf das über *alle* Spins gemittelte Betragsquadrat der invarianten Amplitude $|\mathcal{M}|^2$, wie es auch bisher verwendet wurde. In einem späteren Schritt wird zusätzlich der Zerfall des polarisierten Top-Quarks betrachtet. Dieser mittelt zwar über die Spins der Zerfallsprodukte, nicht aber über den des Top-Quarks.

5.1.1. Integration

Wie schon beschrieben, wird die Integration der Event-Generation unter anderem voraus gesetzt, um den Maximalwert des Integranden zu erhalten. Außerdem wird durch die Integration letztendlich die Zerfallsbreite Γ des betrachteten Zerfalls bestimmt.

Nomenklatur Der Übersicht halber sind die meisten Variablen im Code nur Abkürzungen und nicht die vollständigen Namen der damit bezeichneten Größe. Die Namensgebung der Viererimpulse, der betraglichen Impulse, der Richtungsvektoren und der Energien folgt dem Schema

Energie bzw. Impuls von *Teilchen* aus Sicht von *Teilchen*

mit den Benennungen Top-Quark t, Bottom-Quark b, Positron e, Neutrino nu und W^+ -Boson q. So ist beispielsweise p4_eq der Viererimpuls des Positrons im CMS des W^+ -Bosons.

Definition von Funktionen und Parametern Als allererstes erfolgt der Import von diversen Modulen. Diese ermöglichen unter anderem das Erzeugen von Zufallszahlen, das einfache Rechnen mit Elementarfunktionen und das Plotten der Ergebnisse.

```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt
        import random as rd
        import numpy as np
        from __future__ import print_function
```

Da das gemittelte Betragsquadrat der invarianten Amplitude letztendlich durch Viererskalarprodukte ($p_x \cdot p_y = p_x^\mu p_{y\mu}$) ausgedrückt ist (Anhang A.1), erwies sich die Definition einer solchen Skalarproduktes, sowie der eines Dreierskalarproduktes als sinnvoll. Die Umsetzung sieht hier folgendermaßen aus:

```
In [2]: def skalprod3(a,b):
    if len(a) == len(b):
        s = 0
        for i in range(len(a)):
            s += a[i]*b[i]
    return s

def skalprod4(a,b):
    if len(a) == len(b):
        s = a[0]*b[0]
        for i in range(len(a)-1):
            s -= a[i+1]*b[i+1]
    return s
```

Auch wurde der Lorentzboost für einen Vierervektor definiert. Diese Funktion benötigt als Argumente die Energie, den betraglichen Impuls und die Impulsrichtung des zu transformierenden Vektors, sowie γ , $\beta\gamma$ und den Richtungsvektor des Boosts:

```
In [3]: def boost(E, p, m, g, bg, l):
    sp = skalprod3(m, l)

    p_xt4 = [0,0,0,0]
    p_xt4[0] = g*E - bg*p*sp
    for i in range(3):
        p_xt4[i+1] = -bg*l[i]*E + p*(m[i]+(g-1)*l[i]*sp)
    return p_xt4
```

Bevor die eigentliche Integration starten kann, müssen jetzt nur noch einige Konstanten gesetzt und später benötigte Listen initialisiert werden:

```
In [4]: mt = 173.1 #Massen
mb = 4.18
me = 0.000511
mnu = 0
mqfest = 80.379
breiteq = 2.08 #Zerfallsbreite des W

equad = 4*np.pi/137 #Elementarladung**2 ausgedrückt durch die alpha (1/137)
sinwquad = 0.231 #sin(Theta_Weinberg)**2
gquad = equad / sinwquad #g**2

rhomin = np.arctan(((me+mnu)**2 - mqfest**2)/mqfest/breiteq)
rhomax = np.arctan(((mt-mb)**2 - mqfest**2)/mqfest/breiteq)

Vorfaktor = gquad**2/(2*mt*(2*np.pi)**5 * 2**4) / mqfest / breiteq
raum = (rhomax-rhomin)*4*np.pi**4

Summe = 0
Summe_Quadrat = 0
Punkte = 100000
maxwert = 0
minwert = 99999
fs = []
```

Die Schleife Dieser Teil des Codes ist die Essenz der Monte-Carlo-Integration. Je nach Einstellung wird er mehrere Male durchlaufen. Empfehlenswert ist allerdings eine Zahl an Durchläufen im Bereich von ein paar Tausend oder mehr, um einerseits eine gute Genauigkeit der Integration, sowie außerdem auch eine aussagekräftige Abschätzung der möglichen Abweichung zu erhalten (zentraler Grenzwertsatz, Abschnitt 3). Der entscheidende Punkt ist jetzt die zufällige Wahl eines Punktes, dessen Koordinaten innerhalb der zuvor definierten Grenzen liegen.

```
In [5]: for h in range(Punkte):

    #Auswürfeln von mq, theta_q, phi_q, theta_nuq, phi_nuq-----
    rho = rhomin + rd.random()*(rhomax - rhomin)
    mq = np.sqrt(mqfest * breiteq * np.tan(rho) + mqfest**2)
    theta_q = np.pi*rd.random()
    phi_q = 2*np.pi*rd.random()
    theta_nuq = np.pi*rd.random()
    phi_nuq = 2*np.pi*rd.random()
```

Hier wird mit Hilfe der Methode `rd.random()` ein Zufallswert zwischen 0 und 1 erzeugt und anschließend mit der jeweiligen Intervalllänge multipliziert. Da das Integral über

vier Winkel und das in Gleichung (4.7) definierte ρ geht, $|\mathfrak{M}|^2$ aber der Einfachheit halber durch Vierervektoren ausgedrückt ist, folgt im Code direkt die Umrechnung der ausgewürfelten Winkel in entsprechende Vierervektoren. Die dazu notwendigen Energien und Impulse ergeben sich durch die zuvor ausgeführte Integration der Delta-Funktionen, also aus der Energie- und Impulserhaltung bei jedem Zerfall:

```

E_qt = (mt**2 + mq**2 - mb**2)/(2*mt)

E_bt = (mt**2 + mb**2 - mq**2)/(2*mt)
p_qt = np.sqrt(mt**4 + (mq**2 - mb**2)**2 - 2*(mq**2 + mb**2)*mt**2) /\ 
(2*mt)
p_bt = p_qt

E_nuq = (mq**2 + mnu**2 - me**2)/(2*mq)
E_eq = (mq**2 + me**2 - mnu**2)/(2*mq)
p_nuq = np.sqrt(mq**4 + (mnu**2 - me**2)**2 - 2*(mnu**2 + me**2)*mq**2\
) / (2*mq)
p_eq = p_nuq

n_eq = [-n_nuq[i] for i in range(len(n_nuq))]
n = n_bt

p4_qt = [E_qt, p_qt*n_qt[0], p_qt*n_qt[1], p_qt*n_qt[2]]
p4_bt = [E_bt, p_bt*n_bt[0], p_bt*n_bt[1], p_bt*n_bt[2]]
p4_nuq = [E_nuq, p_nuq*n_nuq[0], p_nuq*n_nuq[1], p_nuq*n_nuq[2]]
p4_eq = [E_eq, p_eq*n_eq[0], p_eq*n_eq[1], p_eq*n_eq[2]]
p4_tt = [mt,0,0,0] #ACHTUNG!, [mt,0,0,-mt] für z-polarisiertes Top

gamma = E_qt/mq
betagamma = p_qt/mq

```

Die Vierervektoren des Neutrinos und des Positrons müssen anschließend gemäß Gleichung (4.12) in das Top-Quark-CMS transformiert werden, da sie nach Gleichung (4.6) im CMS des W^+ -Bosons generiert wurden, wo $\vec{p}_{\nu_e} = -\vec{p}_e$ gilt:

```

p4_nut = boost(E_nuq, p_nuq, n_nuq, gamma, betagamma, n)
p4_et = boost(E_eq, p_eq, n_eq, gamma, betagamma, n)

```

An dieser Stelle kann nun endlich der Funktionswert an dem zufällig generierten Punkt ausgewertet werden. Da alle Skalarprodukte mehrfach in $|\mathfrak{M}|^2$ vorkommen, spart es Rechenzeit, die entsprechenden Werte vor dem Einsetzen zu berechnen, damit die gleiche Rechnung nicht mehrfach ausgeführt werden muss:

```

tb = skalprod4(p4_tt, p4_bt); te = skalprod4(p4_tt, p4_et)
tnu = skalprod4(p4_tt, p4_nut); tq = skalprod4(p4_tt, p4_qt)
be = skalprod4(p4_bt, p4_et); bnu = skalprod4(p4_bt, p4_nut)
bq = skalprod4(p4_qt, p4_bt); enu = skalprod4(p4_et, p4_nut)
eq = skalprod4(p4_qt, p4_et); nuq = skalprod4(p4_qt, p4_nut)
qq = skalprod4(p4_qt, p4_qt)

f01 = 2*te*bnu

f02 = 2*tnu*bq*eq
f03 = 2*be*tq*nuq
f04 = -2*tb*eq*nuq
f05 = -2*enu*tq*bq
f06 = tb*qq*enu
f07 = te*qq*bnu

f08 = -tnu*qq*be

f09 = 2*tq*bq*eq*nuq
f10 = -enu*qq*tq*bq
f11 = -tb*qq*eq*nuq
f12 = 0.5*qq**2 *tb*enu

```

Es folgt das Einsetzen der Winkel und Viererskalarprodukte. Der erhaltene Funktionswert wird zu der bisherige Summe aller Funktionswerte (*Summe*) addiert, das Quadrat des Funktionswertes wird zur Summe aller vorherigen Quadrate (*Summe_Qquare*) addiert:

```

f = ((p_qt/mt)*(p_nuq/mq)
     *np.sin(theta_q)*np.sin(theta_nuq)
     *(f01-(f02+f03+f04+f05+f06+f07+f08)/mqfest**2 + (f09+f10+f11+f12) \
     /mqfest**4))

Summe += f
Summe_Qquare += f**2

```

Für die später erfolgende Event-Generation prüft man noch, ob der aktuelle Funktionswert ein neues Maximum darstellt und speichert ihn ggf. als solches. Um eine kleine Übersicht über die Häufigkeit von Funktionswerten zu erhalten, werden hier allerdings ohnehin einfach alle Werte in der Liste *fs* gespeichert und am Ende in Form eines Histogramms geplottet.

```

fs.append(f)

if f > maxwert:
    maxwert = f
if f < minwert:
    minwert = f

```

Einsetzen und Ausgeben Der Wert des Integrals ergibt sich jetzt aus

$$\text{Vorfaktor} \cdot \text{raum} \cdot \text{Summe}/\text{Punkte} \quad (5.1)$$

wobei *Vorfaktor* oben im Programmcode definiert wurde und der Faktor vor dem Integral in Gleichung (4.9) ist. Der Raum, über den die Funktion integriert wird (*raum*) ist in diesem Fall ein fünfdimensionaler Quader der Kantenlängen $\rho_{max} - \rho_{min}$, 2π , 2π , π und π und ebenfalls oben definiert. Der Teil *Summe/Punkte* entspricht dem Erwartungswert der Funktion.

```

In [6]: Integral = Vorfaktor * raum * Summe / Punkte
        Abweichung = np.sqrt(Summe_Quadrat - Summe**2 / Punkte) * Vorfaktor * rau\
m / Punkte
        print ('Integral = ', Integral, '+-', Abweichung)

```

Ergebnis der Integration Die Zerfallsbreite des Top-Quarks für den Zerfall über den in Abb. 2 dargestellten Weg beträgt nach Durchführung der eben beschriebenen Integration (Gleichung (2.33)) und 100000 Schleifendurchläufen

$$\Gamma = (0.13895 \pm 0.00037) \text{ GeV} \quad (5.2)$$

Als totale Zerfallsbreite des Top-Quarks lässt sich momentan

$$\Gamma_{tot} = 1.41^{+0.19}_{-0.15} \text{ GeV}[1] \quad (5.3)$$

finden. Das Verhältnis der errechneten zur totalen Zerfallsbreite ist dann

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_{tot}} = (9.9 \pm 1.2)\%, \quad (5.4)$$

wobei der Einfachheit halber von einer symmetrischen Wahrscheinlichkeitsverteilung von Γ_{tot} ausgegangen wurde. Die Häufigkeiten der bei der Integration aufgetretenen Funktionswerte (ohne Vorfaktor, nur Integrand in Gleichung (4.9)) sind in Abb. 6 in Form eines Histogrammes dargestellt.

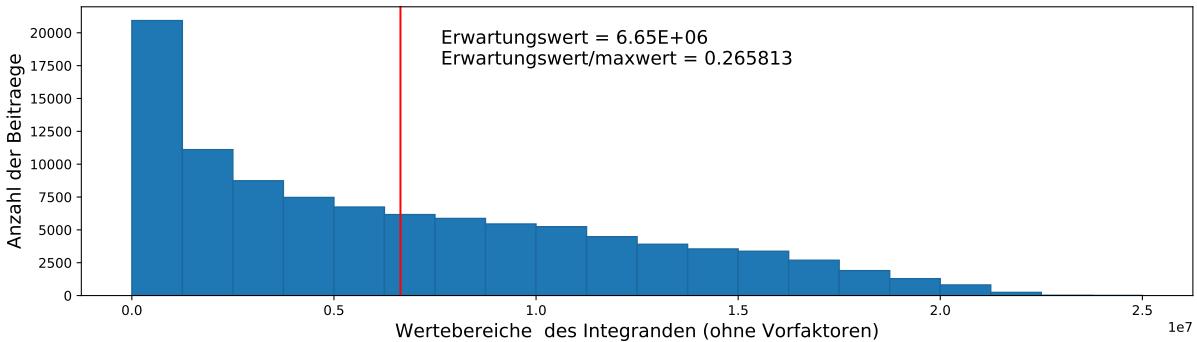


Abbildung 6: Häufigkeiten der Funktionswerte bei der Integration für den unpolarisierten Top-Quark-Zerfall. Insgesamt sind 100000 Zufallspunkte ausgewertet worden.

Das Verhältnis des Erwartungswertes der Funktionswerte zum maximalen Funktionswert stellt eine Abschätzung darüber dar, wie viele Zufallspunkte in der nachfolgenden Event-Generation erzeugt werden müssen, um eine bestimmte Anzahl von Events zu erhalten. In diesem Fall sind für 100000 Events also etwa 400000 Throws (insgesamt generierte Zufallspunkte) nötig. Dieser Umstand gilt natürlich nur für die ungewichtete Verteilung von Zufallspunkten im Raum, siehe Abschnitt 3.2.

5.1.2. Event-Generation

Da der Großteil des Programmcodes für die Event-Generation identisch zu dem im vorherigen Abschnitt 5.1.1 im Einzelnen vorgestellten ist, soll jetzt nur noch kurz auf den wesentlichen Unterschied im Verfahren eingegangen werden, um dann die Ergebnisse zu besprechen. Der vollständige Code ist direkt im Anschluss zur Integration wieder in Anhang B zu finden.

Verfahren Der wesentliche Unterschied zum Verfahren bei der Integration besteht im Abgleich eines Funktionswertes an zufälliger Stelle mit einem zufällig aus dem Intervall $[0, maxwert]$ ausgewählten Wert, welchen man statt der vorher geschehenen Aufsummation aller Funktionswerte und ihrer Quadrate vollzieht. Der Wert $maxwert$ wurde während der Integration bestimmt und ist der maximale Wert, den die Funktion bei dem entsprechenden Durchlauf angenommen hat. Dieser Wert kann natürlich schwanken, je nachdem, wie nah der Zufallsalgorithmus an die Koordinaten des tatsächlichen Maximums heran kam. Auch unter diesem Aspekt ist es daher sinnvoll, die Funktion im Vorhinein geglättet zu haben, um Schwankungen gering zu halten (siehe Abschnitt 4.3). Schematisch sieht der anfangs genannte Abgleich folgendermaßen aus:

$$\text{Ist } f(\vec{r}) \geq maxwert \cdot z ? \rightarrow \begin{cases} \text{ja} & \vec{r} \text{ speichern} \\ \text{nein} & \vec{r} \text{ verwerfen} \end{cases} \quad (5.5)$$

Hier ist \vec{r} ein Vektor aus dem Raum, über den vorher integriert wurde und z eine Zufallszahl aus $[0, 1]$. Die Häufigkeiten der einzelnen gespeicherten Koordinaten lassen sich dann gut in Histogrammen darstellen. Im Gegensatz zu der beispielhaften Event-Generation für die Sinusfunktion (in einer Dimension) erhält man speziell hier (in fünf Dimensionen) aber nicht zwingend Verteilungen, die direkt den Funktionsverlauf wiedergeben. Besonders interessant sind außerdem Verteilungen, welche die Beziehungen zwischen zwei Koordinaten zeigen.

Erwartungen Da die bei dieser Event-Generation verwendete gemittelte invariante Amplitude durch eine Mittelung über alle möglichen Spin-Zustände der beteiligten Fermionen erhalten wurde, liegt insbesondere für die Orientierung des (ruhenden) Top-Quarks im Raum keine ausgezeichnete Richtung vor. Unabhängig von Beziehungen zwischen Impulsrichtungen und Energien der Zerfallsprodukte sollten daher die aus dem Top-Quark-CMS betrachteten Impulsrichtungen der Teilchen gleichmäßig in alle Richtungen verteilt sein. In Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

entspricht das einer Sinusverteilung in θ und einer konstanten Verteilung in ϕ . Um diese Erwartungen direkt mit den erhaltenen Verteilungen vergleichen zu können, sollte sie zunächst normiert und anschließend an die Anzahl der entstandenen Hits angepasst werden. Beispielsweise ergibt sich für die erwartete Sinusverteilung in einem Histogramm mit Intervalllängen von $\frac{\pi}{20}$

$$P(\theta) = 0.5 \sin \theta \cdot \text{Hits} \cdot \frac{\pi}{20} \quad (5.7)$$

wobei $\text{Hits} \cdot \frac{\pi}{20}$ der tatsächlichen Fläche aller Histogramm-Balken entspricht.

Trotz der durchgeführten Mittelung sollten allerdings die Impulsrichtungen von Positron und Elektronneutrino nicht zwingend in einem so trivialen Zusammenhang zur Impulsrichtung des W^+ -Bosons oder auch des Bottom-Quarks stehen. In erster Ordnung Störungstheorie und unter Vernachlässigung der Bottom-Quark-Masse können die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Helizitäts-Zustände des emittierten W^+ recht leicht berechnet werden. Diese belaufen sich auf

$$F_R \approx 0, \quad F_0 \approx \frac{m_t^2}{m_t^2 + 2m_W^2} \approx 0.7, \quad F_L \approx \frac{2m_W^2}{m_t^2 + 2m_W^2} \approx 0.3 \quad (5.8)$$

Hier sind $F_{R/0/L}$ die Wahrscheinlichkeiten dafür sind, das W^+ -Boson im rechtshändig/longitudinal/linkshändig polarisierten Zustand vorzufinden. In der Literatur sind diese Werte als

$$F_R = 0.008(16), \quad F_0 = 0.69(3), \quad F_L = 0.314(25)[7] \quad (5.9)$$

zu finden. Da die zur Event-Generation verwendete invariante Amplitude allerdings selbst aus der Störungstheorie erster Ordnung hervorging, werden die zuvor genannten Werte für den Abgleich mit der nachher erhaltenen Verteilung genutzt. So kann besser abgeschätzt werden, ob die Generation geglückt ist. Betrachtet man o.B.d.A. ein W^+ in seinem CMS, dessen Impuls im Top-Quark-CMS in positive z-Richtung zeigt, entspricht eine Messung der z-Komponente des W^+ -Spins im Grunde einer Messung seiner Helizität (auch im Top-Quark-CMS). Konstruiert man den Zustand

$$\psi = e^{-i\theta S_y} e^{-i\alpha S_z} \left[a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (5.10)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ und

$$S_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

erfüllt dieser für $\theta = 0 = \alpha$, $a^2 = F_R$, $b^2 = F_0$ und $c^2 = F_L$ die Bedingungen

$$|\langle \psi, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle|^2 = F_R, \quad |\langle \psi, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle|^2 = F_0, \quad |\langle \psi, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle|^2 = F_L \quad (5.12)$$

Errechnet man nun die Wahrscheinlichkeit für die Messung von $s_z = 1$ bei beliebigen α und θ

$$P(s_z = 1) = |\langle \psi, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle|^2 \quad (5.13)$$

und mittelt das Ergebnis über alle Drehungen um die z-Achse (also über alle α), erhält man

$$\langle P(s_z = 1) \rangle_\alpha = \frac{1}{4} [a^2(1 + \cos \theta)^2 + 2b^2 \sin^2 \theta + c^2(1 - \cos \theta)^2] \quad (5.14)$$

Berücksichtigt man die Helizitätserhaltung beim Zerfall des W^+ , sollte das Elektronneutrino aufgrund seiner vernachlässigbar kleinen Masse entgegengesetzt zur Richtung des Spins vom W^+ emittiert werden, da es wegen der maximalen Paritätsverletzung beim geladenen schwachen Strom linkshändig sein muss. Das Positron muss dann im W^+ -CMS wegen Impulserhaltung genau in Richtung des W^+ -Spins emittiert werden, sodass eine Messung der Positron-Richtung im W^+ -CMS einer Messung des W^+ -Spins entspricht. Normiert man nun also Gleichung (5.14) bzgl. $\cos \theta \in [-1, 1]$ (mit $\frac{2}{3}$ multiplizieren), ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung von $\cos \theta$ mit $a^2 = F_R$, $b^2 = F_0$ und $c^2 = F_L$. Hierbei ist θ der Winkel zwischen Positron-Impulsrichtung und negativer

Bottom-Quark-Impulsrichtung im CMS des W^+ -Bosons. Als erwartete Verteilung der $\cos \theta$ erhält man also letztendlich

$$P(\cos \theta) = \frac{3}{8} [2 \cdot 0.7(1 - \cos^2 \theta) + 0.3(1 - \cos \theta)^2] \cdot \text{Hits} \cdot \frac{2}{20} \quad (5.15)$$

für die entsprechende Anzahl von Hits und einem Histogramm mit 20 Intervallen. Für die Verteilung von θ selbst ergibt sich wegen $d \cos \theta = -\sin \theta d\theta$

$$P(\theta) = P(\cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot \frac{\pi}{2} \quad (5.16)$$

Ergebnisse der Event-Generation Für die Winkelverteilungen des beim Top-Quark-Zerfall emittierten W^+ -Bosons ergaben sich nach einer Generation von 100000 Events die in Abb. 7 folgenden Ergebnisse:

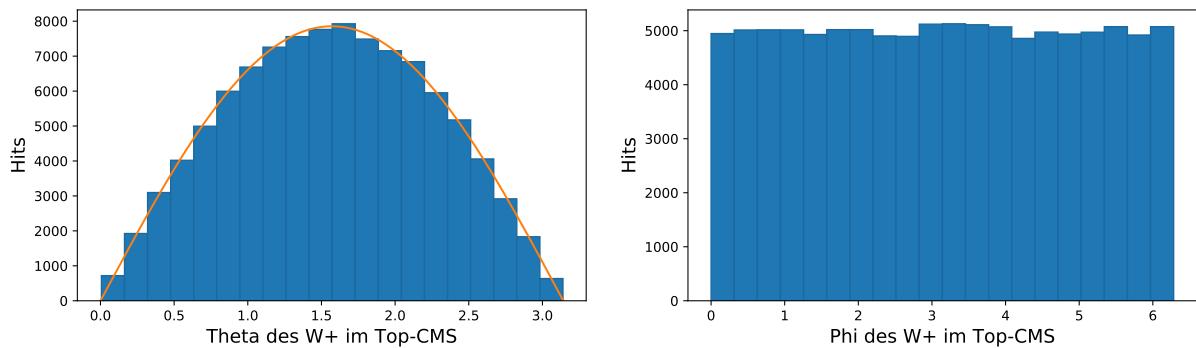


Abbildung 7: Häufigkeiten von Events im entsprechenden Intervall des Polarwinkels θ (links) und des Azimutalwinkels ϕ (rechts) des emittierten W^+ -Bosons für 100000 Events insgesamt. Außerdem eingezeichnet ist links die erwartete Verteilung für θ aus Gleichung (5.7) (orange).

Sowohl die Verteilung der Polarwinkel als auch die der Azimutalwinkel im Ruhesystem des Top-Quarks entsprechen den Erwartungen. Da diese Verteilung recht trivial ist, wird die Event-Generation später auch einmal für den Zerfall eines polarisierten Top-Quarks durchgeführt.

Bei derselben Event-Generation entstanden die in Abb. 8 dargestellten Beziehungen zwischen der aus dem Ruhesystem des W^+ betrachteten negativen Impulsrichtung des Bottom-Quarks und der Impulsrichtung des Positrons.

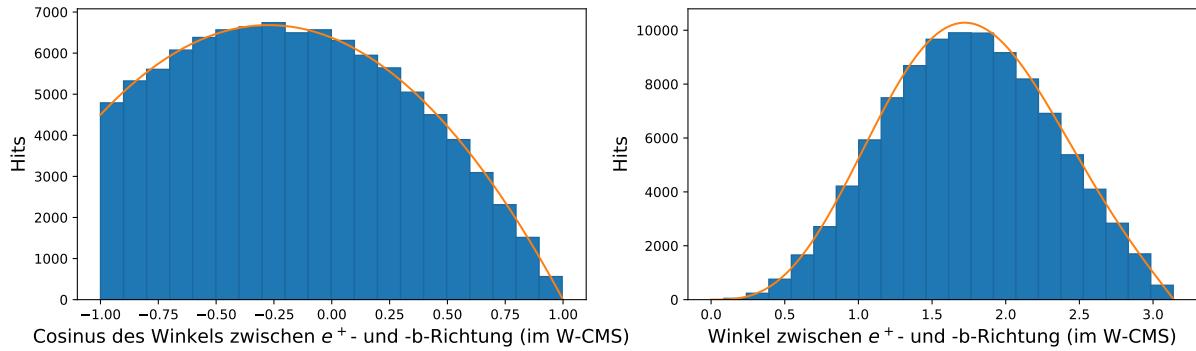


Abbildung 8: Häufigkeiten der Werte des Cosinus des Winkels zwischen negativer Bottom-Quark-Impulsrichtung und Positron-Impulsrichtung (links) und des Winkels selbst (rechts) für 100000 Events insgesamt. In beiden Histogrammen sind zudem die nach Gleichung (5.15) und Gleichung (5.16) erwarteten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen eingezeichnet (orange).

Erneut verhalten sich die generierten Verteilungen ziemlich genau so wie erwartet. Dass die errechnete Verteilung für die Winkel selbst etwas höher als die Balken im Histogramm zu sein scheint, liegt vermutlich daran, dass in einen signifikanten Bereich nach $\theta = 0$ aufgrund der sehr geringen Wahrscheinlichkeit kein einziges Ereignis stattgefunden hat. Da das Python-Programm die Balkenbreiten des Histogramms automatisch so gering wie möglich wählt, sind diese hier also etwas geringer als $\frac{\pi}{20}$. Daher ist die gesamte Fläche etwas geringer, also die Abschätzung aus Gleichung (5.16) etwas zu hoch angesetzt. Wichtig ist, zu erwähnen, dass die getätigten Abschätzungen der Verteilungen nur so gut passen, weil ihnen dieselben Annahmen zugrunde liegen (Standardmodell, erste Ordnung Störungstheorie). Durch die hohe Übereinstimmung kann aber mutmaßlich vom Erfolg der Event-Generation ausgegangen werden.

In Abb. 9 ist die Verteilung der an Events beteiligten W^+ -Massen derselben Event-Generation zu sehen.

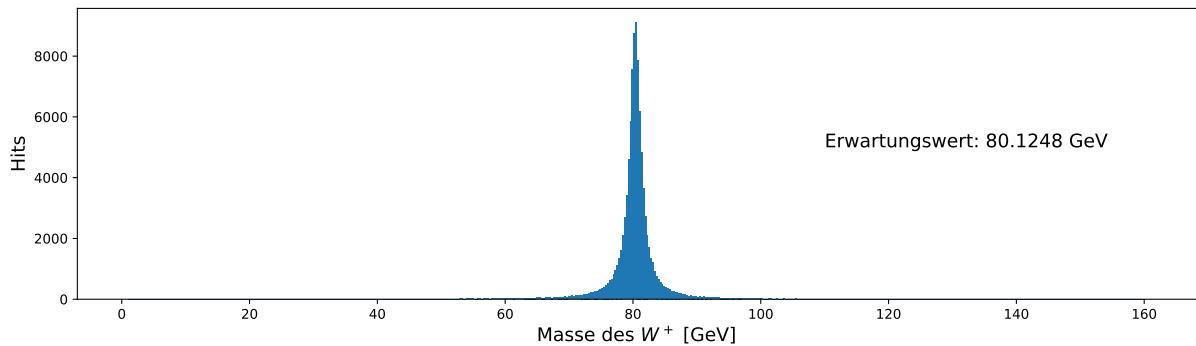


Abbildung 9: Häufigkeiten der am Zerfall beteiligten W^+ -Massen für 100000 Events insgesamt. Angegeben ist dazu der Erwartungswert des Histogrammes.

Man kann gut erkennen, dass sich die Massen um die im Programmcode verwendete Masse des W^+ (80.379 GeV) verteilen. Der Erwartungswert des Histogrammes liegt leicht unterhalb der der W^+ -Masse. Das ist mutmaßlich der Fall, weil eine Resonanzkurve nicht symmetrisch um die Resonanz verläuft.

Speicherung der Events Um von Event-Generatoren erzeugte Events in einer für andere derartige Programme lesbaren Form abzuspeichern, existiert unter anderem das Format *lhe* oder *LHEF* (Les Houches Event File). Dieses Format ist eine Konvention, welche 2001 in Les Houches beschlossen wurde. Das hier entworfene Programm gibt allerdings eine Textdatei aus, in welcher beispielhaft die ersten 100 Events der geschehenen Generation tabelliert sind. Der Eintrag eines Events sieht darin wie folgt aus:

I	ID	Mother	p_x	p_y	p_z	E	m
1	6	0	0.000	0.000	0.000	173.100	173.1000
2	5	1	-25.111	-59.378	22.628	68.453	4.1800
3	24	1	25.111	59.378	-22.628	104.647	79.2637
4	-11	3	52.185	24.704	-8.003	58.289	0.0005
5	12	3	-27.074	34.673	-14.625	46.358	0.0000

I die Teilchennummer und ID die universell festgelegte Teilchen-ID. Alle Werte sind in GeV angegeben.

5.2. Polarisiertes Top-Quark

Die absoluten Winkelverteilungen der Zerfallsprodukte des unpolarisierten Top-Quarks waren recht trivial. Daher wird nun einmal der Zerfall eines polarisierten Top-Quarks betrachtet. Dazu nimmt man als erstes eine neue Mittelung des Betragsquadrates der invarianten Amplitude vor. Diese neue Mittelung umfasst dann nicht mehr alle möglichen Anfangszustände des Top-Quarks (Spin up, Spin down), sondern nur noch einen davon.

5.2.1. Neue Mittelung

Eine Möglichkeit zur Beschreibung des polarisierten Top-Quarks ist neben der expliziten Formulierung von u_t mit einem χ , welches einen bestimmten Spin-Zustand darstellt (siehe Abschnitt 2.3) die Beschreibung durch Helizitäts-Spinoren. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass ihr Spin parallel oder antiparallel zur Impulsrichtung ist, also

$$\sigma \cdot \hat{p}\chi = 2\lambda\chi \quad (5.17)$$

mit $\lambda = \pm \frac{1}{2}$. Sie können daher geschrieben werden als (vgl. Gleichung (2.14))

$$u(p, \lambda) = \sqrt{E+m} \left(2\lambda \frac{\chi}{E+m} \right) \quad (5.18)$$

Die nachfolgenden Ansätze werden aus [3] entnommen. Helizitäts-Spinoren $u(p, \lambda)$ erfüllen die Dirac-Gleichung und sind gleichzeitig Eigenzustände zu $\gamma_5 \not{s}$ mit dem Eigenwert 1. Dabei ist s^μ der Spin-Vierervektor für massebehaftete Teilchen und definiert durch

$$s^\mu = \frac{2\lambda}{m} (|\vec{p}|, E\hat{p}) \quad (5.19)$$

mit der Masse m , der Energie E , dem betraglichen Impuls $|\vec{p}|$, dem Impulsrichtungsvektor \hat{p} und der Helizität $\lambda = \pm \frac{1}{2}$. Er erfüllt

$$s \cdot p = 0 \quad \text{und} \quad s \cdot s = -1 \quad (5.20)$$

Es gilt nun also

$$(\not{p} - m) u(p, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_5 \not{s} u(p, \lambda) = u(p, \lambda) \quad (5.21)$$

Insgesamt ergibt sich dadurch für massebehaftete Fermionen der Projektionsoperator

$$u(p, \lambda) \bar{u}(p, \lambda) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \not{s}) (\not{p} + m) \quad (5.22)$$

Summiert man an dieser Stelle über die beiden möglichen Helizitäts-Zustände, erhält man die schon in Anhang A.1 genutzte Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\lambda} u(p, \lambda) \bar{u}(p, \lambda) = (\not{p} + m) = \sum_{s=1,2} u^{(s)} \bar{u}^{(s)} \quad (5.23)$$

Genau diesen Schritt lässt man jetzt für die Top-Quark-Spinoren in der Berechnung von $\overline{|\mathfrak{M}|}_{pol}^2$ aus. Die effektive Veränderung zu der Rechnung in Anhang A.1 besteht also in dem Austausch von $(\not{p}_t + m_t)$ durch $\frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \not{s}) (\not{p}_t + m_t)$. In diesem Fall ist \not{s} speziell auf das Top-Quark bezogen, sodass

$$s^\mu = 2\lambda (0, \hat{p}_t) \quad (5.24)$$

im Ruhesystem des Top-Quarks. Die Berechnung von $\overline{|\mathfrak{M}|}_{pol}^2$ ist in Anhang A.2 zu finden. Es stellt sich heraus, dass der effektive Unterschied zu $\overline{|\mathfrak{M}|}^2$ in der Ersetzung

$$p_t^\mu \rightarrow p_t^\mu - m_t s^\mu \quad (5.25)$$

besteht.

5.2.2. Integration

Da die neue Mittelung der invarianten Amplitude dieselbe Form wie die alte besitzt und lediglich p_t^μ durch $p_t^\mu - m_t s^\mu$ ersetzt werden muss, ist es natürlich nicht nötig, ein völlig neues Programm zu schreiben. Wählt man $\hat{p}_t = \vec{e}_z$ und $\lambda = \frac{1}{2}$, was gleichbedeutend mit Spin up im Top-Quark-CMS ist, ist der neue „Top-Quark-Viererimpuls“

$$(m_t, 0, 0, -m_t) \quad (5.26)$$

Erwartung Die Zerfallsbreite Γ_{pol} sollte unabhängig von der Wahl des \hat{p}_t sein. So oder so erwartet man eine von der Orientierung im Raum unabhängige Zerfallsbreite, solange keine äußeren Einflüsse etwas anderes vorgeben. Es ist also abzusehen, dass

$$\Gamma_{pol} = \Gamma \quad (5.27)$$

Ergebnis der Integration In der Tat ergab Γ_{pol} nach 100000 Schleifendurchläufen (vgl. Gleichung (5.2))

$$\Gamma_{pol} = (0.14043 \pm 0.00049) \text{ GeV} \quad (5.28)$$

Die größere Unsicherheit entsteht durch die etwas andere Verteilung der Funktionswerte (siehe Abb. 10).

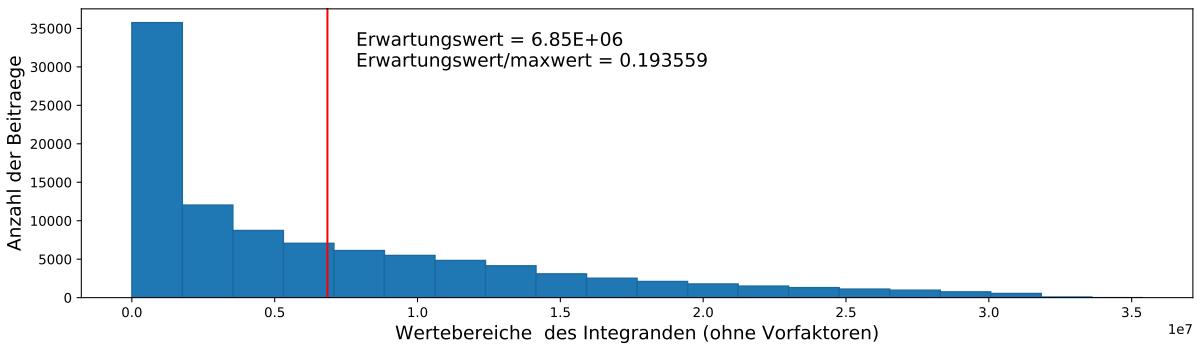


Abbildung 10: Häufigkeiten der Werte des Integranden. Eingezeichnet ist zudem der Erwartungswert des Histogramms. Insgesamt sind 100000 Zufallspunkte ausgewertet worden.

Nach dieser Verteilung sind bei der Event-Generation etwa 500000 Throws für 100000 Hits nötig.

5.2.3. Event-Generation

Die Event-Generation verläuft wie bereits die Integration nach der Ersetzung von p_t genauso wie die schon geschehene in Abschnitt 5.1.2. Besonders interessant ist diesmal die Verteilung von Bottom-Quark und W^+ -Boson im Top-Quark-CMS.

Erwartungen Betrachtet man o.B.d.A. das Top-Quark in seinem Ruhesystem mit $\hat{p}_t = \vec{e}_z$ (unendlich kleiner, aber doch gerichteter Impuls) und Spin up, also $s_z = \frac{1}{2}$, ist seine Helizität $\lambda = \frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, den Spin entlang einer durch den Polarwinkel θ gegebenen Richtung zu messen, kann dann durch Drehung (z.B. um die y-Achse) des Zustandes um θ mit anschließender s_z -Messung erhalten werden. Der gedrehte Zustand wird beispielsweise beschrieben durch

$$\psi = e^{-i\theta \frac{1}{2}\sigma_y} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

mit der Pauli-Matrix σ_y . Man misst dann Spin up mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(s_z = \frac{1}{2}) = |\langle \psi, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \quad (5.30)$$

Um eine Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung bzgl. $\cos \theta$ zu erhalten, müsste evtl. normiert werden, was hier aber nicht mehr nötig ist, und es ergibt sich

$$P'(\cos \theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \quad (5.31)$$

Wenn man jetzt sowohl davon ausgeht, dass die Masse des Bottom-Quarks bei dem Top-Quark-Zerfall vernachlässigbar klein ist (wirklich nur als grobe Abschätzung), und es deshalb immer linkshändig emittiert wird, als auch die schon früher benutzten Wahrscheinlichkeiten der Helizitäts-Zustände des W^+ berücksichtigt, würde das W^+ in etwa 70% der Fälle in Richtung des Top-Quark-Spins und in etwa 30% der Fälle in die entgegengesetzte Richtung emittiert. Die erwartete Winkelverteilung der Impulsrichtungen des W^+ im Top-Quark-CMS setzt sich also folgendermaßen zusammen:

$$P(\cos \theta) = \frac{1}{2} [0.7 (1 + \cos \theta) + 0.3 (1 - \cos \theta)] \cdot \text{Hits} \cdot \frac{2}{20} \quad (5.32)$$

Dabei entspricht $\text{Hits} \cdot \frac{2}{20}$ wieder der tatsächlichen Fläche eines Histogrammes mit 20 Balken auf einem Intervall der Länge 2. Für die Winkel selbst folgt wieder

$$P(\theta) = P(\cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot \frac{\pi}{2} \quad (5.33)$$

Die Verteilung der Azimutalwinkel ϕ sollte eine konstante sein, weil eine Auszeichnung in z-Richtung diese nicht beeinflusst.

Ergebnisse der Event-Generation Wie zuvor wurden 100000 Events generiert. Die erhaltene Verteilung von Häufigkeiten der W^+ -Impulsrichtungen ist in Abb. 11 dargestellt.

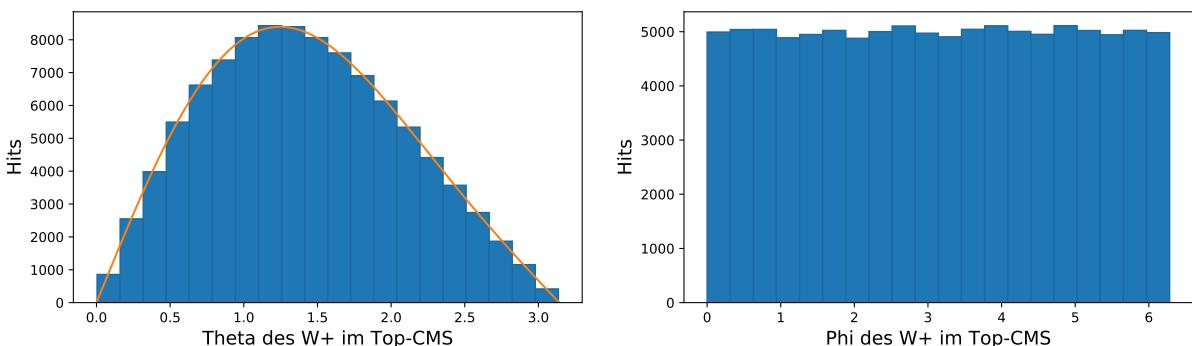


Abbildung 11: Häufigkeiten von Events unter gegebenen Polarwinkeln θ und Azimutalwinkeln ϕ des beim Top-Quark-Zerfall emittierten W^+ -Bosons im Ruhesystem des Top-Quarks mit Spin up. Links ist zusätzlich die erwartete Verteilung aus Gleichung (5.33) eingezeichnet (orange). Insgesamt wurden wieder 100000 Hits generiert.

6 FAZIT

Wieder decken sich die generierten Ergebnisse mit den getätigten Abschätzungen. Die Tatsache, dass Bottom-Quarks hier in Wirklichkeit auch eine Chance haben, rechtshändig emittiert zu werden, scheint nicht sonderlich ins Gewicht zu fallen oder aber sich selbst großteils in der Winkelverteilung aufzuheben.

Bisher waren alle Impulsrichtungen gleichverteilt in ϕ . Interessant ist es daher, sich auch die Winkelverteilung für eine von Spin up verschiedene Polarisation anzuschauen. Polarisiert man das Top-Quark in positive x-Richtung, sprich

$$p_t \rightarrow (m_t, -m_t, 0, 0), \quad (5.34)$$

ist die z-Richtung nicht mehr ausgezeichnet, und es sollte sich wieder eine Sinusverteilung im Polarwinkel θ des W^+ ergeben. Dafür erhält man aber eine bevorzugte Emission des W^+ in Richtung positiver x-Achse. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 12 sichtbar.

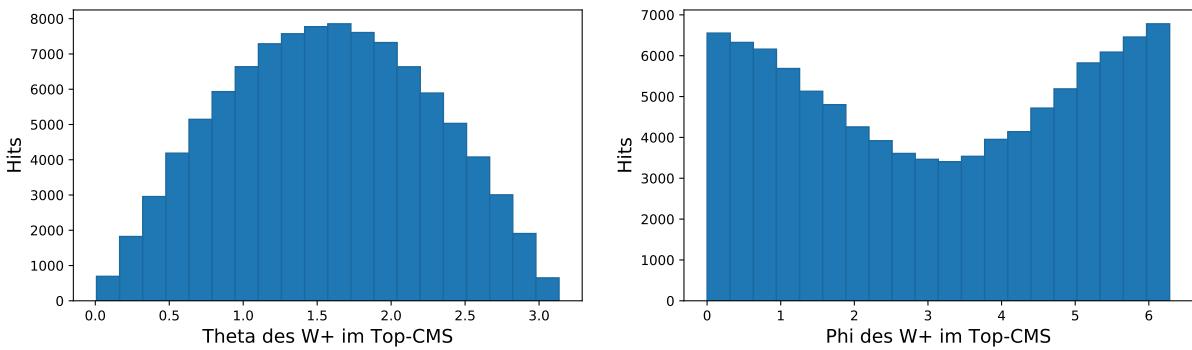


Abbildung 12: Häufigkeiten von Events unter gegebenen Polarwinkeln θ und Azimutalwinkeln ϕ des beim Top-Quark-Zerfall emittierten W^+ -Bosons im Ruhesystem des Top-Quarks mit Spin in positive x-Richtung. Insgesamt wurden wieder 100000 Hits generiert.

6. Fazit

Die im Rahmen des Standardmodells in erster Ordnung Störungstheorie kalkulierten Ergebnisse sowohl für die Zerfallsbreite Γ also auch für die generierten Winkelverteilungen entsprechen den Erwartungen. Die einfache Anpassbarkeit eines bestehenden Event-Generators an leicht veränderte Bedingungen hat sich eindrucksvoll gezeigt.

Es stellte sich heraus, dass im Falle eines polarisierten Top-Quarks mit Spin $s_z = \frac{1}{2}$ das Bottom-Quark bevorzugt in negative z-Richtung emittiert wird, während das W^+ -Boson entsprechend bevorzugt in positive z-Richtung emittiert wird. Dieser Umstand steht direkt mit den Wahrscheinlichkeiten für die drei Helizitäts-Zustände des W^+ beim Top-Quark-Zerfall in Zusammenhang (siehe Gleichung (5.8)). Auch die Emissionsrichtungen von Positron und Elektronneutrino im Ruhesystem des W^+ hängen maßgeblich davon ab (auch im unpolarisierten Fall).

6 FAZIT

Für die getätigten Abschätzungen der Winkelverteilungen von Bottom-Quark und W^+ -Boson im Top-Quark-CMS zeigte sich trotz Vernachlässigung der Bottom-Quark-Masse eine sehr gute Übereinstimmung mit den generierten Verteilungen (siehe Abb. 11). Auch der generierte Zusammenhang zwischen den Impulsrichtungen von Bottom-Quark und Positron konnte über den in Abschnitt 5.1.1 beschriebenen Weg sehr genau wiedergegeben werden (Abb. 8).

Der programmierte Event-Generator an sich funktionierte trotz der vereinfachten Herangehensweise ziemlich gut. Es besteht allerdings noch viel Potential, diesen effizienter zu gestalten. Eine Möglichkeit ist die intelligenter Verteilung von Zufallspunkten im Raum, in der Form, dass keine Punkte in Bereichen generiert werden, in denen sicher keine Hits entstehen. Dafür ist natürlich eine genauere Beschäftigung mit dem Funktionsverlauf notwendig.

Ein Ausblick für die weiterführende Auseinandersetzung mit diesem Thema ist die Berechnung des Prozesses über die erste Ordnung der Störungstheorie hinaus. Zusätzlich können Eigenheiten von Detektoren in den Event-Generator integriert werden, um Resultate zu erzeugen, welche alles in allem mit tatsächlich Gemessenem vergleichbar sind.

A. Rechnungen

A.1. Die gemittelte invariante Amplitude

$$\mathfrak{M} = \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_b \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_t \right] \left(\frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2}}{q^2 - m_W^2 + im_W \Gamma_W} \right) \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{\nu_e} \gamma^\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) v_e \right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2}{8} \left[\bar{u}_b \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_t \right] \overbrace{\left(\frac{-1}{q^2 - m_W^2 + im_W \Gamma_W} \right)}^{=:a} \left[\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_e \right] \\ &+ \frac{g^2}{8} \left[\bar{u}_b \not{q} (1 - \gamma^5) u_t \right] \overbrace{\left(\frac{\frac{1}{m_W^2}}{q^2 - m_W^2 + im_W \Gamma_W} \right)}^{=\frac{-a}{m_W^2}} \left[\bar{u}_{\nu_e} \not{q} (1 - \gamma^5) v_e \right] \end{aligned}$$

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{Spins} |\mathfrak{M}|^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \frac{g^4}{64} |a|^2 \sum_{Spins} \left[\begin{aligned} &\left[\bar{u}_b \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_t \right] \left[\bar{u}_b \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u_t \right]^* \left[\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_e \right] \left[\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\nu (1 - \gamma^5) v_e \right]^* \\ &- \frac{1}{m_W^2} \left[\bar{u}_b \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_t \right] \left[\bar{u}_b \not{q} (1 - \gamma^5) u_t \right]^* \left[\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_e \right] \left[\bar{u}_{\nu_e} \not{q} (1 - \gamma^5) v_e \right]^* \\ &- \frac{1}{m_W^2} \left[\bar{u}_b \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_t \right]^* \left[\bar{u}_b \not{q} (1 - \gamma^5) u_t \right] \left[\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_e \right]^* \left[\bar{u}_{\nu_e} \not{q} (1 - \gamma^5) v_e \right] \\ &+ \frac{1}{m_W^4} \left[\bar{u}_b \not{q} (1 - \gamma^5) u_t \right] \left[\bar{u}_b \not{q} (1 - \gamma^5) u_t \right]^* \left[\bar{u}_{\nu_e} \not{q} (1 - \gamma^5) v_e \right] \left[\bar{u}_{\nu_e} \not{q} (1 - \gamma^5) v_e \right]^* \end{aligned} \right] \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{g^4}{64} |a|^2 \left[Tr \left((\not{p}_b + m_b) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_t + m_t) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \right) \right. \\
&\quad Tr \left((\not{p}_{\nu_e} + m_{\nu_e}) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_e - m_e) \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \right) \\
&\quad - \frac{1}{m_W^2} Tr \left((\not{p}_b + m_b) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_t + m_t) \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \\
&\quad Tr \left((\not{p}_{\nu_e} + m_{\nu_e}) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_e - m_e) \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \\
&\quad - \frac{1}{m_W^2} Tr \left((\not{p}_b + m_b) \not{q} (1 - \gamma^5) (\not{p}_t + m_t) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \right) \\
&\quad Tr \left((\not{p}_{\nu_e} + m_{\nu_e}) \not{q} (1 - \gamma^5) (\not{p}_e - m_e) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \right) \\
&\quad + \frac{1}{m_W^4} Tr \left((\not{p}_b + m_b) \not{q} (1 - \gamma^5) (\not{p}_t + m_t) \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \\
&\quad \left. Tr \left((\not{p}_{\nu_e} + m_{\nu_e}) \not{q} (1 - \gamma^5) (\not{p}_e - m_e) \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \right] \tag{A.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{g^4}{64} |a|^2 \left[Tr \left(\not{p}_b \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_t \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \right) Tr \left(\not{p}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_e \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \right) \right. \\
&\quad - \frac{1}{m_W^2} Tr \left(\not{p}_b \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_t \not{q} (1 - \gamma^5) \right) Tr \left(\not{p}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_e \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \\
&\quad - \frac{1}{m_W^2} Tr \left(\not{p}_b \not{q} (1 - \gamma^5) \not{p}_t \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \right) Tr \left(\not{p}_{\nu_e} \not{q} (1 - \gamma^5) \not{p}_e \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{m_W^4} Tr \left(\not{p}_b \not{q} (1 - \gamma^5) \not{p}_t \not{q} (1 - \gamma^5) \right) Tr \left(\not{p}_{\nu_e} \not{q} (1 - \gamma^5) \not{p}_e \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \right] \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|a|^2 g^4}{2} \left[\left(p_t^\mu p_b^\nu + p_t^\nu p_b^\mu - (p_t \cdot p_b) g^{\mu\nu} + i\varepsilon^{\mu m \nu n} p_{t m} p_{b n} \right) \right. \\
&\quad \left(p_{e\mu} p_{\nu_e\nu} + p_{e\nu} p_{\nu_e\mu} - (p_e \cdot p_{\nu_e}) g_{\mu\nu} + i\varepsilon_{\mu k \nu l} p_e^k p_{\nu_e}^l \right) \\
&\quad - \frac{1}{m_W^2} \left(p_t^\mu (p_b \cdot q) + (p_t \cdot q) p_b^\mu - (p_t \cdot p_b) q^\mu + i\varepsilon^{\mu m \alpha n} p_{t m} p_{b n} q_\alpha \right) \\
&\quad \left(p_{e\mu} (p_{\nu_e} \cdot q) + (p_e \cdot q) p_{\nu_e\mu} - (p_e \cdot p_{\nu_e}) q_\mu + i\varepsilon_{\mu k \beta l} p_e^k p_{\nu_e}^l q^\beta \right) \\
&\quad - \frac{1}{m_W^2} \left(p_t^\mu (p_b \cdot q) + (p_t \cdot q) p_b^\mu - (p_t \cdot p_b) q^\mu - i\varepsilon^{\mu m \alpha n} p_{t m} p_{b n} q_\alpha \right) \\
&\quad \left(p_{e\mu} (p_{\nu_e} \cdot q) + (p_e \cdot q) p_{\nu_e\mu} - (p_e \cdot p_{\nu_e}) q_\mu - i\varepsilon_{\mu k \beta l} p_e^k p_{\nu_e}^l q^\beta \right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{m_W^4} \left(2(p_t \cdot q) (p_b \cdot q) - q^2 (p_t \cdot p_b) \right) \left(2(p_e \cdot q) (p_{\nu_e} \cdot q) - q^2 (p_e \cdot p_{\nu_e}) \right) \right] \tag{A.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|a|^2 g^4}{2} \left[2(p_t \cdot p_e)(p_b \cdot p_{\nu_e}) + 2(p_b \cdot p_e)(p_t \cdot p_{\nu_e}) - \varepsilon^{\mu m \nu n} \varepsilon_{\mu k \nu l} p_{tm} p_{bn} p_e^k p_{\nu_e}^l \right. \\
&\quad - \frac{2}{m_W^2} \left((p_t \cdot p_e)(p_b \cdot q)(p_{\nu_e} \cdot q) + (p_{\nu_e} \cdot p_t)(p_b \cdot q)(p_e \cdot q) - 2(p_{\nu_e} \cdot p_e)(p_t \cdot q)(p_b \cdot q) \right. \\
&\quad \left. + (p_b \cdot p_e)(p_t \cdot q)(p_{\nu_e} \cdot q) + (p_{\nu_e} \cdot p_b)(p_t \cdot q)(p_e \cdot q) - 2(p_t \cdot p_b)(p_e \cdot q)(p_{\nu_e} \cdot q) \right. \\
&\quad \left. + (p_t \cdot p_b)(p_{\nu_e} \cdot p_e) q^2 - \varepsilon^{\mu m \alpha n} \varepsilon_{\mu k \beta l} p_{tm} p_{bn} q_\alpha p_e^k p_{\nu_e}^l q^\beta \right) \\
&\quad + \frac{1}{m_W^4} \left(4(p_t \cdot q)(p_b \cdot q)(p_e \cdot q)(p_{\nu_e} \cdot q) - 2(p_t \cdot q)(p_b \cdot q)(p_{\nu_e} \cdot p_e) q^2 \right. \\
&\quad \left. + (p_t \cdot p_b)(p_{\nu_e} \cdot p_e) q^4 - 2(p_e \cdot q)(p_{\nu_e} \cdot q)(p_t \cdot p_b) q^2 \right) \quad (A.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |a|^2 g^4 \left[2(p_t \cdot p_e)(p_b \cdot p_{\nu_e}) \right. \\
&\quad - \frac{1}{m_W^2} \left(2(p_{\nu_e} \cdot p_t)(p_b \cdot q)(p_e \cdot q) - 2(p_{\nu_e} \cdot p_e)(p_t \cdot q)(p_b \cdot q) \right. \\
&\quad \left. + 2(p_b \cdot p_e)(p_t \cdot q)(p_{\nu_e} \cdot q) - 2(p_t \cdot p_b)(p_e \cdot q)(p_{\nu_e} \cdot q) \right. \\
&\quad \left. + (p_t \cdot p_b)(p_{\nu_e} \cdot p_e) q^2 + (p_t \cdot p_e)(p_{\nu_e} \cdot p_b) q^2 - (p_e \cdot p_b)(p_{\nu_e} \cdot p_t) q^2 \right) \quad (A.6) \\
&\quad + \frac{1}{m_W^4} \left(2(p_t \cdot q)(p_b \cdot q)(p_e \cdot q)(p_{\nu_e} \cdot q) - (p_t \cdot q)(p_b \cdot q)(p_{\nu_e} \cdot p_e) q^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (p_t \cdot p_b)(p_{\nu_e} \cdot p_e) q^4 - (p_e \cdot q)(p_{\nu_e} \cdot q)(p_t \cdot p_b) q^2 \right) = |\mathfrak{M}|^2
\end{aligned}$$

A.2. Die gemittelte invariante Amplitude, Top-Quark polarisiert

Da nun nicht mehr über alle Eingangszustände gemittelt wird, entfällt der Faktor $\frac{1}{2}$ vor der Summe der $|\mathfrak{M}|^2$. Der zweite Unterschied zur vorherigen Rechnung besteht in der

Ersetzung von $(\not{p}_t + m_t)$ durch $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{s})(\not{p}_t + m_t)$. Es ist

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathfrak{M}}|_{pol}^2 &= \dots \\
 &= |\overline{\mathfrak{M}}|^2 + \frac{1}{2} \frac{g^4}{64} |a|^2 \left[Tr \left((\not{p}_b + m_b) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma_5 \not{s} (\not{p}_t + m_t) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \right) \right. \\
 &\quad Tr \left((\not{p}_{\nu_e} + m_{\nu_e}) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_e - m_e) \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{m_W^2} Tr \left((\not{p}_b + m_b) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma_5 \not{s} (\not{p}_t + m_t) \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \\
 &\quad Tr \left((\not{p}_{\nu_e} + m_{\nu_e}) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_e - m_e) \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \quad (A.7) \\
 &\quad - \frac{1}{m_W^2} Tr \left((\not{p}_b + m_b) \not{q} (1 - \gamma^5) \gamma_5 \not{s} (\not{p}_t + m_t) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \right) \\
 &\quad Tr \left((\not{p}_{\nu_e} + m_{\nu_e}) \not{q} (1 - \gamma^5) (\not{p}_e - m_e) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{m_W^4} Tr \left((\not{p}_b + m_b) \not{q} (1 - \gamma^5) \gamma_5 \not{s} (\not{p}_t + m_t) \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \\
 &\quad \left. Tr \left((\not{p}_{\nu_e} + m_{\nu_e}) \not{q} (1 - \gamma^5) (\not{p}_e - m_e) \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |\overline{\mathfrak{M}}|^2 + \frac{1}{2} \frac{g^4}{64} |a|^2 \left[Tr \left(\not{p}_b \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma_5 \not{s} m_t \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \right) Tr \left(\not{p}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_e \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \right) \right. \\
 &\quad - \frac{1}{m_W^2} Tr \left(\not{p}_b \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma_5 \not{s} m_t \not{q} (1 - \gamma^5) \right) Tr \left(\not{p}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_e \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{m_W^2} Tr \left(\not{p}_b \not{q} (1 - \gamma^5) \gamma_5 \not{s} m_t \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \right) Tr \left(\not{p}_{\nu_e} \not{q} (1 - \gamma^5) \not{p}_e \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \right) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{m_W^4} Tr \left(\not{p}_b \not{q} (1 - \gamma^5) \gamma_5 \not{s} m_t \not{q} (1 - \gamma^5) \right) Tr \left(\not{p}_{\nu_e} \not{q} (1 - \gamma^5) \not{p}_e \not{q} (1 - \gamma^5) \right) \right] \quad (A.8)
 \end{aligned}$$

Wegen $(1 - \gamma^5) \gamma^5 = -(1 - \gamma^5)$ kann man sofort erkennen, dass nun die gleiche Rechnung wie ab Teil A.3 der vorherigen folgt, lediglich mit dem Ersatz von p_t^μ durch $-m_t s^\mu$.

Explizit ergibt sich also

$$\begin{aligned}
 |\mathfrak{M}|_{pol}^2 = & |\mathfrak{M}|^2 - m_t |a|^2 g^4 \left[2 (s \cdot p_e) (p_b \cdot p_{\nu_e}) \right. \\
 & - \frac{1}{m_W^2} \left(2 (p_{\nu_e} \cdot s) (p_b \cdot q) (p_e \cdot q) - 2 (p_{\nu_e} \cdot p_e) (s \cdot q) (p_b \cdot q) \right. \\
 & \quad + 2 (p_b \cdot p_e) (s \cdot q) (p_{\nu_e} \cdot q) - 2 (s \cdot p_b) (p_e \cdot q) (p_{\nu_e} \cdot q) \\
 & \quad \left. + (s \cdot p_b) (p_{\nu_e} \cdot p_e) q^2 + (s \cdot p_e) (p_{\nu_e} \cdot p_b) q^2 - (p_e \cdot p_b) (p_{\nu_e} \cdot s) q^2 \right) \\
 & + \frac{1}{m_W^4} \left(2 (s \cdot q) (p_b \cdot q) (p_e \cdot q) (p_{\nu_e} \cdot q) - (s \cdot q) (p_b \cdot q) (p_{\nu_e} \cdot p_e) q^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} (s \cdot p_b) (p_{\nu_e} \cdot p_e) q^4 - (p_e \cdot q) (p_{\nu_e} \cdot q) (s \cdot p_b) q^2 \right) \left. \right] \quad (A.9)
 \end{aligned}$$

Effektiv erhält man $|\mathfrak{M}|_{pol}^2$ also durch

$$|\mathfrak{M}|^2 \xrightarrow{p_t^\mu \rightarrow p_t^\mu - m_t s^\mu} |\mathfrak{M}|_{pol}^2 \quad (A.10)$$

A.3. Modifikation des Integrals für den Top-Quark-Zerfall

A.3.1. Ausintegration der Delta-Funktionen

$$\begin{aligned}
 & \int \dots |\mathfrak{M}|^2 \frac{1}{E_e E_{\nu_e}} \delta^{(4)}(q - p_e - p_{\nu_e}) d^3 p_e d^3 p_{\nu_e} \\
 & \stackrel{q-CMS}{=} \int \dots |\mathfrak{M}|^2 \frac{1}{E_e E_{\nu_e}} \delta(m_q - E_e - E_{\nu_e}) d^3 p_e \text{ mit } \vec{p}_{\nu_e} = -\vec{p}_e \\
 & = \int \dots |\mathfrak{M}|^2 \frac{1}{E_e E_{\nu_e}} \delta \left(p_e - \frac{1}{2m_q} \sqrt{(m_q^2 - m_e^2 - m_{\nu_e}^2)^2 - 4m_e^2 m_{\nu_e}^2} \right) \frac{E_e E_{\nu_e}}{p_e (E_e + E_{\nu_e})} d^3 p_e \\
 & = \int \dots |\mathfrak{M}|^2 \frac{p_e}{m_q} \sin \theta_e d\phi_e d\theta_e \text{ mit } p_e = p_{\nu_e} = \frac{1}{2m_q} \sqrt{(m_q^2 - m_e^2 - m_{\nu_e}^2)^2 - 4m_e^2 m_{\nu_e}^2} \quad (A.11)
 \end{aligned}$$

Für Integration über Bottom-Quark- und W^+ -Impuls analog.

A.3.2. Geschickte Substitution

Substitution:

$$m_q^2 = m_W \Gamma_W \tan \rho + m_W^2 \quad (A.12)$$

Es folgt:

$$dm_q^2 = m_W \Gamma_W (1 + \tan^2 \rho) d\rho \quad (\text{A.13})$$

Daraus wiederum:

$$\frac{dm_q^2}{(m_q^2 - m_W^2)^2 + m_W^2 \Gamma_W^2} = \frac{d\rho}{m_W \Gamma_W} \quad (\text{A.14})$$

Also ist

$$\int_{m_{q_{min}}^2}^{m_{q_{max}}^2} \dots \frac{1}{(m_q^2 - m_W^2)^2 + m_W^2 \Gamma_W^2} g^4 [\dots] dm_q^2 = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \dots \frac{g^4}{m_W \Gamma_W} [\dots] d\rho \quad (\text{A.15})$$

mit

$$\rho_{max} = \arctan \left(\frac{m_{q_{max}}^2 - m_W^2}{m_W \Gamma_W} \right) \text{ und } \rho_{min} = \arctan \left(\frac{m_{q_{min}}^2 - m_W^2}{m_W \Gamma_W} \right) \quad (\text{A.16})$$

B. Programmcode für die Integration und Event-Generation

1 Integration

Import von Modulen

```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt
        import random as rd
        import numpy as np
        from __future__ import print_function
```

Definiere drei- und vierdimensionales Skalarprodukt

```
In [2]: def skalprod3(a,b):
    if len(a) == len(b):
        s = 0
        for i in range(len(a)):
            s += a[i]*b[i]
        return s

    else:
        print('WARNING: Ungleiche Dimension der Vektoren')

def skalprod4(a,b):
    if len(a) == len(b):
        s = a[0]*b[0]
        for i in range(len(a)-1):
            s -= a[i+1]*b[i+1]
        return s

    else:
        print('WARNING: Ungleiche Dimension der Vektoren')
```

Definiere Boost eines Vierervektors abhängig vom q-Impuls. Angegeben werden müssen die Energie, der betragliche Impuls und der Richtungsvektor des zu Transformierenden, g, bg, l für entsprechende $\gamma, \beta\gamma$ und Richtung des Boosts

```
In [3]: def boost(E, p, m, g, bg, l):
    sp = skalprod3(m, l)

    p_xt4 = [0,0,0,0]
    p_xt4[0] = g*E - bg*p*sp
    for i in range(3):
        p_xt4[i+1] = -bg*l[i]*E + p*(m[i]+(g-1)*l[i])*sp
    return p_xt4
```

Setzen der Grundparameter und Initialisieren von Variablen

```
In [4]: mt = 173.1 #Massen
mb = 4.18
me = 0.000511
mnu = 0
mqfest = 80.379
breiteq = 2.08 #Zerfallsbreite des W

equad = 4*np.pi/137 #Elementarladung**2 ausgedrückt durch die alpha (1/137)
sinwquad = 0.231 #sin(Theta_Weinberg)**2
gquad = equad / sinwquad #g**2

rhomin = np.arctan(((me+mnu)**2 - mqfest**2)/mqfest/breiteq)
rhomax = np.arctan(((mt-mb)**2 - mqfest**2)/mqfest/breiteq)

Vorfaktor = gquad**2/(2*mt*(2*np.pi)**5 * 2**4) / mqfest / breiteq
raum = (rhomax-rhomin)*4*np.pi**4

Summe = 0
Summe_Quadrat = 0
Punkte = 100000
maxwert = 0
minwert = 99999
fs = []
```

Schleife zum Bestimmen von Funktionswerten an zufälligen Punkten

```
In [5]: for h in range(Punkte):

    #Auswürfeln von mq, theta_q, phi_q, theta_nuq, phi_nuq-----
    rho = rhomin + rd.random()*(rhomax - rhomin)
    mq = np.sqrt(mqfest * breiteq * np.tan(rho) + mqfest**2)
    theta_q = np.pi*rd.random()
    phi_q = 2*np.pi*rd.random()
    theta_nuq = np.pi*rd.random()
    phi_nuq = 2*np.pi*rd.random()

    #Errechnen von Gamma, Beta*Gamma und der Viererimpulse-----
    E_qt = (mt**2 + mq**2 - mb**2)/(2*mt)
```

```

E_bt = (mt**2 + mb**2 - mq**2)/(2*mt)
p_qt = np.sqrt(mt**4 + (mq**2 - mb**2)**2 - 2*(mq**2 + mb**2)*mt**2) /\
(2*mt)
p_bt = p_qt

E_nuq = (mq**2 + mnu**2 - me**2)/(2*mq)
E_eq = (mq**2 + me**2 - mnu**2)/(2*mq)
p_nuq = np.sqrt(mq**4 + (mnu**2 - me**2)**2 - 2*(mnu**2 + me**2)*mq**2\
) / (2*mq)
p_eq = p_nuq

n_qt = [np.cos(phi_q)*np.sin(theta_q), np.sin(phi_q)*np.sin(theta_q), \
np.cos(theta_q)] #Richtung q
n_bt = [-n_qt[i] for i in range(len(n_qt))]
n_nuq = [np.cos(phi_nuq)*np.sin(theta_nuq), np.sin(phi_nuq)*np.sin(the\
ta_nuq), np.cos(theta_nuq)] #Richtung Neutrino
n_eq = [-n_nuq[i] for i in range(len(n_nuq))]
n = n_bt

p4_qt = [E_qt, p_qt*n_qt[0], p_qt*n_qt[1], p_qt*n_qt[2]]
p4_bt = [E_bt, p_bt*n_bt[0], p_bt*n_bt[1], p_bt*n_bt[2]]
p4_nuq = [E_nuq, p_nuq*n_nuq[0], p_nuq*n_nuq[1], p_nuq*n_nuq[2]]
p4_eq = [E_eq, p_eq*n_eq[0], p_eq*n_eq[1], p_eq*n_eq[2]]
p4_tt = [mt,0,0,0] #ACHTUNG!, [mt,0,0,-mt] für z-polarisiertes Top

gamma = E_qt/mq
betagamma = p_qt/mq

#Booste e- und nuImpuls in das Top-CMS
p4_nut = boost(E_nuq, p_nuq, n_nuq, gamma, betagamma, n)
p4_et = boost(E_eq, p_eq, n_eq, gamma, betagamma, n)

#Funktion auswerten-----#
tb = skalprod4(p4_tt, p4_bt); te = skalprod4(p4_tt, p4_et)
tnu = skalprod4(p4_tt, p4_nut); tq = skalprod4(p4_tt, p4_qt)
be = skalprod4(p4_bt, p4_et); bnu = skalprod4(p4_bt, p4_nut)
bq = skalprod4(p4_qt, p4_bt); enu = skalprod4(p4_et, p4_nut)
eq = skalprod4(p4_qt, p4_et); nuq = skalprod4(p4_qt, p4_nut)
qq = skalprod4(p4_qt, p4_qt)

f01 = 2*te*bnu

f02 = 2*tnu*bq*eq
f03 = 2*be*tq*nuq
f04 = -2*tb*eq*nuq
f05 = -2*enu*tq*bq
f06 = tb*qq*enu
f07 = te*qq*bnu

```

```

f08 = -tnu*qq*be

f09 = 2*tq*bq*eq*nuq
f10 = -enu*qq*tq*bq
f11 = -tb*qq*eq*nuq
f12 = 0.5*qq**2 *tb*enu

f = ((p_qt/mt)*(p_nuq/mq)
      *np.sin(theta_q)*np.sin(theta_nuq)
      *(f01-(f02+f03+f04+f05+f06+f07+f08)/mqfest**2 + (f09+f10+f11+f12) \
      /mqfest**4))

Summe += f
Summe_Quadrat += f**2

fs.append(f)

if f > maxwert:
    maxwert = f
if f < minwert:
    minwert = f

```

Errechnen des Integralwertes, Ausgabe und Plot der Funktionswerthäufigkeiten

```

In [6]: Integral = Vorfaktor * raum * Summe / Punkte
Abweichung = np.sqrt(Summe_Quadrat - Summe**2 / Punkte) * Vorfaktor * rau \
m / Punkte
print ('Integral = ', Integral, '+-', Abweichung)

print ('maxwert = ', maxwert)
print ('minwert = ', minwert)

plt.figure(figsize=(15,4))

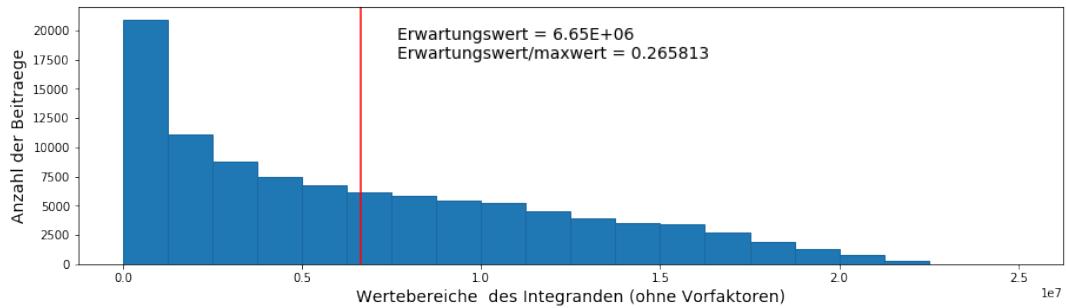
hist01 = plt.hist(fs,20,edgecolor='#1b699fff', linewidth='1.0')
EWf = sum([hist01[0][i]*(hist01[1][i]+hist01[1][i+1])/2. for i in range(len(hist01[0]))])/Punkte#Erwartungswert
plt.axvline(x=EWf, color='r')
plt.text(EWf + 1e6, plt.gca().get_ylim()[1]*0.8, '%s%.2E\n%s%f' % ('Erwartu \
ngswert = ', EWf, 'Erwartungswert/maxwert = ', EWf/maxwert), fontsize=14)
plt.xlabel('Wertebereiche des Integranden (ohne Vorfaktoren)', fontsize=14)
plt.ylabel('Anzahl der Beitraege', fontsize=14)

plt.savefig('Werteverteilung.pdf', bbox_inches='tight', pad_inches=0, transparent=True)

plt.show()
plt.close()

```

```
Integral = 0.138949339143 +- 0.000369505344492
maxwert = 24999512.2021
minwert = 0.00358277485612
```



2 Generieren von Events

Erstellen einer Textdatei für Les Houches Accord

```
In [7]: file = open('Les_Houches_Accord.txt', 'w')
format1 = 2*'{:>8}' + 6*'{:>10}' + '\n'
format2 = 2*'%8i' + '%10i' + 4*'%10.3f' + '%10.4f\n'

leshouches = 100
file.write('%s%i%s\n\n' % ('Recorded data for ', leshouches, ' generated \
events'))
```

Anlegen von leeren Listen für entsprechende Hits und Festlegung der maximalen Anzahl von Throws, sowie die intendierte Zahl an Hits

```
In [8]: theta_q_hits = []
phi_q_hits = []
theta_nuq_hits = []
phi_nuq_hits = []
theta_nut_hits = []
phi_nut_hits = []

theta_bt_hits = []
theta_eq_hits = []
theta_et_hits = []
cosbe = []
theta_qnuq = []

mq_hits = []
```

```

def tupel(teilchen):
    return (1, 6, 0, 1, 2, 3, 4, m)

hits = 0
maxThrows = 500000
hits_intended = 100000

Schleife zur Generation von Events und Schreiben der Textdatei

In [9]: l = 0
while hits < hits_intended and l < maxThrows:
    l += 1

#Auswürfeln von mq, theta_q, phi_q, theta_nuq, phi_nuq-----
rho = rhomin + rd.random()*(rhomax - rhomin)
mq = np.sqrt(mqfest * breiteq * np.tan(rho) + mqfest**2)
#mq = me + mnu + (mt-mb-me-mnu)*rd.random()
theta_q = np.pi*rd.random()
phi_q = 2*np.pi*rd.random()
theta_nuq = np.pi*rd.random()
phi_nuq = 2*np.pi*rd.random()

#Errechnen von Gamma, Beta*Gamma und der Viererimpulse-----
E_qt = (mt**2 + mq**2 - mb**2)/(2*mt)
E_bt = (mt**2 + mb**2 - mq**2)/(2*mt)
p_qt = np.sqrt(mt**4 + (mq**2 - mb**2)**2 - 2*(mq**2 + mb**2)*mt**2) /\
(2*mt)
p_bt = p_qt

E_nuq = (mq**2 + mnu**2 - me**2)/(2*mq)
E_eq = (mq**2 + me**2 - mnu**2)/(2*mq)
p_nuq = np.sqrt(mq**4 + (mnu**2 - me**2)**2 - 2*(mnu**2 + me**2)*mq**2) /\
(2*mq)
p_eq = p_nuq

n_qt = [np.cos(phi_q)*np.sin(theta_q), np.sin(phi_q)*np.sin(theta_q), \
np.cos(theta_q)] #Richtung q
n_bt = [-n_qt[i] for i in range(len(n_qt))]
n_nuq = [np.cos(phi_nuq)*np.sin(theta_nuq), np.sin(phi_nuq)*np.sin(theta_nuq), \
np.cos(theta_nuq)] #Richtung Neutrino
n_eq = [-n_nuq[i] for i in range(len(n_nuq))]
n = n_bt

p4_qt = [E_qt, p_qt*n_qt[0], p_qt*n_qt[1], p_qt*n_qt[2]]
p4_bt = [E_bt, p_bt*n_bt[0], p_bt*n_bt[1], p_bt*n_bt[2]]
p4_nuq = [E_nuq, p_nuq*n_nuq[0], p_nuq*n_nuq[1], p_nuq*n_nuq[2]]

```

```

p4_eq = [E_eq, p_eq*n_eq[0], p_eq*n_eq[1], p_eq*n_eq[2]]
p4_tt = [mt,0,0,0] #ACHTUNG, [mt,0,0,-mt] für z-polarisiertes Top

gamma = E_qt/mq
betagamma = p_qt/mq

#Booste e- und nuImpuls in das Top-CMS
p4_nut = boost(E_nuq, p_nuq, n_nuq, gamma, betagamma, n)
p4_et = boost(E_eq, p_eq, n_eq, gamma, betagamma, n)

#Berechne Winkel nach Boost
p_nut = np.sqrt(sum([p4_nut[i+1]**2 for i in range(3)]))

theta_nut = np.arccos(p4_nut[3]/p_nut)
if p4_nut[1] >= 0:
    phi_nut = np.arctan(p4_nut[2]/p4_nut[1])
else:
    phi_nut = np.arctan(p4_nut[2]/p4_nut[1])+np.pi

if phi_nut < 0:
    phi_nut += 2*np.pi

p_et = np.sqrt(sum([p4_et[i+1]**2 for i in range(3)]))

theta_et = np.arccos(p4_et[3]/p_et)
if p4_et[1] >= 0:
    phi_et = np.arctan(p4_et[2]/p4_et[1])
else:
    phi_et = np.arctan(p4_et[2]/p4_et[1])+np.pi

if phi_et < 0:
    phi_et += 2*np.pi

#Funktion auswerten-----#
#Achtung, p4_tt ist hier nicht mehr wirklich der Top-Viererimpuls!!!-#
tb = skalprod4(p4_tt, p4_bt); te = skalprod4(p4_tt, p4_et)
tnu = skalprod4(p4_tt, p4_nut); tq = skalprod4(p4_tt, p4_qt)
be = skalprod4(p4_bt, p4_et); bnu = skalprod4(p4_bt, p4_nut)
bq = skalprod4(p4_qt, p4_bt); enu = skalprod4(p4_et, p4_nut)
eq = skalprod4(p4_qt, p4_et); nuq = skalprod4(p4_qt, p4_nut)
qq = skalprod4(p4_qt, p4_qt)

f01 = 2*te*bnu

f02 = 2*tnu*bq*eq
f03 = 2*be*tq*nuq
f04 = -2*tb*eq*nuq

```

```

f05 = -2*enu*tq*bq
f06 = tb*qq*enu
f07 = te*qq*bnu
f08 = -tnu*qq*be

f09 = 2*tq*bq*eq*nuq
f10 = -enu*qq*tq*bq
f11 = -tb*qq*eq*nuq
f12 = 0.5*qq**2 *tb*enu

f = ((p_qt/mt)*(p_nuq/mq)
      *np.sin(theta_q)*np.sin(theta_nuq)
      *(f01-(f02+f03+f04+f05+f06+f07+f08)/mqfest**2 + (f09+f10+f11+f12) \
      /mqfest**4))

#Überprüfen, ob Zufallswert unter Funktion liegt-----#
#Hinzufügen der Koordinaten des Hits in entsprechende Liste-----#
if f >= maxwert*rd.random():
    theta_q_hits.append(theta_q)
    phi_q_hits.append(phi_q)
    theta_nuq_hits.append(theta_nuq)
    phi_nuq_hits.append(phi_nuq)
    theta_nut_hits.append(theta_nut)
    phi_nut_hits.append(phi_nut)

    theta_bt_hits.append(np.pi - theta_q)
    theta_eq_hits.append(theta_nuq + np.pi % (2*np.pi))

    #n_nut = [np.cos(phi_nut)*np.sin(theta_nut), np.sin(phi_nut)*np.si\
#n(theta_nut), np.cos(theta_nut)]
    #n_et = [np.cos(phi_et)*np.sin(theta_et), np.sin(phi_et)*np.sin(th\
#eta_et), np.cos(theta_et)]
    cosbe.append(-skalprod3(n_bt, n_eq))
    theta_qnuq.append(np.arccos(skalprod3(n_qt, n_eq)))

    mq_hits.append(mq)

    hits += 1

#Schreiben des aktuellen Events in die Textdatei-----#
if hits <= leshouches:
    file.write('%s%i\n' % ('Event ', hits))
    file.write(format1.format('I', 'ID', 'Mother', 'p_x', 'p_y',
    'p_z', 'E', 'm'))
    file.write(format2 % (1, 6, 0, p4_tt[1], p4_tt[2], p4_tt[3],
    p4_tt[0], mt))
    file.write(format2 % (2, 5, 1, p4_bt[1], p4_bt[2], p4_bt[3],

```

```

        p4_bt[0], mb))
    file.write(format2 % (3, 24, 1, p4_qt[1], p4_qt[2], p4_qt[3],
p4_qt[0], mq))
    file.write(format2 % (4, -11, 3, p4_et[1], p4_et[2], p4_et[3]
, p4_et[0], me))
    file.write(format2 % (5, 12, 3, p4_nut[1], p4_nut[2], p4_nut[\n
3], p4_nut[0], mn))
    file.write(76*'_' + '\n')

print ('Hits = ', hits, ', Throws = ', 1)
file.close()

Hits = 100000 , Throws = 377404

```

Plotten der erstellten Listen in Form von Histogrammen

In [10]: `plt.figure(figsize=(15,30))`

```

plt.subplot(621)
plt.xlabel('Theta des W+ in Top-CMS')
plt.ylabel('Hits')
#s = plt.hist(sinvergleich, 20)
t = plt.hist(theta_q_hits, 20)
plt.subplot(622)
plt.xlabel('Phi des W+ in Top-CMS')
plt.ylabel('Hits')
plt.hist(phi_q_hits, 20)
plt.subplot(623)
plt.xlabel('Theta des Neutrinos in W-CMS')
plt.ylabel('Hits')
plt.hist(theta_nuq_hits, 20)
plt.subplot(624)
plt.xlabel('Phi des Neutrinos in W-CMS')
plt.ylabel('Hits')
plt.hist(phi_nuq_hits, 20)
plt.subplot(625)
plt.xlabel('Theta des Neutrinos in Top-CMS')
plt.ylabel('Hits')
plt.hist(theta_nut_hits, 20)
plt.subplot(626)
plt.xlabel('Phi des Neutrinos in Top-CMS')
plt.ylabel('Hits')
plt.hist(phi_nut_hits, 20)

plt.subplot(627)
plt.xlabel('Masse des W+ [GeV]')
plt.ylabel('Hits')

```

```

plt.hist(mq_hits, 42)

plt.subplot(629)
plt.xlabel('Theta des b [GeV]')
plt.ylabel('Hits')
plt.hist(theta_bt_hits, 20)

plt.subplot(6,2,10)
plt.xlabel('Theta des Positrons in W-CMS [GeV]')
plt.ylabel('Hits')
plt.hist(theta_eq_hits, 20)

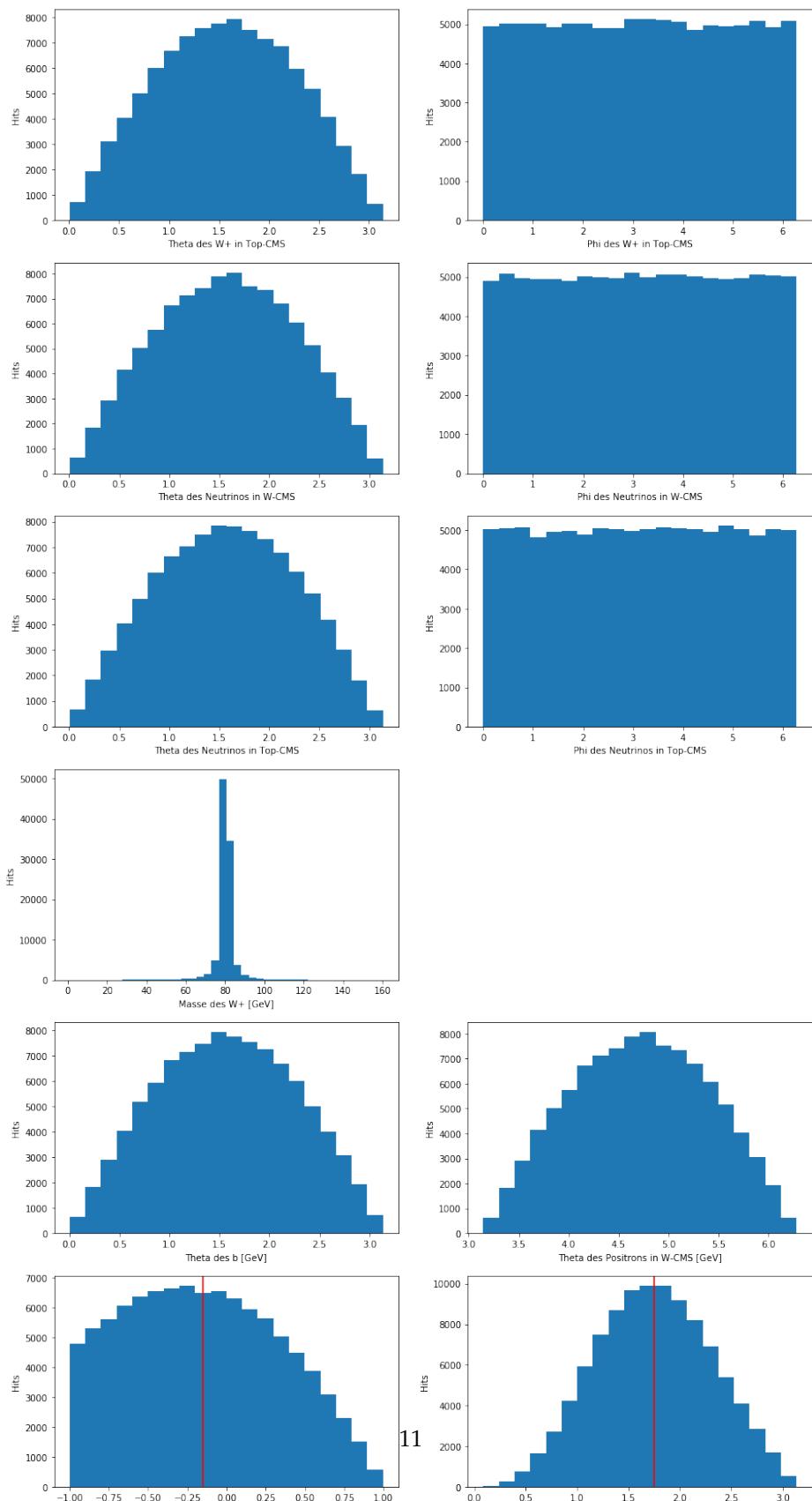
xe = [-1.+i/1000. for i in range(2001)]
ye = [(0.33*(1 - xe[j])**2 + 2*0.67*(1-xe[j]**2))*3./8 *hits/10. for j in
range(len(xe))]
plt.subplot(6,2,11)
plt.xlabel('Cosinus des Winkels zwischen -b Richtung und e+ (in W-CMS)')
plt.ylabel('Hits')
cqe = plt.hist(cosbe, 20)
EW = sum([cqe[0][i]*(cqe[1][i]+cqe[1][i+1])/2. for i in range(len(cqe[0]))])
]/hits#Erwartungswert
plt.axvline(x=EW, color='r')
#plt.plot(xe, ye)

xe2 = [i/1000. for i in range(3141)]
ye2 = [(0.33*(1-np.cos(xe2[j]))**2*np.sin(xe2[j]) + 0.67*2*np.sin(xe2[j])* *3)*3./8 *hits/(20./3.141) for j in range(len(xe2))]
plt.subplot(6,2,12)
plt.xlabel('Winkel zwischen W Richtung und e+ (in W-CMS)')
plt.ylabel('Hits')
cqe2 = plt.hist(theta_qnuq, 20)
EW2 = sum([cqe2[0][i]*(cqe2[1][i]+cqe2[1][i+1])/2. for i in range(len(cqe2
[0]))])/hits#Erwartungswert2
plt.axvline(x=EW2, color='r')
#plt.plot(xe2, ye2)

plt.show()
plt.close()

print('Erwartungswert: ', EW)
print('Erwartungswert2: ', EW2)

```



Erwartungswert: -0.150459617045

Erwartungswert2: 1.7483675302

In [11]: `print(EW/np.pi)`

-0.0478927835767

Plotten und speichern der W^+ -Impulsrichtungen im Top-Quark-CMS

```
In [12]: ye3 = [(0.3*np.cos(np.pi/2 - xe2[i]/2.)**2 + 0.7*np.cos(xe2[i]/2.)**2) * n
p.sin(xe2[i])*hits*3.142/20 for i in range(len(xe2))]
ye33 = [0.5 * np.sin(xe2[i])*hits*3.142/20 for i in range(len(xe2))]

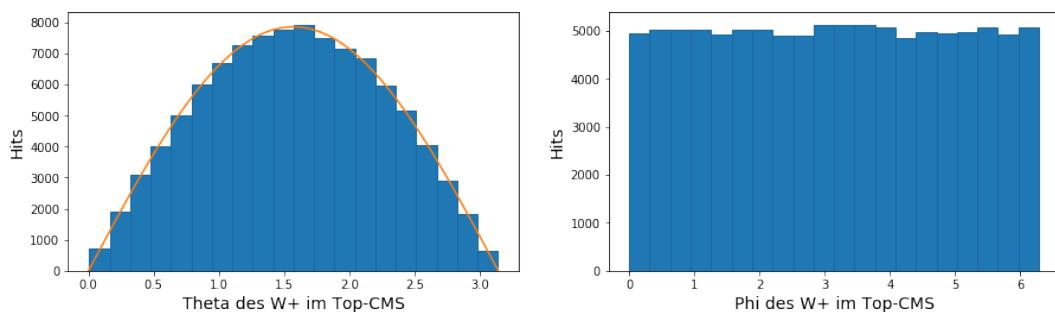
plt.figure(figsize=(15,4))

plt.subplot(1,2,1)
plt.xlabel('Theta des  $W^+$  im Top-CMS', fontsize=14)
plt.ylabel('Hits', fontsize=14)
plt.hist(theta_q_hits, 20, edgecolor='#1b699fff', linewidth='1.0')
plt.plot(xe2, ye3)

plt.subplot(1,2,2)
plt.xlabel('Phi des  $W^+$  im Top-CMS', fontsize=14)
plt.ylabel('Hits', fontsize=14)
plt.hist(phi_q_hits, 20, edgecolor='#1b699fff', linewidth='1.0')

plt.savefig('W-Verteilung.pdf', bbox_inches='tight', pad_inches=0, transparent=True)

plt.show()
plt.close()
```



Plotten und speichern der Winkelbeziehungen zwischen e^+ - und negativer Bottom-Quark-Impulsrichtung im W^+ -CMS

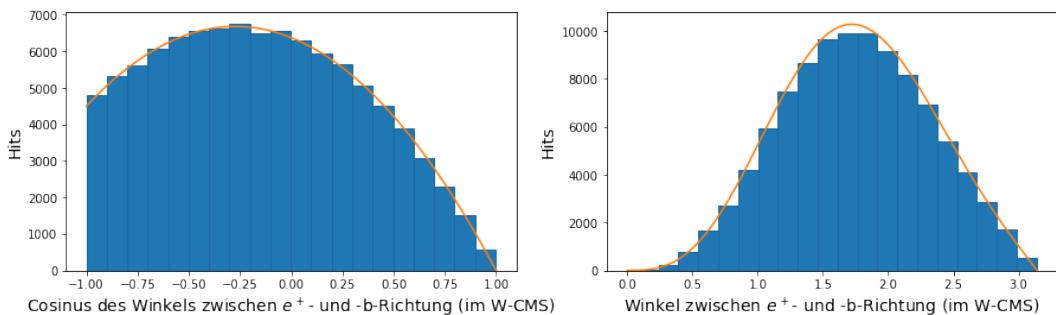
```
In [13]: plt.figure(figsize=(15,4))

ye4 = [(0.3*(1 - xe[j])**2 + 2*0.7*(1-xe[j])**2 + 0.00*(1+xe[j])**2)*3./8
*hits/10. for j in range(len(xe))]
plt.subplot(1,2,1)
plt.xlabel('Cosinus des Winkels zwischen $e^+$- und -b-Richtung (im W-CMS)'
', fontsize=14)
plt.ylabel('Hits', fontsize=14)
cqe = plt.hist(cosbe, 20, edgecolor='#1b699fff', linewidth='1.0')
plt.plot(xe, ye4)

ye5 = [(0.3*(1-np.cos(xe2[j]))**2 + 0.7*2*np.sin(xe2[j])**2 + 0.00*(1+np.cos(xe2[j]))**2)*np.sin(xe2[j])*3./8 *hits/(20./np.pi) for j in range(len(xe2))]
plt.subplot(1,2,2)
plt.xlabel('Winkel zwischen $e^+$- und -b-Richtung (im W-CMS)', fontsize=14)
plt.ylabel('Hits', fontsize=14)
cqe2 = plt.hist(theta_qnuq, 20, edgecolor='#1b699fff', linewidth='1.0')
plt.plot(xe2, ye5)

plt.savefig('be-Verteilung.pdf', bbox_inches='tight', pad_inches=0, transparent=True)

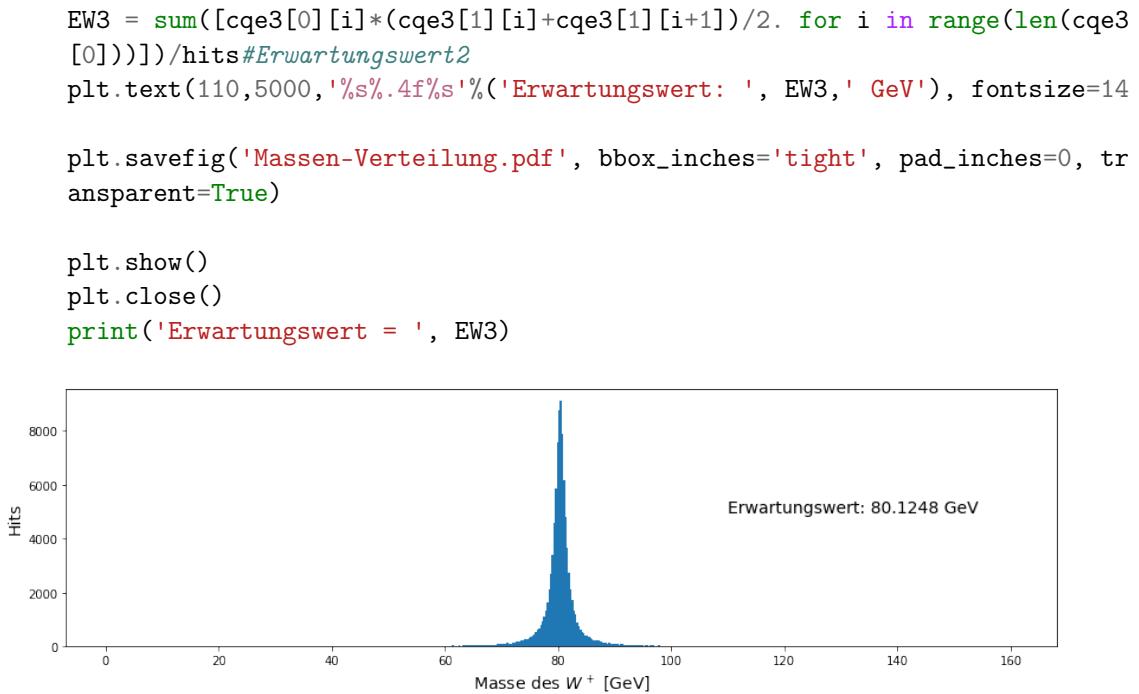
plt.show()
plt.close()
```



Plotten und Speichern der Hits für die W^+ -Masse

```
In [14]: plt.figure(figsize=(15,4))

plt.xlabel('Masse des $W^+$ [GeV]', fontsize=14)
plt.ylabel('Hits', fontsize=14)
cqe3 = plt.hist(mq_hits, 542)
```



Erwartungswert = 80.1248294458

Test der Boost-Funktion

```

In [73]: m_test = 50.
p_test = 40.
E_test = np.sqrt(m_test**2 + p_test**2)

alpha = np.pi/4.
beta = np.pi/2.

n = [np.cos(beta)*np.sin(alpha),np.sin(beta)*np.sin(alpha),np.cos(alpha)]
gamma_test = 2./np.sqrt(3.)
betagamma_test = 0.5*2./np.sqrt(3.)

thetas_test = []
phis_test = []
bthetas_test = []
bphis_test = []

for w in range(100000):
    theta_test = np.arccos(2.*rd.random()-1.)
    phi_test = 2*np.pi*rd.random()

```

```

m = [np.cos(phi_test)*np.sin(theta_test),np.sin(phi_test)*np.sin(theta
_test),np.cos(theta_test)]

bp4_test = boost(E_test, p_test, m, gamma_test, betagamma_test, n)

bp_test = np.sqrt(sum([bp4_test[i+1]**2 for i in range(3)]))
btheta_test = np.arccos(bp4_test[3]/bp_test)
if bp4_test[1] >= 0:
    bphi_test = np.arctan(bp4_test[2]/bp4_test[1])
else:
    bphi_test = np.arctan(bp4_test[2]/bp4_test[1])+np.pi

if bphi_test < 0:
    bphi_test += 2*np.pi

thetas_test.append(theta_test)
phis_test.append(phi_test)
bthetas_test.append(btheta_test)
bphis_test.append(bphi_test)

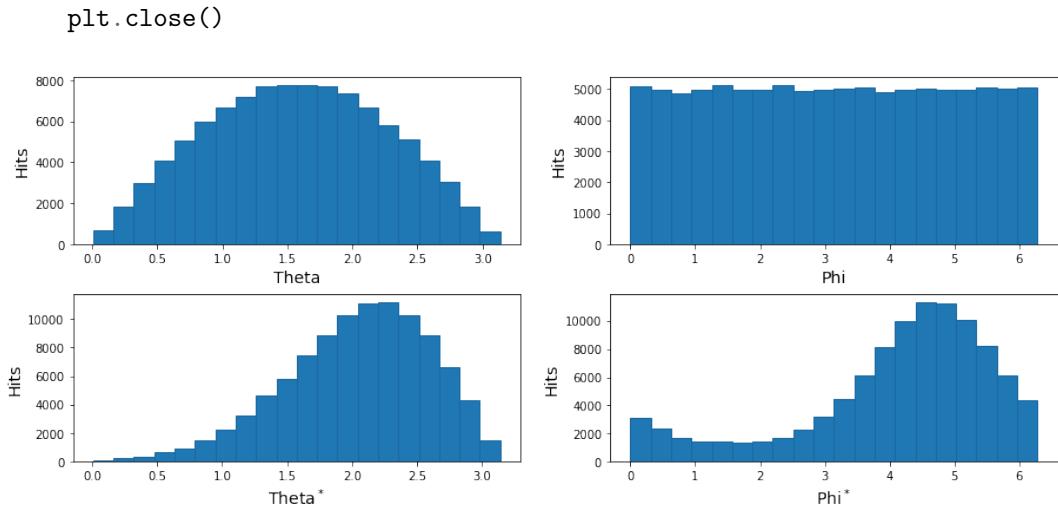
plt.figure(figsize=(15,6))
plt.subplots_adjust(left=None, bottom=None, right=None, top=None, wspace=None, hspace=0.3)

plt.subplot(2,2,1)
plt.xlabel('Theta', fontsize = 14)
plt.ylabel('Hits', fontsize = 14)
plt.hist(theta_test, 20, edgecolor='#1b699fff', linewidth='1.0')
plt.subplot(2,2,2)
plt.xlabel('Phi', fontsize = 14)
plt.ylabel('Hits', fontsize = 14)
plt.hist(phi_test, 20, edgecolor='#1b699fff', linewidth='1.0')
plt.subplot(2,2,3)
plt.xlabel('Theta$^*$', fontsize = 14)
plt.ylabel('Hits', fontsize = 14)
plt.hist(btheta_test, 20, edgecolor='#1b699fff', linewidth='1.0')
plt.subplot(2,2,4)
plt.xlabel('Phi$^*$', fontsize = 14)
plt.ylabel('Hits', fontsize = 14)
plt.hist(bphi_test, 20, edgecolor='#1b699fff', linewidth='1.0')

plt.savefig('Boost.pdf', bbox_inches='tight', pad_inches=0, transparent=True)

plt.show()

```



Testweise Berechnung der bloSSen Zerfallsbreite des Top-Quarks in Bottom-Quark und W^+ -Boson

```
In [15]: Ek = (mt**2 + mqfest**2 - mb**2)/(2*mt)
Eb = (mt**2 + mb**2 - mqfest**2)/(2*mt)
#-----
k = np.sqrt((mt**2 - mb**2 - mqfest**2)**2 - 4*mb**2 * mqfest**2)/2. / mt
ktest = np.sqrt(mt**4 + (mqfest**2 - mb**2)**2 - 2*(mqfest**2 + mb**2)*mt**2) / (2*mt)

gw = k / 4 / mt / 137 / 0.231 * (Eb + 2*Eb*Ek**2/mqfest**2 + 2*Ek*k**2/mqfest**2)

print(gw, 'Das gibts ja nich das kommt genau hin. Und das per Hand!')
```

1.39320511472 Das gibts ja nich das kommt genau hin. Und das per Hand!

Literatur

- [1] The Berkeley Particle Data Group. *Particle masses, widths, and MC ID numbers from 2018 edition of RPP*.
http://pdg.lbl.gov/2018/mcdata/mass_width_2018.mcd, Stand: 20.07.18
- [2] C. Fischer. *Measurement of the W-Helicity in Top-Quark Decays with the ATLAS Experiment*. Master's thesis, Georg-August-Universität Göttingen, 2013.
- [3] H. E. Haber. *Spin Formalism and Applications to New Physics Searches*, in *Proceedings of the 21st SLAC Summer Institute on Particle Physics: Spin Structure in High Energy Processes SLAC*, Stanford, 1993.
- [4] F. Halzen und A. D. Martin. *QUARKS AND LEPTONS: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, 1984.
- [5] F. James. *Monte Carlo Phase Space*. Lectures given in the academic Training Programme of CERN, Genf: CERN, 1968.
- [6] A. Papaefstathiou. *How to write your own Monte Carlo event generator*. Physik-Institut, Universität Zürich, Winterthurerstr. 190, 8057, Switzerland.
- [7] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chinese Physics C, 40, 100001 (2016). *Review of Particle Physics*.

Plagiatserklärung der / des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über Monte-Carlo-Generation von Top-Quark-Zerfällen selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

(Datum, Unterschrift)