



Institut für theoretische Physik

Coulomb Potential und Forminvarianz in der supersymmetrischen Quantenmechanik

Bachelorarbeit Physik
15. Okt. 2011 – 5. Jan. 2012

Autor:	Jan Gesenhues
Geburtsdatum, -ort:	1.3.1988, Dortmund
E-Mail:	J.Gesenhues@uni-muenster.de
Matrikelnummer:	356695
Studiengang:	Physik Bachelor (7. Semester)
Erstgutachter:	Prof. Dr. Michael Klasen
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Gernot Münster

eingereicht am 4. Jan. 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	1
2	Das einfachste supersymmetrische Modell	2
2.1	Besetzungszahldarstellung	2
2.2	Kommutator und Antikommutator	2
2.3	Erzeuger und Vernichter	3
2.4	Bosonische Zustände	4
2.5	Fermionische Zustände	5
2.6	Der SUSY-Operator Q	6
2.7	Der harmonische Oszillator	8
2.8	Der Fermi Oszillator	8
2.9	SUSY-Oszillator	9
3	Wechselwirkungen im SUSY System	11
3.1	Der nichtlineare Hamiltonoperator	11
3.2	SUSY Algebra	12
3.3	Eigenwertspektrum der Q_i und Entartung der Zustände	14
3.4	Gemischte Zustände	14
3.5	Das Superpotential	15
3.6	Grundzustand	17
3.7	Spontane Symmetriebrechung	18
3.8	Beziehungen zwischen Eigenwerten und Eigenzuständen von H_1 und H_2	19
4	Forminvarianz und Coulomb Potential	21
4.1	Partnerpotential	21
4.2	Vom Grundzustand zum Superpotential	21
4.3	SUSY Ketten	22
4.4	Forminvarianz	25
4.5	Höherdimensionale Systeme	28
4.6	Coulomb Potential	29
5	Fazit	35
	Literaturverzeichnis	36
	Abbildungsverzeichnis	36
	Tabellenverzeichnis	36

Abstract

Supersymmetric models or SUSY models relate bosons to fermions. In this thesis we want to motivate why it is possible to differentiate between bosons and fermions and construct the easiest supersymmetric model with the concept of creation and annihilation operators, known from the formalism of the second quantization. We generalize this model to take interactions into account and use methods of quantum mechanics for concrete calculations. In coherence with the emerging SUSY chains we learn about partner potentials and clarify the concept of shape invariance of these partner potentials. We learn that it is possible to give a complete algebraic solution for problems with shape invariant potentials and demonstrate this method with the help of the coulomb potential.

Zusammenfassung

In Supersymmetrischen Modellen kurz SUSY Modellen werden Bosonen und Fermionen zu einander in Beziehung gesetzt. Davon ausgehend warum man überhaupt zwischen Bosonen und Fermionen unterscheiden kann, konstruieren wir das einfachste SUSY-Modell in der sogenannten Besetzungszahldarstellung. Wir verallgemeinern schließlich dieses Modell um Wechselwirkungen im System betrachten zu können und benutzen für konkrete Rechnungen Methoden der Quantenmechanik. Im Zusammenhang mit den auftretenden SUSY Ketten und Partnerpotentialen klären wir den Begriff der Forminvarianz und lernen schließlich, dass sich ein System mit forminvarianten Partnerpotentialen auf rein algebraischen Weg lösen lassen. Wir demonstrieren dies anhand des Coulomb-Potentials.

1 Motivation

Quantenmechanische Vielteilchen-Zustände sind gegenüber der Vertauschung von ununterscheidbaren bzw. identischen Teilchen entweder symmetrisch oder antisymmetrisch. Der Einfachheit halber heißt das für einen Zustand mit nur zwei Teilchen: Für symmetrische Zustände (bosonische Zustände) gilt:

$$P\Psi(\xi_1, \xi_2) = +\Psi(\xi_2, \xi_1)$$

Für antisymmetrische Zustände (fermionische Zustände) gilt:

$$P\Psi(\xi_1, \xi_2) = -\Psi(\xi_2, \xi_1)$$

Der Permutationsoperator P vertauscht dabei die Koordinaten zweier Teilchen und erfüllt die algebraische Eigenschaft $P^2 = \text{id}_{\mathcal{H}} =: 1$. Die ξ_i enthalten dabei sowohl Ort als auch Spin eines Teilchens bzw. dessen Quantenzahlen. Der Spin eines Teilchens ist über das Spin-Statistik-Theorem eng mit der Teilchenart verknüpft. Demnach tragen Bosonen ganzzahligen und Fermionen halbzahligen Spin.

Für fermionische Zustände gilt das Pauli-Prinzip, was im folgenden kurz skizziert werden soll. Betrachten wir einen antisymmetrischen Zustand bei $\xi_1 = \xi_2$, so gilt

$$\Psi(\xi_1, \xi_1) = P\Psi(\xi_1, \xi_1) = -\Psi(\xi_1, \xi_1) = 0 \quad .$$

Die Wahrscheinlichkeit zwei Fermionen mit identischen Quantenzahlen zu finden ist also 0. Das Pauli-Prinzip gilt demnach auch nur für Fermionen. Bosonen können sich in beliebiger Häufigkeit im selben Zustand aufhalten. Dieses Verhalten drückt man häufig aus, indem man den beiden Teilchenarten verschiedene Statistiken zuweist. Bosonen folgen der Bose-Einstein Statistik und Fermionen der Fermi-Dirac Statistik.

Es lässt sich also allgemein zwischen zwei Teilchensorten, Bosonen und Fermionen, unterscheiden. Wir wollen nun einen Formalismus schaffen, der es erlaubt, Bosonen und Fermionen im Formalismus der Quantenmechanik mittels eines Operators Q derart ineinander zu überführen, dass man aus fermionischen bosonische Zustände und aus bosonischen fermionische Zustände erhalten kann. Ist das System invariant unter Transformationen mit Q , dann ist Q Vermittler eine Symmetrie, der sogenannten Supersymmetrie.

$$Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle \quad \text{und} \quad Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \quad . \quad (1.1)$$

[Pau40] [Nol04, S. 264 ff.] [Ste10, K. 4.1]

2 Das einfachste supersymmetrische Modell

2.1 Besetzungszahldarstellung

Das Grundgerüst für unser erstes SUSY-Modell bildet die aus der 2. Quantisierung bekannte Besetzungszahldarstellung. Mit Hilfe einer orthonormierten, vollständigen Ein-Teilchen Hilbertraum-Basis $\{|\phi_{\alpha_i}\rangle\}$ lässt sich ein N -Teilchen System mit den Produktzuständen

$$|\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle$$

darstellen. Es lässt sich jeder beliebige Vielteilchen-Zustand nach dieser Basis entwickeln.

Wir wollen nun die Besetzungszahlen n_{α_i} der Zustände $|\phi_{\alpha_i}\rangle$ einführen, mit der Teilchenzahl $N = \sum_i n_{\alpha_i}$. Die Besetzungszahlen bezeichnen die Häufigkeit mit der ein Ein-Teilchen-Zustand $|\phi_{\alpha_i}\rangle$ in dem N -Teilchen Zustand vorkommt. Die Besetzungszahlen definieren somit eindeutig den Zustand. Die Zustände

$$|\dots, n_{\alpha_i}, \dots\rangle \quad (2.1)$$

werden auch als Fock-Zustände bezeichnet. Sie bilden eine orthonormale, vollständige Basis des sogenannten Fock-Raums. Unbesetzte Zustände werden mit $n_{\alpha_i} = 0$ bezeichnet. [Nol04, K. 8]

2.2 Kommutator und Antikommutator

Den Kommutator zweier Operatoren A und B schreibt man als

$$[A, B] = AB - BA \quad . \quad (2.2)$$

Der Kommutator ist antisymmetrisch, d.h.

$$[A, B] = -[B, A] \quad . \quad (2.3)$$

Weiterhin schreiben wir den Anti-Kommutator zweier Operatoren A und B als

$$\{A, B\} = AB + BA \quad . \quad (2.4)$$

Der Anti-Kommutator ist symmetrisch, d.h.

$$\{A, B\} = \{B, A\} \quad . \quad (2.5)$$

Es lassen sich etliche Rechenregeln für die (Anti-)Kommutatoren aufstellen. Die zwei wichtigsten Beziehungen sind:

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad \text{bzw.} \quad \{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B \quad . \quad (2.6)$$

Eine weitere nützliche Eigenschaft, die wir benutzen werden, ist, dass sich der Kommutator mittels des Anti-Kommutator darstellen lässt.

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \quad . \quad (2.7)$$

[KS97, S. 34]

2.3 Erzeuger und Vernichter

Es lassen sich nun Operatoren einführen, die derart auf die Vielteilchen-Zustände wirken, dass sie Teilchen erzeugen bzw. vernichten. Wir betrachten den Teilchenerzeugungsoperator a^+ und den Teilchenvernichtungsoperator a^- .

$$a^\pm |n\rangle = c_{n\pm} |n \pm 1\rangle \quad , \quad (2.8)$$

mit einer von n abhängigen Konstante $c_{n\pm}$. Es lässt sich ein Besetzungszahloperator $N = a^+ a^-$ definieren. Dabei wird erst ein Teilchen vernichtet und dann wieder erzeugt, dass heißt, der Zustand wird reproduziert. Als Eigenwert soll N die Besetzungszahl n haben.

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad . \quad (2.9)$$

Da $n \in \mathbb{N}_0$ muss N hermitesch¹ sein.

$$N^\dagger = (a^+ a^-)^\dagger = (a^-)^\dagger (a^+)^\dagger \stackrel{!}{=} N = a^+ a^- \quad . \quad (2.10)$$

Hieraus folgt: $a^+ = (a^-)^\dagger$, dass heißt a^+ und a^- sind zueinander adjungiert².

Das Eigenwertspektrum von N ist somit auch positiv:

$$n = \langle n|N|n\rangle = \langle n|a^+ a^-|n\rangle = \langle a^- n|a^-|n\rangle = |c_{n-}|^2 \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} \geq 0 \quad . \quad (2.11)$$

Vakuum

Der Zustand $|0\rangle$ stellt das Vakuum dar. Für ihn muss gelten

$$a^- |0\rangle = 0 \quad , \quad (2.12)$$

da im Vakuum kein Teilchen vernichtet werden kann und die Eigenwerte von n nach (2.33) positiv sind.

¹Ein Operator A heißt hermitesch, wenn er wegen $A^\dagger = A$ reelle Eigenwerte zu den Eigenzuständen hat.

²Der adjungierte Operator A^\dagger ist definiert über $\langle \Psi|A|\Psi'\rangle = \langle A^\dagger\Psi|\Psi'\rangle$

2.4 Bosonische Zustände

Wir betrachten die bosonischen Teilchenoperatoren b^\pm und bosonische Zustände $|n_B\rangle$. Für $N_B = b^+b^-$ sollen die folgenden Kommutatorrelationen gelten:

$$[N_B, b^-] = -b^- \quad , \quad [N_B, b^+] = b^+ \quad . \quad (2.13)$$

Dies garantiert, dass man zu jedem Zustand mit Eigenwert n_B , einen Zustand mit Eigenwert $n_B + 1$ durch Anwenden von b^+ bzw. einen Zustand mit Eigenwert $n_B - 1$ durch Anwenden von b^- erhält:

$$N_B b^+ |n_B\rangle \stackrel{(2.13)}{=} (b^+ N_B + b^+) |n_B\rangle = b^+ (n_B + 1) |n_B\rangle = (n_B + 1) b^+ |n_B\rangle \quad , \quad (2.14)$$

$$N_B b^- |n_B\rangle \stackrel{(2.13)}{=} (b^- N_B - b^-) |n_B\rangle = b^- (n_B - 1) |n_B\rangle = (n_B - 1) b^- |n_B\rangle \quad . \quad (2.15)$$

Insbesondere lässt sich hier auch erkennen, dass das Eigenwertspektrum so auch tatsächlich von den natürlichen Zahlen gebildet wird. Die Relationen in (2.13) implizieren auch Kommutatorrelationen für die b^\pm :

$$\begin{aligned} b^+ &= [N_B, b^+] = [b^+ b^-, b^+] = [b^+, b^+] b^- + b^+ [b^-, b^+] \\ -b^- &= [N_B, b^-] = [b^+ b^-, b^-] = [b^+, b^-] b^- + b^+ [b^-, b^-] \\ \Rightarrow \quad [b^-, b^+] &= 1 \quad \text{und} \quad [b^+, b^+] = [b^-, b^-] = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nun lassen sich die $c_{n\pm}$ in $b^\pm |n_B\rangle = c_{n\pm} |n_B \pm 1\rangle$ berechnen. Der Übersicht halber ohne Kennzeichnung, dass es sich um bosonische Zustände handelt.

Für c_{n+} erhält man:

$$\begin{aligned} |c_{n+}|^2 &= c_{n+}^* c_{n+} \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} = \langle b^+ n | b^+ |n\rangle = \langle n | b^- b^+ |n\rangle \stackrel{(2.16)}{=} \\ &= \langle n | b^+ b^- + 1 |n\rangle = \langle n | n + 1 |n\rangle = n + 1 \\ \Rightarrow \quad c_{n+} &= \sqrt{n+1} \quad . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Für c_{n-} :

$$\begin{aligned} |c_{n-}|^2 &= c_{n-}^* c_{n-} \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} = \langle b^- n | b^- |n\rangle = \langle n | b^+ b^- |n\rangle = \langle n | n |n\rangle = n \\ \Rightarrow \quad c_{n-} &= \sqrt{n} \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Es finden sich also folgende Gleichungen für die Teilchenerzeugung und -vernichtung:

$$b^+ |n_B\rangle = \sqrt{n_B + 1} |n_B + 1\rangle \quad , \quad (2.19)$$

$$b^- |n_B\rangle = \sqrt{n_B} |n_B - 1\rangle \quad . \quad (2.20)$$

Aus dem Vakuumzustand lässt sich durch sukzessives Anwenden von b^+ ein beliebiger Zustand mit Besetzungszahl n_B konstruieren:

$$|n_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_B!}}(b^+)^{n_B}|0\rangle \quad . \quad (2.21)$$

2.5 Fermionische Zustände

Fermionische Zustände unterliegen dem Pauli-Prinzip, d.h. zwei Teilchen können nicht im selben Zustand sein. Wir haben also nur zwei Zustände, bosonische Zustände mit $|n_F\rangle = |0\rangle$ und fermionische Zustände mit $|n_F\rangle = |1\rangle$. Für unsere Teilchenoperatoren f^\pm bedeutet das:

$$|2\rangle = f^+|1\rangle = (f^+)^2|0\rangle \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad f^-|0\rangle = 0 \quad .$$

Dies gewährleisten die folgenden Antikommutatorrelationen:

$$\{f^+, f^-\} = 1 \quad \text{und} \quad \{f^+, f^+\} = \{f^-, f^-\} = 0 \quad . \quad (2.22)$$

Einen Operator der die Bedingung $(f^\pm)^2 = 0$ erfüllt bezeichnet man als nilpotent.

Die f^\pm erfüllen mit der Wahl dieser Antikommutatoren auch die Bedingung aus (2.13):

$$[N_F, f^+] = [f^+f^-, f^+] = f^+ \underbrace{\{f^-, f^+\}}_{=1} - \underbrace{\{f^+, f^+\}}_{=0} f^- = f^+ \quad , \quad (2.23)$$

$$[N_F, f^-] = [f^+f^-, f^-] = f^+ \underbrace{\{f^-, f^-\}}_{=0} - \underbrace{\{f^+, f^-\}}_{=1} f^- = -f^- \quad . \quad (2.24)$$

Der Besetzungszahloperator $N_F = f^+f^-$ besitzt somit nur die Eigenwerte 0 und 1.

Nun lassen sich die konstanten in den Gleichungen $f^\pm|n_F\rangle = c_{n_\pm}|n_F \pm 1\rangle$ bestimmen. Die c_{n_\pm} ergeben sich mit einer analogen Rechnung, die zu (2.17) bzw. (2.18) geführt hat, wenn man statt dem Kommutator den Antikommutator (2.22) benutzt (ohne Rechnung):

$$c_{n_+} = \sqrt{1-n} \quad , \quad (2.25)$$

$$c_{n_-} = \sqrt{n} \quad . \quad (2.26)$$

Da n_F nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, lassen sich die Wurzelterme auch kompakter darstellen. Es folgt:

$$f^+|n_F\rangle = \sqrt{1-n_F}|n_F+1\rangle = \delta_{0n_F}|n_F+1\rangle \quad , \quad (2.27)$$

$$f^-|n_F\rangle = \sqrt{n_F}|n_F-1\rangle = \delta_{1n_F}|n_F-1\rangle \quad . \quad (2.28)$$

Dabei bezeichnet δ_{ij} das Kronecker-Delta.

Da nur zwei Zustände beschrieben werden müssen, bietet es sich zudem an, die Zustände $|n_F\rangle$

in einer zweikomponentigen Darstellung zu schreiben. In der kanonischen Darstellung mit

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

lassen sich die Operatoren f^\pm als gewöhnliche 2x2 Matrizen darstellen:

$$f^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.29)$$

2.6 Der SUSY-Operator Q

In der Besetzungszahldarstellung ist dem Vorangegangenen zufolge das einfachste Modell, welches Fermionen und Bosonen enthält, gegeben mit den Produktzuständen

$$|n_B n_F\rangle = |n_B\rangle |n_F\rangle \quad \text{mit} \quad n_B = 0, \dots, \infty \quad \text{und} \quad n_F = 0, 1 \quad . \quad (2.30)$$

Von diesem Zustand ausgehend lässt sich nun unser erstes supersymmetrisches Modell realisieren. Wir wollen uns zunächst Zweiteilchenoperatoren definieren, welche die intuitiven Bedingungen

$$Q_+ |n_B n_F\rangle \propto |n_B - 1, n_F + 1\rangle \quad \text{und} \quad Q_- |n_B n_F\rangle \propto |n_B + 1, n_F - 1\rangle \quad (2.31)$$

erfüllen. Die Wahl einer passenden Konstanten wollen wir zunächst offen lassen. Q_+ erzeugt hierbei ein Fermion und vernichtet ein Boson. Q_- erzeugt ein Boson und vernichtet ein Fermion. Es ist leicht zu sehen, dass sich Q_\pm durch die bekannten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren darstellen lässt:

$$Q_+ = b^- f^+ \quad \text{und} \quad Q_- = b^+ f^- \quad . \quad (2.32)$$

Die Eigenschaften der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren übertragen sich somit auf die Zweiteilchenoperatoren Q_\pm . Die Q_\pm sind somit zueinander adjungiert $Q_\pm^\dagger = Q_\mp$. Ebenfalls sind die Q_\pm nilpotent.

$$Q_\pm^2 = 0 \quad . \quad (2.33)$$

Um einen supersymmetrischen Hamiltonoperator H_S zu finden, müssen wir uns zunächst klarmachen was Supersymmetrie im Rahmen der Quantenmechanik konkret bedeutet, nämlich, dass bei jeder Transformation, die die Q_\pm vermitteln, die Energie des Systems erhalten bleibt. Die algebraische Bedingung der H_S genügen muss lautet demnach:

$$[H_S, Q_\pm] = 0 \quad . \quad (2.34)$$

Als Ansatz können wir dann wählen:

$$H_S = \{Q_+, Q_-\} \quad , \quad (2.35)$$

denn mit (2.33) gilt:

$$\begin{aligned} [H_S, Q_+] &= Q_+Q_-Q_+ + Q_-Q_+Q_+ - Q_+Q_+Q_- - Q_+Q_-Q_+ = 0 \quad , \\ [H_S, Q_-] &= Q_+Q_-Q_- + Q_-Q_+Q_- - Q_-Q_+Q_- - Q_-Q_-Q_+ = 0 \quad . \end{aligned}$$

Hiermit ist unser erstes supersymmetrisches Modell, bis auf eine Kleinigkeit, zufriedenstellend dargestellt. Die Q_\pm sind nämlich nicht hermitesch, besitzen also keine reellen Eigenwerte. Anstelle der Q_\pm lassen sich jedoch zwei hermitesche Operatoren Q_1 und Q_2 einführen:

$$Q_1 = Q_+ + Q_- \quad \text{und} \quad Q_2 = -i(Q_+ - Q_-) \quad , \quad (2.36)$$

die aufgrund der Nilpotenz $(Q_\pm)^2 = 0$ antivertauschen:

$$\{Q_1, Q_2\} = i\{Q_+, Q_-\} - i\{Q_-, Q_+\} = i\{Q_+, Q_-\} - i\{Q_+, Q_-\} = 0 \quad . \quad (2.37)$$

Der SUSY-Hamiltonoperator erhält somit die Form:

$$H_S = Q_1^2 = Q_2^2 \quad . \quad (2.38)$$

Die Forderung, dass H_S mit den SUSY Operatoren vertauscht ist somit auch erfüllt.

$$[H_S, Q_1] = [H_S, Q_2] = 0 \quad . \quad (2.39)$$

Zusätzlich gilt hier noch, dass zwei SUSY Transformationen hintereinander ausgeführt wieder den ursprünglichen Zustand liefern. Eine Transformation mit Q_1 bzw. Q_2 macht so aus bosonischen Zuständen ($n_F = 0$) fermionische Zustände ($n_F = 1$) und umgekehrt. Sie erfüllen demnach auch die zu Beginn geforderten SUSY-Transformationen (1.1) mit $Q = Q_1$.

Wir haben also die Wahl zwischen zwei Sätzen von Operatoren, die zwar beide geeignet sind um ein SUSY System zu beschreiben, sich in ihren Eigenschaften jedoch wesentlich voneinander unterscheiden.

Tabelle 1: SUSY Operatoren Q [KS97, S.23]

Q_+, Q_-	Q_1, Q_2
nicht hermitesch	hermitesch
nilpotent	$\{Q_1, Q_2\} = 0$
$H_S = \{Q_+, Q_-\}$	$H_S = Q_1^2 = Q_2^2$

2.7 Der harmonische Oszillator

Der harmonische Oszillator mit seinem Hamiltonoperator

$$H_B = \frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2}q^2 \quad , \quad (2.40)$$

wobei p den Impulsoperator und q den Ortsoperator darstellt, m die Masse des Teilchens und ω die (Kreis-)Frequenz ist, beschreibt eines der grundlegendsten Quantenmechanischen Systeme. Dieses System lässt sich besonders einfach auf algebraische Art und Weise lösen, indem man sich die beiden zueinander adjungierten Operatoren

$$b^\pm = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q \mp \frac{ip}{m\omega} \right) \quad (2.41)$$

definiert. Ort und Impuls erfüllen die fundamentale Vertauschungsrelation

$$[q, p] = i\hbar \quad . \quad (2.42)$$

Man erhält sofort die Vertauschungsrelationen aus (2.16):

$$\begin{aligned} [b^-, b^+] &= \frac{i}{2\hbar} ([p, q] - [q, p]) = 1 \\ [b^+, b^+] &= [b^-, b^-] = 0 \quad . \end{aligned}$$

Der harmonische Oszillator beschreibt also ein bosonischen Oszillator. Um das Eigenwertspektrum zu erhalten, berechnen wir den Bestzungsoperator:

$$N_B = b^+b^- = \frac{m\omega}{2\hbar} \left(q^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \right) + \frac{i}{2\hbar} [q, p] = \frac{H_B}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \quad .$$

Der Hamiltonoperator lässt sich demnach darstellen als

$$H_B = \hbar\omega \left(N_B + \frac{1}{2} \right) \quad . \quad (2.43)$$

Da N_B und H_B miteinander vertauschen besitzen sie gleiche Eigenzustände. Das Eigenwertspektrum ergibt sich mit $N_B|n_B\rangle = n_B|n_B\rangle$ und $H_B|n_B\rangle = E_{n_B}|n_B\rangle$ zu

$$E_{n_B} = \hbar\omega \left(n_B + \frac{1}{2} \right) \quad . \quad (2.44)$$

2.8 Der Fermi Oszillator

Wir wollen nun das fermionische Pendant zum Bose-Oszillator finden. Dazu betrachten wir den Hamiltonoperator

$$H_F = i\omega\psi\pi \quad . \quad (2.45)$$

ψ und π bezeichnet man als Operatoren der fermionischen Koordinaten und Impulse. Der Fermi-Oszillator besitzt im Gegensatz zum Bose-Oszillator kein klassisches Pendant, wie es der (klassische) harmonische Oszillator ist. Die klassische Mechanik ist in einem gewissen Sinne bosonisch, da die auftretenden Variablen reeller Natur sind. Im Rahmen der Grassmann-Mechanik (pseudoklassische Mechanik), die mit Zahlen einer Algebra arbeitet, die ähnliche Bedingungen wie die f^\pm aus (2.22) erfüllen, lässt sich eine Form des Fermi-Oszillator wie in (2.45) finden [KS97, K. 6.2]. Wir arbeiten hier bereits mit der quantisierten Version dieses Grassmann-Oszillator. ψ und π sollen den Vertauschungsrelationen

$$\{\psi, \pi\} = 0 \quad \text{und} \quad \{\pi, \pi\} = \{\psi, \psi\} = \hbar \quad (2.46)$$

genügen.

Die Erzeuger und Vernichter f^\pm können ähnlich wie in (2.41) als

$$f^\pm = \frac{1}{2\hbar} (\psi \pm i\pi) \quad \text{mit} \quad f^\pm = (f^\mp)^\dagger \quad (2.47)$$

dargestellt werden und erfüllen mit (2.46) die Antivertauschungsrelationen aus (2.22). Mit

$$\psi = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (f^+ + f^-) \quad \text{sowie} \quad \pi = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (f^+ - f^-)$$

folgt für den Hamiltonoperator mit $N_F = f^+ f^-$ und $\{f^+, f^-\} = 1$:

$$H_F = -\frac{\hbar\omega}{2} (f^- f^+ - f^+ f^-) = \frac{\hbar\omega}{2} (2f^+ f^- - f^- f^+ - f^+ f^-) = \hbar\omega \left(N_F - \frac{1}{2} \right) \quad (2.48)$$

Da N_F wieder mit H_F vertauscht besitzen sie selbe Eigenzustände. Mit $N_F |n_F\rangle = n_F |n_F\rangle$ und $H_F |n_F\rangle = E_{n_F} |n_F\rangle$ folgt für das Energiespektrum:

$$E_{n_F} = \hbar\omega \left(n_F - \frac{1}{2} \right) \quad (2.49)$$

Da n_F nur die Werte 0 und 1 annimmt gibt es also zwei mögliche Energie-Niveaus. Die Nullpunktsenergie $E_0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega$ und $E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

2.9 SUSY-Oszillator

Betrachten wir nun noch einmal unsere SUSY-Operatoren Q_\pm aus Kapitel 2.6. Die Vorfaktoren wollen wir nun zu $\sqrt{\hbar\omega}$ wählen.

$$Q_+ = \sqrt{\hbar\omega} b^- f^+ \quad Q_- = \sqrt{\hbar\omega} b^+ f^- \quad (2.50)$$

Berechnen wir nun den SUSY-Hamiltonoperator $H_S = \{Q_+, Q_-\}$ so erhält man:

$$\begin{aligned}
H_S &= \hbar\omega\{b^- f^+, b^+ f^-\} \\
&= \hbar\omega (b^- b^+ f^+ f^- + b^+ b^- f^- f^+) \\
&= \hbar\omega \left[(1 + b^+ b^-) f^+ f^- + b^+ b^- (1 - f^+ f^-) \right] \\
H_S &= \hbar\omega (f^+ f^- + b^+ b^-) = H_F + H_B \quad .
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Das einfachste SUSY-Modell setzt sich also aus Bose- und Fermi-Oszillator zusammen, wenn man die (Kreis-)Frequenz gleich wählt. Das Eigenwertspektrum erhält man aus

$$H_S |n_F n_B\rangle = \hbar\omega (N_F + N_B) |n_F n_B\rangle$$

zu

$$E = \hbar\omega (n_B + n_F) \quad . \tag{2.52}$$

Das Energiespektrum ist also durchweg positiv. Im Gegensatz zu getrenntem Bose- und Fermi-Oszillator treten außerdem keine Nullpunktsenergien für $n_B = 0$ und $n_F = 0$ mehr auf. Bis auf den Grundzustand $|00\rangle$ mit $E = 0$ ist das System zudem zweifach entartet, da die beiden Zustände $|n_B, 0\rangle$ sowie $|n_B - 1, 1\rangle$ nach (2.52) die selbe Energie besitzen. [KS97, Kap. 2]

3 Wechselwirkungen im SUSY System

3.1 Der nichtlineare Hamiltonoperator

Wir wollen nun ein Formalismus finden, der zwar auf den Prinzipien des SUSY Oszillator beruht, jedoch erlaubt Wechselwirkungen bzw. Nichtlinearitäten in H_S zu untersuchen. Der SUSY-Hamiltonoperator soll sich wieder schreiben lassen als

$$H_S = Q_+ Q_- + Q_- Q_+ \quad .$$

Um Supersymmetrie zu erhalten muss die aus (2.34) bekannte Bedingung

$$[H_S, Q_{\pm}] = 0$$

gelten. Dies gewährleistet bereits die Nilpotenz $(Q_{\pm})^2 = 0$. Für die Q_{\pm} bedeutet dies, dass bereits mit dem Beibehalten der fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren f^{\pm} in den Q_{\pm} die SUSY Forderung erfüllt bleibt.

Wir können nun also neue Q_{\pm} einführen, die von der allgemeineren Struktur

$$Q_+ = B^- f^+ \quad \text{und} \quad Q_- = B^+ f^- \quad (3.1)$$

sind. Die B^{\pm} werden wir erst später mit Hilfe des Superpotentials mit Leben füllen. Der Hamiltonoperator erhält die Gestalt

$$H_S = B^- B^+ f^+ f^- + B^+ B^- f^- f^+ \quad , \quad (3.2)$$

wobei gelten muss $(B^{\pm})^{\dagger} = B^{\mp}$, da H_S hermitesch sein muss. Somit sind auch die Q_{\pm} zueinander adjungiert ($(Q_{\pm})^{\dagger} = Q_{\mp}$).

Ein Problem tritt nun allerdings bei der Bezeichnung der Zustände auf, die zuvor mit $|n_B n_F\rangle$ gekennzeichnet waren. Berechnen wir den Kommutator von H_S mit den Besetzungszahloperatoren N_F und N_B , so erhält man im Falle von N_F :

$$\begin{aligned} [H_S, N_F] &= B^- B^+ \underbrace{[f^+ f^-, f^+ f^-]}_{=0} + B^+ B^- [f^- f^+, f^+ f^-] \\ &= B^+ B^- \underbrace{[f^- f^+, 1 - f^- f^+]}_{=0} = 0 \quad . \end{aligned}$$

N_B hingegen vertauscht allgemein nicht mit H_S , da wir keine spezifische Aussage über die Gestalt der B^{\pm} gemacht haben:

$$[H_S, N_B] = [B^- B^+, b^+ b^-] f^+ f^- + [B^+ B^-, b^+ b^-] f^- f^+ \neq 0 \quad .$$

Die Zustände können wir also weiterhin mit $|n_F\rangle$ kennzeichnen, an Stelle von $|n_B\rangle$ muss nun allerdings eine andere Kennzeichnung treten, da H_S und N_B nicht die selben Eigenzustände

aufweisen. Wir bezeichnen die neuen Eigenzustände von H_S mit $|En_F\rangle$ mit der Energie E . $\{|E\rangle\}$ bildet wie $\{|n_B\rangle\}$ eine vollständige Orthonormalbasis im Hilbertraum. Es ergeben sich die folgenden Eigenwertgleichungen:

$$H_S|En_F\rangle = E|En_F\rangle \quad \text{und} \quad N_F|En_F\rangle = n_F|En_F\rangle. \quad (3.3)$$

In Analogie zu Kap. 2.5 können wir nun die Zustände mit n_F in der kanonischen Darstellung schreiben.

$$|E1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |E\rangle \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |E0\rangle = \begin{pmatrix} |E\rangle \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Auf diese Weise erhält man die hermiteschen Operatoren $Q_{1,2}$ die aus Kap. 2.6 bekannt sind, als

$$Q_1 = Q_+ + Q_- = B^- f^+ + B^+ f^- = \begin{pmatrix} 0 & B^+ \\ B^- & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

und

$$Q_2 = -i(Q_+ - Q_-) = -i(B^- f^+ - B^+ f^-) = \begin{pmatrix} 0 & iB^+ \\ -iB^- & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Der SUSY Hamiltonoperator erhält somit die Form

$$H_S = Q_1^2 = Q_2^2 = \begin{pmatrix} B^+ B^- & 0 \\ 0 & B^- B^+ \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Die Gestalt der B^\pm lässt sich nun geeignet wählen.

Beispiel Reduziert man den Ausdruck auf

$$B^\pm = \sqrt{\hbar\omega} b^\pm, \quad (3.8)$$

so erhält man das Energiespektrum des SUSY-Oszillators aus Kap. 2.9.

3.2 SUSY Algebra

Zum Begriff der Algebra \mathcal{A} gelangt man, indem man Elementen A_i mit $i = 1, \dots, N$ eines linearen Raumes mit Addition und Skalarmultiplikation eine weitere Verknüpfung zuordnet, derart, dass die Verknüpfung zweier Elemente nicht aus der Menge der Algebra herausführt. Jedes Element der Algebra kann somit durch eine Kombinationen der A_i dargestellt werden bzw. jedes Polynom

endlichen Grades der A_i ist Element der Algebra.

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} c_{i_1, i_2, \dots, i_k} A_{i_1} \circ A_{i_2} \circ \dots \circ A_{i_k} \in \mathcal{A} \quad \text{mit} \quad c_{i_1, i_2, \dots, i_k} \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad i_k = 1, \dots, N \quad .$$

Man bezeichnet die A_i hierbei als Generatoren der Algebra. Die Algebra heißt assoziativ wenn gilt

$$A_i \circ (A_j \circ A_k) = (A_i \circ A_j) \circ A_k \quad .$$

Sie heißt kommutativ wenn gilt

$$A_i \circ A_j = A_j \circ A_i \quad .$$

Besitzt die Algebra eine Identität so bezeichnet man sie als Algebra mit Einselement.

$$\text{id} \circ A_i = A_i \circ \text{id} = A_i \quad .$$

Die (komplexen) $N \times N$ Matrizen mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung bilden Beispielsweise eine assoziative, nicht-kommutative Algebra mit Einselement.

Verwendet man etwa den Kommutator als Verknüpfung $A_i \circ A_j = [A_i, A_j]$ so bezeichnet man die Algebra als Lie-Algebra. An die Stelle der Assoziativität tritt hierbei die sogenannte Jacobi-Identität.

$$A_i \circ (A_j \circ A_k) + (A_k \circ A_i) \circ A_j + (A_j \circ A_k) \circ A_i = 0 \quad .$$

Betrachten wir nun den Hilbertraum der Quantenzustände $\mathcal{H} = L^2$ (Menge der quadratintegrierbaren Funktionen auf \mathbb{C}). Für die Zustände gilt:

$$\int dx |\Psi|^2 < \infty \quad \text{und} \quad \langle \Phi | \Psi \rangle = \int dx \Phi^* \Psi \quad \text{mit} \quad \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \quad . \quad (3.9)$$

Lineare Abbildungen (Operatoren) auf \mathcal{H}

$$A_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

lassen sich durch Addition von zwei Elementen verknüpfen und Skalarmultiplizieren.

$$(A_1 + A_2)\Psi = A_1\Psi + A_2\Psi \quad \text{und} \quad (\lambda A)\Psi = \lambda A\Psi \quad .$$

Folglich können wir den Operatoren eine Algebra zuordnen.

Blicken wir nun noch einmal auf die Eigenschaften der SUSY-Operatoren $Q_{1,2}$ aus Kap. 2.6. Verallgemeinern wir die Anzahl der hermiteschen Operatoren Q_i auf N , so kann man schreiben:

$$2H_S\delta_{ij} = \{Q_i, Q_j\} \quad \text{und} \quad [H_S, Q_i] = 0 \quad , \quad (3.10)$$

mit $i, j = 1, \dots, N$. (3.10) bezeichnet man als SUSY-Algebra. Es handelt sich hier um die einfachste SUSY Algebra. Sie ist die supersymmetrische Erweiterung der Lie-Algebra $[Q_i^2, Q_j^2] = 0$,

besitzt zusätzlich den Antikommutator und einen Kommutator, so dass alle Verknüpfungen der Q_i und Q_i^2 nicht aus der Algebra herausführen. Die Q_i treten hierbei als Generatoren dieser Algebra auf. [KS97, K. 2.2]

3.3 Eigenwertspektrum der Q_i und Entartung der Zustände

Wir wollen uns auf den Fall $N = 2$ beschränken. Da die Q_i hermitesch sind, ist das Eigenwertspektrum von $H_S = Q_i^2$ auf jeden Fall positiv, da das Quadrat einer reellen Zahl immer positiv ist.

Mit Hilfe der SUSY-Algebra können wir nun zudem zeigen, dass die zweifache Entartung der Zustände, wie beim SUSY-Oszillator, aus den Eigenschaften der Algebra folgt und somit auch unseren verallgemeinerten Operatoren aus Kap. 3.1 gemein ist. Bezeichnen wir den Eigenzustand von Q_1 mit $|A\rangle$, dann folgt aus $H_S|A\rangle = E|A\rangle = Q_1^2|A\rangle$:

$$Q_1|A\rangle = +\sqrt{E}|A\rangle \quad , \quad (3.11)$$

wobei das Vorzeichen frei gewählt wurde. Bringen wir nun den Antikommutator aus (3.10) und Q_2 ins Spiel und berechnen den Ausdruck

$$Q_1Q_2|A\rangle \stackrel{(3.10)}{=} -Q_2Q_1|A\rangle = -\sqrt{E}Q_2|A\rangle \quad ,$$

dann ist $Q_2|A\rangle$ ebenfalls Eigenzustand von Q_1 , allerdings mit Eigenwert $-\sqrt{E}$. Wir wählen die Bezeichnung

$$|B\rangle := Q_2|A\rangle \quad . \quad (3.12)$$

Mit

$$H_S|B\rangle = Q_1^2|B\rangle = Q_1^2Q_2|A\rangle \stackrel{(3.10)}{=} Q_2Q_1^2|A\rangle = EQ_2|A\rangle = E|B\rangle \quad (3.13)$$

ist $|B\rangle$ ebenfalls Eigenzustand zu H_S . Die Zustände sind also zweifach entartet. Wir können zu jedem Energieeigenwert von H_S zwei Zustände $|A\rangle$ und $|B\rangle$ finden, solange die Energie größer null ist ($E > 0$). Der Grundzustand mit $E = 0$ ist nicht entartet.

3.4 Gemischte Zustände

Bisher haben wir die reinen, entweder bosonischen oder fermionischen Zustände $|En_F\rangle$ kennengelernt. Betrachten wir nun die gemischten Zustände

$$|E0\rangle + |E1\rangle \quad \text{und} \quad |E0\rangle - |E1\rangle$$

und berechnen deren Eigenwerte bezüglich Q_1 :

$$\begin{aligned} Q_1(|E0\rangle + |E1\rangle) &= \sqrt{E}(|E1\rangle + |E0\rangle) = \sqrt{E}(|E0\rangle + |E1\rangle) \quad , \\ Q_1(|E0\rangle - |E1\rangle) &= \sqrt{E}(|E1\rangle - |E0\rangle) = -\sqrt{E}(|E0\rangle - |E1\rangle) \quad . \end{aligned}$$

Nach Kap. 3.3 lassen sich also diese gemischten Zustände gerade mit den Zuständen $|A\rangle =: |Q_{1+}\rangle$ und $|B\rangle =: |Q_{1-}\rangle$ identifizieren. Die Eigenwertgleichungen bezüglich Q_1 und $|Q_{1\pm}\rangle$ lauten also

$$Q_1|Q_{1\pm}\rangle = \pm\sqrt{E}|Q_{1\pm}\rangle \quad \text{und} \quad H_S|Q_{1\pm}\rangle = E|Q_{1\pm}\rangle \quad , \quad (3.14)$$

mit $|Q_{1\pm}\rangle = |E0\rangle \pm |E1\rangle$. Die $|Q_{1\pm}\rangle$ sind also auch Eigenzustände von H_S , jedoch nicht von Q_2 , da Q_1 und Q_2 nicht miteinander vertauschen. Um die gemischten Eigenzustände von Q_2 zu finden werfen wir zunächst einen Blick auf die Wirkung der Q_2 auf die reinen Zustände:

$$Q_2|E0\rangle = i\sqrt{E}|E1\rangle \quad \text{und} \quad Q_2|E1\rangle = -i\sqrt{E}|E0\rangle \quad .$$

Wir schreiben analog zu Q_1 die Zustände $|Q_{2\pm}\rangle = |E0\rangle \pm i|E1\rangle$ und erhalten die Eigenwertgleichungen

$$Q_2|Q_{2\pm}\rangle = \pm\sqrt{E}|Q_{2\pm}\rangle \quad \text{und} \quad H_S|Q_{2\pm}\rangle = E|Q_{2\pm}\rangle \quad . \quad (3.15)$$

Wir haben also insgesamt drei Mögliche Sätze von Zuständen gefunden, die das Eigenwertspektrum von H_S beschreiben ($|En_F\rangle, |Q_{1\pm}\rangle, |Q_{2\pm}\rangle$), wobei alle Zustände bis auf den Grundzustand zweifach entartet sind. Mit Hilfe von Q_1 und Q_2 lassen sich die entarteten Zustände in einander überführen (wie in (3.12)). Die auf diese Weise verknüpften Zustände bezeichnet man als Superpartner.

3.5 Das Superpotential

Wir wollen nun einen konkreteren Ausdruck für unsere nichtlinearen Teilchenoperatoren B^\pm finden. Rufen wir uns die Gestalt der b^\pm aus (2.41) ins Gedächtnis, so bietet sich folgender Ansatz an:

$$B^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W(q) \mp \frac{ip}{\sqrt{m}} \right) \quad (3.16)$$

Die Funktion $W(q)$ bezeichnet man als Superpotential. Es ist kein Potential im herkömmlichen Sinn, da es die Dimension [Energie^(1/2)] besitzt. Berechnen wir nun, mit diesem neuen Ausdruck für die nichtlinearen bosonischen Teilchenoperatoren, den SUSY-Hamiltonoperator aus (3.7).

Für die beiden Komponententen erhält man:

$$\begin{aligned} B^+ B^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W(q) - \frac{ip}{\sqrt{m}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W(q) + \frac{ip}{\sqrt{m}} \right) = \frac{1}{2} \left(W^2 + \frac{p^2}{m} + \frac{i}{\sqrt{m}} Wp - \frac{i}{\sqrt{m}} pW \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(W^2 + \frac{p^2}{m} + \frac{i}{\sqrt{m}} [W, p] \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow B^- B^+ = \frac{1}{2} \left(W^2 + \frac{p^2}{m} - \frac{i}{\sqrt{m}} [W, p] \right) \quad (3.18)$$

Um den auftretenden Kommutator zu berechnen gehen wir davon aus, dass sich $W(q)$ als Potenzreihe in q darstellen lässt.

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n q^n$$

Wir wollen nun zeigen, dass der somit auftretende Kommutator $[q^n, p]$ sich bestimmen lässt zu

$$[q^n, p] = i\hbar n q^{n-1} \quad . \quad (3.19)$$

Beweis mit voll. Induktion:

I.A.: $[q^1, p] \stackrel{(2.42)}{=} i\hbar$

I.V.: $[q^n, p] = i\hbar n q^{n-1}$

I.S.: $n \rightsquigarrow n+1$

$$\Rightarrow [q^{n+1}, p] = [q^n, p]q + q^n \underbrace{[q, p]}_{=i\hbar} \stackrel{\text{I.V.}}{=} i\hbar n q^{n-1} q + q^n i\hbar = i\hbar(n+1)q^n \quad \square$$

Es folgt:

$$[W, p] = \sum_{n=0}^{\infty} w_n [q^n, p] \stackrel{(3.19)}{=} i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} w_n n q^{n-1} = i\hbar \frac{dW}{dq} \quad (3.20)$$

Man erhält also den Hamiltonoperator H_S mit den Komponenten $H_1 := B^+ B^-$ und $H_2 := B^- B^+$ und dem Superpotential:

$$H_S = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(W^2 + \frac{p^2}{m} - \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{dW}{dq} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(W^2 + \frac{p^2}{m} + \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{dW}{dq} \right) \end{pmatrix} \quad . \quad (3.21)$$

Wir finden außerdem eine verallgemeinerte Kommutatorbeziehung für die nichtlinearen Teilchenoperatoren.

$$[B^-, B^+] = H_2 - H_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W' \quad . \quad (3.22)$$

Beispiel Für das Superpotential

$$W(q) = \sqrt{m}\omega q \quad (3.23)$$

und mit (3.8) reduziert sich (3.22) auf die Kommutatorgleichung des harmonischen Oszillators (2.16). Folglich handelt es sich um das Superpotential des harmonischen Oszillators.

3.6 Grundzustand

Nun wollen wir den Grundzustand bei $E = 0$ betrachten mit $H_S|0n_F\rangle = 0$. Es gilt

$$H_1|00\rangle = 0 \Leftrightarrow B^-|00\rangle = 0 \quad \text{und} \quad H_2|01\rangle = 0 \Leftrightarrow B^+|01\rangle = 0 \quad . \quad (3.24)$$

H_1 wirkt auf den bosonischen Zustand ($n_F = 0$) und H_2 wirkt auf den fermionischen Zustand ($n_F = 1$). Die DGL für den Grundzustand lässt sich wegen (3.24) auf eine DGL 1. Ordnung reduzieren. Um konkrete Rechnungen zu machen gehen wir nun über in die Ortsdarstellung:

$$q \rightarrow x, \quad p \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad W(q) \rightarrow W(x) \quad . \quad (3.25)$$

Die Ortswellenfunktion ergibt sich als Projektion auf unsere Eigenzustände $|En_F\rangle$. Der Grundzustand ist gegeben mit

$$\Psi_0^+(x) := \langle x|00\rangle \quad \text{oder} \quad \Psi_0^-(x) := \langle x|01\rangle \quad . \quad (3.26)$$

Nach (3.24) muss der Grundzustand somit folgende DGL 1. Ordnung erfüllen:

$$\left(W(x) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \right) \Psi_0^\pm(x) = 0 \quad (3.27)$$

Als Lösungen erhält man:

$$\Psi_0^\pm(x) = c \exp \left\{ \mp \frac{\sqrt{m}}{\hbar} \int_0^x d\xi W(\xi) \right\} \quad (3.28)$$

Da physikalisch relevante Lösungen der Schrödinger-Gleichung immer normierbar bzw. quadratintegrabel (3.9) sind, müssen noch Konvergenzbedingungen an die im Exponenten auftretenden Integrale gestellt werden.

Ist Ψ_0^+ Grundzustand muss gelten:

$$\int_{-\infty}^0 d\xi W(\xi) = -\infty \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} d\xi W(\xi) = \infty \quad . \quad (3.29)$$

Ist Ψ_0^- Grundzustand muss gelten:

$$\int_{-\infty}^0 d\xi W(\xi) = \infty \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} d\xi W(\xi) = -\infty \quad . \quad (3.30)$$

Diese beiden Forderungen schließen sich gegenseitig aus, wir haben also nur einen möglichen Grundzustand bei $E = 0$. Entweder es handelt sich um Ψ_0^+ , dann gehört der Grundzustand zu H_1 oder es handelt sich um Ψ_0^- , dann gehört der Grundzustand zu H_2 . Gibt es keinen Zustand

zu $E = 0$ so liegt der Grundzustand bei $E > 0$ und ist nach Kap. 3.3 zweifach entartet.

3.7 Spontane Symmetriebrechung

Existiert ein Grundzustand bei $E = 0$ so spricht man von exakter Supersymmetrie, tritt hingegen kein Grundzustand bei $E = 0$ auf so bezeichnet man die Supersymmetrie als gebrochen.

Diese Begriffswahl basiert auf dem Konzept der spontanen Symmetriebrechung. Man spricht von spontaner Symmetriebrechung, wenn ein System im Grundzustand die Symmetrie nicht respektiert. Mathematisch gesehen betrachtet man den Hamiltonoperator H (hier der Einfachheit halber mit Grundzustand bei $E = 0$) eines Systems, das energetisch invariant unter einer Transformation G ($[H, G] = 0$) ist. Dann bezeichnet man die Symmetrie die G vermittelt als gebrochen, wenn der Grundzustand diese Symmetrie nicht aufweist, das heißt unter Transformation mit G ist das System im Grundzustand nicht invariant und G annihiliert den Grundzustand nicht.

$$G|0\rangle \neq 0 \quad (\text{Sym. gebrochen}) \quad (3.31)$$

$$G|0\rangle = 0 \quad (\text{Sym. exakt}) \quad (3.32)$$

Wir können dieses Konzept nun auf unsere SUSY-Operatoren Q_i anwenden. Die SUSY ist demnach exakt, wenn für den Grundzustand gilt:

$$Q_1|0_{n_F}\rangle = 0 \quad \text{oder} \quad Q_2|0_{n_F}\rangle = 0 \quad . \quad (3.33)$$

Da $H_S|0_{n_F}\rangle = Q_i^2|0_{n_F}\rangle = 0$ liegt der Grundzustand hier bei $E = 0$. Die SUSY ist also exakt, genau dann, wenn der Grundzustand bei $E = 0$ liegt.

Der Grundzustand hängt nach (3.28) vom Superpotential ab. Das Verhalten von W ist deshalb auch ausschlaggebend darüber, ob es sich um exakte oder gebrochene SUSY handelt. Rufen wir uns noch einmal (3.29) und (3.30) ins Gedächtnis, so haben wir 2 mögliche Bedingungen an unser W , um einen Grundzustand bei $E = 0$ zu finden. Die SUSY ist dann exakt. Werden die Konvergenzbedingungen allerdings nicht erfüllt, gibt es keinen Grundzustand zu $E = 0$, der Grundzustand liegt bei $E > 0$, ist zweifach entartet und die SUSY ist gebrochen. Wir fassen die Konvergenzbedingungen an W noch einmal bezüglich der exakten und gebrochenen Symmetrie zusammen:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) > 0 \quad (\text{SUSY exakt}) \quad (3.34)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) > 0 \quad (\text{SUSY exakt}) \quad (3.35)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} W(x) < 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} W(x) > 0 \quad (\text{SUSY gebrochen}) \quad (3.36)$$

Diese Darstellung der Konvergenzbedingungen ist äquivalent zu den Integralen-Konvergenzbedingungen aus (3.29) und (3.30).

3.8 Beziehungen zwischen Eigenwerten und Eigenzuständen von H_1 und H_2

Die beiden Komponenten von H_S , H_1 und H_2 beschreiben zwei verschiedene Systeme und stehen über die SUSY in Beziehung zueinander. Betrachten wir die stationäre Schrödinger-Gleichung respektive für H_1 und H_2 :

$$H_1 \Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \Psi_n^{(1)} \quad . \quad (3.37)$$

$$H_2 \Psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \Psi_n^{(2)} \quad . \quad (3.38)$$

Da H_1 und H_2 sich nach (3.21) als Produkt der beiden linearen, bosonischen Differentialoperatoren B^\pm schreiben lassen, finden sich folgende Eigenwertgleichungen:

$$\begin{aligned} H_2 B^- \Psi_n^{(1)} &= B^- B^+ B^- \Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} B^- \Psi_n^{(1)} \quad , \\ H_1 B^+ \Psi_n^{(2)} &= B^+ B^- B^+ \Psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} B^+ \Psi_n^{(2)} \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $E_n^{(1)}$ auch Eigenwert zu H_2 mit Eigenzustand $B^- \Psi_n^{(1)}$ ist und $E_n^{(2)}$ Eigenwert zu H_1 mit Eigenzustand $B^+ \Psi_n^{(2)}$ ist.

Die beiden Hamiltonoperatoren beschreiben also das gleiche Eigenwertspektrum, wir müssen allerdings aufpassen ob es sich um exakte oder gebrochene SUSY handelt. Zunächst interessiert und die exakte Supersymmetrie. Wir legen zunächst o.B.d.A. fest:

$$\text{Der Grundzustand soll bei exakter SUSY immer zu } H_1 \text{ gehören.} \quad (3.39)$$

Das Eigenwertspektrum von H_2 erhält man dann bis auf den Grundzustand aus dem Eigenwertspektrum von $E_n^{(1)}$.

$$E_0^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad (\text{SUSY exakt}) \quad (3.40)$$

Die entarteten Eigenfunktionen lassen sich mit B^\pm ineinander überführen. Die Energie bleibt erhalten und nur der Grundzustand von H_1 ist nicht entartet, da B^- ihn annihiliert.

$$\Psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} B^- \Psi_{n+1}^{(1)} \quad (\text{SUSY exakt}), \quad (3.41)$$

$$\Psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} B^+ \Psi_n^{(2)} \quad (\text{SUSY exakt}). \quad (3.42)$$

Die Gültigkeit dieser beiden Gleichungen und die Wahl der Vorfaktoren lässt sich leicht nachprüfen. Setzt man (3.41) und (3.42) ineinander ein erhält man (3.37) bzw. (3.38).

Im Fall der gebrochenen SUSY liegt der Grundzustand nicht bei $E = 0$ und alle Zustände sind

entartet. H_1 und H_2 besitzen ein identisches Eigenwertspektrum.

$$E_n^{(2)} = E_n^{(1)} > 0 \quad (\text{SUSY gebrochen}) \quad (3.43)$$

Die Eigenzustände lassen sich analog zu (3.41) und (3.42) ineinander überführen, wir müssen allerdings nicht den nicht entarteten Grundzustand berücksichtigen und erhalten:

$$\Psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(1)}}} B^- \Psi_n^{(1)} \quad (\text{SUSY gebrochen}), \quad (3.44)$$

$$\Psi_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} B^+ \Psi_n^{(2)} \quad (\text{SUSY gebrochen}). \quad (3.45)$$

[KS97, Kap. 2]

4 Forminvarianz und Coulomb Potential

4.1 Partnerpotential

Kehren wir zunächst zu den beiden Komponenten des Hamiltonoperators H_S zurück und splitten ihn in einen kinetischen und einen potentiellen Anteil auf.

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad \text{mit} \quad V_1 = \frac{1}{2} \left(W^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{dW}{dx} \right) \quad , \quad (4.1)$$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad \text{mit} \quad V_2 = \frac{1}{2} \left(W^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{dW}{dx} \right) \quad . \quad (4.2)$$

V_1 und V_2 bezeichnet man als Partnerpotentiale. Ihre Differenz ist

$$V_2 - V_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W' \quad . \quad (4.3)$$

4.2 Vom Grundzustand zum Superpotential

In Kap. 3.6 haben wir gesehen, wie man mit dem Superpotential den Grundzustand erhält. Nun wollen wir ausgehend vom Grundzustand das Superpotential konstruieren. Dazu betrachten wir die Schrödinger-Gleichung von H_1 im Grundzustand $\Psi_0 := \Psi_0^{(1)}$ bei exakter SUSY. Wir erhalten mit H_1 aus (3.21) in Ortsdarstellung die DGL

$$\begin{aligned} H_1 \Psi_0 &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} W^2 - \frac{\hbar}{2\sqrt{m}} \frac{dW}{dx} \right) \Psi_0 = 0 \\ \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi_0'' + \left(\frac{1}{2} W^2 - \frac{\hbar}{2\sqrt{m}} W' \right) \Psi_0 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

s Bringen wir die Ausdrücke mit Ψ_0 auf eine Seite erhält man

$$\frac{\Psi_0''}{\Psi_0} = \left(\frac{\sqrt{m}}{\hbar} W \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{m}}{\hbar} W \right)' \quad . \quad (4.4)$$

Um aus diesem Ausdruck W erhalten zu können nutzen wir einen kleinen Trick. Mit Hilfe der Produktregel erhält man folgenden Ausdruck:

$$\left(\frac{\Psi_0'}{\Psi_0} \right)' = \frac{\Psi_0''}{\Psi_0} - \left(\frac{\Psi_0'}{\Psi_0} \right)^2 \quad (4.5)$$

Ein Vergleich von (4.4) und (4.5) führt auf *einen* Ausdruck für W .

$$W = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{\Psi_0'}{\Psi_0} = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \ln \Psi_0 \quad . \quad (4.6)$$

Zur Probe lässt sich das Potential V_1 einmal ausrechnen. Wie man sieht, führt es einen wieder auf die Schrödinger-Gleichung im Grundzustand.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \left(W^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W' \right) = \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{\Psi'_0}{\Psi_0} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{\Psi'_0}{\Psi_0} \right)' \stackrel{(4.5)}{=} \frac{\hbar}{2m} \frac{\Psi''_0}{\Psi_0} \\ &\Rightarrow -\frac{\hbar}{2m} \Psi''_0 + V_1 \Psi_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1 \Psi_0 = 0 \quad . \end{aligned}$$

Aus dem Grundzustand von H_1 lässt sich nun also das Superpotential konstruieren. Mit der Kenntnis von W lassen sich dann die Partnerpotentiale V_1 und V_2 angeben.

Beispiel Wählen wir die Gaußsche Glockenkurve der Gestalt

$$\Psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar} \right) \quad . \quad (4.7)$$

Mit (4.6) erhält man $W = \sqrt{m\omega}x$. Dies ist das Superpotential aus (3.23) des harmonischen Oszillator. In der Tat beschreibt (4.7) den Grundzustand des harmonischen Oszillator. Die beiden Partnerpotentiale erhalten die Form

$$V_1 = \frac{m\omega^2}{2} x^2 - \frac{\hbar\omega}{2} \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \frac{\hbar\omega}{2} \quad . \quad (4.8)$$

4.3 SUSY Ketten

Wir können aus jedem Beliebigen Hamiltonoperator H mit Grundzustand $E_0 \geq 0$ einen SUSY Hamiltonoperator mit $H_1 = H - E_0$ mit Grundzustand bei $E = 0$ konstruieren. Nach Kap. 3.1 lässt sich H_1 nun mit Hilfe zweier linearen Differentialoperatoren B^\pm Faktorisieren. Wir wählen die Bezeichnung B_1^\pm .

$$H_1 = B_1^+ B_1^- + E_0^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1 \quad ,$$

wobei $E_0^{(1)} = 0$. Die Konstante $E_0^{(k)}$ beschreibt im Folgenden die Energiedifferenz benachbarter SUSY Systeme. Für das erste System liegt der Grundzustand per Definition bei null.

Aus dem Grundzustand von H_1 lässt sich mit (4.6) das Superpotential W finden. Wir wählen die Bezeichnung W_1 . Für die Operatoren und das Potential erhält man:

$$\begin{aligned} B_1^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W_1 \mp \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \right) \quad \text{mit} \quad W_1 = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \ln \Psi_0^{(1)} \quad , \\ V_1 &= \frac{1}{2} \left(W_1^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W_1' \right) + E_0^{(1)} \quad . \end{aligned}$$

Bestimmen wir jetzt den SUSY Partner H_2 , indem wir die Reihenfolge der beiden Operatoren vertauschen. Der Grundzustand $\Psi_0^{(2)}$ liegt nach (3.40) bei $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$.

$$H_2 = B_1^- B_1^+ + E_0^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2 \quad ,$$

mit

$$V_2 = \frac{1}{2} \left(W_1^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W_1' \right) + E_0^{(1)} = V_1 + \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W_1' \stackrel{(4.6)}{=} V_1 - \frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2}{dx^2} \ln \Psi_0^{(1)}$$

Ausgehend von der Eigenwertgleichung $H_2 \Psi_0^{(2)} = E_0^{(2)} \Psi_0^{(2)}$ können wir H_2 mittels neuer Differentialoperatoren B_2^\pm ausdrücken die die Eigenschaft $B_2^+ B_2^- \Psi_0^{(2)} = 0$ erfüllen und somit das Auffinden eines neuen Superpotentials W_2 ermöglichen.

$$H_2 = B_2^+ B_2^- + E_0^{(2)}$$

definiert den neuen Hamiltonoperator, dessen Grundzustand $\Psi_0^{(2)}$ bei $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$ liegt. Der erste Anregungszustand von H_1 entspricht also gerade energetisch dem Grundzustand von H_2 . Aus dem Grundzustand $\Psi_0^{(2)}$ folgt ein neues Superpotential und die B_2^\pm erhalten die Gestalt

$$B_2^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W_2 \mp \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \right) \quad \text{mit} \quad W_2 = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \ln \Psi_0^{(2)} \quad .$$

Die Darstellung von H_2 mit B_2 impliziert dann wieder einen SUSY Partner

$$H_3 = B_2^- B_2^+ + E_0^{(2)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_3 \quad ,$$

mit

$$V_3 = \frac{1}{2} \left(W_2^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W_2' \right) + E_0^{(2)} = V_2 - \frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2}{dx^2} \ln \Psi_0^{(2)} = V_1 - \frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\Psi_0^{(1)} \Psi_0^{(2)} \right) \quad .$$

Erneut lassen sich zwei neue Operatoren B_3^\pm mit $B_3^+ B_3^- \Psi_0^{(3)} = 0$ einführen. Der Hamiltonoperator erhält dann die Gestalt

$$H_3 = B_3^+ B_3^- + E_0^{(3)} \quad ,$$

mit Grundzustand $\Psi_0^{(3)}$ bei $E_0^{(3)} = E_1^{(2)} = E_2^{(1)}$. Die Faktorisierung führt dann wieder auf ein SUSY System H_4 etc.

Fassen wir zusammen. Es lässt sich also immer ein neuer Hamiltonoperator H_k bestimmen der das Spektrum von H_1 , bis auf die ersten $k - 1$ Energieeigenwerte $E_0^{(1)}$ bis $E_0^{(k-1)}$, enthält. Dies ist möglich, solange es einen Grundzustand bzw. gebundenen Zustand $\Psi_0^{(k)}$ zu H_k gibt. Gehen wir davon aus, dass alle Grundzustände frei von Nullstellen sind, so lässt sich ein Superpotential W_k gemäß Kap. 4.2 bestimmen.

Schreiben wir die Gleichungen noch einmal allgemein, so ist der k -te SUSY Hamiltonoperator gegeben mit

$$H_k = B_k^+ B_k^- + E_0^{(k)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_k \quad \text{mit} \quad E_0^{(k)} = E_{k-1}^{(1)} \quad , \quad (4.9)$$

$$(4.10)$$

mit

$$B_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W_k \mp \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \right) \quad \text{und} \quad W_k = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \ln \Psi_0^{(k)} \quad . \quad (4.11)$$

Das k -te Partnerpotential erhält die Form

$$V_k = V_1 - \frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\Psi_0^{(1)} \cdots \Psi_0^{(k-1)} \right) \quad . \quad (4.12)$$

Für das Eigenwertspektrum erhält man

$$E_n^{(k)} = E_{n+1}^{(k-1)} = E_{n+2}^{(k-2)} = \cdots = E_{n+k-1}^{(1)} \quad . \quad (4.13)$$

Ist also das Eigenwertspektrum eines Hamiltonoperators bekannt, so lässt sich das Spektrum einer ganzen Kette von Partnerhamiltonoperatoren angeben.

Kümmern wir uns nun um die Zustände. In Kap. 3.8 haben wir gesehen, wie sich die Zustände (bei exakter SUSY) mit Anwenden von B^\pm in einander Überführen lassen.

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} B^- \Psi_{n+1}^{(1)} \quad , \\ \Psi_{n+1}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} B^+ \Psi_n^{(2)} \quad . \end{aligned}$$

Diese beiden Eigenschaften lassen sich auf alle SUSY Systeme übertragen, die durch die B_k^\pm definiert sind. Um der neuen Notation gerecht zu werden müssen wir die Grundzustandsenergie $E_0^{(k)}$ des k -ten Hamiltonoperators in dem Wurzelterm berücksichtigen. Es folgt:

$$\Psi_n^{(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(k)} - E_0^{(k)}}} B_k^- \Psi_{n+1}^{(k)} \quad , \quad (4.14)$$

$$\Psi_{n+1}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(k+1)} - E_0^{(k)}}} B_k^+ \Psi_n^{(k+1)} \quad . \quad (4.15)$$

Von der Richtigkeit dieser beiden Gleichungen lässt man sich wieder überzeugen, indem man sie in einander einsetzt.

Mit Kenntnis der B_k^\pm lassen sich also alle Zustände der SUSY Kette konstruieren. Man erhält z.B. den Grundzustand des $(k+1)$ -ten Systems aus dem k -ten angeregten Zustand des ersten Systems mittels Anwendung der B_k^- .

$$\Psi_0^{(k+1)} = N_k B_k^- B_{k-1}^- \cdots B_2^- B_1^- \Psi_k^{(1)} \quad . \quad (4.16)$$

Andersherum führt die Anwendung der B_k^+ auf den k -ten Zustand des ersten Systems aus dem Grundzustand des $(k+1)$ -ten Systems.

$$\Psi_k^{(1)} = N_k B_1^+ B_2^+ \cdots B_{k-1}^+ B_k^+ \Psi_0^{(k+1)} \quad , \quad (4.17)$$

mit dem Normierungsfaktor

$$N_k = \frac{1}{\sqrt{E_k^{(1)} - E_0^{(1)}}} \frac{1}{\sqrt{E_{k-1}^{(2)} - E_0^{(2)}}} \cdots \frac{1}{\sqrt{E_1^{(k)} - E_0^{(k-1)}}} \frac{1}{\sqrt{E_0^{(k+1)} - E_0^{(k)}}} .$$

Beispiel Wählen wir den Grundzustand des harm. Oszillators aus (4.7) für alle k Elemente der SUSY Kette

$$\Psi_0^{(k)} = \Psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right) \exp \left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar} \right) .$$

In der SUSY Kette erhält man dann mit (4.12) das k -te Partnerpotential zu

$$\begin{aligned} V_k &= V_1 - \frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\Psi_0^{(1)} \cdots \Psi_0^{(k-1)} \right) = V_1 - \frac{\hbar}{m} \frac{d^2}{dx^2} \ln (\Psi_0)^{k-1} \\ &= V_1 - \frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2}{dx^2} \left(-(k-1) \frac{m\omega x^2}{2\hbar} \right) = V_1 + (k-1)\hbar\omega , \end{aligned}$$

wobei V_1 die Form aus (4.8) hat. Da die Grundzustandsenergie von H_1 bei null liegt und der Grundzustand für alle Systeme gleich ist, lässt sich sofort der Grundzustand des k -ten Systems ablesen. Es handelt sich um die Verschiebung im Partnerpotential. Für die Energieeigenwerte erhält man das bekannte Spektrum des SUSY Oszillator.

$$E_0^{(k)} = E_{k-1}^{(1)} = (k-1)\hbar\omega \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, \dots .$$

Potentiale wie z.B. das des harm. bzw. SUSY Oszillator bezeichnet man als forminvariant, da sie ihre x -Abhängigkeit beim Übergang zwischen den Partnerpotentialen beibehalten. Wie wir gerade gesehen haben ist dies besonders nützlich, um das Eigenwertspektrum auf rein algebraischen Weg zu erlangen.

4.4 Forminvarianz

Versuchen wir jetzt den Begriff der Forminvarianz zu präzisieren. Aus (4.3) ist uns bekannt das für die beiden Partnerpotentiale V_1 und V_2 gilt:

$$V_2 = V_1 + \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W_1'$$

Anstatt nun Bedingungen an W_1' zu stellen, damit die x -Abhängigkeit von V_1 beim Übergang zum SUSY Partner erhalten bleibt, führen wir unabhängig von x einen Parameter a ein von dem V_1 abhängt. Dieser soll sich beim Übergang zum Partnerpotential mit einer Funktion $f(a)$ transformieren. Dies erlaubt es, folgende Definition eines forminvarianten Potentials zu liefern:

$$V_2(x, a) = V_1(x, f(a)) + R(a) \tag{4.18}$$

Das Potential V_2 ist gleich dem Potential V_1 , dessen Parameter a übergeht in $f(a)$ plus einer additiven Konstante $R(a)$. In Anlehnung an die SUSY Ketten lässt sich dieses Transformationsverhalten auf k Partnerpotentiale verallgemeinern. Für V_3 erhalten wir zunächst

$$V_3(x, a) = V_2(x, f(a)) + R(a) = V_1(x, f^2(a)) + R(f(a)) + R(a) \quad .$$

Führt man die Transformation nun $k - 1$ mal durch erhält man das k -te Potential der SUSY Kette zu

$$V_k(x, a) = V_1(x, f^{k-1}(a)) + \sum_{j=1}^{k-1} R(f^{j-1}(a)) \quad , \quad (4.19)$$

wobei $f^j(a)$ die j -fache Anwendung von f auf a bezeichnet. Betrachten wir das $(k + 1)$ -te Partnerpotential

$$V_{k+1}(x, a) = V_1(x, f^k(a)) + \sum_{j=1}^k R(f^{j-1}(a)) = V_2(x, f^{k-1}(a)) + \sum_{j=1}^{k-1} R(f^{j-1}(a)) \quad , \quad (4.20)$$

dann folgt daraus, dass V_k und V_{k+1} Partnerpotentiale sind, weil V_1 und V_2 Partnerpotentiale sind und zu beiden die selbe Konstante addiert wird. Die beiden Hamiltonoperatoren bezüglich V_{k+1} und V_k beschreiben also das gleiche Eigenwertspektrum, bis auf den Grundzustand von H_k der im Spektrum von H_{k+1} nicht auftaucht. Um diesen Grundzustand zu ermitteln werfen wir einen Blick auf die beiden Hamiltonoperatoren:

$$H_k(x, a) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, f^{k-1}(a)) + \sum_{j=1}^{k-1} R(f^{j-1}(a)) \quad , \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} H_{k+1}(x, a) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, f^k(a)) + \sum_{j=1}^k R(f^{j-1}(a)) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, f^{k-1}(a)) + \sum_{j=1}^{k-1} R(f^{j-1}(a)) \quad . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Der Grundzustand des k -ten Systems lässt sich sofort angeben. Es handelt sich um die in den beiden SUSY Hamiltonoperatoren auftretende additive Konstante.

$$E_0^{(k)} = \sum_{j=1}^{k-1} R(f^{j-1}(a)) \quad . \quad (4.23)$$

Das Eigenwertspektrum von H_1 ist dann mit (4.13) allein durch die Kenntnis von f und R bekannt.

$$E_n^{(1)} = \sum_{j=1}^n R(f^{j-1}(a)) \quad \text{mit} \quad E_0^{(1)} = 0 \quad . \quad (4.24)$$

Nun interessieren uns die Zustände dieser forminvarianten SUSY Kette. Dazu drücken wir zunächst die Forminvarianz mit Hilfe der Hamiltonoperatoren aus.

$$H_k(a) = H_1(f^{k-1}(a)) + \text{const.} \quad (4.25)$$

Daraus folgt für die Zustände die nützliche Beziehung

$$\Psi_0^{(k)}(x, a) = \Psi_0^{(1)}(x, f^{k-1}(a)) \quad . \quad (4.26)$$

Mit (4.17) lassen sich die Zustände der SUSY Kette ineinander überführen. Berücksichtigt man zusätzlich noch (4.26) erhält man den k -ten Zustand des ersten Systems direkt aus dessen Grundzustand. Der Übersicht halber lassen wir die Kennzeichnung weg, dass es sich um das erste System handelt. Wir erhalten eine Verallgemeinerung des Formalismus aus (2.21) mit den Aufsteigeoperatoren B_j^+ .

$$\Psi_k(x, a) = \frac{1}{\sqrt{E_k - E_0}} \cdots \frac{1}{\sqrt{E_k - E_{k-1}}} B_1^+ \cdots B_k^+ \Psi_0(x, f^k(a)) \quad . \quad (4.27)$$

Beispiel Betrachten wir als Beispiel das forminvariante Potential der Gestalt

$$V_2(x, \hbar\omega) = V_1(x, \hbar\omega) + \hbar\omega \quad , \quad (4.28)$$

mit $R(a) = f(a) = a = \hbar\omega$. Das Energieeigenwertspektrum beschreibt nach (4.24) den SUSY Oszillator mit dem Eigenwertspektrum von H_1 :

$$E_n^{(1)} = n\hbar\omega \quad . \quad (4.29)$$

Da alle Grundzustände der Hamiltonoperatoren in der SUSY Kette gleich sind, erhält man mit (4.7) auch für alle Superpotentiale die gleiche Form. Alle Aufsteigeoperatoren sind deshalb gleich und erhalten wie in (3.8) die Form $B_j^+ = \sqrt{\hbar\omega} b^+$. Dann erhält man den n -ten Zustand des Systems mit

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{E_n - E_0}} \cdots \frac{1}{\sqrt{E_n - E_{n-1}}} B_1^+ \cdots B_n^+ \Psi_0(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\hbar\omega}} \cdots \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}} (\hbar\omega)^{\binom{n}{2}} (b^+)^n \Psi_0(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^+)^n \Psi_0(x) \quad . \end{aligned}$$

Damit reduziert sich (4.27) auf die vom Bose-Oszillator bekannte Formel zur Bestimmung des n -ten Zustands (2.21). Diese spezielle Art der Forminvarianz ist also dem SUSY Oszillator gemein.

4.5 Höherdimensionale Systeme

Alle unsere bisherigen Ausführungen zur SUSY fanden in nur einer Dimension statt. Um reale Probleme zu untersuchen, müssen wir jedoch meistens dreidimensionale Systeme betrachten. Im Fall von Systemen mit sphärischer Symmetrie lässt sich ein System in Kugelkoordinaten beschreiben und mit der Betrachtung des radialen Anteil reduziert man das dreidimensionale auf ein eindimensionales System. Die Ortswellenfunktion lässt sich mit Hilfe eines Produktansatzes schreiben als

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{r} R_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad , \quad (4.30)$$

mit der radialen Quantenzahl n . $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ sind die so genannten Kugelflächenfunktionen. Sie beschreiben den Winkelanteil und erfüllen die Eigenwertgleichung

$$\vec{L}^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad , \quad (4.31)$$

mit der (ganzzahligen) Drehimpulsquantenzahl l und dem Drehimpulsoperator

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad . \quad (4.32)$$

Für den Radialteil erhält man so die Schrödinger-Gleichung der Gestalt:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \underbrace{V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}}_{=: V_{\text{eff}}(r)} \right) R_{nl}(r) = E_{nl} R_{nl}(r) \quad , \quad (4.33)$$

mit dem effektiven Potential $V_{\text{eff}}(r)$.

Da sich der Definitionsbereich von r nur von 0 bis ∞ erstreckt, müssen wir die Forderung an die Konvergenzbedingungen aus (3.29) bzw. (3.30) bezüglich des Superpotentials $W(r)$ leicht abändern. Wir erhalten wieder zwei mögliche Bedingungen für einen physikalisch korrekten Grundzustand R_{0l}^{\pm} für ein beliebiges, aber festes l . Es muss gelten:

$$\text{Ist } R_{0l}^+ \text{ Grundzustand: } \int_0^{\infty} d\rho W(\rho) = \infty \quad . \quad (4.34)$$

$$\text{Ist } R_{0l}^- \text{ Grundzustand: } \int_0^{\infty} d\rho W(\rho) = -\infty \quad . \quad (4.35)$$

Die SUSY ist also im Falle von Systemen mit sphärischer Symmetrie genau dann exakt, wenn das Superpotential im Unendlichen nicht verschwindet.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(r) \neq 0 \quad . \quad (4.36)$$

4.6 Coulomb Potential

Zum Abschluss ist es nun unser Ziel das Eigenwertspektrum des Coulomb Potential mit den Mitteln der SUSY Quantenmechanik zu lösen. Das Potential hat die Form

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \quad , \quad (4.37)$$

mit der Elementarladung e . Das effektive Potential erhält somit die Form

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \quad . \quad (4.38)$$

Um unsere SUSY Methoden anwenden zu können interessieren wir uns zunächst für eine Lösung der radialen Schrödinger-Gleichung im Grundzustand. Für $r \rightarrow \infty$ lässt sich der Potentialanteil vernachlässigen und man erhält $e^{-\alpha r}$ als Lösung. Da aber für $r \rightarrow 0$ die Gesamtwellenfunktion aus (4.30) mit nur diesem Ansatz divergieren würde, müssen wir dieses unphysikalische Verhalten im Ursprung kompensieren. Als Ansatz bietet sich dann an

$$R_{0l}(r) = Cr^\gamma e^{-\alpha r} \quad , \quad (4.39)$$

mit $\gamma \geq 1$ und $\alpha > 0$. Wir setzen diesen Ansatz nun in (4.33) ein.

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right) Cr^\gamma e^{-\alpha r} = E_0 Cr^\gamma e^{-\alpha r} \\ \Rightarrow & -\frac{\hbar^2}{2m} C e^{-\alpha r} \left(\gamma(\gamma-1)r^{\gamma-2} + \gamma(-\alpha)r^{\gamma-1} + \gamma(-\alpha)r^{\gamma-1} + r^\gamma \alpha^2 \right) + \\ & -e^2 r^{\gamma-1} e^{-\alpha r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m} r^{\gamma-2} e^{-\alpha r} = E_0 r^\gamma C e^{-\alpha r} \\ \Rightarrow & -\gamma(\gamma-1)r^{\gamma-2} + 2\gamma\alpha r^{\gamma-1} + \alpha^2 r^\gamma - \frac{2me^2}{\hbar^2} r^{\gamma-1} + l(l+1)r^{\gamma-2} = \frac{2mE_0}{\hbar^2} r^\gamma \quad . \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt auf die Parameter γ und α und auf die Grundzustandsenergie.

$$\gamma = l + 1 \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{me^2}{\gamma\hbar^2} = \frac{me^2}{(l+1)\hbar^2} \quad . \quad (4.40)$$

$$E_0 = -\frac{\alpha^2 \hbar^2}{2m} = -\frac{me^4}{2\hbar^2(l+1)} \quad . \quad (4.41)$$

Aus dem Grundzustand lässt sich nun gemäß Kap. 4.2 zunächst das Superpotential für ein beliebiges, aber festes l bestimmen.

$$W(r, l) = \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \left(\alpha - \frac{\gamma}{r} \right) = \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \left(\frac{me^2}{(l+1)\hbar^2} - \frac{l+1}{r} \right) \quad . \quad (4.42)$$

Für die Partnerpotentiale erhält man gemäß Kap. 4.1 die Ausdrücke

$$V_1(r, l) = \frac{me^4}{2\hbar^2(l+1)^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}, \quad (4.43)$$

$$V_2(r, l) = \frac{me^4}{2\hbar^2(l+1)^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{(l+1)(l+2)\hbar^2}{2mr^2}. \quad (4.44)$$

Diese beiden Partnerpotentiale sind forminvariant gemäß (4.18) denn das Restglieder ergibt sich mit

$$R(l) = V_2(r, l) - V_1(r, l+1) = \frac{me^4}{2\hbar^2(l+1)^2} - \frac{me^4}{2\hbar^2(l+2)^2} = \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{(l+2)^2} - \frac{1}{(l+1)^2} \right) = \text{const.} \quad (4.45)$$

mit $a = l$ und $f(a) = a + 1$. Um das Energiespektrum der SUSY Kette direkt algebraisch angeben zu können verwenden wir die Methodik aus Kap. 4.4. Dazu bestimmen wir zunächst das j -te Restglied der forminvarianten SUSY Kette:

$$R(f^j(l)) = R(l+j) = V_2(r, l+j) - V_1(r, l+j+1) = \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{(l+j+1)^2} - \frac{1}{(l+j+2)^2} \right) \quad (4.46)$$

Wir summieren dann die Restglieder gemäß (4.24) auf und man erhält für das Energiespektrum den Ausdruck

$$E_n^{(1)} = \sum_{j=1}^n R(f^{j-1}(l)) = \sum_{j=0}^{n-1} R(l+j) = \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{(l+1)^2} - \frac{1}{(l+2)^2} + \frac{1}{(l+2)^2} - \frac{1}{(l+3)^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{(l+n-1)^2} - \frac{1}{(l+n)^2} + \frac{1}{(l+n)^2} - \frac{1}{(l+n+1)^2} \right).$$

Alle Terme bis auf der erste und der letzte heben sich in dieser Teleskopsumme auf. Es folgt

$$E_n^{(1)} = \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{(l+1)^2} - \frac{1}{(l+n+1)^2} \right). \quad (4.47)$$

Um nun das Spektrum des tatsächlichen Coulomb-Problem angeben zu können müssen wir noch die Grundzustandsenergie aus (4.41) beachten. Für das Energiespektrum erhält man nach Addition der Grundzustandsenergie schließlich

$$E_N := E_n^{(1)} + E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{(l+n+1)^2} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{N^2}. \quad (4.48)$$

mit der Hauptquantenzahl $N = n+l+1$. Die Zustände mit $(n-j, l+j)$ sind paarweise entartet, wobei $j = 0, \dots, n$. Sie führen auf die selbe Energie. Die Drehimpulsquantenzahl l nimmt Werte an von $0, \dots, l+n$ an, mit der radialen Quantenzahl $n = 0, 1, 2, \dots$. Dies ist die, vom (nichtrelativistischen) Wasserstoffatom bekannte, N -fache Entartung der Zustände mit $l = 0, \dots, N-1$. In Tabelle 2 sind die entarteten Zustände in Abhängigkeit der Hauptquantenzahl N dargestellt.

Tabelle 2: Entartung der Radialwellenfunktionen anhand der Hauptquantenzahl N mit Richtung des Aufsteigeoperator B^+ und Absteigeoperator B^- .

Radialwellenfunktionen R_{nl}	E_N
$B^+ \longrightarrow$	
$\longleftarrow B^-$	
R_{00}	$E_1 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{1}$
R_{01}, R_{10}	$E_2 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{4}$
R_{02}, R_{11}, R_{20}	$E_3 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{9}$
$R_{03}, R_{21}, R_{12}, R_{30}$	$E_4 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{16}$
...	...
$R_{0,N-1}, R_{1,N-2}, R_{2,N-3}, \dots, R_{N-2,1}, R_{N-1,0}$	$E_N = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{N^2}$

Kümmern wir uns nun um die Zustände. Von der Wellenfunktion des Grundzustandes aus können wir weitere Zustände mit Hilfe des verallgemeinerten Operator-Formalismus aus Kap. 4.4 berechnen. Das Prinzip dieses Verfahrens wollen wir anhand der Zustände zu $N = 2$ verdeutlichen.

Der Grundzustand gehört zur Hauptquantenzahl $N = 1$, d.h. $n = 0, l = 0$. Unser Grundzustand ist gegeben durch

$$R_{00}(r) = Cre^{-\frac{me^2}{\hbar^2}r} \quad . \quad (4.49)$$

Den ersten Zustand $R_{01}(r)$ zur Energie E_2 erhalten wir aus (4.39) mit $l = 1$. Hierbei nutzen wir (4.26) aus. Der Konstante Faktor C muss aus Dimensionsgründen wie r von l abhängen. Es folgt

$$R_{01}(r) = C^2 r^2 e^{-\frac{me^2}{2\hbar^2}r} \quad . \quad (4.50)$$

Aus (4.27) ist bekannt, dass sich die Zustände mit Hilfe der Aufsteigeoperatoren ineinander überführen lassen. Im Fall von $N = 2$ gibt es nur einen weiteren Zustand. Um der Literatur in den Lösungen für die Radialwellenfunktionen der Form halber gerecht zu werden, erhalten die Aufsteigeoperatoren an dieser Stelle ein zusätzliches negatives Vorzeichen. Solange man auch dem Absteigeoperator ein negatives Vorzeichen gibt, gilt immernoch $H = (-B^+) \cdot (-B^-) = B^+B^-$. Außerdem ist eh nur das Betragsquadrat der Wellenfunktion als wirkliche physikalische Größe interessant. Der Auf- bzw. Absteigeoperator in Abhängigkeit von l ergibt sich mit dieser Festlegung zu

$$B^\pm(r, l) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(W(r, l) \mp \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{\partial}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \left(\frac{me^2}{(l+1)\hbar^2} - \frac{l+1}{r} \mp \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad . \quad (4.51)$$

Der zweite Zustand zu $N = 2$ ergibt sich so zu

$$\begin{aligned}
R_{10}(r) &= -\frac{1}{\sqrt{E_2 - E_1}} B^+(r, 0) R_{01}(r) = -\sqrt{\frac{4}{3}} \frac{\hbar^2}{me^2} \left(\frac{me^2}{\hbar^2} - \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) C^2 r^2 e^{-\frac{me^2}{2\hbar^2} r} \\
&= -\sqrt{\frac{4}{3}} \frac{\hbar^2}{me^2} \left(\frac{me^2}{\hbar^2} r^2 - r + \frac{me^2}{2\hbar^2} r^2 - 2r \right) C^2 e^{-\frac{me^2}{2\hbar^2} r} \\
&= 3\sqrt{\frac{4}{3}} \frac{\hbar^2}{me^2} \left(r - \frac{me^2}{2\hbar^2} r^2 \right) C^2 e^{-\frac{me^2}{2\hbar^2} r} .
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Dieses Verfahren kann bis zu einem beliebigen N angewandt werden, je nachdem wie viele gebundene Zustände das System besitzt. Wir brauchen nur für den Parameter l aus R_{0l} , $l = N-1$ einzusetzen und erhalten die Wellenfunktion $R_{0,N-1}$ zu E_N . Dann können wir durch Anwenden von $B^+(r, N-2)$ bis $B^+(r, 0)$ alle weiteren entarteten Zustände zu E_N berechnen. Der nächste Zustand den man erhält ist dann z.B. $R_{1,N-2} \propto B^+(r, N-2) R_{0,N-1}$. Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass der Absteigeoperator $B^-(r, l)$ in umgekehrter Richtung operiert. Für den Zustand $R_{N-1,0}$ läuft der Absteigeoperator von $B^-(r, 0)$ bis $B^-(r, N-2)$ womit man wieder bei $R_{0,N-1}$ landet. Wendet man dann $B^-(r, N-1)$ auf diesen Zustand an, so wird dieser annihilert.

$$B^-(r, N-1) R_{0,N-1} = 0 \quad . \tag{4.53}$$

Die Ergebnisse der Lösung des Wasserstoff- bzw. Coulomb-Problems lassen sich so auf elegante Art und Weise reproduzieren. Ein explizites Auftreten der komplizierten Laguerre-Polynome, wie sie bei der Lösung der DGL (4.33) auftauchen, erübrigt sich aber.

Für die ersten drei Energieniveaus sind in Abb. 1 - 3 noch einmal alle entarteten Zustände qualitativ dargestellt. Es lässt sich gut erkennen, wie der Aufsteigeoperator Nullstellen in der Wellenfunktion erzeugt, während der Absteigeoperator jene vernichtet. Für eine interaktive Darstellung des vorangegangenen Sachverhalts im Rahmen des Wolfram Demonstrations Project möchte ich an dieser Stelle noch auf [Bli] verweisen. [KS97, Kap. 3] [Nol04, K. 6.2] [DKS88]

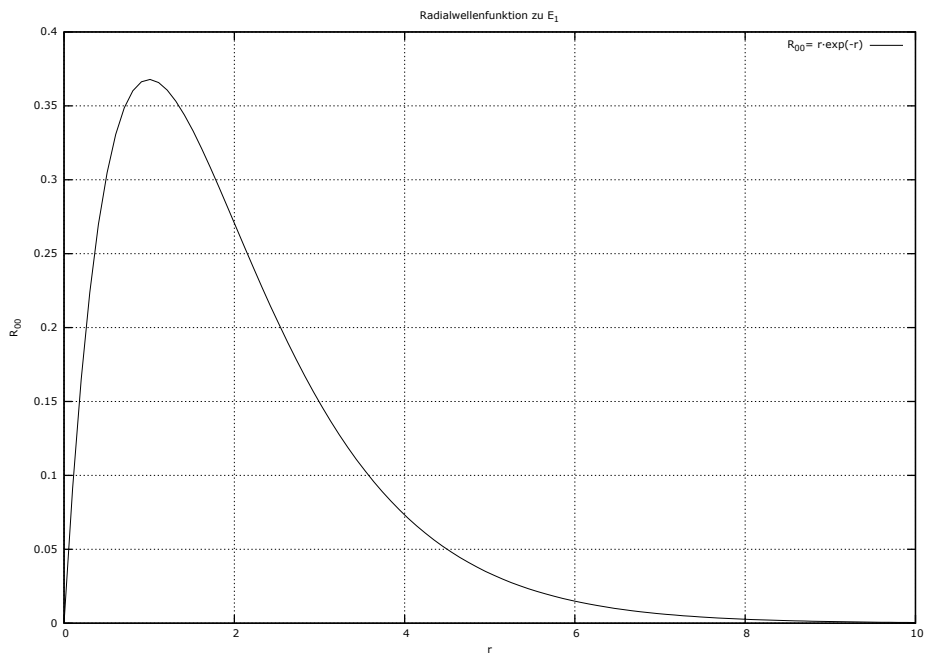


Abbildung 1: Qualitative Darstellung der radialen Grundzustandswellenfunktion R_{00} zu E_1 mit $e = \hbar = m = C = 1$.

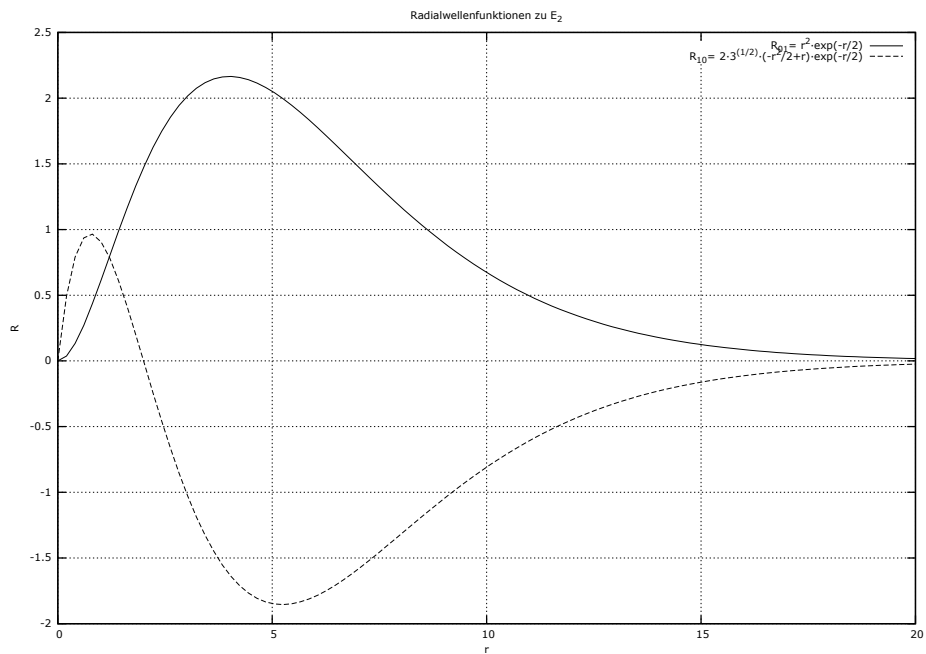


Abbildung 2: Qualitative Darstellung der radialen Grundzustandswellenfunktionen R_{01} und R_{10} zu E_2 mit $e = \hbar = m = C = 1$.

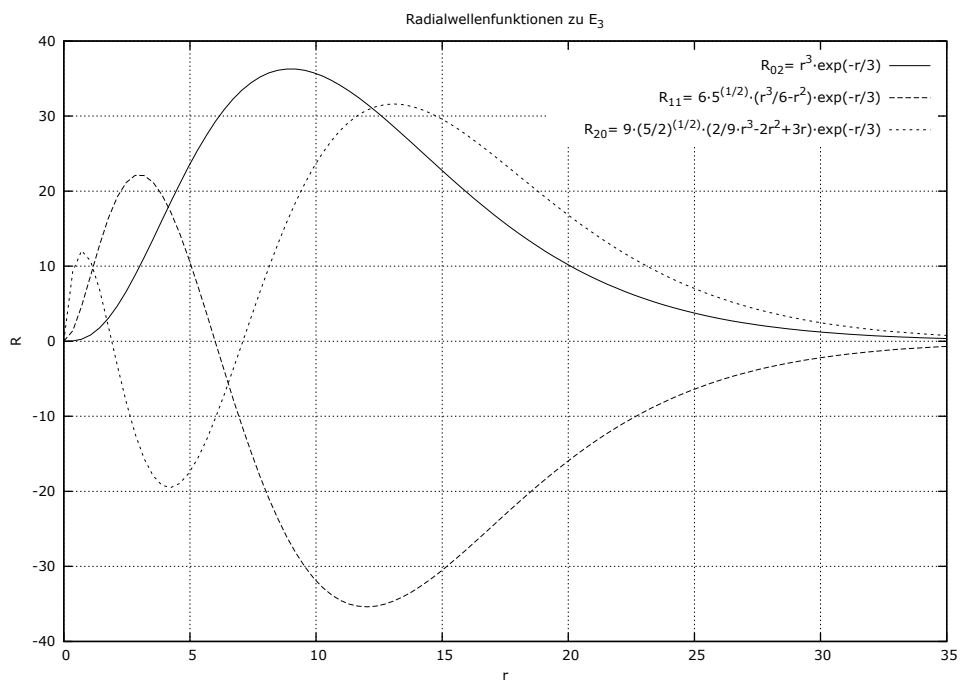


Abbildung 3: Qualitative Darstellung der radialen Grundzustandswellenfunktionen R_{02} , R_{11} und R_{20} zu E_3 mit $e = \hbar = m = C = 1$.

5 Fazit

Um zunächst einen einfachen Einstieg in die Supersymmetrie zu bekommen wurde das einfachste SUSY Modell eingeführt. Damit konnten wir uns einige wesentliche Eigenschaften von bosonischen und fermionischen Zuständen klarmachen, sowie eine simple Form von SUSY Operatoren Q einführen. Auch mit einer verallgemeinerten Darstellung der bosonischen Teilchenoperatoren lassen sich die Grundeigenschaften der SUSY beibehalten.

Die Anwendung der Q lässt das System invariant, was im Rahmen der Quantenmechanik mit der Vertauschung von Q mit H ausgedrückt wird. Das Auffinden eines SUSY Hamiltonoperators führt auf die Tatsache, dass sich der Hamiltonoperator als Kombination zweier linearer Differentialoperatoren darstellen lässt. Diese Tatsache war auch schon vor der Entwicklung von SUSY Theorien in den 70er Jahren bekannt. Neu ist, dass diese Darstellung einen SUSY Partner impliziert, zu jedem bosonischen gehört somit ein fermionisches System.

Aus der SUSY Algebra, die die Generatoren der SUSY Q_i bilden, folgt direkt die zweifache Entartung der Zustände. Dabei gibt es einen bosonischen und einen fermionischen Zustand zu jeder Energie, bis auf den Grundzustand, wenn er bei $E = 0$ liegt. Dieser ist nämlich nicht entartet und man spricht dann von exakter Supersymmetrie.

Denkt man das Prinzip des SUSY Partners weiter führt das auf die SUSY Ketten, die eine ganze Reihe von Hamiltonoperatoren über die Supersymmetrie miteinander verknüpfen. Wir haben gesehen, dass, wenn die Potentiale benachbarter SUSY Partner forminvariant sind, sich das Eigenwertspektrum und die Zustände auf rein algebraischem Weg angeben lassen. Zu der Liste der so lösbaren forminvarianten Potentiale gehören viele bekannte Probleme (harm. Oszillator, Coulomb, Morse, Rosen-Morse, Eckart, Pöschl-Teller). Die Supersymmetrie und Forminvarianz erlaubt es also einen tieferen Einblick in die Natur analytisch lösbarer Systeme zu erhalten. Mit der algebraischen Methode gelingt es auf besonders einfachem und elegantem Weg an die Lösungen eines Potential-Problems zu gelangen. [DKS88]

Literatur

- [Bli] BLINDER, S. M.: *Hydrogenic Radial Functions via Supersymmetry*. – <http://demonstrations.wolfram.com/HydrogenicRadialFunctionsViaSupersymmetry/>, zuletzt besucht am 2.1.2012.
- [DKS88] DUTT, Ranabir ; KHARE, Avinash ; SUKHATME, Uday P.: Supersymmetry, Shape Invariance and Exactly Solvable Potentials. In: *Am.J.Phys.* 56 (1988), S. 163–168. <http://dx.doi.org/10.1119/1.15697>. – DOI 10.1119/1.15697
- [KS97] KALKA, H. ; SOFF, G.: *Supersymmetrie*. Stuttgart : Teubner, 1997
- [Nol04] NOLTING, Wolfgang: *Quantenmechanik-Methoden und Anwendungen*. Berlin Heidelberg New-York : Springer, 2004
- [Pau40] PAULI, W.: The Connection Between Spin and Statistics. In: *Phys.Rev.* 58 (1940), S. 716–722. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.58.716>. – DOI 10.1103/PhysRev.58.716
- [Ste10] STEPANOW, Semjon: *Relativistische Quantentheorie*. Berlin Heidelberg : Springer, 2010

Abbildungsverzeichnis

- | | | |
|---|--|----|
| 1 | Qualitative Darstellung der radialen Grundzustandswellenfunktion R_{00} zu E_1 mit $e = \hbar = m = C = 1$ | 33 |
| 2 | Qualitative Darstellung der radialen Grundzustandswellenfunktionen R_{01} und R_{10} zu E_2 mit $e = \hbar = m = C = 1$ | 33 |
| 3 | Qualitative Darstellung der radialen Grundzustandswellenfunktionen R_{02} , R_{11} und R_{20} zu E_3 mit $e = \hbar = m = C = 1$ | 34 |

Tabellenverzeichnis

- | | | |
|---|--|----|
| 1 | SUSY Operatoren Q [KS97, S.23] | 7 |
| 2 | Entartung der Radialwellenfunktionen anhand der Hauptquantenzahl N mit Richtung des Aufsteigeoperator B^+ und Absteigeoperator B^- | 31 |