Bachelorarbeit

# Neutrinoloser Doppelbetazerfall jenseits des Standardmodells

Adrian Finke
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für theoretische Physik

Erstprüfer: Priv.-Doz. Dr. Karol Kovařík
Zweitprüfer: Prof. Dr. Anna Kulesza

Münster, 5. Februar 2023

# Inhaltsverzeichnis


**1 Einleitung** **2**

**2 Gruppentheorie** **4**
2.1 Darstellungen der Lorentz-Gruppe . . . . . 4
2.1.1 Lie-Algebra und Kommutatorrelationen . . . . . 4
2.1.2 Die (0,0)-Darstellung . . . . . 5
2.1.3 Die $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$-Darstellung . . . . . 5
2.2 Die Poincaré-Gruppe . . . . . 6

**3 Majorana-Fermionen** **7**
3.1 Majorana-Spinoren . . . . . 7
3.2 Kandidaten für Majorana-Fermionen . . . . . 8

**4 Doppelbetazerfall – Die Suche nach Majorana-Neutrinos** **9**

**5 Berechnung der Rate des neutrinolosen Doppelbetazerfalls** **12**
5.1 Die leptonischen und hadronischen Tensoren . . . . . 12
5.2 Der Phasenraum Faktor . . . . . 16
5.3 Das Kernmatrixelement und die effektive Majorana-Masse . . . . . 17

**6 Massive Neutrinos und dunkle Materie** **19**
6.1 Neutrinooszillation . . . . . 19
6.2 Mechanismen zur Erzeugung von Neutrinomassen . . . . . 20
6.3 Hinweise auf dunkle Materie . . . . . 21
6.4 Kandidaten für dunkle Materie . . . . . 22

**7 Das „scotogenic model“** **24**
7.1 Modell Beschreibung . . . . . 24
7.2 Elektroschwache Symmetriebrechung . . . . . 25
7.3 Feynman-Regeln . . . . . 26
7.4 Neutrinomassen . . . . . 27
7.5 Neutrinoloser Doppelbetazerfall im scotogenic model . . . . . 29

**8 Zusammenfassung und Ausblick** **30**

**A Code zur Näherung** **31**

# Kapitel 1

# Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem neutrinolosen Doppelbetazerfall jenseits des Standardmodells. Dabei ist es das Ziel, die Übergangsrate des Zerfalls zu berechnen. Die Übergangsrate lässt sich in die drei Teile Phasenraum Faktor, Kernmatrixelement und effektiven Majorana-Masse aufteilen. Die effektive Majorana-Masse ist von den Neutrinomassen abhängig. Daher wird die Neutrinomassenmatrix am Ende der Arbeit in einem minimal dark matter model, dem sogenannten „scotogenic Model“ bestimmt.

In Kapitel 2 werden die gruppentheoretischen Grundlagen beschrieben. Weiterhin werden in diesem Kapitel die Weyl-Spinoren eingeführt, denn es ist wichtig, den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Spinoren (Weyl, Dirac und Majorana) zu verstehen. In der gesamten Arbeit ist dies eine Grundlage. Besonders genutzt wird der Zusammenhang der Spinoren auch in Kapitel 7.3, wenn die Feynman-Regeln des „scotogenic Model's“ abgeleitet werden.

Der neutinolose Doppelbetazerfall kann nur ablaufen, wenn Neutrinos Majorana-Fermionen sind. Daher werden in Kapitel 3 Majorana-Fermionen beschrieben. Zuerst wird erklärt, wie sich Dirac-Spinoren, aus Weyl-Spinoren zusammensetzen. Danach werden aus den Dirac-Spinoren die Majorana-Spinoren, welche Majorana-Fermionen beschreiben, abgeleitet. Außerdem stellt sich raus, dass die einzigen Teilchen des Standardmodells, welche Majorana-Teilchen sein könnten, die Neutinos sind.

Das nächste Kapitel zeigt, wie experimentell bestätigt werden kann, ob das Neutrino ein Majorana-Fermion ist. Es zeigt sich, dass es nicht möglich ist, solche Experimente mit Reaktor Neutrinos durchzuführen, da der Prozess, welcher Majorana-Neutrinos bestätigen würde, mit $\frac{m_\nu^2}{E^2}$ unterdrückt ist. Als mögliches Experiment wird daher der neutrinolose doppel Betazerfall erläutert.

Die Rate des neutrinolosen doppel Betazerfalls wird dann in Kapitel 5 bestimmt. Im ersten Abschnitt 5.1 wird der leptonische Tensor berechnet. Zum Schluss des Abschnitts ist es möglich, die Zerfallsrate in drei Teile aufzuteilen. Abschnitt 5.2 beschäftigt sich mit dem ersten Teil der Zerfallsrate, dem Phasenraum Faktor und Abschnitt 5.3 beschäftigt sich mit dem zweiten Teil, dem Kernmatrixelement und dem dritten Teil, der effektiven Majorana-Masse. Für die effektive Majorana-Masse wird schon angenommen, dass die Neutrinos eine Masse haben. Dies widerspricht allerdings dem Standardmodell, indem angenommen wird, dass die Neutrinos masselos seien. Neutrinooszillationsversuche haben jedoch bereits gezeigt, dass die Neutrinos eine endliche Masse besitzen. In Kapitel 6 geht es daher in den Abschnitten 6.1 und 6.2 um die Hinweise auf Neutrinomassen und wie Neutrinomassen dem Standardmodell auf eine natürliche Weise

hinzugefügt werden können. Weiterhin werden in Abschnitt 6.3 und 6.4 Hinweise auf dunkle Materie aufgezeigt und mögliche Kandidaten für dunkle Materie beschrieben.

Somit ist klar, dass das Standardmodell verändert werden muss um massive Neutrinos und dunkle Materie beschreiben zu können. In Kapitel 7 wird daher das „scotogenic model“ eingeführt. Dieses fügt dem Standardmodell nur drei fermionische Singlets, ein geladenes skalares Doublet und eine $Z_2$-Symmetrie hinzu. Dieses Modell kann massive Neutrinos und dunkle Materie erklären. Die Masse der Neutrinos wird durch Strahlungskorrekturen generiert, dadurch sind die Neutrinomassen auch direkt klein, im Vergleich zu den anderen Massen des Standardmodells. Weiterhin gibt es einen Kandidat für dunkle Materie — das leichteste neu hinzugefügte Teilchen. Es wird dann die elektroschwache Symmetrie gebrochen, um die Massen des neu hinzugefügten skalaren Teilchens zu bekommen. Danach werden Feynman-Regeln für das neue Modell abgeleitet. Mit den Feynman-Regeln wird schließlich in Abschnitt 7.4 die Massenmatrix der Neutrinos bestimmt.

# Kapitel 2

# Gruppentheorie

Dieses Kapitel erklärt die gruppentheoretischen Grundlagen. Außerdem führt es die Weyl-Spinoren ein und erläutert welche Darstellung der Gruppe Lorentz-Gruppe auf die Weyl-Spinoren wirkt. Das Kapitel basiert auf [1].

Die beiden Basisannahmen der speziellen Relativitätstheorie lauten:

1. Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich.
2. „Die Physik“ ist in allen Inertialsystemen gleich.

Diese können in der Gruppentheorie als Symmetriebedingungen genutzt werden. Die Gruppe, welche alle Transformationen, die die Symmetriebedingungen nicht verletzen (Drehungen, Boosts und Translationen) zusammenfasst, wird Poincaré-Gruppe genannt. Da unsere Systeme unter den Transformationen, welche die Symmetriebedingungen nicht verletzen, invariant sein sollte, sollten auch unsere Gleichungen unter Transformationen, der Poincaré-Gruppe invariant bleiben. Damit ist auch direkt sichergestellt, dass die Theorie nicht der speziellen Relativitätstheorie widerspricht.

Allerdings ist die Poincaré-Gruppe nicht einfach zusammenhängend, daher muss die Überlagerung der Poincaré-Gruppe betrachtet werden, um die irreduzieblen Darstellungen herzuleiten. Die irreduzieblen Darstellungen sind von Interesse, da dies die Bausteine der Darstellungen der Gruppe sind. Die Darstellungen können dann genutzt werden, um Teilchen und Felder zu beschreiben. Dabei beschreiben unterschiedliche Darstellungen Spin 0, $\frac{1}{2}$ oder Spin 1 Teilchen.

## 2.1 Darstellungen der Lorentz-Gruppe

### 2.1.1 Lie-Algebra und Kommutatorrelationen

Die Lorentz-Gruppe ist ein Teil der Poincaré-Gruppe (Rotationen und Boosts) und beinhaltet alle Transformationen $\Lambda$, die das innere Produkt des Minkowski-Raums $x^\mu x_\mu$ invariant lassen. Mit der Metrik $\eta$ des Minkowski-Raums müssen die Transfomationen

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{2.1}$$

erfüllen. Die Lorentz-Gruppe ist nicht einfach zusammenhängend, das liegt daran, dass der Paritäts- und der Zeitumkehroperator diskret sind. Der Teil der Lorentz-Gruppe, welcher die Orientierung der Koordinatensystems und die Zeitrichtung erhält, wird

orthochrone Lorentz-Gruppe genannt. Für die orthochrone Lorentz-Guppe lassen sich folgende Kommutatorrelationen extrahieren

$$[J_i, J_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} J_k \tag{2.2}$$
$$[J_i, K_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} K_k \tag{2.3}$$
$$[K_i, K_j] = -\mathrm{i}\epsilon_{ijk} J_k \ . \tag{2.4}$$

Dabei sind $J_i$ Drehgeneratoren und $K_i$ Boostgeneratoren. Es ist jedoch möglich zwei neuen Operatoren

$$N_i^{\pm} = \frac{1}{2}(J_i \pm \mathrm{i}K_i) \tag{2.5}$$

einzuführen, welche unter dem Kommutator abgeschlossen sind und miteinander kommutieren

$$\left[N_i^+, N_j^+\right] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} N_k^+ \tag{2.6}$$
$$\left[N_i^-, N_j^-\right] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} N_k^- \tag{2.7}$$
$$\left[N_i^+, N_j^-\right] = 0 \ . \tag{2.8}$$

Hier fällt auf, dass die Lorentz-Gruppe in gewissem Sinne aus zwei Kopien der SU(2)-Gruppe besteht, da diese einfach nur zwei mal die Kommutatorrelationen der Lie-Algebra der SU(2)-Gruppe sind.

### 2.1.2 Die (0,0)-Darstellung

In der (0,0)-Darstellung sind die beiden Vektorräume der Lie-Algebras eindimensional. Die Generatoren dieser Darstellung sind daher Zahlen und die einzige Zahl, welche die Kommutatorrelationen erfüllt, ist die 0. Transformationen auf Objekte dieser Darstellungen sind daher $e^0 = 1$. Es lässt sich daraus schließen, dass Objekte welche durch die (0,0)-Darstellung beschrieben werden unter Lorentz-Transformationen invariant sind.

### 2.1.3 Die $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$-Darstellung

Mathematisch ist $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \bigotimes \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Außerdem kommutieren die beiden Kopien der SU(2) Lie-Algebra mit einander, daher transformieren die Objekte, auf die diese Darstellung wirkt, separat unter den einzelnen Kopien der SU(2)-Gruppe.

Die $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$-Darstellung und die $\left(0, \frac{1}{2}\right)$-Darstellung sind sich sehr ähnlich. Beide wirken auf zwei komponentige Objekte. Dabei werden die Objekte, auf die die $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$-Darstellung wirkt, links chirale Spinore und die Objekte, auf die die $\left(0, \frac{1}{2}\right)$-Darstellung wirkt, werden rechts chirale Spinore genannt. Der Oberbegriff dieser Spinore ist Weyl-Spinore. Links chirale Spinoren transformieren dabei gemäß:

$$R_\theta = \exp\left(\mathrm{i}\vec{\theta}\,\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \tag{2.9}$$
$$B_\phi = \exp\left(\vec{\phi}\,\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \ . \tag{2.10}$$

Rechts chirale Spinoren transformieren unter Drehung $R_\theta$ genauso wie links chirale Spinoren. Sie unterscheiden sich jedoch bei Boosts $B_\phi$. Für rechts chirale Spinoren gilt:

$$R_\theta = \exp\left(\mathrm{i}\vec{\theta}\,\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \tag{2.11}$$

$$B_\phi = \exp\left(-\vec{\phi}\,\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) . \tag{2.12}$$

Die Objekte in diesen Darstellungen werden links bzw. rechts chirale Spinoren genannt, da die Transformationen der $\left(\frac{1}{2},0\right)$-Darstellung unter Paritätstransformation $P$ der Transformationen der $\left(0,\frac{1}{2}\right)$-Darstellung entsprichen und umgekehrt. Dies ist anhand von Boosts leicht zusehen:

$$B_{\phi,\,\left(\frac{1}{2},0\right)} = \exp\left(\vec{\phi}\,\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \xrightarrow{P} \exp\left(-\vec{\phi}\,\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) = B_{\phi,\,\left(0,\frac{1}{2}\right)} \tag{2.13}$$

$$B_{\phi,\,\left(0,\frac{1}{2}\right)} = \exp\left(-\vec{\phi}\,\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \xrightarrow{P} \exp\left(\vec{\phi}\,\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) = B_{\phi,\,\left(\frac{1}{2},0\right)} \tag{2.14}$$

Die Objekte auf die die $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$-Darstellung wirkt, setzten sich nun aus einem links chiralen und einem rechts chiralem Spinor zusammen. Insgesamt ergibt sich dann ein vier komponentiges Objekt. Damit ist die $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$-Darstellung die Vierervektor-Darstellung.

## 2.2 Die Poincaré-Gruppe

Wie schon zuvor erwähnt, besteht die Poincaré-Gruppe aus der Lorentz-Gruppe und Translationen in Raum und Zeit. Die Lie-Algebra dieser Gruppe wird daher bedeutend komplizierter als die der Lorentz-Gruppe. Daher wird $M_{\mu\nu}$ mit $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}$ und $K_i = M_{0i}$ zur Vereinfachung eingeführt. Damit lässt sich die Lie-Algebra schreiben als:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -\mathrm{i}\left(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right) \tag{2.15}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{2.16}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = \mathrm{i}\left(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu\right) . \tag{2.17}$$

Die Darstellungen der Poincaré-Gruppe werden durch die Eigenwerte des Casimir-Operators gelabelt. Dies sind dann Masse und Spin des Teilchens. Somit wird ein Teilchen der Masse $m$ und Spin 0 durch die $m$, Spin-0-Darstellung der Poincaré-Gruppe beschrieben. Die (0,0)-Darstellung wird Spin-0-Darstellung genannt, die $\left(\frac{1}{2},0\right)\bigoplus\left(0,\frac{1}{2}\right)$-Darstellung wird Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellung genannt und die $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$-Darstellung entspricht der Spin-1-Darstellung.

# Kapitel 3

# Majorana-Fermionen

In Kapitel 2 wurden Weyl-Spinoren eingeführt, welche die Grundlage für die mathematische Beschreibung von Majorana-Fermionen bilden. Sie bilden die Grundlage, da Majorana-Fermionen durch Majorana-Spinoren beschrieben werden, welche aus zwei voneinander abhängigen Weyl-Spinoren bestehen. Auf dieser Basis ist es also möglich Majorana-Fermionen zu erklären. Dieses Kapitel orientiert sich an [2].

## 3.1 Majorana-Spinoren

Wollen wir ein physikalisches System beschreiben, welches unter Paritätstransformation invariant ist, so müssen wir ein Objekt nutzen, welches aus einem rechts-chiralen und einem links-chiralen Spinor besteht. Das liegt daran, dass eine Transformation in der $(\frac{1}{2},0)$-Darstellung nach Paritätstransformation der ursprünglichen Transformation aber in der $(0,\frac{1}{2})$-Darstellung entspricht (siehe Gleichungen (2.13) und (2.14)). Das einfachste Objekt welches aus einem rechts-chiralen und einem links-chiralen Spinor besteht, ist der Dirac-Spinor:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} . \tag{3.1}$$

Majorana-Spinoren sind nun Spezialfälle von Dirac-Spinoren. Nämlich solche bei denen $\chi_L$ und $\xi_R$ nicht unabhängig voneinander sind. Die Dirac-Spinoren gehorchen der Dirac-Gleichung

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \delta_\mu - m)\Psi = 0 . \tag{3.2}$$

Für den Majorana-Spinor ist also ein Spinor gesucht bei dem $\chi_L = f(\xi_R)$ nicht nur an einem beliebigen Zeitpunkt gilt sondern auch, wenn der Spinor in der Zeit durch die Dirac-Gleichung vorangetrieben wird. Es ergibt sich damit für den Majorana-Spinor:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_L \\ -\mathrm{i}\sigma_2 \chi_L^* \end{pmatrix} . \tag{3.3}$$

Eine wichtige Eigenschaft der Majorana-Spinoren ist, dass diese unter Ladungskonjugation invariant sind. Das bedeutet, es gilt

$$\Psi_M^C = \mathrm{i}\gamma^2 \Psi_M = \Psi_M . \tag{3.4}$$

Mathematisch kann durch Ladungskonjugation aus einem Teilchen sein Antiteilchen erzeugt werden. Es ist also zu erkennen, das Majorana-Teilchen ihre eigenen Antiteilchen sind. Dies ist auch der Grund, warum zwei Freiheitsgrade aus der Dirac-Gleichung

entfallen. Die Dirac-Gleichung beschreibt immer das Teilchen selbst und das Antiteilchen. Hier sind unterschieden sich Teilchen und Antiteilchen jedoch nicht. Es werden daher weniger Freiheitsgrade benötigt.

## 3.2 Kandidaten für Majorana-Fermionen

Majorana-Teilchen müssen eine Masse haben, da sonst eine Unterscheidung zwischen Majorana-Teilchen und Dirac-Teilchen irrelevant wird. Außerdem müssen sie Spin $\frac{1}{2}$ besitzen, da sie sonst nicht durch die Dirac-Gleichung beschrieben werden würden. Da wie vorher erklärt, für Majorana-Teilchen $\Psi^C = \Psi$ gilt, sollte die Dirac-Gleichung für $\Psi^C$ und für $\Psi$ gleich aussehen. Nimmt man jedoch als Beispiel an, dass das Teilchen den elektromagnetischen Wechselwirkungen unterliegt, so ergibt sich für die Dirac-Gleichung von $\Psi$

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu(\delta_\mu + \mathrm{i}qA_\mu) - m)\Psi = 0 \ . \tag{3.5}$$

Für $\Psi^C$ hat die Gleichung die Form:

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu(\delta_\mu - \mathrm{i}qA_\mu) - m)\Psi^C = 0 \ . \tag{3.6}$$

Es ist festzustellen, dass $\Psi = \Psi^C$ nur gelten kann, wenn $q = 0$ ist, da die beiden Gleichungen sonst im Widerspruch zueinander stehen würden. Genauso verhält es sich mit allen Gauge-Feldern. Ein Majorana-Teilchen besitzt also keine Gauge-Ladungen. Somit ist das Neutrino das einzige Teilchen des Standardmodels welches ein Majorana-Teilchen sein könnte.

# Kapitel 4

# Doppelbetazerfall – Die Suche nach Majorana-Neutrinos

Es stellt sich nun die Frage, wie getestet werden kann, ob Neutrinos Majorana-Fermionen sind oder nicht. Dafür muss lediglich überprüft werden, ob das Antineutrino und das Neutrino das gleiche Teilchen sind. Es wird aber klar, dass dies keine einfache Aufgabe ist.

Ein Unterschied zwischen Neutrinos und Antineutrinos ist, dass Antineutrinos unter schwachen Wechselwirkungen Leptonen erzeugen, Neutrinos erzeugen allerdings Anti-Leptonen. Daraus folgt im Standardmodell, dass es Leptonenzahlerhaltung gibt. Sind Anitneutinos und Neutrinos allerdings gleich, so könnte einmal ein Antineutrino und ein Elektron erzeugt werden und in einem anderen Prozess ein Neutrino und ein weiteres Elektron, löschen sich die beiden Neutrinos aus, so wäre die Leptonenzahl nach dem Prozess gleich zwei. Vor dem Prozess lag sie allerdings bei Null. Die Leptonenzahlerhaltung wurde somit verletzt.

Das Problem bei solch einem Prozess ist allerdings, dass Chiralität keine Erhaltungsgröße sein darf (siehe [2, Kapitel 3.1]). Ist $m << E$ so sind Chiralität und Helizität äquivalent. Es ist daher ersichtlich, dass der Prozess bei hoher Energie stark unterdrückt sein wird. Aus der Rechnung (siehe dazu [2, Seite 9] ) folgt, dass der Prozess mit einem Faktor von $\frac{m_\nu^2}{E^2}$ unterdrückt ist. Die Masse der Neutrinos ist kleiner als 1 eV. Bei der Verwendung von Neutrinos aus Reaktoren (Energie im MeV-Bereich), würde nur jedes $10^{12}$ Teilchen die auf diese Weise wechselwirken. Dieser Wert ist weit außerhalb der Reichweite von heutigen Reaktorversuchen, diese messen nämlich nur einige hundert Wechselwirkungen am Tag.

Ein Prozess der den großen Hintergrund der Leptonenzahl erhaltenden Prozesse reduziert ist der neutrinolose Doppelbetazerfall ($0\nu2\beta$-Zerfall). Der Vorteil ist hier, dass der Leptonenzahl erhaltende Prozess den Atomkern nicht verändert. Denn es müsste ein Proton in ein Neutron, ein Positron und ein Neutrino zerfallen und zudem ein Neutron in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino zerfallen. Am Ende des Prozesses ist der Kern somit wieder im Anfangszustand angekommen. Da der Atomkern vor und nach dem Prozess gleich ist, wird auch keine Energie freigesetzt um die Elektronen zu erzeugen, daher wird der Prozess stark unterdrückt. Läuft allerdings der Leptonenzahl verletzende Prozess ab (siehe Abbildung 4.1), so zerfallen zwei Neutronen in zwei Protonen, zwei Elektronen und zwei Antineutrinos. Nach Ablauf des Prozesses ist der Kern also in einem anderen Zustand als vor dem Prozess. Dadurch kann Energie für

die Elektronen freigesetzt werden.

Man könnte meinen, der doppel Betazerfall wäre ein seltener Prozess bei dem zwei Betazerfälle zufällig gleichzeitig ablaufen müssten. Dies ist jedoch nicht der Fall, da es für die Atomkerne energetisch günstig ist, wenn die Protonenanzahl und die Neutronenanzahl gerade sind. Solche Kerne werden gg-Kerne genannt. Würde ein gg-Kern über den einfachen Betazerfall zerfallen, so würde er in einen uu-Kern zerfallen, das ist ein Kern bei dem die Protonenanzahl und die Neutronenanzahl ungerade sind. Dies ist für den Kern energetisch aber ungünstig und so kann er nicht über den einfachen Betazerfall zerfallen.

Der Untergrund des Leptonenzahl erhaltenden Prozessen wird zwar unterdrückt — jedoch gibt es eine weitere Variante des Doppelbetazerfalls, welche für einen Untergrund in den Messdaten sorgt. Die andere Variante ist der Zwei-Neutrino-Doppelbetazerfall ($2\nu2\beta$-Zerfall). Bei diesem zerfallen auch zwei Neutronen in zwei Protonen, zwei Elektronen und zwei Antineutrinos (siehe Abbildung 4.1). Jedoch zerstrahlen bei diesem Prozess die beiden Neutrinos nicht. Somit ist eine Änderung der Chiralität nicht mehr Nötig, dieser Prozess läuft daher etwa $10^6$ mal schneller ab.

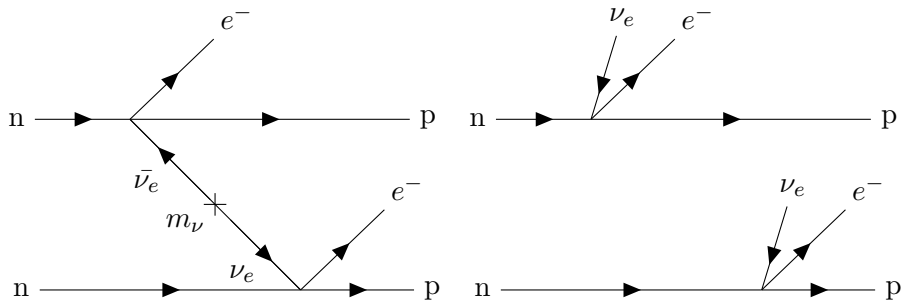



Abbildung 4.1: Die Abbildung zeigt die Feynmandiagramme des $0\nu2\beta$-Zerfall (links) und des $2\nu2\beta$-Zerfall (rechts).

Um den $0\nu2\beta$-Zerfall zu messen, wird ausgenutzt, dass der Prozess praktisch aus zwei Zwei-Teilchen-Prozessen besteht. Die freigesetzte Energie teilt sich nämlich nicht auf Neutrino und Elektron auf sondern wird ganz von dem Elektron absorbiert. Daher ist das Energiespektrum der Elektronen des $0\nu2\beta$-Zerfall diskret. Anders ist dies bei dem $2\nu2\beta$-Zerfall. Hier teilt sich die Energie zufällig auf das Neutrino und das Elektron auf, somit ergibt sich für die Elektronen kein diskretes sondern ein breites Spektrum (siehe Abbildung 4.2). Misst man also das Energiespektrum der Elektronen, so würde sich der $0\nu2\beta$-Zerfall am Ende des Spektrums als Peak zeigen. Der Peak ist wegen der geringen Zerfallsrate nur sehr klein, weshalb eine gute Energieauflösung für die Messung essenziell ist.

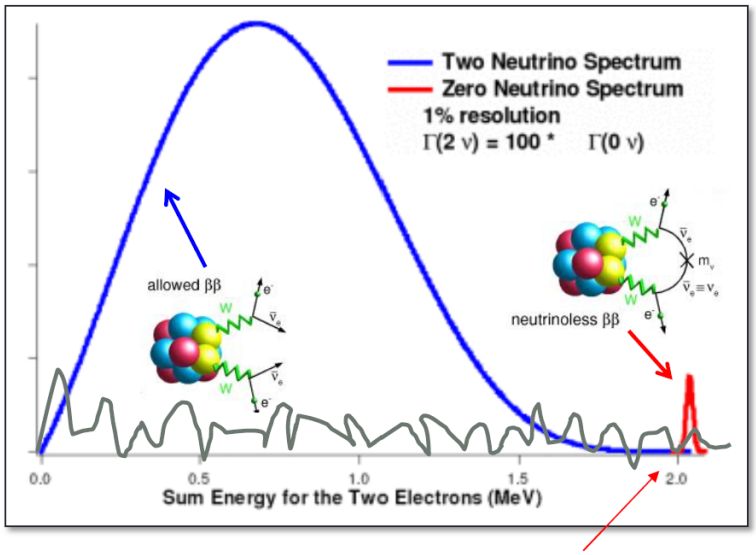



Abbildung 4.2: Die Abbildung zeigt das Spektrum des Doppelbetazerfalls (entnommen aus [2]).

# Kapitel 5

# Berechnung der Rate des neutrinolosen Doppelbetazerfalls

## 5.1 Die leptonischen und hadronischen Tensoren

Die folgende Rechnung basiert auf [2] und [3, Kapitel 7.6.1]. Der effektive Hamilton-Operator des Prozesses lautet

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= (\sqrt{2}G_F\cos\theta_c)^2(\bar{e_L}\gamma_\mu\nu_L)(-\bar{\nu_L^c}\gamma_\nu e_L^c) \\ &\quad\times[\bar{p}\gamma^\mu(1-g_A\gamma_5)n][\bar{p}\gamma^\mu(1-g_A\gamma_5)n]\ . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Das an dem einen Vertex emittierte Neutrino wird an einem anderen Vertex wieder absorbiert. Daher werden die beiden $\nu$-Felder durch folgenden fermionsichen Propagator ersetzt

$$\frac{\not{k}+m}{k^2-m^2}\ . \tag{5.2}$$

Das Matixelement für den neutrinolosen Doppelbetazerfall ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} M &= -2G_F^2|V_{ud}|^2\sum_n\int\frac{\mathrm{d}^4k_\nu}{(2\pi)^4}\bar{u}(p_1)\frac{1-\gamma_5}{2}\gamma_\mu\frac{\not{k}_\nu+m_\nu}{k_\nu^2-m_\nu^2}\gamma_\nu\frac{1-\gamma_5}{2}v(p_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_\nu.r} \\ &\quad\times\langle N_i|J^\mu|n\rangle\langle n|J^\nu|N_f\rangle 2\pi\delta(k_0-E_{1i}+E_{1n}+\epsilon_1) \\ &= -2G_F^2|V_{ud}|^2\sum_n L^n_{\mu\nu}H_n^{\mu\nu}\ . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dabei sind $|n\rangle$ die Zwischenzustände des Nucleus über welche hier summiert werden muss. Die beiden Nucleonen $N_1$ und $N_2$ haben den Abstand $r$. Weiterhin ist $E_{1i}$ die Energie des Nucleus $N_1$ im Anfangszustand, $E_{1n}$ die Energie des Nucleus $N_1$ im Endzustand und $\epsilon_1$ die Energie des emittierten Elektrons. Wie man sieht ist es möglich die Amplitude in einen Leptonischen- $L_{\mu\nu}$ und einen Hadronischen-Teil $H^{\mu\nu}$ aufzuteilen. Dabei ist es sehr schwierig den Hadronischen-Teil zu berechnen. Dies würde den Rahmen dieser Thesis sprengen.

Es fällt nun auf, dass der Term um $\not{k}_\nu$ wegfällt. Dies liegt daran, dass

$$\frac{1-\gamma_5}{2}\gamma_\mu\not{k}_\nu\gamma_\nu\frac{1-\gamma_5}{2} = \gamma_\mu\not{k}_\nu\gamma_\nu\frac{1+\gamma_5}{2}\frac{1-\gamma_5}{2} = 0 \tag{5.4}$$

Es wurde verwendet, das $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ und das $\gamma^5\gamma^5 = \mathbb{1}$ ist. Außerdem ergibt sich durch $k_\nu^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$:

$$\frac{1}{k_\nu^2-m_\nu^2} = \frac{1}{(E_{1i}-E_{1n}-\epsilon_1)^2-\epsilon_\nu^2}\ . \tag{5.5}$$

Dies lässt sich mithilfe von Energieerhaltung $E_{1i} + E_{2i} = E_{1n} + E_{2n} + E_1 + E_2$ weiter umschreiben zu

$$= \frac{1}{2\epsilon_\nu}\left(\frac{1}{E_{1i} - E_{1n} - E_1 - \epsilon_\nu} + \frac{1}{E_{2i} - E_{2n} - E_2 - \epsilon_\nu}\right) . \tag{5.6}$$

Weiterhin kann die Identität $\gamma^\mu\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ verwendet werden. Für die wichtigsten Übergange also $0^+ \to 0^+$ ist es ausreichend nur den Term $\eta^{\mu\nu}$ zu behalten. Damit ergibt sich für den Leptonischen-Teil:

$$\begin{aligned} L_n^{\mu\nu} &= m_\nu \eta^{\mu\nu} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(E_{1i} - E_{1n} - \epsilon_1)^2 - \epsilon_\nu^2} \\ &\qquad \cdot \bar{u}(p_1)\frac{1-\gamma_5}{2} v(p_2) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_\nu r} \qquad (5.7) \\ &= m_\nu \eta^{\mu\nu} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \sum_\kappa \frac{1}{2\epsilon_\nu} \frac{1}{E_{\kappa i} - E_{\kappa n} - \epsilon_\kappa - \epsilon_\nu} \\ &\qquad \cdot \bar{u}(p_1)\frac{1-\gamma_5}{2} v(p_2) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_\nu r} . \qquad (5.8) \end{aligned}$$

Wichtig ist hier anzumerken, dass die Integration über $k_0$ von der Delta-Distribution $2\pi\delta(k_0 - E_{1i} + E_{1n} + \epsilon_1)$ aus Gleichung (5.3) vernichtet wurde.

Um die Summe über die Zwischenzustände zu berechnen wird genähert. Dabei wird angenommen, dass alle Zwischenzustände ungefähr die Energie des mittleren Zwischenzustandes haben $E_{\kappa n} \approx \langle E \rangle$. Diese Näherung sollte für den $0\nu2\beta$-Zerfall eine gute Näherung sein, da die Neutrinoenergie im virtuellen Zustand deutlich größer ist als die normale Energie der relevanten Kernniveaus. Die Summe vereinfacht sich damit stark wie folgt:

$$\sum_n \frac{\langle N_f|J_1|n\rangle\langle n|J_2|N_i\rangle}{E_{\kappa i} - E_{\kappa n} - \epsilon_\kappa - \epsilon_\nu} \to \frac{\langle N_f|J_1 \sum_n(|n\rangle\langle n|)J_2|N_i\rangle}{E_{\kappa i} - \langle E\rangle - \epsilon_\kappa - \epsilon_\nu} . \tag{5.9}$$

Da die Zustände $|n\rangle$ einen vollständigen Satz an Zuständen bilden ist $\sum_n(|n\rangle\langle n|) = 1$. Somit folgt

$$\frac{\langle N_f|J_1 \sum_n(|n\rangle\langle n|)J_2|N_i\rangle}{E_{\kappa i} - \langle E\rangle - \epsilon_\kappa - \epsilon_\nu} = \frac{\langle N_f|J_1 J_2|N_i\rangle}{E_{\kappa i} - \langle E\rangle - \epsilon_\kappa - \epsilon_\nu} . \tag{5.10}$$

Dadurch ist es nun möglich die Summe $\sum_n L_{\mu\nu}^n H_n^{\mu\nu}$ aus Gleichung (5.3) in einen leptonischen und einen hadronischen Tensor zu faktorisieren

$$M = -2G_F^2 |V_{ud}|^2 L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} . \tag{5.11}$$

Weiterhin muss man das Matrixelement quadrieren und über die Spins summieren

$$\langle |M|^2 \rangle = 4G_F^4 |V_{ud}|^4 \left(\sum_{\text{Spins}} L_{\sigma\rho} L_{\mu\nu}\right) (H^{\sigma\rho} H^{\mu\nu}) . \tag{5.12}$$

Um die Summe über die Spins zu berechnen wird der leptonische Tensor in zwei Teile aufgeteilt.

$$L_{\mu\nu} = m_\nu \eta_{\mu\nu} \bar{u}(p_1)\frac{1-\gamma_5}{2} v(p_2) \cdot \frac{1}{2\pi} F(r) \tag{5.13}$$

Dabei ist

$$F(r) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^2} \sum_\kappa \frac{1}{2\epsilon_\nu} \frac{1}{E_{\kappa i} - E_{\kappa n} - \epsilon_\kappa - \epsilon_\nu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_\nu . r} \ . \tag{5.14}$$

Dieses Integral hat jedoch keinen Einfluss auf die Spinsumme. Es folgt nun also:

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{Spins}} L_{\mu\nu} L_{\sigma\rho} &= \sum_{\text{Spins}} [m_\nu \eta_{\mu\nu} \bar{u}_a(p_1) \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)_{ab} v_b(p_2)] \\
&\qquad [m_\nu \eta_{\mu\nu} \bar{u}_c(p_1) \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)_{cd} v_d(p_2)]^\dagger \left(\frac{1}{2\pi} F(r)\right)^2 && (5.15) \\
&= \sum_{\text{Spins}} m_\nu^2 [\eta_{\mu\nu} \bar{u}_a(p_1) \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)_{ab} v_b(p_2)] \\
&\qquad [v_d^\dagger(p_2) \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)_{cd} \bar{u}_c^\dagger(p_1) \eta_{\sigma\rho}] \left(\frac{1}{2\pi} F(r)\right)^2 && (5.16) \\
&= \sum_{\text{Spins}} m_\nu^2 [\eta_{\mu\nu} \bar{u}_a(p_1) \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)_{ab} v_b(p_2)] \\
&\qquad [v_d^\dagger(p_2) \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)_{cd} \gamma^0 u_c(p_1) \eta_{\sigma\rho}] \left(\frac{1}{2\pi} F(r)\right)^2 && (5.17) \\
&= \sum_{\text{Spins}} m_\nu^2 \eta_{\mu\nu} \bar{u}_a(p_1) \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)_{ab} (\not{p}_2 - m_e)_{bd} \\
&\qquad \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)_{cd} u_c(p_1) \eta_{\sigma\rho} \left(\frac{1}{2\pi} F(r)\right)^2 && (5.18) \\
&= m_\nu^2 \eta_{\mu\nu} (\not{p}_1 + m_e)_{ac} \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)_{ab} (\not{p}_2 - m_e)_{bd} \\
&\qquad \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)_{cd} \eta_{\sigma\rho} \left(\frac{1}{2\pi} F(r)\right)^2 && (5.19) \\
&= m_\nu^2 \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho} Tr\left[(\not{p}_1 + m_e) \frac{1-\gamma_5}{2} (\not{p}_2 - m_e) \frac{1+\gamma_5}{2}\right] && (5.20)
\end{aligned}$$

Betrachtet man die Spur genauer, so fällt auf, dass alle Terme wegfallen, außer der in dem beide $\not{p}$ stehen. Dies liegt daran, dass die Spur einer ungeraden Anzahl von Dirac-Matizen gleich null ist. Es folgt dann:

$$\begin{aligned}
&= m_\nu^2 \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho} Tr\left[(\not{p}_1 + m_e) \frac{1-\gamma_5}{2} (\not{p}_2 - m_e) \frac{1+\gamma_5}{2}\right] && (5.21) \\
&= m_\nu^2 \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho} Tr\left[\not{p}_1 \frac{1-\gamma_5}{2} \not{p}_2 \frac{1+\gamma_5}{2} - \not{p}_1 \frac{1-\gamma_5}{2} m_e \frac{1+\gamma_5}{2}\right. \\
&\quad \left. + m_e \frac{1-\gamma_5}{2} \not{p}_2 \frac{1+\gamma_5}{2} - m_e^2 \frac{1-\gamma_5}{2} \frac{1+\gamma_5}{2}\right] && (5.22) \\
&= m_\nu^2 \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho} Tr\left[\not{p}_1 \frac{1-\gamma_5}{2} \not{p}_2 \frac{1+\gamma_5}{2}\right] && (5.23) \\
&= m_\nu^2 \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho} Tr\left[(p_1)_\alpha \gamma^\alpha (p_2)_\beta \gamma^\beta \frac{1+\gamma_5}{2} \frac{1+\gamma_5}{2}\right] && (5.24) \\
&= m_\nu^2 \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho} (4\eta^{\alpha\beta} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta) && (5.25) \\
&= 4 m_\nu^2 \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho} p_1 p_2 \ . && (5.26)
\end{aligned}$$

Somit sieht das Matrixelement nun wie folgt aus

$$\langle |M|^2 \rangle = 4G_F^4 |V_{ud}|^4 H_\mu^\mu H_\rho^\rho m_\nu^2 2(p_1 p_2) \left[ \frac{1}{4\pi^2} F(r) \right]^2 . \tag{5.27}$$

Für die Zerfallsrate lässt sich nun schreiben:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{2\epsilon_1 (2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{2\epsilon_2 (2\pi)^3} (2\pi) \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - Q) |M|^2 \tag{5.28}$$

$$= \frac{G_F^4 |V_{ud}|^4}{512\pi^7} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{\epsilon_1} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{\epsilon_2} \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - Q) m_\nu^2 p_1 p_2 H_\mu^\mu H_\rho^\rho \left[ F(r) \right]^2 . \tag{5.29}$$

Es wird nun zu Kugelkoordinaten übergegangen

$$= \frac{G_F^4 |V_{ud}|^4}{512\pi^7} \int\int\int \frac{\mathrm{d}|p_1| \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\phi_1}{\epsilon_1} p_1^2 \sin\theta_1 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - Q) m_\nu^2 \int\int\int \frac{\mathrm{d}|p_2| \mathrm{d}\theta_2 \mathrm{d}\phi_2}{\epsilon_2} p_2^2 \sin\theta_2 (\epsilon_1 \epsilon_2 - \vec{p_1}\vec{p_2}) H_\mu^\mu H_\rho^\rho \left[ F(r) \right]^2 . \tag{5.30}$$

Bei der Integration über $\mathrm{d}\phi_1$ und $\mathrm{d}\phi_2$ fallen die ersten beiden Komponenten der Dreiervektoren $\vec{p_1}$ und $\vec{p_2}$ weg, da über die ganze Periode des Kosinus bzw. Sinus integriert wird. Weiterhin kann $p_{1,2} = \sqrt{\epsilon_{1,2}^2 - m_{1,2}^2}$ substituiert werden. Es ergibt sich damit

$$= \frac{G_F^4 |V_{ud}|^4}{64\pi^5} \int\int \mathrm{d}\epsilon_1 \mathrm{d}\theta_1 p_1 \sin\theta_1 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - Q) m_\nu^2 \int\int \mathrm{d}\epsilon_2 \mathrm{d}\theta_2 p_2 \sin\theta_2 (\epsilon_1 \epsilon_2 - p_1 p_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2) H_\mu^\mu H_\rho^\rho \left[ F(r) \right]^2 \tag{5.31}$$

$$= \frac{G_F^4 |V_{ud}|^4}{32\pi^5} \int\int \mathrm{d}\epsilon_1 \mathrm{d}\theta_1 p_1 \sin\theta_1 m_\nu^2 p_2 \epsilon_1 \epsilon_2 H_\mu^\mu H_\rho^\rho \left[ F(r) \right]^2 \tag{5.32}$$

$$= \frac{G_F^4 |V_{ud}|^4}{16\pi^5} \int \mathrm{d}\epsilon_1 m_\nu^2 p_1 p_2 \epsilon_1 \epsilon_2 H_\mu^\mu H_\rho^\rho \left[ F(r) \right]^2 . \tag{5.33}$$

Es muss nun jedoch beachtet werden, dass alle Masseneigenzustände einen Beitrag zu dem Matrixelement liefern. Daher ergibt sich das Matrixelement durch:

$$M_i = X (U_{ei})^2 m_{\nu i} . \tag{5.34}$$

Dabei wird alles aus Gleichung (5.27), außer $m_\nu$, in $X$ zusammengefasst. Es muss über die Beiträge der verschiedenen Masseneigenzustände summiert werden. Somit folgt für das Betragsquadrat des Matrixelements:

$$|M^2| = \left| X \sum_i (U_{ei})^2 m_{\nu i} \right|^2 . \tag{5.35}$$

Mit der effektiven Majorana-Masse $m_{\beta\beta} = \sum_i (U_{ei})^2 m_{\nu i}$ lässt sich nun die Rate folgendermaßen in drei Teile aufteilen:

$$\Gamma = \left\{ \frac{G_F^4 |V_{ud}|^4}{8\pi^5} \int d\epsilon_1 p_1 p_2 \epsilon_1 \epsilon_2 \right\} \left\{ \frac{1}{2} H_\mu^\mu H_\rho^\rho \left[ F(r) \right]^2 \right\} \left\{ m_{\beta\beta}^2 \right\} . \tag{5.36}$$

Dabei ist der erste Teil der „Phasenraum Faktor“ (G) und der zweite Teil ist das „Kernmatrixelement“ (||M||).

## 5.2 Der Phasenraum Faktor

Das Integral über die Energie läuft von der minimalen Energie eines Elektrons, also $m_e$ bis zur maximalen Energie $T_0 + m_e$. $T_0$ ist hier die maximale kinetische Energie des Elektrons. Es ist also

$$G = \frac{G_F^4 |V_{ud}|^4}{8\pi^5} \int_{m_e}^{T_0+m_e} \mathrm{d}\epsilon_1 p_1 p_2 \epsilon_1 \epsilon_2 \ . \tag{5.37}$$

Durch die Beziehungen $E_2 = T_0 + 2m_e - E_1$ und $p_{1,2} = \sqrt{\epsilon_{1,2}^2 - m_{1,2}^2}$ lässt sich der Phasenraum Faktor wie folgend schreiben

$$\begin{aligned} G &= \frac{G_F^4 |V_{ud}|^4}{8\pi^5} \int_{m_e}^{T_0+m_e} \mathrm{d}\epsilon_1 \epsilon_1 (T_0 + 2m_e - \epsilon_1) \\ &\quad \cdot \sqrt{\epsilon_1^2 - m_e^2} \sqrt{(T_0 + 2m_e - \epsilon_1)^2 - m_e^2} \ . \end{aligned} \tag{5.38}$$

Dieses Integral ist nicht einfach zu lösen. Es ist jedoch möglich $u = \epsilon_1 - \dfrac{T_0 + 2m_e}{2}$ zu substituieren. Führt man noch die Variable $a = \dfrac{T_0 + 2m_e}{2}$ ein, so kommt man zu

$$\begin{aligned} G &= \frac{G_F^4 |V_{ud}|^4}{8\pi^5} \int_{m_e-a}^{a-m_e} \mathrm{d}u (u + a)(a - u) \sqrt{(u + a)^2 - m_e^2} \\ &\quad \cdot \sqrt{(a - u)^2 - m_e^2} \ . \end{aligned} \tag{5.39}$$

Die Stammfunktion dieses Integrals lässt sich durch Mathematica bestimmen. In der Stammfunktion tauchen allerdings elliptische Integrale auf, daher lässt sich das Ergebnis nicht analytisch bestimmen. Genähert ergibt sich jedoch für das bestimmte Integral der Ausdruck:

$$= \frac{G_F^4 |V_{ud}|^4 m_e^5}{8\pi^5} \left( \frac{t_0^5}{30} + \frac{t_0^4}{3} + \frac{4}{3} t_0^3 + 2t_0^2 + t_0 \right) \ . \tag{5.40}$$

Dabei wurde $t_0 = \dfrac{T_0}{m_e}$ eingesetzt. Die für die kinetische Energie der Elektronen vorhandene Energie ist natürlich abhängig von dem verwendetem Nuklid. Je höher die Zerfallsenergie, oder je höher energetisch der rote Peak in Abbildung 4.2 ist, desto höher ist die Zerfallsrate. Diese skaliert sogar mit der fünften Potenz der verfügbaren Energie. Um den neutrinolosen Doppelbetazerfall zu messen, sollten daher Elemente mit hoher Zerfallsenergie verwendet werden.

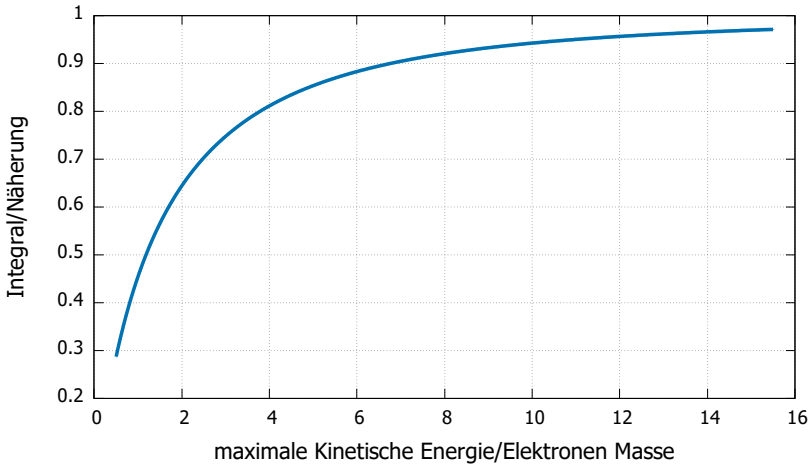



Abbildung 5.1: Der Quotient aus der numerischen Berechnung des Integrals aus Gleichung (5.38) und der genäherten Lösung (Gleichung (5.40)).

In Abbildung 5.1 ist der Quotient aus dem Integral aus Gleichung (5.38) und der Näherung aus Gleichung (5.40) gegen $t_0$ aufgetragen. Es ist zu sehen, dass die Näherung mit wachsender kinetischer Energie der Elektronen immer besser wird. Die Näherung ist also besonders gut für Elemente mit hohen Zerfallsenergien, welche wir ja sowieso betrachten, da hier die Zerfallsrate größer ist.

## 5.3 Das Kernmatrixelement und die effektive Majorana-Masse

Die größte Unsicherheit der Berechnung der Zerfallsrate des $0\nu2\beta$-Zerfalls liegt in dem Kernmatrixelement. Die Berechnung des Kernmatrixelements ist nur schwer möglich. Derzeit stimmen die vorhandenen Berechnungen bis auf einen Faktor von zwei bis drei überein.

Für die effektive Majorana-Masse ist es möglich die Matrix $U_{ei}$ in Form von Mischwinkeln und Phasen anzugeben. Es ergibt sich auf diese Weise:

$$U_{ei} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_a} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{5.41}$$

Daraus ergibt sich dann für die effektive Majorana-Masse folgender Ausdruck

$$m_{\beta\beta} = c_{12}^2 c_{13}^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda_a} m_1 + c_{13}^2 s_{12}^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda_b} m_2 + s_{13}^2 m_3 \, . \tag{5.42}$$

Das einzige Wissen über die Parameter in Gleichung (5.42) stammt aus Oszillations Experimenten. Aus diesen Experimenten geht jedoch nicht die absolute Masse der Neutrinos, sondern nur die quadrierten Unterschiede der Massen hervor. Weiterhin sind noch die Mischwinkel bekannt. Es ist jedoch nichts über die Majorana-Phasen $\lambda_a$ und $\lambda_b$

bekannt. Nun lässt sich Gleichung (5.42) durch bekannte und unbekannte Parameter folgendermaßen schreiben:

$$m_{\beta\beta} = c_{12}^2 c_{13}^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda_a} m_1 + c_{13}^2 s_{12}^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda_b} \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{12}^2} + s_{13}^2 \sqrt{m_1^2 \pm |\Delta m_{13}^2|} \; . \tag{5.43}$$

Dabei sind $\Delta m_{12}$ und $\Delta m_{13}$ die Differenzen der Massen. Für $\Delta m_{12}^2$ ist sowohl der Betrag als auch das Vorzeichen bekannt. Dies ist anders bei $\Delta m_{13}^2$ dort ist nur der Betrag bekannt. Somit ergeben sich als freie Parameter $\lambda_a$, $\lambda_b$, $m_1$ und das Vorzeichen von $\Delta m_{13}^2$. Daraus ergibt sich ein Bereich für mögliche effektive Majorana-Massen (siehe Abbildung 5.2).

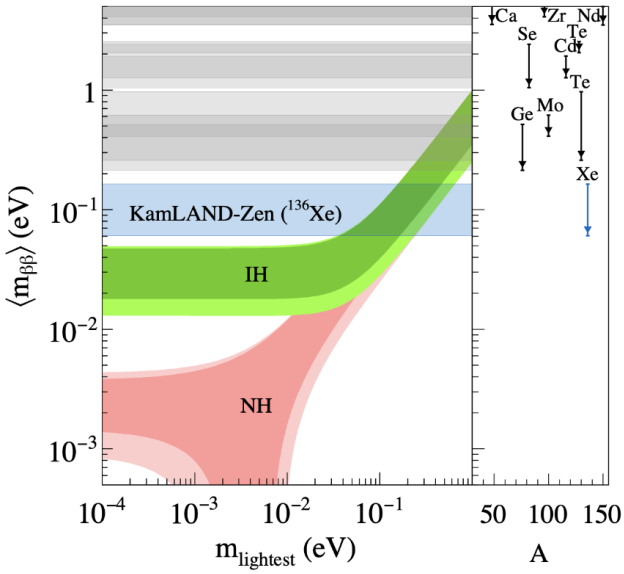



Abbildung 5.2: Die Abhängigkeit der effektiven Majorana-Masse von der Masse des leichtesten Neutrinos (entnommen aus [2]).

# Kapitel 6

# Massive Neutrinos und dunkle Materie

## 6.1 Neutrinooszillation

Im Standardmodell der Teilchenphysik besitzen die Neutrinos keine Massen. Durch Neutrinooszillationsversuche ist mittlerweile jedoch bekannt, dass die Neutrinos eine Masse haben. Bei der Neutrinooszillation wandelt sich z. B. ein Elektron-Neutrino in ein Myon-Neutrino um. Dies kann nur vorkommen, da die Neutrinoeigenzustände der schwachen Wechselwirkung $\nu_l$ nicht den Masseeigenzuständen $\nu_i$ entsprechen. Die Wechselwirkungszustände sind daher keine Teilchen mit eindeutig definierter Masse sondern müssen quantenmechanisch als Überlagerung von mehreren Massezuständen gesehen werden. Mit der unitären $3 \times 3$ Mischmatrix $U$ (PMNS-Matrix) lässt sich dies schreiben als:

$$|\nu_l\rangle = \sum_i U_{li} |\nu_i\rangle \ . \tag{6.1}$$

Diese Mischung zwischen den Wechselwirkungszuständen und den Massezuständen wird durch Mischwinkel beschrieben. Im vereinfachten Fall für nur zwei Flavours lässt sich Gleichung (6.1) auch folgendermaßen schreiben

$$\begin{pmatrix} \nu_a \\ \nu_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \ . \tag{6.2}$$

Die Propagation der Neutrinos wird durch die Ausbreitung der Masseeigenzustände beschrieben. Somit ergibt sich für $\nu_l(t)$ folgender Ausdruck:

$$|\nu_l(t)\rangle = \sum_i U_{li} |\nu_i(t)\rangle = \sum_i U_{li} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_i t} |\nu_i\rangle \ . \tag{6.3}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit nach der Strecke $L$ von $|\nu_a\rangle$ zu $|\nu_b\rangle$ in dem vereinfachten Fall für nur zwei Flavours ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P(\nu_a \to \nu_b) &= |\langle \nu_b | \nu_a(t) \rangle|^2 & (6.4) \\ &= |(-\sin\alpha \ \langle \nu_1| + \cos\alpha \ \langle \nu_2|) \\ &\quad (\cos\alpha \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1 t} |\nu_1\rangle + \sin\alpha \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_2 t} |\nu_2\rangle)|^2 & (6.5) \\ &= |\sin\alpha \ \cos\alpha \ (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_2 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1 t})|^2 & (6.6) \\ &= \sin^2 2\alpha \ \frac{1}{2} \left(1 - \cos((E_2 - E_1)t)\right) \ . & (6.7) \end{aligned}$$

Nun kann die relativistische Energie-Impuls-Beziehung verwendet werden. Damit lässt sich $E_2 - E_1$ schreiben als $\frac{m_2^2 - m_1^2}{2p} = \frac{\Delta m^2}{2p}$. Für ultra relativistische Teilchen ist $E \approx pc$ und $ct \approx L$. Somit ergibt sich:

$$P(\nu_a \to \nu_b) = \sin^2 2\alpha \, \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \, . \tag{6.8}$$

Wie zu sehen ist, ist die Übergangswahrscheinlichkeit von den Mischwinkeln und der Differenz der Neutrinomassen abhängig. Misst man also die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Elektron-Neutrino in ein Myon-Neutrino umwandelt, kann daraus die Massendifferenz bestimmt werden (siehe [4],[5, Kapitel 3.2.1],[6, Kapitel 3.2]).

## 6.2 Mechanismen zur Erzeugung von Neutrinomassen

Dieser Abschnitt basiert auf [6, Kapitel 5.7. und Kapitel 6].

Um den Neutrinos eine Masse zu geben, könnte man nun der Lagrange-Dichte des Standardmodells einen Masseterm (siehe Gleichung (6.9)) für die Neutrinos, so wie ihn alle Fermionen haben, hinzufügen

$$y_{ij} \langle H^0 \rangle \psi_L^i \psi_R^j + H.c. = m_{ij} \psi_L^i \psi_R^j + H.c. \quad . \tag{6.9}$$

Wegen der im Vergleich zu dem Vakuumerwartungswert (VeV) des Higgs-Feldes $\langle H^0 \rangle \sqrt{2} = 246,22$ GeV kleinen Masse der Neutronen müsste die Yukawa-Kopplung dann außerordentlich klein sein. Die Yukawa-Kopplung läge in einer Größenordnung von $\mathcal{O}(10^{-11})$. Man würde jedoch erwarten, dass sie in der Größenordnung von $\mathcal{O}(1)$ liegt, da die Yukawa-Kopplung dimensionslos ist.

Um die Massen für Majorana-Neutrinos auf sinnvolle Art und Weise einzuführen kann der $d = 5$ Weinbergoperator genutzt werden. In Weyl-Darstellung hat dieser die Form

$$-\frac{c_{\alpha\beta}}{\Lambda} (L_\alpha H)(L_\beta H) + H.c. \tag{6.10}$$

Dabei ist $c_{\alpha\beta}$ ein Koeffizient, der sich aus der neuen Physik ergibt. $\Lambda$ ist dann die Energieskala der neuen Physik um $c_{\alpha\beta}$ dimensionslos zu machen. Nach Electroweak Symmetry Breaking (EWSB) ergibt sich daraus folgender Majorana-Masseterm

$$-\frac{c_{\alpha\beta}}{\Lambda} \langle H^0 \rangle^2 [\nu_L^\alpha \nu_L^\beta + \bar{\nu}_L^\alpha \bar{\nu}_L^\beta] = -\frac{1}{2} (M_\nu)_{\alpha\beta} [\nu_L^\alpha \nu_L^\beta + \bar{\nu}_L^\alpha \bar{\nu}_L^\beta] \, . \tag{6.11}$$

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten den $d = 5$ Weinbergoperator zu realisieren. Er kann auf drei verschiedene Arten auf tree level eingeführt werden. Diese Mechanismen werden dann Seesaw Type I-III genannt. Da diese in dieser Arbeit nicht genutzt werden, werden sie hier nicht weiter diskutiert. Außerdem kann der $d = 5$ Weinbergoperator durch Schleifenkorrekturen eingeführt werden, da die tree level Beiträge aber im generellen dominieren würden, müssen diese, meist durch eine zusätzlich eingeführte Symmetrie, verboten werden. Diese Mechanismen werden Radiative Seesaw Mechanismen genannt. Das Besondere dabei ist, dass die Neutrinomassen durch die Massen der Teilchen in der Schleife stark unterdrückt werden und somit automatisch klein sind. Dadurch wird erreicht, dass sich die neue Physik auf der Energieskala der elektroschwachen Wechselwirkung befindet und somit für Experimente zugänglich ist.

## 6.3 Hinweise auf dunkle Materie

Die ersten Hinweise auf dunkle Materie gab es bereits 1932 als Fritz Zwickey das Viraltheorem auf Galaxienhaufen anwendete (siehe [7]). Dieses kann angewendet werden, da Galaxiehaufen relativ gebundene Systeme sind. Unter der Annahme, dass das System sphärisch symmertrisch ist und im Gleichgewicht steht, kann für die Masse folgender Ausdruck hergeleitet werden

$$M \sim \frac{3R\langle v\rangle^2}{G} \ . \tag{6.12}$$

Analysiert man die Bewegung verschiedener Galaxienhaufen kann dadurch gezeigt werden, dass diesen Masse „fehlt“ damit sie stabil sind. Dieser Entdeckung wurde damals jedoch wenig Beachtung geschenkt.

Erst etwa 40 Jahre später, als Vera Rubin die Rotationskurven verschiedener Galaxien untersuchte, stieß dunkle Materie auf Interesse (siehe [7]). Setzt man die Schwerkraft und die Zentripetalkraft gleich, so ergibt sich für die Rotationsgeschwindigkeit:

$$v(r) = \sqrt{\frac{Gm(r)}{r}} \ . \tag{6.13}$$

Dabei ist $m(r)$ die in der Kugel mit Radius $r$ eingeschlossene Masse und $G$ die Gravitationskonstante. Wird der Abstand zum Zentrum der Galaxie $r$ groß genug, kann angenommen werden, dass $m(r)$ konstant ist. Die Drehgeschwindigkeit sollte dann proportional zu $\frac{1}{\sqrt{r}}$ abnehmen.

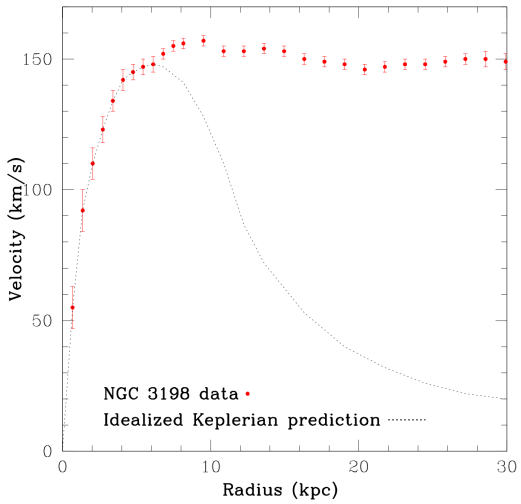



Abbildung 6.1: Die gemessene Rotationsgeschwindigkeiten der HI-Regionen in NGC 3198 dazu im Vergleich das idealisierte Keplerverhalten (entnommen aus [8]).

In Abbildung 6.1 sind starke Abweichungen zur theoretischen Vorhersage zu erkennen. Vera Rubin erklärte diese dadurch, dass die Galaxie von unsichtbarer Masse, der dunklen Materie, umgeben sein müsste (siehe [7]).

Weiterhin wurde 2006 beobachtet, wie zwei Galaxien zusammenstießen (siehe Abbildung 6.2).

Abbildung 6.2: Der Zusammenstoß zweier Galaxien. In blau die dunkle Materie und in rot Röntgenstrahlen emittierendes Gas (entnommen aus [9])

Durch den Zusammenstoß der Galaxien haben sich die unterschiedlichen Anteile der Materie aufgeteilt. Das liegt daran, dass die Gaswolken stark miteinander wechselwirken, die dunkle Materie aber nicht. Die Verteilung der dunklen Materie kann durch den Gravitationslinseneffekt sichtbar gemacht werden. Dadurch kann gezeigt werden, dass die Verteilung des Gravitationspotentials nicht mit der Verteilung sichtbarer Materie übereinstimmt. Diese Aufteilung zwischen dunkler Materie und dem Gas ist ein klarer Hinweis auf dunkle Materie.

## 6.4 Kandidaten für dunkle Materie

Kandidaten für dunkle Materie müssen im Allgemeinen einige Voraussetzungen erfüllen um weiterhin als Möglichkeit für dunkle Materie angesehen zu werden. Als erstes sollte der Kandidat „dunkel“ sein. Das bedeutet er darf nicht oder nur ganz schwach an Photonen koppeln. Würde er stark an Photonen koppeln, dann wäre der Kandidat sichtbar und könnte so keinen Teil der dunklen Materie ausmachen.

Der Kandidat sollte außerdem eine mittlere Lebensdauer haben, die in der Größenordnung der Lebensdauer des Universums liegt. Ansonsten wäre ein Großteil der dunklen Materie im Laufe der Zeit schon zerfallen und würde im heutigen Universum nicht mehr auftreten (siehe [10, Seite 42]).

Weiterhin kann aus den Beobachtungen des Bullet Clusters und dem kosmischen Mikrowellenhintergrund geschlossen werden, dass der dunkle Materie Kandidat nicht baryonisch sein sollte (siehe [11, Seite 37]).

Zuletzt sollte der dunkle Materie Kandidat noch kalt sein. Kalte Materie ist Materie, welche sich schon vor der Zeit des Materie dominierten Universums mit nicht relativistischer Geschwindigkeit bewegt hat (siehe [11, Seite 37 f.]). Diese Forderung geht aus N-Körper Simulationen hervor und daraus folgt, dass Neutrinos nicht einen Großteil der dunklen Materie ausmachen können, da diese zu der warmen Materie gehören, welche sich mit relativistischen Geschwindigkeiten durch das Universum bewegen.

Zu diesen Voraussetzungen gibt es noch viele weitere, die ein dunkler Materie Kandidat erfüllen muss, um einen Großteil der dunklen Materie auszumachen. Er muss z. B. im Einklang mit der primordialen Nukleosynthese sein und mit der Reliktdichte übereinstimmen.

Teilchen, die die genannten Voraussetzungen erfüllen sind z. B. schwach wechselwirkende massive Teilchen (WIMPs). Es wird davon ausgegangen, dass WIMPs in einer Phase thermischen Gleichgewichts entstanden sind, bis die Temperatur wegen der Ausdehnung des Universums anfing zu sinken. Ab dem Zeitpunkt fingen die WIMPs an nur noch zu annihilieren. Das führte zu einer exponentiellen Abnahme der Anzahldichte bis zu einem Punkt an dem die Annihilation stoppte und so die Reliktdichte übrigblieb ([12, Seite 6]). Beispiele für WIPMs sind Neutralinos, welche durch minimale supersymmetrische Standardmodelle eingeführt werden können. Oder auch andere Teilchen, die durch minimale dunkle Materie Modelle eingeführt werden. Um die genannten Voraussetzungen zu erfüllen, liegt die Masse der WIMPs im Bereich von 100 GeV und sie sollten eine Geschwindigkeit von etwa 220 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ haben (siehe [8, Seite 14]).

# Kapitel 7

# Das „scotogenic model“

## 7.1 Modell Beschreibung

Ein Modell, welches die geringe Masse der Neutrinos erklärt und zwei Kandidaten für dunkle Materie liefert, ist das „scotogenic model“. Dies gehört zu den „radiative seesaw models“ bei denen nur die fermionischen Singlets $N_i$ und ein geladenes skalares Doublett $\eta$ dem Standardmodell hinzugefügt werden.

Das in dieser Arbeit genutze „scotogenic model“ wurde von Ernest Ma eingeführt (siehe [13]). Dem Standardmodell werden drei schwere fermionische Singlets $N_i$, ein skalares Doublett $(\eta^+, \eta^0)$ und eine exakte $Z_2$ Symmetrie hinzugefügt. Unter der $Z_2$ Symmetrie sind alle Felder des Standardmodells gerade, die neu hinzugefügten Felder sind jedoch ungerade unter dieser Symmetrie. Die Eigenschaften der Felder sind in Tabelle 7.1 aufgetragen.

Aus der Symmetrie geht hervor, dass $\eta$ einen Vakuum-Erwartungswert von Null hat (siehe [14, Seite 103]). Weiterhin folgt aus der Symmetrie, dass jeder Vertex eine gerade Anzahl an neu eingeführten Feldern beinhalten muss. Dies führt dazu, dass ein einzelnes neu eingeführtes Teilchen nicht zerfallen kann. Dadurch wird das leichteste ungerade Teilchen stabilisiert, welches, wenn es ungeladen ist, ein Kandidat für dunkle Materie ist. Zudem verhindert es, dass die Neutrinos durch den „type I seesaw mechanism“ (dazu [14, Kapitel 5.7.1]) ihre Masse bekommen. Dadurch wird sicher gestellt, dass die Neutrinomassen erst durch Strahlungskorrekturen mit mindestens einem Loop entstehen. Somit sind kleine Neutrinomassen gesichert, da die Schleifenkorrekturen durch die Kopplungen unterdrückt werden und weil die neu eingeführten Felder, welche in den Propagatoren der Schleife auftreten, schwer sind. Wie die Neutrinomassen auf ein Schleifen Niveau generiert werden, ist in Abbildung 7.1 zu sehen.

Tabelle 7.1: Der Inhalt des „scotogenic models“([14, Seite 102]).

| Feld | Spin | Lorentz rep. | SU(3) | SU(2) | U(1) | $Z_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SM. Felder | | | | | | 1 |
| $N_i$ | $\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ | **1** | **1** | 0 | -1 |
| $\eta$ | 0 | $(0,0)$ | **1** | **2** | 1 | -1 |

Der Lagragian für die Fermionen ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = -\frac{m_{N_i}}{2} N_i N_i + y_{i\alpha}(\eta L_\alpha) N_i + \text{H. c.} \tag{7.1}$$

Dabei ist $-\frac{m_{N_i}}{2}N_iN_i$ der Majorana-Massenterm, der neu hinzugefügten Fermionen $N_i$. Außerdem ist $L_\alpha$ das Doublet der $\alpha$ten Leptonen Generation. Das Potential der Skalare lässt sich schreiben als:

$$\begin{aligned} V &= m_H^2 H^\dagger H + m_\eta^2 \eta^\dagger \eta + \frac{\lambda_1}{2}(H^\dagger H)^2 + \frac{\lambda_2}{2}(\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_3 (H^\dagger H)(\eta^\dagger \eta) \\ &\quad + \lambda_4 (H^\dagger \eta)(\eta^\dagger H) + \frac{\lambda_5}{2}\left[(H^\dagger \eta)^2 + (\eta^\dagger H)^2\right] . \end{aligned} \tag{7.2}$$

$H$ ist hier das Higgs-Doublett aus dem Standardmodell (siehe [6, Seite 49]).

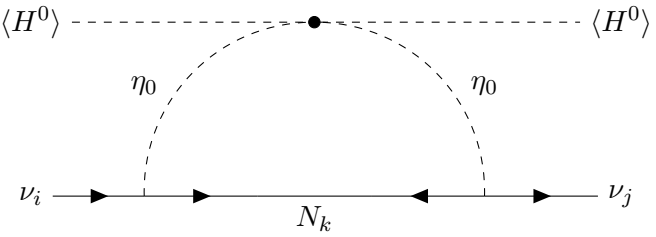



Abbildung 7.1: Die Abbildung zeigt, wie die Neutrinomassen im scotogenic Modell generiert werden.

## 7.2 Elektroschwache Symmetriebrechung

Es wird nun genauso wie im Standardmodell die $SU(2)$-Symmetrie gebrochen. Dabei wird das Potential aus Gleichung (7.2) zunächst durch die einzelnen Komponenten des Higgs-Doubletts und des $\eta$-Doubletts geschrieben. Die beiden Doubletts haben die Form:

$$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^+ \\ \eta^0 \end{pmatrix} . \tag{7.3}$$

Für das Potential ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} V = m_H^2 \left(|\phi^+|^2 + |\phi^0|^2\right) + m_\eta^2 \left(|\eta^+|^2 + |\eta^0|^2\right) + \frac{\lambda_1}{2}\left(|\phi^+|^2 + |\phi^0|^2\right)^2 \\ + \frac{\lambda_2}{2}\left(|\eta^+|^2 + |\eta^0|^2\right)^2 + \lambda_3 \left(|\phi^+|^2 + |\phi^0|^2\right)\left(|\eta^+|^2 + |\eta^0|^2\right) \\ + \lambda_4 \left((\phi^+)^* \eta^+ + (\phi^0)^* \eta^0\right)\left((\eta^+)^* \phi^+ + (\eta^0)^* \phi^0\right) \\ + \frac{\lambda_5}{2}\left(\left((\phi^+)^* \eta^+ + (\phi^0)^* \eta^0\right)^2 + \left((\eta^+)^* \phi^+ + (\eta^0)^* \phi^0\right)^2\right) . \end{aligned} \tag{7.4}$$

Es muss beachtet werden, dass $\phi^0$ und $\eta^0$ komplexe Felder sind. Sie lassen sich somit als $\phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_R^0 + \mathrm{i}\phi_I^0)$ und $\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_R^0 + \mathrm{i}\eta_I^0)$ schreiben. Jedoch können $\phi_I^0$ und $\eta_I^0$ keinen Vakuumerwartungswert entwickeln, da $\phi_I^0$ und $\eta_I^0$ Pseudoskalare sind und somit eine Parität von $-1$ haben. Ebenso können $\phi^+$ und $\eta^+$ auch keinen Vakuumerwartungswert haben, da sie geladen sind und dadurch die Ladungserhaltung verletzt werden würde, wenn solch ein Teilchen einen VeV entwickeln würde. Daher lässt sich hier $\phi_I^0 = \eta_I^0 =$

$\phi^+ = \eta^+ = 0$ setzen. Es folgt für das Potential:

$$= m_H^2|\phi_R^0|^2 + m_\eta^2|\eta_R^0|^2 + \frac{\lambda_1}{2}|\phi_R^0|^4 + \frac{\lambda_2}{2}|\eta_R^0|^4 + \lambda_3|\phi_R^0|^2|\eta_R^0|^2 \\ \lambda_4|\phi_R^0|^2|\eta_R^0|^2 + \frac{\lambda_5}{2}(\phi_R^0\eta_R^0)^2 \cdot 2 \ . \tag{7.5}$$

Die partiellen Ableitungen des Potentials müssen im Minimum gleich Null sein, daher folgt:

$$\delta_\phi V = 2m_H^2|\phi_R^0| + 2\lambda_2|\phi_R^0|^3 + 2(\lambda_3+\lambda_4)|\phi_R^0||\eta_R^0|^2 + 2\lambda_5\phi_R^0(\eta_R^0)^2 = 0 \tag{7.6}$$

$$\delta_\eta V = 2m_\eta^2|\eta_R^0| + 2\lambda_2|\eta_R^0|^3 + 2(\lambda_3+\lambda_4)|\phi_R^0|^2|\eta_R^0| + 2\lambda_5(\phi_R^0)^2(\eta_R^0) = 0 \ . \tag{7.7}$$

Aus Gleichung (7.6) und Gleichung (7.7) folgt:

$$(\phi_R^0)^2 = 0 \ \vee \ (\phi_R^0)^2 = -\frac{1}{2\lambda_1}\left(2m_H^2 + 2(\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)(\eta_R^0)^2\right) \tag{7.8}$$

$$(\eta_R^0)^2 = 0 \ \vee \ (\eta_R^0)^2 = -\frac{1}{2\lambda_2}\left(2m_\eta^2 + 2(\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)(\phi_R^0)^2\right) \ . \tag{7.9}$$

Es muss $(\eta_R^0)^2 = 0$ angenommen werden, da das Vakuum unter der $Z_2$-Symmetrie gerade ist und $\eta$ unter dieser Symmetrie ungerade ist. Somit ergibt sich für das Higgsfeld, der schon aus dem Standardmodell bekannte VeV $(\phi_R^0)^2 = -\frac{m_H^2}{\lambda_1} = v^2$ (siehe [15] Seite 328). Setzt man dieses Ergebnis wieder in das ursprüngliche Potential aus Gleichung (7.4) ein, so lassen sich folgende Massenterme extrahieren:

$$m_{\eta^+}^2 = m_\eta^2 + \lambda_3\langle H^0\rangle^2 \tag{7.10}$$

$$m_{\eta_R^0}^2 = m_\eta^2 + (\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)\langle H^0\rangle^2 \tag{7.11}$$

$$m_{\eta_I^0}^2 = m_\eta^2 + (\lambda_3+\lambda_4-\lambda_5)\langle H^0\rangle^2 \ . \tag{7.12}$$

Dabei ist $\langle H^0\rangle^2 = \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{246,22 \text{ GeV}}{\sqrt{2}}$. Das Ergebnis für die Massen des neu hinzugefügten skalaren Doublets deckt sich mit dem Ergebnis, welches von Ernest Ma in der ursprünglichen Veröffentlichung des Models angegeben wurde (siehe [13]).

## 7.3 Feynman-Regeln

Um die Massenkorrekturen der Neutrinos auszurechnen, müssen zunächst die Feynman-Regeln der neu hinzugefügten Teilchen gefunden werden. Dafür muss die Lagrange-Dichte aus Gleichung (7.1) mit Dirac-Spinoren geschrieben werden

$$\mathcal{L} \supset y_{i\alpha}(\eta L_\alpha)N_i + y_{i\alpha}[(\eta L_\alpha)N_i]^\dagger \tag{7.13}$$

$$= y_{i\alpha}(\eta^0\nu_\alpha - \eta^+ l_\alpha)N_i + y_{i\alpha}N_i^\dagger(-\nu_\alpha^*(\eta^0)^* + l_\alpha^*(\eta^+)^*) \ . \tag{7.14}$$

Für die Schleife aus Abbildung 7.1 sind nur die Terme mit den Neutrinos relevant, da keine Elektronen, Myonen oder Tauonen in der Schleife vorkommen. Daher ist nur der folgende Term für die Feynman-Regeln relevant

$$\supset y_{i\alpha}\left(\eta^0\nu_\alpha^k N_{ik} - \overline{N}_{i\dot{d}}\overline{\nu}_\alpha^{\dot{d}}(\eta^0)^*\right) \tag{7.15}$$

$\eta^0$ ist ein komplexes Feld und lässt sich daher als $\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_R + \mathrm{i}\eta_I)$ schreiben:

$$= \frac{y_{i\alpha}}{\sqrt{2}} \left( \eta_R \nu_\alpha^k N_{ik} + \mathrm{i}\eta_I \nu_\alpha^k N_{ik} - \eta_R \overline{N}_{i\dot{d}} \overline{\nu}_\alpha^{\dot{d}} + \mathrm{i}\eta_I \overline{N}_{i\dot{d}} \overline{\nu}_\alpha^{\dot{d}} \right) . \tag{7.16}$$

Die einzelnen Komponenten der Spinoren kommutieren untereinander. Wenn die einzelnen Komponten der Spinoren kommutieren, gilt für das Skalarprodukt allgemein ([14] Seite 61):

$$\xi \cdot \psi = \xi^a \psi_a = \psi_a \xi^a = -\psi^a \xi_a = -\psi \cdot \xi . \tag{7.17}$$

Daher lässt sich schreiben:

$$= \frac{y_{i\alpha}}{\sqrt{2}} \left( \eta_R \left( \nu_\alpha^k N_{ik} + \overline{\nu}_{\alpha\dot{d}} \overline{N}_i^{\dot{d}} \right) + \mathrm{i}\eta_I \left( \nu_\alpha^k N_{ik} - \overline{\nu}_{\alpha\dot{d}} \overline{N}_i^{\dot{d}} \right) \right) . \tag{7.18}$$

Die neu hinzugefügten $N_i$ sind Majorana-Ferminonen und haben einen Majorana-Massenterm (siehe [13]). Außerdem müssen die Neutrinos, damit der $0\nu2\beta$-Zerfall überhaupt stattfinden kann, auch Majorana-Fermionen sein. Die Dirac-Spinoren haben daher die Form:

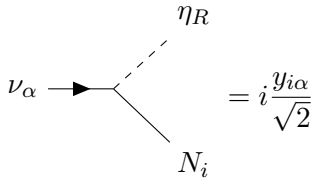
$$\psi_{N_i} = \begin{pmatrix} N_{ik} \\ \overline{N}_i^{\dot{k}} \end{pmatrix} , \qquad \psi_{\nu_\alpha} = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha k} \\ \overline{\nu}_\alpha^{\dot{k}} \end{pmatrix} . \tag{7.19}$$

Somit ergibt sich für die Lagrange-Dichte mit Dirac-Spinoren:

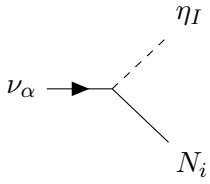
$$= \frac{y_{i\alpha}}{\sqrt{2}} \left( \eta_R \overline{\psi}_\nu \psi_N + \mathrm{i}\eta_I \left( \overline{\psi}_\nu P_L \psi_N - \overline{\psi}_\nu P_R \psi_N \right) \right) \tag{7.20}$$

$$= \frac{y_{i\alpha}}{\sqrt{2}} \left( \eta_R \overline{\psi}_\nu \psi_N - \mathrm{i}\eta_I \overline{\psi}_\nu \gamma^5 \psi_N \right) . \tag{7.21}$$

Daraus lassen sich nun die folgenden Feynman-Regeln ablesen:




$$= i\frac{y_{i\alpha}}{\sqrt{2}}$$




$$= \frac{y_{i\alpha}}{\sqrt{2}} \gamma^5 . \tag{7.22}$$

## 7.4 Neutrinomassen

Mit den Feynman-Regeln aus Gleichung (7.22) lässt sich nun das Matrixelement für Abbildung 7.1 aufstellen. Dabei gibt es einen Beitrag mit $\eta_R$ in der Schleife und einen Beitrag mit $\eta_I$ in der Schleife. Insgesamt ergibt sich:

$$M = u^a(p) \underbrace{\left[ \mathrm{i}\frac{y_{i\alpha}}{\sqrt{2}} \right]}_{\text{Vertex}} \underbrace{\left[ \mathrm{i}\delta_{ab} \frac{\gamma^\mu (q+p)_\mu + m_N}{(q+p)^2 - m_N^2} \right]}_{N_i-\text{Propagator}} \underbrace{\left[ \frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_{\eta_R}^2} \right]}_{\eta-\text{Propagator}} \underbrace{\left[ \mathrm{i}\frac{y_{i\beta}}{\sqrt{2}} \right]}_{\text{Vertex}} v^b(p)$$

$$+ u^a(p) \underbrace{\left[ \frac{y_{i\alpha}}{\sqrt{2}} \gamma^5 \right]}_{\text{Vertex}} \underbrace{\left[ \mathrm{i}\delta_{ab} \frac{\gamma^\mu (q+p)_\mu + m_N}{(q+p)^2 - m_N^2} \right]}_{N_i-\text{Propagator}} \underbrace{\left[ \frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_{\eta_I}^2} \right]}_{\eta-\text{Propagator}} \underbrace{\left[ \frac{y_{i\beta}}{\sqrt{2}} \gamma^5 \right]}_{\text{Vertex}} v^b(p) . \tag{7.23}$$

Der Impuls $q$ der Skalarenfelder $\eta_{R,I}$ ist kinematisch nicht festgelegt und kann daher jeden Wert annehmen. Aus diesem Grund muss über $q$ integriert werden. Bei der Integration sind allerdings nur die Propagatoren von Bedeutung, da die Vertices nicht von dem Impuls $q$ abhängig sind. Außerdem ist $p^2 = m^2 = 0$, da die Neutrinomassen wegen der $Z_2$-Symmetrie nicht auf Tree-Level generiert werden und die Neutrinomassen somit auf Tree-Level gleich Null sind. Es folgt:

$$-\delta_{ab}\int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu (q+p)_\mu + m_N}{((q+p)^2 - m_N^2)\left(q^2 - m_{\eta_{R,I}}^2\right)} \tag{7.24}$$

$$\begin{aligned} = \; & -\delta_{ab}\gamma^\mu p_\mu \frac{1}{16\pi^2}(B_1(0, m_{\eta_{R,I}}^2, m_N^2) + B_0(0, m_{\eta_{R,I}}^2, m_N^2)) \\ & -\delta_{ab} m_N \frac{1}{16\pi^2} B_0(0, m_{\eta_{R,I}}^2, m_N^2)\ . \end{aligned} \tag{7.25}$$

Dabei sind $B_1(p^2, m_0^2, m_1^2)$ und $B_0(p^2, m_0^2, m_1^2)$ gegeben durch (siehe [16]):

$$B^\mu = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\mathrm{i}\pi^2}\int \mathrm{d}^D q \frac{q^\mu}{(q^2 - m_0^2 + \mathrm{i}\epsilon)\left[(q+p)^2 - m_1^2 + \mathrm{i}\epsilon\right]} = p^\mu B_1 \tag{7.26}$$

$$B_0 = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\mathrm{i}\pi^2}\int \mathrm{d}^D q \frac{1}{(q^2 - m_0^2 + \mathrm{i}\epsilon)\left[(q+p)^2 - m_1^2 + \mathrm{i}\epsilon\right]}\ . \tag{7.27}$$

Mit den Parametern $B_0(0, m_{\eta_{R,I}}^2, m_N^2)$ ergibt sich das Integral zu:

$$B_0 = \Delta + 1 - \frac{1}{m_N^2 - m_{\eta_{R,I}}^2}\left[m_N^2 \ln\left(\frac{m_N^2}{\mu^2}\right) - m_0^2 \ln\left(\frac{m_{\eta_{R,I}}^2}{\mu^2}\right)\right]\ . \tag{7.28}$$

Dabei divergiert $\Delta$ und muss sich somit zum Schluss rauskürzen. Weiterhin kann $\mu$ frei gewählt werden. In diesem Fall wird $\mu = m_N^2$ gewählt. Nur der zu $m_N$ proportionale Teil aus Gleichung (7.25) trägt zur Massengenerierung auf ein Schleifen Niveau bei.

Damit ergibt sich für die Massenmatrix der Neutrinos folgender Audruck:

$$\begin{aligned} (M_\nu)_{\alpha\beta} = \; & y_{i\alpha} y_{i\beta} m_N \frac{1}{32\pi^2}\Big(\mathrm{i}\left[-B_0(0, m_{\eta_R}^2, m_N^2)\right]\mathrm{i} \\ & +\gamma^5\left[-B_0(0, m_{\eta_I}^2, m_N^2)\right]\gamma^5\Big) \end{aligned} \tag{7.29}$$

$$\begin{aligned} = \; & y_{i\alpha} y_{i\beta} m_N \frac{1}{32\pi^2}\Big(\left[B_0(0, m_{\eta_R}^2, m_N^2)\right] \\ & -\left[B_0(0, m_{\eta_I}^2, m_N^2)\right]\Big) \end{aligned} \tag{7.30}$$

$$\begin{aligned} = \; & y_{i\alpha} y_{i\beta} m_N \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{m_{\eta_R}^2}{m_N^2 - m_{\eta_R}^2}\ln\left(\frac{m_{\eta_R}^2}{m_N^2}\right)\right. \\ & \left. -\frac{m_{\eta_I}^2}{m_N^2 - m_{\eta_I}^2}\ln\left(\frac{m_{\eta_I}^2}{m_N}\right)\right)\ . \end{aligned} \tag{7.31}$$

Weiterhin muss beachtet werden, dass es drei Generationen von $N$ gibt. Es muss daher

über die Generationen summiert werden. Somit ergibt sich zum Schluss:

$$(M_\nu)_{\alpha\beta} = \sum_k y_{k\alpha} y_{k\beta} m_{N_k} \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{m_{\eta_R}^2}{m_{N_k}^2 - m_{\eta_R}^2} \ln\left(\frac{m_{\eta_R}^2}{m_{N_k}^2}\right) - \frac{m_{\eta_I}^2}{m_{N_k}^2 - m_{\eta_I}^2} \ln\left(\frac{m_{\eta_I}^2}{m_{N_k}}\right)\right) . \tag{7.32}$$

## 7.5 Neutrinoloser Doppelbetazerfall im scotogenic model

In dem letzten Kapitel wurde die Massenmatrix der Neutrinos ausgerechnet. Diese ist jedoch noch in der Basis der schwachen Wechselwirkung. Das bedeutet, $\alpha$ und $\beta$ laufen über e, $\mu$ und $\tau$, daher ist die Matrix auch nicht diagonal. Diagonal wäre sie nur dann, wenn sie in der Basis der Masseneigenzustände angegeben wäre. Um die effektive Majorana-Masse $m_{\beta\beta} = \sum_i (U_{ei})^2 m_{\nu i}$ (siehe Seite 15) zu bestimmen, wird in Kapitel 5 mit den Massen der Masseneigenzustände gerechnet. Die Neutrinos in dem neutrinolosen Doppelbetazerfall sind Elektronen-Neutrinos. Daher ergibt sich hier für die effektive Majorana-Masse einfach $m_{\beta\beta} = (M_\nu)_{ee}$. Somit ergibt sich für die effektive Majorana-Masse:

$$m_{\beta\beta} = \sum_k y_{ke}^2 m_{N_k} \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{m_{\eta_R}^2}{m_{N_k}^2 - m_{\eta_R}^2} \ln\left(\frac{m_{\eta_R}^2}{m_{N_k}^2}\right) - \frac{m_{\eta_I}^2}{m_{N_k}^2 - m_{\eta_I}^2} \ln\left(\frac{m_{\eta_I}^2}{m_{N_k}}\right)\right) . \tag{7.33}$$

Es ist aber durchaus sinnvoll, die Matrix gemäß

$$M_{\nu,\text{schwach}} = U \; M_{\nu,\text{Masse}} \; U^T \tag{7.34}$$

in die Masseneigenzustandsbasis zu transformieren. Denn die experimentellen Ergebnisse die vorliegen, wie z. B. die Massenunterschiede der Neutrinos oder die Mischwinkel, liegen in dieser Basis vor.

# Kapitel 8

# Zusammenfassung und Ausblick

Durch Neutrinooszillationsversuche und Beobachtungen von dunkler Materie ist schon seit längerer Zeit bekannt, dass das Standardmodell erweitert werden muss. Aus diesem Grund beschäftigt sich diese Thesis mit dem sogenannte „scotogenic model“, welches eine mögliche Erweiterung für das Standardmodell ist. In diesem Modell wurde die $SU(2)$-Symmetrie gebrochen, um die korrekten Massenterme des neu hinzugefügten skalaren Doublets zu finden. Weiterhin konnten, aus der Lagrange-Dichte des neuen Models, die Feynman-Regeln für die Wechselwirkungen der neuen Teilchen hergeleitet werden. Mit den Feynman-Regeln konnte dann die Massenmatrix der Neutrinos bestimmt werden.

Um die Parameter des neuen Modells einschränken zu können, wurde zudem der neutrinolose Doppelbetazerfall genauer betrachtet. Es wurde die Zerfallsrate des neutrinolosen Doppelbetazerfalls berechnet und in die drei Faktoren Phasenraum Faktor, Kernmatrixelement und effektive Majorana-Masse zerlegt. Die effektive Majorana-Masse hängt direkt mit der Massenmatirx der Neutrinos zusammen. Über diesen Zusammenhang können Aussagen über die Parameter des scotogenic models auf Basis von experimentellen Ergebnissen des neutrinolosen Doppelbetazerfalls getroffen werden.

Auf der Basis der Ergebnisse dieser Bachelorarbeit könnte nun numerisch die Massenmatrix diagonalisiert werden, um dann mit Ergebnissen aus Experimenten, wie z. B. dem $0\nu2\beta$-Zerfall, die Parameter des scotogenic models einzuschränken. Daraus könnten sich mögliche Massen für die neu eingeführten Teilchen $\eta$ und $N_i$ ergeben. Es würde sich herausstellen, welches das leichteste neu eingeführte Teilchen ist. Dieses ist von besonderem Interesse, da es nicht zerfallen kann und somit ein Kandidat für dunkle Materie ist.

# Anhang A

# Code zur Näherung

Listing A.1: Der Code mit der das Integral numerisch ausgerechnet wurde

```
1
2  program IntegralNaeherung
3      implicit none
4      real (kind = 16) :: m, s, me, k,r
5      integer :: i, n
6      me = 0.511
7      n = 1000 !Schrittwerte festlegen
8      do i = 0, n !Ausgabe
9          k = 15/real(n)*real(i)
10         m = Integral(10000,0.5+k)
11         s = me**5* (((0.5+k)**5)/30 +((0.5+k)**4)/3 + &
12           4*((0.5+k)**3)/3 + 2*(0.5+k)**2 + (0.5+k))
13         r = m/s
14         write(*,*) 0.5+k, r
15     end do
16
17
18
19
20 contains
21     !Integral durch Trapezregel bestimmen
22     real function Integral (n,t0)
23         integer, intent(in) :: n
24         real (kind = 16), intent(in) :: t0
25         integer :: i
26         real (kind = 16):: a, b, s, f, x, me, f1, f2
27         me = 0.511
28         a = me
29         b = me * (1.0+t0)
30         s = (b-a)/n
31         f = 0.0
32         x = a
33         !aufsummieren der einzelnen Trapeze
```

```
34          !zwischen den Sttellen
35          do i = 0, n-2
36              x = x + s
37              f = f + x*(me*t0+2*me-x)*sqrt(x**2-me**2)&
38                  *sqrt((t0*me+2*me-x)**2-me**2)
39          end do
40          !Randwerte f1 und f2 bestimmen
41          f1 =a*(me*t0+2*me-a)*sqrt(a**2-me**2)&
42              *sqrt((t0*me+2*me-a)**2-me**2)
43          f2 = b*(me*t0+2*me-b)*sqrt(b**2-me**2)&
44              *sqrt((t0*me+2*me-b)**2-me**2)
45          !Wert des Integrals zusammen rechnen
46          f = (b-a)/(n-1) * (1/2 * f1  + f + 1/2 * f2)
47          Integral = f
48      end function Integral
49
50
51  end program
```

# Literaturverzeichnis


[1] J. Schwichtenberg, *Physics from Symmetry*, Undergraduate Lecture Notes in Physics, Springer International Publishing, Cham (2018), 10.1007/978-3-319-66631-0.

[2] B.J.P. Jones, *The Physics of Neutrinoless Double Beta Decay: A Primer*, in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: The Obscure Universe: Neutrinos and Other Dark Matters*, 8, 2021 [2108.09364].

[3] M. Fukugita and T. Yanagida, *Physics of neutrinos and applications to astrophysics*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer-Verlag, Berlin, Germany (2003), 10.1007/978-3-662-05119-1.

[4] G. Hönes, M. Lindner, W. Rodejohann and T. Schwetz-Mangold, *Neutrinos: Grundlegende Erkenntnisse durch rätselhafte Teilchen*, https://www.mpg.de/neutrinos-grundlegende-erkenntnisse-durch-raetselhafte-teilchen.

[5] S. Esch, *Dark matter, neutrino masses and lepton flavor violation in radiative see-saw models*, Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_tp/theses/klasen/esch_phd.pdf.

[6] T. de Boer, *Verifiable dark matter with radiative neutrino masses*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster Institute of Theoretical Physics.

[7] M. Götz, *Dark Matter*, https://www.haus-der-astronomie.de/3440769/09darkmatter.pdf.

[8] K. Garrett and G. Duda, *Dark Matter: A Primer*, *Adv. Astron.* **2011** (2011) 968283 [1006.2483].

[9] M. Markevitch et al and D. Clowe et al, *Astronomy Picture of the Day*, https://apod.nasa.gov/apod/ap060824.html.

[10] M. Meinecke, *SUSY-QCD Corrections to the (Co)Annihilation of Neutralino Dark Matter within the MSSM*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster Institute of Theoretical Physics, https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_tp/theses/klasen/meinecke_phd.pdf.

[11] S. Schmiemann, *Squark Annihilation Contributions to Neutralino Dark Matter in NLO SUSY-QCD*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster Institute of Theoretical Physics, https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_tp/theses/klasen/schmiemann_phd.pdf.

[12] J. Wissmann, *The anomalous magnetic moment of the muon in the scotogenic model*, *WWU Münster* (2021) .

[13] E. Ma, *Verifiable radiative seesaw mechanism of neutrino mass and dark matter*, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 077301 [hep-ph/0601225].

[14] S. May, *Minimal dark matter models with radiative neutrino masses: From Lagrangians to observables*, *WWU Münster* (2020) [2003.04157].

[15] F. Halzen and A.D. Martin, *QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS* (1984).

[16] K. Kovařík, *Hitchhiker's guide to Renormalization*, private Notizen.

# Plagiatserklärung des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über *Neutrinoloser doppel Betazerfall jenseits des Standardmodells* selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

_____
(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

_____
(Datum, Unterschrift)