



# Lösung der DGLAP-Gleichungen im Mellin-Raum

*Solution of the DGLAP equations in Mellin space*

Bachelorarbeit  
Fachbereich Physik  
Institut für theoretische Physik

Florian Fabry  
Matrikel-Nr.: 427966  
Münster, 6. Juni 2018

Erstgutachter: Prof. Dr. Michael KLASEN  
Zweitgutachter: Dr. Karol KOVÁŘÍK

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Über den theoretischen Hintergrund - eine Herleitung der DGLAP-Gleichung</b>	<b>2</b>
2.1 Elastische Streutheorie zweier Dirac-Punkt-Teilchen . . . . .	2
2.2 Hadronischer Tensor . . . . .	4
2.3 Das Partonmodell . . . . .	6
2.3.1 Tiefinelastische Streuung . . . . .	6
2.3.2 Partonverteilungs- und Strukturfunktionen . . . . .	7
2.3.3 Quarks und Gluonen als Partonen . . . . .	9
2.4 Einflüsse der QCD durch Prozesse nächster Ordnung . . . . .	9
2.5 Herleitung der DGLAP-Gleichung . . . . .	10
2.5.1 Der Formfaktor $W_0$ in LO . . . . .	10
2.5.2 Der Formfaktor $W_0$ in NLO . . . . .	11
2.5.3 Splitting-Funktionen und Renormierung der Partonverteilungsfunktionen	12
<b>3 Vorbereitungen für die numerische Implementierung der DGLAP-Gleichung</b>	<b>15</b>
3.1 Die Mellin-Transformation . . . . .	15
3.2 Wahl einer neuen Basis . . . . .	17
3.3 Lösung der DGLAP-Gleichung im Mellin-Raum . . . . .	18
3.3.1 Renormierungsgruppengleichung von $\alpha_s$ in erster Ordnung . . . . .	18
3.3.2 Non-Singulett-Verteilungen . . . . .	18
3.3.3 Singulett- und Gluon-Verteilung . . . . .	19
<b>4 Die numerische Lösung der DGLAP-Gleichung</b>	<b>20</b>
4.1 Der Programmcode . . . . .	20
4.2 Plots . . . . .	25
<b>5 Fazit und Ausblick</b>	<b>30</b>
<b>A Feynmanregeln</b>	<b>31</b>
<b>B <math>SU(3)</math>-Gruppe als Eichsymmetrie der QCD</b>	<b>32</b>
<b>C Berechnung der Vertexkorrektur</b>	<b>33</b>
C.1 Schleifenamplitude und dimensionale Regularisierung . . . . .	33
C.2 Tensorreduktion und finale Schritte . . . . .	35

# 1 Einleitung

Tiefinelastische Streuung und damit auch die DGLAP<sup>1</sup>-Gleichung haben ihre Ursprünge in den Rutherford'schen Streuexperimenten des frühen 20. Jahrhunderts. Die grundlegende Idee, durch Beschuss von Teilchen<sup>2</sup> Informationen über Materie, das heißt die beschossenen Teilchen<sup>3</sup> zu sammeln, zieht sich im Wesentlichen durch die gesamte Geschichte der Teilchenbeschleuniger.

Im Laufe der Jahre führte der technische Fortschritt zu immer größeren Beschleunigern, die Teilchen auf immer größere Energien beschleunigen konnten. Mit diesen neuen Möglichkeiten kamen auch neue Erkenntnisse: War zu Beginn noch das Rutherford'sche Atommodell samt eines punktförmigen Kernes „state of the art“, wurde schon bald klar, dass der Atomkern keineswegs scharf auf einen Raumpunkt lokalisiert ist, sondern vielmehr aus Nukleonen, also Neutronen und Protonen besteht. Ab den 1950er Jahren war es dann möglich, auch die Nukleonen auf eine etwaige Substruktur zu untersuchen<sup>4</sup>. Die Experimente zeigten, dass Proton und Neutron eine magnetische und elektrische Ladungsverteilung besitzen, ein konkreter innerer Aufbau blieb jedoch ein Rätsel. In den 1960er Jahren setzte sich dann aus mehreren konkurrierenden Modellen das von R. P. Feynman entwickelte Partonmodell durch, in dem die Quarks<sup>5</sup> und Gluonen der Quantenchromodynamik als Partonen identifiziert wurden. Implementiert man diese Theorie konsequent in das Partonmodell, so ergibt sich die DGLAP-Gleichung. Die Partonverteilungsfunktionen, also die Wahrscheinlichkeitsdichten des Partonimpulses, deren Verhalten von dieser Gleichung beschrieben wird, besitzen aufgrund ihrer universellen Anwendbarkeit auch heute noch hohe Relevanz. Zwar wird in dieser Arbeit nur von der Streuung eines Elektrons am Proton die Rede sein, jedoch lassen sich die gewonnenen Erkenntnisse auf beliebige andere Prozesse übertragen.

Diese Arbeit soll sich mit der Herleitung und Lösung der DGLAP-Gleichung beschäftigen. Begonnen wird mit einer Einführung in die tiefinelastische Streuung, das Partonmodell und Korrekturen<sup>6</sup> an diesem aus der Quantenchromodynamik, an deren Ende die DGLAP-Gleichung steht. Diese Integro-Differentialgleichung lässt sich nur numerisch lösen, weshalb danach diverse Umformungen erläutert werden, die für eine numerische Implementierung nötig sind. Zu diesen gehört auch die Mellin-Transformation, eine Integraltransformation, die die Struktur der DGLAP-Gleichung maßgeblich vereinfacht. Abschließend wird ein in Python 3.6 verfasstes Programm vorgestellt, mit dem durch Lösen der DGLAP-Gleichung Partonverteilungsfunktionen bei beliebigen Energieskalen ausgegeben werden können.

---

<sup>1</sup>Ausgeschrieben: Dokshitzer-Gribow-Lipatow-Altarelli-Parisi.

<sup>2</sup>Bei Rutherford Helium-Kerne, also  $\alpha$ -Strahlung, im weiteren Verlauf dieser Arbeit Elektronen.

<sup>3</sup>Bei Rutherford Goldatome, im weiteren Verlauf dieser Arbeit Protonen.

<sup>4</sup>Die Nobelpreisvorlesungen [14],[8] und [4] von R. E. Taylor, H. W. Kendall und J. I. Friedmann aus dem Jahr 1990 enthalten ausführliche Schilderungen zur Geschichte der tiefinelastischen Streuung.

<sup>5</sup>Eingeführt durch M. Gell-Mann.

<sup>6</sup>Wir beschränken uns dabei auf Korrekturen in der ersten Ordnung Störungstheorie.

## 2 Über den theoretischen Hintergrund - eine Herleitung der DGLAP-Gleichung

In den nachfolgenden Abschnitten soll eine kurze Einführung in die tiefinelastische Streuung und das Partonmodell samt „next-to-leading order“-Korrekturen gegeben werden. Die Darstellungen orientieren sich an den Kapiteln 6.3, 8 und 9 aus [6] sowie dem Kapitel 32 aus [13].

Selbstverständlich kann es sich nicht um eine vollständige Darstellung der Quantenelektrodynamik (QED) oder -chromodynamik (QCD) handeln. Vielmehr wird an entsprechenden Stellen auf relevante Punkte dieser Theorien zurückgegriffen. Eine Zusammenfassung der Feynmanregeln und der SU(3)-Symmetrie der QCD sowie eine längere Beispielrechnung eines Schleifenintegrals wurden aus Gründen der Übersicht in den Anhang ausgelagert.

### 2.1 Elastische Streutheorie zweier Dirac-Punkt-Teilchen

Um durch experimentelle Methoden Informationen über das Proton zu gewinnen, lässt man, wie schon in der Einleitung erwähnt, Elektronen mit Energie  $E$  an diesem streuen und misst deren Austrittswinkel  $\Theta$  (vgl. Kugelkoordinaten) und -energie  $E'$ . Als Bindeglied zwischen Messung und theoretischer Vorhersage dient der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$ , definiert als Proportionalitätsfaktor zwischen gestreuten Teilchen pro Zeiteinheit  $\Delta\dot{N}$  und Stromdichte der einfallenden Teilchen  $j$ :

$$\Delta\dot{N} = \sigma j \quad (2.1)$$

Da Detektoren meist nur einen bestimmten Raumwinkel  $\Omega$  einnehmen, wird üblicherweise der differentielle Wirkungsquerschnitt  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  angegeben. Wie kann nun der differentielle Wirkungsquerschnitt theoretisch ermittelt werden?

Zum Einstieg soll von zwei punktförmigen streuenden (Elementar-)Teilchen ausgegangen werden, zum Beispiel einem Elektron  $e$  mit Masse  $m$  und einem Myon  $\mu$  mit Masse  $M$ , beide mit negativer Elementarladung  $-e$ . Betrachtet wird also der Prozess<sup>1</sup>  $e\mu \rightarrow e\mu$ , dargestellt in Abbildung 2.1.

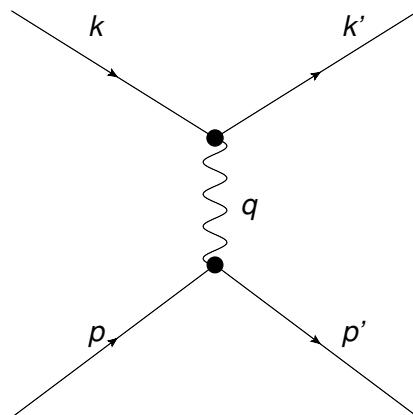


Abbildung 2.1: Elektromagnetische Elektronstreuung (Impulse  $k$  und  $k'$ ) am Muon (Impulse  $p$  und  $p'$ ) durch Austausch eines virtuellen Photons mit Impuls(-übertrag)  $q = k - k'$ .

<sup>1</sup>Hier und im Folgenden wird sich auf elektromagnetische Streuung beschränkt.

## 2 Über den theoretischen Hintergrund - eine Herleitung der DGLAP-Gleichung

Da aufgrund sehr hoher Teilchenenergie im GeV-Bereich die Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit liegen, greift man auf relativistische Quantenmechanik zurück. Elektron und Myon sind Fermionen, werden also durch die Dirac-Gleichung<sup>2</sup> beschrieben:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (2.2)$$

Hier wird die kovariante Form mit vierdimensionalem Nabla-Differentialoperator  $\partial_\mu$  und dem Vierervektor der Dirac-Matrizen

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta \vec{\alpha}) \quad (2.3)$$

benutzt. Sie gehorchen der Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} \quad (2.4)$$

sowie der Relation

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = g_\mu^\mu = 4. \quad (2.5)$$

Es ist nun möglich, den Einfluss des Myons auf das Elektron über Störungstheorie darzustellen. Der ungestörte Zustand ist hierbei das über die Dirac-Gleichung (2.2) beschriebene ein- und auslaufende freie Elektron, das elektromagnetische Potential des Myons die Störung.

In erster Ordnung Störungsrechnung ergibt sich<sup>3</sup> eine invariante Amplitude zwischen initialem und finalen Zustand des Elektrons von

$$\mathcal{M} = (\bar{u}(k')ie\gamma^\mu u(k)) \left( \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (\bar{u}(p')ie\gamma^\nu u(p)). \quad (2.6)$$

Sie hängt wie folgt mit der Übergangsamplitude zwischen initialem und finalem Elektronenzustand  $T_{fi}$  zusammen:

$$T_{fi} = \mathcal{M}(2\pi)^4\delta(p+k-p'-k'). \quad (2.7)$$

Die Amplitude  $\mathcal{M}$  wird über die Feynmanregeln gebildet, näheres dazu findet sich im Anhang, Abschnitt A.

Bis hierhin wurde der Spinzustand beider Teilchen mit Spins  $s_{\text{Elektron}} = s_{\text{Myon}} = \frac{1}{2}$  beliebig gehalten. Da in den betrachteten Streuexperimenten der Spin unbestimmt bleibt, muss über alle finalen Spinzustände summiert und über alle initialen der Durchschnitt gebildet werden. Anstatt  $|\mathcal{M}|^2$  ergibt sich deshalb

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{(2s_{\text{Elektron}} + 1)(2s_{\text{Myon}} + 1)} \sum_{\text{alle Spinzustände}} |\mathcal{M}|^2 \equiv \frac{e^4}{q^4} L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{\text{Myon}}. \quad (2.8)$$

Es wurde der leptonische Tensor

$$L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\text{alle Spinzustände}} [\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)][\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k)]^* \quad (\text{analog } L_{\text{Myon}}^{\mu\nu}) \quad (2.9)$$

eingeführt.

Die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\text{alle Spinzustände}} u(k)\bar{u}(k) = \gamma^\mu k_\mu + m \equiv \not{k} + m \quad (2.10)$$

führt zu

$$L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr \left\{ (\not{k}' + m)\gamma^\mu (\not{k} + m)\gamma^\nu \right\}. \quad (2.11)$$

<sup>2</sup>Hier für ein freies Teilchen, d.h. ohne Potential.

<sup>3</sup>Die Rechnungen der gesamten Arbeit werden in Feynman-Eichung durchgeführt.

## 2 Über den theoretischen Hintergrund - eine Herleitung der DGLAP-Gleichung

Durch Ausmultiplizieren und das Ausnutzen der Pfadtheoreme

$$\text{Tr}(\not{d}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)] \quad (2.12)$$

$$\text{Tr}(-\text{ungerade Anzahl an } \gamma\text{-Matrizen}-) = 0 \quad (2.13)$$

sowie der Relation<sup>4</sup>

$$\gamma^\mu = \gamma_\alpha e_{-\mu-}^\alpha = \not{e}_{-\mu-} \quad (2.14)$$

gelangt man schließlich zur finalen Form:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} \left[ (k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') - m^2 p' \cdot p - M^2 k' \cdot k + 2m^2 M^2 \right]. \quad (2.15)$$

Durch

$$d\sigma = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{F} dQ \quad (2.16)$$

kann dann der Wirkungsquerschnitt bestimmt werden.  $dQ$  ist hierbei der lorentzinvariante Phasenfaktor,  $F$  der einfallende Fluss der Elektronen. Über die Kinematik im jeweiligen Inertialsystem, zum Beispiel dem Laborsystem

$$p_{\text{Myon}} = (M, \vec{0}) \quad (2.17)$$

oder dem Schwerpunktssystem

$$\vec{p}_{\text{Elektron}} = -\vec{p}_{\text{Myon}}, \quad (2.18)$$

lässt sich abschließend der jeweilige differentielle Wirkungsquerschnitt  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  theoretisch ermitteln. Im Laborsystem gilt bei Vernachlässigung der Elektronmasse  $m$ :

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \left( \cos^2 \frac{\Theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right) \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right). \quad (2.19)$$

Die zusätzliche Differentiation nach  $E'$  kann wegen des Faktors  $\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m}\right)$  sofort durch Integration aufgehoben werden kann. Diese  $\delta$ -Funktion wird allerdings genau wie

$$\nu \equiv \frac{p \cdot q}{M} \stackrel{\text{im Laborsystem, s. (2.17)}}{=} E - E' \quad (2.20)$$

weiter unten benötigt.

Abschließend soll noch einmal betont werden, dass im gesamten Abschnitt von punktförmigen Teilchen ausgegangen wurde. Diese Annahme hat ihren Ursprung in der Dirac-Gleichung (2.2), dessen Lösungen Punkt-Teilchen beschreiben. Im finalen Resultat schlägt sich dies im leptonischen Tensor (2.9) nieder, der die Spinoren der Punkt-Dirac-Teilchen enthält.

## 2.2 Hadronischer Tensor

Für die Elektron-Proton-Streuung kann der im vorherigen Abschnitt vorgestellte Formalismus analog verwendet werden. Das Myon wird unter Beibehalt der Impulse  $p$  bzw.  $p'$  und Masse  $M$  durch das Proton mit jetzt positiver Elementarladung  $e$  ausgetauscht:

$$ep \rightarrow ep.$$

Spätestens bei Energien im GeV-Bereich bricht allerdings die Annahme eines punktförmigen Protons zusammen, die Streuung wird inelastisch. Die innere Struktur des Protons führt dazu, dass sich das Proton durch die Streuung verändert:

$$ep \rightarrow eX, \quad \text{dargestellt in Abbildung 2.2.}$$

---

<sup>4</sup> $e_{-\mu-}$  ist der  $\mu$ -te Einheitsvektor,  $e_{-\mu-}^\alpha = \delta^{\mu\alpha}$ .

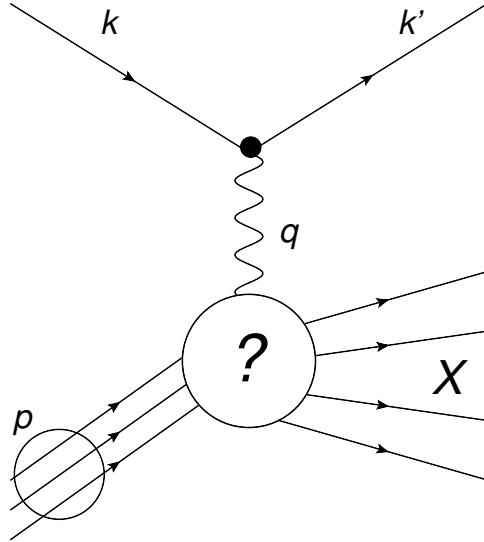


Abbildung 2.2: Elektromagnetische Elektronstreuung (Impulse  $k, k'$ ) am Proton (Impuls  $p$ ) mit unbekannten Produkten  $X$ .

Es stellt sich die Frage, was anstelle des leptonischen Tensors nun das Proton repräsentieren soll. An der vorherigen Form von  $\overline{|\mathcal{M}|^2}$  wird weiterhin festgehalten, allerdings tritt nun an die Stelle des zweiten leptonischen Tensors ein noch unbekannter hadronischer Tensor  $W^{\mu\nu}$ :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4} L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

$W^{\mu\nu}$  wird nun so allgemein wie möglich angesetzt. Antisymmetrische Beiträge geben keinen von 0 verschiedenen Beitrag, da  $L^{\mu\nu}$  symmetrisch ist (s. (2.9)). Außerdem enthält der hadronische Tensor analog zum leptonischen schon die Spinsummation. Damit ist jedes  $\gamma^\mu$  in den Pfadtheoremen verwertet worden. Was überbleibt, ist ein Anteil des metrischen Tensors  $g^{\mu\nu}$  und symmetrische Kombinationen aus dem Protonimpuls  $p^\mu$  sowie dem Impulsübertrag  $q^\mu$ :

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu). \quad (2.22)$$

$W_3$  steht für einen paritätsverletzenden Anteil, der nur für die schwache Wechselwirkung relevant ist und deshalb hier nicht weiter betrachtet wird. Aus der Kontinuitätsgleichung  $\partial_\mu J^\mu = 0$  folgt die Ward-Identität

$$q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0. \quad (2.23)$$

Damit sind zwei Variablen, wahlweise  $W_4$  und  $W_5$ , nicht mehr unabhängig und können durch  $W_1$  und  $W_2$  ausgedrückt werden. Final ergibt sich:

$$W^{\mu\nu} = -W_1 \left( g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2} \right) + W_2 \left( p^\mu + \frac{p \cdot q}{Q^2} q^\mu \right) \left( p^\nu + \frac{p \cdot q}{Q^2} q^\nu \right) \quad (2.24)$$

Hier wurde die positive Größe  $Q^2 = -q^2$  eingeführt.

Aus dem hadronischen Tensor (2.24) erhält man via (2.21) und dem in Abschnitt 2.1 vorgestellten Formalismus im Laborsystem:

$$\left( \frac{d\sigma}{dE'd\Omega} \right)_{eX} = \frac{\alpha^2}{8\pi E^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \left( \frac{M}{2} W_2 \cos^2 \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{M} W_1 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right) \quad (2.25)$$

Die Formfaktoren  $W_1$  und  $W_2$  hängen aufgrund der inelastischen Streuung von zwei Variablen ab, wahlweise dem Impulsübertrag  $Q^2$ , der in (2.20) eingeführten Differenzenergie  $\nu$  oder

deren Verhältnis, der Bjorkenschen Skalenvariable

$$\frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2p \cdot q} \equiv x. \quad (2.26)$$

Im Folgenden soll  $W_{1,2} = W_{1,2}(x, Q^2)$  gelten.

## 2.3 Das Partonmodell

### 2.3.1 Tiefinelastische Streuung

Bei ausgetauschten Energien  $Q^2 > 4 \text{ GeV}^2$  legen experimentelle Daten<sup>5</sup> nahe, dass das Elektron an punktförmigen Teilchen gestreut wird. Dadurch lässt sich der hadronische Tensor (2.24), der bis jetzt die Unkenntnis über Streuprodukte und damit die Struktur des Protons charakterisierte, näher spezifizieren (s. Abbildung 2.3). Jegliche Ausführungen dieses Kapitels fußen auf dieser Rückführung auf die Streuung zweier Dirac-Teilchen in der tiefinelastischen Streuung.

Dass das Elektron anstatt am Proton nun an Punkt-Teilchen streut, motiviert einen Formalismus, in dem der Gesamtimpuls des Protons aus den Teilimpulsen der punktförmigen Teilchen, von nun an Partonen genannt, aufgeteilt wird. Der Impulsanteil der Partonen am Gesamtimpuls wird als  $\xi \in [0, 1]$  bezeichnet, das partonische Analogon zur kinematischen Variable  $x$  des Protons (s. (2.26)) ist

$$z \equiv \frac{Q^2}{2p_{\text{Parton}} \cdot q} = \frac{Q^2}{2m_{\text{Parton}}\nu} = \frac{x}{\xi}. \quad (2.27)$$

Für Impuls und Masse des Partons ergibt sich

$$\begin{aligned} p_{\text{Parton}} &= \xi p_{\text{Proton}} = (\xi E, \xi \vec{p}_{\text{Proton}}), \\ m_{\text{Parton}} &= \sqrt{p_{\text{Parton}}^2} = \sqrt{\xi^2 p_{\text{Proton}}^2} = \xi M. \end{aligned} \quad (2.28)$$

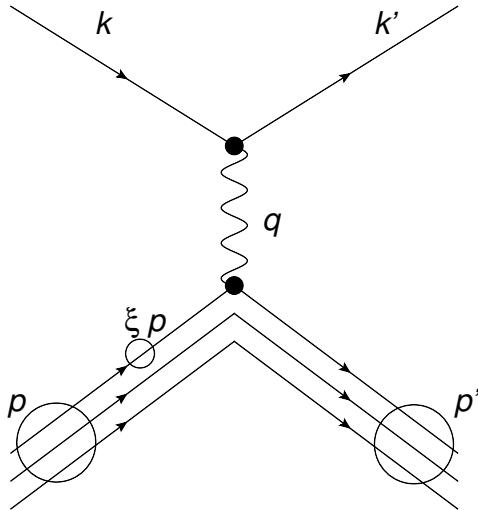


Abbildung 2.3: Elektromagnetische Elektronstreuung (Impulse  $k, k'$ ) am Proton (Impulse  $p, p'$ ) bestehend aus Partonen mit Impuls  $\xi p$ .

Vor der näheren Betrachtung dieses Modells soll zuerst auf dessen Voraussetzungen eingegangen werden. Eine variable Masse des Partons  $\xi M$  ist fernab jeglicher physikalischer Realität, da die Masse punktförmiger Teilchen wohldefiniert ist. Um dieses Problem vernachlässigen zu

<sup>5</sup>Hierauf wird später genauer eingegangen, s. Abbildung 2.4.

können, muss das Proton in einem Initialsystem betrachtet werden, in dem  $|\vec{p}| \gg M$  gilt und Massen demnach vernachlässigt werden können.

Die verschwindenden Massen von Proton und Parton verhindern zudem, dass Letzteres einen transversalen Impuls besitzt, beide Impulse sind also parallel. Durch die Zeitdilatation in diesem Initialsystem kann zudem die Interaktion der Partonen untereinander vernachlässigt werden, da diese auf einer viel größeren Zeitskala als die Streuung stattfindet. Jegliche Prozesse der entstandenen Produkte  $X$  nach der Streuung werden aus dem gleichen Grund nicht betrachtet.

### 2.3.2 Partonverteilungs- und Strukturfunktionen

Die Aufteilung des Protons in Partonen hat auch eine additive Aufteilung des Wirkungsquerschnitts zufolge:

$$\frac{d\sigma(ep \rightarrow eX)}{dE'd\Omega} = \sum_i \int_0^1 d\xi f_i(\xi) \frac{d\sigma_{\text{Parton}}(ep_i \rightarrow ep_i)}{dE'd\Omega} \quad (2.29)$$

In obiger Gleichung wurden die Partonverteilungsfunktion  $f_i(\xi)$  eingeführt. Diese beschreiben die Wahrscheinlichkeit, das Parton  $p_i$ , wobei mit  $i$  die Teilchenart beschrieben wird, mit einem Impulsanteil von  $\xi$  vorzufinden. Analog zum Wirkungsquerschnitt (2.29) kann auch der hadronische Tensor über eine Partonsumme dargestellt werden:

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu}(x, Q^2) &= \sum_i \int_0^1 dz \int_0^1 d\xi f_i(\xi) W_{\text{Parton}}^{\mu\nu}(z, Q^2) \delta(x - z\xi) \\ &= \sum_i \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_i(\xi) W_{\text{Parton}}^{\mu\nu}\left(\frac{x}{\xi}, Q^2\right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Die  $\delta$ -Funktion hat ihren Ursprung in (2.27), durch die  $z$ -Integration wird die untere Integrationsgrenze der  $\xi$ -Integration aufgrund der Bedingung

$$\frac{x}{\xi} \stackrel{!}{\in} [0, 1] \Rightarrow \frac{x}{\xi} \leq 1 \Leftrightarrow \xi \geq x \quad (2.31)$$

nach  $x$  verschoben. Für alle  $\xi < x$  verschwindet die  $z$ -Integration.

Die physikalisch sinnvollere Summation über Teilchenarten (anstatt über jedes einzelne Teilchen) in (2.29) und (2.30) muss durch die Normierung der Verteilungsfunktion auf die Teilchenzahl  $N_i$  einer Teilchenart kompensiert werden:

$$\int_0^1 d\xi f_i(\xi) = N_i. \quad (2.32)$$

Dass dies notwendig ist, wird an (2.29) deutlich. Ist Parton  $p_i$  mehrmals im Proton vorhanden, so muss der Wirkungsquerschnitt auch mehrfach beitragen. Es handelt sich deshalb nicht um eine klassische Wahrscheinlichkeitsdichte, wodurch obige Wahrscheinlichkeitsinterpretation nur eingeschränkt gültig ist.

Die Summe der Erwartungswerte aller Partonimpulsanteile dagegen muss auf 1 normiert sein, um den Gesamtimpuls des Protons zu erhalten:

$$\sum_i \int_0^1 \xi f_i(\xi) d\xi = 1. \quad (2.33)$$

Mithilfe des Partonmodells ist es nun auch möglich, die Strukturfunktionen  $W_1$  und  $W_2$  aus dem hadronischen Tensor  $W^{\mu\nu}$  (s. (2.24)) näher zu beschreiben. Setzt man in die Partonsumme im Wirkungsquerschnitt (2.29) die Wirkungsquerschnitte (2.19) für die Streuung zweier

## 2 Über den theoretischen Hintergrund - eine Herleitung der DGLAP-Gleichung

Punktteilchen (Elektron und Parton) ein<sup>6</sup>, so ergibt sich

$$\frac{d\sigma(ep \rightarrow eX)}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \sum_i e_i^2 \int_0^1 d\xi f_i(\xi) \left( \cos^2 \frac{\Theta}{2} + \frac{Q^2}{2m_{\text{Parton}}^2} \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_{\text{Parton}}} \right). \quad (2.34)$$

$e_i$  bezeichnet hierbei die Ladung des  $i$ -ten Partons.

Mit

$$\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m_{\text{Parton}}} \right) = \delta\left(\frac{Q^2}{2m_{\text{Parton}}x} - \frac{Q^2}{2m_{\text{Parton}}\xi} \right) = \frac{2m_{\text{Parton}}}{Q^2} \delta\left(\xi - x \right) \quad (2.35)$$

wird der Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d\sigma(ep \rightarrow eX)}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha^2 e^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \sum_i e_i^2 f_i(\xi) \left( \frac{2m_{\text{Parton}}}{Q^2} x^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{m_{\text{Parton}}} \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right). \quad (2.36)$$

Dieser Wirkungsquerschnitt muss nun aber offensichtlich gleich dem sein, der aus dem hadronischen Tensor gewonnen wurde (s. (2.25)). Per Koeffizientenvergleich können die Strukturfunktionen durch

$$W_1(\xi, Q^2) = 2\pi \sum_i e_i^2 f_i(\xi), \quad (2.37)$$

$$Q^2 W_2(\xi, Q^2) = 8\pi x^2 \sum_i e_i^2 f_i(\xi) \quad (2.38)$$

dargestellt werden.

Hier manifestiert sich eine der wichtigsten Eigenschaften des Partonmodells bei Anwendung auf Elektron-Proton-Streuung, die Bjorken'sche Skaleninvarianz: Die den Wirkungsquerschnitt charakterisierenden Strukturfunktionen sind unabhängig von  $Q^2$ . Dies ist Folge des Zurückführrens des inelastischen Wirkungsquerschnitts (2.25) auf den elastischen (2.19) durch die Partonsumme im Wirkungsquerschnitt (s. 2.29). Letzterer hängt von zwei Variablen ab, ersterer nur noch von einer, zum Beispiel der Bjorkenschen Skalenvariable  $x$ . Die zu Beginn des Abschnitts angesprochenen experimentellen Hinweise auf den Aufbau des Protons aus Punktteilchen bestanden in genau dieser Skaleninvarianz bei der Messung der Formfaktoren (2.37) und (2.38), zu sehen in Abbildung 2.4.

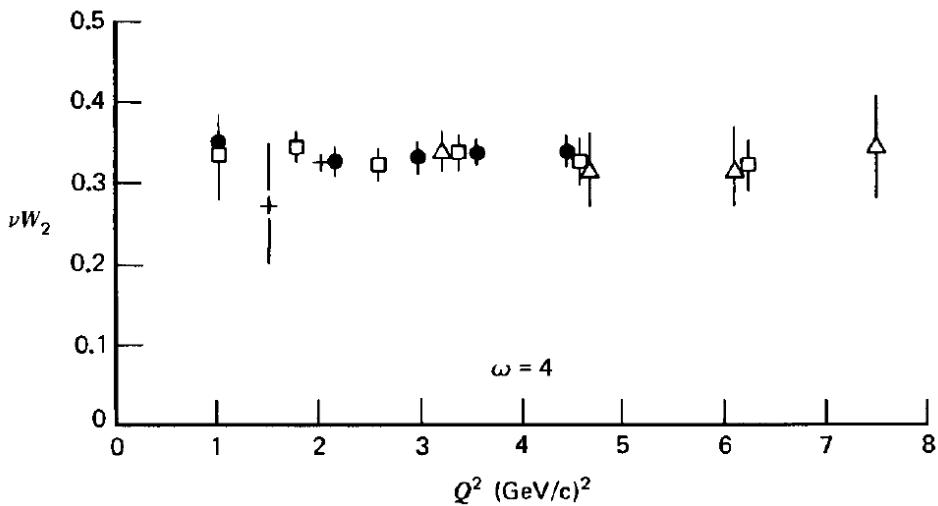


Abbildung 2.4: Messung des Formfaktors  $\nu W_2$  in Abhängigkeit der Energie  $Q^2$  am Stanford Linear Accelerator bei  $x = \frac{1}{4}$ . Entnommen aus [6], S. 190.

<sup>6</sup>Mit der Ersetzung der Muonmasse durch die Partonmasse  $m_{\text{Parton}}$ .

## 2 Über den theoretischen Hintergrund - eine Herleitung der DGLAP-Gleichung

Die Identität, die sich aus (2.37) und (2.38) ergibt,

$$W_1(x) = \frac{Q^2}{4x^2} W_2(x), \quad (2.39)$$

wird als Callan-Gross-Relation bezeichnet. Ihre Gestalt wäre eine andere, würde man nicht vom Wirkungsquerschnitt zweier Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen ausgehen. Deshalb war ihr experimenteller Nachweis<sup>7</sup> ein deutlicher Hinweis darauf, dass die Partonen im Proton Fermionen sind.

### 2.3.3 Quarks und Gluonen als Partonen

Im Folgenden sollen die bis jetzt sehr allgemein gehaltenen Partonen näher spezifiziert werden. Das statische Quarkmodell zusammen mit der Quantenchromodynamik impliziert eine Struktur aus drei Valenzquarks ( $uud$ ), die durch Gluonen wechselwirken. Gluonen können zudem noch in Quark-Antiquark-Paare aufspalten, die sogenannten Seequarks.

Obiges Modell soll als Grundlage genommen und sich auf die Flavour up, down und strange beschränkt werden<sup>8</sup>. Die Flavouranzahl wird mit  $n_f$  angegeben, in dieser Arbeit gilt damit  $n_f = 3$ . Aus Gründen der Lesbarkeit wird die Notation  $f_i(\xi) = q(\xi)$  eingeführt<sup>9</sup>.

Eine beliebige Parton-Verteilungsfunktion lässt sich additiv in Valenz- und Seeanteil aufteilen:

$$q(\xi) = q_V(\xi) + q_S(\xi). \quad (2.40)$$

Unter der Annahme, dass Flavour und Anti-Flavour nur aus Paarbildung der Gluonen entstehen und demnach den gleichen Seeanteil haben, gilt

$$q_V(\xi) = q(\xi) - \bar{q}(\xi), \quad (2.41)$$

da Anti-Flavour im Proton keinen Valenz-Anteil besitzen.

## 2.4 Einflüsse der QCD durch Prozesse nächster Ordnung

Bis jetzt wurde der Prozess samt Amplitude nur in führender Ordnung („leading order“, LO) der Störungstheorie betrachtet, da auf Amplituden von Feynmandiagrammen der führenden Ordnung zurückgegriffen wurden. Zu den Annahmen des Modells im Abschnitt 2.3.1 zählte, dass die Partonen nicht untereinander wechselwirken. Die Berücksichtigung von Gluonen und Seequarks als Folge der Wechselwirkung der Quarks im letzten Abschnitt ist folglich inkonsistent. Um diese Teilchen nun auch physikalisch zu rechtfertigen, werden Prozesse der nächstführenden Ordnung („next-to-leading order“, kurz NLO), zu sehen in Abbildung 2.5, berücksichtigt.

Es liegt von nun an der Fokus auf dem Verhalten der Quarks und Gluonen in der ersten Ordnung, da der Beitrag des streuenden Elektrons sich nicht verändert. Genauer formuliert: Der leptonische Tensor  $L^{\mu\nu}$  und der Photonpropagator bzw. der erste Teil der Amplitude,

$$\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2}, \quad (2.42)$$

bleibt erhalten, lediglich der hadronische Tensor  $W^{\mu\nu}$  bzw. der letzte Teil der Amplitude erfährt eine Veränderung in den betrachteten Prozessen.

Eine ausführliche Berechnung der Amplitude der Vertexkorrektur findet sich im Anhang C. Die Amplituden der anderen Beiträge sollen vorausgesetzt werden.

---

<sup>7</sup>Unter anderem in [8] beschrieben.

<sup>8</sup>Andere Flavour besitzen eine weit höhere Masse, die nicht mehr ignoriert werden kann. Dies führt zu einigen Sonderbehandlungen, die nicht Teil dieser Arbeit sein sollen.

<sup>9</sup> $q$  ist ein (Anti-)Flavour

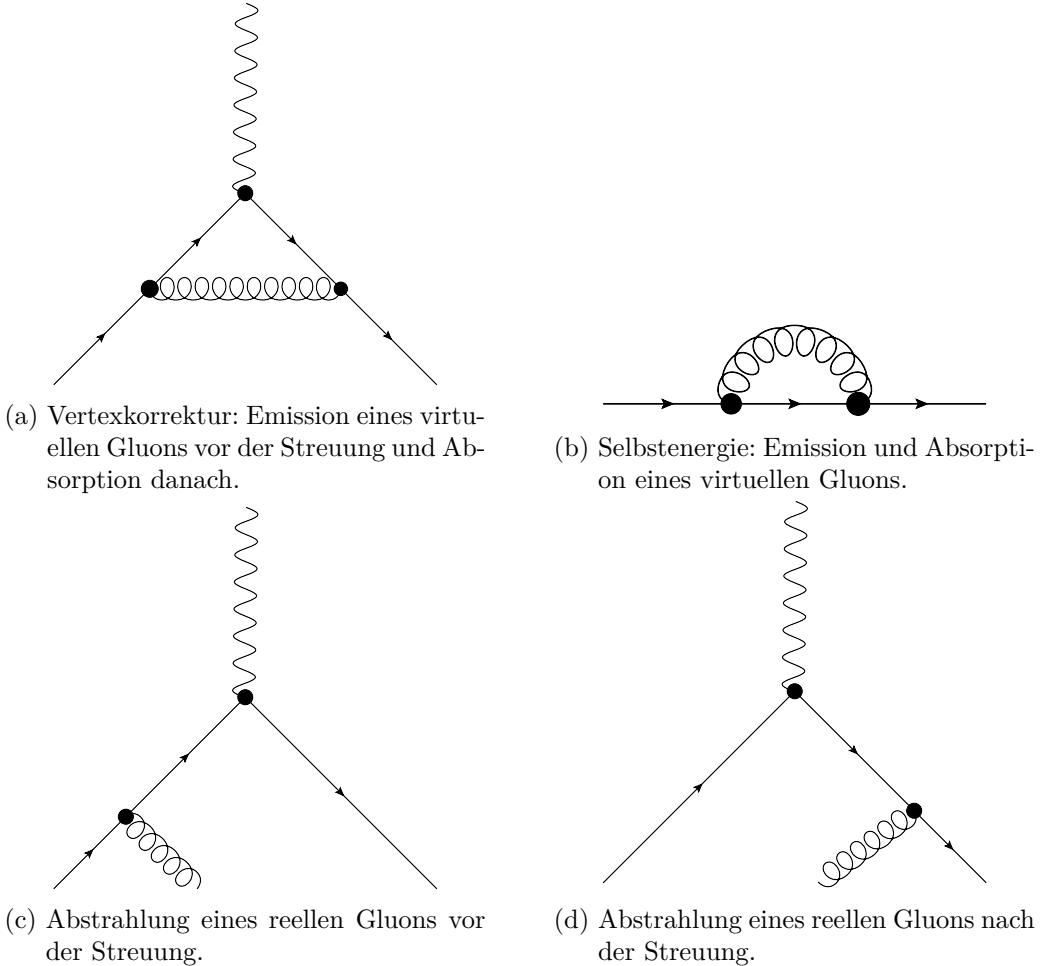


Abbildung 2.5: NLO-Korrekturen.

## 2.5 Herleitung der DGLAP-Gleichung

### 2.5.1 Der Formfaktor $W_0$ in LO

Im Folgenden steht die Frage im Fokus, wie diese zusätzlichen Amplituden Einfluss auf das in den letzten Abschnitten etablierte Partonmodell in führender Ordnung nehmen. Am Ende dieser Betrachtungen wird dann eine Verletzung der Bjorken'schen Skaleninvarianz durch einen logarithmischen Term und die daraus folgende DGLAP-Gleichung stehen.

Zuerst muss ein Weg gefunden werden, mit dem die Amplituden der betrachteten Korrekturen in die schon bestehenden Strukturfunktionen der führenden Ordnung ((2.37) und (2.38)) implementiert werden können. Es soll hierfür der neue Formfaktor

$$\begin{aligned}
 W_0(x, Q^2) &\equiv -g_{\mu\nu}W^{\mu\nu} \stackrel{(2.24)}{=} W_1(x, Q^2) \left( 4 - \frac{q^2}{Q^2} \right) - W_2(x, Q^2) \\
 &\quad \times \left( p^2 + 2 \frac{(p \cdot q)^2}{Q^2} + \frac{(p \cdot q)^2}{Q^2 \cdot Q^2} \cdot q^2 \right) \stackrel{(2.26)}{=} 3W_1(x) - W_2(x) \left( M^2 + \frac{Q^2}{4x^2} \right) \\
 &\stackrel{Q^2 \gg M^2, (2.39)}{=} 2W_1(x) = 4\pi \sum_q q(x)
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

establiert werden. Die Näherung  $Q^2 \gg M^2$  ist gerechtfertigt, da tiefinelastische Streuung betrachtet wird.

## 2 Über den theoretischen Hintergrund - eine Herleitung der DGLAP-Gleichung

Aus der Darstellung in der Partonsumme (2.30) folgt zudem bei Anwendung von  $g^{\mu\nu}$ :

$$W_0(x, Q^2) = \sum_q \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi) W_{0,\text{Parton}}\left(\frac{x}{\xi}, Q^2\right) = \sum_q \int_0^1 dz q(z) W_{0,\text{Parton}}(z, Q^2). \quad (2.44)$$

Beim Vergleich von (2.43) und (2.44) ergibt sich

$$W_{0,\text{Parton}}^{\text{LO}} = 4\pi e_q^2 \delta(1-z). \quad (2.45)$$

Diese Identität gilt allerdings nur in führender Ordnung, da sie auf Basis des Wirkungsquerschnitts führender Ordnung entwickelt wurde. Gleichermaßen kann allerdings nun in höheren Ordnungen vorgegangen werden.

### 2.5.2 Der Formfaktor $W_0$ in NLO

Hat man die Amplitude der nächsten Ordnung ermittelt, so kann diese auf  $W_0$  übertragen werden und nimmt so Einfluss auf die Verteilungsfunktionen (s. (2.44)). Mit den Korrekturen aus virtuellem Gluon am Vertex  $W_{0,\text{Parton}}^V$  (s. Abbildung 2.5a) und reellen Abstrahlungen  $W_{0,\text{Parton}}^R$  (s. Abbildung 2.5c und 2.5d) ergibt sich<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} W_{0,\text{Parton}} = & W_{0,\text{Parton}}^{\text{LO}} + W_{0,\text{Parton}}^V + W_{0,\text{Parton}}^R = 4\pi e_q^2 \left\{ \left[ \delta(1-z) \right. \right. \\ & - \frac{1}{\epsilon} \frac{\alpha_s}{\pi} P_{qq}(z) \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\Gamma(1-\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(1-\epsilon)} \Big] + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left[ (1+z^2) \left[ \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{1-z} \right]_+ - \frac{1+z^2}{1+z} \ln(z) + 3 + 2z - \left( \frac{9}{2} + \frac{\pi^2}{3} \right) \delta(1-z) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

mit den DGLAP Splitting-Funktionen

$$P_{qq}(z) = C_F \left\{ (1+z^2) \left[ \frac{1}{1-z} \right]_+ + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right\} \quad (2.47)$$

und der Distribution  $\left[ \frac{1}{1-z} \right]_+$ , die über folgende beide Bedingungen definiert ist:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{1-z} \right]_+ &= \frac{1}{1-z}, \text{ falls } z \neq 1 \\ \text{und } \int_0^1 dz f(z) \left[ \frac{1}{1-z} \right]_+ &= \int_0^1 \frac{(f(z) - f(1))}{1-z}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Es wurde die Feinstrukturkonstante der starken Wechselwirkung  $\alpha_s$  benutzt,  $C_F$  ist eine Gruppenkonstante der QCD zugrunde liegenden SU(3) Eichsymmetrie<sup>11</sup>.  $\mu$  und  $\epsilon$  haben ihren Ursprung in der im Anhang C erläuterten dimensionalen Regulierung, also der Überführung des Schleifenintegrals in  $D = 4 - \epsilon$  Dimensionen. Um ein physikalisches Ergebnis zu erhalten, ist der Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  zu bilden. Mit  $\mu$  wird eine Skala bezeichnet, die die physikalisch richtige Dimension wahrt.

<sup>10</sup>Hier wird implizit der Formfaktor  $W_0$  mit der Amplitude  $\mathcal{M}$  des Prozesses in Zusammenhang gebracht. Dass  $W^{\mu\nu}$  in der Gesamtamplitude das wechselwirkende Proton und damit auch die QCD-Korrekturen am Quark charakterisiert, soll diesen Schritt motivieren. Es wird die Eulersche Gammafunktion  $\Gamma(n) = \int_0^\infty dx e^{-x} x^{n-1}$  eingeführt.

<sup>11</sup>Näheres dazu im Anhang, Kapitel B.

### 2.5.3 Splitting-Funktionen und Renormierung der Partonverteilungsfunktionen

Eine genaue Erläuterung von (2.46) setzt die in dieser Arbeit nicht explizit betrachteten Amplituden der reellen Abstrahlungen und Selbstenergien voraus und wird deshalb übergangen. Bevor die letzten Schritte bis zur DGLAP-Gleichung unternommen werden, sollen aber zumindest die Splitting Funktionen  $P_{qq}(z)$  und ihr Auftauchen in (2.46) diskutiert werden. Alle Prozessen ist zu eigen, dass ein Quark ein virtuelles oder reelles Gluon abstrahlt. Der Impuls eines ein- oder auslaufenden Quarks bleibt also nicht konstant, er teilt sich in den Impuls des abstrahlenden Gluons und den des Quarks nach der Abstrahlung auf.  $P_{qq}$  kann als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, mit der ein Quark mit Flavour  $q$  nach einer Gluonabstrahlung nur noch einen Anteil  $z$  des Quarkimpulses vor der Abstrahlung besitzt. Hier wurde implizit wieder die gleiche Identifizierung zwischen kinematischer Größe  $z$  und Impulsanteil auf Quarkebene gemacht, wie sie auch schon im Partonmodell (2.35) auf Protonebene vorgenommen wurde. Vor diesem Hintergrund lässt sich auch der LO-Beitrag (2.43) physikalisch interpretieren. Da hier keine Abstrahlung stattfindet, muss der Impulsanteil durch die  $\delta$ -Funktion in der Integration über  $z$  auf 1 festgelegt werden.

Um nun den finalen Ausdruck für  $W_0$  (2.46) mit den Verteilungsfunktionen in Verbindung zu bringen, wird  $W_{0,\text{Parton}}$  in den Formfaktor des gesamten Protons (2.44) eingesetzt und

$\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\Gamma(1-\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(1-\epsilon)}$  bis zur ersten Ordnung in  $\epsilon$  entwickelt. Es ergibt sich

$$W_0(x, Q^2) = 4\pi \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) - \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \left( \frac{2}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{Q^2} \right) + R\left(\frac{x}{\xi}\right) \right]. \quad (2.49)$$

Unter  $R\left(\frac{x}{\xi}\right)$  werden jegliche endliche Teile von  $W_0$  zusammengefasst, die für die weiteren Ausführungen nicht mehr von Relevanz sind.

In (2.49) findet sich eine (Infrarot-)Divergenz der Form  $\frac{1}{\epsilon}^{12}$ , die auch schon in (2.46) aufgetreten ist.<sup>13</sup> Divergierende Amplituden sind jedoch unphysikalisch, denn nach (2.16) geht mit ihnen auch ein divergenter Wirkungsquerschnitt einher. Man spricht von infraroter Divergenz, da sie bei einem sehr kleinen Gluonimpuls auftaucht. Um diese Divergenz zu umgehen, wird auf die Renormierung einer physikalischen Größe<sup>14</sup> zurückgegriffen.

Die zentrale Idee der Renormierung liegt in der Neudefinierung physikalischer Größen, um die entstandenen Divergenzen in den Prozessen höherer Ordnungen zu absorbieren: Größen, die zu Beginn der Rechnung als physikalisch, insbesondere also auch als endlich angenommen wurden, stellen sich bei Auftauchen der Divergenzen als schlecht definiert heraus. Die renormalisierte Größe tritt deshalb an den Platz der vorherigen.

Konkret soll der (divergente) Formfaktor der ersten Ordnung (2.49) in den (endlichen) Formfaktor der führenden Ordnung (2.43) überführt werden.

Hierfür renormiert man die Verteilungsfunktionen auf<sup>15</sup>

$$q_R(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi) \left\{ \delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) - \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \left( \frac{2}{\epsilon} + \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right) + R\left(\frac{x}{\xi}\right) \right\}. \quad (2.50)$$

<sup>12</sup>Beachte den Limes aus der dimensionalen Regulierung.

<sup>13</sup>Anders als in der QED kompensieren reelle Abstrahlungen hier nicht jegliche Infrarot-Divergenzen.

<sup>14</sup>Selbiges Prinzip wird bei ultravioletten Divergenzen angewandt, was eine Redefinierung von zum Beispiel der Masse  $m$ , der Ladung  $e$  oder auch der Feinstrukturkonstante  $\alpha_s$  zur Folge hat. Eng damit verbunden ist die Renormierungsgruppengleichung der entsprechenden Größe, auf die in Kapitel 3.3.1 eingegangen wird.

<sup>15</sup>Eine Renormierung ist auf unterschiedliche Weisen möglich, man spricht von einer Renormierung in einem bestimmten Schema. Hier werden alle, insbesondere auch die endlichen Teile der Strukturfunktion (2.49) in die renormierte Verteilungsfunktion aufgenommen, die Renormierung erfolgt daher im DIS (Deep inelastic scattering) - Schema.

## 2 Über den theoretischen Hintergrund - eine Herleitung der DGLAP-Gleichung

Der Index  $R$  wird im weiteren Verlauf unterschlagen, da nur noch mit den renormierten Partonverteilungsfunktionen gearbeitet wird.

Die renormierten Partonverteilungsfunktionen sind offensichtlich  $Q^2$ -abhängig, verletzen also die Bjorken'sche Skaleninvarianz. Aussagen über Verteilungsfunktionen selbst kann man treffen, wenn man sie in Relation zu einer neuen, beliebigen Impulsskala  $Q_0^2$  betrachtet. Bildet man die Differenz zwischen beiden Skalen, so verschwinden die infraroten Divergenzen und man erhält

$$\begin{aligned} q(x, Q^2) - q(x, Q_0^2) &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi, Q^2) \left\{ -\frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \left( \ln \frac{Q^2}{\mu^2} - \ln \frac{\mu^2}{Q_0^2} \right) + R\left(\frac{x}{\xi}\right) \right\} \\ \Leftrightarrow q(x, Q^2) &= q(x, Q_0^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Daraus folgt sofort

$$\boxed{\frac{\partial q(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right)}. \quad (2.52)$$

Dies ist die vorläufige Form der DGLAP-Gleichung für einen beliebigen Quarkflavour. Hier und im Folgenden sollen die Splitting-Funktionen nicht flavourabhängig sein.

In obigen Ausführungen wurden allerdings nur die Wechselwirkungen zwischen Quarks in der ersten Ordnung Störungstheorie betrachtet. Seequarks, also die Aufspaltung eines Gluons in Quark und Antiquark sowie Wechselwirkungen des Gluons, tauchen bis jetzt nicht auf, müssen aber als zusätzliche Prozesse in der DGLAP-Gleichung berücksichtigt werden. Tabelle 2.1 führt diese Prozesse samt zugehöriger Splitting-Funktion auf.

Neben der Sonderbehandlung von Gluonen durch  $P_{gg}(x)$  führen diese zusätzlichen Splitting-Funktionen dazu, dass Quark-Verteilungsfunktionen auch von der Gluon-Verteilungsfunktion und nicht nur (wie in der vorläufigen DGLAP-Gleichung (2.52)) von sich selbst beeinflusst werden. Dieses „Mischen“ lässt sich über einen Vektor-/Matrixformalismus ausdrücken. Die finale DGLAP-Gleichung<sup>16</sup> hat somit folgende Form:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} \begin{pmatrix} u(x, Q^2) \\ \bar{u}(x, Q^2) \\ d(x, Q^2) \\ \vdots \\ g(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \begin{pmatrix} P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) & 0 & \dots & P_{qg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \\ 0 & P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) & & P_{qg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ P_{gq}\left(\frac{x}{\xi}\right) & P_{gq}\left(\frac{x}{\xi}\right) & \dots & P_{gg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(x, Q^2) \\ \bar{u}(x, Q^2) \\ d(x, Q^2) \\ \vdots \\ g(x, Q^2) \end{pmatrix}} \quad (2.53)$$

Mit obiger Gleichung schließt dieser Abschnitt und das gesamte Kapitel. Durch Zulassen von Partoneninteraktionen über die QCD musste zwar die sehr einfache Struktur des Partonmodells in Abschnitt 2.3.2 samt der Bjorkenschen Skaleninvarianz aufgegeben werden, allerdings bietet die DGLAP-Gleichung (2.53) nun eine Möglichkeit, durch die numerische Lösung dieser Integro-Differentialgleichung die explizite Gestalt der Partonverteilungsfunktionen für die Quark-Flavour und Gluonen zu bestimmen. Bevor in Kapitel 4.1 ein solches Programm vorgestellt wird, werden im folgenden Kapitel zunächst noch einige vorbereitende Umformungen an (2.53) für die numerische Implementierung vorgenommen.

<sup>16</sup>Bzw. DGLAP-Gleichungen, falls jede Zeile einzeln betrachtet wird.

Tabelle 2.1: DGLAP-Splitting-Funktionen zu verschiedenen Quark-Gluon-Prozessen.

Beschreibung	physikalischer Prozess	entsprechende Splitting-Funktion <sup>17</sup>
Gluonabstrahlung eines Quarks		$P_{qq}(x') = C_F \left[ \frac{1+x'^2}{(1-x')_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x') \right]$
Gluon teilt sich in Quark und Anti-Quark auf		$P_{qg}(x') = T_F [x'^2 + (1-x')^2]$
Quarkabstrahlung unter Umwandlung zum Gluon		$P_{gq}(x') = C_F \left[ \frac{1+(1-x')^2}{x'} \right]$
Gluonabstrahlung eines Gluons		$P_{gg}(x') = 2C_A \left[ \frac{x'}{(1-x')_+} + (1-x') \cdot (x' + \frac{1}{x'}) \right] + \frac{11C_A - 4n_f T_F}{6} \delta(1-x')$

<sup>17</sup>Aus Übersichtsgründen wird die Abkürzung  $x' = \frac{x}{\xi}$  benutzt.  $T_F$ ,  $C_F$  und  $C_A$  stammen aus der Eichgruppe der QCD (s. Anhang B). Entnommen aus [15], S. 12.

### 3 Vorbereitungen für die numerische Implementierung der DGLAP-Gleichung

Nachdem die DGLAP-Gleichung (2.53) hergeleitet wurde, soll sie nun gelöst werden. Es handelt sich allerdings um eine matrixwertige Integro-Differentialgleichung. Dadurch wird eine analytische Herangehensweise von vornherein ausgeschlossen und zudem eine numerische Lösung sehr erschwert. Durch verschiedene Umformungen kann die Implementierung allerdings deutlich vereinfacht werden.

Begonnen wird mit der Mellin-Transformation, die die DGLAP-Gleichung auf eine Differentialgleichung reduziert. Die Matrixwertigkeit wird dann durch Diagonalisierung umgangen.

#### 3.1 Die Mellin-Transformation

Die Mellintransformation ist wie folgt definiert:

$$\text{MT}[f(x)] \equiv f(n) \equiv \int_0^1 dx f(x) x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Durch diese Integraltransformation lässt sich der rechtsseitige Ausdruck der DGLAP-Gleichung (2.53) entscheidend vereinfachen, da sie aufgrund von

$$\begin{aligned} \text{MT} \left[ \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi) P_{qq} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right] &= \int_0^1 dx x^{n-1} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi) P_{qq} \left( \frac{x}{\xi} \right) \\ &= \int_0^1 dx x^{n-1} \int_0^1 dz \int_0^1 d\xi q(\xi) P_{qq} \left( \frac{x}{\xi} \right) \delta(x - \xi z) \\ &= \int_0^1 dz z^{n-1} P_{qq}(z) \int_0^1 d\xi \xi^{n-1} q(\xi) = q(n) \cdot P_{qq}(n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

im Mellin-Raum die Gestalt einer einfachen Differentialgleichung hat:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} \begin{pmatrix} u(n, Q^2) \\ \bar{u}(n, Q^2) \\ d(x, Q^2) \\ \vdots \\ g(n, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq}(n) & 0 & \dots & P_{gq}(n) \\ 0 & P_{qq}(n) & & P_{gq}(n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ P_{gq}(n) & P_{gq}(n) & \dots & P_{gg}(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(n, Q^2) \\ \bar{u}(n, Q^2) \\ d(n, Q^2) \\ \vdots \\ g(n, Q^2) \end{pmatrix}} \quad (3.3)$$

### 3 Vorbereitungen für die numerische Implementierung der DGLAP-Gleichung

Wie simple Integration zeigt, ergeben sich die Mellin-Transformierten der Splitting-Funktionen<sup>1</sup> zu

$$P_{qq}(n) = C_F \cdot \left( \frac{3}{2} - I(n-1) - I(n+1) \right), \quad (3.4)$$

$$P_{gq}(n) = C_F \cdot \frac{2-n-n^2}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}, \quad (3.5)$$

$$P_{gg}(n) = T_F \cdot \frac{2+n+n^2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}, \quad (3.6)$$

$$P_{gg}(n) = 2C_A \cdot \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - I(n) \right) + \frac{11C_A - 4n_f T_F}{6}. \quad (3.7)$$

Aufgrund der Komplexwertigkeit der Mellin-Transformierten erfolgt die Rücktransformation über eine Kontur in der komplexen Ebene<sup>2</sup> (s. auch Abb. 3.1):

$$xf(x) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_0^\infty dz [e^{i\phi} x^{1-c-z \exp(i\phi)} f(n=c+ze^{i\phi})] - \int_0^\infty dz [e^{-i\phi} x^{1-c-z \exp(-i\phi)} f(n=c+ze^{-i\phi})] \right\}. \quad (3.8)$$

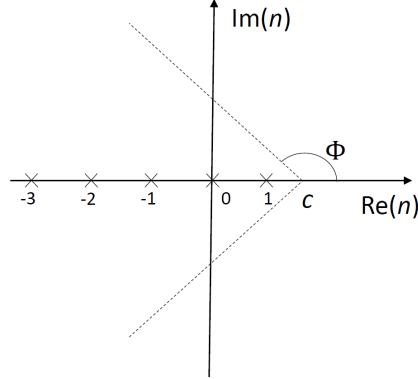


Abbildung 3.1: Die Kontur in der komplexen Ebene, über die die Mellin-Rücktransformation erfolgt, festgelegt durch die Parameter  $c$  und  $\phi$ . Die Singularitäten der Mellin-Funktionen sind durch Kreuze eingezeichnet. Entnommen aus [16], S. 12.

$c \in \mathbb{R}$ , das auf der reellen Achse rechts neben allen Singularitäten liegen muss, legt den Punkt der Kontur auf der reellen Achse fest,  $\phi \in [0, 2\pi]$  den Winkel der Kontur zur reellen Achse. Den am weitesten rechts liegenden Pol aller hier betrachteten Funktionen besitzen die Mellin-Transformierten der Splitting-Funktionen an der Stelle  $n = 1$ <sup>3</sup>. Zudem sind alle Funktionen im  $x$ -Raum reellwertig, sodass die Mellin-Transformierten nur durch ihre Argumente komplexwertig werden ( $f^*(n) = f(n^*)$ ). Wegen  $u - u^* = 2i\text{Im}(u)$  lässt sich (3.8) deshalb zu

$$xf(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz \text{Im} \left( e^{i\phi} x^{1-c-z \exp(i\phi)} f(n=c+ze^{i\phi}) \right) \quad (3.9)$$

vereinfachen.

<sup>1</sup>Für das Integral  $I(n) = \int_0^1 dx \frac{1-x^n}{1-x}$  gilt  $I(n) \approx \gamma_E + \psi(n+1)$ .  $\gamma_E$  ist die Euler-Mascheroni-Konstante und  $\psi(n)$  die logarithmische Ableitung der Eulerschen Gammafunktion.

<sup>2</sup>Dafür müssen mathematische Voraussetzungen wie Holomorphie und gleichmäßige Konvergenz im Unendlichen gegeben sein, für detaillierte Ausführungen siehe [2], Kapitel 11.

<sup>3</sup>Man beachte den Faktor  $(n-1)$  im Nenner von  $P_{gq}(n)$  und  $P_{gg}(n)$ .

## 3.2 Wahl einer neuen Basis

Nachdem durch die Mellin-Transformation die Integralauswertung in der DGLAP-Gleichung umgangen werden konnte, soll nun die Matrixstruktur vereinfacht werden. Wählt man eine Darstellung in einer entsprechenden Basis, wird das Mischen der Quarkverteilungen mit der Gluonverteilung auf ein Basiselement reduziert und gleichzeitig ein großer Anteil der Matrix diagonalisiert.

Auf folgende Linearkombinationen der physikalischen Basiselemente wird ab jetzt zurückgegriffen:

Non-Singulett :	$q_{ij}^{\pm} \equiv (q_i \pm \bar{q}_i) - (q_j \pm \bar{q}_j)$ , $i$ und $j$ sind Quarkflavour
Valenz :	$q_V \equiv \sum_q (q - \bar{q})$
Singulett :	$q_S \equiv \sum_q (q + \bar{q})$
Gluon (unverändert) :	$g \equiv g$

Die physikalische Basis hat allerdings  $2n_f + 1 = 7$  Elemente. Um die gleiche Anzahl auch in der neuen Basis zu erhalten, werden aus den Non-Singulett-Kombinationen nur die ausgewählt, die den up-Flavour an zweiter Position enthalten:  $q_{du}^+$ ,  $q_{su}^+$ ,  $q_{du}^-$  und  $q_{su}^-$ . Die Basiswechselmatrizen<sup>4</sup> von der neuen Basis in die physikalische und zurück ergeben sich dann zu

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

und

$$U^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

$U^{-1}$  liefert die Darstellungen der neuen in der physikalischen Basis, auf die in der Rücktransformation zurückgegriffen wird.

Die Splitting-Matrix  $P$  aus (2.53) wird in der neuen Basis durch

$$P' = U^{-1} P U = \begin{pmatrix} P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) & 6P_{qg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \\ 0 & \dots & P_{gq}\left(\frac{x}{\xi}\right) & P_{gg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

dargestellt, ist also bis auf den Singulett/Gluon-Anteil diagonal. Die Ansätze und Anfangsbedingungen für die Verteilungsfunktionen sind später in dieser Basis formuliert.

<sup>4</sup>Einträge in  $U$  reihenweise nach der Reihenfolge der oben stehenden Definitionen:  $(q_V, q_{du}^+, q_{su}^+, q_{du}^-, q_{su}^-, q_S, g)$ .

### 3.3 Lösung der DGLAP-Gleichung im Mellin-Raum

#### 3.3.1 Renormierungsgruppengleichung von $\alpha_s$ in erster Ordnung

Die DGLAP-Gleichung ist nun in eine Form gebracht worden, die eine einfache Lösung ermöglicht. Bevor diese allerdings diskutiert wird, muss zuerst noch auf die Skalenabhängigkeit<sup>5</sup> von  $\alpha_s$  eingegangen werden. Diese manifestiert sich auch in bekannten Effekten der starken Wechselwirkung, „Confinement“ und „asymptotischer Freiheit“. Dass bei hohen Energien/kleinen Abständen die Kopplungsstärke klein (asymptotische Freiheit) und bei geringen Energien/großen Abständen die Kopplungsstärke groß wird, erklärt die Nicht-Existenz freier Quarks und ist somit Ausdruck der Energieabhängigkeit von  $\alpha_s$ .

In erster Ordnung ergibt sich durch die Renormierungsgruppengleichung

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \cdot \ln(\frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2})} \stackrel{n_f=3}{=} \frac{12\pi}{27} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2})}, \quad (3.13)$$

$\Lambda_{\text{QCD}} = 0,2994 \text{ GeV}$  ist eine in der Renormierung von  $\alpha_s$  eingeführte Konstante<sup>6</sup>. Sie wird auch als Landau-Pol bezeichnet, da  $\alpha_s$  für  $Q^2 \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}}^2$  divergiert. Streng genommen kann hier erst gerechtfertigt werden, dass die QCD-Korrekturen in 2.4 störungstheoretisch behandelt werden: Die Reihenentwicklung von  $\alpha_s$  in der Störungstheorie konvergiert, denn es werden Energien im GeV-Bereich betrachtet, für die  $\alpha_s < 1$  gilt.

#### 3.3.2 Non-Singulett-Verteilungen

Für alle Basiselemente außer Singulett- und Gluon-Verteilung ist die Splitting-Matrix diagonal. Im Mellin-Raum ist also nur noch die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial f_{\text{Non-Singulett}}(n, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P_{qq}(n) \cdot f_{\text{Non-Singulett}}(n, Q^2) \quad (3.14)$$

zu lösen. Über elementare Lösungsverfahren, zum Beispiel Trennung der Variablen, erhält man

$$f_{\text{Non-Singulett}}(n, Q^2) = f_{\text{Non-Singulett}}(n, Q_0^2) \cdot \left( \frac{\ln(\frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2})}{\ln(\frac{Q_0^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2})} \right)^{\frac{6}{27} \cdot P_{qq}(n)}. \quad (3.15)$$

Zur Bestimmung der Anfangsbedingung wird die Verteilung  $f_{\text{Non-Singulett}}$  bei einer frei wählbaren Übertragsenergie  $Q_0$  experimentell vermessen und kann dann durch einen Fit als Funktion dargestellt werden. In dieser Arbeit werden die folgenden Ansatzfunktionen<sup>7</sup> mit den Fit-Parametern  $p_1$  bis  $p_6$  verwendet:

$$q(x) = p_1 \cdot (1-x)^{p_2} \cdot x^{p_3} \cdot (1 - p_5 x^{p_4} + p_6 x) \quad (3.16)$$

$$g(x) = p_1 \cdot (1-x)^{p_2} \cdot x^{p_3} \quad (3.17)$$

Die entsprechenden Mellin-Transformierten lauten<sup>8</sup>

$$q(n) = p_1 \cdot \left\{ B(p_2 + n - 1, p_3 + 1) \cdot \left[ 1 + \frac{p_6 \cdot (p_2 + n - 1)}{p_2 + p_3 + n} \right] + p_5 \cdot B(p_2 + p_4 + n - 1, p_3 + 1) \right\}, \quad (3.18)$$

$$g(n) = p_1 \cdot B(p_2 + n - 1, p_3 + 1). \quad (3.19)$$

<sup>5</sup>Diese Skalenabhängigkeit hat ihren Ursprung analog zu den Partonverteilungsfunktionen in der Renormierung der Feinstrukturkonstante.

<sup>6</sup>Und zudem noch von der Flavourzahl  $n_f$  abhängig. Entnommen aus [5].

<sup>7</sup>Entnommen aus [5].

<sup>8</sup>Nach [7].

$B(a, b)$  ist die Eulersche Betafunktion<sup>9</sup>:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}. \quad (3.20)$$

Die Parameter für jede Verteilungsfunktion sind im Programmcode in Kapitel 4.1 zu finden.

Die Lösung der DGLAP-Gleichung (3.15) ermöglicht es nun, Non-Singulett-Verteilungsfunktionen bei jeder beliebigen Übertragsenergie  $Q$  zu ermitteln, falls sie bei einer bekannt sind<sup>10</sup>. Das Vorgehen im Singulett-/Gluon-Fall ist ähnlich, gestaltet sich allerdings durch die fehlende Diagonalisierung aufwändiger.

### 3.3.3 Singulett- und Gluon-Verteilung

Die Splitting-Matrix ist für Singulett- und Gluon-Verteilungen nicht diagonal, es gilt (s. (3.12))

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} \begin{pmatrix} q_S(n, Q^2) \\ g(n, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq}(n) & 6P_{qg}(n) \\ P_{gq}(n) & P_{gg}(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_S(n, Q^2) \\ g(n, Q^2) \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Zuerst muss also eine zweite Diagonalisierung erfolgen. Die entsprechenden Basiswechselmatrizen ergeben sich zu

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{P_{gq}(n)}{\sqrt{\dots}} & \frac{P_{qq}(n)-P_{gg}(n)+\sqrt{\dots}}{2\sqrt{\dots}} \\ \frac{P_{gq}(n)}{\sqrt{\dots}} & \frac{-P_{qq}(n)+P_{gg}(n)+\sqrt{\dots}}{2\sqrt{\dots}} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

und

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{P_{qq}(n)-P_{gg}(n)-\sqrt{\dots}}{2P_{gq}(n)} & \frac{P_{qq}(n)-P_{gg}(n)+\sqrt{\dots}}{2P_{gq}(n)} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

die diagonalisierte Matrix zu

$$P''_{\text{Singulett/Gluon}} = \begin{pmatrix} P_{qq}(n) + P_{gg}(n) - \sqrt{\dots} & 0 \\ 0 & P_{qq}(n) + P_{gg}(n) + \sqrt{\dots} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Hierbei wurde die Abkürzung

$$\sqrt{\dots} = \sqrt{P_{qq}(n)^2 - 2P_{qq}(n) \cdot P_{gg}(n) + P_{gg}(n)^2 + 24P_{qg}(n) \cdot P_{gq}(n)} \quad (3.25)$$

verwendet.

Singulett- und Gluon-Verteilungen werden also zuerst mittels  $S$  transformiert, die Evolution in die gewünschte Energie findet dann wieder über (3.15) statt<sup>11</sup>. Durch Anwenden von  $S^{-1}$  gelangt man dann zu den Singulett- und Gluon-Verteilungen in der „Ziel“-Energie  $Q$ .

Es sind nun alle Vorbereitungen getroffen worden, um den Programmcode vorstellen zu können, der das Ziel dieser Arbeit realisiert: Die Lösung der DGLAP-Gleichung.

---

<sup>9</sup>Mit der schon in Kapitel 3.1 eingeführten Eulerschen Gammafunktion  $\Gamma(a)$ .

<sup>10</sup>Die Verteilungsfunktionen von  $Q_0$  nach  $Q$  zu überführen, wird auch als „Evolution“ bezeichnet.

<sup>11</sup>Hier allerdings mit den entsprechenden Eigenwerten in  $P''_{\text{Singulett/Gluon}}$  anstelle von  $P_{qq}(n)$ .

# 4 Die numerische Lösung der DGLAP-Gleichung

## 4.1 Der Programmcode

Der nachstehende Text samt Programmcode ist eine .tex-Konvertierung einer „Jupyter-Notebook“-Datei der Version Python 3.6. Im Folgenden wechseln sich erläuternde Kommentare mit Code-Abschnitten ab.

Es soll begonnen werden mit der Definition der Hilfsfunktion  $I(n)$  und der Eulerschen Betafunktion. Außerdem werden die Gruppenkonstanten der SU(3) Lie-Gruppe der QCD<sup>1</sup> und  $\Lambda_{\text{QCD}}$  aus der Renormierungsgruppengleichung (3.13) definiert.

Anschließend werden die Basisfunktionen im Mellin-Raum bei der Energie  $Q_0 = \sqrt{0,4}\text{GeV}$  samt der Fit-Parameter für die jeweiligen Ansätze (s. Kapitel 3.3.2) aus [5] eingeführt. Zwei Dinge sind zu beachten: In [5] werden nur zwei Flavour berücksichtigt, daher wird für den strange-Flavour ein Ansatz aus [1] verwendet. Da keine Valenz-Quarks im Flavour strange existieren, kann für Quark und Anti-Quark der gleiche Ansatz gewählt werden. Ferner entsprechen die Basisfunktionen aus der Literatur nicht der in dieser Arbeit gewählten aus Kapitel 3.2, deshalb wird in den danach folgenden Zeilen in diese Basis transformiert.

Nach der abschließenden Definition der Splitting-Funktionen im Mellin-Raum sind alle grundlegenden Bausteine für die Evolution vorhanden.

```
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import special
#Gruppenkonstanten der SU(3):
C_F=4/3
C_A=3
T_F=0.5

Lambda_QCD=0.2994#in GeV

#Hilfsfunktionen:
def I(n):
    eulermascheroni=0.577215664901532
    return (eulermascheroni+0j)+sp.special.digamma(n+(1+0j))
def beta(a, b):
    return sp.special.gamma(a)*sp.special.gamma(b)/sp.special.gamma(a+b)

#Basis aus Literatur:
Q_0=np.sqrt(0.4)#in GeV, s. GRV98 NLO S.4
def PDFstartu_V(n):
    p_1=0.632
    p_2=0.43
```

<sup>1</sup>Für nähere Erläuterungen siehe Anhang B.

```

p_3=3.09
p_4=0.5
p_5=0
p_6=18.2
return p_1*( beta( (p_2+0j)+n-(1+0j), p_3+1 )*\\
((1+0j)+((p_6+0j)*((p_2+0j)+n-(1+0j))))/((p_2+0j)+(p_3+0j)+n))\
+(p_5+0j)*beta( (p_2+0j)+(p_4+0j)+n-(1+0j),p_3+1 ) )

def PDFstartd_V(n):
    p_1=0.394368
    p_2=0.43
    p_3=4.09
    p_4=0.5
    p_5=0
    p_6=18.2
    return p_1*( beta( (p_2+0j)+n-(1+0j), p_3+1 )*\\
((1+0j)+((p_6+0j)*((p_2+0j)+n-(1+0j))))/((p_2+0j)+(p_3+0j)+n))\
+(p_5+0j)*beta( (p_2+0j)+(p_4+0j)+n-(1+0j),p_3+1 ) )

def PDFstartDelta(n):#Anti-d - Anti-u
    p_1=0.2
    p_2=0.43
    p_3=12.4
    p_4=0.5
    p_5=-13.3
    p_6=60
    return p_1*( beta( (p_2+0j)+n-(1+0j), p_3+1 )*\\
((1+0j)+((p_6+0j)*((p_2+0j)+n-(1+0j))))/((p_2+0j)+(p_3+0j)+n))\
+(p_5+0j)*beta( (p_2+0j)+(p_4+0j)+n-(1+0j),p_3+1 ) )

def PDFstartSigma(n):#Anti-d + Anti-u
    p_1=1.24
    p_2=0.2
    p_3=8.5
    p_4=0.5
    p_5=-2.3
    p_6=5.7
    return p_1*( beta((p_2+0j)+n-(1+0j), p_3+1 )*\\
((1+0j)+((p_6+0j)*((p_2+0j)+n-(1+0j))))/((p_2+0j)+(p_3+0j)+n))\
+(p_5+0j)*beta( (p_2+0j)+(p_4+0j)+n-(1+0j),p_3+1 ) )

def PDFstarts(n):#identisch zu Anti-strange
    return 0.2*PDFstartSigma(n)

def PDFstartGluon(n):
    p_1=20.8
    p_2=1.6
    p_3=4.1
    return p_1*beta( (p_2+0j)+n-(1+0j), p_3+1 )

#In Singulett/Non-Singulett-Basis:
def PDFstartValenz(n):
    return PDFstartu_V(n)+PDFstartd_V(n)
def PDFstartdu_plus(n):
    return -PDFstartu_V(n)+PDFstartd_V(n)+2*PDFstartDelta(n)
def PDFstarts_u_plus(n):

```

```

        return -PDFstartu_V(n)+PDFstartDelta(n)-PDFstartSigma(n)+2*PDFstarts(n)
def PDFstartdu_minus(n):
    return -PDFstartu_V(n)+PDFstartd_V(n)
def PDFstartsu_minus(n):
    return -PDFstartu_V(n)
def PDFstartSingulett(n):
    return PDFstartu_V(n)+PDFstartd_V(n)+2*PDFstartSigma(n)+2*PDFstarts(n)

#Mellin-Splitting-Funktionen:
def P_qq(n):
    return C_F*(1.5-I(n-(1+0j))-I(n+(1+0j)))
def P_gq(n):
    return C_F*((2+0j)-n-n**2)/((n-(1+0j))*n*(n+(1+0j)))
def P_qg(n):
    return T_F*((2+0j)+n+n**2)/(n*(n+(1+0j))*(n+(2+0j)))
def P_gg(n):
    return (11*C_A-12*T_F)/6+2*C_A*(1/(n-(1+0j))-1/n+1/(n+(1+0j))-1/(n+(2+0j))-I(n))

```

Es kann nun schon die Evolution der Non-Singulett-Verteilungen gemäß Vorschrift (3.15) durchgeführt werden.

```

def PDFzielValenz(n, Q):
    return PDFstartValenz(n)*(np.log(Q**2/Lambda_QCD**2) \
    /np.log(Q_0**2/Lambda_QCD**2))**((6*P_qq(n))/27)
def PDFzieldu_plus(n, Q):
    return PDFstartdu_plus(n)*(np.log(Q**2/Lambda_QCD**2) \
    /np.log(Q_0**2/Lambda_QCD**2))**((6*P_qq(n))/27)
def PDFzielsu_plus(n, Q):
    return PDFstartsu_plus(n)*(np.log(Q**2/Lambda_QCD**2) \
    /np.log(Q_0**2/Lambda_QCD**2))**((6*P_qq(n))/27)
def PDFzieldu_minus(n, Q):
    return PDFstartdu_minus(n)*(np.log(Q**2/Lambda_QCD**2) \
    /np.log(Q_0**2/Lambda_QCD**2))**((6*P_qq(n))/27)
def PDFzielsu_minus(n, Q):
    return PDFstartsu_minus(n)*(np.log(Q**2/Lambda_QCD**2) \
    /np.log(Q_0**2/Lambda_QCD**2))**((6*P_qq(n))/27)

```

Für Singulett- und Gluon-Verteilungen muss zuerst (nach Definition des  $\sqrt{\dots}$ -Ausdrucks (3.25)) eine weitere Basistransformation durchgeführt werden. In dieser nun diagonalen Darstellung kann die Evolution stattfinden. Abschließend wird wieder in die Ausgangsbasis zurücktransformiert.

```

def PWurzel(n):
    return np.sqrt(P_qq(n)**2-2*P_qq(n)*P_gg(n)+P_gg(n)**2+24*P_qg(n)*P_gq(n))

#Bilde neue Basis:
def V1start(n):
    return -P_gq(n)/PWurzel(n)*PDFstartSingulett(n) \
    +(P_qq(n)-P_gg(n)+PWurzel(n))/(2*PWurzel(n))*PDFstartGluon(n)
def V2start(n):
    return P_gq(n)/PWurzel(n)*PDFstartSingulett(n) \
    +(-P_qq(n)+P_gg(n)+PWurzel(n))/(2*PWurzel(n))*PDFstartGluon(n)

```

```
#Eigenwerte der P-Matrix für Singulett und Gluon:
def P_1(n):
    return 0.5*(P_qq(n)+P_gg(n)-Pwurzel(n))
def P_2(n):
    return 0.5*(P_qq(n)+P_gg(n)+Pwurzel(n))

#Evolution:
def V1ziel(n, Q):
    return V1start(n)*(np.log(Q**2/Lambda_QCD**2) \
    /np.log(Q_0**2/Lambda_QCD**2))**(6*P_1(n)/27)
def V2ziel(n, Q):
    return V2start(n)*(np.log(Q**2/Lambda_QCD**2) \
    /np.log(Q_0**2/Lambda_QCD**2))**(6*P_2(n)/27)

#Basisrücktransformation:
def PDFzielSingulett(n, Q):
    return (P_qq(n)-P_gg(n)-Pwurzel(n))/(2*P_gq(n))*V1ziel(n, Q) \
    +(P_qq(n)-P_gg(n)+Pwurzel(n))/(2*P_gq(n))*V2ziel(n, Q)
def PDFzielGluon(n, Q):
    return V1ziel(n, Q)+V2ziel(n, Q)
```

Es wurde nun die Evolution aller Elemente der Singulett-/Non-Singulett-Basis durchgeführt. Nun kann also die Rücktransformation gemäß der Einträge der inversen Basiswechselmatrix (3.11) stattfinden. Zuletzt werden noch wegen ihrer physikalischen Relevanz die Valenz-Verteilungen aller Flavour definiert.

```
PDFu(n, Q):
    return 1/6*(PDFzielValenz(n, Q)-PDFieldu_plus(n, Q)\ 
    -PDFzielsu_plus(n, Q)-PDFieldu_minus(n, Q)\ 
    -PDFzielsu_minus(n, Q)+PDFzielSingulett(n, Q))
def PDFanti_u(n, Q):
    return 1/6*(-PDFzielValenz(n, Q)-PDFieldu_plus(n, Q)\ 
    -PDFzielsu_plus(n, Q)+PDFieldu_minus(n, Q)\ 
    +PDFzielsu_minus(n, Q)+PDFzielSingulett(n, Q))
def PDFd(n, Q):
    return 1/6*(PDFzielValenz(n, Q)+2*PDFieldu_plus(n, Q)\ 
    -PDFzielsu_plus(n, Q)+2*PDFieldu_minus(n, Q)\ 
    -PDFzielsu_minus(n, Q)+PDFzielSingulett(n, Q))
def PDFanti_d(n, Q):
    return 1/6*(-PDFzielValenz(n, Q)+2*PDFieldu_plus(n, Q)\ 
    -PDFzielsu_plus(n, Q)-2*PDFieldu_minus(n, Q)\ 
    +PDFzielsu_minus(n, Q)+PDFzielSingulett(n, Q))
def PDFs(n, Q):
    return 1/6*(PDFzielValenz(n, Q)-PDFieldu_plus(n, Q)\ 
    +2*PDFzielsu_plus(n, Q)-PDFieldu_minus(n, Q)\ 
    +2*PDFzielsu_minus(n, Q)+PDFzielSingulett(n, Q))
def PDFanti_s(n, Q):
    return 1/6*(-PDFzielValenz(n, Q)-PDFieldu_plus(n, Q)\ 
    +2*PDFzielsu_plus(n, Q)+PDFieldu_minus(n, Q)\ 
    -2*PDFzielsu_minus(n, Q)+PDFzielSingulett(n, Q))
def PDFu_V(n, Q):
```

```

        return PDFu(n, Q)-PDFanti_u(n, Q)
def PDFd_V(n, Q):
    return PDFd(n, Q)-PDFanti_d(n, Q)
def PDFs_V(n, Q):
    return PDFs(n, Q)-PDFanti_s(n, Q)

```

Nachdem jetzt die Mellin-Transformierten physikalischer Verteilungen für die Energie  $Q$  vorliegen, fehlt nur noch die Rücktransformation in den  $x$ -Raum. Hierfür wurde eine Routine geschrieben, die das Integral in der Rücktransformationsvorschrift (3.9) über eine Newton-Cotes Formel<sup>2</sup> auswertet. Die Konturparameter werden wie in [5] gewählt:  $c = 1, 9$  und  $\phi = \frac{3}{4}\pi$ .

Neben dem Fehler durch die numerische Ermittlung des Integralwertes lässt sich die Funktion selbstverständlich nicht bis  $\infty$  auswerten. Aus Tests mit Mellin-Transformationen elementarer Funktionen ergab sich 100 als ausreichender Wert für die obere Grenze.

Hier zeigt sich noch einmal die große Stärke der Mellin-Transformation. Bis zum jetzigen Zeitpunkt sind die Ergebnisse exakt<sup>3</sup>. Die einzige numerische Approximation in Form einer einfachen Integralberechnung findet in den nächsten Zeilen statt.

```

def MellinInversIntegrand(z, x, PDF, Q):
    c=1.9
    e_iphi=np.exp((0+1j)*0.75*np.pi)
    return (e_iphi*x***(1-c-z*e_iphi)*PDF(c+z*e_iphi, Q)).imag
def MellinInversIntegral(schritte, x, PDF, Q):
    a=0
    b=100
    schrittweite=(b-a)/(schritte-1)
    z=a+2*schrittweite
    summe=3*MellinInversIntegrand(a, x, PDF, Q)/8\
    +7*MellinInversIntegrand(a+schrittweite, x, PDF, Q)/6\
    +23*MellinInversIntegrand(a+2*schrittweite, x, PDF, Q)/24
    while z<b-3*schrittweite:
        z+=schrittweite
        summe+=MellinInversIntegrand(z, x, PDF, Q)
    return schrittweite*(summe\
    +23*MellinInversIntegrand(b-2*schrittweite, x, PDF, Q)/24\
    +7*MellinInversIntegrand(b-schrittweite, x, PDF, Q)/6\
    +3*MellinInversIntegrand(b, x, PDF, Q)/8)

```

Im letzten Schritt können die Ergebnisse über Ausgaberoutinen abgerufen werden. Hier ist beispielhaft eine Tabellen-/Datei-Ausgabe sowie eine Python-interne Plot-Ausgabe für die Valenz-up-Quark-Verteilung für  $Q = 3\text{ GeV}$  aufgeführt. Beiden Darstellungsmethoden ist gemein, dass sie die oben definierte Rücktransformations-Routine für die ausgewählte Parton-Verteilung bei vorgegebenen  $x$ -Werten aufrufen und die Ergebnisse entsprechend ausgeben. Der Konvention nach werden die Verteilungen nicht als  $f(x)$ , sondern als  $xf(x)$  dargestellt.

```

#Als Tabelle und .txt-Datei:
def InversMellinundDateiausgabe(PDF,Q):
    f = open(str(PDF)+'.txt', 'w')
    x=0.01
    print('Funktionswerte von '+str(PDF)+': \n'+x*PDF)
    while x<=1.01:

```

<sup>2</sup>Diese Formel ist invers proportional zur vierten Potenz der Schrittzahl, zu finden in [12], S. 160.

<sup>3</sup>Ausgenommen natürlich, dass höhere Ordnungen der Störungstheorie unterschlagen werden.

```

xPDFWert=MellinInversIntegral(1000, x, PDF, Q)/np.pi
f.write(str(round(x, 3)) + '\t' + str(xPDFWert)+'\n')
print(str(round(x, 3)) + '\t' + str(xPDFWert))
x+=0.01
f.close()
InversMellinundDateiausgabe(PDFu_V, 3)

#Als Plot:
x=np.arange(0.0001, 1, 0.00001)

plt.semilogx(x, MellinInversIntegral(1000, x, PDFu_V, 3)/np.pi, "r-")

```

## 4.2 Plots

In den Abbildungen<sup>4</sup> 4.1 bis 4.7 sind die Anfangsverteilungen sowie die Verteilungen nach der Evolution für zwei Energien,  $Q = 3 \text{ GeV}$  und  $Q = 10 \text{ GeV}$ , zu sehen. Deutlich zu erkennen sind die charakterisierenden Eigenschaften der verschiedenen Partonverteilungsfunktionen. Dazu gehören die mit Abstand größten Werte der Gluonverteilung für kleine  $x$ , die Maxima in der Größenordnung von  $x = 10^{-1}$  der Valenzverteilungen von up- und down-Quark sowie die für kleine  $x$  ansteigenden Verteilungen der Anti-Flavour. Auch die Annäherung an 0 für  $x \rightarrow 1$  aller Verteilungen ist ein Merkmal, das reproduziert werden konnte. Es zeigt sich außerdem das typische Evolutionsverhalten für unterschiedlichen Skalen: Mit steigender Energie steigen die Werte der Verteilung für kleine  $x$  und sinken für große  $x$ . Die nicht von 0 verschiedene Verteilungsfunktion der strange-Valenz-Quarks bleibt von den Anfangsverteilungen bis zu den Endwerten bis auf Abweichungen in der Größenordnung  $10^{-15}$  erhalten, was ein Indikator für die korrekte Funktionweise des Programms ist.

Physikalisch nicht erklärbar ist hingegen das Ansteigen der up- und down-Valenz-Verteilungen für  $x < 10^{-3}$ . In einer früheren Version des Programms wurde statt der Newton-Cote-Formel ein Trapez-Verfahren<sup>5</sup> zur Berechnung des Integrals benutzt. Dort war dieses Verhalten schon für Werte von  $x < 10^{-2}$  zu beobachten, wodurch der Integrationsalgorithmus als Ursache für dieses Verhalten ausgemacht werden kann.

---

<sup>4</sup>Alle erstellt mit der internen Plotroutine von Python 3.6.

<sup>5</sup>Das Trapez-Verfahren ist die Newton-Cote-Formel niedrigster Ordnung.

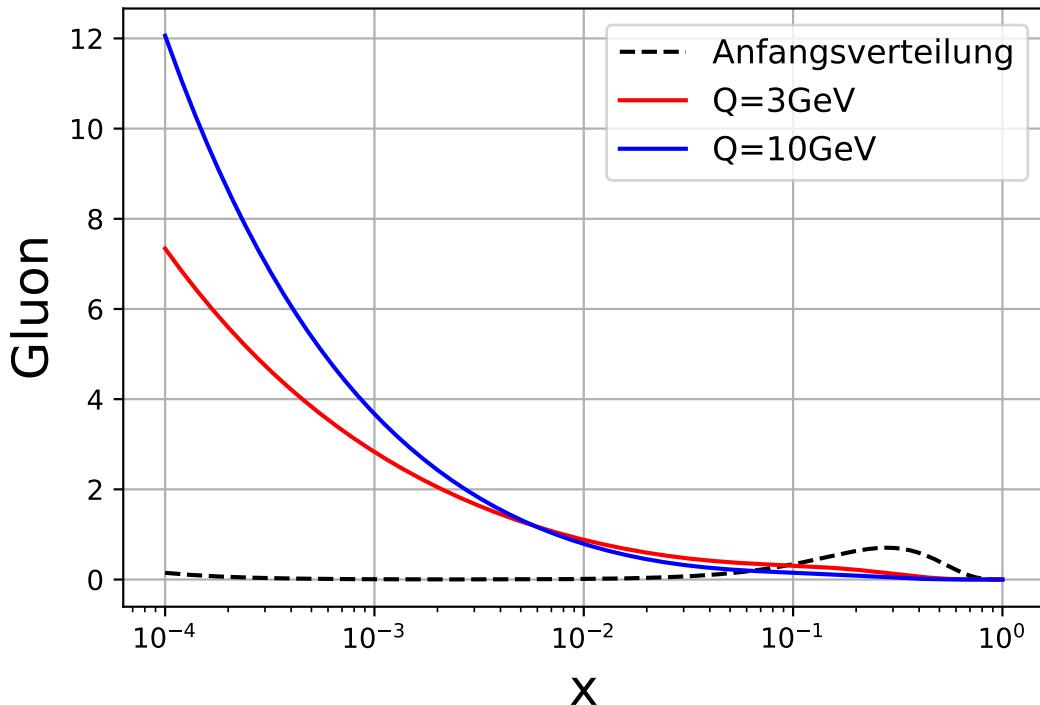


Abbildung 4.1: Partonverteilungsfunktion in der Form  $xf(x)$  der Gluonen für  $x \in [10^{-4}, 1]$ , zu sehen ist die Anfangsverteilung sowie die Verteilungen für  $Q = 3 \text{ GeV}$  und  $Q = 10 \text{ GeV}$ .

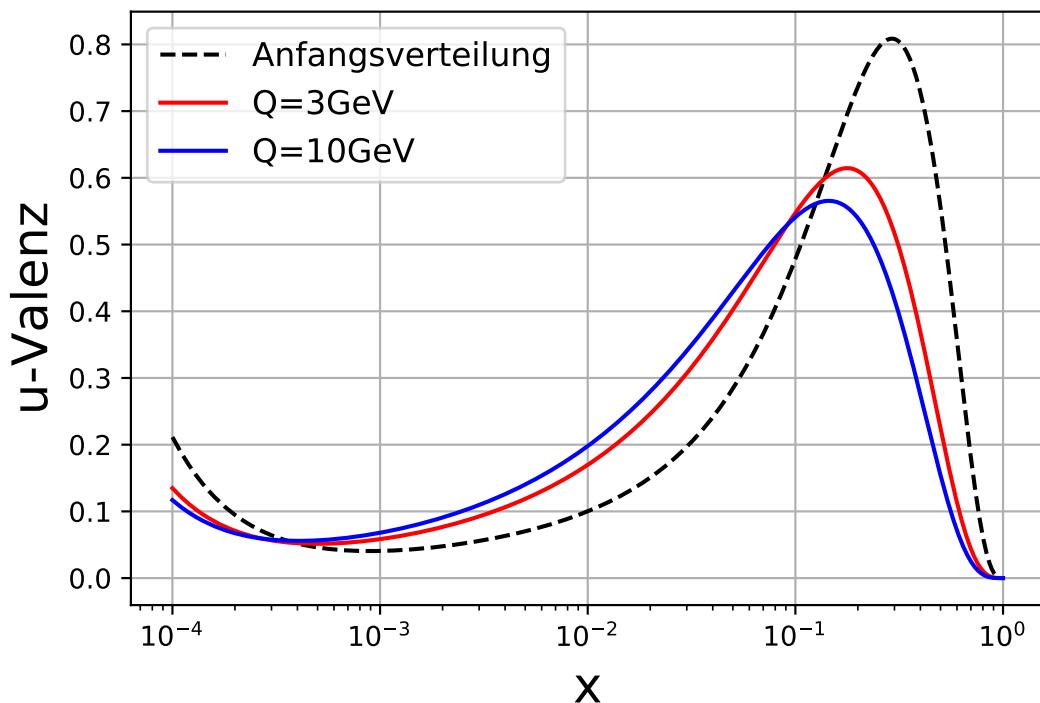


Abbildung 4.2: Partonverteilungsfunktion in der Form  $xf(x)$  der Valenz-up-Quarks für  $x \in [10^{-4}, 1]$ , zu sehen ist die Anfangsverteilung sowie die Verteilungen für  $Q = 3 \text{ GeV}$  und  $Q = 10 \text{ GeV}$ .

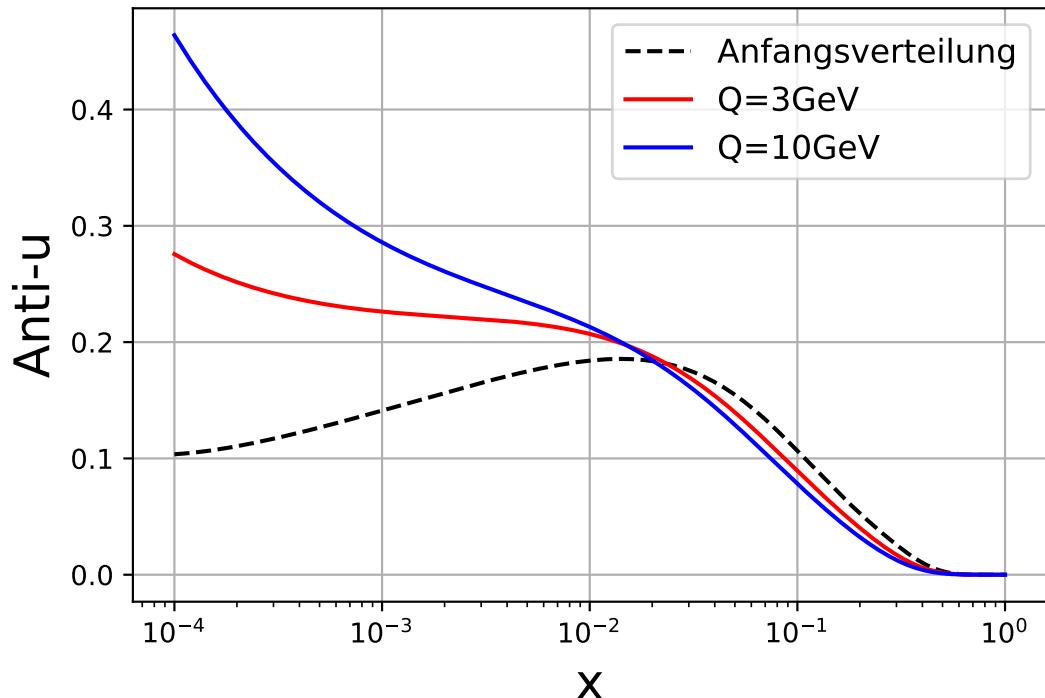


Abbildung 4.3: Partonverteilungsfunktion in der Form  $xf(x)$  der Anti-up-Quarks für  $x \in [10^{-4}, 1]$ , zu sehen ist die Anfangsverteilung sowie die Verteilungen für  $Q = 3 \text{ GeV}$  und  $Q = 10 \text{ GeV}$ .

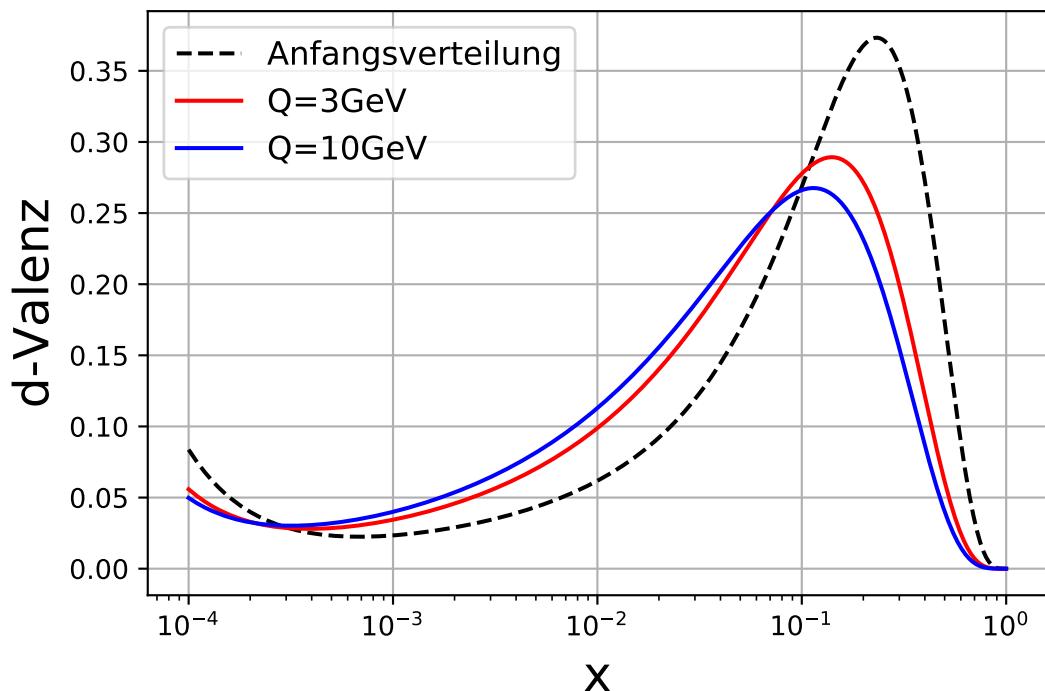


Abbildung 4.4: Partonverteilungsfunktion in der Form  $xf(x)$  der down-Valenz-Quarks für  $x \in [10^{-4}, 1]$ , zu sehen ist die Anfangsverteilung sowie die Verteilungen für  $Q = 3 \text{ GeV}$  und  $Q = 10 \text{ GeV}$ .

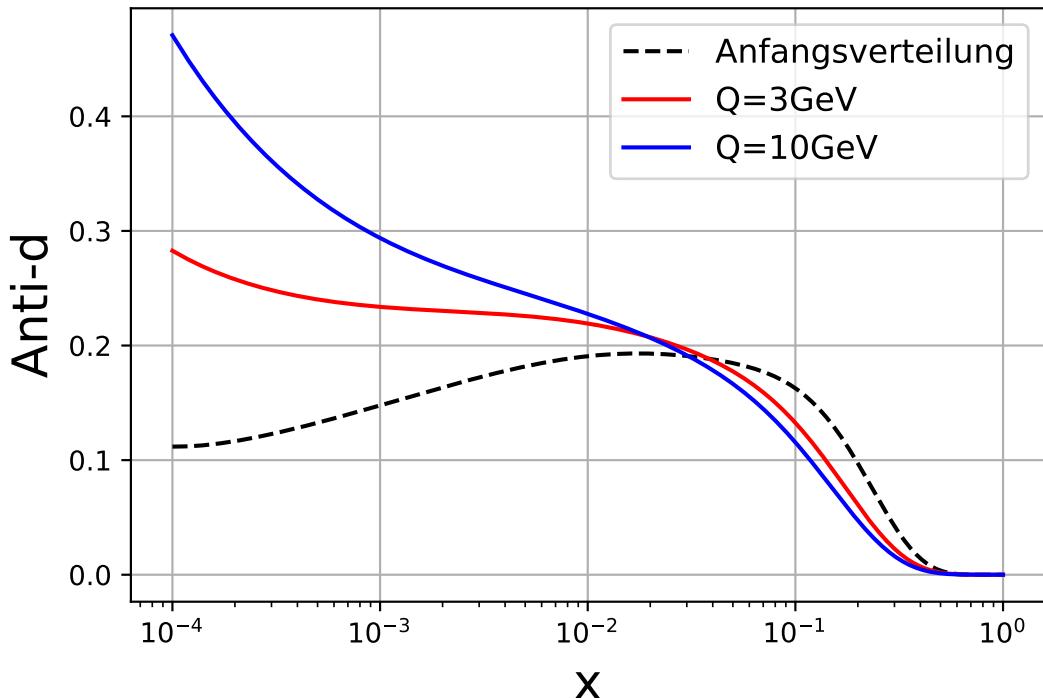


Abbildung 4.5: Partonverteilungsfunktion in der Form  $xf(x)$  der Anti-down-Quarks für  $x \in [10^{-4}, 1]$ , zu sehen ist die Anfangsverteilung sowie die Verteilungen für  $Q = 3 \text{ GeV}$  und  $Q = 10 \text{ GeV}$ .

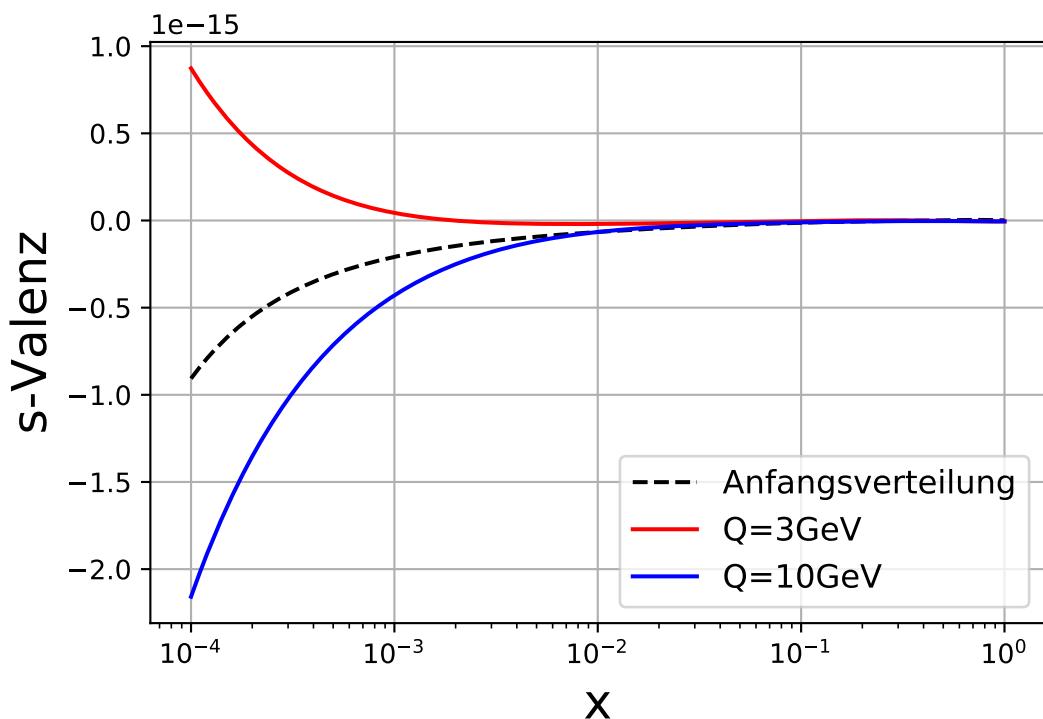


Abbildung 4.6: Partonverteilungsfunktion in der Form  $xf(x)$  der strange-Valenz-Quarks für  $x \in [10^{-4}, 1]$ , zu sehen ist die Anfangsverteilung sowie die Verteilungen für  $Q = 3 \text{ GeV}$  und  $Q = 10 \text{ GeV}$ .

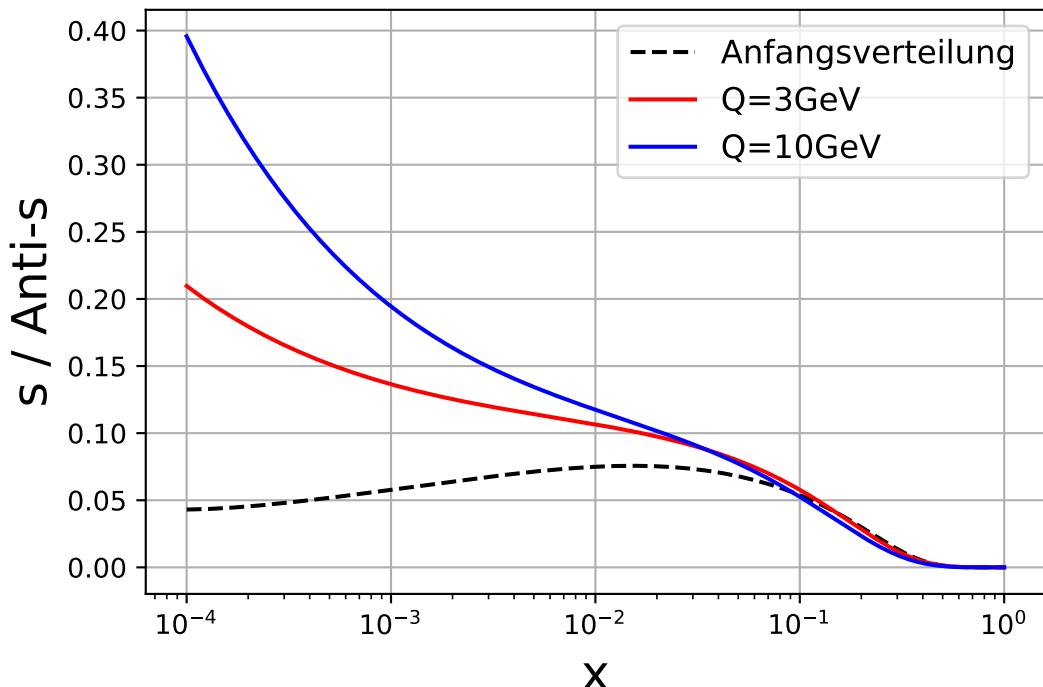


Abbildung 4.7: Partonverteilungsfunktion in der Form  $xf(x)$  der strange- und Anti-strange-Quarks für  $x \in [10^{-4}, 1]$ , zu sehen ist die Anfangsverteilung sowie die Verteilungen für  $Q = 3 \text{ GeV}$  und  $Q = 10 \text{ GeV}$ .

## 5 Fazit und Ausblick

Mit dem in Kapitel 4.1 vorgestellten Programm ist es gelungen, grundlegende Eigenschaften der Partonverteilungsfunktionen zu rekonstruieren. Es ist allerdings nicht zu erwarten, dass die Daten mit aktuellen Berechnungen übereinstimmen. Das kann mit folgenden Punkten begründet werden:

Die Störungsrechnung nach der nächstführenden Ordnung (NLO) abzubrechen, ist eine offensichtliche Vereinfachungen der Rechnung. Die nächsten Ordnungen führen neben einer höheren Genauigkeit in den schon etablierten Splitting-Funktion aus Tabelle 2.1 auch zu Splitting-Funktion  $P_{q\bar{q}}(\frac{x}{\xi})$  zwischen Quark und Anti-Quark. Dies verändert die Struktur der Matrix in der DGLAP-Gleichung (2.53), was eine Neuberechnung der Basiswechsel in Kapitel 3.2 und 3.3.3 nach sich zieht.

Außerdem wurden die schweren Flavour charm, top und bottom nicht beachtet. Hier wird zwischen Energien unterschieden, für die  $Q^2 \ll M_{c,t,b}^2$  und  $Q^2 \gg M_{c,t,b}^2$  gilt. Mit „Matching“- oder „Threshold-conditions“ werden dann beide Fälle verbunden<sup>1</sup>.

Die Integralapproximation über eine Newton-Cotes-Formel hat, wie schon in Kapitel 4.2 diskutiert, einige Schwächen. Approximationen über Polynome höherer Ordnung steigern zwar wie beschrieben den Gültigkeitsbereich, allerdings könnte auch geprüft werden, ob nicht eine komplexere Methode eine elegantere Lösung darstellt. So finden sich zum Beispiel in [12] auch Ansätze, uneigentliche Integrale ohne eine Verschiebung der kritischen Grenze numerisch zu ermitteln.

---

<sup>1</sup>Eine ausführliche Beschreibung dieses Verfahrens findet sich in [7].

# A Feynmanregeln

Feynmandiagramme, wie zum Beispiel das der Elektron-Myon-Streuung 2.1, lassen sich direkt via der sogenannten Feynmanregeln in die entsprechenden Amplituden übersetzen, ohne für jeden Prozess einen störungstheoretischen Ansatz rechnen zu müssen. Sie bieten ein sehr schnelles und intuitives Konzept zur Aufstellung der Amplitude  $\mathcal{M}$  für einen beliebigen Wechselwirkungsprozess auf Elementarteilchenebene. Jede Linie und jeder Vertex, d.h. jede Linienkreuzung, entsprechen einem Term, das Produkt aus allen Termen eines Diagramms ergibt die Amplitude. Die für diese Arbeit relevanten Regeln sind in Tabelle A.1 aufgeführt.

Tabelle A.1: Relevante Feynmanregeln.

Symbol	physikalische Entsprechung	Faktor in $\mathcal{M}$
	aus- bzw. eingehendes Fermion	$u(p)$ bzw. $\bar{u}(p')$
	internes Photon <sup>1</sup>	$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$
	internes Gluon <sup>1</sup>	$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$
	internes Fermion	$\frac{i\gamma^\mu}{p^2}$
	Vertexfaktor in QED bzw. QCD <sup>2</sup>	$ie\gamma^\mu$ bzw. $ig_s \gamma^\mu \frac{1}{2}T_{ij}^a$

So ergibt sich zum Beispiel aus den Regeln für interne bzw. externe Fermionen, Photonpropagatoren und Vertexfaktoren sofort die im Kapitel 2.1 ermittelte Amplitude (2.6) für Elektron-Muon-Streuung.

Feynmanregeln folgen direkt aus der zur entsprechenden Theorie gehörenden Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ , aus der die Bewegungsgleichungen der Theorie, wie zum Beispiel die Dirac-Gleichung für freie Teilchen (2.2) in der QED, hergeleitet werden können.

<sup>1</sup>in Feynman-Eichung.

<sup>2</sup>Auf die Matrizen  $T^a$  wird im Anhang B näher eingegangen.

## B $SU(3)$ -Gruppe als Eichsymmetrie der QCD

An verschiedenen Stellen der Arbeit tauchen Gruppenkonstanten der  $SU(3)$ -Gruppe auf, allerdings nie in einem Umfang, der eine Diskussion am selben Ort rechtfertigen würde. Deshalb soll hier eine grobe Übersicht gegeben werden. Detailliertere Ausführungen finden sich in [13], Kapitel 25.

Ein wichtige Eigenschaft der QED und QCD ist die lokale Eichsymmetrie. Darunter versteht man die Invarianz einer Lagragedichte  $\mathcal{L}$  unter einer Transformation des zugrundeliegenden Feldes  $\Psi$  gemäß

$$\Psi \rightarrow e^{-i\alpha^a(x)T_F^a}\Psi \equiv U(\alpha^a(x))\Psi, \quad (\text{B.1})$$

wobei  $\alpha^a(x)$  eine ortsabhängige Phase und  $T_F^a$  ein matrixwertiger Generator der Lie-Gruppe<sup>1</sup> aller Matrizen  $U(\alpha^a(x))$  ist. Die Generatoren formen eine Lie-Algebra durch<sup>2</sup>

$$[T_F^a, T_F^b] = if^{abc}T_F^c. \quad (\text{B.2})$$

$f^{abc}$  werden als Strukturkonstanten der Gruppe<sup>3</sup> bezeichnet.

Die Lagragedichte der QCD ist invariant unter Transformationen der  $SU(3)$ -Gruppe, also der Gruppe aller unitären dreidimensionalen Matrizen  $U$ , für die  $\det(U) = 1$  gilt. Die  $SU(3)$  hat  $3^2 - 1 = 8$  verschiedene Generatoren<sup>4</sup>, die als Gell-Mann-Matrizen  $\lambda^a$  bezeichnet werden:

$$T_F^a = \frac{\lambda^a}{2}. \quad (\text{B.3})$$

Die Generatoren werden üblicherweise wie folgt normiert:

$$\text{Tr}(T_F^a T_F^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \equiv T_F \delta^{ab}. \quad (\text{B.4})$$

Zu jeder Lie-Algebra gehören Casimir-Operatoren  $C = C(T^a)$  als Funktionen der Generatoren, die

$$[C, T_F^a] = 0 \quad (\text{B.5})$$

genügen. Eine naheliegende Wahl ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix, auch quadratischer Operator genannt, da diese Operatoren

$$\sum_{a=1}^8 T_F^a = \frac{3}{4} \cdot \mathbb{1} \equiv C_F \cdot \mathbb{1} \quad (\text{B.6})$$

erfüllen<sup>5</sup>.

Es existieren verschiedene Repräsentationen einer Lie-Gruppe. Bis jetzt wurde in der fundamentalen<sup>6</sup> Repräsentation gearbeitet, die adjungierte Repräsentation wird hingegen durch  $8 \times 8$ -Matrizen mit Einträgen

$$(T_A^a)^{bc} = -if^{abc} \quad (\text{B.7})$$

gebildet. Der quadratische Casimir-Operator hat hier den Wert

$$C_A = 3. \quad (\text{B.8})$$

---

<sup>1</sup>Die Elemente der Gruppe sind also „nah an der Identität“, denn man erkennt durch eine Reihenentwicklung:  $U(\alpha^a(x)) = \mathbb{1} + \alpha^a T^a$ .

<sup>2</sup>Der Kommutator ist insbesondere von 0 verschieden, was die Algebra und die erzeugte Gruppe nicht-abelsch macht. Dies impliziert eine besondere Form der Eichtheorie, die Yang-Mills-Theorie.

<sup>3</sup>Ein bekanntes Beispiel ist die  $SU(2)$  erzeugende Drehimpulsalgebra, hier gilt  $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ .

<sup>4</sup>Folglich läuft der Index  $a$  von 1 bis 8.

<sup>5</sup>Dies ist ein Spezialfall des Lemmas von Schur.

<sup>6</sup>Daher auch der Index in  $C_F$  und  $T_F^a$ .

# C Berechnung der Vertexkorrektur

## C.1 Schleifenamplitude und dimensionale Regularisierung

Die nachfolgenden Rechnungen orientieren sich an [9], die wiederum auf [3] und [11] basieren. Es soll nun eine Amplitude höherer Ordnung (Diagramm C.1) ermittelt werden. In höheren Ordnungen erlaubt man zusätzliche Prozesse im Mutterprozess, zum Beispiel das Emittieren bzw. Absorbieren eines zusätzlichen virtuellen Gluons vor bzw. nach dem Quark-Photon-Vertex in Diagramm C.1. Im Feynmandiagramm ist so eine sogenannte Schleife entstanden. Die Anzahl der Schleifen ist Indikator der Ordnung des Prozesses<sup>1</sup>. Hier handelt es sich, wie schon in Kapitel 2.4 diskutiert, um einen NLO-Prozess.

Auch Schleifen lassen sich über Feynmanregeln in Amplituden übersetzen. Es muss zusätzlich eine Schleifenrichtung festgelegt werden, um interne Impulse über ihre Erhaltung charakterisieren zu können. In Diagramm C.1 wurde die Schleifenrichtung in Flussrichtung der Quarks gelegt, entsprechend ergeben sich dann die internen Impulse. Außerdem bleibt der Gluonimpuls  $k$  unbestimmt, daher wird über alle möglichen Impulswerte integriert. Damit ergibt sich für die Amplitude des Gesamtprozesses

$$\mathcal{M} = \left( \bar{u}(p'_1) i e \gamma^\mu u(p_1) \right) \left( -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left( \bar{u}(p'_2) i e \Gamma^\nu u(p_2) \right). \quad (\text{C.1})$$

Der einzige Unterschied bei Berücksichtigung der Schleife ist der neue Tensor  $\Gamma^\nu$  anstelle des Vertexfaktors  $i e \gamma^\mu$ . Für die Auswertung der Schleife ist also nur noch die rechte Klammer in der Amplitude relevant. Unter Anwendung der Feynmanregeln in Tabelle A.1 sowie des Integrals über den Gluonimpuls  $k$  ergibt sich für den betrachteten Prozess (dargestellt in Abbildung C.1):

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Gamma^\nu u(p) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{[i g_s \gamma^\alpha \frac{1}{2} T_{ij}^a] [i(\not{p}' + \not{k})] [i g_e \gamma^\nu] [i(\not{p} + \not{k})] [i g_s \gamma^\beta \frac{1}{2} T_{jk}^a] [-i g_{\alpha\beta}]} {[p' + k]^2 [p + k]^2 k^2} u(p) \\ &= \frac{1}{4} g_s^2 C_F \delta_{jk} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{\gamma^\alpha [\not{p}' + \not{k}] \gamma^\nu [\not{p} + \not{k}] \gamma_\alpha}{[p' + k]^2 [p + k]^2 k^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Massen werden wie in allen anderen Rechnungen unterdrückt,  $g_s$  ist Stellvertreter für die Kopplungskonstanten des Quarks<sup>2</sup>. Die Gell-Mann-Matrizen<sup>3</sup>  $T^a$  wurden schon in Anhang B definiert. In den Vertexfaktoren veranschaulichen sie den Wechsel von Farbladung  $i$  nach  $j$  bzw.  $j$  nach  $k$  durch das entsprechende Matrixelement. Die Farbladung  $j$  in der Schleife ist beliebig, deshalb wird per Summenkonvention über diese summiert. Gleiches gilt für das Gluon, das durch die  $a$ -te Gell-Mann-Matrix repräsentiert wird. Damit ergibt sich

$$T_{ij}^a T_{jk}^a = \sum_a (T^a)_{jk}^2 \stackrel{(\text{B.6})}{=} C_F \delta_{jk} \quad (\text{C.3})$$

---

<sup>1</sup>Dies gilt, da die Potenz der Kopplungskonstante proportional zur Störungsordnung ist.

<sup>2</sup>Es gilt  $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ .

<sup>3</sup>Hier und im Weiteren in fundamentaler Repräsentation, der Index  $F$  wird unterschlagen.

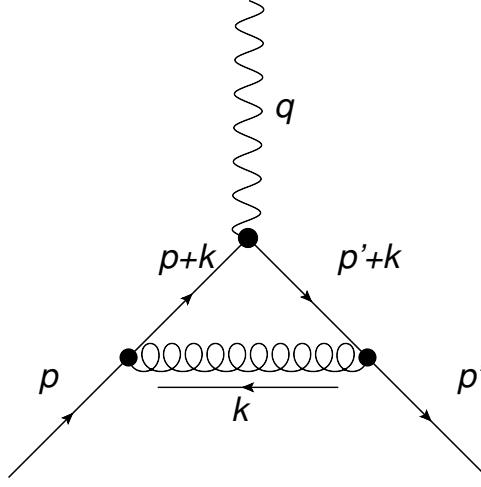


Abbildung C.1: Quark (Impulse  $p, p'$ ) streut am virtuellen Photon (Impuls  $q$ ), dabei emittiert es vor der Streuung ein virtuelles Gluon (Impuls  $k$ ) und absorbiert es nach der Streuung wieder.

Viele Schleifenintegrale, darunter auch das obige, sind divergent. Man unterscheidet zwischen infraroter und ultravioletter Divergenz bei sehr kleinen bzw. sehr großen Impulswerten. Divergente Verhalten der Amplitude ist unphysikalisch, weil es nach (2.16) auch einen divergierenden Wirkungsquerschnitt zur Folge hat. Das hier benutzte Konzept zum Umgang mit divergenten Schleifenintegralen ist die dimensionale Regularisierung:

Ziel ist es, die Integration nicht in 4, sondern in  $D$  Dimensionen durchzuführen. Abschließend wird mithilfe von  $D = 4 - \epsilon$  der Limes  $D \rightarrow 4$  oder äquivalent  $\epsilon \rightarrow 0$  gebildet. Dort manifestiert sich die Divergenz des Integrals in Form von Polen bei  $\epsilon = 0$ . Die zugrundeliegende Clifford-Algebra der Dirac-Matrizen (2.4) bleibt erhalten, die Relation (2.5) wird wegen der  $D$ -Dimensionalität der Matrizen zu

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = D. \quad (\text{C.4})$$

Aus der Teilamplitude (C.2) wird nun

$$\frac{1}{4} g_s^2 C_F \delta_{jk} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \bar{u}(p') \frac{\gamma^\alpha [\not{p}' + \not{k}] \gamma^\nu [\not{p} + \not{k}] \gamma_\alpha}{[p' + k]^2 [p + k]^2 k^2} u(p). \quad (\text{C.5})$$

Um dieses Integral zu berechnen, soll zuerst die Tensorstruktur im Zähler vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha [\not{p}' + \not{k}] \gamma^\nu [\not{p} + \not{k}] \gamma_\alpha &= \gamma^\alpha \gamma^\beta [p'_\beta + k_\beta] \gamma^\nu \gamma^\delta [p'_\delta + k_\delta] \gamma_\alpha = \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma_\alpha [p'_\beta + k_\beta] [p_\delta + k_\delta] \\ &= [-2\gamma^\delta \gamma^\nu \gamma^\beta + (4 - D)\gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\delta] [p'_\beta + k_\beta] [p_\delta + k_\delta] \\ &= -2[\not{p} \gamma^\nu \not{p}' + \not{p} \gamma^\nu \gamma^\beta k_\beta + \gamma^\delta \gamma^\nu \not{p}' k_\delta + \gamma^\delta \gamma^\nu \gamma^\delta k_\beta k_\delta] \\ &\quad + (4 - D)[\not{p}' \gamma^\nu \not{p} + \gamma^\beta \gamma^\nu \not{p} k_\beta + \not{p}' \gamma^\nu \gamma^\delta k_\delta + \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\delta k_\beta k_\delta]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Im vorletzten Schritt wurde eine Identität benutzt, die aus den Kommutationseigenschaften der Dirac-Matrizen (s. (2.4)) und der modifizierten Identität (C.4) hergeleitet werden kann.

## C Berechnung der Vertexkorrektur

Mit diesem Nenner ergibt sich dann das Integral zu

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') & \left\{ [-2\gamma^\nu p' + (4-D)\gamma^\nu p] \int d^D k \frac{1}{[p'+k]^2 [p+k]^2 k^2} \right. \\ & + [-2(\gamma^\nu \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\nu) + (4-D)(\gamma^\beta \gamma^\nu p + p' \gamma^\nu \gamma^\beta)] \int d^D k \frac{k_\beta}{[p'+k]^2 [p+k]^2 k^2} \\ & \left. + [-2\gamma^\delta \gamma^\nu \gamma^\beta + (4-D)\gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\delta] \int d^D k \frac{k_\beta k_\delta}{[p'+k]^2 [p+k]^2 k^2} \right\} u(p) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} = \bar{u}(p') & \left\{ [-2\gamma^\nu p' + (4-D)\gamma^\nu p] C_0 \right. \\ & + [-2(\gamma^\nu \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\nu) + (4-D)(\gamma^\beta \gamma^\nu p + p' \gamma^\nu \gamma^\beta)] C^\beta \\ & \left. + [-2\gamma^\delta \gamma^\nu \gamma^\beta + (4-D)\gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\delta] C^{\beta\delta} \right\} u(p). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Vorfaktoren werden ab hier zugunsten der Übersichtlichkeit untergeschlagen. Bevor näher auf die im letzten Schritt eingeführte Notation eingegangen wird, soll zunächst die Dirac-Gleichung (2.2) ausgenutzt werden. Diese wird im Fall verschwindender Massen zu

$$\begin{aligned} \not{p}u(p) - mu(p) &= 0 \\ \Leftrightarrow \not{p}u(p) &= 0 = -\bar{u}(p)\not{p}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Alle Summanden im obigen Integral mit führendem  $\not{p}'$  und/oder nachstehendem  $\not{p}$  fallen also weg:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') & \left\{ -2\gamma^\nu p' C_0 - 2(\gamma^\nu \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\nu) C^\beta \right. \\ & \left. + [-2\gamma^\delta \gamma^\nu \gamma^\beta + (4-D)\gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\delta] C^{\beta\delta} \right\} u(p). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Zuletzt soll noch der Vorfaktor des ersten Summanden  $-2\gamma^\nu p'$  näher betrachtet werden. Nutzt man die Algebra der Dirac-Matrizen (2.4) aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} \not{p}\gamma^\nu \not{p}' &= \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\rho p_\alpha p'_\rho = [2\gamma^\alpha g^{\nu\rho} - \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\nu] p_\alpha p'_\rho = [2\gamma^\alpha g^{\nu\rho} - 2g^{\alpha\rho} \gamma^\nu + \gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\nu] p_\alpha p'_\rho \\ &= 2\not{p}p'_\nu - 2p \cdot p' \gamma^\nu + \not{p}'\not{p}\gamma^\nu \xrightarrow{\text{Anwenden von } \bar{u}(p'), u(p)} -2p \cdot p' \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

## C.2 Tensorreduktion und finale Schritte

Die in (C.8) eingeführten Integrale unterliegen folgender Nomenklatur: Der Anzahl der internen Propagatoren, hier 3, wird gemäß dem Alphabet ein Buchstabe, hier also  $C$ , zugeordnet, die Tensorwertigkeit der Integrationsvariable im Zähler wird an diesem Buchstaben notiert. Falls kein Tensor im Zähler steht, also ein skalares Integral vorliegt, wird stattdessen eine 0 im Index geführt. Allgemein ergibt sich bei Vernachlässigung der Massen:

$$\int d^D r \frac{r^{\mu_1} \dots r^{\mu_N}}{r^2 [p_1 + r]^2 \dots [p_{L-1} + r]^2} = X^{\mu_1 \dots \mu_N}(p_1^2, \dots, p_{L-1}^2). \quad (\text{C.12})$$

$X$  ist hierbei der  $L$ -te Buchstabe des Alphabets.

Ziel ist es nun, jegliches tensorwertiges Integral, in diesem Fall also  $C^\beta$  und  $C^{\beta\delta}$ , auf eine Kombination skalarwertiger Integrale, deren Werte dann in der Literatur nachgeschlagen werden können, zu reduzieren. Erreichen lässt sich dies durch die Tensorreduktion.

## C Berechnung der Vertexkorrektur

Dafür wird im ersten Schritt jedes Tensorintegral durch eine symmetrische Linearkombination aus den Impulsen  $p$  und  $p'$  ausgedrückt, hier beispielhaft die für Rechnung relevanten Integrale:

$$C^\beta = p^\beta C_1 + p'^\beta C_2 \text{ und} \quad (\text{C.13})$$

$$C^{\beta\delta} = g^{\beta\delta} C_{00} + p^\beta p^\delta C_{11} + p'^\beta p'^\delta C_{22} + (p^\beta p'^\delta + p^\delta p'^\beta) C_{12}. \quad (\text{C.14})$$

Dann erfolgt die namensgebende Reduktion durch Multiplikation von kovarianten Tensoren entsprechender Wertigkeit:

$$p_\beta C^\beta \equiv R_1 = p^2 C_1 + p' \cdot p C_2 = p' \cdot p C_1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{(p \cdot p')^2} R_1, \quad (\text{C.15})$$

$$p'_\beta C^\beta \equiv R_2 = p' \cdot p C_1 + p'^2 C_2 = p' \cdot p C_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{(p \cdot p')^2} R_2. \quad (\text{C.16})$$

Wenn  $R_1$  und  $R_2$  näher betrachtet werden, ergibt sich

$$\begin{aligned} R_1 &= \int d^D k \frac{p \cdot k}{k^2 [p+k]^2 [p'+k]^2} = \frac{1}{2} \int d^D k \frac{[p+k]^2 - k^2}{k^2 [p+k]^2 [p'+k]^2} \\ &= \frac{1}{2} [B_0(p'^2 = 0) - B_0((p-p')^2)], \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\text{analog } R_2 = \dots = R_1, \quad (\text{C.18})$$

womit insgesamt das Tensorintegral  $C^\beta$  durch skalare Integrale des Typs  $X_0$  ausgedrückt werden konnte. Analog wird bei  $C^{\beta\delta}$  vorgegangen, hier erhält man

$$C_{00} = \frac{1}{4} [B_0((p-p')^2) + 1] + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{C.19})$$

$$C_{12} = -\frac{1}{p \cdot p'} [C_{00} - \frac{1}{4} B_0((p-p')^2)]. \quad (\text{C.20})$$

$C_{11}$  und  $C_{22}$  sind nicht weiter relevant, da sie in dieser Rechnung keinen Beitrag liefern werden (s. (C.22)).

Setzt man nun (C.11) und die Identitäten im obigen Abschnitt in die Amplitude (C.10) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Big\{ &4p \cdot p' C_0 - 2[\not{p}\gamma^\nu\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\nu\not{p}](p_\beta C_1 + p'_\beta C_2) \\ &+ [-2\gamma^\delta\gamma^\nu\gamma^\beta + (4-D)\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\delta] \\ &\times [g_{\beta\delta} C_{00} + p_\beta p_\delta C_{11} + p'_\beta p'_\delta C_{22} + (p_\beta p'_\delta + p^\delta p'_\beta) C_{12}] \Big\} u(p). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Hier verschwinden wieder Terme aufgrund der Dirac-Gleichung (C.9), auftretende  $\not{p}\gamma^\nu\not{p}'$  werden über (C.11) vereinfacht. Somit wird obiger Ausdruck zu

$$[4p \cdot p' C_0 + 4p \cdot p'(C_1 + C_2) + (2-D)(DC_{00} - 2p \cdot p' C_{12})]\gamma^\nu. \quad (\text{C.22})$$

Setzt man zuletzt noch obige Identifizierungen für die Tensorintegrale in (C.22) ein, so gelangt man zu folgendem Endergebnis für die Teilamplitude:

$$\mathcal{M} = \alpha_s \pi C_F \delta_{jk} \cdot [4p \cdot p'(C_0 + C_1 + C_2) + (2-D)(DC_{00} - 2p \cdot p' C_{12})]\gamma^\nu. \quad (\text{C.23})$$

Dieses Ergebnis kann als Basis für die Herleitungen in Kapitel 2.4 verwendet werden. Dafür müssen die skalaren Integrale in (C.23) explizit ausgewertet werden. Es verschwinden die UV-Divergenzen in den skalaren Integralen durch die zusätzliche Betrachtung von Selbstenergieschleifen (Abbildung 2.5b), deren Amplituden analog zum auf den letzten Seiten vorgestellten Rechenweg ermittelt werden können. Gleiches gilt für die Abstrahlung reeller Gluonen<sup>4</sup> (Abbildungen 2.5c und 2.5d).

<sup>4</sup>Entsprechende Rechnungen können in [13], Kapitel 20 nachvollzogen werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] Accardi, A. et al.: *Constraints on large- $x$  parton distributions from new weak boson production and deep-inelastic scattering data.* arXiv:hep-ph/1602.03154, 2016.
- [2] Poularikas, A. D. (Editor): *The Transforms and Applications Handbook.* CRC Press LLC, Boca Raton, second ed., 2000.
- [3] Denner, A.: *Techniques for calculation of electroweak radiative corrections at the one loop level and results for  $W$  physics at LEP-200.* Fortsch. Phys. 41, 1993.
- [4] Friedmann, J. I.: *Deep inelastic scattering: Comparison with the quark model.* Reviews of Modern Physics, Vol. 63, No. 3, 1991.
- [5] Glück, M., E. Reya und A. Vogt: *Dynamical Parton Distributions Revisited.* arXiv:hep-ph/9806404, 1998.
- [6] Halzen, F. und A. D. Martin: *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics.* John Wiley & Sons, New York et al., first paperback ed., 1984.
- [7] Herrmann, F.: *Evolution of Parton Distribution Functions.* Masterarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Fachbereich Physik, 2015.
- [8] Kendall, H. W.: *Deep inelastic scattering: Experiments on the proton and the observation of scaling.* Reviews of Modern Physics, Vol. 63, No. 3, 1991.
- [9] Kovařík, K.: *Hitchhiker's Guide to Renormalization.* Private Notizen, 2017.
- [10] Martin, A. D.: *QCD and Deep Inelastic Scattering.* CERN, Geneève, 1994.
- [11] Passarino, G und Veltmann, M. J. G.: *One Loop Corrections for  $e+ e-$  Annihilation Into  $\mu^+ \mu^-$  in the Weinberg Model.* Nucl. Phys. B 160, 1979.
- [12] Press, W. H. et al.: *Numerical Recipes.* Cambridge University Press, Cambridge et al., Third Edition, 2007.
- [13] Schwartz, M. D.: *Quantum Field Theory and the Standard Model.* Cambridge Press, Cambridge et al., 2014.
- [14] Taylor, R. E.: *Deep inelastic scattering: The early years.* Reviews of Modern Physics, Vol. 63, No. 3, 1991.

### Literaturverzeichnis

- [15] Soyez, G.: *The DGLAP evolution equation: Analytical properties and numerical resolution.* Masterarbeit, Université de Liège, Faculté de Sciences, 2002.
- [16] Vogt, A.: *Efficient evolution of unpolarized and polarized parton distributions with QCD-PEGASUS.* arXiv:hep-ph/0408244, 2004.

# **Plagiatserklärung**

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über „Lösung der DGLAP-Gleichungen im Mellin-Raum“ selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Münster, 6. Juni 2018

---

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Münster, 6. Juni 2018

---