



## Bachelorarbeit

# Gluino Annihilation in ein Quark-Anti-Quark Paar im MSSM

Alexander Epping

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Institut für Theoretische Physik  
AG Klasen

Erstprüfer: Priv.-Doz. Dr. Karol Kovařík  
Zweitprüfer: Prof. Dr. Michael Klasen

Münster, den 30. Oktober 2020

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Dunkle Materie</b>	<b>4</b>
2.1	Bausteine des Universums . . . . .	4
2.2	Entdeckung der Dunklen Materie . . . . .	4
2.3	WIMP Reliktdichte . . . . .	5
2.4	Einfluss anderer Teilchen auf die WIMP Reliktdichte . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Supersymmetrie</b>	<b>8</b>
3.1	Einführung in die Supersymmetrie . . . . .	8
3.2	Minimales Supersymmetrisches Standardmodell . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Quantenchromodynamik</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Berechnung des Wirkungsquerschnitts</b>	<b>12</b>
5.1	Amplituden $M_s$ , $M_t$ und $M_u$ . . . . .	13
5.1.1	Amplituden $M_s$ . . . . .	13
5.1.2	Amplituden $M_t$ . . . . .	14
5.1.3	Amplituden $M_u$ . . . . .	15
5.2	Berechnung von $ M_s ^2$ . . . . .	16
5.3	Berechnung von $ M_t ^2$ . . . . .	18
5.4	Berechnung von $ M_u ^2$ . . . . .	20
5.5	Berechnung von $M_s M_u^+$ . . . . .	21
5.6	Berechnung von $M_s M_t^+$ . . . . .	23
5.7	Berechnung von $M_t M_u^+$ . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Numerische Auswertung</b>	<b>26</b>
6.1	Funktionsweise der genutzten Programme . . . . .	26
6.2	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	27
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>29</b>
<b>A</b>	<b>Gell-Mann-Matrizen</b>	<b>30</b>
<b>B</b>	<b>Feynman-Regeln</b>	<b>30</b>
B.1	externe Linien . . . . .	30
B.2	Propagatoren . . . . .	30
B.3	Vertices . . . . .	31

## 1 Einleitung

Mit der Weiterentwicklung und Verbesserung der Messgeräte und Methoden gelangt man in der Physik immer wieder zu neuen Theorien. Eine dieser Theorien postuliert die Existenz von Dunkler Materie. Um zu überprüfen, ob ein Teilchen ein Kandidat für Dunkle Materie ist, kann die experimentell bestimmte Reliktdichte der Dunklen Materie mit der theoretisch berechneten Reliktdichte dieses Teilchens verglichen werden. Bei der Berechnung der theoretischen Reliktdichte haben jedoch nicht nur der Wirkungsquerschnitt der Annihilation dieses Teilchens einen Einfluss, sondern auch die Wirkungsquerschnitte der Annihilationen anderer Teilchen.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Gluino Annihilation in ein Quark-Anti-Quark Paar, die einen Einfluss auf die Reliktdichte des LSP hat. Der Großteil dieser Arbeit besteht in der analytischen Berechnung des Betragsquadrats der Gesamtstreuamplitude auf tree-level und der anschließenden numerischen Auswertung. Ziel ist die Berechnung des Wirkungsquerschnitts der Gluino Annihilation in ein Quark-Anti-Quark Paar und die Untersuchung des Einflusses der einzelnen Kanäle und Interferenzen auf ihn. Darüber hinaus werden die Anteile unterschiedlicher Prozesse am Gesamtbeitrag der Gluino Annihilation zur Reliktdichte des LSP betrachtet.

In Abschnitt 2 wird zunächst eine kurze Einführung in die Dunkle Materie gegeben und Kandidaten der Dunklen Materie diskutiert. Ein Kandidat sind die WIMPs, zu denen auch das leichteste Neutralino, also das LSP, zählt. Anschließend wird die Berechnung der WIMP Reliktdichte aus dem Wirkungsquerschnitt und der Einfluss anderer Teilchen auf die Reliktdichte erläutert.

Danach wird in Abschnitt 3 die Supersymmetrie vorgestellt, die das Minimale Supersymmetrische Standardmodell voraussagt. Dieses ist eine Erweiterung des Standardmodells der Teilchenphysik und ordnet jedem Teilchen des Standardmodells Superpartner zu. Superpartner sind Teilchen, die nicht in dem Standardmodell enthalten sind.

Anschließend wird in Abschnitt 4 ein kleiner Einblick in die Quantenchromodynamik gegeben. Die Quantenchromodynamik behandelt die starke Wechselwirkung, die bei der Gluino Annihilation eine wichtige Rolle spielt.

Die analytische Berechnung der Betragsquadrate der Streuamplituden befindet sich in Abschnitt 5. Hier werden zunächst die Feynman-Diagramme und Streuamplituden des s-, t- und u-Kanals dargestellt, um danach die Quadrate und Interferenzen der Streuamplituden zu berechnen.

In Abschnitt 6 werden nach einer kurzen Einführung in die Funktionsweise der verwendeten Programme die zuvor berechneten Quadrate und Interferenzen der Streuamplituden genutzt, um den Wirkungsquerschnitt der Gluino Annihilation in ein Quark-Anti-Quark Paar zu berechnen. Außerdem wird untersucht, wie groß der Anteil der Wirkungsquerschnitte, die aus jeweils nur einem Quadrat oder einer Interferenz der Streuamplituden bestehen, am Gesamtwirkungsquerschnitt ist. Zusätzlich werden die Anteile unterschiedlicher Prozesse am Gesamtbeitrag der Gluino Annihilation zur Reliktdichte betrachtet.

## 2 Dunkle Materie

### 2.1 Bausteine des Universums

Schon immer haben sich Menschen Gedanken gemacht, woraus die Welt und alles, was sie umgibt, besteht. Erste Ansätze bestanden aus einer Unterteilung in vier Elemente: Luft, Feuer, Erde und Wasser.

Im 19. Jahrhundert wurde dann von zwei Chemikern, Mendeleev und Meyer, unabhängig voneinander ein System zur Anordnung der Elemente entwickelt: das Periodensystem der Elemente. Anders als bei der zuvor erwähnten Theorie gab es jedoch nicht nur vier Elemente, sondern viel mehr. Diese wurden nach ihren Eigenschaften sortiert und die Aufteilung hat auch bis heute, wenn auch um einige Elemente erweitert, Bestand.

Heutzutage wissen wir jedoch, dass auch diese Elemente aus kleineren Bauteilen bestehen. Ein Atom besteht somit aus elektrisch negativ geladenen Elektronen, die den positiven Kern umgeben. Der Kern wiederum besteht aus Nukleonen. Diese lassen sich in positiv geladene Protonen und neutral geladene Neutronen unterteilen. Diese Nukleonen werden durch die Kernkraft zusammengehalten. Schrittweise konnten die Teilchen durch immer bessere Experimente genauer untersucht werden und so wurde später auch festgestellt, dass die Nukleonen aus noch kleineren Teilchen, den Quarks, bestehen. Darüber hinaus stellte sich heraus, dass es neben dem Proton und Neutron auch noch andere aus Quarks bestehende Teilchen gibt.

Neben diesen Teilchen wurden aber auch die Eich-Bosonen entdeckt, welche Austauschteilchen der fundamentalen Wechselwirkungen sind. Zu diesen zählt z.B. die elektromagnetische Wechselwirkung, deren Austauschteilchen das Photon ist, aber auch die starke Wechselwirkung mit dem Gluon als Austauschteilchen [9].

### 2.2 Entdeckung der Dunklen Materie

Es wurde jedoch später entdeckt, dass diese Teilchen nicht die einzigen massenhaften Teilchen sein können. Mit der Entdeckung, dass die Radialgeschwindigkeit in den äußeren Bereichen von Galaxien höher ist, als man es aufgrund der Masseverteilung der sichtbaren Masse annehmen würde, wurde die Idee der "Dunklen Materie" geboren. Diese Dunkle Materie, so nahm man an, sei für diese fehlende Masse verantwortlich.

Durch die Messung von Röntgenstrahlung von heißen Gasen aus elliptischen Galaxien konnte festgestellt werden, dass die Masse von z.B. der M 87 Galaxie größer als die sichtbare Masse ist [4], wodurch ein Hinweis auf die Richtigkeit der Theorie der Dunklen Materie geliefert werden konnte. Aufgrund von aktuellen Daten wird angenommen, dass Dunkle Materie tatsächlich fünfmal häufiger im Universum vorzufinden ist als sichtbare Materie. Das bedeutet, dass knapp ein Viertel des Universums aus Dunkler Materie besteht [11].

Neben der Röntgenstrahlung konnte auch durch den Gravitationslinseneffekt ein Hinweis auf die Richtigkeit geliefert werden. Des Weiteren konnte durch dieses Verfahren ein dreidimensionales Bild der Verteilung der Dunklen Materie erstellt werden.

Zu den Kandidaten für Dunkle Materie zählen z.B. sterile Neutrinos und MACHOs ("massive astrophysical compact halo object", also massereiche, astrophysikalische, kompakte Halo-Objekte), die jedoch alle nicht so vielversprechend sind wie die WIMPs ("weakly interacting massive particles", also schwach wechselwirkende massereiche Teilchen).

Zu diesen WIMPs zählt das leichteste Neutralino (im Folgenden bezeichnet mit  $\chi$ ). Dieses ist, so wird angenommen, das leichteste stabile supersymmetrische Teilchen des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells (LSP) (siehe Abschnitt 3.2) [7].

### 2.3 WIMP Reliktdichte

Am Anfang war das Universum sehr dicht und heiß. In diesem thermischen Gleichgewicht konnten viele Neutralinos entstehen ( $f\bar{f} \rightarrow \chi\chi$ )<sup>1</sup> und annihilieren ( $\chi\chi \rightarrow f\bar{f}$ ), wobei die Annihilationsrate durch  $\Gamma$  gegeben ist. Durch die folgende Abkühlung des Universums entstanden immer weniger neue Neutralinos, die jedoch immer noch mit derselben Rate annihilierten, wodurch die Anzahl der Teilchen exponentiell mit  $e^{-m_\chi/T}$  sank, wobei  $m_\chi$  die Masse des Neutralinos ist. Da aber mit der Abkühlung auch eine Ausbreitung des Universums einhergeht (Ausbreitungsrate gegeben durch Hubble-Parameter  $H$ ), sank die Dichte der Neutralinos, sodass sie sich nicht mehr fanden um zu annihilieren. Dieses führte dazu, dass die Teilchen "ausfrieren", wenn die Ausbreitungsrate größer als die Annihilationsrate wird ( $H \gg \Gamma$ ), d.h. ihre Anzahl nähert sich einer Konstante an, der sogenannten thermischen Reliktdichte [6][10].

Dieser Verlauf lässt sich an Abbildung 1 nachvollziehen. In dieser Abbildung wird die skalierte Anzahlldichte  $Y = \frac{n}{T^3} \sim na$  genutzt, um bei konstanter Teilchenzahl eine konstante Dichte zu erhalten. Bei einer nicht skalierten Anzahlldichte würde die Dichte durch das steigende Volumen des Universums trotz konstanter Teilchenanzahl im Verlaufe der Zeit sinken. Die durchgezogene Linie in Abbildung 1 beschreibt das Verhalten der Teilchendichte im hypothetischen Fall, dass kein Ausfrieren durch die Expansion des Universums stattfindet. Die gestrichelten Linien stehen somit für den Fall, dass die Teilchen ausfrieren und es somit zu einer konstanten Anzahl an WIMPs im Universum kommt.

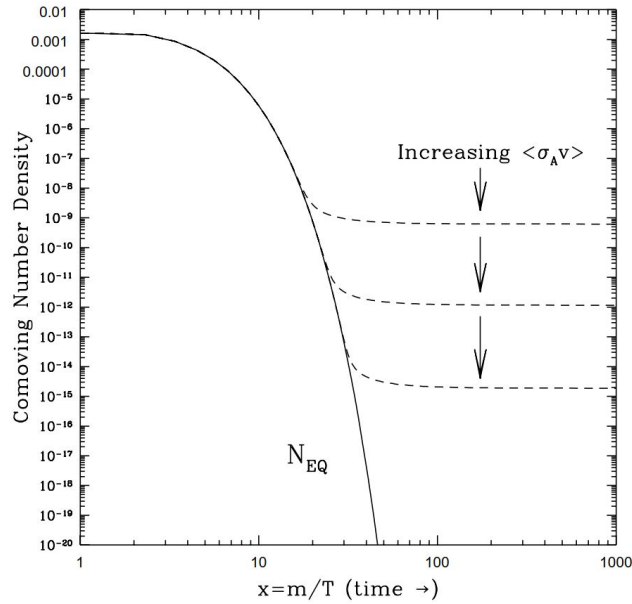


Abbildung 1: Skalierte Anzahlldichte von WIMPs im Verlauf der Zeit [10].

Die Boltzmann-Gleichung

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3Hn_\chi = -\langle\sigma_A v\rangle (n_\chi)^2 + \langle\sigma_A v\rangle (n_\chi^{\text{eq}})^2 \quad (1)$$

beschreibt das zeitliche Verhalten der Anzahlldichte der WIMPs  $n_\chi(t)$ . Hierbei bezeichnet  $H = \dot{a}/a$  den Hubble-Parameter,  $a$  den Skalenfaktor des Universums und  $\Gamma/n_\chi = \langle\sigma_A v\rangle$  den thermischen

<sup>1</sup>Da Neutralinos Majorana-Teilchen sind, gilt  $\bar{\chi} = \chi$ .  $f\bar{f}$  ist ein Fermion-Anti-Fermion Paar, könnte also z.B. für ein Quark-Anti-Quark oder Lepton-Anti-Lepton Paar stehen.

Mittelwert der Relativgeschwindigkeit  $v$  mal dem Wirkungsquerschnitt der Annihilation von  $\chi\chi$  in leichtere Teilchen. Die Anzahldichte des Teilchens  $\chi$  während des thermischen Gleichgewichts am Anfang des Universums ist gegeben durch

$$n_{\chi}^{\text{eq}} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p},$$

wobei  $f(\mathbf{p})$  für die Fermi-Dirac-Verteilung und  $g$  für die Anzahl der inneren Freiheitsgrade des Teilchens steht.

Der zweite Term auf der linken Seite von Gleichung (1) steht für die Ausbreitung des Universums, der erste Term auf der rechten Seite für die Abnahme der Anzahl der WIMPs durch Annihilation und der zweite Term für die Zunahme an WIMPs durch den entgegengesetzten Prozess. Im thermischen Gleichgewicht sind die beiden eingeklammerten Terme auf der rechten Seite gleich.

Aus Gleichung (1) lässt sich nun berechnen, dass die Reliktdichte für das WIMP

$$\Omega_{\chi} h^2 = \frac{m_{\chi} n_{\chi}}{\rho_c} \simeq \left( \frac{3 \times 10^{-27} \text{cm}^3 \text{sec}^{-1}}{\langle \sigma_{A} v \rangle} \right) \quad (2)$$

betragen würde. Dabei ist  $h$  der Hubble-Parameter in Einheiten von  $100 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  und  $\rho_c \simeq 10^{-5} h^2 \text{ GeV cm}^{-3}$  die aktuelle kritische Dichte.

## 2.4 Einfluss anderer Teilchen auf die WIMP Reliktdichte

Die Behandlung des Einflusses anderer Teilchen auf die WIMP Reliktdichte in diesem Kapitel folgt sehr eng "Three Exceptions in the Calculation of Relic Abundances" von K. Griest und D. Seckel [8].

Es stellt sich jedoch heraus, dass neben dem Wirkungsquerschnitt der Annihilation des LSP mit sich selbst auch andere Teilchen einen Einfluss auf die Reliktdichte des LSP haben. Es wird angenommen, dass auch Teilchen, deren Massenunterschiede zum LSP nur sehr gering sind, eine signifikante Rolle spielen. Diese Teilchen können durch Streuung oder Zerfall zu dem LSP werden und umgekehrt.

Zur Verdeutlichung werden Teilchen  $\chi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  des frühen Universums genutzt, für die  $m_i < m_j$  mit  $i < j$  gelten soll. Das leichteste Teilchen,  $\chi_1$  mit  $m_1$ , ist das LSP, also der Kandidat für die Dunkle Materie, dessen Reliktdichte berechnet werden soll.

Die Reliktdichte des Teilchens  $\chi_i$  wird durch die Prozesse

$$\chi_i \chi_j \leftrightarrow X X' \quad (3)$$

$$\chi_i X \leftrightarrow \chi_j X' \quad (4)$$

$$\chi_i \leftrightarrow \chi_j X X' \quad (5)$$

beeinflusst, wobei  $X$  und  $X'$  Teilchen des Standardmodells sind. Da somit jedes Teilchen  $\chi_i$  mit  $i \neq 1$  in das LSP zerfallen/gestreut sein kann und vice versa<sup>2</sup>, ist es notwendig bei der Berechnung der Reliktdichte des LSP auch die Wirkungsquerschnitte

$$\sigma_{ij} = \sigma(\chi_i \chi_j \rightarrow X X') \quad (6)$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma(\chi_i X \rightarrow \chi_j X') \quad (7)$$

und die Zerfallsrate

$$\Gamma_{ij} = \Gamma(\chi_i \rightarrow \chi_j X X') \quad (8)$$

---

<sup>2</sup>Es wird angenommen, dass heutzutage alle Teilchen  $\chi_i$  mit  $i \neq 1$  schon in das  $\chi_1$ -Teilchen zerfallen/gestreut sind.

zu beachten. Somit ergibt sich Gleichung (9), welche Gleichung (1) um den Einfluss anderer Teilchen erweitert.

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dt} = & -3Hn_i - \sum_{j=1}^N \langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle (n_i n_j - n_i^{\text{eq}} n_j^{\text{eq}}) \\ & - \sum_{i \neq j} \left[ \langle \sigma'_{ij} v_{ij} \rangle (n_i n_X - n_i^{\text{eq}} n_X^{\text{eq}}) - \langle \sigma'_{ji} v_{ij} \rangle (n_j n_X - n_j^{\text{eq}} n_X^{\text{eq}}) \right] \\ & - \sum_{i \neq j} \left[ \Gamma_{ij} (n_i - n_i^{\text{eq}}) - \Gamma_{ji} (n_j - n_j^{\text{eq}}) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Der erste Term der rechten Seite von Gleichung (9) beschreibt die Ausbreitung des Universums. Der zweite Term beschreibt die Annihilation der Teilchen  $\chi_i$  und  $\chi_j$  in Teilchen des Standardmodells (siehe Gleichung (6)), wobei  $\chi_i$  das Teilchen ist, dessen Anzahldichte in Gleichung (9) berechnet wird. Der dritte Term beschreibt die Hin- und Rückreaktion zwischen Teilchen  $\chi_i$  und  $\chi_j$  durch Streuung mit einem Teilchen des Standardmodells (siehe Gleichung (7)). Durch den vierten Term wird der Zerfall des Teilchens  $\chi_i$  in  $\chi_j$  und vice versa berücksichtigt (siehe Gleichung (8)).

Zu den Teilchen, die Einfluss auf die Reliktdichte des Neutralinos haben, zählen unter anderem Gluinos und Squarks. Gluinos sind Majorana-Teilchen, das heißt sie können mit sich selbst annihilieren. In dieser Arbeit wird die Annihilation zweier Gluinos in ein Quark-Anti-Quark Paar betrachtet, also der Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow q\bar{q})$$

berechnet. Im Speziellen wird die Annihilation zweier Gluinos in ein Top-Quark-Anti-Top-Quark Paar, also

$$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow t\bar{t},$$

untersucht. Die Berechnung für andere Quarks unterscheidet sich jedoch nur in den Massen der Quarks und den Massen der in den Propagatoren (siehe Anhang B) auftretenden Squarks.

### 3 Supersymmetrie

Die Behandlung der Supersymmetrie in diesem Kapitel folgt sehr eng "A Supersymmetry Primer" von S. Martin [13].

Das Standardmodell der Teilchenphysik stellt ein sehr gutes Modell zur Beschreibung der derzeit bekannten physikalischen Phänomene dar. Es stellt sich jedoch die Frage, ob es auch noch bei Energien, die höher sind als die derzeit erzielten von mehreren hundert GeV, standhalten kann. Betrachtet man den bisherigen Verlauf an Entdeckungen in der Physik, so lässt sich mit Zuversicht sagen, dass das Standardmodell spätestens bei der reduzierten Planck-Masse  $M_P = (8\pi G_{\text{Newton}})^{-1/2} = 2,4 \cdot 10^{18} \text{ GeV}$ , ab der Quantengravitations-Effekte auftreten, an seine Grenzen stößt und man nach einem neuen Modell suchen muss.

Ein Kandidat hierfür ist das Minimale Supersymmetrische Standardmodell. Es beinhaltet neben den Teilchen des Standardmodells auch deren, durch die Supersymmetrie vorausgesagten, Superpartner.

Bis jetzt konnte jedoch weder die Supersymmetrie bewiesen werden, noch wurde eines der vorausgesagten Teilchen gefunden.

#### 3.1 Einführung in die Supersymmetrie

Die Supersymmetrie beschreibt die Umwandlung von bosonischen und fermionischen Zuständen ineinander. Diese Transformation wird durch den supersymmetrischen Operator  $Q$  beschrieben:

$$Q|\text{Boson}\rangle \propto |\text{Fermion}\rangle \quad \text{und} \quad Q|\text{Fermion}\rangle \propto |\text{Boson}\rangle$$

Neben  $Q$  ist auch der hermitisch konjugierte Operator  $Q^\dagger$  ein supersymmetrischer Operator. Es lässt sich zeigen, dass die Operatoren folgende schematische Relationen erfüllen müssen

$$\{Q, Q^\dagger\} = P^\mu \tag{10}$$

$$\{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \tag{11}$$

$$[P^\mu, Q] = [P^\mu, Q^\dagger] = 0, \tag{12}$$

wobei  $P^\mu$  der Impuls-Generator der Raum-Zeit Translation ist.

Die Einteilchen-Zustände in der Supersymmetrie lassen sich in Supermultipletts aufteilen. Jeder Zustand desselben Supermultipletts lässt sich durch Anwendung der supersymmetrischen Operatoren  $Q$  und  $Q^\dagger$  ineinander umwandeln. Die fermionischen Zustände eines Supermultipletts sind die Superpartner von den bosonischen Zuständen desselben Supermultipletts und andersherum.

Da der Masse-Quadrat-Operator  $-P^2$  mit  $Q$  und  $Q^\dagger$  vertauscht (siehe Gleichung (12)), folgt, dass die Teilchen eines Supermultipletts dieselbe Masse haben.<sup>3</sup> Die supersymmetrischen Operatoren vertauschen außerdem noch mit den Generatoren von Eichtransformationen. Daraus folgt, dass nicht nur die Masse, sondern auch elektrische Ladung, schwacher Isospin und Farb-Freiheitsgrade innerhalb eines Supermultipletts gleich sind.

In einem supersymmetrischen, auf das Standardmodell aufbauenden Modell gibt es zwei Arten an Supermultipletts:

- Chirale Supermultipletts bestehen aus einem einzelnen Weyl-Fermion (masseloses Quasiteilchen) mit zwei Helizitätszuständen und zwei realen Skalaren, die sich zu einem komplexen

---

<sup>3</sup>Das gilt jedoch nur, wenn die Supersymmetrie eine exakte Symmetrie ist. Da die Superpartner der Teilchen des Standardmodells, hätten sie die gleiche Masse, schon längst nachgewiesen worden wären, geht man davon aus, dass sie eine größere Masse haben. Das wiederum führt zu der Annahme, dass die Supersymmetrie in der Realität eine gebrochene Symmetrie ist.



Skalar zusammenfassen lassen. Ein einzelnes Fermion hat zwei Superpartner, da sich die links- und rechtshändigen Teile des Fermions unterschiedlich unter Transformation in der Eichgruppe verhalten.

Quarks und Leptonen und deren Superpartner befinden sich in diesen Supermultipletts. Die Superpartner der Quarks heißen Squarks (z.B. Stop-Squark).

- Eich-Supermultipletts hingegen bestehen aus einem masselosen Spin-1 Eichboson und seinem Superpartner, einem Spin- $\frac{1}{2}$  Weyl-Fermion, wobei beide Teilchen jeweils zwei Helizitätszustände haben. Anders als bei den chiralen Supermultipletts verhalten sich bei den Teilchen der Eich-Supermultipletts die links- und rechtshändigen Teile jedoch gleich unter Transformation in der Eichgruppe. Daher hat ein Eich-Boson nur einen Superpartner. In diesem Supermultiplett befinden sich Gluons, W-Bosonen und B-Bosonen und deren Superpartner. Die Superpartner der Gluons werden Gluinos genannt.

Higgs-Bosonen sind auch Teil eines chiralen Supermultipletts. Bei ihnen verhält es sich jedoch komplizierter. Daher wird an dieser Stelle nicht darauf eingegangen. Für weitere Informationen siehe "A Supersymmetry Primer" von S. Martin [13]. Bei den chiralen Supermultipletts gibt es die Besonderheit, dass sowohl der links- als auch der rechtshändige Teil der Quarks einen eigenen komplexen skalaren Superpartner hat.

Die links- und rechtshändigen Teile von Quarks erhält man (hier gezeigt am Beispiel des Top-Quarks) mit Hilfe der links- und rechtshändigen Projektions-Operatoren  $P_L$  &  $P_R$ :

$$t_R = P_R t, \quad t_L = P_L t$$

Die Superpartner lauten somit  $\tilde{t}_R$  und  $\tilde{t}_L$ , wobei die Indizes nichts mit der Helizität der Teilchen zu tun haben, da diese skalar sind.

### 3.2 Minimales Supersymmetrisches Standardmodell

Zusammenfassend sagt die Supersymmetrie also ein Minimales Supersymmetrisches Standardmodell voraus, das auf dem Standardmodell aufbaut. Hierbei werden den Teilchen aus dem Standardmodell Superpartner zugewiesen, die sich im Spin um  $\frac{1}{2}$  von den Standardmodell-Superpartnern unterscheiden, aber die gleichen elektrischen Ladungen, schwachen Isospins und Farb-Freiheitsgrade (und im Falle einer exakten Supersymmetrie auch Massen) haben. Die bosonischen Superpartner der fermionischen Standardmodell-Teilchen werden durch ein angehängtes "-ino" gekennzeichnet und die fermionischen Superpartner der bosonischen Standardmodell-Teilchen durch ein vorangestelltes "S" (für skalar).

Ein Standardmodell-Teilchen kann jedoch mehr als einen Superpartner haben. So hat z.B. jedes Quark zwei Superpartner.

Insgesamt enthält das Minimale Supersymmetrische Standardmodell somit die in Tabellen 1 und 2 aufgeführten Supermultipletts. Diese Supermultipletts sind jedoch keine Masseneigenzustände, sondern Eicheigenzustände. Um die in der Rechnung genutzten Masseneigenzustände  $\tilde{t}_1$  und  $\tilde{t}_2$  der Stop-Squarks zu erhalten, wird die Drehmatrix

$$R_{ij}^{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\tilde{q}} & \sin \theta_{\tilde{q}} \\ -\sin \theta_{\tilde{q}} & \cos \theta_{\tilde{q}} \end{pmatrix} \quad (13)$$

auf die Eicheigenzustände angewendet:

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\tilde{q}} & \sin \theta_{\tilde{q}} \\ -\sin \theta_{\tilde{q}} & \cos \theta_{\tilde{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix} = R^{\tilde{q}} \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\tilde{q}} & -\sin \theta_{\tilde{q}} \\ \sin \theta_{\tilde{q}} & \cos \theta_{\tilde{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix} = (R^{\tilde{q}})^T \begin{pmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix}$$

Tabelle 1: Chirale Supermultipletts im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell [13, S. 8]

Names		spin 0	spin 1/2	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
squarks, quarks ( $\times 3$ families)	$Q$	$(\tilde{u}_L \ \tilde{d}_L)$	$(u_L \ d_L)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	$\bar{u}$	$\tilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	$\bar{d}$	$\tilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
sleptons, leptons ( $\times 3$ families)	$L$	$(\tilde{\nu} \ \tilde{e}_L)$	$(\nu \ e_L)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	$\bar{e}$	$\tilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
Higgs, higgsinos	$H_u$	$(H_u^+ \ H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+ \ \tilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +\frac{1}{2})$
	$H_d$	$(H_d^0 \ H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0 \ \tilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

Tabelle 2: Eich-Supermultipletts im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell [13, S. 9]

Names	spin 1/2	spin 1	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
gluino, gluon	$\tilde{g}$	$g$	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
winos, W bosons	$\tilde{W}^\pm \ \tilde{W}^0$	$W^\pm \ W^0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
bino, B boson	$\tilde{B}^0$	$B^0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

## 4 Quantenchromodynamik

Die Quantenchromodynamik behandelt die starke Wechselwirkung, die eine der vier fundamentalen Wechselwirkungen ist. Sie ist z.B. für die Bindung der Quarks in Protonen und Neutronen verantwortlich, zeigt ihre Restwechselwirkung aber auch z.B. in Form der starken Kernkraft. Die Ladung der starken Wechselwirkung ist die Farbladung (oder auch nur Farbe genannt). Grundsätzliche Teilchen der Quantenchromodynamik sind Quarks und die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung, Gluonen. Die Wechselwirkung von Teilchen im Rahmen der Quantenchromodynamik wird durch die Lagrange-Dichte beschrieben. Aus dieser lassen sich auch die in Anhang B aufgeführten Feynman-Regeln ableiten[9].

Die Farbe wurde eingeführt, um z.B. erklären zu können, warum das  $\Delta^{++}$ -Baryon, obwohl es aus drei up-Quarks mit Spin  $+\frac{1}{2}$  besteht, trotzdem der Fermi-Dirac-Statistik gehorcht. Quarks können die Farben Rot (**R**), Grün (**G**) und Blau (**B**) haben; Anti-Quarks die Farben Cyan (Anti-Rot,  $\bar{\mathbf{R}}$ ), Magenta (Anti-Grün,  $\bar{\mathbf{G}}$ ) und Gelb (Anti-Blau,  $\bar{\mathbf{B}}$ ).

Ein beobachtetes Teilchen (bzw. die Summe der Farben der Teilchen, aus denen es besteht) muss jedoch insgesamt "farblos" sein. Somit ergeben sich für die Quarks, aus denen Baryonen bestehen, die Farben **RGB** oder  $\bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{B}}$ . Mesonen hingegen sind bei der Farbkombination **R** $\bar{\mathbf{R}}$ +**G** $\bar{\mathbf{G}}$ +**B** $\bar{\mathbf{B}}$  farblos.

Gluonen, die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung, werden durch die 3x3-Matrizen  $T^a$  dargestellt, von denen es acht gibt. Die Matrizen können so gewählt werden, dass sie, bis auf einen Vorfaktor, den Gell-Mann-Matrizen (siehe Anhang A) entsprechen.

Wechselwirkt beispielsweise ein Gluon mit  $T^1$  mit einem roten Quark, so wird es in ein grünes Quark geändert. Bei der Entstehung eines Quark-Anti-Quark Paares aus einem Gluon hingegen, kann ein **R-G** oder ein **R-G** Paar aus  $T^1$  entstehen.

Die Matrizen  $T^a$  können jedoch auch Gluinos (siehe Abschnitt 3) beschreiben. Bei der Wechselwirkung von zwei Gluinos, dargestellt durch den Antikommutator  $[T^a, T^b]$ , kann ein Gluon  $T^c$  entstehen. Dieses wird durch die Kommutatorrelation

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

beschrieben. Hierbei ist  $f^{abc}$  die komplett antisymmetrische Strukturamplitude des Farbraums mit den von null unterschiedlichen Elementen

$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = \frac{1}{2}, \quad f^{156} = f^{367} = -\frac{1}{2}, \quad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$f^{abc}$  gibt somit an, ob eine Wechselwirkung zwischen Gluinos der Farben  $a$  und  $b$  ein Gluon der Farbe  $c$  produzieren kann.

## 5 Berechnung des Wirkungsquerschnitts

Um Gleichung (9) lösen zu können, wird der in diesem Abschnitt berechnete Wirkungsquerschnitt benötigt.

Der Wirkungsquerschnitt eines Streuprozesses, bei dem zwei Teilchen  $(p_1, m_1)$  und  $(p_2, m_2)$  annihilieren und dadurch zwei neue Teilchen  $(k_1, m_3)$  und  $(k_2, m_4)$  entstehen, lautet<sup>4</sup>:

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \int \frac{1}{2E_1} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) |\overline{M_{\text{ges.}}}|^2 \quad (14)$$

Hierbei sind  $E_1 = \frac{s+m_3^2-m_4^2}{2\sqrt{s}}$  und  $E_2 = \frac{s-m_3^2+m_4^2}{2\sqrt{s}}$  die Energien der ausgehenden Teilchen. Die Berechnung des Wirkungsquerschnitts geschieht auf tree-level, es werden also keine Streuungen höherer Ordnung berücksichtigt.

Um den Wirkungsquerschnitt der Gluino Annihilation in ein Quark-Anti-Quark Paar zu berechnen, muss also zuerst das über Farb- und Spinanteile gemittelte Betragsquadrat der gesamten Streuamplitude

$$|\overline{M_{\text{ges.}}}|^2 = \frac{1}{(2s_{\tilde{g}} + 1)^2} \frac{1}{(N^2 - 1)^2} \Sigma_{\text{spin, color}} |M_{\text{ges.}}|^2 \quad (15)$$

berechnet werden. Die gesamte Streuamplitude lautet

$$M_{\text{ges.}} = M_s + M_t + M_u, \quad (16)$$

wodurch sich das Betragsquadrat der gesamten Streuamplitude als

$$\begin{aligned} |M_{\text{ges.}}|^2 &= |M_s|^2 + |M_t|^2 + |M_u|^2 + M_s M_u^+ + M_u M_s^+ + M_s M_t^+ + M_t M_s^+ + M_t M_u^+ + M_u M_t^+ \\ &= |M_s|^2 + |M_t|^2 + |M_u|^2 + 2 \operatorname{Re}(M_s M_u^+) + 2 \operatorname{Re}(M_s M_t^+) + 2 \operatorname{Re}(M_t M_u^+) \end{aligned} \quad (17)$$

umschreiben lässt. Die Abschnitte 5.2 bis 5.7 behandeln die Berechnung der Summen über Farbe und Spin der einzelnen Summanden aus Gleichung (17).

Die Streuamplituden  $M_s$ ,  $M_t$  und  $M_u$  werden in Abschnitt 5.1 aufgestellt. Hierzu werden die in Anhang B sichtbaren Feynman-Regeln sowie  $m_1 = m_2 = m_{\tilde{g}}$  und  $m_3 = m_4 = m_t$  genutzt.

Die Indizes der Streuamplituden  $M_s$ ,  $M_t$  und  $M_u$  stehen für die Mandelstam-Variablen. Streuprozesse mit zwei einlaufenden (Impulse:  $p_1$  und  $p_2$ ) und zwei auslaufenden Teilchen (Impulse:  $k_1$  und  $k_2$ ) lassen sich auf tree-level in drei Kategorien einteilen, indem man das Quadrat des Viererimpulses (Impuls:  $k$ ) des ausgetauschten virtuellen Teilchens betrachtet.

Bei dem sogenannten s-Kanal-Prozess (siehe Abschnitt 5.1.1) wechselwirken die beiden einlaufenden Teilchen miteinander. Das entstehende virtuelle Teilchen (in diesem Fall ein Gluon) hat somit den Impuls  $k = p_1 + p_2 = k_1 + k_2$ , also  $k^2 = s$ .

Bei dem t- und u-Kanal-Prozess (siehe Abschnitte 5.1.2 und 5.1.3) streuen die einlaufenden Teilchen durch den Austausch eines virtuellen Teilchens (in diesem Fall ein Squark). Der Unterschied zwischen dem t- und u-Kanal besteht darin, welches Teilchen von welchem aus ausläuft. Wechselwirken die einlaufenden Teilchen so, dass das Teilchen mit  $p_1$  zu dem auslaufenden mit  $k_1$  wird, so handelt es sich um den t-Kanal und das virtuelle Teilchen hat einen Impuls von  $k = p_1 - k_1 = p_2 - k_2$ , wodurch  $k^2 = t$ . Wechselwirken die einlaufenden Teilchen hingegen so, dass das Teilchen mit  $p_1$  zu dem auslaufenden mit  $k_2$  wird, so handelt es sich um den u-Kanal und das virtuelle Teilchen hat einen Impuls von  $k = p_1 - k_2 = p_2 - k_1$ , wodurch  $k^2 = u$  gilt.

Die Amplituden  $M_s$ ,  $M_t$  und  $M_u$  (und die dazu adjungierten Amplituden) sind durchnummeriert. Die nummerierten Amplituden (z.B.  $M_{s1}$  und  $M_{s2}$ ) beschreiben zwar dasselbe Feynman-Diagramm, jedoch entstehen durch andere Ableserichtungen Unterschiede zwischen den Amplituden.

<sup>4</sup>Formel aus "Hitchhiker's Guide to Renormalization" von Karol Kovařík [12], Formel (4.2), (4.3) und (4.6)

## 5.1 Amplituden $M_s$ , $M_t$ und $M_u$

### 5.1.1 Amplituden $M_s$

Für den s-Kanal ergibt sich das in Abbildung 2 sichtbare Feynman-Diagramm.

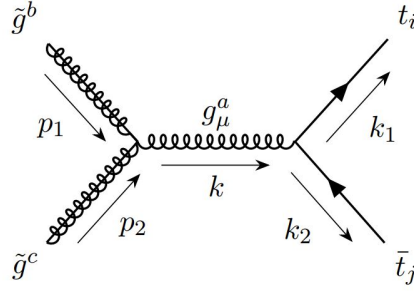


Abbildung 2: s-Kanal Feynman-Diagramm

Die einlaufenden Gluinos annihilieren und es entsteht ein Gluon, aus welchem ein Quark-Anti-Quark Paar entsteht.

Für das in Abbildung 2 dargestellte Feynman-Diagramm ergeben sich die folgenden Amplituden:

$$\begin{aligned}
 M_{s1} &= [\bar{v}(p_1) (-g_s f_{abc} \gamma^\mu) u(p_2)] \cdot \left[ -i \frac{g_{\mu\nu} \delta_e^a}{(p_1 + p_2)^2} \right] \cdot [\bar{u}(k_1) (-ig_s T_{ij}^e \gamma^\nu) v(k_2)] \\
 &= \frac{g_s^2}{(p_1 + p_2)^2} [f_{abc} \delta_e^a T_{ij}^e] [\bar{v}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) g_{\mu\nu} \bar{u}(k_1) \gamma^\nu v(k_2)] \\
 M_{s2} &= [\bar{v}(p_2) (-g_s f_{abc} \gamma^\mu) u(p_1)] \cdot \left[ -i \frac{g_{\mu\nu} \delta_e^a}{(p_1 + p_2)^2} \right] \cdot [\bar{u}(k_1) (-ig_s T_{ij}^e \gamma^\nu) v(k_2)] \\
 &= \frac{g_s^2}{(p_1 + p_2)^2} [f_{abc} \delta_e^a T_{ij}^e] [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) g_{\mu\nu} \bar{u}(k_1) \gamma^\nu v(k_2)] \\
 M_{s1}^+ &= [\bar{v}(k_2) (ig_s T_{ji}^x \gamma^\beta) u(k_1)] \cdot \left[ i \frac{g_{\alpha\beta} \delta_x^d}{(p_1 + p_2)^2} \right] \cdot [\bar{u}(p_2) (-g_s f_{dbc} \gamma^\alpha) v(p_1)] \\
 &= \frac{g_s^2}{(p_1 + p_2)^2} [f_{dbc} \delta_x^d T_{ji}^x] [\bar{v}(k_2) \gamma^\beta u(k_1) g_{\alpha\beta} \bar{u}(p_2) \gamma^\alpha v(p_1)]
 \end{aligned}$$

### 5.1.2 Amplituden $M_t$

Für den t-Kanal ergibt sich das in Abbildung 3 sichtbare Feynman-Diagramm.

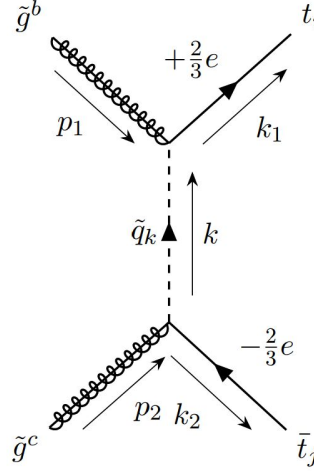


Abbildung 3: t-Kanal Feynman-Diagramm

Anders als beim s-Kanal entsteht hier kein Gluon. Das Gluon ist ein elektrisch neutrales Teilchen, bei dem t-Kanal hingegen muss elektrische Ladung ausgetauscht werden, damit aus einem Gluino ein Quark/Anti-Quark wird. Da bei dem vorliegenden Streuprozess Top-Quarks entstehen, welche eine elektrische Ladung von  $+\frac{2}{3}e$  haben, muss das virtuelle Teilchen auch diese Ladung besitzen. Außerdem hat das Gluon einen Spin von 1, die einlaufenden Gluinos und auslaufenden Quarks hingegen einen Spin von  $\frac{1}{2}$ . Es lässt sich somit sehen, dass das virtuelle Teilchen einen Spin von 0 hat, also skalar ist. Unter anderem aus diesen beiden Gründen lässt sich sagen, dass es sich bei dem ausgetauschten virtuellen Teilchen um ein Stop-Squark handelt.

Für das in Abbildung 3 dargestellte Feynman-Diagramm ergeben sich die folgenden Amplituden:

$$\begin{aligned}
 M_{t1} &= \left[ \bar{u}(k_1) \left( -\sqrt{2}ig_s T_{ik}^b \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_R - R_{n2}^{\tilde{q}} P_L \right) \right) u(p_1) \right] \left[ \frac{i}{t - m_{\tilde{t}_n}^2} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \bar{v}(p_2) \left( -\sqrt{2}ig_s T_{kj}^c \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_L - R_{n2}^{\tilde{q}} P_R \right) \right) v(k_2) \right] \\
 &= -\frac{2ig_s^2}{t - m_{\tilde{t}_n}^2} \left[ T_{ik}^b T_{kj}^c \right] \left[ \bar{u}(k_1) \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_R - R_{n2}^{\tilde{q}} P_L \right) u(p_1) \bar{v}(p_2) \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_L - R_{n2}^{\tilde{q}} P_R \right) v(k_2) \right] \\
 M_{t2} &= \left[ \bar{u}(k_1) \left( -\sqrt{2}ig_s T_{ik}^b \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_R - R_{n2}^{\tilde{q}} P_L \right) \right) u(p_1) \right] \left[ \frac{i}{t - m_{\tilde{t}_n}^2} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \bar{u}(k_2) \left( -\sqrt{2}ig_s T_{kj}^c \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_L - R_{n2}^{\tilde{q}} P_R \right) \right) u(p_2) \right] \\
 &= -\frac{2ig_s^2}{t - m_{\tilde{t}_n}^2} \left[ T_{ik}^b T_{kj}^c \right] \left[ \bar{u}(k_1) \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_R - R_{n2}^{\tilde{q}} P_L \right) u(p_1) \bar{u}(k_2) \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_L - R_{n2}^{\tilde{q}} P_R \right) u(p_2) \right] \\
 M_{t1}^+ &= \left[ \bar{v}(k_2) \left( \sqrt{2}ig_s T_{jl}^c \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_R - R_{m2}^{\tilde{q}} P_L \right) \right) v(p_2) \right] \left[ \frac{-i}{t - m_{\tilde{t}_m}^2} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \bar{u}(p_1) \left( \sqrt{2}ig_s T_{li}^b \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_L - R_{m2}^{\tilde{q}} P_R \right) \right) u(k_1) \right] \\
 &= \frac{2ig_s^2}{t - m_{\tilde{t}_m}^2} \left[ T_{jl}^c T_{li}^b \right] \left[ \bar{v}(k_2) \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_R - R_{m2}^{\tilde{q}} P_L \right) v(p_2) \bar{u}(p_1) \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_L - R_{m2}^{\tilde{q}} P_R \right) u(k_1) \right]
 \end{aligned}$$

### 5.1.3 Amplituden $M_u$

Für den u-Kanal ergibt sich das in Abbildung 4 sichtbare Feynman-Diagramm.

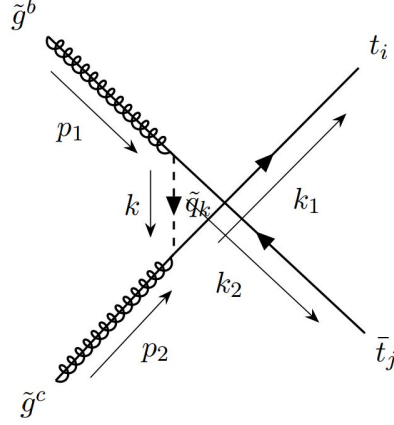


Abbildung 4: u-Kanal Feynman-Diagramm

Wie bei dem t-Kanal ist auch hier das virtuelle Teilchen kein Gluon, sondern aus den selben Gründen wie bei dem t-Kanal ein Stop-Squark.

Für das in Abbildung 4 dargestellte Feynman-Diagramm ergeben sich die folgenden Amplituden:

$$\begin{aligned}
 M_{u1} &= \left[ \bar{u}(k_1) \left( -\sqrt{2}ig_s T_{ik}^c \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_L - R_{n2}^{\tilde{q}} P_R \right) \right) u(p_2) \right] \left[ \frac{-i}{u - m_{\tilde{t}_n}^2} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \bar{v}(p_1) \left( -\sqrt{2}ig_s T_{kj}^b \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_R - R_{n2}^{\tilde{q}} P_L \right) \right) v(k_2) \right] \\
 &= \frac{2ig_s^2}{u - m_{\tilde{t}_n}^2} \left[ T_{ik}^c T_{kj}^b \right] \left[ \bar{u}(k_1) \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_L - R_{n2}^{\tilde{q}} P_R \right) u(p_2) \bar{v}(p_1) \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_R - R_{n2}^{\tilde{q}} P_L \right) v(k_2) \right] \\
 M_{u1}^+ &= \left[ \bar{v}(k_2) \left( \sqrt{2}ig_s T_{jl}^b \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_L - R_{m2}^{\tilde{q}} P_R \right) \right) v(p_1) \right] \left[ \frac{i}{u - m_{\tilde{t}_m}^2} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \bar{u}(p_2) \left( \sqrt{2}ig_s T_{li}^c \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_R - R_{m2}^{\tilde{q}} P_L \right) \right) u(k_1) \right] \\
 &= -\frac{2ig_s^2}{u - m_{\tilde{t}_m}^2} \left[ T_{jl}^b T_{li}^c \right] \left[ \bar{v}(k_2) \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_L - R_{m2}^{\tilde{q}} P_R \right) v(p_1) \bar{u}(p_2) \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_R - R_{m2}^{\tilde{q}} P_L \right) u(k_1) \right] \\
 M_{u2}^+ &= \left[ \bar{u}(p_1) \left( \sqrt{2}ig_s T_{jl}^b \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_L - R_{m2}^{\tilde{q}} P_R \right) \right) u(k_2) \right] \left[ \frac{i}{u - m_{\tilde{t}_m}^2} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \bar{u}(p_2) \left( \sqrt{2}ig_s T_{li}^c \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_R - R_{m2}^{\tilde{q}} P_L \right) \right) u(k_1) \right] \\
 &= -\frac{2ig_s^2}{u - m_{\tilde{t}_m}^2} \left[ T_{jl}^b T_{li}^c \right] \left[ \bar{u}(p_1) \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_L - R_{m2}^{\tilde{q}} P_R \right) u(k_2) \bar{u}(p_2) \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_R - R_{m2}^{\tilde{q}} P_L \right) u(k_1) \right]
 \end{aligned}$$

## 5.2 Berechnung von $|M_s|^2$

$$\begin{aligned}
 |M_s|^2 &= M_{s1} M_{s1}^+ = [\bar{v}(p_1) (-g_s f_{abc} \gamma^\mu) u(p_2)] \cdot \left[ -i \frac{g_{\mu\nu} \delta_e^a}{s} \right] \cdot [\bar{u}(k_1) (-ig_s T_{ij}^e \gamma^\nu) v(k_2)] \cdot \\
 &\quad \cdot [\bar{v}(k_2) (ig_s T_{ji}^x \gamma^\beta) u(k_1)] \cdot \left[ i \frac{g_{\alpha\beta} \delta_x^d}{s} \right] \cdot [\bar{u}(p_2) (-g_s f_{dbc} \gamma^\alpha) v(p_1)] \\
 &= \frac{g_s^4}{s^2} [f_{abc} T_{ij}^a f_{dbc} T_{ji}^d] [\bar{v}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) \bar{u}(p_2) \gamma^\alpha v(p_1) \bar{u}(k_1) \gamma^\nu v(k_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\beta u(k_1) g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}] \\
 &= \frac{g_s^4}{s^2} |M_s|_{\text{color}}^2 |M_s|_{\text{impulse}}^2
 \end{aligned}$$

Da  $|M_s|_{\text{color}}^2$  vollkommen unabhängig vom Spin und  $|M_s|_{\text{impulse}}^2$  vollkommen unabhängig von der Farbe ist, lässt sich für die Summe von  $|M_s|^2$  über Farbe und Spin schreiben:

$$\Sigma_{\text{spin, color}} |M_s|^2 = \frac{g_s^4}{s^2} [\Sigma_{\text{color}} |M_s|_{\text{color}}^2] [\Sigma_{\text{spin}} |M_s|_{\text{impulse}}^2] \quad (18)$$

Im Folgenden können daher der Spin-Teil und der Farb-Teil einzeln berechnet werden.

### Berechnung des Spin-Teils

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{spin}} |M_s|_{\text{impulse}}^2 &= \Sigma_{\text{spin}} [\bar{v}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) \bar{u}(p_2) \gamma^\alpha v(p_1) g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \bar{u}(k_1) \gamma^\nu v(k_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\beta u(k_1)] \\
 &= \text{Tr} [(p_{1A} \gamma^A - m_{\tilde{g}}) \gamma^\mu (p_{2B} \gamma^B + m_{\tilde{g}}) \gamma^\alpha] g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \text{Tr} [(k_{1C} \gamma^C + m_t) \gamma^\nu (k_{2D} \gamma^D - m_t) \gamma^\beta]
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Vollständigkeitsrelationen

$$\Sigma_{\text{spin}} u(p) \bar{u}(p) = \not{p} + m \quad (19)$$

$$\Sigma_{\text{spin}} v(p) \bar{v}(p) = \not{p} - m \quad (20)$$

und

$$\not{p} = p_\mu \gamma^\mu \quad (21)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{spin}} |M_s|_{\text{impulse}}^2 &= \text{Tr} [(\not{p}_1 - m_{\tilde{g}}) \gamma^\mu (\not{p}_2 + m_{\tilde{g}}) \gamma^\alpha] g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \text{Tr} [(\not{k}_1 + m_t) \gamma^\nu (\not{k}_2 - m_t) \gamma^\beta] \\
 &= \text{Tr} [(p_{1A} \gamma^A - m_{\tilde{g}}) \gamma^\mu (p_{2B} \gamma^B + m_{\tilde{g}}) \gamma^\alpha] g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \text{Tr} [(k_{1C} \gamma^C + m_t) \gamma^\nu (k_{2D} \gamma^D - m_t) \gamma^\beta]
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (19) bis (21) werden bei den folgenden Berechnungen immer verwendet, jedoch nicht mehr erwähnt.

Benutze:

$$\text{Die Spur einer ungeraden Anzahl an } \gamma^\mu \text{ ist null.} \quad (22)$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{spin}} |M_s|_{\text{impulse}}^2 &= (p_{1A} p_{2B} 4 (g^{A\mu} g^{\alpha B} - g^{AB} g^{\mu\alpha} + g^{A\alpha} g^{\mu B}) - m_{\tilde{g}}^2 4 g^{\mu\alpha}) \cdot \\
 &\quad \cdot (k_{1C} k_{2D} 4 (g^{C\nu} g^{\beta D} - g^{CD} g^{\nu\beta} + g^{C\beta} g^{\nu D}) - m_t^2 4 g^{\nu\beta}) g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$



Benutze die Mandelstam-Variablen:

$$p_{1A} p_2^A = \frac{(s - 2m_g^2)}{2} \quad (24)$$

$$k_{1A} k_2^A = \frac{(s - 2m_t^2)}{2} \quad (25)$$

$$p_{1A} k_1^A = p_{2A} k_2^A = \frac{((m_g^2 + m_t^2) - t)}{2} \quad (26)$$

$$p_{1A} k_2^A = p_{2A} k_1^A = \frac{((m_g^2 + m_t^2) - u)}{2} \quad (27)$$

$$\Sigma_{\text{spin}} |M_s|_{\text{impulse}}^2 = 16 \left( (m_g^2 + m_t^2) (m_g^2 + m_t^2 + s - t - u) \right) + 8 (t^2 + u^2) \quad (28)$$

### Berechnung des Farb-Teils

$$\Sigma_{\text{color}} |M_s|_{\text{color}}^2 = \Sigma_{\text{color}} \left[ f_{abc} T_{ij}^a f_{dbc} T_{ji}^d \right] = \sum_{a,d} \left( \sum_{b,c} f_{abc} f_{dbc} \sum_{i,j} T_{ij}^a T_{ji}^d \right)$$

Benutze:

$$\sum_{b,c} f_{abc} f_{dbc} = N \delta_{ab} \quad (29)$$

$$\sum_{i,j} T_{ij}^a T_{ji}^d = \text{Tr} [T^a T^d] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{color}} |M_s|_{\text{color}}^2 &= \frac{N}{2} \sum_{a,d} (\delta_{ad} \delta^{ad}) = \frac{N}{2} \sum_{a=1}^{N^2-1} \delta_a^a \\ &= \frac{N}{2} (N^2 - 1) \end{aligned} \quad (31)$$

### Zusammenfassung

Setzt man nun die Gleichungen (28) und (31) in Gleichung (18) ein, so erhält man:

$$\Sigma_{\text{spin, color}} |M_s|^2 = 4 \frac{g_s^4}{s^2} \left[ N (N^2 - 1) \right] \left[ 2 (m_g^2 + m_t^2) (m_g^2 + m_t^2 + s - t - u) + t^2 + u^2 \right] \quad (32)$$

### 5.3 Berechnung von $|M_t|^2$

Benutze:

$$I_{n/m1} = R_{n/m1}^{\tilde{q}} P_R - R_{n/m2}^{\tilde{q}} P_L = \frac{1}{2} (R_{n/m-} + R_{n/m+} \gamma_5) \quad (33)$$

$$I_{n/m2} = R_{n/m1}^{\tilde{q}} P_L - R_{n/m2}^{\tilde{q}} P_R = \frac{1}{2} (R_{n/m-} - R_{n/m+} \gamma_5) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} |M_t|^2 &= M_{t1} M_{t1}^\dagger = [\bar{u}(k_1) (-\sqrt{2} i g_s T_{ik}^b I_{n1}) u(p_1)] \left[ \frac{i}{t - m_{t_n}^2} \right] [\bar{v}(p_2) (-\sqrt{2} i g_s T_{kj}^c I_{n2}) v(k_2)] \cdot \\ &\quad \cdot [\bar{v}(k_2) (\sqrt{2} i g_s T_{jl}^c I_{m1}) v(p_2)] \left[ \frac{-i}{t - m_{t_m}^2} \right] [\bar{u}(p_1) (\sqrt{2} i g_s T_{li}^b I_{m2}) u(k_1)] \\ &= \frac{4g_s^4}{(t - m_{t_n}^2)(t - m_{t_m}^2)} [T_{ik}^b T_{kj}^c T_{li}^b T_{jl}^c] \cdot \\ &\quad \cdot [\bar{u}(k_1) I_{n1} u(p_1) \bar{u}(p_1) I_{m2} u(k_1) \bar{v}(p_2) I_{n2} v(k_2) \bar{v}(k_2) I_{m1} v(p_2)] \\ &= \frac{4g_s^4}{(t - m_{t_n}^2)(t - m_{t_m}^2)} |M_t|_{\text{color}}^2 |M_t|_{\text{impulse}}^2 \end{aligned}$$

Da  $|M_t|_{\text{color}}^2$  vollkommen unabhängig vom Spin und  $|M_t|_{\text{impulse}}^2$  vollkommen unabhängig von der Farbe ist, lässt sich für die Summe von  $|M_t|^2$  über Farbe und Spin schreiben:

$$\Sigma_{\text{spin, color}} |M_t|^2 = \frac{4g_s^4}{(t - m_{t_n}^2)(t - m_{t_m}^2)} [\Sigma_{\text{color}} |M_t|_{\text{color}}^2] [\Sigma_{\text{spin}} |M_t|_{\text{impulse}}^2] \quad (35)$$

#### Berechnung des Spin-Teils

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{spin}} |M_t|_{\text{impulse}}^2 &= \Sigma_{\text{spin}} [\bar{u}(k_1) I_{n1} u(p_1) \bar{u}(p_1) I_{m2} u(k_1) \bar{v}(p_2) I_{n2} v(k_2) \bar{v}(k_2) I_{m1} v(p_2)] \\ &= \text{Tr} [(k_{1A} \gamma^A + m_t) I_{n1} (p_{1B} \gamma^B + m_{\tilde{g}}) I_{m2}] \text{Tr} [(p_{2C} \gamma^C - m_{\tilde{g}}) I_{n2} (k_{2D} \gamma^D - m_t) I_{m1}] \\ &= |M_t|_1^2 |M_t|_2^2 \end{aligned}$$

Da sich  $|M_t|_1^2$  und  $|M_t|_2^2$  bei der Berechnung im Prinzip nicht unterscheiden, wird hier nur  $|M_t|_1^2$  genauer betrachtet.

$$\begin{aligned} |M_t|_1^2 &= \text{Tr} [(k_{1A} \gamma^A + m_t) I_{n1} (p_{1B} \gamma^B + m_{\tilde{g}}) I_{m2}] \\ &= \text{Tr} [k_{1A} p_{1B} (\gamma^A I_{n1} \gamma^B I_{m2}) + k_{1A} m_{\tilde{g}} (\gamma^A I_{n1} I_{m2}) + p_{1B} m_t (I_{n1} \gamma^B I_{m2}) + m_{\tilde{g}} m_t (I_{n1} I_{m2})] \end{aligned}$$

Benutze die Gleichungen (22), (23), (33) und (34) und:

$$\text{Die Spur von } \gamma_5 \text{ mal einer ungeraden Anzahl an } \gamma^\mu \text{ ist null.} \quad (36)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (37) \quad \text{Tr} [\gamma^\mu] = 0 \quad (39)$$

$$\gamma^5 \gamma^5 = \mathbb{1}_4 \quad (38) \quad \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5] = 0 \quad (40)$$

$$|M_t|_1^2 = k_{1A} p_1^A (R_{n-} R_{m-} + R_{n+} R_{m+}) + m_{\tilde{g}} m_t (R_{n-} R_{m-} - R_{n+} R_{m+})$$

Benutze Gleichung (26) und:

$$R_{n/m-} = R_{n/m1}^{\tilde{q}} - R_{n/m2}^{\tilde{q}}, \quad R_{n/m+} = R_{n/m1}^{\tilde{q}} + R_{n/m2}^{\tilde{q}} \quad (41)$$

$$|M_t|_1^2 = \left( (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) - t \right) \left( R_{n1}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} + R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} \right) - 2m_{\tilde{g}} m_t \left( R_{n1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} + R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} \right)$$

Analog zu  $|M_t|_1^2$  ergibt sich somit für  $|M_t|_2^2$ :

$$\begin{aligned} |M_t|_2^2 &= \text{Tr} \left[ (p_{2C} \gamma^C - m_{\tilde{g}}) I_{n2} (k_{2D} \gamma^D - m_t) I_{m1} \right] \\ &= \left( (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) - t \right) \left( R_{n1}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} + R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} \right) - 2m_{\tilde{g}} m_t \left( R_{n1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} + R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} \right) \end{aligned}$$

Der Spin-Teil ist folglich durch

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{spin}} |M_t|_{\text{impulse}}^2 &= |M_t|_1^2 |M_t|_2^2 \\ &= \left( \left( (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) - t \right) \left( R_{n1}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} + R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} \right) - 2m_{\tilde{g}} m_t \left( R_{n1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} + R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} \right) \right)^2 \quad (42) \end{aligned}$$

gegeben.

### Berechnung des Farb-Teils

$$\Sigma_{\text{color}} |M_t|_{\text{color}}^2 = \Sigma_{\text{color}} \left[ T_{ik}^b T_{kj}^c T_{li}^b T_{jl}^c \right] = \sum_{k,l} \left( \sum_{b,i} T_{li}^b T_{ik}^b \quad \sum_{c,j} T_{kj}^c T_{jl}^c \right)$$

Benutze:

$$\sum_{a,k} T_{ik}^a T_{kj}^a = \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{ij} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{color}} |M_t|_{\text{color}}^2 &= \sum_{k,l} \left( \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{lk} \quad \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{kl} \right) = \left( \frac{N^2 - 1}{2N} \right)^2 \sum_{k=1}^N \delta_{kk} \\ &= \frac{(N^2 - 1)^2}{4N} \quad (44) \end{aligned}$$

### Zusammenfassung

Setzt man nun die Gleichungen (42) und (44) in Gleichung (35) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{spin, color}} |M_t|^2 &= \frac{g_s^4}{(t - m_{t_n}^2)(t - m_{t_m}^2)} \left[ \frac{(N^2 - 1)^2}{N} \right] \cdot \\ &\cdot \left[ \left( (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) - t \right) \left( R_{n1}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} + R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} \right) - 2m_{\tilde{g}} m_t \left( R_{n1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} + R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} \right) \right]^2 \quad (45) \end{aligned}$$

#### 5.4 Berechnung von $|M_u|^2$

Benutze die Gleichungen (33) und (34).

$$\begin{aligned}
 |M_u|^2 &= M_{u1} M_{u1}^+ = \left[ \bar{u}(k_1) \left( -\sqrt{2} i g_s T_{ik}^c I_{n2} \right) u(p_2) \right] \left[ \frac{-i}{u - m_{\tilde{t}_n}^2} \right] \left[ \bar{v}(p_1) \left( -\sqrt{2} i g_s T_{kj}^b I_{n1} \right) v(k_2) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \bar{v}(k_2) \left( \sqrt{2} i g_s T_{jl}^b I_{m2} \right) v(p_1) \right] \left[ \frac{i}{u - m_{\tilde{t}_m}^2} \right] \left[ \bar{u}(p_2) \left( \sqrt{2} i g_s T_{li}^c I_{m1} \right) u(k_1) \right] \\
 &= \frac{4g_s^4}{(u - m_{\tilde{t}_n}^2)(u - m_{\tilde{t}_m}^2)} \left[ T_{ik}^c T_{kj}^b T_{li}^c T_{jl}^b \right] \cdot \\
 &\quad \cdot [\bar{u}(k_1) I_{n2} u(p_2) \bar{u}(p_2) I_{m1} u(k_1) \bar{v}(p_1) I_{n1} v(k_2) \bar{v}(k_2) I_{m2} v(p_1)] \\
 &= \frac{4g_s^4}{(u - m_{\tilde{t}_n}^2)(u - m_{\tilde{t}_m}^2)} |M_u|_{\text{color}}^2 |M_u|_{\text{impulse}}^2 \\
 \Sigma_{\text{spin, color}} |M_u|^2 &= \frac{4g_s^4}{(u - m_{\tilde{t}_n}^2)(u - m_{\tilde{t}_m}^2)} \left[ \Sigma_{\text{color}} |M_u|_{\text{color}}^2 \right] \left[ \Sigma_{\text{spin}} |M_u|_{\text{impulse}}^2 \right]
 \end{aligned}$$

Die Berechnung von  $\Sigma_{\text{spin, color}} |M_u|^2$  erfolgt analog zu Abschnitt 5.3.

#### Zusammenfassung

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{spin, color}} |M_u|^2 &= \frac{g_s^4}{(u - m_{\tilde{t}_n}^2)(u - m_{\tilde{t}_m}^2)} \left[ \frac{(N^2 - 1)^2}{N} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \left( (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) - u \right) \left( R_{n1}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} + R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} \right) - 2m_{\tilde{g}} m_t \left( R_{n1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} + R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} \right) \right]^2
 \end{aligned} \tag{46}$$

### 5.5 Berechnung von $M_s M_u^+$

$$\begin{aligned}
 M_s M_u^+ &= M_{s1} M_{u1}^+ = [\bar{v}(p_1) (-g_s f_{abc} \gamma^\mu) u(p_2)] \left[ i \frac{g_{\mu\nu} \delta_e^a}{(p_1 + p_2)^2} \right] [\bar{u}(k_1) (-ig_s T_{ij}^e \gamma^\nu) v(k_2)] \cdot \\
 &\quad \cdot [\bar{v}(k_2) (\sqrt{2} i g_s T_{jl}^b (R_{m1}^{\tilde{q}} P_L - R_{m2}^{\tilde{q}} P_R)) v(p_1)] \left[ \frac{-i}{u - m_{t_m}^2} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot [\bar{u}(p_2) (\sqrt{2} i g_s T_{li}^c (R_{m1}^{\tilde{q}} P_R - R_{m2}^{\tilde{q}} P_L)) u(k_1)]
 \end{aligned}$$

Benutze die Gleichungen (33) und (34).

$$\begin{aligned}
 M_s M_u^+ &= M_{s1} M_{u1}^+ = \left( -\frac{2ig_s^4}{s(u - m_{t_m}^2)} \right) [f_{abc} \delta_e^a T_{ij}^e T_{jl}^b T_{li}^c] \cdot \\
 &\quad \cdot [\bar{v}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) \bar{u}(p_2) I_{m1} u(k_1) \bar{u}(k_1) \gamma^\nu v(k_2) \bar{v}(k_2) I_{m2} v(p_1) g_{\mu\nu}] \\
 &= \left( -\frac{2ig_s^4}{s(u - m_{t_m}^2)} \right) (M_s M_u^+)_{\text{color}} (M_s M_u^+)_{\text{impulse}}
 \end{aligned}$$

Da  $(M_s M_u^+)_{\text{color}}$  vollkommen unabhängig vom Spin und  $(M_s M_u^+)_{\text{impulse}}$  vollkommen unabhängig von der Farbe ist, lässt sich für die Summe von  $M_s M_u^+$  über Farbe und Spin schreiben:

$$\Sigma_{\text{spin, color}} M_s M_u^+ = \left( -\frac{2ig_s^4}{s(u - m_{t_m}^2)} \right) [\Sigma_{\text{color}} (M_s M_u^+)_{\text{color}}] [\Sigma_{\text{spin}} (M_s M_u^+)_{\text{impulse}}] \quad (47)$$

### Berechnung des Spin-Teils

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{spin}} (M_s M_u^+)_{\text{impulse}} &= \Sigma_{\text{spin}} [\bar{v}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) \bar{u}(p_2) I_{m1} u(k_1) \bar{u}(k_1) \gamma^\nu v(k_2) \bar{v}(k_2) I_{m2} v(p_1) g_{\mu\nu}] \\
 &= \text{Tr} [(p_{1A} \gamma^A - m_{\tilde{g}}) \gamma^\mu (p_{2B} \gamma^B + m_{\tilde{g}}) I_{m1} (k_{1C} \gamma^C + m_t) \gamma^\nu (k_{2D} \gamma^D - m_t) I_{m2}] g_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

Benutze die Gleichungen (22), (23), (33), (34) und (36) bis (40) und:

$$p_{1A} p_{2B} k_{1C} k_{2D} \epsilon^{ABCD} = 0 \quad (48)$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4 [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \quad (49)$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] = -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= g^{\mu\alpha} \text{Tr} [\gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] - g^{\mu\beta} \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] + g^{\mu\nu} \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\sigma] \\
 &\quad - g^{\mu\rho} \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\sigma] + g^{\mu\sigma} \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\rho]
 \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] &= -4i [g^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} - g^{\mu\rho} \epsilon^{\nu\sigma\alpha\beta} + g^{\mu\sigma} \epsilon^{\nu\rho\alpha\beta} \\
 &\quad - g^{\alpha\beta} \epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} + g^{\sigma\beta} \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} - g^{\sigma\alpha} \epsilon^{\beta\mu\nu\rho}]
 \end{aligned} \quad (52)$$

Gleichung (48) gilt, da die Impulse linear abhängig voneinander sind und somit z.B.  $p_1$  durch die anderen drei Impulse dargestellt werden kann, wodurch der vier-dimensionale  $\epsilon$ -Tensor null wird.

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{spin}} (M_s M_u^+)_{\text{impulse}} &= 2 (R_{m-}^2 + R_{m+}^2) [p_{1A} p_2^A m_t^2 + k_{1A} k_2^A m_{\tilde{g}}^2 + 2m_{\tilde{g}}^2 m_t^2] \\
 &\quad + 2 (R_{m-}^2 - R_{m+}^2) [p_{1A} k_1^A m_{\tilde{g}} m_t + 2p_{1A} k_2^A m_{\tilde{g}} m_t + 2p_{2A} k_1^A m_{\tilde{g}} m_t + p_{2A} k_2^A m_{\tilde{g}} m_t] \\
 &\quad + 4 (R_{m-}^2 + R_{m+}^2) p_{1A} k_2^A p_{2B} k_1^B
 \end{aligned}$$

Benutze die Gleichungen (24) bis (27).

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{spin}} \left( M_s M_u^+ \right)_{\text{impulse}} &= \left( R_{m-}^2 + R_{m+}^2 \right) (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) s \\ &\quad + \left( R_{m-}^2 - R_{m+}^2 \right) \left( 6(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) - 2t - 4u \right) m_{\tilde{g}} m_t \\ &\quad + \left( R_{m-}^2 + R_{m+}^2 \right) \left[ (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)^2 + u^2 - 2(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)u \right]\end{aligned}$$

Benutze Gleichung (41).

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{spin}} \left( M_s M_u^+ \right)_{\text{impulse}} &= 2 \left( R_{m1}^{\tilde{q}^2} + R_{m2}^{\tilde{q}^2} \right) \left[ (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)^2 + u^2 - (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)(2u - s) \right] \\ &\quad + 8 R_{m1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} \left( 2t + u - 3(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) \right) m_{\tilde{g}} m_t\end{aligned}\tag{53}$$

### Berechnung des Farb-Teils

$$\Sigma_{\text{color}} \left( M_s M_u^+ \right)_{\text{color}} = \Sigma_{\text{color}} \left[ f_{abc} \delta_e^a T_{ij}^e T_{li}^c T_{jl}^b \right] = \sum_{a,b,c} f_{abc} \sum_{i,j,l} T_{ij}^a T_{li}^c T_{jl}^b$$

Benutze:

$$\sum_{i,j,l} T_{ij}^a T_{jl}^b T_{li}^c = \text{Tr} \left[ T^a T^b T^c \right] = \frac{1}{4} \left( d^{acb} + i f^{abc} \right)\tag{54}$$

$$\Sigma_{\text{color}} \left( M_s M_u^+ \right)_{\text{color}} = \sum_{a,b,c} \frac{1}{4} f_{abc} \left( d^{acb} + i f^{abc} \right)$$

Benutze:

$$f_{abc} d^{abd} = 0 \tag{55} \qquad f_{akl} f^{bkl} = N \delta_{ab} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{color}} \left( M_s M_u^+ \right)_{\text{color}} &= i \frac{N}{4} \sum_a \delta_a^a \\ &= i \frac{N(N^2 - 1)}{4}\end{aligned}\tag{57}$$

### Zusammenfassung

Setzt man nun die Gleichungen (53) und (57) in Gleichung (47) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{spin, color}} M_s M_u^+ &= \frac{g_s^4}{s \left( u - m_{t_m}^2 \right)} \left[ N(N^2 - 1) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \left( R_{m1}^{\tilde{q}^2} + R_{m2}^{\tilde{q}^2} \right) \left[ (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)^2 + u^2 - (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)(2u - s) \right] \right. \\ &\quad \left. + 4 R_{m1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} \left( 2t + u - 3(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) \right) m_{\tilde{g}} m_t \right]\end{aligned}\tag{58}$$

## 5.6 Berechnung von $M_s M_t^+$

$$\begin{aligned}
 M_s M_t^+ = M_{s2} M_{t1}^+ &= [\bar{v}(p_2) (-g_s f_{abc} \gamma^\mu) u(p_1)] \cdot \left[ -i \frac{g_{\mu\nu} \delta_e^a}{(p_1 + p_2)^2} \right] \cdot [\bar{u}(k_1) (-ig_s T_{ij}^e \gamma^\nu) v(k_2)] \cdot \\
 &\cdot [\bar{v}(k_2) (\sqrt{2} i g_s T_{jl}^c (R_{m1}^{\tilde{q}} P_R - R_{m2}^{\tilde{q}} P_L)) v(p_2)] \left[ \frac{-i}{t - m_{t_m}^2} \right] \cdot \\
 &\cdot [\bar{u}(p_1) (\sqrt{2} i g_s T_{li}^b (R_{m1}^{\tilde{q}} P_L - R_{m2}^{\tilde{q}} P_R)) u(k_1)]
 \end{aligned}$$

Benutze die Gleichungen (33) und (34).

$$\begin{aligned}
 M_s M_t^+ &= M_{s2} M_{t1}^+ = \left( \frac{2ig_s^4}{s(t - m_{t_m}^2)} \right) [f_{abc} \delta_e^a T_{ij}^e T_{jl}^c T_{li}^b] \cdot \\
 &\cdot [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) I_{m2} u(k_1) \bar{u}(k_1) \gamma^\nu v(k_2) \bar{v}(k_2) I_{m1} v(p_2) g_{\mu\nu}] \\
 &= \left( \frac{2ig_s^4}{s(t - m_{t_m}^2)} \right) (M_s M_t^+)_{\text{color}} (M_s M_t^+)_{\text{impulse}} \\
 \Sigma_{\text{spin, color}} M_s M_t^+ &= \left( \frac{2ig_s^4}{s(t - m_{t_m}^2)} \right) [\Sigma_{\text{color}} (M_s M_t^+)_{\text{color}}] [\Sigma_{\text{spin}} (M_s M_t^+)_{\text{impulse}}]
 \end{aligned}$$

Die Berechnung von  $\Sigma_{\text{spin, color}} M_s M_t^+$  erfolgt analog zu Abschnitt 5.5.

### Zusammenfassung

Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{spin, color}} M_s M_t^+ &= \frac{g_s^4}{s(t - m_{t_m}^2)} [N(N^2 - 1)] \cdot \\
 &\cdot \left[ (R_{m1}^{\tilde{q}})^2 + (R_{m2}^{\tilde{q}})^2 \right] [(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)^2 + t^2 - (m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)(2t - s)] \\
 &+ 4R_{m1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} (2u + t - 3(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)) m_{\tilde{g}} m_t
 \end{aligned} \tag{59}$$

## 5.7 Berechnung von $M_t M_u^+$

$$\begin{aligned}
 M_t M_u^+ = M_{t2} M_{u2}^+ &= \left[ \bar{u}(k_1) \left( -\sqrt{2} i g_s T_{ik}^b \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_R - R_{n2}^{\tilde{q}} P_L \right) \right) u(p_1) \right] \left[ \frac{i}{t - m_{\tilde{t}_n}^2} \right] \cdot \\
 &\cdot \left[ \bar{u}(k_2) \left( -\sqrt{2} i g_s T_{kj}^c \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_L - R_{n2}^{\tilde{q}} P_R \right) \right) u(p_2) \right] \cdot \\
 &\cdot \left[ \bar{u}(p_1) \left( \sqrt{2} i g_s T_{jl}^b \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_L - R_{m2}^{\tilde{q}} P_R \right) \right) u(k_2) \right] \left[ \frac{i}{u - m_{\tilde{t}_m}^2} \right] \cdot \\
 &\cdot \left[ \bar{u}(p_2) \left( \sqrt{2} i g_s T_{li}^c \left( R_{m1}^{\tilde{q}} P_R - R_{m2}^{\tilde{q}} P_L \right) \right) u(k_1) \right]
 \end{aligned}$$

Benutze die Gleichungen (33) und (34).

$$\begin{aligned}
 M_t M_u^+ = M_{t2} M_{u2}^+ &= \left( -\frac{4g_s^4}{(t - m_{\tilde{t}_n}^2)(u - m_{\tilde{t}_m}^2)} \right) \left[ T_{ik}^b T_{kj}^c T_{jl}^b T_{li}^c \right] \cdot \\
 &\cdot [\bar{u}(k_1) I_{n1} u(p_1) \bar{u}(p_1) I_{m2} u(k_2) \bar{u}(k_2) I_{n2} u(p_2) \bar{u}(p_2) I_{m1} u(k_1)] \\
 &= \left( -\frac{4g_s^4}{(t - m_{\tilde{t}_n}^2)(u - m_{\tilde{t}_m}^2)} \right) (M_t M_u^+)_{\text{color}} (M_t M_u^+)_{\text{impulse}}
 \end{aligned}$$

Da  $(M_t M_u^+)_{\text{color}}$  vollkommen unabhängig vom Spin und  $(M_t M_u^+)_{\text{impulse}}$  vollkommen unabhängig von der Farbe ist, lässt sich für die Summe von  $M_t M_u^+$  über Farbe und Spin schreiben:

$$\Sigma_{\text{spin, color}} M_t M_u^+ = \left( -\frac{4g_s^4}{(t - m_{\tilde{t}_n}^2)(u - m_{\tilde{t}_m}^2)} \right) \left[ \Sigma_{\text{color}} (M_t M_u^+)_{\text{color}} \right] \left[ \Sigma_{\text{spin}} (M_t M_u^+)_{\text{impulse}} \right] \quad (60)$$

### Berechnung des Spin-Teils

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{spin}} (M_t M_u^+)_{\text{impulse}} &= \Sigma_{\text{spin}} [\bar{u}(k_1) I_{n1} u(p_1) \bar{u}(p_1) I_{m2} u(k_2) \bar{u}(k_2) I_{n2} u(p_2) \bar{u}(p_2) I_{m1} u(k_1)] \\
 &= \text{Tr} \left[ (k_{1A} \gamma^A + m_t) I_{n1} (p_{1B} \gamma^B + m_{\tilde{g}}) I_{m2} (k_{2C} \gamma^C + m_t) I_{n2} (p_{2D} \gamma^D + m_{\tilde{g}}) I_{m1} \right]
 \end{aligned}$$

Benutze die Gleichungen (22) bis (27), (33), (34), (36) bis (40) und (48) bis (50).

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{spin}} (M_t M_u^+)_{\text{impulse}} &= \frac{1}{16} \left[ \left( 2(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)^2 + t^2 + u^2 - s^2 \right) (R_{n+}^2 R_{m+}^2 - R_{n-}^2 R_{m+}^2 - R_{n+}^2 R_{m-}^2 + R_{n-}^2 R_{m-}^2) \right. \\
 &\quad - 8m_{\tilde{g}}^2 m_t^2 (R_{n+}^2 R_{m+}^2 + R_{n-}^2 R_{m+}^2 + R_{n+}^2 R_{m-}^2 + R_{n-}^2 R_{m-}^2) \\
 &\quad + 4m_{\tilde{g}} m_t (2(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) - t - u) (R_{n-}^2 R_{m-}^2 - R_{n+}^2 R_{m+}^2) \\
 &\quad + 4m_{\tilde{g}} m_t (t - u) (R_{n-}^2 R_{m+}^2 - R_{n+}^2 R_{m-}^2) \\
 &\quad + 4(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) s (R_{n+}^2 R_{m+}^2 + R_{n-}^2 R_{m-}^2) \\
 &\quad - 2(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) (t + u) (R_{n+}^2 R_{m+}^2 - R_{n-}^2 R_{m+}^2 - R_{n+}^2 R_{m-}^2 + R_{n-}^2 R_{m-}^2) \\
 &\quad \left. - 8R_{n+} R_{n-} R_{m+} R_{m-} s (m_{\tilde{g}}^2 - m_t^2) \right]
 \end{aligned}$$



Benutze Gleichung (41).

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{spin}} \left( M_t M_u^+ \right)_{\text{impulse}} = & -2 \left( R_{n1}^{\tilde{q}^2} + R_{n2}^{\tilde{q}^2} \right) \left( R_{m1}^{\tilde{q}^2} + R_{m2}^{\tilde{q}^2} \right) m_{\tilde{g}}^2 m_t^2 \\
 & + s \left( m_t^2 \left( R_{n1}^{\tilde{q}^2} R_{m1}^{\tilde{q}^2} + R_{n2}^{\tilde{q}^2} R_{m2}^{\tilde{q}^2} \right) + m_{\tilde{g}}^2 \left( R_{n1}^{\tilde{q}^2} R_{m2}^{\tilde{q}^2} + R_{n2}^{\tilde{q}^2} R_{m1}^{\tilde{q}^2} \right) \right) \\
 & + R_{n1}^{\tilde{q}} R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} \left( 2(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)^2 + t^2 + u^2 - s^2 + 2(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)(s - t - u) \right) \\
 & - 2R_{n1}^{\tilde{q}} R_{n2}^{\tilde{q}} \left( R_{m1}^{\tilde{q}^2} + R_{m2}^{\tilde{q}^2} \right) m_{\tilde{g}} m_t ((m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) - u) \\
 & - 2R_{m1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} \left( R_{n1}^{\tilde{q}^2} + R_{n2}^{\tilde{q}^2} \right) m_{\tilde{g}} m_t ((m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) - t)
 \end{aligned} \tag{61}$$

### Berechnung des Farb-Teils

$$\Sigma_{\text{color}} \left( M_t M_u^+ \right)_{\text{color}} = \Sigma_{\text{color}} \left[ T_{ik}^b T_{kj}^c T_{jl}^b T_{li}^c \right] = \sum_{i,j,k,l} \sum_b \left[ T_{ik}^b T_{jl}^b \right] \sum_c \left[ T_{kj}^c T_{li}^c \right]$$

Benutze:

$$\sum_a T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \left( \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{color}} \left( M_t M_u^+ \right)_{\text{color}} &= \sum_{i,j,k,l} \frac{1}{4} \left( \delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{ik} \delta_{jl} \right) \left( \delta_{ki} \delta_{jl} - \frac{1}{N} \delta_{kj} \delta_{li} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left( \sum_{i,j} \delta_{ij} \left( 1 + \frac{1}{N^2} \right) - \sum_{i,j,k,l} \left( \frac{1}{N} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{kj} \right) \right) \\
 \Sigma_{\text{color}} \left( M_t M_u^+ \right)_{\text{color}} &= -\frac{N^2 - 1}{4N}
 \end{aligned} \tag{63}$$

### Zusammenfassung

Setzt man nun die Gleichungen (61) und (63) in Gleichung (60) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{spin, color}} M_t M_u^+ &= \frac{g_s^4}{(t - m_{t_n}^2)(u - m_{t_m}^2)} \left[ \frac{N^2 - 1}{N} \right] \cdot \\
 &\cdot \left[ -2 \left( R_{n1}^{\tilde{q}^2} + R_{n2}^{\tilde{q}^2} \right) \left( R_{m1}^{\tilde{q}^2} + R_{m2}^{\tilde{q}^2} \right) m_{\tilde{g}}^2 m_t^2 \right. \\
 &+ s \left( m_t^2 \left( R_{n1}^{\tilde{q}^2} R_{m1}^{\tilde{q}^2} + R_{n2}^{\tilde{q}^2} R_{m2}^{\tilde{q}^2} \right) + m_{\tilde{g}}^2 \left( R_{n1}^{\tilde{q}^2} R_{m2}^{\tilde{q}^2} + R_{n2}^{\tilde{q}^2} R_{m1}^{\tilde{q}^2} \right) \right) \\
 &+ R_{n1}^{\tilde{q}} R_{n2}^{\tilde{q}} R_{m1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} \left( 2(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)^2 + t^2 + u^2 - s^2 + 2(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2)(s - t - u) \right) \\
 &- 2R_{n1}^{\tilde{q}} R_{n2}^{\tilde{q}} \left( R_{m1}^{\tilde{q}^2} + R_{m2}^{\tilde{q}^2} \right) m_{\tilde{g}} m_t ((m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) - u) \\
 &\left. - 2R_{m1}^{\tilde{q}} R_{m2}^{\tilde{q}} \left( R_{n1}^{\tilde{q}^2} + R_{n2}^{\tilde{q}^2} \right) m_{\tilde{g}} m_t ((m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2) - t) \right]
 \end{aligned} \tag{64}$$

## 6 Numerische Auswertung

Bei der numerischen Auswertung habe ich mich an [14] orientiert.

### 6.1 Funktionsweise der genutzten Programme

Um den Wirkungsquerschnitt der Gluino Annihilation in ein Quark-Anti-Quark Paar zu berechnen, wurden zunächst die in Tabelle 3 sichtbaren Parameter ausgewählt. Diese sind so gewählt, dass die Reliktdichte des LSP genau der Reliktdichte der Dunklen Materie entspricht. Für die Reliktdichte der Dunklen Materie gilt nach den aktuellsten Messungen der kosmischen Hintergrundstrahlung durch die Planck-Kollaboration[1]:

$$\Omega h^2 = 0,1200$$

Tabelle 3: Relevante Parameter zur Berechnung der Massen der supersymmetrischen Teilchen. Alle dimensionsbehafteten Größen sind in GeV angegeben.

$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_{\tilde{q}_L}$	$M_{\tilde{t}_R}$	$M_{\tilde{b}_R}$
1005,54	1088,51	864,6	3401,05	2908,72	3661,15
$A_t$	$A_b$	$\mu$	$m_{A^0}$	$\tan \beta$	$Q_{\text{SUSY}}$
-2795,76	2160,9	2290,38	3781,1	45,27	3146,951

Mit dem Programm SPheno[15, 16] lässt sich aus den in Tabelle 3 gegebenen Parametern ein SUSY-Spektrum berechnen. Dieses besteht aus den Massen der supersymmetrischen Teilchen und Mischungswinkeln, welche zum Beispiel in der Drehmatrix (siehe Gleichung (13)) zur Berechnung der Masseneigenzustände der Stop-Squark Verwendung finden. Die aus dem berechneten SUSY-Spektrum entnommenen Massen einiger supersymmetrischer Teilchen sind in Tabelle 4 zu sehen. Auffallend an den Massen ist der geringe Unterschied zwischen dem leichtesten Neutralino  $\tilde{\chi}_1^0$  und dem Gluino. Dieses lässt, wie in Abschnitt 2.4 angesprochen, darauf schließen, dass die Annihilation von Gluinos einen großen Einfluss auf die Reliktdichte des LSP hat.

Tabelle 4: Massen einiger supersymmetrischer Teilchen. Berechnet mit SPheno. Alle Größen sind in GeV gegeben.

$m_{\tilde{\chi}_1^0}$	$m_{\tilde{\chi}_2^0}$	$m_{\tilde{\chi}_1^\pm}$	$m_{\tilde{g}}$	$m_{\tilde{t}_1}$	$m_{\tilde{b}_1}$	$m_{h^0}$	$m_{H^0}$
997,0	1133,7	1133,8	1073,7	2907,6	3404,2	124,07	3781,08

Das SUSY-Spektrum wird an das Programm micrOMEGAs[2] weitergegeben. Dieses kann aus dem Spektrum und den Wirkungsquerschnitten die Reliktdichte von Teilchen berechnen. Die Wirkungsquerschnitte erhält micrOMEGAs durch CalcHEP[3], welches alle relevanten Wirkungsquerschnitte auf tree-level berechnen kann.

Tree-level bedeutet, dass die Streuprozesse in niedrigster Ordnung der Störungstheorie behandelt werden. Das heißt für die Feynman-Diagramme, dass sie keine Schleifen oder ähnliches enthalten. In dieser Arbeit wird die Gluino Annihilation in ein Quark-Anti-Quark Paar auf tree-level behandelt. Um mit micrOMEGAs genauere Ergebnisse für die Reliktdichte zu erhalten, können mit dem Programm DM@NLO [5] ("Dark Matter at Next-to-Leading Order") Korrekturen höherer Ordnung in die Rechnung eingebracht werden.

Eine genauere Behandlung der Funktionen der hier angesprochenen Programme befindet sich in [17].

In dieser Arbeit wird DM@NLO jedoch nicht für Korrekturen höherer Ordnung genutzt. Stattdessen wird DM@NLO genutzt, um mit dem in Abschnitt 5 berechneten Betragsquadrat der gesamten Streuamplitude  $|M|^2$  den Wirkungsquerschnitt des in dieser Arbeit behandelten Prozesses zu bestimmen. Hierfür werden die Ergebnisse aus Abschnitt 5 zunächst mit dem Mathematica-Paket FeynCalc überprüft und anschließend in Fortran übersetzt.

## 6.2 Diskussion der Ergebnisse

Als Ergebnis liefert das Programmpaket aus SPheno, micrOMEGAs, CalcHEP und DM@NLO sowohl die Reliktdichte, als auch eine Übersicht darüber, welche Prozesse wie stark zur Reliktdichte beitragen und den Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit vom Impuls der Gluinos.

Die Reliktdichte stimmt mit dem experimentell bestimmten Wert überein. Das war jedoch zu erwarten, da die an SPheno übergebenen Parameter so gewählt wurden, dass der experimentell bestimmte Wert erzielt wird.

Die Anteile unterschiedlicher Prozesse am Gesamtbeitrag der Gluino Annihilation zur Reliktdichte des LSP sind in Tabelle 5 zu sehen. Der mit Abstand stärkste Beitrag stammt von der Gluino Annihilation in Gluonen. Die Anteile der Gluino Annihilationen in Quark-Anti-Quark Paare sind alle kleiner als 10%.

Tabelle 5: Anteile unterschiedlicher Prozesse am Gesamtbeitrag der Gluino Annihilation zur Reliktdichte des LSP. Es werden nur Prozesse mit einem Anteil von  $> 1\%$  am Gesamtbeitrag aufgeführt.

Beitragender Prozess	Anteil am Gesamtbeitrag
$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow gg$	59,7%
$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow b\bar{b}$	8,2%
$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow t\bar{t}$	7,5%
$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow d\bar{d}$	6,5%
$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow s\bar{s}$	6,5%
$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow u\bar{u}$	5,7%
$\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow c\bar{c}$	5,7%

Die Abbildung 5 ist in zwei Teile aufgeteilt. Im oberen Teil ist das Produkt aus Wirkungsquerschnitt und Geschwindigkeit der Gluinos in Abhängigkeit vom Impuls der Gluinos zu sehen. Die Achse mit dem Wirkungsquerschnitt hat eine logarithmische Skalierung. Neben dem Gesamtwirkungsquerschnitt sind auch die Beiträge der einzelnen Kanäle und Interferenzen am Gesamtwirkungsquerschnitt zu sehen. Im unteren Teil der Abbildung sind die Anteile der einzelnen Kanäle und Interferenzen am Gesamtwirkungsquerschnitt in Abhängigkeit vom Impuls der Gluinos aufgetragen.

Es lässt sich erkennen, dass der Beitrag von  $|M_s|^2$  am größten ist. Die Beiträge von  $|M_t|^2$  und  $|M_u|^2$  sowie von  $M_s M_t^+$  und  $M_s M_u^+$  sind jeweils gleich. Dieses ist zu erwarten, da sie sich schon bei der händischen Berechnung nur durch die Mandelstam-Variablen im Ergebnis unterschieden haben.

Den betragsmäßig kleinsten Anteil an dem Gesamtwirkungsquerschnitt hat  $M_t M_u^+$ .

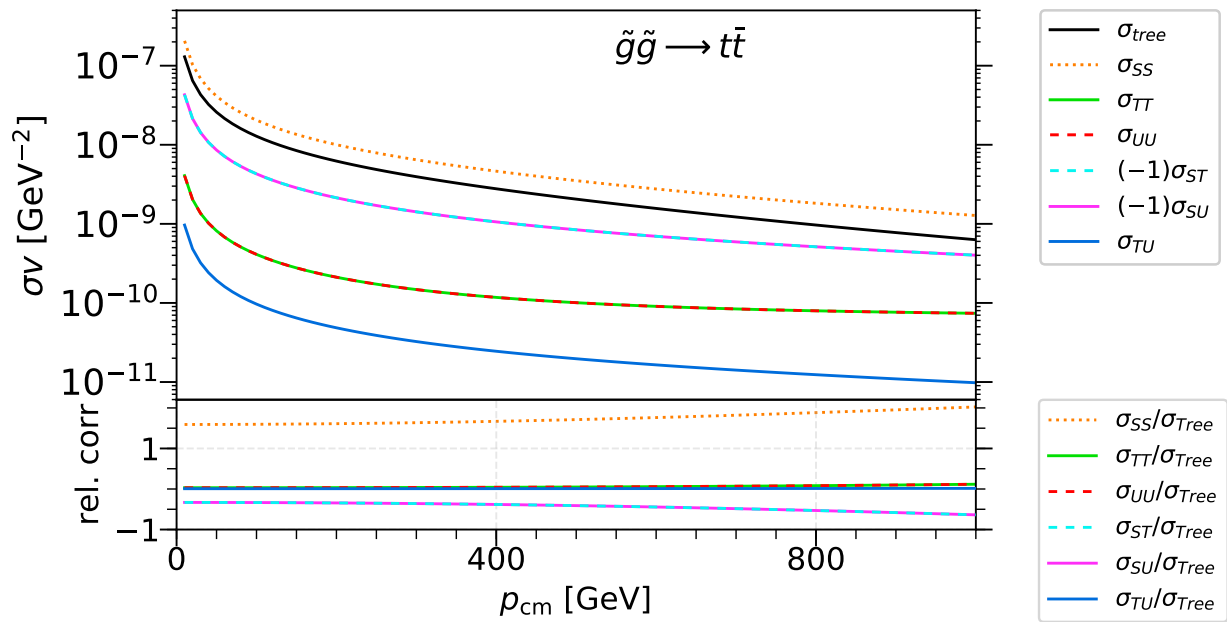


Abbildung 5: Produkt aus Wirkungsquerschnitt und Geschwindigkeit der Gluinos sowie Anteile der einzelnen Kanäle und Interferenzen am Gesamtwirkungsquerschnitt jeweils in Abhängigkeit vom Impuls der Gluinos.

## 7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit gelang es die Gluino Annihilation in ein Quark-Anti-Quark Paar im Minimalistischen Supersymmetrischen Standardmodell auf tree-level zu untersuchen. Hierfür wurden zunächst die Feynman-Diagramme und Streuamplituden aufgestellt, um anschließend das Betragsquadrat der Gesamtstreuamplitude analytisch zu berechnen.

Durch die folgende numerische Auswertung ließ sich herausfinden, welchen Anteil die Gluino Annihilation in ein Quark-Anti-Quark Paar am Gesamteinfluss der Gluino Annihilation zur Reliktdichte des LSP hat. So hat jeder dieser sechs Prozesse einen Anteil von weniger als 10%. Den größten Anteil hat die Gluino Annihilation in Gluonen mit 59,7%. Neben der Berechnung des Gesamtwirkungsquerschnitts für die Gluino Annihilation in ein Quark-Anti-Quark Paar, gelang es auch die Wirkungsquerschnitte der einzelnen Quadrate und Interferenzen der Streuamplituden zu bestimmen. Somit konnte deren Anteil am Gesamtwirkungsquerschnitt untersucht werden.

## A Gell-Mann-Matrizen

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

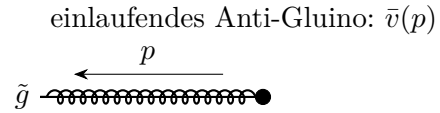
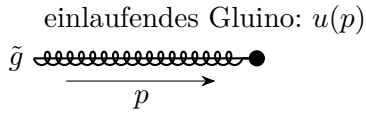
$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

## B Feynman-Regeln

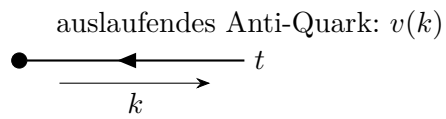
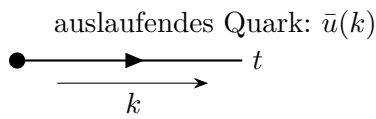
### B.1 externe Linien

#### Gluino



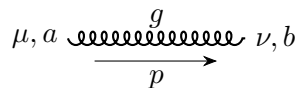
Da es sich bei den Gluinos um Majorana-Teilchen handelt, lassen sich  $u(p)$  und  $\bar{v}(p)$  vertauschen, ohne dass sich physikalisch etwas ändert.

#### Quark



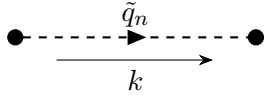
### B.2 Propagatoren

#### Gluon



$$-i \frac{g_{\mu\nu} \delta_b^a}{p^2}$$

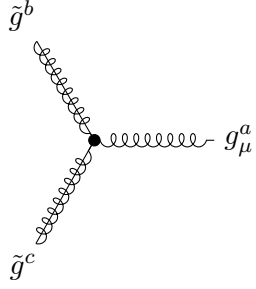
### Squark



$$\frac{i}{k^2 - m_{t_n}^2}$$

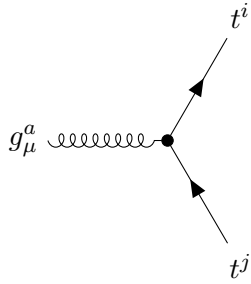
## B.3 Vertices

### Gluino-Gluino-Gluon-Kopplung



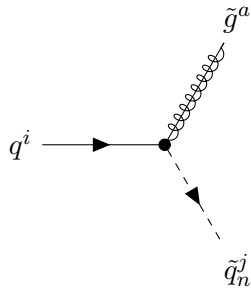
$$-g_s f_{abc} \gamma^\mu$$

### Gluon-Quark-Anti-Quark-Kopplung

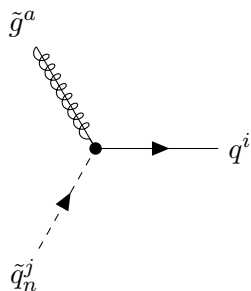


$$-ig_s T_{ij}^a \gamma^\mu$$

### Gluino-Squark-Quark-Kopplung



$$-\sqrt{2}ig_s T_{ij}^a \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_L - R_{n2}^{\tilde{q}} P_R \right)$$



$$-\sqrt{2}ig_s T_{ij}^a \left( R_{n1}^{\tilde{q}} P_R - R_{n2}^{\tilde{q}} P_L \right)$$

## Literatur

- [1] N. Aghanim u. a. “Planck 2018 results”. In: *Astronomy & Astrophysics* 641 (Sep. 2020), A6. ISSN: 1432-0746. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. URL: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>.
- [2] G. Bélanger u. a. “Indirect search for dark matter with micrOMEGAs\_2.4”. In: *Computer Physics Communications* 182.3 (März 2011), S. 842–856. ISSN: 0010-4655. DOI: 10.1016/j.cpc.2010.11.033. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2010.11.033>.
- [3] *CalcHEP*. <https://theory.sinp.msu.ru/~pukhov/calchep.html>.
- [4] P. Gorenstein D. Fabricant M. Lecar. “X-ray measurements of the mass of M 87”. In: *Astrophysical Journal* 241 (Okt. 1980), S. 552–560. DOI: 10.1086/158369.
- [5] *DM@NLO - Hepforge*. <https://dmnlo.hepforge.org/>.
- [6] Jonathan L. Feng. “Dark Matter Candidates from Particle Physics and Methods of Detection”. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 48.1 (Aug. 2010), S. 495–545. ISSN: 1545-4282. DOI: 10.1146/annurev-astro-082708-101659. URL: <http://dx.doi.org/10.1146/annurev-astro-082708-101659>.
- [7] P. Gondolo und J. Edsjö. “Neutralino relic density including coannihilations”. In: *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 70.1-3 (Jan. 1999), S. 120–122. ISSN: 0920-5632. DOI: 10.1016/S0920-5632(98)00401-0. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0920-5632\(98\)00401-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0920-5632(98)00401-0).
- [8] Kim Griest und David Seckel. “Three exceptions in the calculation of relic abundances”. In: *Phys. Rev. D* 43 (1991), S. 3191–3203. DOI: 10.1103/PhysRevD.43.3191.
- [9] Francis Halzen und Alan Martin. *Quarks & Leptons: An introductory course in modern particle physics*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1984. ISBN: 978-0-471-88741-6.
- [10] Gerard Jungman, Marc Kamionkowski und Kim Griest. “Supersymmetric dark matter”. In: *Physics Reports* 267.5-6 (März 1996), S. 195–373. ISSN: 0370-1573. DOI: 10.1016/0370-1573(95)00058-5. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(95\)00058-5](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(95)00058-5).
- [11] E. Komatsu u. a. “SEVEN-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: COSMOLOGICAL INTERPRETATION”. In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 192.2 (Jan. 2011), S. 18. ISSN: 1538-4365. DOI: 10.1088/0067-0049/192/2/18. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/192/2/18>.
- [12] K. Kovařík. *Hitchhiker’s Guide to Renormalization*. Aug. 2018.
- [13] STEPHEN P. MARTIN. “A SUPERSYMMETRY PRIMER”. In: *Advanced Series on Directions in High Energy Physics* (Juli 1998), S. 1–98. ISSN: 1793-1339. DOI: 10.1142/9789812839657\_0001. URL: [http://dx.doi.org/10.1142/9789812839657\\_0001](http://dx.doi.org/10.1142/9789812839657_0001).
- [14] Anne Poppe. “Gluino-Annihilation in Gluonen im Minimalen supersymmetrischen Standardmodell”. Bachelorarbeit WWU Münster. 2020.
- [15] W. Porod. “SPHeno, a program for calculating supersymmetric spectra, SUSY particle decays and SUSY particle production at e+e− colliders”. In: *Computer Physics Communications* 153.2 (Juni 2003), S. 275–315. ISSN: 0010-4655. DOI: 10.1016/S0010-4655(03)00222-4. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655\(03\)00222-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655(03)00222-4).
- [16] W. Porod und F. Staub. “SPHeno 3.1: extensions including flavour, CP-phases and models beyond the MSSM”. In: *Computer Physics Communications* 183.11 (Nov. 2012), S. 2458–2469. ISSN: 0010-4655. DOI: 10.1016/j.cpc.2012.05.021. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2012.05.021>.



- [17] Patrick Steppeler. “QCD-Korrekturen zur Annihilation von dunkler Materie im Higgs-Funnel”. Masterarbeit WWU Münster. 2013.

## Plagiatserklärung der / des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über Gluino Annihilation in ein Quark-Anti-Quark Paar im MSSM selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

---

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

---

(Datum, Unterschrift)