



Bachelorarbeit

# **Stau-Koannihilation in leichte und schwere Quarks**

**Stau coannihilation into light and heavy quarks**

vorgelegt von  
Johannes Branahl

Münster, den 16.05.2018

**Institut für Theoretische Physik Münster**

Erstprüfer: Prof. Dr. Michael Klasen

Zweitprüfer: Dr. Karol Kovařík

## Abstract

The main component of this thesis is the process of the annihilation of two  $\tilde{\tau}_1$ -sleptons into (heavy) quark-antiquark pairs or rather the calculation of its cross section. At *tree level* all permitted exchange particles are included into the above-mentioned process, namely the Higgs bosons  $h^0$  and  $H^0$  as well as the photon and the  $Z^0$  boson. Additionally, the one-loop-corrections in QCD and SUSY-QCD are worked out specially for the  $h^0$ , which seemed as the most relevant exchange particle in the chosen scenario.

These results find application at solving the Boltzmann equation, which leads to the so called relic density, that was obtained experimentally by the data from the Planck mission measuring the cosmic background radiation. The integration of this equation by using the calculated cross section makes it possible to examine the impact of the scalar tau leptons on the total relic density. That involves a numerical analysis performed by the program DM@NLO.

## Kurzfassung

Hauptbestandteil dieser Arbeit ist die Berechnung des Wirkungsquerschnittes der Annihilation zweier  $\tilde{\tau}_1$ -Sleptonen in (schwere) Quark-Antiquark-Paare. Auf *tree level* werden alle erlaubten Austauscheteilchen in den obigen Prozess einbezogen - die Higgs-Bosonen  $h^0$  und  $H^0$  sowie das Photon und das  $Z^0$ -Boson. Zusätzlich werden für das  $h^0$  die Einschleifenkorrekturen in QCD und SUSY-QCD errechnet, welches als relevantestes Austauscheteilchen angesehen wurde.

Diese Ergebnisse finden Anwendung bei der Lösung der Boltzmann-Gleichung, welche auf die Reliktdichte führt, die aus den Daten der von der Planck-Mission vermessenen Hintergrundstrahlung experimentell erhalten werden kann. Die Integration der Boltzmann-Gleichung mit dem errechneten Wirkungsquerschnitt ermöglicht, den Einfluss der skalaren Tau-Leptonen auf die gesamte Reliktdichte zu untersuchen. Dabei wird die numerische Analyse mit dem Programm DM@NLO durchgeführt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2. Zum theoretischen Hintergrund</b>	<b>7</b>
2.1. Hinführung zur Supersymmetrie (SUSY) . . . . .	7
2.1.1. Mathematisches Fundament . . . . .	7
2.1.2. Motivation der Supersymmetrie . . . . .	9
2.2. Bestandteile und Prinzipien des MSSM . . . . .	11
2.3. Das skalare Tau-Lepton . . . . .	13
<b>3. Berechnungen auf <i>tree level</i></b>	<b>16</b>
3.1. Das Feynman-Kalkül: <i>tree level</i> . . . . .	16
3.2. Kinematik . . . . .	19
3.3. Austausch von Higgs-Bosonen . . . . .	19
3.4. Austausch von Vektorbosonen . . . . .	21
3.4.1. Von Eichungen und Geistern . . . . .	22
3.4.2. Ergebnisse von Photonen- und $Z^0$ -Bosonen-Austausch . . .	23
3.5. Der gesamte Wirkungsquerschnitt auf <i>tree level</i> . . . . .	24
<b>4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen</b>	<b>25</b>
4.1. Feynman-Kalkül II: Schleifenkorrekturen . . . . .	25
4.1.1. Dimensionelle Regularisierung . . . . .	25
4.1.2. Renormierung: Die Beseitigung der UV-Divergenz . . . . .	28
4.1.3. Reelle Korrekturen: Die Beseitigung der IR-Divergenz . . .	31
4.2. Berechnung der NLO-Korrekturen . . . . .	33
4.2.1. Vertexkorrekturen . . . . .	33
4.2.2. Selbstenergien: Counterterme . . . . .	37
4.2.3. Reelle Korrekturen . . . . .	40
4.3. Einbindung aller Korrekturen in den Wirkungsquerschnitt . . . .	43
<b>5. Dunkle Materie: Grundlagen und Methoden</b>	<b>44</b>
5.1. Das dunkle Universum . . . . .	44
5.2. Kandidaten für Dunkle Materie . . . . .	46
5.3. Beobachtende Kosmologie: Hintergrundstrahlung . . . . .	47

<b>6. Zur Reliktdichte</b>	<b>50</b>
6.1. Die Boltzmann-Gleichung . . . . .	50
6.2. Das DM@NLO-Projekt . . . . .	53
<b>7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion</b>	<b>56</b>
<b>8. Konklusion und Ausblick</b>	<b>68</b>
<b>A. Dirac-Algebra</b>	<b>71</b>
A.1. Algebraisches Fundament . . . . .	71
A.2. Spurtheoreme . . . . .	72
A.3. Chiralität . . . . .	72
A.4. Dirac-Algebra in $D$ Dimensionen . . . . .	73
<b>B. Feynman-Diagramme und Vertexfaktoren</b>	<b>74</b>
B.1. Austauschteilchen $\gamma$ und $Z^0$ . . . . .	74
B.2. Higgs-2-(S)fermion-Kopplung . . . . .	75
B.3. Weitere Kopplungen aus NLO-Korrekturen . . . . .	76
<b>C. Explizite Berechnung auf <i>tree level</i></b>	<b>78</b>
C.1. Stau- $\gamma$ -Kopplung . . . . .	78
C.2. Stau- $Z^0$ -Kopplung . . . . .	79
<b>D. Farbalgebra</b>	<b>82</b>
<b>E. Nützliches zu den NLO-Korrekturen</b>	<b>85</b>
E.1. Passarino-Veltman-Integrale . . . . .	85
E.2. Phasenraumintegrale im $2 \rightarrow 3$ -Prozess . . . . .	87
<b>F. Berechnung der IR-konvergenten Phasenraumintegrale</b>	<b>91</b>
<b>G. SUSY und Poppers Falsifikationismus</b>	<b>100</b>

# 1. Einleitung

Mit ihrer Gabe, großen Fragen der Menschheit - vormals den Philosophen vorbehalten - in hohem Maße präzise Antworten zu geben, wird die Physik zum legitimen Träger des Titels der *grundlegendsten aller Naturwissenschaften*. Einerseits unseren Kosmos als Ganzes zu beschreiben und auf der anderen Seite seine kleinsten Bestandteile, vermag keine andere Disziplin der empirischen Wissenschaft. Diese beiden Komponenten verschmelzen bei der Frage, inwieweit (hypothetische) Elementarteilchen die großräumigen Strukturen unseres Universums kurz nach dessen Entstehung beeinflusst haben können. Sie ist bis dato in weiten Teilen unbeantwortet; und diese Arbeit soll ihr ein kleines Puzzleteil hinzufügen. Welche Rolle spielten die skalaren Taus bei der Verteilung der Dunklen Materie im Universum?

Hintergrund der zu untersuchenden Prozesse ist das Konzept der sogenannten Supersymmetrie (vulgo SUSY). Im Bestreben einigen offenen Problemen der theoretischen Physik mit strukturell ästhetischen und vielversprechenden neuen Ansätzen zu begegnen, die über das Standardmodell der Teilchenphysik hinausgehen, stieß man auf eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen - die SUSY. Dieser entsprang ein regelrechter Katalog an exotischen neuen Teilchen, von denen einige gerade diejenigen Eigenschaften hatten, die für jene Probleme vortrefflich geeignet scheinen. Gegenstand der Arbeit ist eines dieser supersymmetrischen Teilchen, das skalare Tau-Lepton, welches dem Minimal Supersymmetrischen Standardmodell (MSSM) zugehörig ist und bisher eher unerschwellige Bedeutsamkeit für Überlegungen jenseits des Standardmodells besitzt. Aus diesem Grunde ist die Zahl seiner wissenschaftlichen Untersuchungen überschaubar. Dennoch sollte es in die Berechnungen zum Vorkommen der Dunklen Materie, wenngleich es selbst kein Kandidat dafür ist (ganz im Gegensatz zu anderen Teilchen des MSSM), miteinbezogen werden. Empirischer Unterbau der Berechnungen in der Arbeit sind die Messungen der kosmischen Hintergrundstrahlung durch den Planck-Satelliten. Die Berechnungen ihrerseits stützen sich auf die Feynman-Regeln der Quantenfeldtheorie und führen auf später numerisch zu verwertende Wirkungsquerschnitte.

Nachdem in Kapitel 2 das nötige Hintergrundwissen zum MSSM geliefert worden ist, können die Berechnungen zunächst in erster Ordnung Störungstheorie vollzogen und anschließend in Kapitel 4 Korrekturterme hinzugefügt werden. Es kom-

## 1. Einleitung

men hierbei Verfahren wie die Regularisierung und die Renormierung durch Counterterme zum Einsatz. Der betrachtete Prozess bietet überdies die Möglichkeit für den seltenen Spezialfall, dass die Phasenraumintegration für die reellen Korrekturen analytisch durchführbar ist. Die Brücke zur Kosmologie wird in Kapitel 5 vermöge eines kurzen Überblicks über die schwer greifbare Natur der Dunklen Materie, die nach wie vor hartnäckig ihre Gestalt vor uns verbirgt, geschlagen und in Kapitel 6 werden die Grundlagen der numerischen Analyse geliefert. Abschließend sollen die Ergebnisse diskutiert und ein Ausblick vorgestellt werden, welche weiteren Berechnungen für die Präzisierung der Resultate notwendig wären. Das mathematische Handwerkszeug, welches für die Auswertung der feldtheoretischen Prozesse notwendig war, sowie Details zu den Berechnungen werden im Anhang geliefert.

Die anschließende graphische Analyse offenbart einen  $h^0$ -dominierten Wirkungsquerschnitt für kleine Kollisionsenergien, für höhere dominiert das Photon. Die anderen beiden betrachteten Austauschteilchen spielen im betrachteten Szenario offensichtlich keine nennenswerte Rolle. Die durchgeführten NLO-Korrekturen stellen sich für kleine Energien bis 1500 GeV als signifikante Abweichungen heraus.

## 2. Zum theoretischen Hintergrund

### 2.1. Hinführung zur Supersymmetrie (SUSY)

Die Ausdehnung des Standardmodells zum MSSM vermag möglicherweise verschiedensten Fragestellungen der Hochenergiephysik Antworten zu geben. Die mathematischen und auch phänomenologischen Grundlagen dieses Erweiterungsprozesses sollen dafür skizziert werden, wobei die Prinzipien des SM und basalen Konzepte der Quantenfeldtheorie vorausgesetzt werden, um den Umfang der theoretischen Einführung begrenzt zu halten.

#### 2.1.1. Mathematisches Fundament

Die Untersuchung von Symmetrien stellte sich in der theoretischen Physik als außerordentlich fruchtbar heraus. So lassen sich gemäß dem Noether-Theorem aus Symmetrietransformationen Erhaltungsgrößen ableiten und in der Quantenmechanik geben sie Auskunft über den Entartungsgrad der Eigenwerte zu einem Zustand im Hilbertraum. Nicht zuletzt fußt natürlich auch die Formulierung des SM auf lokalen Eichsymmetrien, bei denen die Lagrangedichte der jeweiligen fundamentalen Wechselwirkung durch Transformationen der Eichgruppen  $SU(3)_C$ ,  $SU(2)_L$  und  $U(1)_Y$  invariant bleibt.

In den 1970er Jahren wurde zuerst die Idee einer Symmetrietransformation geboren, deren Generator  $Q$  einen bosonischen Zustand in einen fermionischen umwandelt und umgekehrt. Demzufolge hat jedes Teilchen einen hypothetischen Superpartner, dessen Spin sich im Betrag um  $\frac{1}{2}$  unterscheidet. Die Einführung eines solchen Modells mag zunächst als ad-hoc-Hypothese erscheinen, sie steht jedoch auf einem stabilen mathematischen Fundament: Es ist zunächst zu überlegen, welche Arten von Symmetrien in einer konsistenten Quantenfeldtheorie in vier Dimensionen überhaupt erlaubt sein dürfen.

Eine solche realistische (physikalisch sinnvolle) QFT fordert eine sogenannte Massenslücke, eine endliche Differenz zwischen dem Vakuumzustand und dem nächsthöheren Energiezustand (eine gewisse Popularität erhielt diese Forderung in einem Millenniumproblem - für alle Eichgruppen möge eine Yang-Mills-Theorie mit einer Massenslücke  $> 0$  existieren). Die Symmetrien der QFT bilden eine Lie-

## 2. Zum theoretischen Hintergrund

Gruppe. Deren zugehörige Algebra ist definiert durch einen Vektorraum  $L$  mit einer antisymmetrischen Bilinearform  $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$ , welche die Jacobi-Identität erfüllt:  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ . Die Bilinearform heißt Lie-Klammer, prominente Beispiele sind der Kommutator, die Poisson-Klammer oder das äußere Produkt. Zu den Lie-Gruppen zählen auch die (speziellen) unitären Gruppen im SM. Zu der Symmetriestruktur einer Feldtheorie gehören nun zum einen solche internen Symmetrien (darunter fallen die genannten Eichinvarianzen, aber auch etwa die Invarianz unter Diffeomorphismen, worin sich die Koordinatenunabhängigkeit der ART widerspiegelt) und die Poincaré-Transformationen. Die Poincaré-Gruppe mit den Elementen  $(\Lambda, a)$ ,  $\Lambda \in O(1, 3)$ ,  $a \in M$  beinhaltet die Translationen und Rotationen im Minkowskiraum  $M$ , die den Abstand in Minkowskischer Metrik invariant lassen, und die Lorentz-Transformationen aus der Gruppe  $O(1, 3)$ . Man zeigt leicht, dass diese Transformationen eine 10-dimensionale Lie-Gruppe bilden. Nach diesen Vorbemerkungen kann man sich nun folgendem Satz [3] zuwenden:

**Theorem (Coleman und Mandula, 1967):** *Die Symmetrie einer konsistenten vierdimensionalen Quantenfeldtheorie mit nicht-trivialen Wechselwirkungen und Massenerweiterung kann nur durch eine Lie-Gruppe beschrieben werden, welche ein direktes Produkt aus der Poincaré-Gruppe und einer internen Symmetriegruppe ist.*

Das direkte Produkt ist vergleichbar mit einem kartesischen Produkt. Nicht-triviale Produkte finden sich beispielhaft in der  $L^2$ -Hilbertraum-Struktur - mathematisch resultieren aus dem Tensorprodukt Phänomene wie die Verschränkung von quantenmechanischen Zuständen. Offenbar sollten daher nolens volens nur triviale Kombinationen aus raumzeitlichen und internen Symmetrien wie im SM möglich sein, was eine Symmetrienerweiterung im Sinne der SUSY bereits mathematisch rigoros ausschliesse. Man spricht bisweilen von einem no-go-Theorem. Rettung kam durch einen Beweis von Haag, Łopuszański und Sohnius [4]:

**Theorem (1975):** *Die mögliche Symmetrie einer konsistenten vierdimensionalen Quantenfeldtheorie wird dann und nur dann maximal, wenn sie zusätzlich eine Supersymmetrie als nicht-triviale Erweiterung der Poincaré-Symmetrie beinhaltet.*

Damit wurde das Coleman-Mandula-Theorem entscheidend verfeinert: Tatsächlich ist eine Erweiterung der zugrundeliegenden Lie-Gruppe zulässig als Mischung von raumzeitlicher und lokaler (Eich-)Symmetrie, jedoch ausschließlich durch die SUSY. Bei Coleman und Mandula wurde hierbei eine Lücke gefunden, da die Erzeugenden der Lie-Algebra nur Kommutatorrelationen gehorchten. Haag et al. konstruierten jedoch eine Lie-Superalgebra, indem sie bei der SUSY auch Antikommutatorrelationen fanden. Die (Anti-)Kommutatoren geben Auskunft darüber, ob

## 2. Zum theoretischen Hintergrund

die Generatoren der Algebra bosonisch oder fermionisch sind. Hintergrund ist die Algebra, die dem Fock-Raum zugrundeliegt, in welchem Bosonen und Fermionen durch Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren entstehen und vergehen. Diese kommutieren im bosonischen Fall (dieser Unterraum des Fock-Raums besitzt eine sog. Tensoralgebra) und antikommutieren im fermionischen Fall (Graßmann-Algebra). Eine Lie-Superalgebra beinhaltet beide Arten von Generatoren. Wir können damit nun die Mischung von Poincaré- und interner Symmetrie verstehen, denn unter Einbezug des Viererimpulses  $P^\mu$  (bosonisch) bilden der eingangs erwähnte Generator  $Q$  und sein Adjungiertes die folgenden Relationen:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = (\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \quad [Q, P^\mu] = [P^\mu, Q^\dagger] = 0 \quad (2.1)$$

Offensichtlich liefert der Antikommutator eine raumzeitliche Transformation, wohingegen  $Q$  intern zwischen Bosonen und Fermionen vermittelt. Die SUSY wird damit zur nicht-trivialen Kombination der laut Coleman und Mandula nicht zu verknüpfenden Lie-Gruppen. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass  $Q$  und auch sein Adjungiertes antikommutieren, weswegen sie fermionischen Charakter besitzen. Die Relationen können durch die Konstruktion einer SUSY-Lagrangedichte hergeleitet werden, welche jedoch sehr länglich ist. Es bleibt allerdings festzuhalten, dass das Konzept der SUSY auf festem Boden der mathematischen Physik steht. Brisanter ist hingegen die Frage, ob auch aus der formalen Eleganz des Modells eine physikalische Realität gefolgert werden kann. Es soll nun beleuchtet werden, welche Gründe dies plausibel machen.

### 2.1.2. Motivation der Supersymmetrie

Ein besonders ästhetisches indirektes Indiz für die Richtigkeit der SUSY liefert eine Betrachtung der Kopplungskonstanten der drei Wechselwirkungen für hohe Energien. Bekanntermaßen sinkt diejenige der QCD aufgrund der asymptotischen Freiheit für große Energien, wohingegen in der QED der Abschirmungseffekt der Vakuumpolarisation auf solchen Skalen nachlässt und die Feinstrukturkonstante anwächst. Im Gegensatz zum SM treffen sich bei Energien von etwa  $10^{16}$  GeV alle Kopplungskonstanten in einem Punkt, was im Hinblick auf eine *grand unified theory* die SUSY um einiges vielversprechender macht. Ferner finden sich in der SUSY fremdartige Teilchen, welche direkte Kandidaten für Dunkle Materie sein könnten, um die fehlende Masse im Universum zu erklären. Auch können diese, wie im Rahmen der Arbeit gezeigt, indirekt die Dunkle Materie beeinflussen.

Als eine letzte motivierende Tatsache aus der SUSY sei das Hierarchieproblem Gegenstand des folgenden Abschnitts, welches insbesondere die Masse des Higgs-Bosons betrifft. Der spontane Symmetriebruch der  $SU(2) \times U(1)$ -Eichsymmetrie

## 2. Zum theoretischen Hintergrund

der Elektroschwachen Wechselwirkung mittels des Higgs-Mechanismus [7] verleiht bekanntlich den  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen ihre Masse im Bereich von knapp 100 GeV, weswegen auch die Higgs-Masse in dieser Größenordnung anzusiedeln wäre. Unglücklicherweise führt die perturbative Behandlung der Masse in höheren Ordnungen zu Schleifenkorrekturen, die diese regelrecht explodieren lassen in Größenordnungen von bis zu  $10^{19}$  GeV, der Planck-Skala (mit dem experimentellen Wert von 125 GeV ist dies selbstredend unvereinbar). Die Korrekturen benötigen die Darstellung der Feynman-Propagatoren im Impulsraum, bei welchen die Schleifenintegrale über die Propagatoren mit einem sogenannten Cut-Off  $\Lambda_{UV}$  begrenzt werden müssen (oder anderweitig), die sogenannte Regularisierung. Die erste Ordnung divergiert noch quadratisch in  $\Lambda$ , die zweite logarithmisch. Diese Divergenzen zu beseitigen (Renormierung) wird zumeist als unnatürlich empfunden, die Higgs-Masse wird gewissermaßen künstlich auf eine Elektroschwache Skala gezwungen. Man betrachte nun die Schleifenkorrekturen, welche auch SUSY-Teilchen mit einbeziehen:

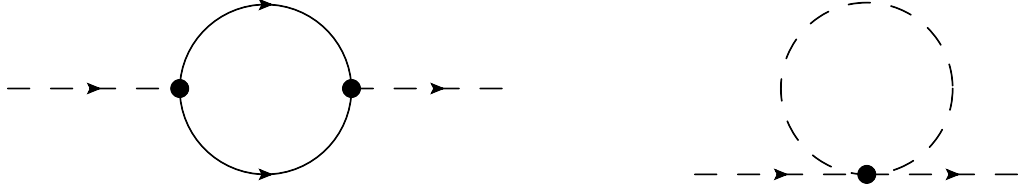


Abbildung 2.1.: Schleifenkorrekturen zum Higgs-Massenquadrat durch Dirac-Fermion (a) und massives skalares Teilchen (b).

Neben einer Selbstenergie-Korrektur durch ein Dirac-Fermion  $f$  kann unter Einbezug der SUSY ein schweres skalares Teilchen  $S$  an das Higgs-Feld  $\phi$  koppeln und einen zusätzlichen Beitrag liefern. Die gesamte Lagrangedichte, welche die zwei Kopplungen berücksichtigt, lautet dann:

$$\mathcal{L} = (\partial_\nu \phi)^\dagger (\partial^\nu \phi) + m_H^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \lambda_f \phi f^\dagger f - \lambda_S (\phi^\dagger \phi) |S|^2 \quad (2.2)$$

Störungstheoretische Rechnungen zeigen nun die Beiträge der Quantenkorrekturen für die Higgs-Masse:

$$\Delta m_H^2 = \frac{|\lambda_f|^2}{16\pi^2} [-2\Lambda_{UV}^2 + 6m_f^2 \ln(\frac{\Lambda_{UV}}{m_f}) + \dots] + \frac{\lambda_S}{16\pi^2} [\Lambda_{UV}^2 - 2m_S^2 \ln(\frac{\Lambda_{UV}}{m_S}) + \dots] \quad (2.3)$$

Die bemerkenswerte Folgerung aus diesem Korrekturterm ist leicht festzustellen: Bei geeigneter Wahl des Cut-Offs kann die quadratische Divergenz gänzlich

## 2. Zum theoretischen Hintergrund

eliminiert werden, weiters lässt sich der logarithmische Term so weit schrumpfen, dass die Higgs-Masse in den Bereich der Messwerte gelangt. Die Schleifenkorrekturen könnten also durch die SUSY maßgeblich deshalb reduziert werden, da die Ordnungen der Störungstheorie mit dem skalaren Superpartner mit entgegengesetztem Vorzeichen eingehen! Supersymmetrie liefert daher also ein natürliches Verständnis für den Ursprung der kleinen Masse des Higgs-Bosons. Nun bleibt zu überlegen, in welcher Gestalt diese Superpartner auftreten können.

### 2.2. Bestandteile und Prinzipien des MSSM

Das MSSM ist in der Hinsicht minimal, als es die kleinste Zahl von neuen Teilchen besitzt, um eine vollständige Erweiterung des SM zu ermöglichen. Die irreduziblen Zustände, welche die SUSY-Algebra liefert, sind die sogenannten Supermultipletts, jeweils einen bosonischen und fermionischen Zustand beinhaltend. Zum einen treten chirale (auch skalare genannte) Supermultipletts auf, bestehend aus einem zweikomponentigen Weyl-Fermion (masselos) und einem komplexen Skalarfeld. Die nächsteinfache Konstruktion, das Eich-Supermultiplett, setzt sich aus einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Weyl-Fermion und einem Vektorboson zusammen. Andere Spin-Kombinationen stellen sich als nicht renormierbar heraus. Es wurde sogar festgestellt, dass das Haag-Lopuszański-Sohnius-Theorem nur Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen zulässt, damit es Gültigkeit behält. Typischerweise lassen sich alle weiteren Zustände auf chirale oder Eich-Supermultipletts reduzieren. Ein spinloser (skalarer) Superpartner wird den Quarks und Leptonen zugeordnet, weswegen er das Präfix *s* erhält. Neben den Squarks und Sleptonen müssen nun noch die Spin- $\frac{1}{2}$ -Superpartner zu den Bosonen mit dem Suffix *ino* versehen werden, sodass etwa die Eichbosonen die Gauginos als Partner bekommen.

Zunächst seien einige Worte der Chiralität gewidmet. Im SM wurde diese bereits im Rahmen der Elektroschwachen Vereinigung berücksichtigt, indem man linkshändige schwache Isopindubletts wie  $(\nu_e, e)_L$  und rechtshändige Singulets (wie  $e_R$ ) konstruierte. Während das Photon zwischen den Händigkeiten nicht differenziert, wirkt das W-Boson nur auf linkshändige Anteile. Dirac-Fermionen lassen sich mit den Operatoren  $P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$  in ihre jeweiligen Anteile zerlegen, welche sich wie beschrieben unter Eichtransformation verschieden verhalten. Demzufolge benötigen Quarks und Leptonen, da sie als separate zweikomponentige Weyl-Fermionen auftreten, zwei komplexe skalare Superpartner - notiert beispielsweise als  $\tilde{\tau}_L$  und  $\tilde{\tau}_R$  (es folgen 12 Squarks und Sleptonen). Deren Händigkeit hat natürlich auf ihre Helizität als spinlose Teilchen keinen Einfluss. Es ist zu bemerken, dass sich die Eichwechselwirkungen des SM (wie das geschilderte W-Boson) auf die Superpartner übertragen. Die Symmetriegruppe des MSSM ist daher nach wie vor

## 2. Zum theoretischen Hintergrund

$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , weshalb die Eich-Supermultipletts eine gewissermaßen erwartbare Struktur haben: Die Gluonen besitzen jeweils ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Gluino als Superpartner, die W- und B-Bosonen ein Wino/Bino.

Die letztgenannten Superpartner beziehen sich damit auf die nicht beobachtbaren Eichbosonen der Elektroschwachen Wechselwirkung, welche bekanntlich über den Weinbergwinkel  $\theta_W$  mischen und beobachtbare Masseneigenzustände bilden:

$$|\gamma\rangle = \cos\theta_W|B^0\rangle + \sin\theta_W|W^0\rangle \quad |Z^0\rangle = -\sin\theta_W|B^0\rangle + \cos\theta_W|W^0\rangle \quad (2.4)$$

$$|W^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|W^1\rangle \mp i|W^2\rangle) \quad (2.5)$$

Die Mischungsmatrizen übertragen sich im Übrigen auf die Superpartner - im Falle einer ungebrochenen SUSY wären ein Photino  $\tilde{\gamma}$  und ein Zino  $\tilde{Z}^0$  beobachtbar. Zum Stichwort Beobachtbarkeit sei vorweggenommen, dass sich die Masseneigenzustände, die Neutralinos und Charginos, aus den Winos/Binos zusammensetzen. Es fehlen zu deren Vollständigkeit jedoch die Higgsinos, welche nun diskutiert werden sollen. Das MSSM erhöht die Anzahl an Higgs-Bosonen auf fünf, ebenso gibt es fünf Higgsinos, wovon erstgenannte beobachtbar sind, die Higgsinos jedoch in Linearkombinationen zu Neutralinos und Charginos verschwinden. Hintergrund dieser Anzahl ist, dass das Higgs-Feld vier Freiheitsgrade besitzt. Im SM gehen drei davon beim spontanen Symmetriebruch an die Eichbosonen verloren. Durch das Higgsino-Feld erhalten wir insgesamt acht Freiheitsgrade - es resultieren das SM-ähnliche  $h^0$ , je ein skalares und pseudoskalares schweres  $H^0$  und  $A^0$  und ein Paar geladener  $H^\pm$ , gleiches gilt für die Higgsinos. Es erweist sich für die Konstruktion der Charginos/Neutralinos als zweckmäßig, die Dubletts  $(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0)$  und  $(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-)$  einzuführen, analog für  $H_u/H_d$ , welche den Quarks vom up-Typ/down-Typ über den Higgs-Mechanismus Massen zuordnen. Diese darf man nicht mit den Masseneigenzuständen verwechseln.

Diese Überlegungen ermöglichen die Konstruktion der vier Neutralinos  $\tilde{\chi}_i^0$ ,  $i = 1\dots 4$ , als Mischungen der ungeladenen Higgsinos und den  $\tilde{B}^0$  und  $\tilde{W}^0$ . Man findet für den Neutralinomassenterm der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\Psi^0)^T \mathbf{M}_{\tilde{\chi}} \Psi^0 + h.c. \quad \Psi^0 = (\tilde{B}^0, \tilde{W}^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0) \quad (2.6)$$

mit der Massenmatrix

$$\mathbf{M}_{\tilde{\chi}} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -\cos\beta \sin\theta_W m_Z & \sin\beta \sin\theta_W m_Z \\ 0 & M_2 & \cos\beta \cos\theta_W m_Z & -\sin\beta \cos\theta_W m_Z \\ -\cos\beta \sin\theta_W m_Z & \cos\beta \cos\theta_W m_Z & 0 & -\mu \\ \sin\beta \sin\theta_W m_Z & -\sin\beta \cos\theta_W m_Z & -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

## 2. Zum theoretischen Hintergrund

wobei  $\beta = \arctan(\frac{v_u}{v_d})$  mit den Vakuumserwartungswerten  $v_{u,d} = \langle H_{u,d}^0 \rangle$  ( $M_{1,2}$  stammen aus der Lagrangedichte des spontanen Symmetriebruchs,  $\mu$  aus dem Higgsinomassen-Lagrangian, siehe auch [2]). Neutralinos sind Majorana-Fermionen (entsprechen ihren Antiteilchen), ihre Massen sind von 1 bis 4 aufsteigend. Ähnlich dazu haben die Charginos  $\tilde{C}_{1,2}^\pm$ , wie der Name vermuten lässt, ihre analogen geladenen Konstituenten - man erhält die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\Psi^+, \Psi^-)^T \mathbf{M}_{\tilde{C}} (\Psi^+, \Psi^-) + h.c. \quad \Psi^\pm = (\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+, \tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{M}_{\tilde{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_2 & \sqrt{2} \cos \beta m_W \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \sin \beta m_W & \mu \\ M_2 & \sqrt{2} \sin \beta m_W & 0 & 0 \\ \sqrt{2} \cos \beta m_W & \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nachdem nun die Linearkombinationen der Gauginos und Higgsinos diskutiert worden sind, kann sich den Sfermionen detaillierter zugewandt werden. Zuvor sei noch die diskrete Symmetrie der R-Parität erwähnt: Wie in der Teilchenphysik üblich, wurde diese Erhaltungsgröße eingeführt, um nicht beobachtbare Prozesse mit einer neuen Quantenzahl schlicht zu verbieten. Die SUSY erlaubt u.U. den Protonenzerfall; deren Lebensdauer wurde allerdings vom Kamiokande-Detektor auf über  $10^{35}$  Jahre abgeschätzt, um ein Beispiel zu nennen. Man definiert mit der Baryonenzahl  $B$ , Leptonenzahl  $L$  und dem Spin  $s$ :

$$P_R = (-1)^{3B+L+2s} \quad (2.8)$$

Für SM-Teilchen ist  $P_R$  1, für MSSM-Teilchen -1, wobei die fünf eingeführten Higgs-Bosonen SM-Teilchen sind, auch wenn sie aus den Phänomenen des MSSM folgen. Mit dieser Erhaltungsgröße werden nur diejenigen Prozesse erlaubt, welche eine gerade Anzahl von SUSY-Teilchen beinhalten. Die R-Parität impliziert ein leichtestes SUSY-Teilchen (LSP), welches nicht mehr zerfallen kann; dieses wird als Dunkle-Materie-Kandidat gehandelt.

### 2.3. Das skalare Tau-Lepton

Zur Charakterisierung der Sfermionen sind zwei Objekte von tragender Bedeutung: Die Massenmatrix wird für den Massenterm der Lagrangedichte benötigt, deren Diagonalisierung liefert eine Mischungsmatrix (bezüglich der Händigkeit) und die Eigenwerte der tatsächlichen Masseneigenzustände. Natürlich kann die Massenmatrix a priori in Diagonalgestalt vorliegen. Doch für bestimmte Sfermionen (wie das zu untersuchende skalare Tau oder auch das Top-Squark) liegen

## 2. Zum theoretischen Hintergrund

Linearkombinationen der L- und R-Superpartner vor. Man betrachte allgemein einen sechskomponentigen Vektor  $\tilde{f}$  wie etwa  $(\tilde{e}_L, \tilde{\mu}_L, \tilde{\tau}_L, \tilde{e}_R, \tilde{\mu}_R, \tilde{\tau}_R)$ , welcher auf die Masseneigenzustände  $\tilde{f}_{eigen} = (\tilde{e}_1, \tilde{\mu}_1, \tilde{\tau}_1, \tilde{e}_2, \tilde{\mu}_2, \tilde{\tau}_2)$  abgebildet werden soll. Diese Abbildung geschieht über die Massenmatrix  $\mathbf{M}_{\tilde{f}}^2$ , welche in die Lagrangedichte eingeht:

$$\mathcal{L}_{m(\tilde{f})} = \sum_{\tilde{f}} \tilde{f}^\dagger \mathbf{M}_{\tilde{f}}^2 \tilde{f} \quad \mathbf{M}_{\tilde{f}}^2 = \begin{pmatrix} M_{\tilde{f}_{LL}}^2 & M_{\tilde{f}_{LR}}^2 \\ M_{\tilde{f}_{LR}}^2 & M_{\tilde{f}_{RR}}^2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Die Einträge von  $\mathbf{M}_{\tilde{f}}^2$  sind im Falle dieses gewählten Vektors jeweils selbst  $3 \times 3$ -Matrizen. Speziell für  $(\tilde{\tau}_L, \tilde{\tau}_R)$  werden diese zu skalaren Größen. Die L-R-Mischung kann nun mittels

$$\mathbf{M}_{\tilde{\tau}}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{\tau}_{LL}}^2 & m_{\tilde{\tau}_{LR}}^2 \\ m_{\tilde{\tau}_{LR}}^2 & m_{\tilde{\tau}_{RR}}^2 \end{pmatrix} = (\mathbf{D}^{\tilde{\tau}})^\dagger \begin{pmatrix} m_{\tilde{\tau}_1}^2 & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\tau}_2}^2 \end{pmatrix} \mathbf{D}^{\tilde{\tau}} \quad (2.10)$$

bestimmt werden.  $\mathbf{D}^{\tilde{\tau}}$  ist dabei die angesprochene Mischungsmatrix, des weiteren kann speziell für das  $\tilde{\tau}$  die Massenmatrix berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{\tilde{\tau}} \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_L \\ \tilde{\tau}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\tilde{\tau}} & \sin \theta_{\tilde{\tau}} \\ -\sin \theta_{\tilde{\tau}} & \cos \theta_{\tilde{\tau}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_L \\ \tilde{\tau}_R \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{M}_{\tilde{\tau}}^2 = \begin{pmatrix} m_{l_3}^2 - (\frac{1}{2} - \sin^2 \theta_W) M_Z^2 \cos 2\beta + m_\tau^2 & -m_\tau (A^{\tau*} + \mu \tan \beta) \\ -m_\tau (A^\tau + \mu^* \tan \beta) & m_{\tilde{\tau}}^2 - M_Z^2 \cos 2\beta \sin^2 \theta_W + m_\tau^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Neben den bekannten Massen, dem bereits auftauchenden Weinbergwinkel  $\theta_W$  und  $\beta$  treten ein (evtl. komplexer) Parameter  $\mu$  aus der Higgsinomasse auf sowie ein Parameter  $A$ , dessen Struktur aus der Lagrangedichte stammt und in unserem Fall irrelevant ist. Der Effekt der L-R-Mischung ist demzufolge vor allem durch die Größenordnung von  $\tan \beta$  gegeben, für weniger als  $\mathcal{O}(10^1)$  entspricht die L-R-Basis in etwa den Eigenzuständen. Formal ergeben sich aus der Diagonalisierung die Massen der  $\tilde{\tau}_{1,2}$ , der Mischungswinkel ist gegeben durch

$$m_{\tilde{\tau}_{1,2}}^2 = \frac{1}{2} (m_{\tilde{\tau}_{LL}}^2 + m_{\tilde{\tau}_{RR}}^2 \mp \sqrt{(m_{\tilde{\tau}_{LL}}^2 - m_{\tilde{\tau}_{RR}}^2)^2 + 4m_{\tilde{\tau}_{LR}}^4}) \quad (2.13)$$

$$\cos \theta_{\tilde{\tau}} = \frac{-m_{\tilde{\tau}_{LR}}^2}{\sqrt{m_{\tilde{\tau}_{LR}}^4 + (m_{\tilde{\tau}_2}^2 - m_{\tilde{\tau}_1}^2)^2}} \quad (0 \leq \theta_{\tilde{\tau}} < \pi) \quad (2.14)$$

In der Arbeit soll sich vor allem auf das  $\tilde{\tau}_1$  konzentriert werden. Die denkbaren Sfermionen-Kopplungen, die im MSSM hergeleitet werden, sind zunächst

## 2. Zum theoretischen Hintergrund

sehr allgemein gehalten und weitaus mannigfacher, als sie im spezifischen zu untersuchenden Prozess (Annihilation der Staus führt zur Quark-Paarerzeugung) auftreten. Das Potpourri an Feynman-Regeln wird durch die Verletzung diverser Erhaltungsgrößen stark geschrumpft. Ein Beispiel: Natürlich ist eine Gaugino-Fermion-Sfermion-Kopplung möglich. Doch wird der explizite Prozess betrachtet, widerspricht etwa ein Neutralino-Austausch (Spin-1/2) offenkundig der Drehimpulserhaltung, ein Chargino-Austausch sogar zusätzlich der Ladungserhaltung. Damit liegt die Stau-Annihilation nur im s-Kanal vor. Es verbleiben die Kopplungen zweier Staus an die Eichbosonen der Elektroschwachen Wechselwirkung und an die (ungeladenen) Higgs-Bosonen. Diese Prozesse sollen im Folgenden genauer untersucht werden.

Names	Spin	$P_R$	Mass Eigenstates	Gauge Eigenstates
Higgs bosons	0	+1	$h^0 \ H^0 \ A^0 \ H^\pm$	$H_u^0 \ H_d^0 \ H_u^\pm \ H_d^\pm$
squarks	0	-1	$\tilde{u}_L \ \tilde{u}_R \ \tilde{d}_L \ \tilde{d}_R$	“ ”
			$\tilde{s}_L \ \tilde{s}_R \ \tilde{c}_L \ \tilde{c}_R$	“ ”
			$\tilde{t}_1 \ \tilde{t}_2 \ \tilde{b}_1 \ \tilde{b}_2$	$\tilde{t}_L \ \tilde{t}_R \ \tilde{b}_L \ \tilde{b}_R$
sleptons	0	-1	$\tilde{e}_L \ \tilde{e}_R \ \tilde{\nu}_e$	“ ”
			$\tilde{\mu}_L \ \tilde{\mu}_R \ \tilde{\nu}_\mu$	“ ”
			$\tilde{\tau}_1 \ \tilde{\tau}_2 \ \tilde{\nu}_\tau$	$\tilde{\tau}_L \ \tilde{\tau}_R \ \tilde{\nu}_\tau$
neutralinos	1/2	-1	$\tilde{N}_1 \ \tilde{N}_2 \ \tilde{N}_3 \ \tilde{N}_4$	$\tilde{B}^0 \ \tilde{W}^0 \ \tilde{H}_u^0 \ \tilde{H}_d^0$
charginos	1/2	-1	$\tilde{C}_1^\pm \ \tilde{C}_2^\pm$	$\tilde{W}^\pm \ \tilde{H}_u^\pm \ \tilde{H}_d^\pm$
gluino	1/2	-1	$\tilde{g}$	“ ”
gravitino/ goldstino	3/2	-1	$\tilde{G}$	“ ”

Abbildung 2.2.: Abschließende Übersicht über SUSY-Teilchen mit den zugehörigen Masseneigenzuständen. [2]

### 3. Berechnungen auf *tree level*

Per Ausschlusskriterium über die Verletzung von Erhaltungsgrößen bleiben für die Annihilation der  $\tilde{\tau}_1$  drei Prozesse übrig. Um in das Prinzip der Berechnung einzuführen, soll der Prozess des Higgs-Bosonen-Austausches explizit vorgerechnet, hingegen der Austausch von  $\gamma$  und  $Z^0$  ergebnisorientiert präsentiert werden. Anhang C gibt Auskunft über die detaillierten Rechnungen.

#### 3.1. Das Feynman-Kalkül: *tree level*

Über die Feynman-Diagramme gelingt die mathematisch präzise Übertragung der bisweilen länglichen und prima vista wenig aussagekräftigen Lagrangedichte in eine graphische Veranschaulichung eines quantenfeldtheoretischen Prozesses. Die Einfachheit der Graphik darf dennoch nicht über den verborgenen Rechenaufwand hinwegtäuschen. Bei der Behandlung der Prozesse wird ein perturbativer Ansatz gewählt - jede Ordnung der Störungstheorie wird als einzelnes Feynman-Diagramm betrachtet. In erster Ordnung (die Diagramme werden wegen ihrer Erscheinungsform als *tree level* bezeichnet) ist dessen struktureller Aufbau immer gleich - bestehend aus einfallenden und ausgehenden Teilchen und einem Austauschteilchen. Man betrachte etwa den im Folgenden zu berechnenden Prozess:

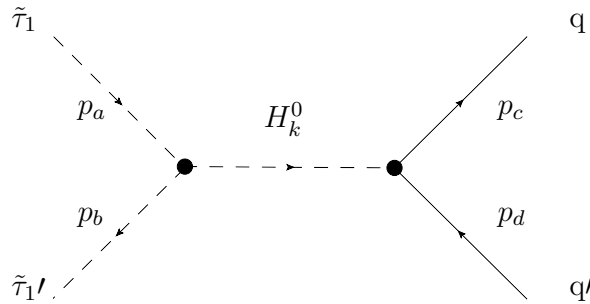


Abbildung 3.1.: Stau und Anti-Stau annihilieren unter Aussendung eines virtuellen Higgs-Bosons, welches in ein Quark-Antiquark-Paar zerfällt.

Vordergründig, um eine experimentelle Vergleichbarkeit zu garantieren, ist die Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  aus der Streuamplitude

### 3. Berechnungen auf tree level

$M$ , welche die Richtungsabhängigkeit der gestreuten einfallenden Welle quantifiziert. Das Winkelement  $d\Omega$  gibt in Beschleunigerexperimenten Auskunft über bevorzugte Streurichtungen. Abb. 3.2 soll dies veranschaulichen:

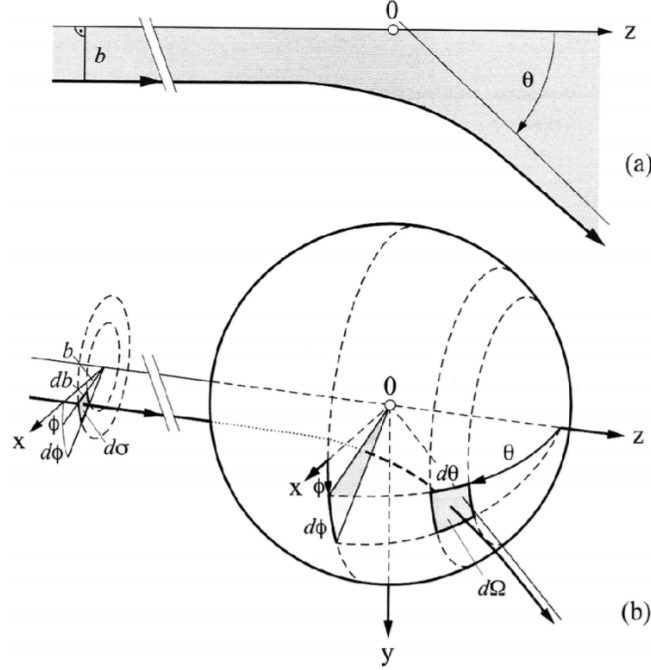


Abbildung 3.2.: Objekte wechselwirken an  $O$  mit einem Streuwinkel  $\theta$ , sodass  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  die Verteilung der Teilchen auf die Raumwinkelemente angibt. [28]

Nun zum mathematischen Teil: Die Bestandteile des Diagramms gehen in  $M$  multiplikativ ein - die externen Linien (ein- und ausfallende Teilchen, also die Staus bzw. Quarks), die internen (Austauschteilchen, hier Higgs-Bosonen) und die Vertices (Zusammentreffen mindestens dreier Linien). An den Vertices (gehen mit Vertexfaktoren in  $M$  ein) findet die tatsächliche Physik statt - Streuung, Erzeugung oder Vernichtung der Teilchen. Externe Linien können als effektive 1 eingehen, wenn sie keinen Spin besitzen (als auf 1 normierte Lösung der Klein-Gordon-Gleichung). Fermionen gehen als Lösung der Dirac-Gleichung als Spinore ein (einfallende Teilchen als  $u(p)$ , ausfallende als  $\bar{u}(p)$ , für Antiteilchen vice versa), ihr Spin muss bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes explizit berücksichtigt werden. Propagatoren sind nun die Faktoren, die durch das Austauschteilchen aus den internen Linien in  $M$  eingehen.

Ein solcher Feynman-Propagator  $\Delta_F$  ist die Lösung einer partiellen Differenti-

### 3. Berechnungen auf *tree level*

gleichung, welche das Teilchen beschreibt - für ein freies Skalarfeld etwa wird die (aus der Elektrodynamik bekannte) Greensche Funktion zur Klein-Gordon-Gleichung gesucht, sodass also als Propagator (in natürlichen Einheiten) die Lösung zu

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) \Delta_F = \delta^{(4)}(x) \quad (3.1)$$

gesucht wird bzw.  $\Delta_F$  als Operatorkernel zu  $(\partial^\mu \partial_\mu - m^2)^{-1}$ . Es ergibt sich im Impulsraum eine Lösung der Form  $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ , wobei die infinitesimalen  $\epsilon$  als Hilfsgröße zur Berechnung des Operatorkerns über den Residuensatz (die Fouriertransformation erleichtert die Rechnung) gewählt werden, sie können auf *tree level* ad acta gelegt werden, begegnen uns aber später bei Korrekturen erster Ordnung. Die Vermittlung zwischen Lagrangedichte und Feynman-Diagramm kann nun nachvollzogen werden - beispielhaft an der recht einfachen Struktur der QED-Lagrangedichte:

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \quad (3.2)$$

Leicht erkennt man den Dirac-Operator, der auf das Spinorfeld  $\psi$  wirkt, und aus der kovarianten Elektrodynamik den Feldstärketensor  $F^{\mu\nu}$ , der das Photonenfeld/Eichfeld repräsentiert, da er  $A^\mu$  beinhaltet. Die zweite Quantisierung ordnet den Elektronen und Photonen bekanntlich die Feldoperatoren zu, deren Kopplung im dritten Term stattfindet (vgl. z.B. mit Vertexfaktor im Anhang B.1). Die zuvor herausgestellten Elemente von  $M$  sind also gänzlich im obigen Lagrangian wiederzufinden. Der perturbative Ansatz steckt nun in den Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = q\gamma^\mu A_\mu\psi \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (3.3)$$

denn  $A_\mu$  in der Dirac-Gleichung kann als Störpotential betrachtet werden. Zur Lösung wird dementsprechend eine Reihenentwicklung angestrebt. Hier offenbart sich nun auch der Hintergrund des einführend angesprochenen Renormierungsproblems (z.B. Higgsmasse): Feldoperatoren sind Distributionen, deren Entwicklung in einer Potenzreihe bezüglich der Multiplikation an einem Punkt der Raumzeit nicht definiert ist. Die Divergenzen sind damit Zeugnis eines unzureichenden mathematischen Konzeptes, Unendlichkeiten treten in dieser Form natürlich nicht in der Natur auf.

Mit diesen Vorbereitungen kann die nachfolgende Berechnung gut verstanden werden. Wesentlich für die Physik hinter dem Prozess ist letztendlich die Kinematik, auf welche nun eingegangen werden soll.

### 3.2. Kinematik

Die  $2 \rightarrow 2$ -Prozesse (bezogen auf die Anzahl der Teilchen in Anfangs- und Endzustand) können durch die 1958 erstmals eingeführten lorentzinvarianten Mandelstam-Variablen in Kurzform beschrieben werden. Diese erfüllen die Viererimpulserhaltung  $p_a + p_b = p_c + p_d$ , da die interne Linie den Impuls  $p_a + p_b := q$  trägt, welcher konstant bleibt. Es ergeben sich drei Mandelstamvariablen

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 \quad (3.4)$$

$$t = (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2 \quad (3.5)$$

$$u = (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2 \quad (3.6)$$

mit

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 = \sum_{i=1}^4 p_i^2 \quad (3.7)$$

$s$ ,  $t$  und  $u$  charakterisieren den Beitrag der gleichnamigen Kanäle zum Streuprozess. Der hier betrachtete Fall wird als  $s$ -Prozess bezeichnet. In der Teilchenphysik ist das Schwerpunktsystem CMS (*center of mass*) zur Berechnung oftmals am sinnvollsten.  $s$  gibt hierbei auch das Quadrat der Schwerpunktsenergie an, sodass

$$\sqrt{s} = E_a + E_b = E_c + E_d \quad (3.8)$$

gilt. Zur Behandlung von Streuamplituden können im Übrigen nach (3.4) Beziehungen wie

$$p_a p_b = p_c p_d = \frac{1}{2}(s - m_a^2 - m_b^2) \quad (3.9)$$

und analog für andere Skalarprodukte der Viererimpulse eingesetzt werden.

### 3.3. Austausch von Higgs-Bosonen

Wie zuvor festgestellt, genügt es nicht mehr, das Higgs-Boson aus dem SM allein zu betrachten. Wenngleich geladene Austauschteilchen die Ladungserhaltung verletzen, muss das Quadrupel  $H_k^0 = \{h^0, H^0, A^0, G^0\}$  beim Prozess berücksichtigt werden. Neu ist hierbei das  $G^0$ . Hintergrund dieses Teilchens ist das sogenannte Goldstone-Theorem, welches für Systeme mit spontan gebrochener Symmetrie bosonische Teilchen vorhersagt. Ein einfach zugängliches Beispiel sind die Magnonen, welche unterhalb der Curie-Temperatur in Magneten die Spinwellen repräsentieren. Oberhalb dieser Temperatur liegt jedoch eine Symmetrie in Form der Richtungsunabhängigkeit (verschwindende Magnetisierung) vor. Der Bruch

### 3. Berechnungen auf tree level

der  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie über den Higgs-Mechanismus [7] liefert ähnlich dazu die Goldstone-Bosonen. Im Übrigen treten analog dazu für Quantenfeldtheorien mit einer Lie-Superalgebra (siehe Theoreme in 2.1.1) fermionische Goldstinos auf.

Für neutrale Higgs-Bosonen liegt bei Kopplung an zwei Sfermionen ein allgemeiner Vertexfaktor

$$G_{ijk}^{\tilde{f}} := G(H_k^0 \tilde{f}_i^* \tilde{f}_j) = [D^{\tilde{f}} G_{LR,k}^{\tilde{f}} (D^{\tilde{f}})^\dagger]_{ij} \quad (3.10)$$

vor mit der zuvor eingeführten Mischungsmatrix  $D$ . Natürlich gilt  $\tilde{f}_i = \tilde{f}_j$ , sodass das Matrixelement bekannt ist. Für die verschiedenen Elemente von  $H_k^0$  liegen auch unterschiedliche Matrizen  $G_{LR,k}$  vor (siehe B.2).

Analog enthält die Lagrangedichte der Higgs-Fermion-Fermion-Kopplung (Anhang B2) Vertexfaktoren, bei denen aber nur  $k = 1, 2$  und  $k = 3, 4$  unterschieden werden muss:

$$h^0, H^0 : is_k^f (P_R + P_L) \rightarrow is_{1,2}^q \quad (3.11)$$

$$A^0, G^0 : is_k^f (P_R - P_L) \rightarrow is_{3,4}^q \gamma^5 \quad (3.12)$$

$P_{L,R}$  sind aus der Einführung zur Chiralität bekannt. Die spinlosen Higgs-Bosonen gehen mit dem in Kapitel 3.1 eingeführten Propagator ein. Skalare Taus sind in  $\mathcal{M}$  als Lösung der Klein-Gordon-Gleichung eine effektive 1, Quark und Anti-Quark werden durch die Dirac-Spinore  $\bar{u}(p_c)$  und  $v(p_d)$  beschrieben. Man erhält

$$\mathcal{M} = -\frac{G_{11k}^{\tilde{\tau}} s_k^q}{q^2 - m_k^2} [\bar{u}(p_c) v(p_d)] \quad k = 1, 2 \quad (3.13)$$

$$\mathcal{M} = -\frac{G_{11k}^{\tilde{\tau}} s_k^q}{q^2 - m_k^2} [\bar{u}(p_c) \gamma^5 \bar{v}(p_d)] \quad k = 3, 4 \quad (3.14)$$

als Streuamplitude. Das weitere Vorgehen ist nun immer gleich:  $\mathcal{M}$  wird quadriert, wobei bei der Quadratur die möglichen Spin-Zustände der Quarks berücksichtigt werden müssen, sie wird also zu  $|\bar{\mathcal{M}}|^2$  gemittelt. Die Identitäten (A.3) und (A.4) ergeben eine Spur (Summe über die Diagonalelemente), welche mit verschiedenen hilfreichen Formeln (siehe Anhang A) ausgewertet werden kann.

$$|\bar{\mathcal{M}}_{k=1,2}|^2 = \frac{(G_{11k}^{\tilde{\tau}} s_k^q)^2}{(q^2 - m_k^2)^2} [\bar{u}(p_c) v(p_d)] [\bar{u}(p_c) v(p_d)]^* \quad (3.15)$$

Der Blick in Anhang B2 verrät, warum lediglich  $k = 1, 2$  berücksichtigt werden muss: Da nur der reine Annihilationsprozess von  $\tilde{\tau}_1$ -Teilchen betrachtet wird und der Vertexfaktor  $G_{11k}^{\tilde{\tau}}$  für  $k = 3, 4$  in der Hauptdiagonale verschwindet, muss nur

### 3. Berechnungen auf tree level

der Austausch von  $h^0$  und  $H^0$  berücksichtigt werden. Es verbleibt die Auswertung der Spur entsprechend den Casimir-Identitäten. Jene ist eine lineare Abbildung, sodass alle Summanden einzeln betrachtet werden können.

$$Tr[(\not{p}_c + m_q)(\not{p}_d - m_q)] = Tr[\not{p}_c \not{p}_d] + m_q(Tr[\not{p}_c] + Tr[\not{p}_d]) - 4m_q^2 = 4(p_c p_d - m_q^2) \quad (3.16)$$

Hierbei wurden (A.5), (A.10) und (A.12) verwendet. Aus Gründen der Dimension muss stets die Masse mit einem Einheitsoperator multipliziert werden, dessen Spur im Minkowski-Raum selbstredend 4 ist. Neben der Spin-Summation müssen wir berücksichtigen, dass es sich bei den Quarks um farbgeladene (rot, blau, grün und die zugehörige Antifarbe) Fermionen handelt, sodass dasselbe Verfahren angewandt werden muss - hierbei ist es jedoch wesentlich einfacher. Die drei Farben werden einer Matrix  $\delta_{ij}$  zugeordnet, welche an jeden Vertex multipliziert wird, wo Quarks auftauchen. Die Farbladung ist eine Erhaltungsgröße, aber nicht messbar. Es muss über die Farben der eingehenden Quarks gemittelt (Faktor  $1/N_c^2$  mit Farbanzahl  $N_c$ ), was im vorliegenden Fall obsolet ist, und dann über alle erlaubten Farbkombinationen summiert werden:

$$F = \sum_{i,j} \delta_{ij}^2 = \sum_i \delta_{ii} = 3 \quad (3.17)$$

Wir erhalten als endgültige quadrierte Amplitude, ausgedrückt durch die Mandelstam-Variablen, den Term:

$$|\bar{\mathcal{M}}_{k=1,2}|^2 = \left( \frac{G_{11k}^{\tilde{\tau}} s_k^q}{s - m_k^2} \right)^2 \cdot \left( \frac{3s}{2} - 6m_q^2 \right) \quad (3.18)$$

Es verbleibt nunmehr lediglich die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts  $\sigma$ . Zunächst gilt für einen  $2 \rightarrow 2$ -Prozess die Relation,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2sv} |\bar{\mathcal{M}}|^2 \frac{1}{4\pi^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}} \quad (3.19)$$

welche für allgemeinere Prozesse in Anhang E noch ausführlicher diskutiert werden soll. Dabei ist  $v$  die Relativgeschwindigkeit der beiden Teilchen. In Ermangelung einer Winkelabhängigkeit findet sich daher  $\sigma$  auf triviale Art und Weise.

## 3.4. Austausch von Vektorbosonen

Die beiden Prozesse des Austausches von  $Z^0$  und  $\gamma$  und ihr Ergebnis sollen vorgestellt werden (Abb. 3.3).

Beim  $Z^0$  liegen verschiedene Möglichkeiten der Berechnung vor, diese resultieren aus der Wahl der Eichungfixierung.

### 3. Berechnungen auf tree level

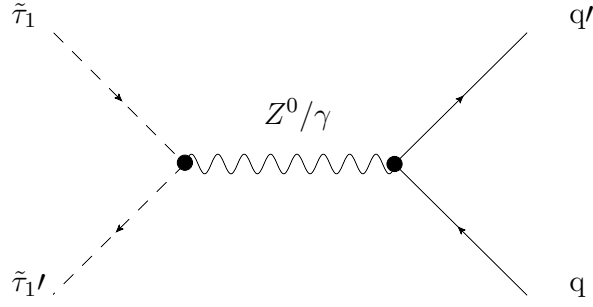


Abbildung 3.3.: Stau und Anti-Stau annihilieren unter Aussendung eines virtuellen Vektorbosons ( $Z^0$  und  $\gamma$ ), welches in ein Quark-Antiquark-Paar zerfällt.

#### 3.4.1. Von Eichungen und Geistern

Die Idee der Eichtheorie, die Invarianzen unter lokalen Eichtransformationen besitzt, taucht schon in der klassischen Elektrodynamik auf, wenngleich dort die Bedeutung dieser Freiheit noch nicht gänzlich zu schätzen gewusst wurde. Man behandelte überflüssige Freiheitsgrade, auftauchend bei der Transformation der Gestalt

$$\varphi \rightarrow \varphi - \partial_t \psi \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \psi \quad , \quad (3.20)$$

beispielsweise mit der Lorenz-Eichung (nach Ludvig Lorenz und nicht nach seinem berühmteren Kollegen H.A. Lorentz)  $\partial_\mu A^\mu$ . In der QFT hat sich die Einführung eines eichfixierenden Terms in die Lagrangedichte durchgesetzt, die  $R_\xi$ -Eichung (für ein allgemeines Eichfeld  $A^\mu$ ):

$$\delta \mathcal{L} = - \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi} \quad (3.21)$$

Es ergeben sich die Landau-Eichung ( $\xi = 0$ ) oder auch die Feynman-Eichung ( $\xi = 1$ ) oder die unitäre Eichung ( $\xi \rightarrow \infty$ ). Eichfixierung ist für nicht-abelsche Eichtheorien recht kompliziert. Es genügt, folgenden Spezialfall zu betrachten: Liegt ein Eichboson vor, das seine Masse über den Higgs-Mechanismus erhält, so nimmt der Propagator für das Vektorboson (Spin 1) verschiedene Gestalt an:

$$\text{Unitär : } - \frac{i(g^{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2} \quad \text{Feynman : } \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} \quad (3.22)$$

Bei der Feynman-Eichung ist das Vektorboson offensichtlich masselos. Es sei angemerkt, dass in diesem Fall der Austausch eines Goldstone-Bosons hinzuaddiert

### 3. Berechnungen auf tree level

werden muss - doch dieser Term liefert, wie in Kapitel 3.3 herausgearbeitet, keinen Beitrag. Die Gleichheit der Eichungen wird durch die sogenannten Slawnow-Taylor-Identitäten gewährleistet, welche übrigens auch für die Renormierung sehr wertvoll sind. Durch die Transformation des Propagators wurde eine Eichfixierung durchgeführt, die die Existenz von unphysikalischen Zuständen, den Faddejew-Popow-Geistern, mit sich führt (als Überrest der mathematischen Behandlung nichtabelscher Eichtheorien). Sie sind notwendig, um die Freiheitsgrade der Vektorpotentiale als Beiträge in feldtheoretischen Rechnungen zu kompensieren, sind jedoch nicht real. Es treten so viele Geister auf, wie es Generatoren der zugrundeliegenden Lie-Gruppe gibt, z.B. acht in der QCD (Eichgruppe SU(3) von acht Gell-Mann-Matrizen aufgespannt) [31]. Interessanterweise verletzen sie das Spin-Statistik-Theorem, so sind sie nämlich etwa antikommutierende komplexe Skalarfelder. Ihrer Geisternatur sei Dank ist dies aber unproblematisch.

Mit dem tieferen Verständnis (obgleich noch zutiefst oberflächlich) kann sich nun dem  $Z^0$  zugewandt werden.

#### 3.4.2. Ergebnisse von Photonen- und $Z^0$ -Bosonen-Austausch

Mithilfe der Vertexfaktoren und dem Photonenpropagator (Anhang C) erhält man die Streuamplitude

$$\mathcal{M}_\gamma = -\frac{ee_q e_{\tilde{\tau}_1} [\bar{u}(p_c) \gamma^\mu v(p_d)] g_{\mu\nu} [p_a - p_b]}{(p_a + p_b)^2} \quad (3.23)$$

Die Auswertung der Spur, die anschließende Kontraktion der Viererimpulse und die Formulierung mit Mandelstam-Variablen liefert schlussendlich :

$$|\bar{\mathcal{M}}_\gamma|^2 = -\frac{3ee_q^2 e_{\tilde{\tau}_1}^2}{2s^2} [4m_{\tilde{\tau}_1}^2 (m_{\tilde{\tau}_1}^2 + m_q^2 - t) + m_q^2 (4m_{\tilde{\tau}_1}^2 - 2s) - 4m_{\tilde{\tau}_1}^2 t + m_q^4 + m_q^2 (2m_q^2 - s - 4t) + m_q^4 - m_q^2 s - 4m_q^2 t + 4st + 4t^2] \quad (3.24)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist nun etwas schwerer zu integrieren, da  $t$  winkelabhängig ist, problematisch wird dies aber eher im t-Kanal. Die Integration wird bei den späteren Berechnungen numerisch durchgeführt. Für das  $Z^0$  ist das Verfahren analog. Man verwendet den Propagator in Feynman-Eichung, da die Berechnung in Ermangelung eines Goldstone-Bosons als additives Austauschteilchens so wesentlich einfacher wird. Es liegt die Amplitude

$$\mathcal{M}_Z = \frac{g_Z^2 z_{11}^{\tilde{\tau}_1}}{\cos^2 \theta_W (p^2 - M_Z^2)} \{ [\bar{u}(p_c) \gamma^\mu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) v(p_d)] [p_a - p_b]_\mu \} \quad (3.25)$$

vor. Das Endergebnis der quadrierten Amplitude lautet:

### 3. Berechnungen auf *tree level*

$$|\mathcal{M}|_Z^2 = \frac{8 \cdot 3g_Z^4 (z_{11}^{\tilde{\tau}_1})^2}{4 \cos^4 \theta_W (p^2 - M_Z^2)^2} [(c_V^q)^2 (m_{\tilde{\tau}_1}^4 + m_{\tilde{\tau}_1} (2m_q^2 - t) + (m_q^2 - t)(m_q^2 - s - t)) \\ + (c_A^q)^2 (m_{\tilde{\tau}_1}^4 - 2m_{\tilde{\tau}_1} (m_q^2 + t) + m_q^4 - 2m_q 2t + t(s + t))] \quad (3.26)$$

Detailinteressierte seien auf Anhang C verwiesen, wo die Berechnung *peu à peu* vorgestellt wird. Die drei Amplituden müssen nun sinnvoll verwertet werden, um sie in den Kontext der späteren (numerischen) Rechnungen einzubinden.

### 3.5. Der gesamte Wirkungsquerschnitt auf *tree level*

Zuvor wurden die quadrierten Amplituden für die jeweiligen Austauscheteilchen einzeln berechnet. Es versteht sich jedoch, dass für die Amplitude insgesamt jeder Beitrag additiv eingeht, sodass die einzelnen Ergebnisse zwar brauchbar sind, aber die sogenannten Interferenzterme (als Mischterme) in die quadrierte Gesamtamplitude berücksichtigt werden müssen. Man benötigt daher das folgende Betragsquadrat:

$$|\mathcal{M}|_{ges}^2 = |\mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z + \mathcal{M}_{h^0} + \mathcal{M}_{H^0}|^2 \quad (3.27)$$

Bei den Interferenzen kann man etwas Arbeit sparen, man werfe einen Blick auf die Photon-Z-Interferenz bei Berücksichtigung, dass die Amplituden reell sind::

$$|\mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z|^2 = |\mathcal{M}_\gamma|^2 + |\mathcal{M}_Z|^2 + 2\mathcal{M}_\gamma \mathcal{M}_Z \quad (3.28)$$

Solche Interferenzterme können mit dem *Mathematica* -Paket *FeynCalc* errechnet werden. Bei der Implementierung zur numerischen Analyse kann man jedoch dies umgehen und ausnutzen, dass Photonen- und  $Z^0$ -Austausch dieselbe algebraische Struktur besitzen, wenn man sie analog zum Higgs-Austausch in einer  $g_L P_L + g_R P_R$  -Struktur formuliert und die Berechnungen mit Schleifen numerisch durchführt.

Alle denkbaren Interferenzen und die reinen Amplitudenquadrate wurden mit *FeynCalc* auf Richtigkeit überprüft und anschließend in einen *Fortran*-Code umgewandelt, um sie in das Programm zu implementieren, welches in Kapitel 6 vorgestellt werden wird.

## 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

### 4.1. Feynman-Kalkül II: Schleifenkorrekturen

Über die führende Ordnung hinaus wird die Behandlung teilchenphysikalischer Prozesse ein Stück weit komplizierter. Es soll daher zunächst ein Abschnitt der zugrundeliegenden Formalismen folgen, damit die nachfolgende Berechnung verständlicher wird. Neben dem Regularisierungsprozess soll auf die Elimination von auftretenden Unendlichkeiten eingegangen werden. Dazu werden die Renormierung zur Beseitigung von UV-Divergenzen und die Berücksichtigung reeller Korrekturen für den Umgang mit IR-Divergenzen als Verfahren bereitgestellt.

#### 4.1.1. Dimensionelle Regularisierung

Wie bereits im vorigen Kapitel angedeutet, erfordert die exakte Behandlung eines quantenfeldtheoretischen Problems eine unendliche Reihenentwicklung nach der jeweiligen Kopplungskonstanten im Sinne der Störungstheorie, wobei die Feynman-Diagramme diese Terme höherer Ordnung ebenso präzise widerspiegeln wie auf dem *tree level*. Schleifenkorrekturen begegneten uns bereits bei den Selbstenergietermen, die die Higgsmasse anwachsen ließen (2.3). Bei der Erklärung des Lamb-Shifts oder bei Präzisionsberechnungen des anomalen magnetischen Moments des Elektrons - einer der größten Erfolge der QED - kamen auch die Terme höherer Ordnung zum Vorschein. Offensichtlich schwindet die Relevanz der Korrekturen höherer Ordnung etwa in QED-Prozessen sehr schnell, wohingegen in der QCD aufgrund der asymptotischen Freiheit die Kopplungskonstante nur für hohe Energien klein bleibt. Es müssen andere Methoden wie die Gitter-QCD herangezogen werden.

Die Korrekturterme der Arbeit lassen sich auf gewöhnlichem Wege berechnen, jedoch ist der mathematische Aufwand nicht unerheblich. Man erinnere sich an die Erwähnung der Greenschen Funktion zur Klein-Gordon-Gleichung (3.1). Solche Propagatoren und Potenzen davon müssen bei den Korrekturtermen offensichtlich über alle Impulse integriert werden, doch die Problematik von Integralen etwa der Erscheinung

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} \quad (4.1)$$

hinsichtlich der logarithmischen Divergenz sticht unmittelbar ins Auge. Diese Unendlichkeiten müssen auf sinnvolle Weise beseitigt werden (Regularisierung) - in (2.3) wurde bereits die Idee des Cut-Offs eingeführt. Physikalisch äquivalent dazu und zudem mathematisch wohldefiniert ist die dimensionelle Regularisierung, welche bei den nachfolgenden Rechnungen durchgeführt wurde und wesentlich auf 't Hooft und Veltman zurückgeht. Leider würde eine ausführliche Behandlung dieses Prozesses, die tiefe Strukturen der Funktionentheorie beispielsweise bezüglich der Eulerschen  $\Gamma$ -Funktion oder der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion erkennen lässt, den Rahmen der Arbeit sprengen. Er sei aber kurz skizziert: Die zuvor feste Zahl der Raumzeit-Dimensionen (4) aus dem Integrationsmaß wird zu einem komplexen Parameter  $D$  verallgemeinert, sodass man meromorphe Funktionen  $f(D)$  erhält. Der aus der Funktionentheorie bekannte Identitätssatz erlaubt die analytische Fortsetzung der Funktion auf die allgemeine  $D$ . Das Integral wird so umformuliert, dass das Integrationsmaß nicht mehr  $D$ -abhängig ist und jenes mit verschiedenen speziellen Funktionen lösbar wird. Die Divergenzen, die in den Lösungen der Integrale auftreten (der Pol bei  $D = 4$  ist natürlich nach wie vor vorhanden), müssen durch die Renormierung beseitigt werden, was später vorgestellt wird. Doch im Allgemeinen wird das Integral sinnvoll lösbar, was auch mit anderen Techniken wie der Pauli-Villars-Regularisierung möglich ist.

Die entstehenden Schleifen können mit Vertizes und Propagatoren ähnlich wie auf dem *tree-level* behandelt werden. Der Parameter  $D$  taucht in diesem Zusammenhang in der Beziehung

$$D = 4L - P_f - 2P_b + \sum V_i d_i \quad (4.2)$$

auf und wird als Divergenzgrad interpretiert, wobei  $L$  die Anzahl der Schleifen,  $P$  die Zahl der bosonischen/fermionischen Propagatoren und  $V$  die der Vertizes vom Typ  $i$  beschreiben bzw.  $d_i$  deren Ableitung. Je nach Gestalt der Schleife können die Integrale unterschiedlichste Formen annehmen, die allgemeine Formulierung über ein N-Punkt-Tensorintegral

$$T_{\mu_1, \dots, \mu_M}^N(p_1, \dots, p_{N-1}, m_0, \dots, m_{N-1}) \quad (4.3)$$

$$= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \cdot \int d^D q \frac{q_{\mu_1} \dots q_{\mu_M}}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)[(q + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon] \dots [(q + p_{N-1})^2 - m_{N-1}^2 + i\epsilon]}$$

ist jedoch immer möglich. Dabei ist  $\mu$  eine beliebige Referenzmasse, welche aus Gründen der Dimension eingeführt werden muss. Im gewöhnlichen Minkowski-Raum wird diese dimensionslos. Zur Umgehung der Pole ist ein infinitesimales

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

$\epsilon$  notwendig. Per Konvention setzt man  $T^1 \rightarrow A$ ,  $T^2 \rightarrow B$  usw. Dieses Integral repräsentiert eine verallgemeinerte Schleife folgenden Aussehens:

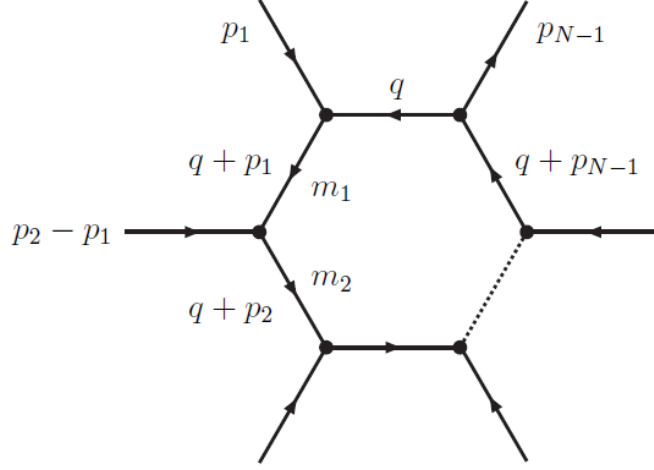


Abbildung 4.1.: Externe Impulse nehmen am Prozess in der Schleife teil, wobei die Pfeile die Richtungen der Vierimpulse symbolisieren [11]

Bemerkenswert ist, dass die skalaren Integrale ( $N=0$ , Zähler wird 1)  $A^0$  bis  $D^0$  eine Basis bilden, aus denen sämtliche anderen als Linearkombinationen hervorgehen. Deren Berechnung ist bereits kompliziert genug, man findet die Ergebnisse im Anhang. Die allgemeinen Tensoren können aufgrund ihrer Lorentz-Struktur mit dem metrischen Tensor und Viererimpulsen via Tensorverjüngung á la Passarino-Veltman auf die Basisintegrale reduziert werden. Man findet beispielsweise  $C^\mu = p_1^\mu C_1 + p_2^\mu C_2$  o.Ä. (siehe Anhang E)

In der sogenannten *next-to-leading order* (NLO) können verschiedene Korrekturterme auftreten. Zum einen können die ein- oder auslaufenden Teilchen ein virtuelles Teilchen austauschen, die Vertexkorrektur. Eingedenk der Reihenentwicklung nach der Kopplungskonstante müssen vor allen Dingen jene Terme berücksichtigt werden, die eine starke Kopplung besitzen. Die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante ist etwa weniger bedeutsam in der NLO als  $\alpha_S$  der QCD. Ebenso können jene aber auch reale Teilchen emittieren. Nicht zuletzt müssen auch die Selbstenergieterme in Betracht gezogen werden. Bei den Vertexkorrekturen begegnen uns erstmals die Passarino-Veltman-Integrale, dabei wird später der Gluonenaustausch der beiden Quarks berechnet (zu finden in Abb. 4.2). Das MSSM bietet jedoch auch die Möglichkeit, dass am Vertex kurzzeitig Squarks entstehen, welche ein Gluino austauschen. Vor diesen Berechnungen müssen aber die darin auftretenden Divergenzen diskutiert werden.

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

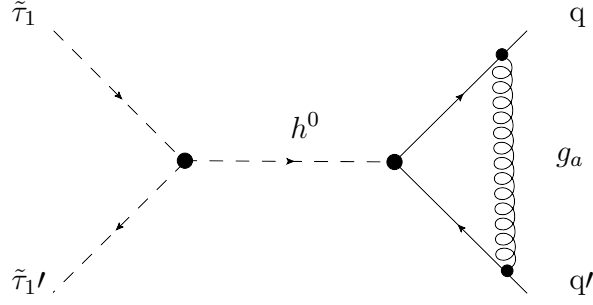


Abbildung 4.2.: QCD-Vertexkorrektur: Das Higgs-Boson zerfällt wie üblich in ein Quark-Paar, welches ein Gluon austauscht.

#### 4.1.2. Renormierung: Die Beseitigung der UV-Divergenz

Die Crux mit der dimensionellen Regularisierung liegt auf der Hand, wenn man ein Passarino-Veltman-Integral genauer unter die Lupe nimmt:

$$A_0 = m^2(\epsilon^{-1} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right)) + 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.4)$$

Die Auswertung der Schleifenintegrale führt auf sogenannte ultraviolett-divergente Anteile, sodass beispielsweise in  $A_0$  der Summand  $\frac{1}{\epsilon}$  auftaucht und die Rückführung zur Ausgangsdimension via  $D = 4 - \epsilon$  das Integral sehr problematisch macht (die Gestalt der anderen Passarino-Veltman-Integrale findet sich in Anhang E, dort auch Konkretes zu  $\gamma_E$  etc.). Nicht alle Passarino-Veltman-Integrale sind UV-divergent, eine Übersicht findet sich in (E.1.). Das Verfahren der Renormierung (hier: multiplikative Renormierung) versucht durch eine Transformation der Lagrangedichte weitere Terme zu generieren, welche sich mit den Divergenzen der Schleifenintegrale aufheben. Dies ist etwa dafür notwendig, dass die Elektronenmasse nicht unendlich ist - was es offenkundig zu vermeiden gilt. Auf *tree level*-Niveau würde man intuitiv die Masse als Pol des fermionischen Propagators annehmen. Die Natur spielt sich jedoch nicht auf *tree level*-Niveau ab. Man bezeichnet diese Masse als nackt ( $m_e^{(b)}$ , von engl. *bare*), da die virtuellen Korrekturen unberücksichtigt bleiben.

Um der Divergenz durch die Korrekturen zu entgehen, formuliert man  $m_e^{(b)} = Z_m m_e$  und transformiert damit jedwede nackte Größe auf eine renormierte Größe. Dabei gilt im Allgemeinen  $Z_i = 1 + \delta Z_i$ , wobei ein  $\delta$  einen sogenannten Counterterm symbolisiert. Ein solcher tritt als neues Feynman-Diagramm auf, welches aus der transformierten Lagrangedichte abgeleitet werden kann. Sie verschwinden für  $Z_i \rightarrow 1$ ; im Falle der nackten Größen wäre ihr Auftreten auch irrelevant. Am einfachsten lässt sich die Prozedur wiederum mit dem QED-Lagrangian verstehen,

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

welcher in seiner nackten Form das bekannte Aussehen aus Kap. 3.1 besitzt, wobei wir nun den Feldstärketensor ausschreiben und eine Eichfixierung implementieren, welche nun mittels Kap. 3.4.1 verstanden werden kann.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED}^{(b)} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^{(b)} - \partial_\nu A_\mu^{(b)})^2 - \frac{1}{2\xi^{(b)}}(\partial^\mu A_\mu^{(b)})^2 \\ & + \bar{\psi}^{(b)}(i\not{\partial} - m_e^{(b)})\psi^{(b)} + e^{(b)}A_\mu^{(b)}\bar{\psi}^{(b)}\gamma^\mu\psi^{(b)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Konsequenterweise müssen alle auftauchenden Größen multiplikativ renormiert werden:

$$A_\mu^{(b)} = \sqrt{Z_A}A_\mu \quad \psi^{(b)} = \sqrt{Z_\psi}\psi \quad e^{(b)} = Z_e e \quad m_e^{(b)} = Z_m m_e \quad \xi^{(b)} = Z_\xi \xi \quad (4.6)$$

Wie erwartbar ist, erhält man nun eine renormierte Lagrangedichte der ursprünglichen Gestalt (4.7), an die sich additiv die Counterterm-Beiträge (4.8) anschließen, welche die aus den Korrekturen entstandenen Divergenzen eliminieren sollen:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_e)\psi + eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}\delta Z_A(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}\left(\frac{Z_A}{Z_\xi} - 1\right)(\partial^\mu A_\mu)^2 + \delta Z_\psi\bar{\psi}i\not{\partial}\psi \\ & - (Z_\psi Z_m - 1)\bar{\psi}_e\psi + (Z_e\sqrt{Z_A}Z_\psi - 1)eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dies ist eine theoretisch elegante Version, die Counterterme zu bestimmen. Mit einigen Hilfsidentitäten können die expliziten Berechnungen jedoch verkürzt werden, sodass nicht für jeglichen Prozess die gesamte Lagrangedichte transformiert werden muss. Die Renormierung der Vertexkorrekturen bringt eine Transformation der Quarkmasse  $m_q$  und seiner Wellenfunktion  $\psi$  mit sich. Der renormierte Kopplungsfaktor  $g_{\phi\psi\psi}$  muss dann in die Amplitude der führenden Ordnung (*tree level*) eingefügt werden. Die Transformation findet dabei gemäß

$$m_q^{(b)} \rightarrow m_q + \delta Z_m \quad \psi^{(b)} \rightarrow \psi + \frac{1}{2}\delta Z_\psi \quad (4.9)$$

statt. Die Counterterme berechnen wir später explizit aus den Selbstenergie-Schleifen, die zum einen auf QCD-Ebene, aber auch auf SUSY-QCD-Ebene gefunden werden können. Neben dem simplen *tree level*-Propagator erhält man einen Selbstenergieterm  $\Pi^{\bar{\psi}\psi}(p)$  und den Counterterm. Die nachfolgende Abbildung veranschaulicht diese drei Beiträge.

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

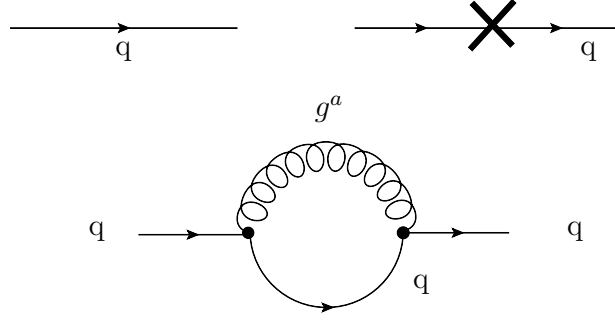


Abbildung 4.3.: QCD-Korrektur: Nackter Quark-Propagator mit Counterterm, der die Divergenzen aus der Quark-Gluon-Schleife (unten) beseitigt.

Man erhält insgesamt eine allgemeine Funktion  $\Gamma^{\bar{\psi}\psi}(p)$ , für die wir die *on shell* - Renormierungsbedingungen formulieren können (dies ist möglich, da die Masse des propagierenden schweren Quarks bekannt ist). Sie sollen zum einen die physikalische Masse mit der renormierten gleichsetzen und zum anderen  $\delta_\psi$  fixieren:

$$\Gamma^{\bar{\psi}\psi}(p)u(p)|_{p^2=m_q^2} = 0 \quad \lim_{p^2 \rightarrow m_q^2} \frac{1}{\not{p} - m_q} \Gamma^{\bar{\psi}\psi}(p)u(p) = iu(p) \quad (4.10)$$

In umfangreicher Rechnung kann man nun die Berechnungsvorschriften für die Counterterme herleiten (en détail in [13]). Es genügt zu wissen, dass man die Selbstenergie-Funktion in einen skalaren (S), pseudoskalaren (P), vektoriellen (V) und axialen (A) Teil aufspalten kann:

$$\Pi^{\bar{\psi}\psi}(p) = m_q \Pi_{(S)}^{\bar{\psi}\psi}(p) + \not{p} \Pi_{(V)}^{\bar{\psi}\psi}(p) + m_q \gamma^5 \Pi_{(P)}^{\bar{\psi}\psi}(p) + \not{p} \gamma^5 \Pi_{(A)}^{\bar{\psi}\psi}(p) \quad (4.11)$$

Es folgt dann aus den Renormierungsbedingungen:

$$\delta Z_m = \Pi_{(S)}^{\bar{\psi}\psi}(p)|_{p^2=m_q^2} + \Pi_{(V)}^{\bar{\psi}\psi}(p)|_{p^2=m_q^2} \quad (4.12)$$

$$\delta Z_\psi = -\Pi_{(V)}^{\bar{\psi}\psi}(p)|_{p^2=m_q^2} - 2m_q^2 \left( \frac{\partial \Pi_{(V)}^{\bar{\psi}\psi}(p)}{\partial(p^2)}|_{p^2=m_q^2} + \frac{\partial \Pi_{(S)}^{\bar{\psi}\psi}(p)}{\partial(p^2)}|_{p^2=m_q^2} \right) \quad (4.13)$$

Die Renormierbarkeit macht eine Quantenfeldtheorie wertvoll, da andernfalls ihre Vorhersagen unphysikalisch blieben. Während das Standardmodell renormierbar ist, gelingt die Quantisierung einer Feldtheorie bei Weitem nicht immer. Die

störungstheoretische Entwicklung der Einstein-Hilbert-Wirkung ist bis auf weiteres nicht renormierbar. Für eine stringente Quantengravitation sind offenbar die richtigen mathematischen Strukturen noch nicht gefunden.

### 4.1.3. Reelle Korrekturen: Die Beseitigung der IR-Divergenz

Während die UV-Divergenzen im Grenzfall  $q \rightarrow \infty$  auftreten, kann auch der Fall  $q \rightarrow 0$  zu Problemen führen (Infrarot-Divergenz), jedoch nur, wenn masselose Teilchen am Prozess beteiligt sind. Dies befreit uns schon einmal von der Notwendigkeit, die SUSY-QCD-Prozesse (massives Gluino) in Betracht zu ziehen. Benötigt wird hierbei aber keine Renormierung, sondern ganz ähnlich zur virtuellen Vertexkorrektur die Emission eines realen Teilchens. In der QED kann man diesen Effekt etwa mit der Bremsstrahlung gleichsetzen, wir betrachten aber eine Gluonenemission. Die Stärke in der Behandlung der IR mit reellen Korrekturen, welche auf Phasenraumintegrale führen, steckt mathematisch im folgenden Theorem [14] [15]:

**Theorem (Kinoshita, Lee und Nauenberg, 1964):** *Die perturbative Behandlung des Standardmodells als Ganzes führt auf IR-endliche Ergebnisse. Die Divergenzen der Schleifenintegrale werden durch Phasenraumintegrale in Gänze kompensiert.*

Diese besagten Phasenraumintegrale machen die Thematik der reellen Korrekturen recht umfänglich. Wurde zuvor bei der Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes eine recht einfache Integration der Form (3.19) durchgeführt, so liegen bei den Abstrahlungen  $2 \rightarrow 3$ -Prozesse vor, welche die Prozedur verkomplizieren. Die Berechnung der quadrierten und gemittelten Amplitude verläuft zunächst analog zu den vorherigen Berechnungen, jedoch muss sich dem Integrationsprozess nun genauer zugewandt werden: Im Falle gleicher Massen der eingehenden Teilchen können wir den totalen Wirkungsquerschnitt über

$$\int d\sigma = \frac{1}{F} \int |\bar{M}|^2 dPS^{(n)} \quad (4.14)$$

formulieren, der Vorfaktor  $\frac{1}{F} = \frac{1}{sv}$  heißt Flussfaktor,  $F$  kann nur im hier vorliegenden Spezialfall der gleichen Massen derart geschrieben werden, wobei  $v$  die relative Geschwindigkeit der beiden Teilchen darstellt. Typischerweise wird er über die Källén-Funktion  $\kappa$  (Anhang E.2.) ausgedrückt, sodass man folgende Formulierung findet:

$$F = 2\kappa(s, m_a^2, m_b^2) \quad (4.15)$$

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

Man findet hierin die Massen der eingehenden Teilchen  $a$  und  $b$ .

Das Integrationsmaß bildet nun das allgemeine Phasenraumelement  $dPS^{(n)}$  für einen  $2 \rightarrow n$ -Prozess mit  $n$  auslaufenden Impulsen  $p_k$  der Form

$$dPS^{(n)} = \left( \prod_{k=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_k}{2E_k (2\pi)^3} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_a + p_b - \sum_{k=1}^n p_k \right) \quad (4.16)$$

Die Diracsche  $\delta$ -Distribution ist offensichtlich für die Energie- und Impulserhaltung zuständig. Diese Integrale sind kompliziert, weswegen man zumeist einen numerischen Ansatz wählt. Es existieren jedoch generische Integrale, die eine analytische Herangehensweise erlauben. In der folgenden Nomenklatur wird der Gesamtimpuls der einlaufenden Teilchen als  $p_0$  bezeichnet, es läuft anschließend ein Quark-Paar mit den Impulsen  $p_1$  und  $p_2$  und gleichbezahlten Massen aus, das abgestrahlte Teilchen trage den Impuls  $q$ . Im Anhang (E.2.) findet man die expliziten Ausdrücke (aus [17]) der Integrale

$$I_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_m}(m_0, m_1, m_2) = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \frac{d^3 q}{2E_q} \delta(p_0 - p_1 - p_2 - q) \frac{(\pm 2qp_{j_1}) \dots (\pm 2qp_{j_m})}{(\pm 2qp_{i_1}) \dots (\pm 2qp_{i_n})} \quad (4.17)$$

Man kann somit  $\sigma$  komplett als Linearkombination dieser  $I_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_m}(m_0, m_1, m_2)$  formulieren, ohne selbst integrieren zu müssen, ähnlich wie bei der Tensorreduktion. Es ist jedoch zu beachten, dass diese Herangehensweise nur in sehr wenigen Spezialfällen auftritt. Eine analytische Lösbarkeit wird insbesondere dadurch gewährleistet, dass die auftretenden Skalarprodukte winkelunabhängig sind. Die explizite Berechnung dieser Integrale, um die auf die Ausdrücke in Anhang (E.2.) zu bringen, ist keineswegs trivial. Der analytische Ausdruck hat allerdings den Vorteil der eingesparten Rechenzeit.

Die entstehenden Polstellen im Falle  $q \rightarrow 0$  bringen Divergenzen mit sich, die durch die Einführung einer formalen Photonen- oder Gluonenmasse  $\lambda$  eliminiert werden können. Dies zeigt beispielsweise der Ausdruck

$$I_{00} = \frac{1}{4m_0^4} \left[ \kappa \ln \left( \frac{\kappa^2}{\lambda m_0 m_1 m_2} \right) - \kappa - (m_1^2 - m_2^2) \ln \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) - m_0^2 \ln \beta_0 \right] \quad (4.18)$$

welcher wegen  $\lambda$  offenkundig divergiert. Analog zu den Countertermen wird demzufolge die Singularität subtraktiv beseitigt. Aus den Integralen extrahiert man den Pol  $\ln(\lambda^2)$ , welcher mit den auftretenden Polen in den Passarino-Veltman-Integralen verrechnet wird. Deren explizite Gestalt findet man in der Tabelle zur IR-Divergenz in Anhang (E.1.).

## 4.2. Berechnung der NLO-Korrekturen

### 4.2.1. Vertexkorrekturen

Die Korrekturen werden sich stets in QCD und SUSY-QCD aufteilen und sind jeweils in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_S)$ , ein Faktor, der auf *tree level* nicht auftrat. Man kann ihn via

$$\alpha_S = \frac{g_S^2}{4\pi} \quad (4.19)$$

definieren mit der starken Kopplungskonstante  $g_S$ , welche in den Kopplungen in Anhang (B.3) auftaucht.

Das Vorgehen zur Berechnung des Gluonenaustausches (siehe Abb. 4.2) erfolgt völlig analog zu den Feynman-Regeln auf *tree level* -Niveau, nur treten nun zwei weitere Vertices bei der Quark-Gluon-Kopplung auf. Die so erhaltene Amplitude auf NLO-Niveau lässt sich typischerweise mit jener aus der *tree level* -Rechnung faktorisieren, was die spätere Implementierung wesentlich vereinfacht. An dieser Stelle sei angemerkt, dass sich die Rechnungen nur auf den Austausch des leichten ungeladenen Higgs-Bosons  $h^0$  fokussieren.

Die Berechnung der Amplitude erfordert eine Festlegung der Impulse per eigener Konvention. Das Gluon trage den Impuls  $q$ , sodass sich für jede gewählte Richtung der Impulse die anderen aus deren Erhaltung ergeben. Neben der Quark-Higgs-Kopplung (Anhang B.2.) wird nun die Kopplung der Quarks an das virtuelle Gluon als Vertexfaktor benötigt:

$$-ig_S \gamma^\mu T_{ij}^a \quad (4.20)$$

Zwischen den Vertices müssen die Quarks durch Propagatoren beschrieben werden, der fermionische Propagator (für einen allgemeinen Impuls  $p$ ) besitzt in Feynman-Eichung die Gestalt

$$\frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2} \quad (4.21)$$

Die Quarks propagieren innerhalb der Schleife im Rahmen der Impulskonvention mit den Impulsen  $q+p_c$  und  $q-p_d$ . Der Gluonenpropagator ist der gewöhnliche, für das Vektorboson bekannte Propagator. Um die Faktorisierung zu veranschaulichen, formulieren wir die Amplitude des gesamten Prozesses inklusive Staus. Man wählt einen Startpunkt der Schleife und integriert eine Umdrehung entgegen dem Fermionenfluss:

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

$$\mathcal{M}_{QCD}^V = \left( \frac{G_{111}^{\tilde{\tau}} s_2^q}{s - m_{h^0}^2} \right) \cdot \bar{u}(p_c) \cdot \frac{\mu^{\frac{4-D}{2}}}{16\pi^2} \int d^D q (g_S T^a \gamma^\mu) \left( \frac{\not{q} + \not{p}_c + m_q}{(q + p_c)^2 - m_q^2} \right) \quad (4.22)$$

$$\times \left( \frac{\not{q} - \not{p}_d + m_q}{(q - p_d)^2 - m_q^2} \right) (g_S T^a \gamma^\mu) \left( \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \right) v(p_d)$$

$$= \left( \frac{G_{111}^{\tilde{\tau}} s_2^q}{s - m_{h^0}^2} \right) \cdot \bar{u}(p_c) \mathcal{A}_{QCD}^V v(p_d) \quad (4.23)$$

Es gilt nun,  $\mathcal{A}_{QCD}^V$  mit den Passarino-Veltman-Integralen auszuwerten. Dazu lasse man den Nenner zunächst außer Acht und werte den Zähler mit den verschiedenen Identitäten für  $\gamma$ -Matrizen aus Anhang A aus. Das Ausschreiben der Feynmanschen Slash-Notation führt nach Ausmultiplikation auf:

$$Dm_q^2 + (2-D)m_q\gamma^\mu[(q-p_d)_\mu + (q+p_c)_\mu] + [4g^{\mu\nu} - (4-D)\gamma^\mu\gamma^\nu](q+p_c)_\mu(q-p_d)_\nu \quad (4.24)$$

Die Anzahl der  $q$  gibt Auskunft darüber, welche Stufe das Tensorintegral besitzt. Für einfaches oder gar kein Auftreten ist die Reduktion simpel. Die Verjüngung von  $C^{\mu\nu}$  ist umständlicher, sodass man sich für den einzigen Term mit  $q^2$  eines kleinen Tricks bedienen kann - man kürzt es direkt als  $B_0$ -Integral via Substitution:

$$C^{\mu\nu} = \int d^D q \frac{1}{((q+p_c)^2 - m_q^2)(p_d^2 - m_q^2)}, \quad \tilde{q} = q + p_c \Rightarrow B_0((p_c + p_d)^2, m_q^2, m_q^2) \quad (4.25)$$

Ferner wird der Rest als Linearkombination von  $C_{0,1,2}$  beschrieben, sodass am Ende bleibt:

$$\frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \left[ DB_0(s, m_q^2, m_q^2) + \sum_{i=0}^2 \zeta_i C_i(p_d^2, s, p_c^2, m_q^2, m_q^2, 0) \right] \quad (4.26)$$

$$\zeta_0 = Dm_q^2 + (D-2)m_q(\not{p}_d - \not{p}_c) - 4p_c \cdot p_d + (4-D)\not{p}_c \not{p}_d$$

$$\zeta_1 = 2(2-D)m_q \not{p}_c - 4m_q^2 - 4p_c \cdot p_d + (4-D)\not{p}_c \not{p}_d$$

$$\zeta_2 = -2(2-D)m_q \not{p}_d - 4p_c \cdot p_d + (4-D)\not{p}_c \not{p}_d - 4m_q^2$$

Der Ursprung der jeweiligen Farbfaktoren  $C_F$  wird in Anhang D beschrieben. Aus der Farbalgebra der QCD können alle nachfolgend auftretenden Farbfaktoren hergeleitet werden.

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

In diesem Falle zeigt (4.26) jedoch in Teilen eine andere kinematische Struktur als die des *tree level*, da die Slashes die Algebra bei der Auswertung beeinflussen. Um die Faktorisierung mit dieser Amplitude zu ermöglichen, formulieren wir sie in der Struktur:

$$P + Q(\not{p}_c + m_c) + R(\not{p}_d - m_d) + S(\not{p}_c + m_c)(\not{p}_d - m_d) \quad (4.27)$$

Man macht sich die Eigenschaft des Dirac-Operators aus der gleichnamigen Gleichung zunutze, dass er auf die Spinore  $\bar{u}(p_c)$  und  $v(p_d)$  angewandt diese verschwinden lässt. Es verbleibt nach geschicktem Umstellen demzufolge nur:

$$\mathcal{A}_{QCD}^V = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \left[ 4B_0(s, m_q^2, m_q^2) + (8m_q^2 - 2s)(C_1 + C_2) - 2sC_0 \right] \quad (4.28)$$

Dieser Ausdruck faktorisiert nun problemlos. Im Lichte der vorangegangenen Rechnung wird der kurzfristige Zerfall in zwei Squarks beschrieben: Diese tauschen ein Gluino aus und werden anschließend zu Quarks, damit sich der Gesamtprozess nicht ändert. Dieser Prozess hat die Visualisierung in Abb. 4.4:

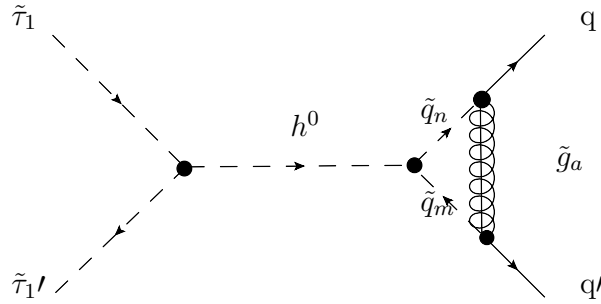


Abbildung 4.4.: Das  $h^0$  zerfällt kurzzeitig in zwei Squarks, die ein Gluino austauschen.

Während in der Arbeit die Flavour-Mischung über die CKM-Mischungsmatrix (nach Cabbibo, Kobayashi und Maskawa, welche zwischen Wechselwirkungs- und Massenbasis vermittelt) zu betrachten nicht notwendig war, sollte in SUSY-QCD jedoch die Mischung der Squarks berücksichtigt werden. Diese begegnete uns schon in der Einführung zum skalaren Tau, wo die Mischung ebenfalls über eine nicht-diagonale Matrix stattfindet. Die Stops und Sbottoms betrifft dies ebenso, sodass wiederum eine allgemeine Drehmatrix  $\mathbf{D}^{\tilde{q}}$  vorliegt:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{\tilde{q}} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\tilde{q}} & \sin \theta_{\tilde{q}} \\ -\sin \theta_{\tilde{q}} & \cos \theta_{\tilde{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

$\mathbf{D}^{\tilde{q}}$  diagonalisiert dabei die jeweilige Massenmatrix. Die Betrachtung der Higgs-Sfermion-Sfermion-Vertexfaktoren in Anhang (B.2.) offenbart, dass alle denkbaren Kombinationen von  $\tilde{q}_1$  und  $\tilde{q}_2$  für den  $h^0$ -Austausch infrage kommen. Man erhält demzufolge eine Summe aus vier Amplituden:

$$\mathcal{M}_{SUSY}^V = \sum_{m,n=1}^2 \mathcal{M}_{SUSY}^V(\tilde{q}_m, \tilde{q}_n) \quad (4.30)$$

Die Squark-Quark-Gluino-Kopplung hängt entscheidend von der Definition der Mischwinkel ab. Wir folgen der Konvention aus [20] und verwenden jene, die sich aus untigen Massenmatrizen ergeben.

$$\mathbf{M}_b^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{q}_3}^2 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W) M_Z^2 \cos 2\beta + m_b^2 & -m_b(A^{b*} + \mu \tan \beta) \\ -m_b(A^b + \mu^* \tan \beta) & m_b^2 - \frac{1}{3} M_Z^2 \cos 2\beta \sin^2 \theta_W + m_b^2 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{M}_t^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{q}_3}^2 + (\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W) M_Z^2 \cos 2\beta + m_t^2 & -m_t(A^{t*} + \mu \cot \beta) \\ -m_t(A^t + \mu^* \cot \beta) & m_t^2 - \frac{2}{3} M_Z^2 \cos 2\beta \sin^2 \theta_W + m_t^2 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Die auftretenden Größen sind bereits aus Kapitel 2 bekannt. Für die Kopplungen der Squark-Quark-Gluino-Vertices bediene man sich an den Faktoren aus Anhang B.3.

Man erhält als allgemeine Form der Amplitude (dem Gluino werde der Impuls  $q$  zugeschrieben):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{SUSY}^V(\tilde{q}_m, \tilde{q}_n) &= \left( \frac{G_{112}^{\tilde{r}} G_{mn2}^{\tilde{q}}}{s - m_{H^0}^2} \right) \bar{u}(p_c) \frac{\mu^{\frac{4-D}{2}}}{16\pi^2} \int d^D q (\sqrt{2} g_S T^a \\ &\times (D_{2n}^{\tilde{q}} P_L - D_{1n}^{\tilde{q}} P_R)) \left( \frac{\not{q} + m_{\tilde{g}}}{q^2 - m_{\tilde{g}}^2} \right) (\sqrt{2} g_S T^a (D_{2m}^{\tilde{q}} P_R - D_{1m}^{\tilde{q}} P_L)) \\ &\times \left( \frac{1}{(q - p_d)^2 - m_{\tilde{q}_m}^2} \right) \left( \frac{1}{(q + p_c)^2 - m_{\tilde{q}_n}^2} \right) v(p_d) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Bereits offensichtlich ist, dass die reduzierte Amplitude (Reduktion völlig analog zu QCD-Vertex) auf Passarino-Veltman-Integrale des Typs  $C$  führt. Wir lassen den Nenner außer Acht und werten den Zähler aus, wobei man sich die Kommutatorrelation der  $\gamma^5$ -Matrix zunutze macht, um die Projektionsoperatoren sinnvoll zusammenzufassen. Man findet mithilfe dessen nämlich beim Tausch des Squark-Quark-Gluino-Vertex mit  $\not{q}$ , dass sich ersterer zu

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

$$D_{2n}^{\tilde{q}} P_R - D_{1n}^{\tilde{q}} P_L \quad (4.34)$$

wandelt. Wir erhalten für die vier einzelnen Zähler schließlich:

$$Z[\tilde{q}_1, \tilde{q}_1] : m_{\tilde{g}}(\sin \theta_{\tilde{q}} P_L + \cos \theta_{\tilde{q}} P_R)(\sin \theta_{\tilde{q}} P_R + \cos \theta_{\tilde{q}} P_L) \\ + \not{q}(\cos \theta_{\tilde{q}} P_L + \sin \theta_{\tilde{q}} P_R)(\sin \theta_{\tilde{q}} P_R + \cos \theta_{\tilde{q}} P_L) \quad (4.35)$$

$$Z[\tilde{q}_1, \tilde{q}_2] : -m_{\tilde{g}}(\sin \theta_{\tilde{q}} P_L + \cos \theta_{\tilde{q}} P_R)(\cos \theta_{\tilde{q}} P_R - \sin \theta_{\tilde{q}} P_L) \\ - \not{q}(\cos \theta_{\tilde{q}} P_L + \sin \theta_{\tilde{q}} P_R)(\cos \theta_{\tilde{q}} P_R - \sin \theta_{\tilde{q}} P_L) \quad (4.36)$$

$$Z[\tilde{q}_2, \tilde{q}_1] : -m_{\tilde{g}}(\cos \theta_{\tilde{q}} P_L - \sin \theta_{\tilde{q}} P_R)(\sin \theta_{\tilde{q}} P_R + \cos \theta_{\tilde{q}} P_L) \\ + \not{q}(\sin \theta_{\tilde{q}} P_L - \cos \theta_{\tilde{q}} P_R)(\sin \theta_{\tilde{q}} P_R + \cos \theta_{\tilde{q}} P_L) \quad (4.37)$$

$$Z[\tilde{q}_2, \tilde{q}_2] : m_{\tilde{g}}(\cos \theta_{\tilde{q}} P_L - \sin \theta_{\tilde{q}} P_R)(\cos \theta_{\tilde{q}} P_R - \sin \theta_{\tilde{q}} P_L) \\ - \not{q}(\sin \theta_{\tilde{q}} P_L - \cos \theta_{\tilde{q}} P_R)(\cos \theta_{\tilde{q}} P_R - \sin \theta_{\tilde{q}} P_L) \quad (4.38)$$

Dies lässt sich nach länglicher Rechnung bei Ausnutzung der Idempotenz der Projektoren in die gesamte reduzierte Amplitude einfügen, die sich stark zum folgenden Ausdruck kürzt:

$$\mathcal{A}_{SUSY}^V = \frac{\alpha_S C_F}{2\pi} \left[ \frac{m_{\tilde{g}}}{2} \sin(2\theta_{\tilde{q}})(G_{111}^{\tilde{q}} C_0^{(11)} - G_{221}^{\tilde{q}} C_0^{(22)}) \right. \\ + \not{p}_c (G_{111}^{\tilde{q}} C_1^{(11)} + G_{221}^{\tilde{q}} C_1^{(22)} - G_{211}^{\tilde{q}} \frac{C_1^{(12)} + C_1^{(21)}}{2} \sin(2\theta_{\tilde{q}}) \gamma^5) \\ \left. - \not{p}_d (G_{111}^{\tilde{q}} C_2^{(11)} + G_{221}^{\tilde{q}} C_2^{(22)} - G_{211}^{\tilde{q}} \frac{C_2^{(12)} + C_2^{(21)}}{2} \sin(2\theta_{\tilde{q}}) \gamma^5) \right] \quad (4.39)$$

mit

$$C_i^{(mn)} = C_i(m_q^2, s, m_q^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_m}, m_{\tilde{q}_n}) \quad (4.40)$$

Die kinematische Struktur, die notwendig ist, damit die Korrektur-Amplitude mit dem Baumniveau faktorisiert, wird in Analogie zur QCD durch Ausnutzung der Dirac-Gleichung gewonnen.

#### 4.2.2. Selbstenergien: Counterterme

Im Folgenden werden die Counterterme, welche die UV-Divergenzen aus den Vertexkorrekturen beseitigen sollen, aus den Selbstenergietermen abgeleitet. Die

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

QCD-Selbstenergie in NLO des Quarks kann durch Auswertung des Feynman-Diagramms in 4.5 bestimmt werden.

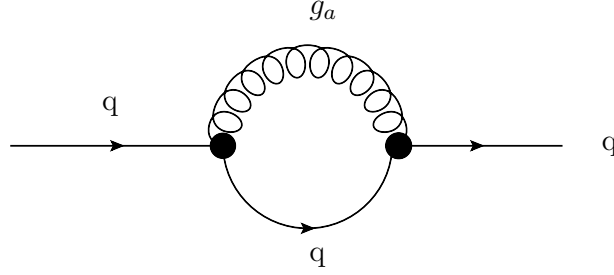


Abbildung 4.5.: QCD-Beitrag zur Quark-Selbstenergie.

Dafür erhalte das Gluon den Impuls  $q - p$ , also das Quark den Impuls  $q$ . Man erhält dementsprechend als reduzierte Amplitude:

$$\mathcal{A}_{QCD}^S = \frac{\mu^{\frac{4-D}{2}}}{16\pi^2} \int d^D q (g_S T^a \gamma^\mu) \left( \frac{\not{q} + m_q}{(q-p)^2 (q^2 - m_q^2)} \right) (g_S T^a \gamma^\mu) \quad (4.41)$$

Die Auswertung erfolgt schnell, man erhält

$$\mathcal{A}_{QCD}^S = -\frac{\alpha_S}{4\pi} C_F (D m_q B_0(p^2, 0, m_q) - (2-D) \not{p} B_1(p^2, 0, m_q)) \quad (4.42)$$

Die Counterterme werden gemäß den Gleichungen aus 4.1.2 berechnet:

$$\delta Z_m = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \left( (2-D) B_1(m_q^2, m_q^2, 0) - D B_0(m_q^2, m_q^2, 0) \right) \quad (4.43)$$

$$\delta Z_\psi = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \left( (D-2) B_1(m_q^2, m_q^2, 0) - 2m_q^2 \left[ (2-D) \dot{B}_1(m_q^2, m_q^2, 0) - D \dot{B}_0(m_q^2, m_q^2, 0) \right] \right) \quad (4.44)$$

Es wird verkürzt

$$\dot{B}_i = \frac{\partial B_i}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_q^2} \quad (4.45)$$

geschrieben.

Die Behandlung der SUSY-QCD-Selbstenergie ist wiederum umfangreicher, da die beiden Squarks berücksichtigt werden müssen. Das zugehörige Feynman-Diagramm sieht wie folgt aus (Abb. 4.6):

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

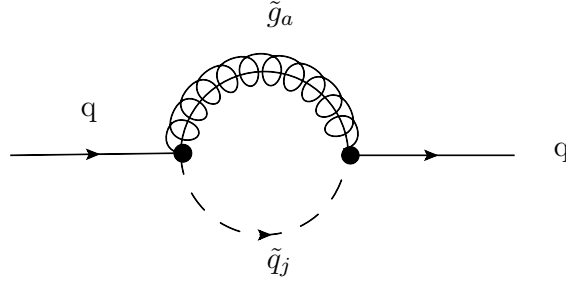


Abbildung 4.6.: SUSY-QCD-Beitrag zur Quark-Selbstenergie.

Die Entstehung der Squark-Gluino-Schleife führt zwei Amplituden mit sich (für die Squarks vom 1- und 2-Typ), welche analog zur Vertexkorrektur addiert werden. Man erhält die folgende reduzierte Amplitude, wenn das Gluino den Impuls  $q$  trägt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{SUSY}^S(\tilde{q}_n) &= \frac{\mu^{\frac{4-D}{2}}}{16\pi^2} \int d^D q (\sqrt{2}g_S T^a (D_{2n}^{\tilde{q}} P_L - D_{1n}^{\tilde{q}} P_R)) \left( \frac{\not{q} + m_{\tilde{g}}}{q^2 - m_{\tilde{g}}^2} \right) \\ &\times (\sqrt{2}g_S T^a (D_{2n}^{\tilde{q}} P_R - D_{1n}^{\tilde{q}} P_L)) \left( \frac{1}{(q-p)^2 - m_{\tilde{q}_n}^2} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Wie bei der SUSY-QCD-Vertexkorrektur können die Idempotenz und die Kommutatorrelationen für die Projektionsoperatoren angewandt werden, um nach einigen Schritten zum Ergebnis zu kommen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,2} \mathcal{A}_{SUSY}^S(\tilde{q}_n) &= \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F \left[ m_{\tilde{g}} \sin \theta_{\tilde{q}} \cos \theta_{\tilde{q}} (P_R + P_L) B_0(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_1}) \right. \\ &\quad - \not{p} (\sin^2 \theta_{\tilde{q}} P_L + \cos^2 \theta_{\tilde{q}} P_R) B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_1}) \\ &\quad - m_{\tilde{g}} \sin \theta_{\tilde{q}} \cos \theta_{\tilde{q}} (P_R + P_L) B_0(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_2}) \\ &\quad \left. - \not{p} (\cos^2 \theta_{\tilde{q}} P_L + \sin^2 \theta_{\tilde{q}} P_R) B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_2}) \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

Für die Counterterme nutzen wir die Definitionen der Projektionsoperatoren und filtern einen skalaren und vektoriellen Anteil heraus, wobei Additionstheoreme zum Einsatz kommen. Es folgt:

$$\mathcal{A}_{SUSY}^{S(s)} = \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F \frac{m_{\tilde{g}}}{2m_q} \sin(2\theta_{\tilde{q}}) \left( B_0(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_1}) - B_0(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_2}) \right) \quad (4.48)$$

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

$$\mathcal{A}_{SUSY}^{S(v)} = -\frac{\alpha_S}{2\pi} C_F \left( B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_1}) + B_1(p^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_2}) \right) \quad (4.49)$$

Einsetzen in die Gleichungen (4.12/4.13) liefert unsere Counterterme:

$$\delta Z_m = \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F \left[ \frac{m_{\tilde{g}}}{2m_q} \sin(2\theta_{\tilde{q}}) \left( B_0(m_q^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_1}) - B_0(m_q^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_2}) \right) - \left( B_1(m_q^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_1}) + B_1(m_q^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_2}) \right) \right] \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \delta Z_\psi = \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F & \left[ B_1(m_q^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_1}) + B_1(m_q^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_2}) \right. \\ & - m_q m_{\tilde{g}} \sin(2\theta_{\tilde{q}}) \left( \dot{B}_0(m_q^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_1}) - \dot{B}_0(m_q^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_2}) \right) \\ & \left. + 2m_q^2 \left( \dot{B}_1(m_q^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_1}) + \dot{B}_1(m_q^2, m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}_2}) \right) \right] \quad (4.51) \end{aligned}$$

Es verbleibt anschließend zu überprüfen, inwieweit sich die UV-Divergenzen aufheben mit jenen, die die Berechnungen in (4.2.2) ergeben haben. Die Beseitigung der Infrarot-Divergenzen kann nun durch die nachfolgende Rechnung erfolgen.

#### 4.2.3. Reelle Korrekturen

Die bestehenden Infrarot-Divergenzen können wie beschrieben durch die Addition der reellen Korrekturen in Form von Gluonenabstrahlung vermieden werden. Erneut sei darauf hingewiesen, dass nur masselose Teilchen abgestrahlt werden, sodass der SUSY-QCD-Beitrag aufgrund der Gluinomasse obsolet wird. Beide Quarks können hingegen ein Gluon abstrahlen, sodass in die endgültige Amplitude  $M^{(a)}$  und  $M^{(b)}$  eingehen. Visualisiert sind dies die untigen Diagramme (Abb. 4.7):

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

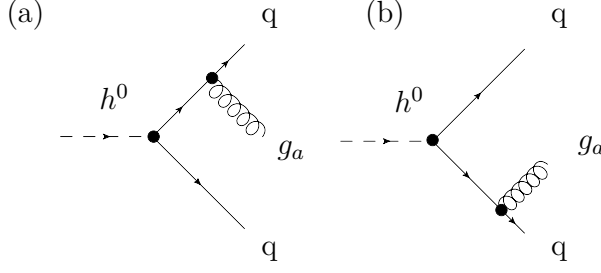


Abbildung 4.7.: Reelle Korrekturen - die Abstrahlung eines Gluons. Die beiden Szenarien (a) und (b) gehen additiv in die Korrekturterme ein.

Hier verlässt man die Schleifenintegrale und fasst den Prozess als  $2 \rightarrow 3$ -Prozess auf *tree level* auf, der wie üblich mit Feynman-Regeln ausgewertet wird. Es sei bemerkt, dass die Berechnungen recht länglich sind und nur markante Punkte auf dem Weg zum Endergebnis skizziert werden. Neu ist hierbei das Auftreten eines reellen Vektorbosons, welches als Polarisationsvektor  $\epsilon^\mu$  behandelt werden muss. Ähnlich zum Dirac-Spinor haben wir hier eine Größe, bei der über alle Polarisierungen  $\sigma$  des Vektorbosons summiert werden muss, welchem der Impuls  $p_e$  zugeordnet werde. Für das auslaufende Gluon benötigt man  $\epsilon^{\mu*}(p_e, \sigma)$ , für welches in Lorenz-Eichung bei der gemittelten Quadratur

$$\sum_{\sigma} \epsilon^\mu(p_e, \sigma) \epsilon^{\nu*}(p_e, \sigma) = -g^{\mu\nu} \quad (4.52)$$

gilt. Somit können wir als Amplituden schreiben:

$$\mathcal{M}_R^{(a)} = \frac{G_{111}^{\tilde{\tau}} s_2^q}{s - m_{h^0}^2} g_S T^a \bar{u}(p_c) \gamma_\mu \frac{(\not{p}_c + \not{p}_e) + m_q}{(p_c + p_e)^2 - m_q^2} v(p_d) \epsilon^{\mu*}(p_e, \sigma) \quad (4.53)$$

$$\mathcal{M}_R^{(b)} = \frac{G_{111}^{\tilde{\tau}} s_2^q}{s - m_{h^0}^2} g_S T^a \bar{u}(p_c) \frac{-(\not{p}_d + \not{p}_e) + m_q}{(p_d + p_e)^2 - m_q^2} \gamma_\mu v(p_d) \epsilon^{\mu*}(p_e, \sigma) \quad (4.54)$$

Dabei wurden die Quarks zwischen den Vertices als fermionische Propagatoren aufgefasst, jegliche Kopplungen sind schon aus früheren Berechnungen bekannt. Die Quadratur führt auf drei Summanden (die zwei Interferenzterme können zu einem zusammengefasst werden, da reell).

$$|\mathcal{M}_R^{(a)}|^2 = -C_F \left( \frac{G_{111}^{\tilde{\tau}} s_2^q}{s - m_{h^0}^2} g_S T^a \right)^2 \frac{1}{((p_c + p_e)^2 - m_q^2)^2} \quad (4.55)$$

$$\times \text{Tr}[(\not{p}_c + m_q) \gamma_\mu (\not{p}_c + \not{p}_e + m_q) (\not{p}_d - m_q) (\not{p}_c + \not{p}_e + m_q) \gamma^\mu]$$

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

$$|\mathcal{M}_R^{(b)}|^2 = -C_F \left( \frac{G_{111}^{\tilde{\tau}} s_2^q}{s - m_{h^0}^2} g_S T^a \right)^2 \frac{1}{((p_d + p_e)^2 - m_q^2)^2} \quad (4.56)$$

$$\times \text{Tr}[(\not{p}_c + m_q)\gamma_\mu(-\not{p}_d - \not{p}_e + m_q)(\not{p}_d - m_q)\gamma^\mu(-\not{p}_c - \not{p}_e + m_q)]$$

$$\mathcal{M}_R^{(a)} \mathcal{M}_R^{(b)} = -C_F \left( \frac{G_{111}^{\tilde{\tau}} s_2^q}{s - m_{h^0}^2} g_S T^a \right)^2 \frac{1}{((p_c + p_e)^2 - m_q^2)((p_d + p_e) - m_q^2)} \quad (4.57)$$

$$\times \text{Tr}[(\not{p}_c + m_q)\gamma_\mu(\not{p}_c + \not{p}_e + m_q)(\not{p}_d - m_q)\gamma^\mu(-\not{p}_d - \not{p}_e + m_q)]$$

Nun kann der Ausdruck mithilfe der Integrale aus (E.2.) zu einem totalen Wirkungsquerschnitt umgeformt werden. Man beachte für eine sinnvolle Umformung in zunächst, dass  $p_e^2 = m_g^2 = 0$  und  $p_c^2 = p_d^2 = m_q^2$ . Die Spurauswertung führt zudem auf Skalarprodukte, die in den  $I_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_m}(m_0, m_1, m_2)$  nicht vorgesehen sind, wie etwa  $p_{(c)}^\mu p_\mu^{(d)}$ . Dazu betrachte man den Prozess formell als  $1 \rightarrow 3$ -Prozess, wobei das einlaufende Teilchen die Masse  $m_0$  besitze. Man kann daraus auf einfache Weise die Relation

$$p_c \cdot p_d = \frac{s}{2} - m_q^2 - p_c p_e - p_d p_e \quad (4.58)$$

herleiten. Die Auswertung der Spuren durch *FeynCalc* kann daraufhin auf folgende Weise umgeformt werden (Vorfaktoren seien zwecks Abkürzung schlicht als  $\Lambda$  bezeichnet):

$$|\mathcal{M}_R^{(a)}|^2 = \frac{16\Lambda(p_c p_e \cdot p_d p_e + (p_c p_e + m_q^2 - p_d p_e - p_c p_d)m_q^2)}{(p_c p_e)^2} \quad (4.59)$$

$$|\mathcal{M}_R^{(b)}|^2 = \frac{16\Lambda(p_c p_e \cdot p_d p_e + (p_d p_e + m_q^2 - p_c p_e - p_c p_d)m_q^2)}{(p_d p_e)^2} \quad (4.60)$$

$$\mathcal{M}_R^{(a)} \mathcal{M}_R^{(b)} = \frac{16\Lambda(p_c p_d(p_c p_e + p_d p_e - m_q^2) + 2p_c p_e \cdot p_d p_e + 2(p_c p_d)^2 - 2m_q^2(p_c p_e + p_d p_e))}{(p_c p_e)(p_d p_e)} \quad (4.61)$$

Ausgedrückt via  $I_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_m}(m_0, m_1, m_2)$  ergibt sich als Endergebnis aller reellen Korrekturen durch Gluonenaustausch:

$$\sigma_R^{ges} = \int d\sigma = \frac{1}{F} \int |\mathcal{M}_R^{(a)} + \mathcal{M}_R^{(b)}|^2 dPS^{(3)} \quad (4.62)$$

Wir können  $F$  durch  $2\kappa(s, m_q^2, m_q^2)$  ausdrücken (Näheres im Anhang zum Flussfaktor und zu  $\kappa$ ), ferner muss beachtet werden, dass  $dPS^{(3)}$  aus (4.16) nicht exakt

#### 4. Berechnung von NLO-Korrekturtermen

mit den  $I_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_m}(m_0, m_1, m_2)$  übereinstimmt, sondern diese einen Vorfaktor  $1/32\pi^2$  benötigen, sodass man erhält:

$$\begin{aligned} \sigma_R^{ges} = C_F & \left( \frac{G_{111}^{\tilde{\tau}} s_2^q}{s - m_{h^0}^2} g_S T^a \right)^2 \cdot \frac{2}{32\pi^3} \cdot \frac{1}{F} \cdot (2m_q^2(2s - 8m_q^2) \\ & \times (I_{11} + I_{22}) - 8m_q^2(I_1 + I_2) - 4(I_1^2 + I_2^1) + 8(s - m_q^2)I_1 \\ & - 8(4s - 8m_q^2)I_2 + I_{12}(12m_q^2s - 16m_q^4 - s^2)) \end{aligned} \quad (4.63)$$

### 4.3. Einbindung aller Korrekturen in den Wirkungsquerschnitt

Bei sämtlichen Berechnungen konnten wir die Faktorisierung mit der *tree level*-Amplitude ausnutzen. Wird diese quadriert, werden natürlich diejenigen Korrekturterme, die dann mit  $\mathcal{O}(\alpha_S^2)$  eingehen, nicht berücksichtigt, da wir nach wie vor in erster Ordnung korrigieren. Bei den Countertermen muss beachtet werden, dass die Amplitude einfach die Quarkmasse und zweifach die Quark-Wellenfunktion beinhaltet (betrachte QCD-Lagrangedichte in Anhang C), weswegen auch der Counterterm in dieser Anzahl auftritt. Es verbleibt:

$$|\mathcal{M}_{ges}|^2 = |\mathcal{M}_{ges}^{LO}|^2 + |\mathcal{M}_{h^0}^{LO}|^2 (2\mathcal{A}_{QCD}^V + 2\mathcal{A}_{SUSY}^V + 2\delta Z_m + 2\delta Z_\psi) + |\mathcal{M}_{ges}^R|^2 \quad (4.64)$$

Gewissermaßen wurde damit nur der Kopplungsfaktor der Higgs-Quark-Quark-Kopplung modifiziert, was die Implementierung leichter gestaltet. Die Korrektur geht im Übrigen nur in den quadratischen  $h^0$ -Term ein, alle Interferenzen der anderen Austauscheteilchen mit dem schweren skalaren Higgs-Bosons bleiben unkorrigiert.

# 5. Dunkle Materie: Grundlagen und Methoden

## 5.1. Das dunkle Universum

Mit seinen berühmten Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (5.1)$$

schuf Albert Einstein das Fundament der modernen Kosmologie. Mit dem Einstein-Tensor  $G^{\mu\nu}$ , einem rein differentialgeometrischen Objekt, und dem Energie-Impuls-Tensor  $T^{\mu\nu}$  wird die Geometrie der Raumzeit mit ihrem Materie-/Energieinhalt verknüpft und damit die Gravitation geometrisch interpretiert: Die Massen diktiert dem Raum, wie er sich krümmen soll, wobei er seinerseits den Massen diktiert, wie sie sich bewegen sollen, fasst es J.A. Wheeler vortrefflich dezidiert zusammen. Die Elemente der ART sind wesentlich komplizierter als es den Anschein hat - die grundlegende Idee sollte nur kurz präsentiert werden, um die einige weiterführende Inhalte besser zu verstehen.

Die Dynamik unseres Universums wird im Wesentlichen durch dessen Massen- bzw. Energiedichte  $\rho$ , teilweise auch  $\Omega$ , bestimmt; die Strukturbildung im Universum durch die Massenverteilung. Die Einsteinschen Feldgleichungen und deren Lösungen lassen drei mögliche Formen des Universums zu (genauer: die Robertson-Walker-Metrik), oberhalb einer kritischen Dichte  $\rho_c$  ist es sphärisch gekrümmt (die Krümmung  $K$  wird 1), unterhalb hyperbolisch ( $K = -1$ ). Messungen legen nahe, dass für uns der dritte Fall zutrifft und ein euklidischer (dreidimensional flacher) Kosmos der unsrige ist, sodass  $\rho = \rho_c$ . Zunächst scheint die Kosmologie auf sicheren Beinen zu stehen. Dies ändert sich durch die Feststellung, dass die gewöhnliche baryonische Materie nur  $(0,044 \pm 0,0017) \Omega$  [26] ausmacht. Es ist regelrecht frappierend, dass nur knapp 5 Prozent der Masse des Universums bekannt sind! Wie gleich zu sehen, gibt es gute Gründe, dass wesentlich mehr Materie im Universum vorliegt als sichtbare - es etablierte sich der Begriff der dunklen Materie. Addiert man diesen Anteil hinzu, erhält man jedoch lediglich  $(0,308 \pm 0,012) \Omega$ . Über den Rest ist noch weniger bekannt, man geht nur davon aus, dass diese sogenannte Dunkle Energie für die 1998 beobachtete beschleunigte Expansion des

## 5. Dunkle Materie: Grundlagen und Methoden

Universums verantwortlich sein muss, indem sie antigravitativ wirkt. Man drückt diese durch die Kosmologische Konstante  $\Lambda$  aus, die zunächst Einstein einführte, um ein statisches Universum zu konstruieren. Er verwarf nach der Entdeckung dessen Expansion diese jedoch, und erst im Zuge des Aufkommens der Dunklen Energie wurde sie wieder populär. Die Dynamik des Universums ist durch die Friedmann-Lemaître-Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$p$  ist hierbei der Druck des kosmischen Substrats,  $a$  der Skalenfaktor, der die relative Größenordnung des Kosmos beschreibt (Anm.: Die Energiedichteverteilungen werden typischerweise mit  $\Omega$  bezeichnet, die gesamte Energiedichte in obigen Gleichungen eher mit  $\rho$ ). Im Übrigen kann man  $\frac{\dot{a}}{a}$  mit der Hubble-Konstante  $H = 67,89 \frac{\text{km}}{\text{Mpc}\cdot\text{s}}$  identifizieren. Ein beschleunigt expandierendes Universum ist eine Lösung für eine positive Kosmologische Konstante. Zusammen mit der (kalten, nur gravitativ und schwach wechselwirkenden) Dunklen Materie liegt nun das  $\Lambda$ -CDM-Modell (für *cold dark matter*) vor - in Analogie zum SM ist es eine Art Standardmodell der Kosmologie, definiert über einige Konstanten wie  $H$  oder die verschiedenen  $\Omega$ , das sich mit den Beobachtungen deckt. Doch das Problem ist offenkundig - die Natur der Namensgeber dieses Modells ist bis dato völlig unbekannt, womit die großen Fragen der Kosmologie noch offen sind! Während die Dunkle Energie eher zwecks Vollständigkeit erwähnt wurde, soll sich nun der Dunklen Materie detaillierter zugewandt werden, da die SUSY zum einen Kandidaten für sie liefern könnte, zum anderen auch das skalare Tau (obgleich selbst keine dunkle Materie) im frühen Universum die Dunkle Materie beeinflusst haben mag. So nebulös diese zunächst auch scheinen mag, Hinweise auf deren Existenz gab es bereits sehr früh.

Mit großer Skepsis begegnete man zunächst 1933 den Beobachtungen des Schweizer Astronomen Fritz Zwicky über den Coma-Haufen, einem Galaxienhaufen, dessen einzelnen Galaxien sich mit solcher Geschwindigkeit bewegen, dass nur das etwa 400-Fache der sichtbaren Materie den Coma-Haufen gravitativ zusammenhalten könnte [5]. Mit den Beobachtungen Vera Rubins ab 1960 über die Rotationskurven von Galaxien verdichteten sich die Hinweise: Weit vom Galaxienzentrum entfernte Sterne umkreisen dieses mit viel zu hoher Geschwindigkeit, als es die sichtbare Masse erlauben würde. Ein bemerkenswertes Indiz zur Existenz der Dunklen Materie von 2006 [25] betrifft u.a. den Gravitationslinseneffekt: Die durch Gravitation gekrümmte Raumzeit infolge der Feldgleichungen (5.1) kann

## 5. Dunkle Materie: Grundlagen und Methoden

den Lichtweg analog zu einer optischen Linse krümmen. Große Massen, die nicht direkt detektierbar sind, verraten sich indirekt über ihre Linsenwirkung auf die Raumzeit. Aber auch die Untersuchung des intergalaktischen Gases gegenüber den Galaxien gibt ohne Dunkle Materie Rätsel auf.

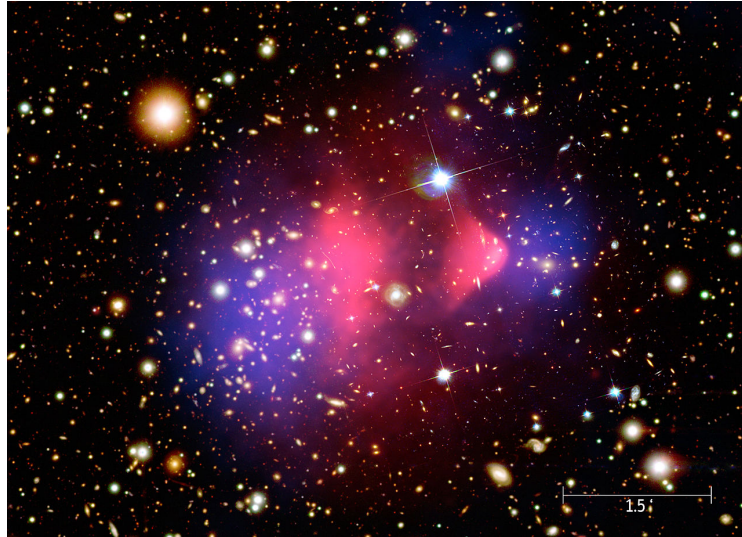


Abbildung 5.1.: Überlagerung vom sichtbaren Spektrum mit der pink gefärbten Röntgenemission des intergalaktischen Plasmas und dem blauen Gravitationspotential, die sich aus den Linseneffekten ergeben [24].

Das sogenannte Bullet-Cluster (formell: 1E 0657-558) aus Abb. 5.1 zeigt zwei Galaxienhaufen, welche vor etwa 100 Millionen Jahren kollidierten und nun auseinanderdriften. Das intergalaktische Medium wechselwirkte bei dieser Kollision und verlangsamte sich (und strahlte die nachweisbare Strahlung ab). Es hat sich seitdem weniger fortbewegt als die Galaxienhaufen, dennoch zeigen die blauen Gravitationslinseneffekte die höchste Massendichte bei den Galaxienhaufen. Man muss schlussfolgern, dass diese Dunkle Materie beinhalten, welche wie die Galaxien selbst und im Gegensatz zum intergalaktischen Gas von der Kollision unbeeinträchtigt wäre. Ohne diese stünde die erwartbare Massenverteilung im Widerspruch zu den Gravitationslinsen.

### 5.2. Kandidaten für Dunkle Materie

Zugegebenermaßen ist die Natur der Dunklen Materie (Stand 2018) ein großes Rätsel. Aus ihrem Terminus geht unmittelbar hervor, dass mögliche Objekte nicht

## 5. Dunkle Materie: Grundlagen und Methoden

elektromagnetisch wechselwirken. Dies kann natürlich zunächst baryonische Materie sein, die keine bzw. zu wenig Strahlung emittiert wie kalte Gase oder Staubwolken. Auch zählen dazu die MACHOs (*massive astrophysical compact halo objects*), wie etwa Braune Zwerge als Sterne ohne Fusionsreaktionen. Doch leicht zeigt sich, dass dieser Teil der Dunklen Materie unwesentlich sein muss und auf nicht-baryonische Alternativen zurückgegriffen werden muss. Die CDM wird hierbei durch sogenannte WIMPs (*weakly interacting massive particles*) repräsentiert, deren Eigenschaften selbsterklärend sind. Das zuvor eingeführte LSP, wahrscheinlich scheint das leichteste Neutralino  $\chi_1^0$ , ist ein ernstzunehmender Kandidat. Andere Überlegungen führen schnell auf Widersprüche: Die Strukturbildung im Universum ist erwiesenermaßen hierarchisch (bottom-up-Szenario), sodass sich zunächst einzelne Sterne bildeten und anschließend Galaxien und Cluster. Ein attraktiver Kandidat wäre natürlich das Neutrino, man spricht hierbei von *hot dark matter* (HDM), doch der Einfluss der Dunklen Materie auf die Strukturbildung hätte im Falle schneller, heißer Teilchen zunächst auf großen Skalen gewirkt (top-down-Szenario). Auch das sogenannte Axion als möglicher Kandidat steht auf wackligen Beinen: Es würde erklären, warum die QCD eine CP-Invarianz aufweist, doch beobachtet wurde es keineswegs. Offenbar kann man derzeit die größten Hoffnungen in die SUSY setzen.

Nichtsdestoweniger sei abschließend auf die Untersuchungen von P. Kroupa [23] hingewiesen, welche das CDM-Modell infrage stellen sollen. Die Forscher der Universität Bonn untersuchten Galaxien der Lokalen Gruppe und konnten den Effekt, dass Galaxien mit viel Dunkler Materie heller leuchten müssen (sie ziehen mehr baryonische Materie zu sich), nicht finden. Es wurden bereits in den 80er Jahren Theorien vorgeschlagen, die einen anderen Weg der Erklärung suchen, etwa die modifizierte Newtonsche Dynamik (MOND) [18]. Das letzte Wort über die Dunkle Materie ist damit noch längst nicht gesprochen.

### 5.3. Beobachtende Kosmologie: Hintergrundstrahlung

Eine der besten Möglichkeiten zur Untersuchung der Struktur des frühen Universums ist die Messung der kosmischen Hintergrundstrahlung. Sie entstand beim Rekombinationsprozess im noch jungen Universum, als die Temperatur nach 380.000 Jahren auf etwa 3000 K absank und die Bildung stabilen Wasserstoffs durch freie Elektronen und Protonen ermöglichte. Es lag nun keine dauerhafte Thomson-Streuung mehr vor, sodass das Universum gewissermaßen sichtbar wurde und das thermische Gleichgewicht von Strahlung und Materie aufgehoben wurde. Es entstand die Hintergrundstrahlung/CMB (für *cosmic microwave background*) mit

## 5. Dunkle Materie: Grundlagen und Methoden

dem Spektrum eines schwarzen Strahlers. Die anschließende Expansion gemäß (5.2) ließ die Hintergrundstrahlung auf etwa 2,7 K abkühlen. Sie lieferte einen starken Nachweis der Urknalltheorie, welcher zuerst (übrigens rein zufällig) durch Arno Penzias und Robert W. Wilson 1964 gelang und mit einem Nobelpreis belohnt wurde (1978). Durchschnittlich 400 Photonen der CMB findet man in jedem Kubikzentimeter des Universums, sodass das oft pathetisch als Echo des Urknalls bezeichnete Strahlungsspektrum noch immer empirisch zugänglich ist. Heutzutage lassen die winzigen Anisotropien im Strahlungsbild Rückschlüsse auf verschiedenste physikalische Prozesse und Parameter hoher Relevanz zu.

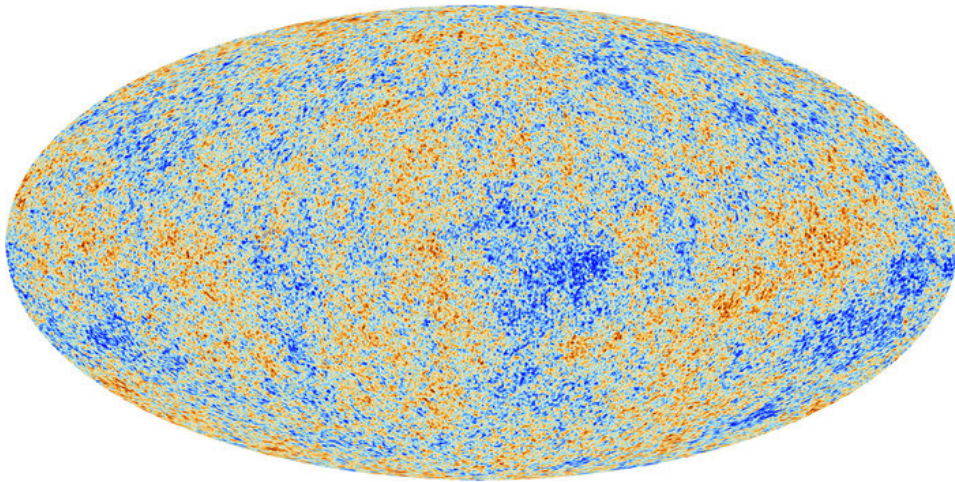


Abbildung 5.2.: Die CMB-Anisotropien, vermessen durch den Planck-Satelliten [22].

Zu Beginn der Arbeit wurde die herausragende Bedeutung von Symmetrien für die Physik angesprochen, doch alle Perfektion hat ihre Grenzen - dankbarerweise. Kleinste Abweichungen von Perfektion und Harmonie ermöglichten erst die Existenz jener, die heute darüber sinnieren. Zu nennen ist einerseits die berühmte Baryonenasymmetrie, zum anderen die Temperaturanisotropie in der CMB, welche lediglich etwa  $60 \mu\text{K}$  beträgt. Aus ihr entstanden lokale Dichteschwankungen, die im weiteren Verlauf die Entstehung großräumiger Strukturen wie Galaxien und Galaxienhaufen ermöglichten. Eine Nachbildung dieses Prozesses gelang über die sogenannte Millenium-Simulation [19]. Doch bestimmte Methodiken erlauben auch die Bestimmung der Dichte von baryonischer und Dunkler Materie - die oben erwähnten Daten aus dem  $\Lambda$ -CDM-Modell entstammen aus derartigen Untersuchungen [26].

Die Präzision der Anisotropie-Messungen nahm in den letzten Jahren beträchtlich zu. Der COBE (*Cosmic Background Explorer*) brachte 1992 die ersten Messda-

## 5. Dunkle Materie: Grundlagen und Methoden

ten, die Mission WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) machte die Daten wesentlich präziser. State of the Art sind die jüngsten Daten des Planck-Weltraumteleskops (bis 2013), welche auch das Fundament der später noch zu diskutierenden Reliktdichte bilden. Es sei angemerkt, dass Dunkle Materie (sofern sie nach gemäß gängigen Modellen tatsächlich nicht elektromagnetisch wechselwirkt), die Anisotropien nicht beeinflusst. Die obige Abb. 5.2 zeigt die Ergebnisse der Planck-Mission, Abb. 5.3 gibt Auskunft über das respektable Anwachsen der Messgenauigkeit über die drei angesprochenen Missionen hinweg.

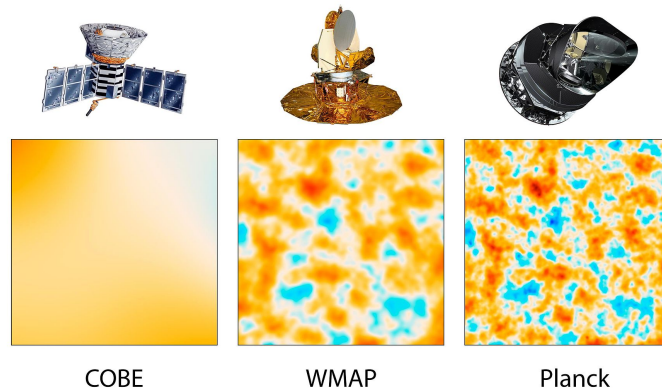


Abbildung 5.3.: Die Zunahme an Präzision bei der Vermessung der Anisotropien in der CMB [21].

Vor diesem Hintergrund können nun Kosmologie und Quantenfeldtheorie zusammengeführt werden - in der Berechnung der Reliktdichte zeigt sich der Nutzen der berechneten Wirkungsquerschnitte für die Erforschung der Zusammensetzung des Universums.

## 6. Zur Reliktdichte

### 6.1. Die Boltzmann-Gleichung

In der Statistischen Physik hat sich die Boltzmann-Gleichung in den verschiedensten Bereichen etabliert und entstammt ursprünglich der kinetischen Gastheorie. Anwendung findet sie im Bereich der Dunklen Materie, wenn quantitativ die Teilchendichte  $n$  eines bestimmten Gegenstandes der quantenfeldtheoretischen Untersuchung über die Evolution des Universums hinweg bestimmt werden soll. Im sehr frühen Universum wird ein thermisches Gleichgewicht der Prozesse angenommen. Die Abkühlung aufgrund der Expansion mit der Hubble-Konstante  $H$  bewirkt eine Verschiebung dieses Gleichgewichtes, sodass im vorliegenden Fall mehr  $\tilde{\tau}$  annihilieren, als generiert werden - die Teilchendichte sinkt. Wenn die Expansionsrate die Annihilationsrate übersteigt, beginnt der Prozess des Ausfrierens: Bildlich gesprochen wird die Vernichtung dadurch gehemmt, dass die Teilchen sich zu schnell voneinander entfernen, um den Prozess durchführen zu können. Es bleibt eine Reliktdichte übrig, die das empirische Fundament dieser Untersuchung bildet.

Die qualitative Dimension werde nun in eine Gleichung übersetzt. Die Verwendung des zuvor in Kapitel 5 eingeführten Skalenfaktors  $a$  berücksichtigt die Expansion und damit das Abklingen der Dichte  $n_{\tilde{\tau}}$ . Zur Bezeichnung der Dichte im thermischen Gleichgewicht sei  $n_{\tilde{\tau}}^{EQ}$  eingeführt. Der thermisch gemittelte Wirkungsquerschnitt  $\langle\sigma v\rangle$  bringt nun die zuvor berechneten Prozesse ins Spiel. Man erhält die auf das Problem zugeschnittene Boltzmann-Gleichung:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(na^3)}{dt} = \langle\sigma v\rangle [(n_{\tilde{\tau}}^{EQ})^2 - n_{\tilde{\tau}}^2] \quad (6.1)$$

Der Einfluss des Hubble-Parameters ist besser ersichtlich, wenn man die Ableitung ausführt, sodass man  $\dot{n} + 3Hn = \langle\sigma v\rangle [(n_{\tilde{\tau}}^{EQ})^2 - n_{\tilde{\tau}}^2]$  erhält. Die Einführung dimensionsloser Größen erweist sich als sinnvoll:

$$Y := \frac{n_{\tilde{\tau}}}{T^3} = \frac{n_{\tilde{\tau}}}{s} \quad x := \frac{m}{T} \quad (6.2)$$

Die Transformation der Differentiale liefert ohne Aufwand

$$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{x^2} \frac{s(m)}{H(m)} \langle\sigma v\rangle [(Y_{\tilde{\tau}}^{EQ})^2 - Y_{\tilde{\tau}}^2] \quad (6.3)$$

## 6. Zur Reliktdichte

Man erinnere sich an die Friedmann-Lemaître-Gleichungen (5.2). Die Auswertung von  $H(m)$  gelingt bei Nichtberücksichtigung von Krümmung und kosmologischer Konstante und in dem Wissen, dass die Massendichte im strahlungsdominierten Universum durch  $\rho(T) = \frac{\pi^2}{30}g_*T^4$  ausgedrückt werden kann.  $s$  können wir ohne weiteren Kommentar als Konversionsfaktor  $\frac{2\pi^2}{45}g_*T^3$  angeben (per Konvention, wir folgen [6]). Wir können uns nun  $\lambda := \frac{s(m)}{H(m)}\langle\sigma v\rangle_0$  definieren (wobei der Wirkungsquerschnitt nun als  $\langle\sigma v\rangle = \langle\sigma v\rangle_0x^{-n}$  entwickelt werde), welches uns ein Verhältnis zwischen Annihilation und Expansion gibt. Die Teilchendichte im Gleichgewicht sinkt in Folge der Expansion, was mit einem thermischen Suppressionsfaktor berücksichtigt wird:

$$Y_{\tilde{\tau}}^{EQ} = \frac{n_{\tilde{\tau}}^{EQ}}{s} = ax^{3/2}e^{-x} \quad a = \frac{g}{g_*} \cdot \frac{45}{2\pi^4} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \quad (6.4)$$

Hierbei ist  $g$  die Anzahl der Freiheitsgrade des Teilchens. Die endgültig zu lösende Gleichung ist typischerweise mittels  $y = \lambda Y$  die untenstehende.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^{2+n}}[y_{\tilde{\tau}}^2 - (y_{\tilde{\tau}}^{EQ})^2] \quad y^{EQ} = 0.192 \cdot \frac{gm}{\sqrt{g_*8\pi G}}\langle\sigma v\rangle_0x^{3/2}e^{-x} \quad (6.5)$$

Im Rahmen des im Folgenden vorzustellenden Projektes bzw. Programms wird die Boltzmann-Gleichung (zwangsläufig) numerisch gelöst; ein Verfahren, dessen Hintergrund nicht Teil der Arbeit ist. Es wurde bereits in früheren Arbeiten entwickelt. Die Integration ergibt anschließend einen charakteristischen Verlauf einer Startgröße, welche durch die Annihilationsprozesse abfällt und anschließend durch die zunehmende Größe des Universums stoppt und ein Plateau erreicht. Man spricht vom Ausfrieren der Reliktdichte. Abb. 6.1 zeigt schematisch einen solchen Graphen, der aus Gleichung (6.5) den Plot  $y(x)$  widerspiegelt. Es zeigt sich die Abhängigkeit der Teilchendichte vom Wirkungsquerschnitt - wie intuitiv erwartbar, verzögert ein hoher Wert das Ausfrieren, sodass am Ende weniger Teilchen übrig bleiben:

## 6. Zur Reliktdichte

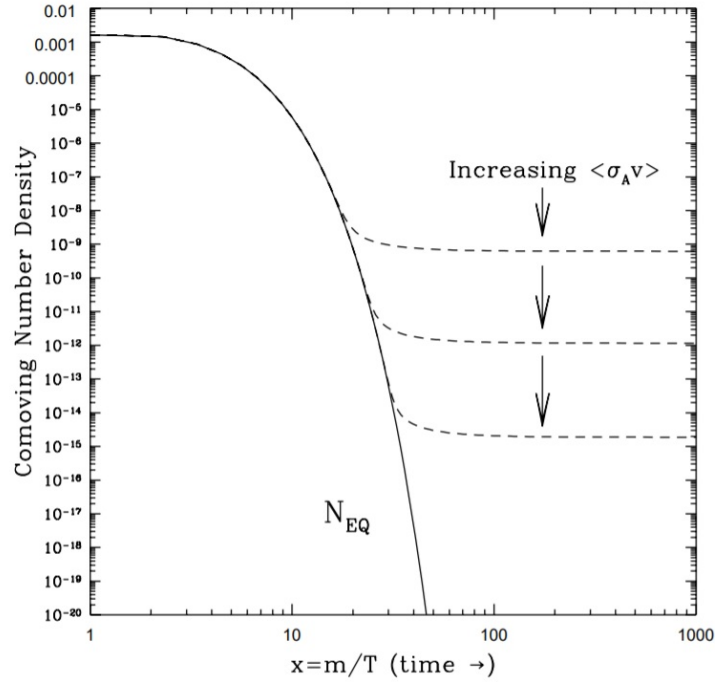


Abbildung 6.1.: Die Lösung der Boltzmann-Gleichung mit dem charakteristischen Plateau, welches die ausgefrorene Reliktdichte repräsentiert. [32].

Welche Rolle spielt nun das zuvor untersuchte skalare Tau-Lepton in diesem Zusammenhang? Es versteht sich von selbst, dass dieses Teilchen selbst kein Kandidat für Dunkle Materie sein kann. Auf *tree level* wurde ein Photonenaustausch berechnet, ein Photon koppelt jedoch an die elektrische Ladung. Man erinnere sich an ein ernstzunehmendes Teilchen als Kandidat für Dunkle Materie, das LSP. Dieses leichteste SUSY-Teilchen wäre stabil, siehe R-Parität (2.8), und würde daher nicht weiter in ein SM-Teilchen zerfallen. Oft wird dafür das Neutralino vorgeschlagen. Die Menge bzw. Verteilung der Dunklen Materie, die die großräumigen Strukturen des Universums maßgeblich beeinflusst, hängt unter dieser Annahme demzufolge von den Neutralino-Prozessen kurz nach dem Urknall ab. Dazu wurden bereits etwa Annihilationsprozesse wie  $\tilde{\chi}^0 \tilde{\chi}^0 \rightarrow b \bar{b}$  untersucht. Das Stau tritt dann auf den Plan, wenn in bestimmten Szenarien (mehr dazu in Kap. 7) die Massen desselben und des Neutralinos sehr ähnlich sind. Neben den Neutralino-Annihilationen und den Stau-Annihilationen können diese Prozesse auch koppeln. Es würden teilchenphysikalische Prozesse des LSP mit dem Stau stattfinden, die das Vorkommen der Dunklen Materie senken.

Hierbei wird die Lösung der Boltzmann-Gleichung um einiges schwieriger, da zwei Boltzmann-Gleichungen im Grunde gekoppelt werden. Aber auch der reine An-

## 6. Zur Reliktdichte

nihilationsprozess der Staus nimmt Einfluss auf die Neutralinos: Ein spätes Ausfrieren hätte wenige Staus zur Folge, die noch die Möglichkeit hätten mit den Neutralinos zu annihilieren. Es ist jedoch zu bemerken, dass dies in vielen Szenarien ein unwesentlicher Prozess ist. Ferner besteht nur geringe Hoffnung, dass das Stau auf dieser Massenskala zu finden ist. Verschiedene Experimente am LHC hätten ein Auffinden dieser Staus rein energetisch betrachtet durchaus ermöglichen sollen. Unter Vorgabe von bestimmten Parametern ergeben sich die Massen der SUSY-Teilchen, sodass für dieses oder jenes Szenario konkrete Messwerte prognostiziert werden. Ein Stau ist selbstredend instabil, der Zerfall in Leptonen des SM ist experimentell gesehen dankbar, da Leptonen gut detektierbar sind. Im Bereich dieser Massen blieb jene Detektion jedoch aus, sodass nur wenige Szenarien verbleiben, in denen die berechneten Prozesse tatsächlich Einfluss auf die Neutralinos und damit die Dunkle Materie besaßen.

Generell ist stets auf die Kette von Annahmen zu verweisen, die die Wahrscheinlichkeit einer physikalischen Realität immer weiter einschränken - das Postulat der Richtigkeit der SUSY, die R-Parität und damit ein LSP und nicht zuletzt ein kleines Spektrum an Szenarien, für die das Stau nicht empirisch ausgeschlossen werden konnte.

Die Ingredienzien des Verfahrens, um die erwünschten Resultate zu erzielen, sollen nun präsentiert werden.

### 6.2. Das DM@NLO-Projekt

Das in Fortran geschriebene Programmpaket DM@NLO, abkürzend für *Dark Matter at Next-to-Leading Order*, hat den Zweck, die MSSM-Wirkungsquerschnitte zu berechnen, die für die Bestimmung der Reliktdichte benötigt werden. Diese sind in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_S)$ . Der Ablauf des Programmes erfolgt gemäß Abb. 6.2:

## 6. Zur Reliktdichte

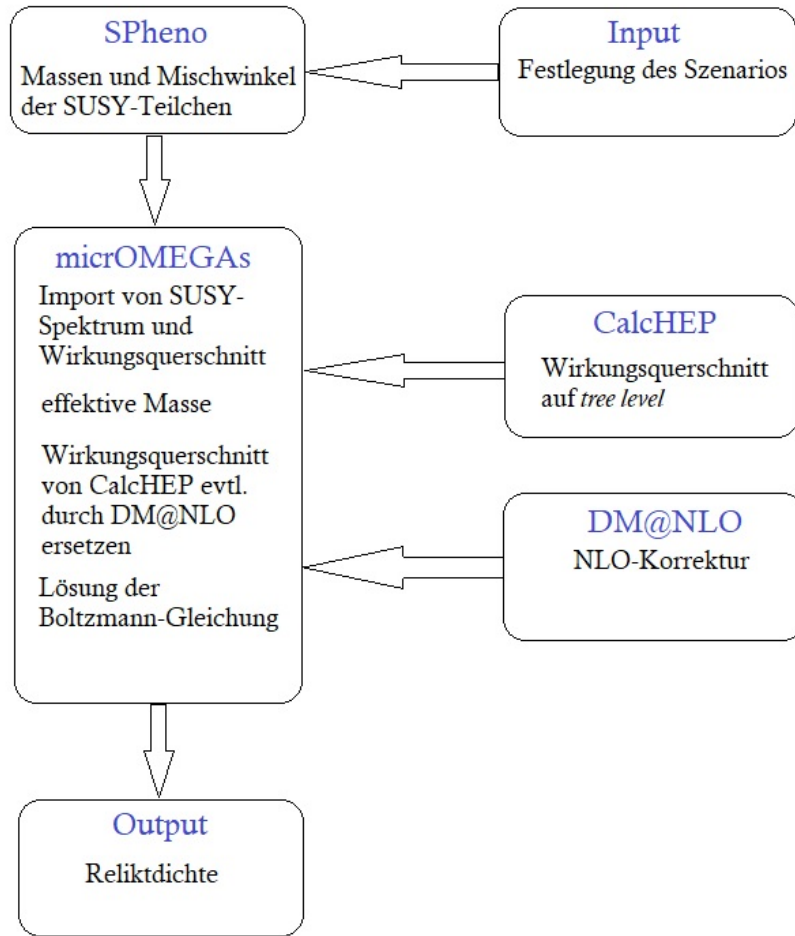


Abbildung 6.2.: Schematischer Ablauf des Programmes (orientiert an [20])

Die einzelnen Bestandteile haben die folgenden Aufgaben: Der Input umfasst die Wahl des Szenarios sowie die Eingabe der SUSY-Parameter. Die Massen der supersymmetrischen Teilchen und die Mischungswinkel, wie sie etwa in (2.14) für die Staus auftraten, werden über das Programm *Spheno* berechnet. Diese Werte nennt man SUSY-Spektrum, dessen Berechnung über die numerische Lösung der sogenannten Renormierungsgruppengleichungen geschieht (ihr mathematischer Hintergrund ist recht umfangreich, sie sollen kurz gesagt die Änderung der Kopplungskonstanten bei Veränderung der Längenskala beschreiben, in der Quantenfeldtheorie tritt als einfache Variante die Callan-Symanzik-Gleichung auf). Auf *tree level*

## 6. Zur Reliktdichte

vermag das Programm CalcHEP die Wirkungsquerschnitte zu berechnen, welche an micrOMEGAs weitergeleitet werden, ebenso das SUSY-Spektrum.

Um einer NLO-Korrektur nahezukommen, verwendet letzteres zumeist effektive Massen (aus Schleifenkorrekturen), die jedoch die vollständige Korrektur nicht widerspiegeln können. micrOMEGAs übernimmt weiters die Lösung der Boltzmann-Gleichung via numerischer Integration. Details zu diesem Programm finden sich in [27]. DM@NLO erhält seinen Einsatz, wenn micrOMEGAs Wirkungsquerschnitte benötigt, welche DM@NLO ebenso berechnen kann. In diesem Fall wird eine Ersetzung durchgeführt. Die numerische Integration liefert typischerweise den größten Beitrag an Rechenzeit. Durch die analytischen Lösungen kann diese eingespart werden, sodass der wesentliche Laufzeit-Anteil die Integration der Boltzmann-Gleichung betrifft. Mit diesen Vorüberlegungen kann sich schlussendlich dem wesentlichen Teil der Arbeit gewidmet werden - den Plots der berechneten Wirkungsquerschnitte.

## 7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion

Nach der Implementierung aller Amplitudenquadrate berechnet das Programm die Wirkungsquerschnitte, die die zentrale Kenngröße bei der Untersuchung der nachfolgenden Prozesse darstellen werden. Zentral ist die Frage, wie sich der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  bei verschiedenen Kollisionsenergien verhält. Leicht stellt man fest, dass es Energien gibt, bei denen in den Streuamplituden Polstellen entstehen, wenn man die Propagatoren betrachtet: Gelangt die Schwerpunktsenergie  $s$  in den Bereich der ebenfalls im Nenner stehenden Masse des Austauschteilchens, so beginnt der Term zu divergieren. Solche Bereiche werden als Resonanzen bezeichnet, wobei natürlich aufgrund der diskretisierten Energien im Programm der Pol selbst unerreicht bleibt und endliche  $\sigma$  erzielt werden. Es sei angemerkt, dass dies zunächst für die Top-Antitop-Quark-Erzeugung, die schwersten aller Quarks, durchgeführt wird.

Zu Beginn steht die Untersuchung der *tree level* -Prozesse an, wobei zunächst alle denkbaren Austauschteilchen aufsummiert werden. Daraus lassen sich lokale Extrema hinsichtlich  $\sigma$  bereits herausstellen. Indem man nun die Austauschteilchen einzeln betrachtet, lässt sich deren jeweiliger Einfluss auf den Wirkungsquerschnitt feststellen und daraus außerdem schlussfolgern, welche NLO-Korrekturen durchzuführen überhaupt sinnvoll sind.

Für die Berechnung muss ein Szenario festgelegt werden, das verschiedenste Parameter definiert (siehe nachfolgende Tabelle). Selbstredend empfiehlt es sich, Szenarien zu wählen, bei denen der Einfluss der Stau-Koannihilation einen großen Einfluss auf die Reliktdichte besitzt - eine Suche, die sich zumeist schwieriger gestaltet, als es den Anschein hat. Hintergrund der Szenarien ist, dass die Masse der SUSY-Teilchen per se nicht bekannt ist, sondern durch die Vorgabe von bestimmten Parametern errechnet werden. Diverse Paper aus dem ATLAS-Projekt schränken dabei das Spektrum an denkbaren Parametern ein.

Im Programm können verschiedene Renormierungs-Schemata verwendet werden. Im Folgenden werden die Schemata 1 und 99 betrachtet, welche verschiedene Teilchenmassen verwenden. Vergleicht man die eigenen Implementierungen mit den Berechnungen CalcHEPs, so sind die Resultate im Falle 99 gänzlich deckungsgleich, eine Evidenz, dass die *tree level* -Berechnungen korrekt sind. Kleinere Abweichungen erhält man für das Schema 1, was für die kommenden Plots verwendet

## 7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion

wird. Doch auch mit dem anderen Schema würden sich bei den NLO-Korrekturen Abweichungen ergeben - CalcHEP dient vielmehr als ungefähre Orientierung.

$\tan \beta$	$\mu$	$m_A$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
5,8	2925,8	948,8	250,0	1954,1	1945,1

$M_{\tilde{q}_{1,2}}$	$M_{\tilde{q}_3}$	$M_{\tilde{u}_3}$	$M_{\tilde{t}}$	$A_t$
3215,1	1578,0	609,2	3263,9	3033,7

Die Werte sind (natürlich bis auf  $\tan \beta$ ) allesamt in GeV angegeben. Aus diesem Szenario ergeben sich nicht nur die Massen der Staus, auch die Higgs-Bosonen (obwohl dem SM zugehörig, aber aus der SUSY entstehend) erhalten ihre Massen durch SPheno:

$$m_{h^0} = 116,62 \text{ GeV} \quad m_{H^0} = 939,56 \text{ GeV} \quad m_{\tilde{\tau}_1} = 3261,9 \text{ GeV} \quad (7.1)$$

Des weiteren gibt das Programm die wichtigsten Prozesse aus, die Einfluss auf die Reliktdichte nehmen. Wir geben die drei relevantesten an:

$$\tilde{t}_1 \bar{\tilde{t}}_1 \rightarrow h^0 h^0 \quad (\text{Anteil : } 0,410) \quad (7.2)$$

$$\tilde{t}_1 \bar{\tilde{t}}_1 \rightarrow gg \quad (\text{Anteil : } 0,166) \quad (7.3)$$

$$\tilde{t}_1 \bar{\tilde{t}}_1 \rightarrow W^+ W^- \quad (\text{Anteil : } 0,144) \quad (7.4)$$

Der behandelte Prozess hingegen hat geradezu verschwindenden Einfluss. Aufgetragen wird nun der Wirkungsquerschnitt gegen den  $p_{cm}$ -Wert, der der Kollisionsenergie in Beschleunigerexperimenten entspricht (Center-of-Mass). Die Breite des Energie-Fensters kann manuell gewählt werden. Man kann sich über die Definition von  $s$  (im Programm) leicht überlegen, unter welchen Umständen Resonanzen entstehen:

$$\sqrt{s} = \sqrt{p_{cm}^2 + m_a} + \sqrt{p_{cm}^2 + m_b} \quad (7.5)$$

Offenbar kann man bereits vor den Plots die schwindende Relevanz des  $H^0$  erkennen. Im Folgenden wird nun die Kollisionsenergie in GeV aufgetragen sowie der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  in  $10^{-11} \text{ GeV}^{-2}$ . Betrachten wir zunächst die unkorrigierten Berechnungen

## 7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion

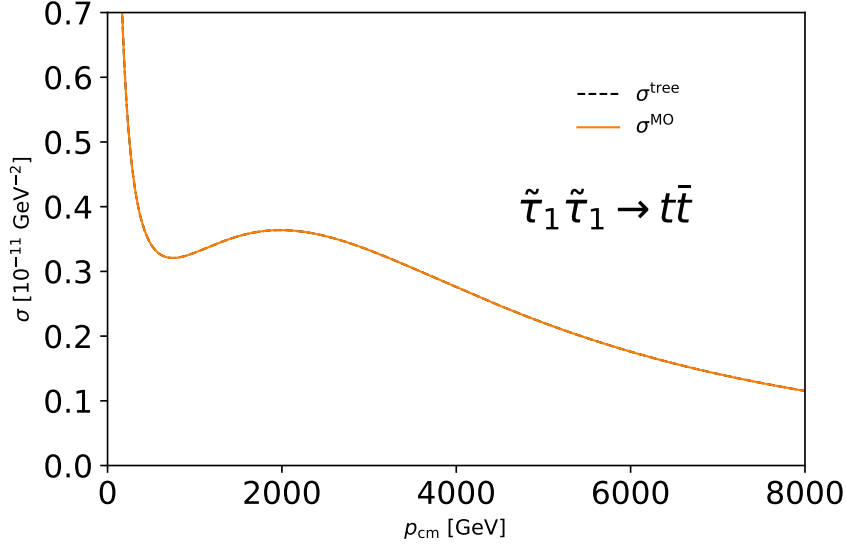


Abbildung 7.1.: Vergleich der Stau-Annihilation in Top-Quarks in eigener Rechnung mit den micrOMEGAs-Werten auf *tree level*: Vollständige Deckungsgleichheit im RenScheme99. Alle Plots mit *Python* erstellt.

Im RenScheme99 liegen bei micrOMEGAs dieselben Massen vor wie in DM@NLO. Stimmen die Ergebnisse überein, so ist dies ein eindeutiges Zeichen, dass die eigenen Berechnungen korrekt sind. Abb. 7.1 zeigt, dass dies offensichtlich der Fall ist. Wird das Renormierungs-Schema auf 1 umgeändert, verwendet micrOMEGAs andere Massen, in die u.U. bereits getarnt NLO-Korrekturen eingehen (schleifenkorrigierte Massen), die jedoch kaum Einfluss nehmen. Es ergeben sich folgende Abweichungen:

## 7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion

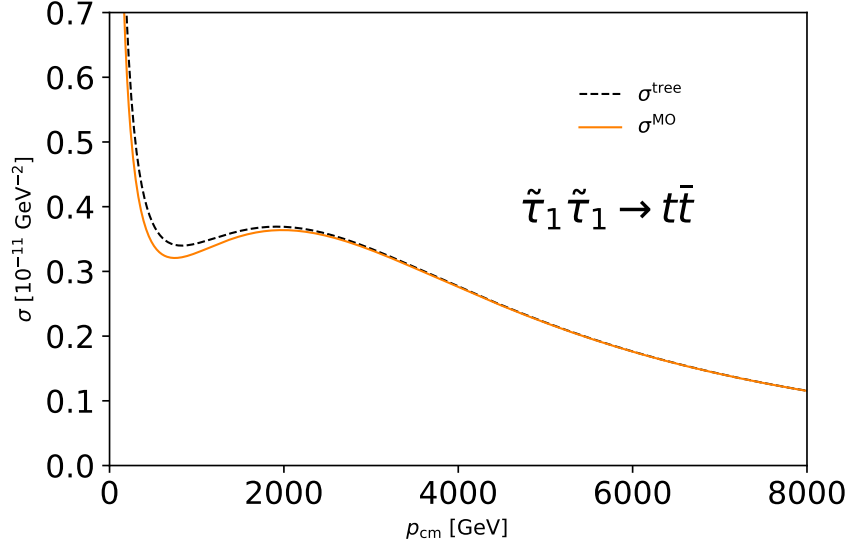


Abbildung 7.2.: Derselbe Prozess im RenScheme1: Die Berechnungen von micrOMEGAs weichen geringfügig nach unten ab.

Durch die kinematischen Verhältnisse beim  $h^0$ -Austausch liegt für verschwindende Kollisionsenergien eine Divergenz vor, die nicht betrachtet werden soll. Nach kurzzeitigem Absinken liegt ein lokales Maximum bei etwa  $0,36 \cdot 10^{-11} \text{ GeV}^{-2}$  vor, ab dann fällt der Wirkungsquerschnitt streng monoton. Die micrOMEGAs-Werte gleichen sich den eigenen an. In diesem Fall ist der Einfluss der einzelnen Amplituden, wenn man die Austauschteilchen separat betrachtet, nicht erkennbar. Wir teilen daher die Amplituden in Abb. 7.3 einmal in vier Diagramme auf (unter der Annahme, dass jegliche Interferenzterme bei Betrachtung der jeweiligen Quadrate erwartbar sind, werden diese nicht berücksichtigt).

## 7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion

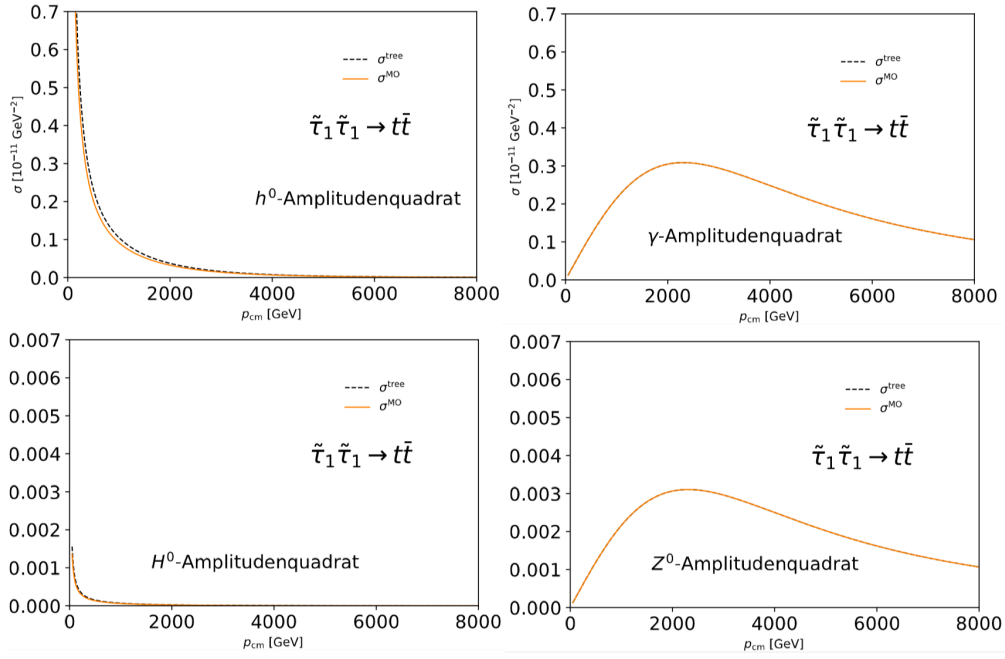


Abbildung 7.3.: In obiger Graphik finden sich die Einzelamplituden wieder, um einzelne Einflüsse herauszustellen. Man beachte bei den unteren Diagrammen die andere Skalierung, um überhaupt qualitative Änderungen festzustellen.

Wie bereits beschrieben wird nun deutlich, dass die Wahl des Szenarios die Relevanz von  $H^0$ , aber auch den der Z-Bosonen aufs Äußerste schmälert. Das lokale Maximum wird offenbar durch den Photonenaustausch herbeigeführt, wohingegen der Higgs-Sektor nur bis etwa 1500 GeV bemerkenswerte Beiträge liefert. Interessant ist hierbei die Erkenntnis, dass der Kurvenverlauf für Photon und Z-Boson identisch ist (bis auf einen Faktor 100). Es zeigt sich eindrucksvoll die Gleichheit der algebraischen Struktur dieser Austauschprozesse, die in der Vereinheitlichung zur Elektroschwachen Kraft begründet liegt. Die Ähnlichkeit der Higgs-Bosonen muss nicht begründet werden. Wird nun in die Next-to-Leading-Order übergegangen, zeigt sich die Notwendigkeit, in Zukunft auch QED-Korrekturen inklusive einer Resummation durchzuführen, damit nicht nur für geringe Energien der Wirkungsquerschnitt an Präzision zunimmt. Abb. 7.4 zeigt die NLO-Korrekturen im Vergleich zur Leading Order.

## 7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion

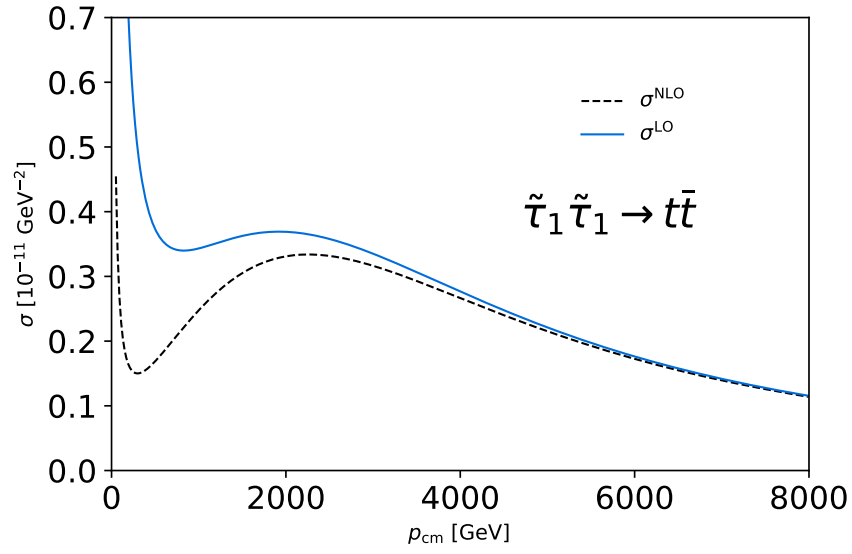


Abbildung 7.4.: Gegenüberstellung von NLO-Korrekturen und reinen *tree level*-Berechnungen: Der Wirkungsquerschnitt wird nach unten korrigiert.

## 7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion

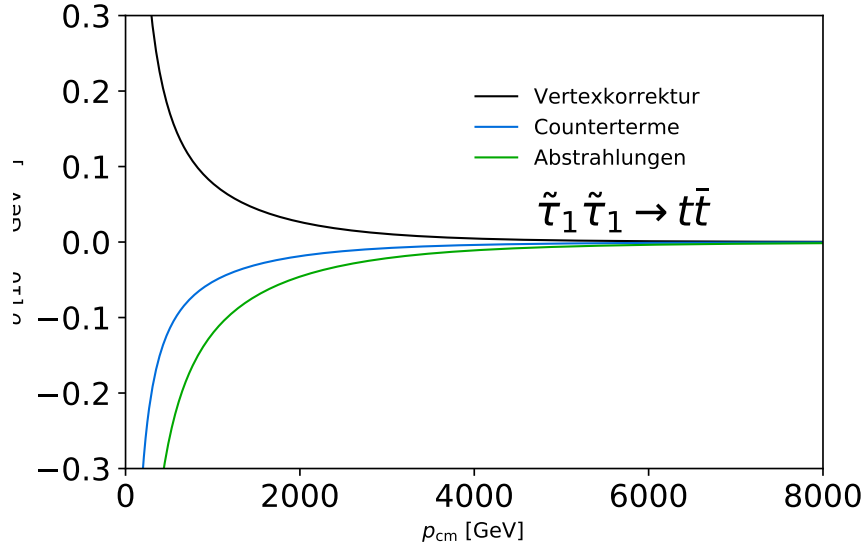


Abbildung 7.5.: Aufteilung der Beiträge aus den Vertex-Korrekturen, den Countertermen und den reellen Korrekturen zum Wirkungsquerschnitt.

Es mag zunächst verwundern, dass die Addition zusätzlicher Feynman-Diagramme den Wirkungsquerschnitt senkt, dies ist aber nicht unüblich und wurde in ähnlichen Prozessen von anderen Gruppen bereits festgestellt. Abb. 7.5 zeugt von negativen Beiträgen aus Countertermen und den Gluon-Abstrahlungen, positiv gehen nur die Vertexkorrekturen ein. Insbesondere bei sehr kleinen Energien um 300 GeV wird das lokale Minimum stark abgesenkt. Mithilfe von Abb. 7.6 soll nun visualisiert werden, wo die Korrekturterme Relevanz besaßen.

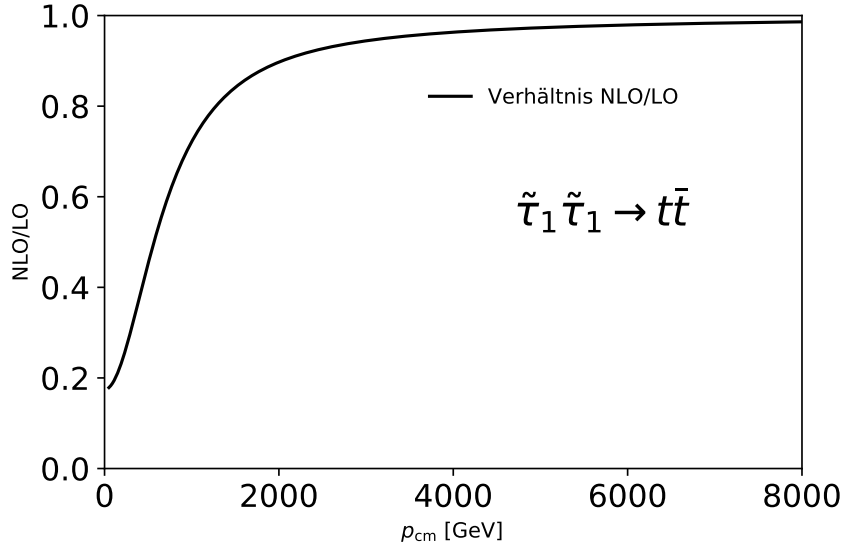


Abbildung 7.6.: Das Diagramm gibt einen Überblick, in welchen Energiebereichen die Korrekturen einen signifikanten Einfluss auf die *tree level*-Wirkungsquerschnitte haben.

Offenbar schmiegen sich die korrigierten Querschnitte an die *tree level*-Berechnungen bei hohen Energien an. Dies ist in Ermangelung einer Photonen-Korrektur auf der rechten Seite in QCD und SUSY-QCD nicht weiter verwunderlich. Zur Erhöhung der Präzision würde insbesondere aber die Resummation in allen Ordnungen maßgeblich beitragen.

Weniger detailliert soll nun die Untersuchung des Zerfalls in Bottom-Quarks, die zweitschwersten Teilchen, die der Starken Wechselwirkung unterliegen, erfolgen. Die graphischen Analysen ergaben:

## 7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion

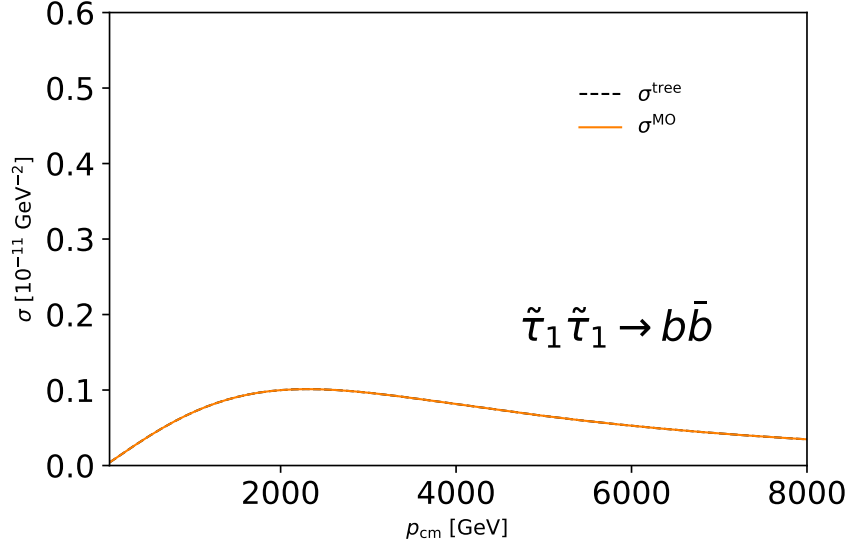


Abbildung 7.7.: Vergleich der eigenen Berechnungen auf *tree level* mit denen von micrOMEGAs für die Annihilation und Bottom-Anti-Bottom-Paare

Dieser Kurvenverlauf verwundert vielleicht zunächst, führt man einen Vergleich mit den Top-Antitop-Paaren durch. Charakteristisch ist erneut der durch das Photon induzierte Hügel mit einem Maximum bei etwa 2500 GeV, ebenso ist auffällig und überdies erwartbar, dass der Wirkungsquerschnitt generell geringer ist als beim weitaus schwereren Top-Quark. Die Fermion-Vektorboson-Kopplung ist merklich kleiner für das Bottom-Quark. micrOMEGAs errechnet in beiden Renormierungsschemata kaum sichtbare Abweichungen von den eigenen Berechnungen. Jedoch bleibt das Ansteigen bei niedrigen Kollisionsenergien fast gänzlich aus. Grund ist nicht etwa, dass die beiden Higgs-Bosonen alleine im Amplitudenquadrat keinen Beitrag leisten, sie würden den Graphen sichtlich beeinflussen. Jedoch haben die Higgs-Fermion-Fermion-Kopplungen für  $k = 1, 2$  unterschiedliche Vorzeichen, sodass sich die Interferenzterme nahezu mit den reinen Termen wegheben. Es verbleibt ein nicht sichtbarer Restbeitrag in der Größenordnung  $\mathcal{O}(10^{-17})$ .

## 7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion

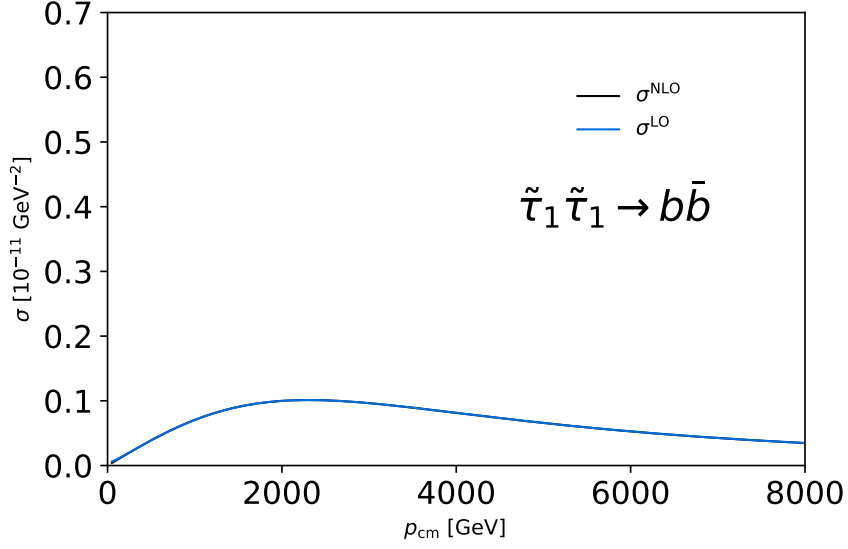


Abbildung 7.8.: Gegenüberstellung von NLO-Korrekturen und reinen *tree level*-Berechnungen: Der Wirkungsquerschnitt bleibt aufgrund geringer Higgs-Einflüsse nahezu unkorrigiert.

Damit erklärt sich auch die fast gänzliche Deckungsgleichheit der NLO-Korrekturen mit dem *tree level*. Es zeigt sich, dass zumindest für das Bottom-Quark eine Photon-Korrektur unerlässlich ist. Im Higgs-Bereich hat die Korrektur ähnliche Einflüsse wie für die Annihilation in Top-Quarks. Zuletzt wurde sich noch der leichten Quarks, um dem Titel der Arbeit gerecht zu werden, angenommen. Abb. 7.9 zeigt die Beiträge der einzelnen Quark-Paare nach der Annihilation.

## 7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion

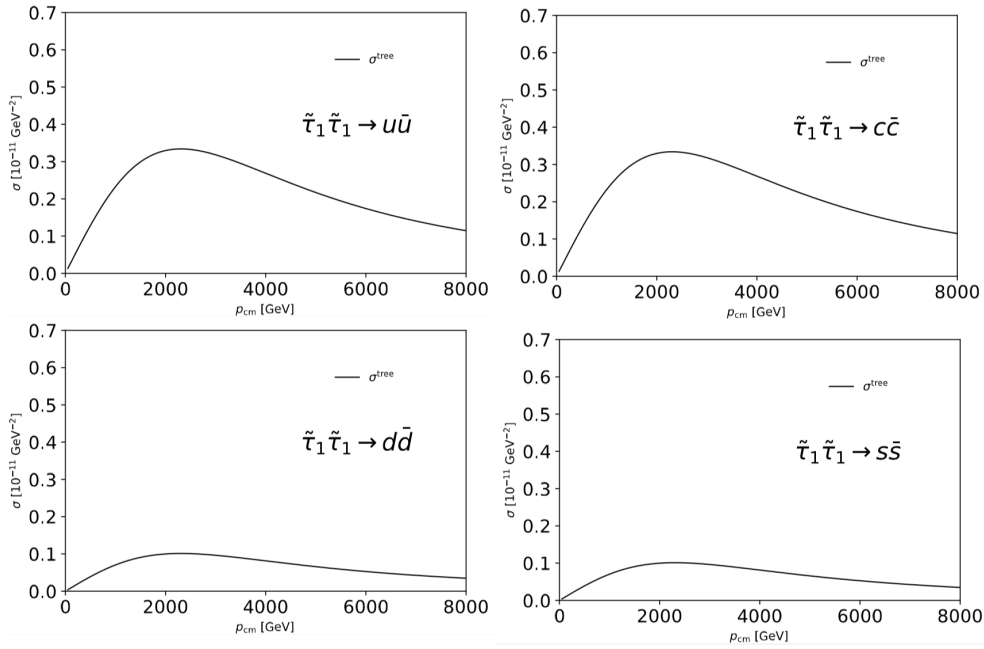


Abbildung 7.9.: Übersicht über alle leichten Quarks und ihre Beiträge zum Wirkungsquerschnitt (wegen zusätzlich auftretender Divergenzen unkorrigiert)

Für die Erzeugung von Up- und Charm-Quarks sollte aufgrund der gleichen algebraischen Struktur wie beim Top-Quark auch ein dominanter Higgs-Bereich bis etwa 1500 GeV zu erwarten sein. Jedoch beinhalten die jeweiligen Higgs-Fermion-Kopplungen die Quark-Massen, die vom Programm auf 0 gesetzt werden, da sie im Gegensatz zu anderen am Prozess beteiligten Teilchen unbedeutend sind. Hierin liegt auch der Grund, warum trotz verschwindender Massen im Endzustand die Wirkungsquerschnitte dieselbe Größenordnung besitzen wie die der Top-Erzeugung: Selbst das Top-Quark ist mit seiner Masse gegenüber der Stau-Masse vernachlässigbar klein, sodass der Unterschied zwischen etwa Up-Quark- und Top-Quark-Masse nicht ins Gewicht fällt. Dominant hingegen ist erneut der Einfluss des Photons. In diesem Falle ist es unproblematisch, dass die Higgs-Bosonen nicht korrigiert wurden, was aufgrund der zusätzlichen Divergenzen wegen masseloser Quarks zwecks Zeitersparnis nicht durchgeführt wurde. Jedoch würde die Photon-Korrektur mit hoher Wahrscheinlichkeit die Wirkungsquerschnitte auf mehrere Größenordnungen unter dem Top-Quark senken. Ein derartiger Einfluss leichter Quarks wie in Abb. 7.9 ist ungewöhnlich und sollte durch NLO-Korrekturen reduziert werden.

Für das Down- und Strange-Quark ergeben sich ähnliche Verläufe wie beim Bottom-

## 7. Numerische Ergebnisse und ihre Diskussion

Quark, die Ursachen hierfür sind dieselben wie für die Ähnlichkeit bei der Quarkerzeugung vom up-Typ.

## 8. Konklusion und Ausblick

In dieser Arbeit wurden die möglichen Prozesse im frühen Universum, die das Tau-Slepton betrafen, mit Methoden der Quatenfeldtheorie quantitativ behandelt. Übergeordnetes Ziel dieses Projektes ist, deren Einfluss auf die Reliktdichte und damit indirekt auf die Verteilung der Dunklen Materie zu untersuchen. Vordergründig war jedoch, in die gemäß dem Kenntnisstand des Verfassers gänzlich neuen Verfahren in der theoretischen Teilchenphysik fundiert, aber verständlich einzuführen. Sowohl die Methodik der Berechnung der vorgestellten Wirkungsquerschnitte als auch das generelle Konzept der Supersymmetrie als Ansatz für Physik jenseits des Standardmodells wurden umfangreicher erläutert, als es für versierte Teilchenphysiker vonnöten wäre. Es war jedoch auch die Idee der Arbeit, neben dem Gewinn von ersten brauchbaren wissenschaftlichen Ergebnissen, die Arten der Berechnung recht detailliert darzustellen, da dies in Lehrbüchern zumeist nur sehr dezidiert, in manchen Bereichen gar nicht durchgeführt wird. Somit können einige Kapitel auch als kleiner Leitfaden für spätere Berechnungen dienen und insbesondere der gewichtige Anhang als Nachschlagewerk.

Per Ausschlussprinzip stellten sich das Photon, das  $Z^0$ -Boson und das leichte und schwere skalare Higgs-Boson  $h^0$  und  $H^0$  als erlaubte Austauscheteilchen heraus. Nachdem kurz in die mathematischen Hintergründe der Feynman-Diagramme eingegangen worden ist, konnten auf *tree level* auch bereits mit geringem Kenntnisstand die Berechnungen durchgeführt werden. In bestimmten Szenarien war das leichte Higgs ein relevantes Austauscheteilchen für den Wirkungsquerschnitt. Aufgrund dessen wurde sich entschieden, diesen Prozess sowohl in QCD als auch in SUSY-QCD zu korrigieren. Dafür war weitaus mehr Vorbereitung notwendig, dies schloss die Einführung in die Tensorreduktion, in das Renormierungsverfahren und die Behandlung reeller Korrekturen mit ein. Interessant war bei letztgenannter Korrektur vor allen Dingen, dass der Spezialfall der analytischen Integrierbarkeit auftauchte, die sehr selten durchgeführt wird. Die Herkunft der verwendeten Integrale war noch einmal von eigenem Interesse, sodass diese im Anhang einmal hergeleitet wurden. So sah man, dass die Methoden auf stabilem mathematischen Fundament stehen, das auch bei geringen Vorkenntnissen durchdrungen werden kann.

Um den Kontext der Berechnungen darzustellen, wurde anschließend auf den aktuellen Stand der Kosmologie in Kurzform hingewiesen sowie in das Projekt DM@NLO eingeführt. Hier schloss sich der Kreis zwischen Teilchen- und Astro-

## 8. Konklusion und Ausblick

physik. Der wissenschaftlich relevanteste Teil war zuletzt die graphische Verarbeitung der Wirkungsquerschnitte unter Berücksichtigung eines speziellen Szenarios. Es wurden die Einflüsse der verschiedenen Austausch-Bosonen diskutiert sowie die Unterschiede zwischen führender Ordnung und NLO-Korrekturen. Bereits die Korrektur der Higgs-Bosonen zeigte, dass die erste Ordnung Störungstheorie maßgeblichen Einfluss auf den Wirkungsquerschnitt nimmt und für wissenschaftlich relevante Ergebnisse unerlässlich ist.

Für leichte Quarks blieb man beim *tree level*, da ihr Einfluss gering ist. Man sollte nicht aus den Augen verlieren, dass der Einfluss der Staus nur in einigen wenigen Szenarien wesentlich ist, da bestimmte Massen dieser Teilchen bereits am LHC zu einem gewissen Grad ausgeschlossen werden konnten. Es versteht sich daher, dass die Arbeit nicht rein wissenschaftlich motiviert war, sondern basierend auf einem halbwegs realitätsbezogenen Prozess pädagogisch sinnvoll in SUSY und generell Quantenfeldtheorie einführen sollte. Dass die Stau-Annihilation tatsächlich in der Wissenschaftsgemeinde als bedeutsam für die Menge der Dunklen Materie unter der Annahme eines LSP angesehen wurde, ist vielmehr ein positiver Nebeneffekt, der eine zusätzliche Motivation zu den Berechnungen liefert. Festhalten lässt sich jedoch, dass anhand des Prozesses die wichtigsten Verfahren in der theoretischen Teilchenphysik kennengelernt und sinnvoll angewandt werden konnten und die erzielten Resultate nicht unphysikalisch wirken. Auch zeigte sich eindeutig, dass die Welt jenseits des Standardmodells von Spekulationen und großer Ungewissheit geprägt ist, vor allem gekoppelt an das ebenso spekulative Thema der Dunklen Materie.

An dieser Stelle bleibt ferner zu überlegen, welche weiteren Berechnungen vorgenommen werden sollten, um die wissenschaftliche Relevanz der Resultate zu erhöhen. Zunächst ist einleuchtend, dass die QCD- und SUSY-QCD-Korrekturen für alle Austauschteilchen durchgeführt werden sollten. Die kinematische Struktur einiger Prozesse machte diese Berechnungen für die Arbeit zu umfangreich. Wenngleich  $Z^0$  und  $H^0$  zunächst irrelevant schienen, könnte die Untersuchung mehrerer Szenarien, die empirisch noch nicht ausgeschlossen sind, deren Relevanz noch betonen. Ferner wäre dann nurmehr die rechte Seite des ursprünglichen Feynman-Diagramms korrigiert. Ein Photonen-Austausch zwischen den Staus in NLO könnte berechnet werden, darüber hinaus würde eine Resummation in allen Ordnungen die Wirkungsquerschnitte maßgeblich beeinflussen.

Bislang zeigten sich die NLO-Korrekturen nur für geringe  $p_{cm}$ -Werte als bedeutsam. Das dominante Photon bei höheren Kollisionsenergien erhielte durch die Resummation eine gewichtige Änderung. Die Untersuchung leichter Quarks geschah ohne Schleifenkorrekturen, da die leichten Teilchen weitere Divergenzen mit sich brächten, deren Eliminierung aufwendig ist. Betrachtet man jedoch deren Einfluss zum Wirkungsquerschnitt, bleibt zu überlegen, ob derartige Korrekturen

## 8. Konklusion und Ausblick

notwendig sind. Stattdessen können andere Korrekturen aus der QED für Top- und Bottom-Quark größeren Einfluss nehmen; auch blieb die Betrachtung von Box-Diagrammen unberücksichtigt.

Daüber hinaus wurde nur der erste Typ des skalaren Taus untersucht, natürlich sind auch Einflüsse des zweiten Typs und die Mischungen untereinander eine Analyse wert. Offensichtlich bietet der Prozess noch ein reichhaltiges Spektrum an weiteren Möglichkeiten, die Berechnung detaillierter zu gestalten. Gleichmaßen steht zweifellos noch zur Debatte, ob eine genauere Betrachtung der Stau-Annihilation in Zukunft noch fruchtbar ist, wenn weitere Ergebnisse aus Genf veröffentlicht werden.

# A. Dirac-Algebra

## A.1. Algebraisches Fundament

Die Dirac-Gleichung zur Beschreibung der Fermionen beinhaltet zum einen den vierkomponentigen Dirac-Spinor, der das Teilchen beschreibt (bzw. die unteren beiden Komponenten das Antiteilchen), zum anderen die Diracschen  $\gamma$ -Matrizen, welche im Raum der Spinore wirken. Diese erfüllen die Relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

mit dem metrischen Tensor der SRT. Die Antikommutatorrelation macht die Matrizen zu den Erzeugenden einer sogenannten Clifford-Algebra  $Cl(p, q)$ . Diese kann man (für unseren Fall vereinfachend) für eine beliebige Verknüpfung  $\circ$  von zwei Elementen  $m$  und  $n$  eines Vektorraums über

$$\xi_m \circ \xi_n + \xi_n \circ \xi_m = \sigma_m \delta_{mn} \quad (\text{A.2})$$

definieren, mit dem Kronecker-Delta und  $\sigma_1 = \dots = \sigma_p = -1$  und  $\sigma_{p+1} = \dots = \sigma_{p+q} = 1$ . Der Antikommutator ist offensichtlich; leicht sieht man überdies, dass die Dirac-Spinore die Darstellung von  $Cl(1, 3)$  (bei passender Konvention der Minkowski-Metrik) sind (eine Darstellung ist die Abbildung der Algebrenelemente auf lineare Funktionale/Abbildungen mit Homomorphismen). Hierin zeigt sich die Möglichkeit der leichten Verallgemeinerung der Dirac-Algebra bei der dimensionellen Regularisierung: Der Dirac-Spinor wird als Element der Darstellung der  $Cl(p, q)$ -Clifford-Algebra, wobei  $p$  und  $q$  nun nach Belieben ( $p$  sollte 1 sein) gewählt werden können. Die Matrizen werden erweitert, erfüllen aber nach wie vor die Antikommutatorrelation, sodass die algebraische Struktur gleich bleibt und wenige Änderungen auftreten.

Paul Dirac stieß mit seinem Dirac-Operator und den Spinoren das Tor zu einem mathematisch reichhaltigen Terrain der Differentialgeometrie auf, auf das hier nicht eingegangen werden kann (Highlight: Atiyah-Singer-Indextheorem). Für die Prozesse waren insbesondere die folgenden Casimir-Identitäten von großem Interesse:

$$\sum_s \bar{u}(p) u(p) = \not{p} - m \quad (\text{A.3})$$

$$\sum_s \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p) = \gamma^\mu (\not{p} + m) \quad (\text{A.4})$$

## A. Dirac-Algebra

Es gilt hierbei die Feynmansche Slash-Notation:

$$\not{p} = p_\mu \gamma^\mu \quad (\text{A.5})$$

Man benötigte verschiedene Relationen:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \quad (\text{A.6})$$

$$\not{a} \not{b} = 2ab - \not{b} \not{a} \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2 \not{a} \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4ab \quad (\text{A.9})$$

## A.2. Spurtheoreme

Die Auswertung der spinsummierten Amplitudenquadrate führte über die Casimir-Identitäten zu Spuren, deren Berechnung mit untigen Relationen geschah.

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \rightarrow \text{Tr}(\not{a} \not{b}) = 4ab \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho) = 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda}) \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Tr}(\gamma_1^\mu \cdot \dots \cdot \gamma_n^\sigma) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma_1^\mu \cdot \dots \cdot \gamma_n^\sigma) = 0 \quad (n \text{ ungerade}) \quad (\text{A.12})$$

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b}) = 4ab \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5 \not{a} \not{b}) = \text{Tr}(\gamma^5 \not{a} \not{b} \not{c}) = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = -4i\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta \quad (\text{A.15})$$

## A.3. Chiralität

Das Konzept der Chiralität erhielt zuerst seine Daseinsberechtigung, als die Paritätsverletzung im Wu-Experiment beobachtet wurde. Die Kopplung der Eichbosonen der Schwachen Wechselwirkung hängt entscheidend von der Händigkeit der Teilchen ab. Die Projektionsoperatoren  $P_{R,L}$  projizieren die beiden Händigkeiten aus dem Dirac-Spinor heraus. Diese haben die untige Gestalt und haben verschiedene hilfreiche Eigenschaften, welche bei den Berechnungen Verwendung fanden:

$$P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \quad P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad \text{mit} \quad \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (\text{A.16})$$

$$P_R P_L = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$P_R P_R = P_R \quad P_L P_L = P_L \quad (\text{Idempotenz}) \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Tr}(P_L) = \text{Tr}(P_R) = 2 \quad (\text{A.19})$$

## A.4. Dirac-Algebra in $D$ Dimensionen

Die dimensionelle Regularisierung brachte eine Verallgemeinerung der Dimensionen vom Minkowski-Raum in einen  $D$ -dimensionalen Raum mit sich. Während sich die Spurtheoreme nicht ändern und selbstverständlich die Clifford-Algebra der Form  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  erhalten bleibt, treten neue Beziehungen auf. Es wurden die veränderten nachfolgenden Identitäten benötigt:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = D \quad (\text{A.20})$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha = (2 - D) \gamma^\mu \quad (\text{A.21})$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\alpha = 4g^{\mu\nu} - (4 - D) \gamma^\mu \gamma^\nu \quad (\text{A.22})$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\alpha = -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu + (4 - D) \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \quad (\text{A.23})$$

## B. Feynman-Diagramme und Vertexfaktoren

### B.1. Austauschteilchen $\gamma$ und $Z^0$

Die einzigen Eichbosonen, welche am untersuchten Prozess als Austauschteilchen teilnahmen, waren das Photon und das  $Z^0$ -Boson. Für die Eichboson-Sfermion-Sfermion-Kopplung liegt die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = ie e_f \delta_{ij} A_\mu \tilde{f}_i^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{f}_j - i \frac{g_Z}{\cos \theta_W} z_{ij}^{\tilde{f}} Z_\mu^0 \tilde{f}_i^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{f}_j \quad (\text{B.1})$$

vor für zwei Sfermionen  $\tilde{f}_i$  und  $\tilde{f}_j$ ,  $e_f$  bezeichnet die Ladung in Einheiten der Elementarladung.  $z_{ij}^{\tilde{f}}$  ist durch

$$\begin{pmatrix} (I_f^{3L} \cos^2 \theta_{\tilde{f}} - \sin^2 \theta_W e_f) & -\frac{1}{2} I_f^{3L} \sin 2\theta_{\tilde{f}} \\ -\frac{1}{2} I_f^{3L} \sin 2\theta_{\tilde{f}} & (I_f^{3L} \cos^2 \theta_{\tilde{f}} - \sin^2 \theta_W e_f) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

definiert. Im vorliegenden Fall gilt natürlich  $i = j$ , sodass sich die Vertexfaktoren explizit ergeben zu:

$$\gamma : -ie e_f \delta_{ij} (p_a - p_b)^\mu \rightarrow -ie e_{\tilde{\tau}_1} (p_a - p_b)^\mu \quad (\text{B.3})$$

$$Z^0 : -i \frac{g_Z}{\cos \theta_W} z_{ij}^{\tilde{f}} (p_a - p_b)^\mu \rightarrow -i \frac{g_Z}{\cos \theta_W} (I_{\tilde{\tau}_1}^{3L} \cos^2 \theta_{\tilde{\tau}_1} - \sin^2 \theta_W e_\tau) \cdot (p_a - p_b)^\mu \quad (\text{B.4})$$

Nach Austausch des jeweiligen Eichbosons findet beim Quark-Antiquark-Paar eine Kopplung an zwei Fermionen statt. Analog zu obigen Gleichungen extrahiert man aus der SM-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = e e_f A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f - \frac{g_Z}{\cos \theta_W} Z_\mu^0 \bar{f} \gamma^\mu (c_V^f - \gamma^5 c_A^f) f \quad (\text{B.5})$$

die Vertexfaktoren

$$\gamma : -ie e_q \gamma^\mu \quad (\text{B.6})$$

$$Z^0 : -i \frac{g_Z}{\cos \theta_W} \gamma^\mu (c_V^q - \gamma^5 c_A^q) \quad (\text{B.7})$$

Hierbei sind  $c_V^q$  und  $c_A^q$  spezifische Konstanten, in denen man die V-A-Struktur (Vektor-Axialvektor) der Schwachen Wechselwirkung wiedererkennt. Sie sind für Quarks vom up-Typ  $c_V^q = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$ ,  $c_A^q = \frac{1}{2}$  und vom down-Typ  $c_V^q = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$ ,  $c_A^q = -\frac{1}{2}$ .

## B.2. Higgs-2-(S)fermion-Kopplung

Koppelt das neutrale Higgs-Quadrupel  $H_k^0$  an zwei Quarks, so liegt der Lagrangian

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^2 s_k^q H_k^0 \bar{q}q + \sum_{k=3}^4 s_k^q H_k^0 \bar{q}\gamma^5 q \quad (\text{B.8})$$

vor. Die  $s_k^q$  lauten explizit:

$$s_1^u = -g \frac{m_t \cos \alpha}{2m_W \sin \beta} \quad s_2^u = -g \frac{m_t \sin \alpha}{2m_W \sin \beta} \quad s_3^u = ig \frac{m_t \cot \beta}{2m_W} \quad s_4^u = ig \frac{m_t}{2m_W} \quad (\text{B.9})$$

$$s_1^d = g \frac{m_b \sin \alpha}{2m_W \cos \beta} \quad s_2^d = -g \frac{m_t \cos \alpha}{2m_W \cos \beta} \quad s_3^d = ig \frac{m_b \tan \beta}{2m_W} \quad s_4^d = -ig \frac{m_b}{2m_W} \quad (\text{B.10})$$

Dabei stehen  $u$  und  $d$  für einen allgemeinen up- bzw. down-Typ des Fermions. Gleiches gilt für die Sfermionen bei folgenden Gleichungen, so sind etwa die skalaren Taus vom down-Typ, wenn man die Schwachen Isospin-Dubletts ansieht. Aus der Higgs-Sfermionen-Kopplung verbleiben aus der Rechnung in (3.3) die Vertexfaktoren, die explizit auszudrücken sind. Es trat die allgemeine Form

$$G_{ijk}^{\tilde{f}} := G(H_k^0 \tilde{f}_i^* \tilde{f}_j) = [D^{\tilde{f}} G_{LR,k}^{\tilde{f}} (D^{\tilde{f}})^\dagger]_{ij} \quad (\text{B.11})$$

auf, konkret benötigt man die bekannte Mischungsmatrix  $D$  und die  $G_{LR,k}$ :

$$G_{LR,1}^{\tilde{u}} = \begin{pmatrix} g_Z m_Z (I_t^{3L} - e_t \sin^2 \theta_W) s_{\alpha+\beta} - \sqrt{2} h_t m_t c_\alpha & \frac{-h_t}{\sqrt{2}} (A_t c_\alpha + \mu s_\alpha) \\ \frac{-h_t}{\sqrt{2}} (A_t c_\alpha + \mu s_\alpha) & -g_Z m_Z e_t \sin^2 \theta_W s_{\alpha+\beta} - \sqrt{2} h_t m_t c_\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$G_{LR,1}^{\tilde{d}} = \begin{pmatrix} g_Z m_Z (I_b^{3L} - e_b \sin^2 \theta_W) s_{\alpha+\beta} - \sqrt{2} h_b m_b s_\alpha & \frac{-h_b}{\sqrt{2}} (A_b s_\alpha + \mu c_\alpha) \\ \frac{-h_b}{\sqrt{2}} (A_b s_\alpha + \mu c_\alpha) & -g_Z m_Z e_b \sin^2 \theta_W s_{\alpha+\beta} - \sqrt{2} h_b m_b s_\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Man erhält  $G_{LR,2}^{\tilde{f}}$  durch die Transformation  $\alpha \rightarrow \alpha - \frac{\pi}{2}$ .

$$G_{LR,3}^{\tilde{u}} = -\sqrt{2} h_b \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} (A_t c_\beta + \mu s_\beta) \\ \frac{i}{2} (A_t c_\beta + \mu s_\beta) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$G_{LR,3}^{\tilde{d}} = -\sqrt{2} h_b \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} (A_b s_\beta + \mu c_\beta) \\ \frac{i}{2} (A_b s_\beta + \mu c_\beta) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Ebenso erhält man  $G_{LR,4}^{\tilde{f}}$  durch die Transformation  $\beta \rightarrow \beta - \frac{\pi}{2}$ .

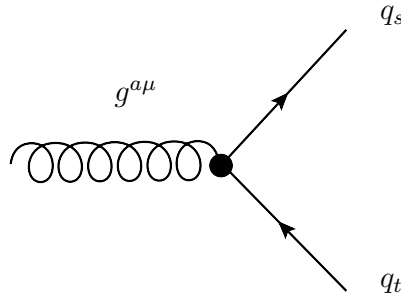
Man findet in den Matrizen die Yukawa-Kopplungen  $h_{t,b}$  wieder:

$$h_t = \frac{gm_t}{\sqrt{2}m_W \sin \beta} \quad h_b = \frac{gm_b}{\sqrt{2}m_W \cos \beta} \quad (\text{B.16})$$

Ferner wurden Sinus und Cosinus mit ihren Argumenten durch  $s, c$  abgekürzt,  $\alpha$  ist der Mischungswinkel vom  $\{h^0, H^0\}$ -System. Weiters findet man in  $I_t^3$  die dritte Komponente des Isospins wieder, der Weinbergwinkel  $\theta_W$  sowie  $\beta$  aus den Vakuumerwartungswerten der Higgs-Bosonen sind klar.

### B.3. Weitere Kopplungen aus NLO-Korrekturen

In der *next-to-leading order* wurden verschiedene neue Vertices benötigt, welche durch die folgenden Feynman-Diagramme dargestellt werden können, deren Vertexfaktoren angegeben werden sollen.



Die Lagrangedichte der Quantenchromodynamik hat die folgende Gestalt:

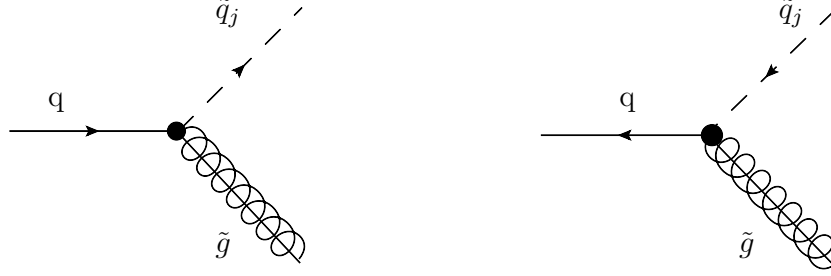
$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q + g_S \bar{q}\gamma^\mu T_a q A_\mu^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (\text{B.17})$$

Sie erinnert stark an das Aussehen der QED-Lagrangedichte, welche bereits in den theoretischen Einführungen auftauchte. Die Euler-Lagrange-Gleichung, angewandt auf den ersten Term, liefert wiederum die Dirac-Gleichung, der Feldstärketensor sieht zunächst ebenfalls recht ähnlich aus. Doch die Generatoren der Eichgruppe kommutieren in diesem Fall nicht (*Anm.:* Zudem wurden noch keine eichfixierenden Terme betrachtet, ebenso fehlen die Faddejew-Popow-Geister, siehe Kap. 3.4.1, die die Lagrangedichte verkomplizieren. Dies soll uns jedoch hier nicht betreffen). Somit erhält man aus dem dritten Term Gluon-Selbstwechselwirkungen, die uns nicht betreffen. Jedoch betrifft uns der zweite Term, welcher die Quark-Gluon-Vertices liefert.  $A_\mu^a$  sind hierbei die acht Eichbosonenfelder und  $T^a$  die Gell-Mann-Matrizen als die besagten Generatoren (*Anm.:* Die tatsächlichen Gell-Mann-Matrizen sind  $\lambda^a$  mit  $\lambda^a = 2T^a$ ). Es verbleibt der Vertexfaktor

$$-ig_S T_{st}^a \gamma^\mu \quad (\text{B.18})$$

## B. Feynman-Diagramme und Vertexfaktoren

Zusätzlich traten bei den SUSY-QCD-Korrekturen Squark-Quark-Gluino-Kopplungen auf, wobei die Richtung der Teilchen eine Rolle für den Vertexfaktor spielt. Hier musste die Mischung der schweren Squarks in Betracht gezogen werden.



Man benötigt die Vertexfaktoren

$$i\sqrt{2}g_S T^a (D_{2j}^{\tilde{q}} P_L - D_{1j}^{\tilde{q}} P_R) \quad (\text{B.19})$$

$$i\sqrt{2}g_S T^a (D_{2j}^{\tilde{q}} P_R - D_{1j}^{\tilde{q}} P_L) \quad (\text{B.20})$$

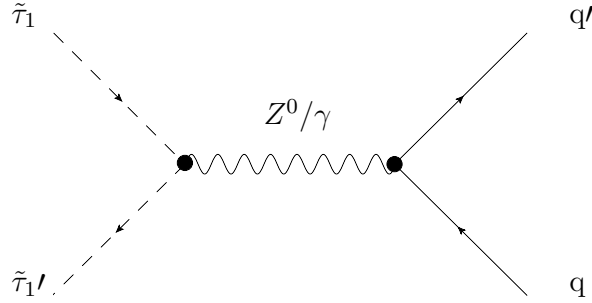
für die jeweilige Kopplung (a) und (b). Zur Erinnerung:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{\tilde{q}} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\tilde{q}} & \sin \theta_{\tilde{q}} \\ -\sin \theta_{\tilde{q}} & \cos \theta_{\tilde{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

## C. Explizite Berechnung auf *tree level*

### C.1. Stau- $\gamma$ -Kopplung

Zunächst wird das aus dem untigen Feynman-Diagramm der Austausch eines Photons explizit berechnet, dann der eines  $Z^0$ -Bosons.



Die Vertices aus B.1 ergeben mit den Dirac-Spinoren für Quark und Antiquark und dem Photonpropagator, im s-Kanal durch  $\frac{ig^{\mu\nu}}{(p_a+p_b)^2}$  gegeben, die folgende Streuamplitude:

$$\mathcal{M} = -\frac{ee_q e_{\tilde{\tau}_1} [\bar{u}(p_c) \gamma^\mu v(p_d)] [p_a - p_b]_\mu}{(p_a + p_b)^2} \quad (\text{C.1})$$

Spin-Summation liefert

$$|\bar{M}|^2 = \sum_{s_q, s_{\bar{q}}} \frac{(ee_q e_{\tilde{\tau}_1})^2 [\bar{u}(p_c) \gamma^\mu v(p_d)] [p_a - p_b]_\mu [\bar{u}(p_c) \gamma^\nu v(p_d)]^* [p_a - p_b]_\nu}{(p_a + p_b)^4} \quad (\text{C.2})$$

sodass mit der Spureigenschaft der Dirac-Spinore folgt:

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{(ee_q e_{\tilde{\tau}_1})^2 \cdot [p_a - p_b]_\mu [p_a - p_b]_\nu}{(p_a + p_b)^4} \cdot \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p}_c + m_q) \gamma^\nu (\not{p}_d - m_q)] \quad (\text{C.3})$$

Auswertung der Spur mittels obiger Theoreme und der Linearität der Abbildung:

### C. Explizite Berechnung auf tree level

$$\begin{aligned} & Tr[\gamma^\mu \not{p}_c \gamma^\nu \not{p}_d + m_q \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_d - m_q \gamma^\mu \not{p}_c \gamma^\nu - m_q^2 \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= 4(p_c^\mu p_d^\nu + p_c^\nu p_d^\mu - g^{\mu\nu}(p_c p_d + m_q^2)) \end{aligned} \quad (C.4)$$

Es müssen nun die Viererimpulse zu skalaren Größen mit den ko- und kontravarianten Indizes bzw. mithilfe des metrischen Tensors kontrahiert werden. Die Skalarprodukte werden ohne griechische Indizes notiert, sondern lediglich als  $p_i \cdot p_j$ .

$$\begin{aligned} & 2(p_a \cdot p_c)(p_a \cdot p_d) - (p_a \cdot p_d)m_{\tilde{\tau}_1}^2 - 2m_{\tilde{\tau}_1}^2 m_q^2 - 2(p_a \cdot p_c)(p_b \cdot p_d) - 2(p_a \cdot p_d)(p_b \cdot p_c) \\ & + 2(p_a \cdot p_b)(p_c \cdot p_d) + 2(p_a \cdot p_b)m_q^2 + 2(p_b \cdot p_c)(p_b \cdot p_d) - m_{\tilde{\tau}_1}^2(p_c \cdot p_d) \end{aligned} \quad (C.5)$$

Hierbei wurde  $m_i^2 = (p_i \cdot p_i)$  verwendet. Diese lassen sich nun in die bekannten Massen und Mandelstamvariablen transformieren. Man berücksichtige erneut den Farbfaktor  $C_F = 3$ . Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}}|_\gamma^2 = & -\frac{3ee_q^2 e_{\tilde{\tau}_1}^2}{2s^2} \left[ 4m_{\tilde{\tau}_1}^2(m_{\tilde{\tau}_1}^2 + m_q^2 - t) + m_q^2(4m_{\tilde{\tau}_1}^2 - 2s) - 4m_{\tilde{\tau}_1}^2 t \right. \\ & \left. + m_q^4 + m_q^2(2m_q^2 - s - 4t) + m_q^4 - m_q^2 s - 4m_q^2 t + 4st + 4t^2 \right] \end{aligned} \quad (C.6)$$

## C.2. Stau- $Z^0$ -Kopplung

Erneut gehen die Staus als 1 in  $M$  ein, die Quarks als Dirac-Spinore, diesmal aber das  $Z^0$ -Boson als massives Vektorboson in Feynman-Eichung mit dem Propagator

$$\frac{g^{\mu\nu}}{q^2 - m_Z^2} \quad (C.7)$$

sodass man

$$\mathcal{M} = \frac{g_Z^2 g^{\mu\nu}(z_{11}^{\tilde{\tau}_1})}{\cos^2 \theta_W (q^2 - M_Z^2)} \{ [\bar{u}(p_c) \gamma^\mu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) v(p_d)] [p_a - p_b]_\mu \} \quad (C.8)$$

erhält. Wie im Hauptteil beschrieben wird keine Addition eines Goldstone-Boson-Austausches benötigt, da dieser Beitrag verschwindet, wie in Kap. 3.3 gezeigt wird. Analog zum Photon erhält man bei der Quadratur durch Spinsum-mation den Vorfaktor  $\frac{1}{4}$  und eine umfangreiche Spur, die zunächst ausgewertet werden soll. Die Multiplikation an die anderen Terme außerhalb der Spinore wird anschließend durchgeführt.

### C. Explizite Berechnung auf tree level

$$\begin{aligned}
& Tr[\gamma^\mu(c_V^q - c_A^q\gamma^5)(\not{p}_c + m_q)\gamma^\nu(c_V^q - c_A^q\gamma^5)(\not{p}_d - m_q)] \\
& = Tr[(\gamma^\mu c_V^q \not{p}_c + \gamma^\mu c_V^q m_q - \gamma^\mu c_A^q \gamma^5 \not{p}_c - \gamma^\mu c_A^q \gamma^5 m_q) \cdot (\gamma^\nu c_V^q \not{p}_d \\
& \quad - \gamma^\nu c_V^q m_d - \gamma^\mu c_A^q \gamma^5 \not{p}_c + \gamma^\mu c_A^q \gamma^5 m_q)]
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Die Spurtheoreme und lassen eine Vereinfachung des ausmultiplizierten Terms zu:

$$\begin{aligned}
& Tr[\gamma^\mu(c_V^q)^2 \not{p}_c \gamma^\nu \not{p}_d - \gamma^\mu(c_V^q)^2 \not{p}_c \gamma^\nu m_q - \gamma^\mu c_V^q \not{p}_c \gamma^\nu c_A^q \gamma^5 \not{p}_c + \gamma^\mu c_V^q \not{p}_c \gamma^\nu c_A^q \gamma^5 m_q \\
& \quad + \gamma^\mu(c_V^q)^2 m_q \gamma^\nu \not{p}_c - (c_V^q m_q)^2 \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu c_V^q m_q \gamma^\nu c_A^q \gamma^5 m_q + \gamma^\mu c_V^q m_q^2 \gamma^\nu c_A^q \gamma^5 \\
& \quad - \gamma^\mu c_A^q \gamma^5 \not{p}_c \gamma^\nu c_V^q \not{p}_d + \gamma^\mu c_A^q \gamma^5 \not{p}_c c_V^q \gamma^\nu m_q + \gamma^\mu (c_A^q)^2 \gamma^5 \not{p}_c \gamma^\nu \gamma^5 \not{p}_d - \gamma^\mu (c_A^q)^2 \gamma^5 \not{p}_c \gamma^\nu \gamma^5 m_q \\
& \quad - \gamma^\mu c_A^q \gamma^5 m_q \gamma^\nu c_V^q \not{p}_d + \gamma^\mu c_A^q \gamma^5 m_q^2 \gamma^\nu c_V^q + \gamma^\mu (c_A^q)^2 \gamma^5 m_q \gamma^\nu \gamma^5 \not{p}_d - (c_A^q m_q)^2 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5] \\
& = (c_V^q)^2 \cdot Tr[\gamma^\mu (\not{p}_c \gamma^\nu \not{p}_d)] - c_V^q c_A^q \cdot Tr[\gamma^\mu \not{p}_c \gamma^\nu \gamma^5 \not{p}_c] - m_q^2 [(c_V^q)^2 \\
& \quad + (c_A^q)^2] Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] + (c_A^q)^2 \cdot Tr[\gamma^\mu \gamma^5 \not{p}_c \gamma^\nu \gamma^5 \not{p}_d]
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Mit (A.15) folgt:

$$Tr[...] = 8c_V^q c_A^q \epsilon^{\mu\sigma\nu\rho} - 4[(c_V^q)^2 + (c_A^q)^2] m_q^2 g^{\mu\nu} + 4[(c_V^q)^2 + (c_A^q)^2] \cdot (p_c^\mu p_d^\nu + p_c^\nu p_d^\mu - p_c p_d g^{\mu\nu}) \tag{C.12}$$

Erneut verleiht die Kontraktion, da überdies noch die Terme  $[p_a - p_b]_\mu [p_a - p_b]_\nu$  zu verwerfen sind. Zunächst betrachte man den vierdimensionalen Levi-Civita-Tensor eingehender. Er ist wie das dreidimensionale Analogon total antisymmetrisch, sodass eine ungerade Permutationszahl (nachfolgend: eine Permutation) ein negatives Vorzeichen liefert - man erhält beispielsweise:

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}(p_a)_\mu(p_a)_\nu(p_c)_\sigma(p_d)_\rho = -\epsilon^{\nu\mu\sigma\rho}(p_a)_\mu(p_a)_\nu(p_c)_\sigma(p_d)_\rho \tag{C.13}$$

Damit kann man also jegliche Terme mit dem Levi-Civita-Tensor zum Verschwinden bringen, denn auch die Mischterme mit etwa  $(p_a)_\mu(p_b)_\nu$  werden durch ihr doppeltes Auftreten mit verschiedenen Indizes durch Permutation eliminiert.

Die Kontraktion liefert schließlich unter Vernachlässigung der Vorfaktoren aus den Kopplungen:

*C. Explizite Berechnung auf tree level*

$$\begin{aligned}
& -8 \cdot \left[ - (p_a \cdot p_b)(m_q^2((c_V^q)^2 - (c_A^q)^2) + ((c_V^q)^2 + (c_A^q)^2)(p_d \cdot p_c)) \right. \\
& \quad - ((c_V^q)^2 + (c_A^q)^2)(p_a \cdot p_c)[(p_a \cdot p_d) - (p_b \cdot p_d)] + (c_V^q)^2 m_q^2 m_{\tilde{\tau}_1}^2 \\
& \quad + (c_V^q)^2 m_{\tilde{\tau}_1}^2 (p_d \cdot p_c) + (c_V^q)^2 (p_a \cdot p_d)(p_b \cdot p_c) - (c_V^q)^2 (p_b \cdot p_c)(p_b \cdot p_d) \\
& \quad \left. - (c_A^q)^2 m_q^2 m_{\tilde{\tau}_1}^2 - m_{\tilde{\tau}_1}^2 (p_d \cdot p_c) + (c_A^q)^2 (p_a \cdot p_d)(p_b \cdot p_c) - (c_A^q)^2 (p_b \cdot p_c)(p_b \cdot p_d) \right] \\
& \hspace{25em} (C.14)
\end{aligned}$$

Das Einsetzen der Mandelstam-Variablen liefert als endgültiges Resultat:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 = \frac{8 \cdot 3g_Z^4 (z_{11}^{\tilde{\tau}_1})^2}{4 \cos^4 \theta_W (p^2 - M_Z^2)^2} & [(c_V^q)^2 (m_{\tilde{\tau}_1}^4 + m_{\tilde{\tau}_1} (2m_q^2 - t) + (m_q^2 - t)(m_q^2 - s - t)) \\
& + (c_A^q)^2 (m_{\tilde{\tau}_1}^4 - 2m_{\tilde{\tau}_1} (m_q^2 + t) + m_q^4 - 2m_q 2t + t(s + t))] \\
& \hspace{25em} (C.15)
\end{aligned}$$

## D. Farbalgebra

Bereits in Kap. 3 wurde auf *tree level* die aus der QCD resultierende Notwendigkeit eines Farbfaktors  $C_F$  zur Mittelung möglicher Farbkombinationen der Quarks angesprochen. Dessen Berechnung war an dieser Stelle recht trivial, etwas mehr Mühe erfordert die Berechnung der Farbfaktoren bei den Korrekturen erster Ordnung. Bei den QCD-Kopplungen in Anhang B.3 traten bereits die  $T^a$  auf. Diese bilden die Lie-Algebra hinter der nicht-abelschen Eichgruppe  $SU(3)$  (zur Lie-Algebra siehe Kap. 2.1.1), welche mit dem Kommutator als Lie-Klammer die nachfolgende Relation hervorbringt:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (D.1)$$

Man nennt die  $f^{abc}$  Strukturkonstanten. Die Farbladungen entstanden aus gruppentheoretischen Überlegungen, die an dieser Stelle zu weit führen. Die Quarks besitzen die Farben rot, grün und blau (R,G,B - selbstredend keine Farben in *dem* Sinne), die Gluonen sind farblos und treten in acht Farbkombinationen auf, sodass sie nachfolgendes  $SU(3)$ -Oktett bilden:

$$R\bar{G}, R\bar{B}, G\bar{R}, G\bar{B}, B\bar{R}, B\bar{G}, \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{R} - G\bar{G}), \frac{1}{\sqrt{6}}(R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B}) \quad (D.2)$$

Der Singulett-Zustand existiert nicht, da er keine Farbe vermitteln kann. Es liegen für die Generatoren folgende Relationen vor:

$$Tr(T^a) = 0 \quad Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (D.3)$$

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \left( \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (D.4)$$

Letztere linke Seite wird Casimir-Operator genannt, da dieser mit allen Generatoren kommutiert. Diese sogenannte Fierz-Identität kann man sich leicht durch Multiplikation von  $\delta_{kl}$  klar machen: Das Produkt aus Gell-Mann-Matrizen wird zu einer Spur, die (wie es bei den Elementen der Lie-Gruppen eine genuine Eigenschaft ist) verschwindet. In Einsteinscher Summenkonvention verschwindet ebenso die rechte Seite. Der Farbfaktor tritt im Zusammenhang mit der Gleichung

## D. Farbalgebra

$$(T^a T^a)_{ij} = \delta_{ij} C_F \quad (\text{D.5})$$

auf. Mit diesen Grundlagen kann man sich den Farbfaktoren der benötigten Prozesse zuwenden. Die Selbstenergie-Schleife besetzen wir mit den Indizes  $i, j, k, a$ , um die Farben zu kennzeichnen:

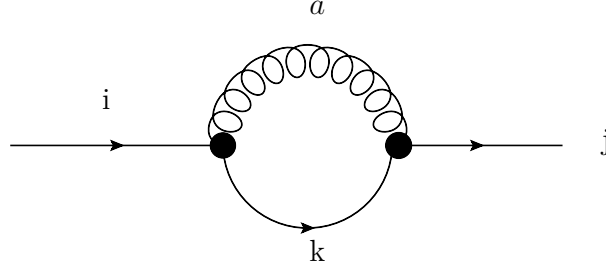


Abbildung D.1.: QCD-Beitrag zur Quark-Selbstenergie.

Jedem Vertex wird ein solches  $T$  zugeordnet. Wir erhalten:

$$T_{ki}^a T_{jk}^a = \frac{1}{2} \left( \delta_{kk} \delta_{ij} - \frac{1}{N} \delta_{ki} \delta_{jk} \right) = \frac{1}{2} \left( N \delta_{ij} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \right) = C_F \delta_{ij} \quad (\text{D.6})$$

Analog zu den *tree level* -Berechnungen verbleibt die Mittelung über die Eingangs- und Summation über die Ausgangsfarben:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left( N - \frac{1}{N} \right) \delta_{ij} = \frac{1}{2N} \left( N - \frac{1}{N} \right) \delta_{ii} = \frac{1}{2} \left( N - \frac{1}{N} \right) = C_F = \frac{4}{3} \quad (\text{D.7})$$

Die Gluinos tragen ebenfalls Farbladungen, sodass die SUSY-QCD-Schleife denselben  $C_F$  erhält. Es verbleibt die Vertexkorrektur, wo Gluon und Gluino wiederum gleich behandelt werden können.

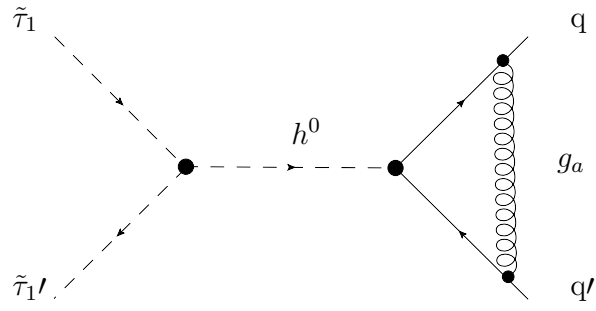
Die Indizierung der Propagatoren führt auf dieselbe mathematische Struktur wie bei den Countertermen, die Rechnung kann komplett analog erfolgen. Wir notieren hierfür  $C_F = \frac{4}{3}$ .

Dieselben Methoden ermöglichen die Behandlung der reellen Korrekturen. Die Berechnung ergibt ohne Aufwand:

$$C_F = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (\text{D.8})$$

Es verbleibt demzufolge  $C_F = 4/3$ . Die Farbfaktoren der führenden Ordnung (3) multipliziert an Counter-Terme und Vertexkorrekturen ergeben also denselben

# *D. Farbalgebra*



Farbfaktor wie die reelle Korrektur besitzt. Abstrahlung und andere Korrekturen faktorisieren damit gleich, sodass sich die IR-Divergenzen subtraktiv aufheben.

# E. Nützliches zu den NLO-Korrekturen

## E.1. Passarino-Veltman-Integrale

Es wurde in (4.1) erläutert, dass die allgemeine Struktur des N-Punkt-Tensorintegrals

$$T_{\mu_1, \dots, \mu_M}^N(p_1, \dots, p_{N-1}, m_0, \dots, m_{N-1}) \quad (\text{E.1})$$

$$= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \cdot \int d^D q \frac{q_{\mu_1} \dots q_{\mu_M}}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)[(q + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon] \dots [(q + p_{N-1})^2 - m_{N-1}^2 + i\epsilon]}$$

mittels Tensorreduktion auf die wenigen skalaren Passarino-Veltman-Integrale ( $A_0$ ,  $B_0$  usw.) reduziert werden können. Diese Verjüngung/Kontraktion geschieht über Viererimpulse und den metrischen Tensor und sieht folgendermaßen aus:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} A_2 \quad (\text{E.2})$$

$$B^\mu = p_1^\mu B_1 \quad (\text{E.3})$$

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} B_{00} + p_1^\mu p_1^\nu B_{11} \quad (\text{E.4})$$

$$C^\mu = p_1^\mu C_1 + p_2^\mu C_2 \quad (\text{E.5})$$

$$C^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} C_{00} + p_1^\mu p_1^\nu C_{11} + (p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu) C_{12} + p_2^\mu p_2^\nu C_{22} \quad (\text{E.6})$$

Diese skalaren Koeffizienten zerfallen ihrerseits wieder in die  $A_0$ ,  $B_0$  usw. Beispielsweise gilt

$$B_1 = \frac{1}{2p_1^2} (A_0(m_0) - A_0(m_1) - (p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) B_0) \quad (\text{E.7})$$

Eine detaillierte Übersicht findet sich etwa in [11].

Die Basisintegrale ( $D_0$  wird nicht benötigt und daher weggelassen) haben gemäß der allgemeinen Form  $T_{\mu_1, \dots, \mu_M}^N(p_1, \dots, p_{N-1}, m_0, \dots, m_{N-1})$  die Gestalt

$$A_0 = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \cdot \int d^D q \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (\text{E.8})$$

### E. Nützliches zu den NLO-Korrekturen

$$B_0 = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \cdot \int d^D q \frac{1}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)[(q + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon]} \quad (\text{E.9})$$

$$C_0 = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \cdot \int d^D q \frac{1}{(q^2 - m_0^2 + i\epsilon)[(q + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon][(q + p_2)^2 - m_2^2 + i\epsilon]} \quad (\text{E.10})$$

Diese Integrale können explizit ausgedrückt werden. Bei deren Berechnung wird die neue Variable  $\epsilon := \frac{4-D}{2}$  eingeführt. Zum Verständnis der auftretenden Terme sei an die Eulersche  $\Gamma$ -Funktion erinnert:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\text{E.11})$$

Die Zahl  $\partial_x \Gamma(x)_{x=1} = \gamma_E$  heißt Euler-Mascheroni-Konstante und tritt in vielen Bereichen der Mathematik auf. Es ergibt sich schlussendlich:

$$A_0 = m^2(\epsilon^{-1} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) + 1 + \mathcal{O}(\epsilon)) := m^2(\Delta - \ln \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) + 1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \quad (\text{E.12})$$

$B_0$  lässt sich auf ein simples Integral reduzieren, wobei die sog. Feynman-Parametrisierung verwendet wird. Es gelten nämlich die überaus nützlichen Identitäten

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(a(1-x) + bx)^2} \quad (\text{E.13})$$

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(a(1-x-y) + bx + cy)^3} \quad (\text{E.14})$$

Man erhält nach länglicher Rechnung

$$B_0 = \Delta - \int_0^1 dx \ln \left( \frac{x^2 p_1^2 - x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) + m_0^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right) \quad (\text{E.15})$$

$C_0$  ist zu umfangreich, um es an dieser Stelle zu erwähnen. Es treten recht exotische Funktionen wie der Dilogarithmus (Spence-Funktion)  $\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$  auf. Wichtig im Hinterkopf zu behalten ist jedoch das generische Integral  $I_n$ , welches ständig bei allen Integralen dieser Art auftritt und die Lösung

$$I_n(A) := \int d^D q \frac{1}{(q^2 - A + i\epsilon)^n} = i(-1)^n \pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \cdot (A - i\epsilon)^{D/2-n} \quad (\text{E.16})$$

## E. Nützliches zu den NLO-Korrekturen

besitzt. Bei den Rechnungen stellte sich die wesentliche Frage, inwieweit die Passarino-Veltman-Integrale UV-divergent sind. Aus [11] geben wir folgende Übersicht an:

Integral	UV-divergenter Anteil	$(D - 4) \times$ Integral
$A_0(m^2)$	$m^2 \Delta$	$-2m^2$
$A_2(m^2)$	$\frac{m^4}{4} \Delta$	$-2\frac{m^4}{4}$
$B_0(p^2, m_0^2, m_1^2)$	$\Delta$	$-2$
$B_1(p^2, m_0^2, m_1^2)$	$-\frac{1}{2}\Delta$	$1$

Weitere auftauchende Integrale können somit als UV-endlich angenommen werden. Einige in der Arbeit anzutreffende Integrale waren zudem nicht IR-konvergent, sodass die reellen Korrekturen diese Pole eliminieren mussten. Auch hierfür gibt es Tabellen, wobei wiederum nur die verwendeten Integrale auf Divergenzen untersucht werden:

Integral	IR-divergenter Anteil
$\dot{B}_0(m^2, \lambda^2, m^2) = \dot{B}_0(m^2, m^2, \lambda^2)$	$-1/2m^2 \cdot \ln(\lambda^2)$
$\ddot{B}_0(m^2, m^2, \lambda^2)$	$1/2m^2 \cdot \ln(\lambda^2)$
$C_0(m_1^2, s, m_2^2, \lambda^2, m_1^2, m_2^2)$	$-\ln \beta_0 / \kappa \cdot \ln(\lambda^2)$

Dabei finden sich  $\kappa$  und  $\beta_0$  im nachfolgenden Anhang wieder.  $\lambda$  ist die künstlich eingeführte Masse des Photons/Gluons, um die Divergenzen zu erzeugen.

## E.2. Phasenraumintegrale im $2 \rightarrow 3$ -Prozess

Ein massives Teilchen mit Viererimpuls  $P_0$  und Masse  $m_0$ , hier unser Austausch- teilchen, zerfalle in zwei Teilchen mit Impuls  $p_1$  und  $p_2$ , zudem werde ein Photon oder Gluon mit Impuls  $q$  abgestrahlt, für das pro forma eine Masse  $\lambda$  eingeführt werde (hierin zeigen sich später die Divergenzen bzw. ihre Beseitigung durch die reellen Korrekturen). Für die Phasenraumintegration wurde ein generisches Integral  $I$  verwandt, welches die folgende Form besaß:

$$I_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_m}(m_0, m_1, m_2) = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \frac{d^3 q}{2E_q} \delta(p_0 - p_1 - p_2 - q) \frac{(\pm 2q p_{j_1}) \dots (\pm 2q p_{j_m})}{(\pm 2q p_{i_1}) \dots (\pm 2q p_{i_n})} \quad (\text{E.17})$$

### E. Nützliches zu den NLO-Korrekturen

Für  $p_0$  ist beim Integranden das negative Vorzeichen zu wählen. Es existiert nun eine Reihe von Basisintegralen, mithilfe derer nun

$$\frac{1}{F} \int |\bar{\mathcal{M}}|^2 dPS^{(3)} \quad (\text{E.18})$$

ausgedrückt werden kann. Dafür müssen zunächst einige Dinge eingeführt werden: Die Källén-Funktion

$$\kappa = \kappa(m_0^2, m_1^2, m_2^2) = \sqrt{m_0^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2(m_0^2 m_1^2 + m_0^2 m_2^2 + m_1^2 m_2^2)} \quad (\text{E.19})$$

tritt bei den  $\beta_i$  auf, welche wie folgt aussehen:

$$\beta_0 = \frac{m_0^2 - m_1^2 - m_2^2 + \kappa}{2m_1 m_2} \quad \beta_1 = \frac{m_0^2 - m_1^2 + m_2^2 - \kappa}{2m_0 m_2} \quad \beta_2 = \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2 - \kappa}{2m_2 m_1} \quad (\text{E.20})$$

Sie besitzen im Übrigen die Eigenschaft

$$\beta_1 \beta_2 \beta_0 = 1 \quad (\text{E.21})$$

Des weiteren tritt die zuvor erwähnte Spence-Funktion (Eulerscher Dilogarithmus) auf:

$$Sp(z) = Li_2(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-u)}{u} du = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad (\text{E.22})$$

Die Integrale zerfallen in eine IR-endliche und eine IR-divergente Gattung. Die singulären Integrale sind gut anhand der künstlichen Masse  $\lambda$  identifizierbar. Man kann die Indizes 1 und 2 tauschen, indem man  $m_1$  und  $m_2$  einfach vertauscht.

$$I_{00} = \frac{1}{4m_0^4} \left[ \kappa \ln \left( \frac{\kappa^2}{\lambda m_0 m_1 m_2} \right) - \kappa - (m_1^2 - m_2^2) \ln \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) - m_0^2 \ln \beta_0 \right] \quad (\text{E.23})$$

$$I_{11} = \frac{1}{4m_1^2 m_2^2} \left[ \kappa \ln \left( \frac{\kappa^2}{\lambda m_0 m_1 m_2} \right) - \kappa - (m_0^2 - m_2^2) \ln \left( \frac{\beta_0}{\beta_2} \right) - m_0^2 \ln \beta_1 \right] \quad (\text{E.24})$$

$$I_{01} = \frac{1}{4m_0^2} \left[ 2 \ln \left( \frac{\lambda m_0 m_1 m_2}{\kappa^2} \right) \ln(\beta_2) + 2 \ln^2(\beta_2) - \ln^2(\beta_0) - \ln^2(\beta_1) \right. \\ \left. + 2Sp(1 - \beta_2^2) - Sp(1 - \beta_1^2) - Sp(1 - \beta_0^2) \right] \quad (\text{E.25})$$

$$I_{12} = \frac{1}{4m_0^2} \left[ 2 \ln \left( \frac{\lambda m_0 m_1 m_2}{\kappa^2} \right) \ln(\beta_0) + 2 \ln^2(\beta_0) - \ln^2(\beta_1) - \ln^2(\beta_2) \right. \\ \left. + 2Sp(1 - \beta_0^2) - Sp(1 - \beta_1^2) - Sp(1 - \beta_2^2) \right] \quad (\text{E.26})$$

Die IR-endlichen Integrale sind etwas zahlreicher:

$$I = \frac{1}{4m_0^2} \left[ \frac{\kappa}{2} (m_0^2 + m_1^2 + m_2^2) + 2m_0^2 m_1^2 \ln(\beta_2) + 2m_0^2 m_2^2 \ln(\beta_1) + 2m_1^2 m_2^2 \ln(\beta_0) \right] \quad (\text{E.27})$$

$$I_0 = \frac{1}{4m_0^2} \left[ -2m_1^2 \ln(\beta_2) - 2m_2^2 \ln(\beta_1) - \kappa \right] \quad (\text{E.28})$$

$$I_1 = \frac{1}{4m_0^2} \left[ -2m_0^2 \ln(\beta_2) - 2m_2^2 \ln(\beta_0) - \kappa \right] \quad (\text{E.29})$$

$$I_0^1 = \frac{1}{4m_0^2} \left[ m_1^4 \ln(\beta_2) - m_2^2 (2m_0^2 - 2m_1^2 + m_2^2) \ln(\beta_1) - \frac{\kappa}{4} (m_0^2 - 3m_1^2 + 5m_2^2) \right] \quad (\text{E.30})$$

$$I_1^0 = \frac{1}{4m_0^2} \left[ m_1^4 \ln(\beta_2) - m_2^2 (2m_1^2 - 2m_0^2 + m_2^2) \ln(\beta_1) - \frac{\kappa}{4} (m_1^2 - 3m_0^2 + 5m_2^2) \right] \quad (\text{E.31})$$

$$I_2^1 = \frac{1}{4m_0^2} \left[ m_1^4 \ln(\beta_0) - m_0^2 (2m_2^2 - 2m_1^2 + m_0^2) \ln(\beta_1) - \frac{\kappa}{4} (m_2^2 - 3m_1^2 + 5m_0^2) \right] \quad (\text{E.32})$$

$$I_{00}^{12} = -\frac{1}{4m_0^2} \left[ m_1^4 \ln(\beta_2) + m_2^4 \ln(\beta_1) + \frac{\kappa^3}{6m_0^2} + \frac{\kappa}{4} (3m_1^2 + 3m_2^2 - m_0^2) \right] \quad (\text{E.33})$$

$$I_{11}^{02} = -\frac{1}{4m_0^2} \left[ m_1^4 \ln(\beta_2) + m_2^4 \ln(\beta_0) + \frac{\kappa^3}{6m_1^2} + \frac{\kappa}{4} (3m_0^2 + 3m_2^2 - m_1^2) \right] \quad (\text{E.34})$$

$$I_{11}^{00} = \frac{1}{4m_0^2} \left[ 2m_2^2 (m_1^2 + m_2^2 - m_0^2) \ln(\beta_0) + \frac{\kappa^3}{6m_1^2} + 2\kappa m_2^2 \right] \quad (\text{E.35})$$

*E. Nützliches zu den NLO-Korrekturen*

$$I_{00}^{11} = \frac{1}{4m_0^2} \left[ 2m_2^2(m_0^2 + m_2^2 - m_1^2) \ln(\beta_1) + \frac{\kappa^3}{6m_0^2} + 2\kappa m_2^2 \right] \quad (\text{E.36})$$

$$I_{11}^{22} = \frac{1}{4m_0^2} \left[ 2m_0^2(m_0^2 + m_1^2 - m_2^2) \ln(\beta_2) + \frac{\kappa^3}{6m_1^2} + 2\kappa m_0^2 \right] \quad (\text{E.37})$$

*Bemerkung:* Bei diesen Integralen wird ein effektiver  $1 \rightarrow 3$ -Prozess beschrieben. Dabei darf  $m_0$  nur als Masse des zerfallenden Teilchens angesehen werden, wenn die on-shell-Bedingung gilt. Für virtuelle Austauschbosonen, wie im Fall der Arbeit das leichte skalare  $h^0$ , muss das Massenquadrat durch die Mandelstam-Variable  $s$  ersetzt und als Schwerpunktsenergie interpretiert werden.

## F. Berechnung der IR-konvergenten Phasenraumintegrale

### (a) Grundlagen

Die Tatsache, dass die Integrale aus E.2. nur in Spezialfällen auftreten und dann die numerische Integration ersparen, führte dazu, dass deren explizite Berechnung in der Literatur nicht zu finden ist. Um das Verständnis ihres Ursprungs zu erlangen, wurden sie daher im Rahmen der Arbeit durchgeführt. Einige Grundlagen, die dies vereinfachen, wurden bereits in [11] gelegt und werden nur in kurzer Form präsentiert.

Betrachten wir zunächst das einfachste Integral ohne Skalarprodukte jedweder Art. Mit diesem soll zunächst der Umgang mit dem Integrationsmaß geschildert werden.

$$I = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2} \frac{d^3\vec{q}}{2E_q} \delta^{(4)}(p_0 - p_1 - p_2 - q) \quad (\text{F.1})$$

Die Relation der Delta-Distribution für eine differenzierbare Funktion  $f(x)$  mit Nullstellen  $x_n$

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|\partial_x f(x_n)| \delta(x - x_n)} \quad (\text{F.2})$$

führt auf

$$\int \frac{d^3\vec{p}_i}{2E_i} = \int d^4p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(E_i) \quad (\text{F.3})$$

mit der Heaviside-Funktion  $\Theta$ , die das Integral auf physikalisch sinnvolle Energien beschränkt. Wir erhalten damit ein generisches Phasenraumelement

$$d\Gamma = d^4p_1 d^4p_2 d^4q \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta(p_2^2 - m_2^2) \delta(q^2) \delta^{(4)}(p_0 - p_1 - p_2 - q) \quad (\text{F.4})$$

Die Auswertung der Distribution für die Viererimpulserhaltung eliminiert beispielsweise  $p_2$ . Nach etwas Rechnung verbleibt

## F. Berechnung der IR-konvergenten Phasenraumintegrale

$$d\Gamma = \frac{1}{8} dp_1^0 d\eta dq^0 d \cos \theta d\phi \quad (\text{F.5})$$

Die Herleitungen der nachfolgenden Grenzen ist länglich, wir geben das Resultat an [11]:

$$\eta \in [0, 2\pi] \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad \theta \in [0, \pi] \quad (\text{F.6})$$

$$(q^0)_{\min} = 0 \quad (q^0)_{\max} = \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{(m_1 + m_2)^2}{2\sqrt{s}} \quad (\text{F.7})$$

$$(p_1^0)_{\min}^{\max} = \frac{1}{2\tau} \left[ \sigma(\tau + m_+ m_-) \pm |\vec{q}| \sqrt{(\tau - m_+^2)(\tau - m_-^2)} \right] \quad (\text{F.8})$$

$$\sigma = \sqrt{s} - q^0 \quad \tau = s - 2\sqrt{s}q^0 \quad m_{\pm} = m_1 \pm m_2 \quad (\text{F.9})$$

Mit diesen Überlegungen kann die Berechnung nun vorgenommen werden: Zunächst soll dies für das indexfreie Integral durchgeführt werden, welches keine Skalarprodukte besitzt. Die explizite Integration führt zu Rechnungen, die auch in vielen anderen Phasenraumintegrationen in Gänze übernommen werden können.

### (b) Berechnung von $I$

Die Definition des Viererimpulses  $p^\mu = (E, \vec{p})$  erlaubt es uns für den Impuls  $q$  des masselosen abgestrahlten Teilchens  $|\vec{q}| = q^0$  zu schreiben. Die Integration ist nicht  $p_1^0$ -abhängig. Einsetzen liefert daher mit der Substitution  $x = \sqrt{s} - q^0$  sowie mit  $s = m_0^2$  das Integral

$$I = \frac{1}{4m_0^2} \left[ \int_a^s \frac{s}{x} \sqrt{(x-a)(x-b)} dx - \int_a^s \sqrt{(x-a)(x-b)} dx =: \frac{1}{4m_0^2} (I_\alpha - I_\beta) \right] \quad (\text{F.10})$$

wobei  $a = (m_1 + m_2)^2$  und  $b = (m_1 - m_2)^2$  gewählt wurden. Diese Integrale begegnen uns in allen weiteren Schritten. Ihre Berechnung erfolgt über verschiedene geschickte Substitutionen.  $I_\beta$  ist strukturell etwas einfacher. Nützlich sind dabei die Relationen

$$a + b = 2(m_1^2 + m_2^2) \quad a - b = 4m_1 m_2 \quad ab = (m_1^2 - m_2^2)^2 \quad (\text{F.11})$$

Zunächst bietet sich eine quadratische Ergänzung an:

$$I_\beta = \int dx \sqrt{(2x - b - a)^2 - b^2 + 2ab - a^2} = \frac{1}{2} \int dy \sqrt{y^2 - (a - b)^2} \quad (\text{F.12})$$

## F. Berechnung der IR-konvergenten Phasenraumintegrale

Bei Wurzelfunktionen bieten sich hyperbolische Funktionen zur Substitution an. Explizit wenden wir  $y = (a - b) \cosh(z)$  an. Dies führt auf

$$\int \sqrt{\cosh(z) - 1} \sinh(z) dz = \int \frac{w^2}{(w^2 - 1)^2} dw \quad (\text{F.13})$$

mit  $w = \tanh(z)$ ,  $dz = \frac{dw}{1 - \tanh^2(z)}$ . Eine Partialbruchzerlegung liefert elementar integrierbare Funktionen in  $w$ :

$$\int \frac{dw}{4} \left( \frac{1}{w + 1} + \frac{1}{(w + 1)^2} - \frac{1}{w - 1} + \frac{1}{(w - 1)^2} \right) \quad (\text{F.14})$$

Computeralgebra ist für die anschließende Resubstitution hilfreich. Sie führt schlussendlich auf

$$I_\beta = -\frac{1}{8} \left[ (a - b)^2 \ln(2\sqrt{x^2 - (a + b)x + ab} + 2x - (a + b)) \right. \\ \left. + (2(a + b) - 4x)\sqrt{x^2 - (a + b)x + ab} \right] \quad (\text{F.15})$$

Das Einsetzen der Grenzen führt mit Anwendung von Logarithmengesetzen auf

$$-2m_1^2 m_2^2 \ln(\beta_0) - \frac{\kappa}{2} (m_1^2 + m_2^2 - m_0^2) \quad (\text{F.16})$$

Mit dem Vorfaktor  $1/4m_0^2$  und Vorzeichenwechsel hat man den ersten Teil von  $I$  gefunden. Man erkennt, dass  $I_\alpha$  ein  $\kappa m_0^2$  beinhalten muss. Generell wird bei diesem Integral ähnlich vorgegangen, beginnend bei einer quadratischen Ergänzung:

$$I_\alpha = \frac{a - b}{2} \int dx \frac{s}{x} \sqrt{\left[ \frac{2}{a - b} \left( x - \frac{a + b}{2} \right) \right]^2 - 1} \quad \tilde{x} = \frac{2}{a - b} \left( x - \frac{a + b}{2} \right) \quad (\text{F.17})$$

Bezeichne nun  $\tilde{x} = \cos^{-1}(t)$ , dann erhält man nach kurzer Rechnung

$$\frac{(a - b)^2 s}{4} \int \frac{dt}{\frac{a - b}{2} + \frac{a + b}{2}} \cos(t) (\cos^{-2}(t) - 1) \quad (\text{F.18})$$

was man mit der Universalsubstitution á la Weierstraß bewerkstelligen kann - hierbei gilt  $\tan(t/2) = u$  sowie  $\cos(t) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$  und  $\sin(t) = \frac{2u}{1 + u^2}$ . Auf diese Weise ergibt sich der nachfolgende Ausdruck:

$$\frac{(a - b)^2 s}{4} \int \frac{du}{A - Bu^2} \frac{-8u^2}{(1 - u^2)^2} \quad (\text{F.19})$$

## F. Berechnung der IR-konvergenten Phasenraumintegrale

Erneut bietet sich eine Partialbruchzerlegung an. Das Integral besitzt daraufhin die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} & \frac{(a-b)^2 s}{4} \int du \left[ \frac{2(a+b)}{(a-b)^2(1-u)} - \frac{2}{(a-b)(1-u)^2} - \frac{2}{(a-b)(1+u)^2} \right. \\ & \left. + \frac{2(a+b)}{(a-b)^2(1+u)} - \frac{4\sqrt{ab}}{(a-b)^2(\sqrt{a}-\sqrt{bu})} - \frac{4\sqrt{ab}}{(a-b)^2(\sqrt{a}+\sqrt{bu})} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Die umfangreiche Resubstitution gelingt am besten mit ein wenig technischer Hilfe und führt auf das Resultat

$$\begin{aligned} I_\alpha = & -\frac{1}{2} \left[ 2\sqrt{ab} \ln \left( 2\sqrt{ab} \frac{\sqrt{x^2 - (a+b)x + ab} + 2ab}{x} - (a+b) \right) \right. \\ & \left. + (a+b) \ln(2\sqrt{x^2 - (a+b)x + ab} + 2x - (a+b)) - 2\sqrt{x^2 - (a+b)x + ab} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

Einsetzen der Grenzen liefert den folgenden, erneut mit Logarithmengesetzen verkürzten Ausdruck:

$$\begin{aligned} I_\alpha = & \kappa m_0^2 - m_0^2(m_1^2 + m_2^2) \ln(\beta_0) - m_0^2(m_1^2 - m_2^2) \\ & \times \ln \left[ \frac{2(m_1^2 - m_2^2)\kappa + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 2m_0^2(m_1^2 + m_2^2)}{4m_0^2 m_1 m_2} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

Man kann sich nun der Eigenschaft (E.21) bedienen, um etwa  $\beta_0$  umzuschreiben. Es folgt beispielsweise  $\ln(\beta_0) = -[\ln(\beta_1) + \ln(\beta_2)]$

Nun verbleibt dann lediglich mit etwas Algebra zu zeigen, dass das Argument im unteren Logarithmus  $\frac{2(m_1^2 - m_2^2)\kappa + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 2m_0^2(m_1^2 + m_2^2)}{4m_0^2 m_1 m_2}$  gerade  $\beta_1/\beta_2$  entsprechen muss, um das erwünschte Resultat zu erzielen, wenn man  $\beta_0$  wie zuvor beschrieben umformuliert. Zusammenfassen der beiden errechneten Integrale liefert final:

$$I = \frac{1}{4m_0^2} \left[ \frac{\kappa}{2} (m_0^2 + m_1^2 + m_2^2) + 2m_0^2 m_1^2 \ln(\beta_2) + 2m_0^2 m_2^2 \ln(\beta_1) + 2m_1^2 m_2^2 \ln(\beta_0) \right] \quad (\text{F.23})$$

## F. Berechnung der IR-konvergenten Phasenraumintegrale

Tritt nun im Integranden ein Skalarprodukt aus Viererimpulsen auf, so kann man sich der Identitäten aus [11] bedienen:

$$2p_1 \cdot q = s \left( 1 - \frac{2p_2^0}{\sqrt{s}} \right) - m_1^2 + m_2^2 \quad (\text{F.24})$$

$$2p_2 \cdot q = s \left( 1 - \frac{2p_1^0}{\sqrt{s}} \right) + m_1^2 - m_2^2 \quad (\text{F.25})$$

$$2p_1 \cdot p_2 = s \left( 1 - \frac{2q^0}{\sqrt{s}} \right) - m_1^2 - m_2^2 \quad (\text{F.26})$$

### (c) Berechnung von $I_0$

Für  $I_0$  kann man dies jedoch umgehen. Man beachte, dass  $q$  nur in der ersten Komponente einen nicht-verschwindenden Beitrag liefert. Somit können wir  $p_0$  als  $\sqrt{s}$  formulieren:

$$I_0 = -\frac{1}{2\sqrt{s}} \int dq^0 dp_1^0 \frac{1}{q^0} \quad (\text{F.27})$$

Die Substitution wie zuvor bei  $I$  führt uns auf das wohlbekannte  $I_\alpha$ , nun mit anderem Vorzeichen. Es kürzt sich nämlich aus den Integrationsgrenzen aus (??) der  $q^0$ -Faktor. Wir erhalten also nach Vergleich mit der vorherigen Berechnung

$$I_0 = \frac{1}{4m_0^2} \left[ -2m_1^2 \ln(\beta_2) - 2m_2^2 \ln(\beta_1) - \kappa \right] \quad (\text{F.28})$$

Die Betrachtung des Integrationsmaßes liefert uns unmittelbar die Symmetrie  $0 \leftrightarrow 1$  und dementsprechend  $0 \leftrightarrow 2$ . Der Tausch der Indizes führt auf

$$I_1 = \frac{1}{4m_0^2} \left[ -2m_0^2 \ln(\beta_2) - 2m_2^2 \ln(\beta_0) - \kappa \right] \quad (\text{F.29})$$

und analog für  $I_2$ , wobei die  $2 \leftrightarrow 1$ -Symmetrie bereits zuvor vorausgesetzt wurde und in einer minimalen Liste nicht berücksichtigt wird.

### (d) Berechnung von $I_0^1/I_1^0$

Anstelle von  $I_0^1$  wird nun zunächst  $I_0^2$  berechnet. Der Grund dafür liegt in den Skalarprodukten in (F.24) bis (F.26):  $2p_2 \cdot q$  beinhaltet ein  $p_1^0$ , was uns von der Notwendigkeit befreit, alle Integrationsgrenzen neu zu berechnen, wenn man eine  $p_2^0$ -Integration ausführen müsste, die aus  $p_1 \cdot q$  resultiert. Das Resultat aus (E.30/E.31) kann anschließend durch simplen Indextausch erzielt werden. Es muss also

F. Berechnung der IR-konvergenten Phasenraumintegrale

$$I_0 = -\frac{1}{2\sqrt{s}} \int dq^0 dp_1^0 \frac{1}{q^0} \left( s \left( 1 - \frac{2p_1^0}{\sqrt{s}} \right) + m_1^2 - m_2^2 \right) \quad (\text{F.30})$$

berechnet werden. Der  $p_1^0$ -unabhängige Teil führt effektiv auf eine  $I_0$ -Struktur:

$$\frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{4m_0^2} \left[ -m_1^2 \ln(\beta_2) - m_2^2 \ln(\beta_1) - \frac{\kappa}{2} \right] \quad (\text{F.31})$$

Ferner bleibt ein Term der Gestalt

$$\frac{1}{2} \int \frac{dq^0}{q^0} [(p_1^0)^{max}]^2 - [(p_1^0)^{min}]^2 \quad (\text{F.32})$$

welcher nach etwas Rechnung und üblicher Substitution in folgendes Integral mündet:

$$\frac{1}{4\sqrt{s}} \int_a^s \frac{1}{x^2} (x + (m_1^2 - m_2^2)) \left( \frac{\sqrt{s}}{2} + \frac{x}{2\sqrt{s}} \right) \sqrt{(x-a)(x-b)} dx \quad (\text{F.33})$$

Dieses kann man nach Ordnungen in  $x$  aufspalten. Zum einen findet man wieder die bekannten  $I_\alpha$  und  $I_\beta$ , außerdem errechnet man mit ähnlichen Methoden das Integral

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{(x-a)(x-b)} dx \quad (\text{F.34})$$

zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{ab}x} \left[ (a+b)x \ln \left( \frac{2\sqrt{ab}\sqrt{x^2 - (a+b)x + ab} + 2ab}{x} - (a+b) \right) \right. \\ & \left. + 2\sqrt{ab}x \ln[\sqrt{x^2 - (a+b)x + ab} + 2x - (a+b)] - 2\sqrt{ab}\sqrt{x^2 - (a+b)x + ab} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.35})$$

Man erhält damit die folgenden Komponenten:

$$\frac{1}{8m_0^2} \int_a^s dx \sqrt{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{4m_0^2} \left[ -m_1^2 m_2^2 \ln(\beta_0) - \frac{\kappa}{4} m_1^2 - \frac{\kappa}{4} m_2^2 + \frac{\kappa}{4} m_0^2 \right] \quad (\text{F.36})$$

$$\frac{1}{8} \int_a^s dx \frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{x} = \frac{1}{4m_0^2} \left[ m_0^2 m_2^2 \ln(\beta_1) + m_0^2 m_1^2 \ln(\beta_2) + \frac{\kappa m_0^2}{2} \right] \quad (\text{F.37})$$

## F. Berechnung der IR-konvergenten Phasenraumintegrale

$$\frac{(m_1^2 - m_2^2)}{8m_0^2} \int_a^s dx \frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{x} = \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{4m_0^2} \left[ m_2^2 \ln(\beta_1) + m_1^2 \ln(\beta_2) + \frac{\kappa}{2} \right] \quad (\text{F.38})$$

Einsetzen der Grenzen liefert das Ergebnis:

$$\begin{aligned} & \ln \left( \frac{2(m_1^2 - m_2^2)\kappa + 2(m_1^2 - m_2^2)^2}{m_0^2} - 2(m_1^2 + m_2^2) \right) \\ & + \ln(\kappa + 2m_0^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)) - m_0^2 \kappa - 2 \ln(4m_1 m_2) \end{aligned} \quad (\text{F.39})$$

Wir erkennen dieselben Argumente der Logarithmen wie aus  $I_\alpha$  wieder. Bereits die Betrachtung aller  $\kappa$ -Terme bei Aufsummation gibt Aufschluss darüber, dass wir richtig gerechnet haben. Man erhält

$$I_0^2 = \frac{1}{4m_0^2} \left[ m_2^4 \ln(\beta_1) - m_1^2(2m_0^2 - 2m_2^2 + m_1^2) \ln(\beta_2) - \frac{\kappa}{4}(m_0^2 - 3m_2^2 + 5m_1^2) \right] \quad (\text{F.40})$$

Man bekommt demzufolge das zu erwartende Ergebnis für  $I_0^1$  bei Indextausch und somit das in Anhang E aufgelistete. Die Ausnutzung der Symmetrie liefert überdies

$$I_1^0 = \frac{1}{4m_0^2} \left[ m_1^4 \ln(\beta_2) - m_2^2(2m_1^2 - 2m_0^2 + m_2^2) \ln(\beta_1) - \frac{\kappa}{4}(m_1^2 - 3m_0^2 + 5m_2^2) \right] \quad (\text{F.41})$$

### (e) Berechnung von $I_2^1$

Die Behandlung von  $I_2^1$  erfolgt über die Impulsbilanz im CMS-System:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{q} = 0 \quad E_0 = E_1 + E_2 + E_q = \sqrt{s} \quad (\text{F.42})$$

Wir formulieren  $p_1$  als  $p_0 - p_2 - q$ , sodass sich  $I_2^2$  zum Standardintegral  $I$  kürzt und ferner ein  $I_2^0$  verbleibt (mit Symmetrien umzuformen). Durch die Konvention der Vorzeichen trägt dieses Integral ein negatives. Das  $q^2$ -Skalarprodukt liefert trivialerweise keinen Beitrag. Die Betrachtung des Zählers

$$\begin{aligned} & -\frac{\kappa}{2}(m_0^2 + m_1^2 + m_2^2) - 2m_0^2 m_1^2 \ln(\beta_2) - 2m_0^2 m_2^2 \ln(\beta_1) - 2m_1^2 m_2^2 \ln(\beta_0) \\ & -m_1^4 \ln(\beta_1) + m_1^2(2m_2^2 - 2m_0^2 + m_1^2) \ln(\beta_2) + \frac{\kappa}{4}(m_2^2 - 3m_0^2 + 5m_1^2) \end{aligned} \quad (\text{F.43})$$

offenbart nach Kürzen das Ergebnis aus Anhang E.2.

**(f) Berechnung von 4-Index-Integralen**

Die restlichen fünf Integrale können mithilfe ein paar kurzer Umformungen allesamt aus  $I_{00}^{12}$  gewonnen werden. Die Symmetrie ergibt automatisch  $I_{11}^{02}$ . Erhaltung des Viererimpulses ermöglicht es uns

$$I_{00}^{11} = -I_0^1 - I_{00}^{12} \quad I_{11}^{22} = -I_1^2 - I_{11}^{02} \quad (\text{F.44})$$

zu schreiben, des Weiteren erhält man  $I_{11}^{00}$  durch Indextausch. Die Berechnungen können daher abgeschlossen werden, sobald  $I_{00}^{12}$  bekannt ist ( $p_2 = p_0 - p_1$ ):

$$I_{00}^{12} = \frac{1}{4m_0^2} \int \frac{dq^0}{(q^0)^2} dp_1^0 2q \cdot (p_0 - p_1) 2q \cdot p_1 \quad (\text{F.45})$$

Man kann direkt  $I_0^1$  weiterverwenden, zudem kommt der Integrand

$$-\frac{1}{(q^0)^2} (m_0^2 + m_1^2 - m_2^2 - 2\sqrt{s}p_1^0)^2 \quad (\text{F.46})$$

zur Berechnung hinzu. Es bleibt mit  $(2\sqrt{s}p_1^0)^2 = 4m_0^2 m_1^2$  ein  $p_1^0$ -unabhängiger Summand im Integral, dessen Auswertung einfacher ist:

$$-\frac{1}{4m_0^2} [(m_0^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4m_0^2 m_1^2] \int \frac{dq^0}{q^0} \frac{1}{s - \sqrt{2}q^0} \sqrt{(s - \sqrt{2}q^0 - a)(s - \sqrt{2}q^0 - b)} \quad (\text{F.47})$$

Mit  $s - \sqrt{2}q^0 = x$  erhalten wir ein noch bislang nicht betrachtetes Integral der folgenden Form:

$$\int \frac{dx}{xs - x^2} \sqrt{(x - a)(x - b)} \quad (\text{F.48})$$

Mit den Abkürzungen  $\chi = (s - a)(s - b)$ ,  $\xi = 2x + (b - a) - (b + a)$  und  $\tilde{\xi} = 2x - (b - a) - (b + a)$  ergibt sich nach längerer computergestützter Rechnung das Integral

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \left[ \sqrt{\chi} \ln[\sqrt{\chi\xi} + (s - a)\sqrt{\tilde{\xi}}] - \ln[\sqrt{\chi\xi} + (a - s)\sqrt{\tilde{\xi}}] \right. \\ & \left. + \sqrt{ab} \ln[\sqrt{ab\xi} + \chi\sqrt{\tilde{\xi}}] - \ln[\sqrt{ab\xi} - \chi\sqrt{\tilde{\xi}}] + \ln[\sqrt{\xi} + \sqrt{\tilde{\xi}}] \right] \end{aligned} \quad (\text{F.49})$$

Noch arbeitsaufwändiger ist die Behandlung des Terms  $4\sqrt{s}p_1^0(m_0^2 + m_1^2 + m_2^2)$ , da nun die  $p_1^0$ -Integration explizit ausgeführt werden muss. Man erkennt die Ähnlichkeit zu den Rechnungen in (F.32), sodass wir analog vorgehen und das Integral

*F. Berechnung der IR-konvergenten Phasenraumintegrale*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_0^2} \sqrt{s} (m_0^2 + m_1^2 + m_2^2) \int \frac{dq^0}{q^0} (\sqrt{s} - q^0) [s - 2\sqrt{s}q^0 \\ & + (m_1^2 - m_2^2)] \frac{1}{2\tau^2} \sqrt{(s - 2\sqrt{s}q^0 - a)(s - 2\sqrt{s}q^0 - b)} \end{aligned} \quad (\text{F.50})$$

erhalten. Dieses multiplizieren wir aus und ordnen in Potenzen von der letzten Integrationsvariable  $q^0$ , was auf drei Integrale führt (ohne  $q^0$ , einfach im Nenner und im Zähler) - Substitution liefert:

$$\frac{1}{m_0^2} (m_0^2 + m_1^2 + m_2^2) (m_1^2 + 3m_0^2 - m_2^2) \int_s^a \frac{dx}{2x^2} \sqrt{(x-a)(x-b)} \quad (\text{F.51})$$

$$- \frac{2}{m_0^2} (m_0^2 + m_1^2 + m_2^2) (m_0^4 + m_0^2(m_1^2 - m_2^2)) \int_s^a \frac{dx}{2(x^2s - x^3)} \sqrt{(x-a)(x-b)} \quad (\text{F.52})$$

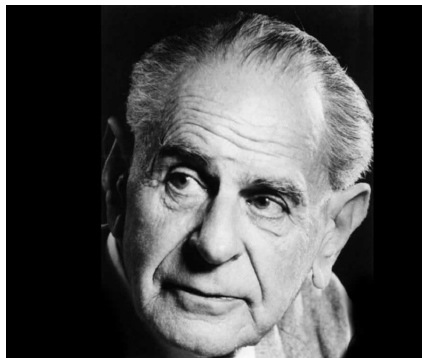
$$- \frac{1}{m_0^2} (m_0^2 + m_1^2 + m_2^2) \int_s^a dx \frac{(s-x)}{2x^2} \sqrt{(x-a)(x-b)} \quad (\text{F.53})$$

Das mittlere Integral lässt sich auch mithilfe von Computeralgebra beim jetzigen Stand nicht auf eine elementare Stammfunktion bringen. Die anderen Integrale sind allesamt aus vorherigen Rechnungen bekannt und können ausgewertet werden. Es zeigt sich damit, dass der Ursprung der Phasenraumintegrale mit etwas Aufwand durchaus nachvollziehbar ist. Der letzte Feinschliff sowie die Behandlung der divergenten Integrale mit Spence-Funktionen bietet noch Material für weitere Arbeiten.

## G. SUSY und Poppers Falsifikationismus

*Ein empirisch-wissenschaftliches System muss  
an der Erfahrung scheitern können*  
-Karl R. Popper(1902-1994)

Die mathematische Ästhetik der Supersymmetrie zusammen mit ihrer großen Erklärkraft machen die Theorie zu einem der wichtigsten Ansätze, Fragen der Grundlagen der Physik und des Universums außerhalb des wohlbekannten Terrains des Standardmodells eine Antwort zu liefern. SUSY sei einfach zu elegant, zu schön, zu wertvoll sie ad acta zu legen - so die Meinung vieler Physiker. Auch eingedenk der Tatsache, dass die Bemühungen am LHC bislang erfolglos blieben. An dieser Stelle möchte ich mir kein Urteil über den Wert der Theorie erlauben, sondern vielmehr einen wissenschaftsphilosophischen Blick auf diese werfen und Forderungen an sie stellen, die aus Karl Poppers Werk zum Kritischen Rationalismus abgeleitet werden können. Nicht zuletzt ist das Fundament des Erfolges der Physik das Konglomerat von Experiment und Theorie - auch die moderne theoretische Physik sollte an den Grundlagen einer empirischen Wissenschaft festhalten. Mit diesem Exkurs in die Wissenschaftstheorie soll die Arbeit zu einem runden Ende gelangen.



Der Falsifikationismus ist bei Popper zentraler Bestandteil, den Wert einer sich als empirisch vorgebenden Theorie zu charakterisieren. Intuitiv würde man den

Prozess der Verifikation einer Theorie als Prozess deren Bestätigung ansehen. Der entscheidende Schritt ist jedoch in der modernen Wissenschaftstheorie im Sinne Poppers, die Möglichkeit zur Falsifikation zu haben, jedoch deren Ausbleiben als Bestätigung zu betrachten. Es ist ein wesentlicher Unterschied, ob man eine empirische Theorie als wahr ansieht oder als nicht falsch. Wahrheit ist vielmehr ein Begriff, der aus dem logischen Schließen hervorgeht und in das Reich der Mathematik gehört. Bereits in Humes Induktionsproblem zeigt sich die Schwierigkeit mit der Wahrheit einer naturwissenschaftlichen Aussage.

Das Problem der Verifikation trat im Leben Poppers in besonderer Schärfe im Aufkommen der neuen psychologischen Theorien Freuds und Adlers zutage. Die Bewunderer dieser Theorien hoben die besondere Fülle an Verifikationen hervor. Poppers Kritik nimmt genau darauf Bezug und konstruiert folgende Situation: Ein Mann stößt ein Kind ins Wasser, das zu ertrinken droht. Ein anderer stellt sein Leben aufs Spiel, um es zu retten. Nach Adler leiden beide Personen an Minderwertigkeitskomplexen (der eine beweist sich, dass er ein Verbrechen begehen kann, der andere, dass er einen Menschen retten kann). Bei Freud leidet der eine unter einer Verdrängung, der Retter unter einer Sublimierung.

Es ist kaum eine Situation denkbar, die nicht mit der Individualpsychologie und der Psychoanalyse erklärbar wäre. Es besteht keine Angriffsfläche, die Theorien zu falsifizieren. Hingegen lieferte etwa Einsteins ART bei Eddingtons Untersuchung eine exakte Vorhersage, wie das Licht der Sterne während der Sonnenfinsternis durch die Krümmung der Raumzeit verschoben sein müsste. Ohne die Verschiebung wäre die ART eindeutig falsifiziert. Welche Bedingungen machen nun die SUSY zu einer empirischen Theorie? Es gibt Überlegungen, dass einige Superpartner Massen zwischen 100 GeV und einem TeV besitzen - Energien, die am LHC realisierbar sind. Doch dies sind nur Überlegungen. Das Ausbleiben der Detektion solcher Teilchen kann damit erklärt werden, dass ihre Massen höher sein müssen, welche noch nicht nachweisbar sind. Damit wird der SUSY die Möglichkeit zur Falsifizierbarkeit genommen!

Eine Theorie werde dann empirisch, wenn ein Beobachtungssatz konstruiert werden kann, der im Widerspruch zu ihren Vorhersagen steht. Auf die SUSY übertragen bedeutet dies: Die Theorie sagt ein konkretes Massenintervall voraus, in welchem dieser oder jener Superpartner gefunden werden muss. Der widersprüchliche Beobachtungssatz wäre: Man findet in diesem Bereich das Teilchen nicht. Die derzeitigen Überlegungen zur Masse sind zu vage, um diese Konstruierbarkeit zu garantieren. Die Beobachtung des momentanen Kenntnisstands, dass kein SUSY-Teilchen entdeckt wurde, ist nicht widersprüchlich zur Theorie. Somit wissen wir: Die SUSY ist nicht falsch. Dies macht sie aber vorerst nicht zu einer haltbaren empirischen Theorie, da das Falsifikationspotenzial zu gering ist.

Aber lässt sich das Problem mangelnder Möglichkeiten der Falsifikation eingrenzen? Man erinnere sich an den Wert der Higgs-Masse, welcher mit SUSY-Schleifenkorrekturen auf einen attraktiven Wert gebracht werden konnte, ohne dass man quadratische Divergenzen hätte wegrenormieren müssen. Übrig blieben im Lichte der Gleichung (2.3) nur logarithmische Divergenzen. Man macht sich leicht klar, dass die Größe der SUSY-Korrekturen entscheidend von der Masse der SUSY-Teilchen abhängt. Das Spektrum möglicher Massen für SUSY-Szenarios ist bekanntlich sehr ausufernd, doch nur wenige Massen erklären die Higgs-Masse, die mit Beobachtungen vereinbar ist, auf solch eine natürliche, um nicht zu sagen ästhetische Art und Weise. Es wäre andernfalls ein als unnatürlich empfundenes Fine-Tuning vonnöten. Blicke also zu diskutieren, inwieweit Natürlichkeit als Voraussetzung für eine erfolgreiche empirische Theorie angesehen werden muss.

In der Geschichte der Wissenschaft stellten sich oftmals jene Theorien als richtig heraus, die strukturell einfach gehalten waren und mit wenigen Zusatzannahmen auskamen. Zudem war die Einführung von ad-hoc-Hypothesen zumeist ein Indiz für den Niedergang eines Theoriegebäudes. Die effektive Higgs-Masse durch bestimmte SUSY-Massen auf natürliche Weise zu erklären, wäre sehr elegant oder schlicht ausgedrückt *schön*. Während Einstein seine Feldgleichungen (5.1) als sehr kunstvoll ob ihrer Einfachheit ansah, betrachtete er seine Ansätze zu einer vereinheitlichten Feldtheorie als äußerst hässlich. Man hat demzufolge durchaus Gründe anzunehmen, dass Natürlichkeit mit fruchtbaren Theorien korreliert ist. Kombiniert man dies mit der Tatsache, dass dies nur für bestimmte SUSY-Parameter möglich ist, besteht also doch die Hoffnung einer Falsifizierbarkeit. Nichtsdestoweniger sind die letztgenannten Überlegungen spekulativ und eher definitorischer Natur; betreffend, welche intrinsischen Eigenschaften eine erfolgreiche Theorie besitzt.

Es bleibt daher abschließend festzuhalten, dass die SUSY noch auf dem Weg zu einem empirisch-wissenschaftlichen System ist und sich aktuell im Spannungsfeld zwischen einem rein mathematischen Modell und einer Theorie mit physikalischer Realität aufhält. Der Ansatz Karl Poppers versucht bei einer Theorie klare Grenzen zu ziehen. Man spricht daher auch vom Abgrenzungsproblem; der Schwierigkeit, eine empirische Hypothese von Logik oder Mathematik (bisweilen auch der Metaphysik) abzugrenzen. Der jetzige Stand lässt diese Einordnung der SUSY nicht endgültig zu. Die kommenden Jahrzehnte werden mehr Klarheit über das Schicksal dieses Modells liefern.

# Literaturverzeichnis

- [1] HALZEN, Francis ; MARTIN, Alan D.:  
*QUARKS AND LEPTONS: An Introductory Course in Modern Particle Physics.*  
John Wiley and Sons (1984).
- [2] MARTIN, Stephen P.: A Supersymmetry Primer.  
*Adv.Ser.Direct.High Energy Phys.* **21**, (2010)
- [3] COLEMAN, Sidney ; MANDULA, Jeffrey: All Possible Symmetries of the  $S$  Matrix. In: *Phys. Rev. D* **159** (1967), S. 1251 ff.
- [4] HAAG, Rudolf ; LOPUSZANSKI , Jan ; SOHNIUS, Martin: All possible generators of supersymmetries of the  $S$ -matrix. In: *Nuclear Physics B* **88** (1975), S.257 ff.
- [5] ZWICKY, Fritz: Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. In: *Helv. Phys. Acta* **6** (1933), S. 110-127
- [6] DANEDO, Flip: Defense Against the Dark Arts. Notes on dark matter and particle physics. (2011) *Cornell University, Ithaca* (unveröffentlicht)
- [7] HIGGS, Peter: Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. In: *Phys. Rev. Letters* **13** (1964), S. 508 ff.
- [8] REBHAN, Eckhard: *Relativitätstheorie und Kosmologie.* Springer-Verlag (1975).
- [9] MÜNSTER; Gernot: *Einführung in die Quantenfeldtheorie* (Vorlesungsskript 2011)
- [10] WULKENHAAR, Raimar: *Geometrie von Eichtheorien* (Vorlesungsskript 2005)
- [11] KOVAŘÍK, Karol: *Hitchhikers Guide to Renormalization* (bislang unveröffentlichte Notizen, Stand 2017)
- [12] DREES, Manuel ; GODBOLE, Rohini M. ; ROY, Probir:  
*Theory and Phenomenology of Sparticles.* World Scientific, 2005.

- [13] BÖHM, Manfred ; DENNER, Ansgar; JOOS, Hans:  
*Gauge Theories of the Strong and Weak Interaction*. Teubner, 2001.
- [14] KINOSHITA, Toichiro: Mass Singularities of Feynman Amplitudes.  
In: *Journal of Mathematical Physics* **3** (1962), S. 650 ff.
- [15] LEE, Tsung-Dao ; NAUENBERG, Michael: Degenerate Systems and Mass Singularities
- [16] SCHWARTZ, Matthew D.: *Quantum Field Theory and the Standard Model*  
Cambridge University Press, 2014
- [17] DENNER, Ansgar: Techiques for the calculation of electroweak radiative corrections at the one-loop level and results for W-physics at LEP200.  
*Fortschr.Phys.* **41** (1993), S.307-420
- [18] MILGROM, Mordehai: A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. In: *Astrophysical Journal* **270** (1983), S. 365-370
- [19] SPRINGEL, Volker et al.: Simulating the joint evolution of quasars, galaxies and their large-scale distribution. In: *Nature* **435** (2005), S.629 ff.
- [20] STEPPELER, Patrick: QCD-Korrekturen zur Annihilation von dunkler Materie im Higgs-Funnel. Masterarbeit WWU Münster (2013).
- [21] [de.wikipedia.org/wiki/Planck-Weltraumteleskop](https://de.wikipedia.org/wiki/Planck-Weltraumteleskop) (Zugriff: 18.03.2018)
- [22] [m.esa.int/spaceinimages](https://m.esa.int/spaceinimages) (Zugriff: 18.03.2018)
- [23] KROUPA, Pavel: Local-Group tests of dark-matter Concordance Cosmology. Towards a new paradigm for structure formation. *Astronomy and Astrophysics* **523** (2010)
- [24] [apod.nasa.gov/apod/ap060824.html](https://apod.nasa.gov/apod/ap060824.html) (Zugriff: 17.03.2018)
- [25] GONZALEZ, Anthony H. et al.: A direct empirical proof of the existence of dark matter. In: *Astrophysical Journal* **648** (2006)
- [26] Planck Collaboration: Planck 2015 Results. XIII. Cosmological Parameters.
- [27] BÉLANGER, G. et al.: micrOMEGAS: Version 1.3. In: *Computer Physics Communications* **174** (2006), S. 577 ff.
- [28] WEINHEIMER, Christian: Skript zur Vorlesung Kern- und Teilchenphysik I (2011)

## *Literaturverzeichnis*

- [29] POPPER, Karl R.: *Vermutungen und Widerlegungen  
Wachstum der wissenschaftlichen Erkenntnis* (1963) Mohr Siebeck,  
Tübingen
- [30] DERYA, Vera: Color factors in QCD (2008), Seminararbeit am LPSC, Grenoble
- [31] 'T HOOFT, Gerard: *Renormierung*, Eintrag im Lexikon der Physik (Spektrum), von 1998.
- [32] HOOPER, Dan: TASI 2008 Lectures on Dark Matter (2009)

### **Plagiatserklärung des Studierenden**

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit "*Stau-Annihilation in leichte und schwere Quarks*" selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Werken - dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

---

(Datum und Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

---

(Datum und Unterschrift)