



Universität
Münster



institut für
theoretische physik

Universität Münster
Institut für theoretische Physik

BACHELORARBEIT

Monte-Carlo-Generierung des Drell-Yan Prozesses am LHC

Fabian Bölting

betreut von
Priv. Doz. Dr. Karol KOVAŘÍK

Erstgutachter: Priv. Doz. Dr. Karol KOVAŘÍK
Zweitgutachter: Dr. Tomáš JEŽO

7. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Grundlagen der QED	2
2.1	Wirkungsquerschnitt	3
2.2	Feynman-Regeln	4
3	Berechnung des Matrixelements $\mathcal{M} ^2$	5
3.1	Berechnung von $ \mathcal{M}_\gamma ^2$	6
3.2	Berechnung von $ \mathcal{M}_{Z^0} ^2$	8
3.3	Berechnung von $\text{Re}(\mathcal{M}_\gamma^\dagger \cdot \mathcal{M}_{Z^0})$	15
4	Kinematik	17
4.1	Partonschwerpunktsystem	17
4.2	Nukleon-Nukleon-Schwerpunktsystem	19
4.3	Wirkungsquerschnitt	20
4.4	Partonverteilungsfunktion CT18NLO	21
5	Numerische Berechnung mit scipy	22
6	Monte-Carlo-Simulation	23
6.1	Cuts	25
6.2	Eventgenerierung	26
6.3	Importance Sampling	30
6.4	Auswertung der Events	33
7	Zusammenfassung	35
A	Mathematische Relationen in der QED	36
B	Deklaration der Konstanten	38

1 Einleitung

In der Bachelorarbeit soll die elektroschwache Wechselwirkung bei Fermionen untersucht werden. Dazu wird der Drell-Yan Prozess am LHC betrachtet.

Als erstes werden theoretische Grundlagen über den Wirkungsquerschnitt und über die Feynman-Regeln zusammengefasst. Der Wirkungsquerschnitt ist nämlich die Kenngröße bei dem betrachteten Collider-Versuch. Anhand der Feynman-Regeln kann das Matrixelement ermittelt werden, das zur Bestimmung des Wirkungsquerschnitts notwendig ist.

Nach der Bestimmung des Wirkungsquerschnitts wird über die Kinematik diskutiert. Dort wird der Unterschied zwischen Partonschwerpunktsystem und Nukleon-Nukleon-Schwerpunktsystem beschrieben. Außerdem ist es wichtig die Impulse der Protonen mit den Impulsen der Quarks zu unterscheiden. Die Quarks besitzen nur einen Bruchteil des Protonimpulses. In diesem Abschnitt ist dann festzustellen, dass die Berechnungen der Wirkungsquerschnitte nicht mehr analytisch zu bestimmen sind. Das ist damit begründet, weil die Partonverteilungsfunktionen (PDF's) analytisch nicht bekannt sind.

Deswegen wird die Berechnung in der Programmiersprache Python fortgeführt. Mithilfe der Pythonbibliothek `scipy` wird der Wirkungsquerschnitt berechnet. Der differentielle Wirkungsquerschnitt kann allerdings nur mit großen Abweichungen bestimmt werden.

Zur Vermeidung der großen Abweichungen wird die Monte-Carlo-Simulation verwendet. Die Simulation ist nämlich in der Lage Cuts zu berücksichtigen.

Außerdem sollte hier noch erwähnt werden, dass in der gesamten Bachelorarbeit die natürlichen Einheiten $\hbar = c = \epsilon_0 = 1$ verwendet werden. Desweiteren sind alle verwendeten Konstanten im Anhang B vorhanden. Die Konstanten sind, wenn nicht anders erwähnt, nicht relevant für den Leser, da in den Berechnungen keine Zahlenwerte eingesetzt werden. Deren Unsicherheiten werden vernachlässigt. Die Notation des Minkowski-Skalarproduktes zwischen 2 Vierervektoren ist $\langle p_1, p_2 \rangle$, wobei p_1 und p_2 hier als Beispiel Vierervektoren sind. Generell werden Vektoren, die nicht den Minkowski-Vierervektoren entsprechen, wie folgt geschrieben: \mathbf{p}_1 .

2 Grundlagen der QED

Im folgendem werden hier die theoretischen Grundlagen dieser Bachelorarbeit aufgestellt. Als erstes wird diskutiert was ein Wirkungsquerschnitt ist und wie ein solcher berechnet wird. Dort wird man feststellen, dass die Berechnung eines Matrixelements notwendig ist um den Wirkungsquerschnitt zu bestimmen. Deswegen wird im zweiten Unterabschnitt die Feynman-Regeln betrachtet, um solche Matrixelemente aufzustellen.

2.1 Wirkungsquerschnitt

In der Bachelorarbeit wird der Drell-Yan Prozess am LHC beschrieben. Die verwendeten Daten haben hierbei eine invariante Masse von 66 GeV bis 116 GeV und wurden aus [2] entnommen. In dem Versuch kollidieren zwei Protonenstrahlen mit hoher kinetischer Energie miteinander. In dem Drell-Yan Prozess annihiliert ein Quark-Antiquark-Paar aus den Protonen zu einem Photon oder Z -Boson, wodurch beim Zerfallen des Bosons Myon-Antimyon-Paare entstehen können.

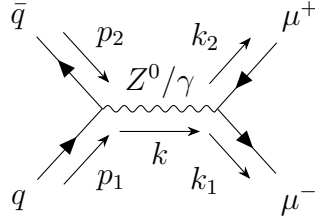


Abbildung 1: Hier ist der Drell-Yan Prozess als Feynmandiagramm dargestellt. Dabei annihiliert ein Quark-Antiquark-Paar in ein Z -Boson oder in ein Photon mit dem vierer Impuls k . Danach zerfällt das Boson in ein Myon-Antimyon-Paar.

Ein Feynmandiagramm, das im späteren Verlauf näher besprochen wird, ist in Abbildung 1 dargestellt und stellt den Prozess im Schwerpunktsystem der Quarks dar. Für die Beschreibung solcher Stoßprozesse ist der Wirkungsquerschnitt notwendig. Der Wirkungsquerschnitt beschreibt dabei eine Art Wahrscheinlichkeit, dass zwei verschiedene Teilchen miteinander stoßen. Die folgenden Informationen sind aus [7] entnommen worden. Anhand des Experiments kann der Wirkungsquerschnitt mit

$$d\hat{\sigma} = \frac{1}{T} \frac{1}{\Phi} dP . \quad (2.1)$$

beschrieben werden. Die Größe T ist dabei die Gesamtzeit der Kollision. Φ ist der Teilchenflussfaktor und beschreibt lediglich die Größe der Geschwindigkeit der einkommenden Teilchen normiert mit dem Gesamtvolumen. Daraus ergibt sich dann $\Phi = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|/V$. Die Größe P ist hierbei die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit für einen Stoßprozess. In Abschnitt 5.1 aus [7] wird gezeigt, dass dP bei einem Prozess von $2 \rightarrow 2$ umgeschrieben werden kann in:

$$dP = \frac{T}{2p_1^0 2p_2^0 V} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_1^0} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_2^0} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$$

p_1 , p_2 , k_1 und k_2 sind die die Viererimpulse und in Abbildung 1 sind die vier Impulse den verschiedenen Teilchen zugeordnet. Das $\delta^4(\dots)$ ist dabei die vierdimensionale δ -Funktion und sorgt für Energie und Impulserhaltung. Schließlich ist

$|\mathcal{M}|^2$ das Matrixelement. Um das Matrixelement zu berechnen, müssen vorerst die Feynman-Regeln des Photons und des Z -Bosons im nächsten Unterabschnitt diskutiert werden. Nach Auswertung der Deltafunktionen und Vereinfachung des Ausdrucks vom Wirkungsquerschnitt folgt:

$$d\hat{\sigma} = \frac{1}{32\pi^2 F} |\mathcal{M}|^2 d\Omega . \quad (2.2)$$

F ist der Fluxfaktor mit $2k^2$. Ω ist der Raumwinkel.

2.2 Feynman-Regeln

In diesem Abschnitt werden die Matrixelemente aufgestellt, welche in Abschnitt 3 berechnet werden. Dazu werden die externen Teilchen von Fermionen betrachtet, als auch jeweils der Vertex und Propagator von dem Photon und Z^0 -Boson. Die Informationen sind in diesem Unterabschnitt aus [4] entnommen worden. In den Abbildungen 2 bis 5 sind die benötigten externen Teilchen dargestellt. Die einlaufenden Fermionen liefern den Spinor $u(p)$, während die einlaufenden Antifermionen den Spinor $\bar{v}(p)$ liefern. Bei den auslaufenden Fermionen und Antifermionen ergeben sich die adjungierten Spinoren mit anderen Impulsen $\bar{u}(k)$ und $v(k)$. Im Anhang A werden ein Paar Identitäten von den Spinoren aufgelistet.

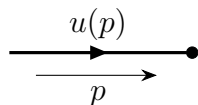


Abbildung 2: Einlaufendes Fermion mit dem Vierer-Impuls p

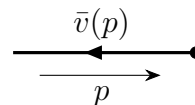


Abbildung 3: Einlaufendes Antifermion mit dem Vierer-Impuls p

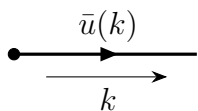


Abbildung 4: Auslaufendes Fermion mit dem Vierer-Impuls k

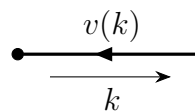


Abbildung 5: Auslaufendes Antifermion mit dem Vierer-Impuls k

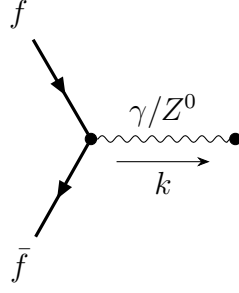


Abbildung 6: Ein Fermion und Antifermion annihilieren zu einem Photon oder Z^0 -Boson.

Nun wird über die benötigten Vertices diskutiert. Diese sind in Abbildung 6 dargestellt. Der linke Term beschreibt den Vertex des Photons und der rechte Term des Z -Bosons:

$$-ie_f \gamma^\mu \quad , \quad -i \frac{g}{\cos \theta_w} \gamma^\mu \frac{1}{2} (c_V^f - c_A^f \gamma^5) \quad (2.3)$$

Zum Schluss sind die Propagatoren der beiden Bosonen relevant, welche auch in Abbildung 6 dargestellt sind. Der Propagator des Photones besitzt die Form:

$$-i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \quad , \quad (2.4)$$

und der Propagator des Z^0 -Bosons die Form:

$$-i \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\nu k_\mu}{M_z^2} \right) \frac{1}{k^2 - M_z^2 + iM_z \Gamma} \quad . \quad (2.5)$$

Allerdings tritt beim eigentlichen Propagator der Term $iM_z \Gamma$ nicht auf. Der Term ist hier notwendig, da der Wert von k^2 sich sehr stark an M_z^2 nähert und somit das Ergebnis droht zu divergieren. Der Propagator wurde in Kapitel 9 aus [7] entnommen. Beide Matrixelemente können also wie folgt aufgeschrieben werden:

$$M = u(p_1) \mathcal{V}^\mu \bar{v}(p_2) \mathcal{P}_{\mu\nu} \bar{u}(k_2) \mathcal{V}^\nu v(k_1) \quad , \quad (2.6)$$

wobei \mathcal{V}^μ und \mathcal{V}^ν jeweils die gleichen Vertices aus Gleichung (2.3) sind. Allerdings bezieht sich \mathcal{V}^μ auf die Quarks und \mathcal{V}^ν auf die Myonen. $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ ist der dazugehörige Propagator.

3 Berechnung des Matrixelements $|\mathcal{M}|^2$

Das Matrixelement $|\mathcal{M}|^2$ besteht aus 3 Komponenten:

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_\gamma|^2 + |\mathcal{M}_{Z^0}|^2 + 2 \cdot \text{Re}(\mathcal{M}_\gamma^\dagger \cdot \mathcal{M}_{Z^0}) \quad . \quad (3.1)$$

Jeder Term besitzt im folgenden seinen eigenen Unterabschnitt. Als erstes wird der Photonterm berechnet

3.1 Berechnung von $|\mathcal{M}_\gamma|^2$

Als erstes werden die Feynman-Regeln des Photons verwendet. Bei der Verwendung von Gleichung (2.6) ergibt sich:

$$M_\gamma = [\bar{u}(k_1)ie_l\gamma^\mu v(k_2)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} [\bar{v}(p_2)(-ie_l e_q)\gamma^\nu u(p_1)] . \quad (3.2)$$

Dieser Ausdruck wird adjungiert, wobei das Verhalten von adjungierten γ -Matrizen und Spinoren im Anhang A mit den Identitäten (A.1) und (A.12) beschrieben werden:

$$M_\gamma^\dagger = [\bar{u}(p_1)ie_l e_q\gamma^\sigma v(p_2)] \frac{ig_{\sigma\rho}}{k^2} [\bar{v}(k_2)(-ie_l)\gamma^\rho u(k_1)] . \quad (3.3)$$

Die beiden Gleichungen (3.2) und (3.3) werden nun miteinander multipliziert:

$$|M_\gamma|^2 = \frac{e_q^2 e_l^4}{k^4} [\bar{u}(k_1)\gamma^\nu v(k_2)] [\bar{v}(p_2)\gamma_\nu u(p_1)] \cdot \\ [\bar{u}(p_1)\gamma^\sigma v(p_2)] [\bar{v}(k_2)\gamma_\sigma u(k_1)]$$

Die Matrixschreibweise wird nun mithilfe der einsteinschen Summenkonvention ausgetauscht:

$$= \frac{e_q^2 e_l^4}{k^4} [(\bar{u}(k_1))_a(\gamma^\nu)_{ab}(v(k_2))_b] [(\bar{v}(k_2))_c(\gamma_\sigma)_{cd}(u(k_1))_d] \cdot \\ [(\bar{v}(p_2))_e(\gamma^\sigma)_{ef}(u(p_1))_f] [(\bar{u}(p_1))_g(\gamma_\nu)_{gh}(v(p_2))_h]$$

sodass im nächsten Schritt die Faktoren sortiert werden können:

$$= \frac{e_q^2 e_l^4}{k^4} [(u(k_1))_d(\bar{u}(k_1))_a(\gamma^\nu)_{ab}(v(k_2))_b(\bar{v}(k_2))_c(\gamma_\sigma)_{cd}] \cdot \\ [(v(p_2))_h(\bar{v}(p_2))_e(\gamma^\sigma)_{ef}(u(p_1))_f(\bar{u}(p_1))_g(\gamma_\nu)_{gh}]$$

Damit die Identität (A.13) aus dem Anhang A verwendet werden kann, muss über die Spins der Teilchen und über die Farbe der Quarks gemittelt werden:

$$|\mathcal{M}_\gamma|^2 = \frac{1}{4N_c^2} \sum_{\text{Farbe}} \sum_{\text{Spin}} |M_\gamma|^2 \\ = \frac{e_q^2 e_l^4}{4N_c k^4} [(k_1 + m_\mu)_{da}(\gamma^\nu)_{ab}(k_2 - m_\mu)_{bc}(\gamma_\sigma)_{cd}] \cdot \\ [(\not{p}_2 - m_q)_{he}(\gamma^\sigma)_{ef}(\not{p}_1 + m_q)_{fg}(\gamma_\nu)_{gh}]$$

In der Matrixschreibweise ergibt sich daraus die Spur:

$$\begin{aligned}
&= \frac{e_q^2 e_l^4}{4N_c k^4} \underbrace{\text{Tr}[(k_1 + m_\mu)\gamma^\nu (k_2 - m_\mu)\gamma_\sigma]}_{\equiv F^\nu_\sigma} \cdot \\
&\quad \underbrace{\text{Tr}[(\not{p}_2 - m_q)\gamma^\sigma (\not{p}_1 + m_q)\gamma_\nu]}_{\equiv G^\sigma_\nu} . \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Diese Spur wird im folgendem ausgeklammert:

$$G^\sigma_\nu = \text{Tr}[\not{p}_2\gamma^\sigma \not{p}_1\gamma_\nu] + m_q(\text{Tr}[\not{p}_2\gamma^\sigma\gamma_\nu] - \text{Tr}[\gamma^\sigma \not{p}_1\gamma_\nu]) - m_q^2\text{Tr}[\gamma^\sigma\gamma_\nu] . \tag{3.5}$$

Die Terme mit m_q sind, wegen der Spur einer ungeraden Anzahl an γ -Matrizen aus Gleichung (A.3), 0. Bei dem ersten und letzten Term sind hingegen eine gerade Anzahl an γ -Matrizen vorhanden und deswegen werden die Identitäten (A.4) und (A.5) verwendet:

$$G^\sigma_\nu = -4m_q^2 g^\sigma_\nu + 4(p_2)_\alpha (p_1)_\beta (g^{\alpha\sigma} g^\beta_\nu - g^{\alpha\beta} g^\sigma_\nu + g^\alpha_\nu g^{\beta\sigma}) . \tag{3.6}$$

Mithilfe einer Substitution von $m_q \rightarrow m_\mu$, $p_2 \rightarrow k_1$, $p_1 \rightarrow k_2$ und einer Vertauschung der beiden Indizes ν und σ ergibt sich F^ν_σ :

$$F^\nu_\sigma = -4m_\mu^2 g^\nu_\sigma + 4(k_1)_\gamma (k_2)_\delta (g^{\gamma\nu} g^\delta_\sigma - g^{\gamma\delta} g^\nu_\sigma + g^\gamma_\sigma g^{\delta\nu}) . \tag{3.7}$$

Mit $N_c = 3$ folgt für das Endergebnis $|\mathcal{M}_\gamma|^2$:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_\gamma|^2 &= \frac{e_q^2 e_l^4}{4N_c k^4} G^\sigma_\nu F^\nu_\sigma \\
&= \frac{e_q^2 e_l^4}{4N_c k^4} (-4m_q^2 g^\nu_\sigma + 4(p_2)_\alpha (p_1)_\beta (g^{\alpha\sigma} g^\beta_\nu - g^{\alpha\beta} g^\sigma_\nu + g^\alpha_\nu g^{\beta\sigma})) \cdot \\
&\quad (-4m_\mu^2 g^\sigma_\nu + 4(k_1)_\gamma (k_2)_\delta (g^{\gamma\nu} g^\delta_\sigma - g^{\gamma\delta} g^\nu_\sigma + g^\gamma_\sigma g^{\delta\nu})) \\
&= \frac{8e_q^2 e_l^4}{N_c k^4} (2m_q^2 m_\mu^2 + m_q^2 \langle k_1, k_2 \rangle + m_\mu^2 \langle p_1, p_2 \rangle \\
&\quad + \langle p_1, k_1 \rangle \langle p_2, k_2 \rangle + \langle p_1, k_2 \rangle \langle p_2, k_1 \rangle) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass im Abschnitt 4 die Massen der Quarks und der Myonen vernachlässigt werden, sodass sich das Ergebnis vereinfachen wird.

3.2 Berechnung von $|\mathcal{M}_{Z^0}|^2$

Als zweites wird der Z^0 -Boson-Term berechnet. Die Aufstellung des Matrixelements folgt aus den vorherigen Abschnitt 2.2 mit Gleichung (2.6):

$$M_{Z^0} = \frac{-ig^2 Z}{4 \cos^2(\theta_w)} [\bar{u}(k_1) \gamma^\nu (c_V^\mu - c_A^\mu \cdot \gamma^5) v(k_2)] \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) \cdot \quad (3.9)$$

$$[\bar{v}(p_2) \gamma^\sigma (c_V^q - c_A^q \cdot \gamma^5) u(p_1)] ,$$

wobei mit Z

$$Z = \frac{1}{k^2 - M_z^2 + iM_z \Gamma} \quad (3.10)$$

gemeint ist. Zur Bestimmung des finalen Matrixelements $|\mathcal{M}_{Z^0}|^2$ wird analog wie im letzten Abschnitt vorgegangen. Also wird wieder der Ausdruck (3.9) adjungiert:

$$M_{Z^0}^\dagger = \frac{ig^2 Z^*}{4 \cos^2(\theta_w)} [\bar{v}(k_2) \gamma^\alpha (c_V^\mu - c_A^\mu \cdot \gamma^5) u(k_1)] \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M_z^2} \right) \cdot \quad (3.11)$$

$$[\bar{u}(p_1) \gamma^\beta (c_V^q - c_A^q \cdot \gamma^5) v(p_2)] .$$

Dabei musste zusätzlich zum vorherigen Abschnitt die Antikommutativität der γ^5 -Matrix aus Gleichung (A.6). ausgenutzt werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden neue Größen definiert:

$$A^\nu := \gamma^\nu (c_V^\mu - c_A^\mu \cdot \gamma^5) \quad , \quad B^\sigma := \gamma^\sigma (c_V^q - c_A^q \cdot \gamma^5) \quad (3.12)$$

und:

$$C_{\alpha\beta\nu\sigma} := \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M_z^2} \right) \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) . \quad (3.13)$$

Mithilfe der neuen Definitionen kann das Matrixelement $|\mathcal{M}_{Z^0}|^2$ berechnet werden, indem wieder über die Spins der Fermionen und Farbe der Quarks gemittelt wird:

$$|\mathcal{M}_{Z^0}|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{N_c^2} \sum_{\text{Farbe}} \sum_{\text{Spin}} |M_{Z^0}|^2$$

$$= \frac{g^4 |Z|^2 \cdot C_{\alpha\beta\nu\sigma}}{64 N_c \cos^4(\theta_w)} \sum_{\text{Spin}} [\bar{u}(k_1) A^\nu v(k_2)] [\bar{v}(k_2) A^\alpha u(k_1)] \cdot \quad (3.14)$$

$$[\bar{v}(p_2) B^\sigma u(p_1)] [\bar{u}(p_1) B^\beta v(p_2)]$$

Das Vorgehen ist analog zum vorherigen Abschnitt und $|\mathcal{M}_{Z^0}|^2$ wird wieder mithilfe der Spur ausgedrückt:

$$|\mathcal{M}_{Z^0}|^2 = \frac{g^4 |Z|^2 \cdot C_{\alpha\beta\nu\sigma}}{64 N_c \cos^4(\theta_w)} \underbrace{\text{Tr}[(\not{k}_1 + m_\mu) A^\nu (\not{k}_2 - m_\mu) A^\alpha]}_{=: D^{\nu\alpha}} \cdot \underbrace{\text{Tr}[(\not{p}_2 - m_q) B^\sigma (\not{p}_1 + m_q) B^\beta]}_{=: E^{\sigma\beta}} . \quad (3.15)$$

Das Ausklammern von $D^{\nu\alpha}$ liefert:

$$D^{\nu\alpha} = \text{Tr}[\not{k}_1 A^\nu \not{k}_2 A^\alpha + m_\mu (A^\nu \not{k}_2 A^\alpha - \not{k}_1 A^\nu A^\alpha) - m_\mu^2 A^\nu A^\alpha] . \quad (3.16)$$

A^ν ist ein Produkt aus einer ungeraden Anzahl aus γ -Matrizen. Gemäß Gleichung (A.3) sind damit die Terme linear in m_μ 0. Der erste Term ist nicht trivial zu lösen, weswegen bei diesen die Definition (3.12) benötigt wird:

$$\text{Tr}[\not{k}_1 A^\nu \not{k}_2 A^\alpha] = (k_1)_a (k_2)_b \text{Tr}[\gamma^a \gamma^\nu (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) \gamma^b \gamma^\alpha (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5)] .$$

Die Produkte werden ausgeklammert:

$$= (k_1)_a (k_2)_b \text{Tr}[(c_V^\mu)^2 \cdot \gamma^a \gamma^\nu \gamma^b \gamma^\alpha - c_V^\mu c_A^\mu \cdot \gamma^a \gamma^\nu \gamma^b \gamma^\alpha \gamma^5 - c_V^\mu c_A^\mu \cdot \gamma^a \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^b \gamma^\alpha + (c_A^\mu)^2 \cdot \gamma^a \gamma^\nu \gamma^b \gamma^\alpha]$$

Die γ^5 -Matrix ist antikommutativ gemäß Gleichung (A.6) und die Spur ist eine lineare Abbildung. So vereinfacht sich der Term zu:

$$= (k_1)_a (k_2)_b \cdot ((c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2) \cdot \text{Tr}[\gamma^a \gamma^\nu \gamma^b \gamma^\alpha] - 2 \cdot (k_1)_a (k_2)_b \cdot c_V^\mu c_A^\mu \cdot \text{Tr}[\gamma^a \gamma^\nu \gamma^b \gamma^\alpha \gamma^5]$$

Im nächsten Schritt wird die Identität von einer Spur mit einer geraden Anzahl an γ -Matrizen aus den Gleichung (A.5) und die Spur einer γ^5 -Matrix aus Gleichung (A.9) verwendet:

$$\text{Tr}[\not{k}_1 A^\nu \not{k}_2 A^\alpha] = 4 \cdot ((c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2) \cdot [(k_1)^\nu (k_2)^\alpha - \langle k_1, k_2 \rangle g^{\nu\alpha} + (k_1)^\alpha (k_2)^\nu] + 8i (k_1)_a (k_2)_b \cdot c_V^\mu c_A^\mu \cdot \varepsilon^{ab\alpha} . \quad (3.17)$$

Das ist das finale Ergebnis des ersten Terms. Im folgendem wird der vierte Term der Spur betrachtet. Die Größen A^μ und A^α müssen wieder mit der Gleichung (3.12) ersetzt werden:

$$-m_\mu^2 \text{Tr}[A^\mu A^\alpha] = -m_\mu^2 \text{Tr}[\gamma^\nu (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) \gamma^\alpha (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5)] .$$

Das Ausmultiplizieren der Runden Klammern liefert:

$$= -m_\mu^2 \text{Tr}[(c_V^\mu)^2 \gamma^\nu \gamma^\alpha - c_A^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\alpha - c_A^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^5 - (c_A^\mu)^2 \gamma^\nu \gamma^\alpha] .$$

Wegen der Antikommutivität der γ^5 -Matrix aus Gleichung (A.6) heben sich der zweite und dritte Term auf:

$$= m_\mu^2 \cdot ((c_A^\mu)^2 - (c_V^\mu)^2) \cdot \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\alpha] .$$

Schließlich wird die Gleichung (A.4) verwendet:

$$-m_\mu^2 \text{Tr}[A^\mu A^\alpha] = 4 \cdot g^{\nu\alpha} \cdot m_\mu^2 \cdot ((c_A^\mu)^2 - (c_V^\mu)^2) . \quad (3.18)$$

Das ist das finale Ergebnis des vierten Terms. Die Spur (3.16) kann mithilfe von Gleichung (3.17) und Gleichung (3.18) ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} D^{\nu\alpha} &= 4 \cdot ((c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2) \cdot [(k_1)^\nu (k_2)^\alpha - \langle k_1, k_2 \rangle \cdot g^{\nu\alpha} + (k_1)^\alpha (k_2)^\nu] \\ &\quad + 8i(k_1)_a (k_2)_b \cdot c_V^\mu c_A^\mu \cdot \varepsilon^{ab\alpha\nu} + 4 \cdot g^{\nu\alpha} \cdot m_\mu^2 \cdot ((c_A^\mu)^2 - (c_V^\mu)^2) . \end{aligned} \quad (3.19)$$

$E^{\sigma\beta}$ wird wieder mithilfe einer Substitution $c_i^\mu \rightarrow c_i^q$, $m_\mu \rightarrow m_q$, $\nu \rightarrow \sigma$, $k_1 \rightarrow p_2$, $k_2 \rightarrow p_1$ und $\alpha \rightarrow \beta$ mit $i = A, V$ ermittelt:

$$\begin{aligned} E^{\sigma\beta} &= 4 \cdot ((c_V^q)^2 + (c_A^q)^2) \cdot [(p_2)^\sigma (p_1)^\beta - \langle p_2, p_1 \rangle \cdot g^{\sigma\beta} + (p_2)^\beta (p_1)^\sigma] \\ &\quad + 8i(p_2)_c (p_1)_d \cdot c_V^q c_A^q \cdot \varepsilon^{cd\beta\sigma} + 4 \cdot g^{\sigma\beta} \cdot m_q^2 \cdot ((c_A^q)^2 - (c_V^q)^2) . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Es werden wieder neue Definitionen eingeführt:

$$\begin{aligned} c_+^i &:= (c_V^i)^2 + (c_A^i)^2 \quad , \quad c_-^i := (c_A^i)^2 - (c_V^i)^2 \quad , \\ c^i &:= c_V^i \cdot c_A^i \quad , \end{aligned}$$

mit $i = \mu, q$. Der Ausdruck $|\mathcal{M}_{Z^0}|^2$ kann als Matrixmultiplikation geschrieben werden:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{Z^0}|^2 &= \frac{g^4 |Z|^2 C_{\alpha\beta\nu\sigma}}{64 N_c \cos^4(\theta_w)} \\ &\quad (\mathbf{v}^\top)^{\sigma\beta} \begin{pmatrix} 16c_+^\mu c_+^q & 32ic_+^\mu c^q & 16m_\mu^2 c_-^\mu c_+^q \\ 32ic_+^\mu c^q & -64c^\mu c^q & 32im_\mu^2 c_-^\mu c^q \\ 16m_q^2 c_+^\mu c_-^q & 32im_q^2 c^\mu c_-^q & 16m_\mu^2 m_q^2 c_-^\mu c_-^q \end{pmatrix} (\mathbf{w})^{\nu\alpha} \\ &=: \frac{g^4 |Z|^2}{64 N_c \cos^4(\theta_w)} \sum_{i,j=1}^3 M_{ij} \end{aligned} \quad (3.21)$$

mit:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}^\top)^{\sigma\beta} &:= \left((p_2)^\sigma (p_1)^\beta - \langle p_1, p_2 \rangle g^{\sigma\beta} + (p_2)^\beta (p_1)^\sigma \quad (p_2)_c (p_1)_d \cdot \varepsilon^{c\sigma d\beta} \quad g^{\sigma\beta} \right), \\
(\mathbf{w})^{\nu\alpha} &:= \begin{pmatrix} (k_1)^\nu (k_2)^\alpha - \langle k_1, k_2 \rangle g^{\nu\alpha} + (k_1)^\alpha (k_2)^\nu \\ (k_1)_a (k_2)_b \varepsilon^{ab\nu\alpha} \\ g^{\nu\alpha} \end{pmatrix}, \\
M &:= C_{\alpha\beta\nu\sigma} \cdot \text{diag}((\mathbf{v})^{\sigma\beta}) \cdot \begin{pmatrix} 16c_+^\mu c_+^q & 32ic_+^q c^\mu & 16m_\mu^2 c_-^\mu c_+^q \\ 32ic_+^\mu c^q & -64c^\mu c^q & 32im_\mu^2 c_-^\mu c^q \\ 16m_q^2 c_+^\mu c_-^q & 32im_q^2 c^\mu c_-^q & 16m_\mu^2 m_q^2 c_-^\mu c_-^q \end{pmatrix} \cdot \\
&\quad \text{diag}((\mathbf{w})^{\nu\alpha}) \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Das Ziel ist es im folgendem jede Komponente von M zu berechnen. Dazu fängt man mit der Berechnung von $C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha}$ an. Die Verwendung der Definition aus Gleichung (3.13) ergibt:

$$\begin{aligned}
C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha} &= \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M_z^2} \right) \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) ((k_1)^\nu (k_2)^\alpha \\
&\quad - \langle k_1, k_2 \rangle g^{\nu\alpha} + (k_1)^\alpha (k_2)^\nu)
\end{aligned}$$

Das Ausklammern der großen Klammern liefert:

$$\begin{aligned}
&= \left(g_{\nu\sigma} g_{\alpha\beta} - g_{\nu\sigma} \frac{k_\alpha k_\beta}{M_z^2} - g_{\alpha\beta} \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} + \frac{k_\nu k_\sigma k_\alpha k_\beta}{M_z^4} \right) \cdot \\
&\quad ((k_1)^\nu (k_2)^\alpha - \langle k_1, k_2 \rangle g^{\nu\alpha} + (k_1)^\alpha (k_2)^\nu)
\end{aligned}$$

Das Ausmultiplizieren der beiden Klammern ergibt:

$$\begin{aligned}
C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha} &= (k_1)_\sigma (k_2)_\beta - \frac{\langle k_2, k \rangle}{M_z^2} (k_1)_\sigma (k)_\beta - \frac{\langle k_1, k \rangle}{M_z^2} (k_2)_\beta (k)_\sigma \\
&\quad + (k_1)_\beta (k_2)_\sigma - \frac{\langle k_2, k \rangle}{M_z^2} (k_1)_\beta (k)_\sigma - \frac{\langle k_1, k \rangle}{M_z^2} (k_2)_\sigma (k)_\beta \\
&\quad + 2 \frac{\langle k_1, k \rangle \langle k_2, k \rangle}{M_z^4} (k)_\beta (k)_\sigma - \langle k_1, k_2 \rangle g_{\sigma\beta} + 2 \frac{\langle k_1, k_2 \rangle}{M_z^2} (k)_\sigma (k)_\beta \\
&\quad - \frac{\langle k_1, k_2 \rangle \langle k, k \rangle}{M_z^4} (k)_\sigma (k)_\beta. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Mithilfe von diesem Ergebnis kann nun die erste Zeile und Spalte aus (3.22) berechnet werden. Die Spalte kann berechnet werden, da die Matrix symmetrisch ist

unter der Vertauschung der Indizes μ und q . Als erstes lässt sich das Matrixelement M_{11} berechnen:

$$C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha}(v_1)^{\sigma\beta} = C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha} \cdot \left((p_2)^\sigma (p_1)^\beta - \langle p_1, p_2 \rangle g^{\sigma\beta} + (p_2)^\beta (p_1)^\sigma \right)$$

Nun kann die Gleichung (3.23) eingesetzt und der Ausdruck ausgeklammert werden:

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \left[\langle p_2, k_1 \rangle \langle p_1, k_2 \rangle + \langle p_2, k_2 \rangle \langle p_1, k_1 \rangle \right] \\ &+ \frac{2}{M_z^2} \left[\langle k_2, k \rangle \cdot (\langle p_1, p_2 \rangle \langle k_1, k \rangle - \langle k_1, p_2 \rangle \langle k, p_1 \rangle - \langle k_1, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle) \right. \\ &\quad + \langle k_1, k \rangle \cdot (\langle p_1, p_2 \rangle \langle k_2, k \rangle - \langle k_2, p_2 \rangle \langle k, p_1 \rangle - \langle k_2, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle) \\ &\quad \left. + \langle k_1, k_2 \rangle \cdot (2 \langle k, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle - \langle p_1, p_2 \rangle \langle k, k \rangle) \right] \\ &+ \frac{1}{M_z^4} \left[4 \langle k, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle \langle k, k_1 \rangle \langle k, k_2 \rangle + \langle k, k \rangle^2 \langle p_1, p_2 \rangle \langle k_1, k_2 \rangle \right. \\ &\quad \left. - 2 \langle k, k \rangle \cdot (\langle k, k_2 \rangle \langle k, k_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle + \langle k_1, k_2 \rangle \langle k, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle) \right]. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liefert das Matrixelement M_{11} , wenn dieses mit dem Wert $16c_+^\mu c_+^q$ multipliziert wird. Nun folgen die Matrixelemente M_{21} und M_{12} :

$$C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha}(v_2)^{\sigma\beta} = C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha} \cdot (p_2)_c (p_1)_d \cdot \epsilon^{c\sigma d\beta}$$

Es gilt $k = p_1 + p_2 = k_1 + k_2$ und weil der Epsilontensor gemäß Gleichung (A.10) antisymmetrisch ist, folgt:

$$C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha}(v_2)^{\sigma\beta} = 0$$

Da M symmetrisch ist unter Vertauschung der Indizes μ und q folgt:

$$C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_2)^{\nu\alpha}(v_1)^{\sigma\beta} = 0.$$

Somit sind die Matrixelemente M_{12} und M_{21} null. Es folgen die letzten Elemente M_{13} und M_{31} , welche mit dem Wert $C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha}$ berechnet werden können. Für diese Elemente gilt:

$$C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha}(v_3)^{\sigma\beta} = C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta}$$

Der Ausdruck (3.23) wird wieder eingesetzt und zusammengefasst:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_1)^{\nu\alpha}(v_3)^{\sigma\beta} &= -2 \langle k_1, k_2 \rangle + \frac{2}{M_z^2} \left(\langle k_1, k_2 \rangle \langle k, k \rangle - 2 \langle k_1, k \rangle \langle k_2, k \rangle \right) \\ &+ \frac{\langle k, k \rangle}{M_z^4} \left(2 \langle k_1, k \rangle \langle k_2, k \rangle - \langle k, k \rangle \langle k_1, k_2 \rangle \right) \quad (3.25) \end{aligned}$$

Durch der Symmetrie von M folgt für M_{13} :

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_3)^{\nu\alpha}(v_1)^{\sigma\beta} &= -2\langle p_1, p_2 \rangle + \frac{2}{M_z^2} \left(\langle p_1, p_2 \rangle \langle k, k \rangle - 2\langle p_1, k \rangle \langle p_2, k \rangle \right) \\ &\quad + \frac{\langle k, k \rangle}{M_z^4} \left(2\langle p_1, k \rangle \langle p_2, k \rangle - \langle k, k \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Für die Bestimmung der Matrixelemente M_{22} , M_{32} und M_{23} wird die Grösse $C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_2)^{\nu\alpha}$ ermittelt. Es folgt:

$$C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_2)^{\nu\alpha} = C_{\alpha\beta\nu\sigma}(k_1)_a(k_2)_b \varepsilon^{ab\alpha}$$

Das Einsetzen von (3.13) liefert:

$$\begin{aligned} &= (k_1)_a(k_2)_b \left[\varepsilon_{\sigma\beta}^{ab} - \frac{1}{M_z^2} \left((k)_\alpha(k)_\beta \varepsilon_{\sigma}^{ab\beta} + (k)_\nu(k)_\sigma \varepsilon^{ab\nu\beta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{M_z^4} \varepsilon^{ab\alpha} (k)_\nu(k)_\sigma (k)_\alpha(k)_\beta \right] \end{aligned}$$

Aufgrund der antisymmetrischen Eigenschaft des Epsilon-Tensors und der Tatsache, dass $k = k_1 + k_2$ vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_2)^{\nu\alpha} = (k_1)_a(k_2)_b \cdot \varepsilon_{\sigma\beta}^{ab} . \quad (3.27)$$

Es wird analog wie vorhin vorgegangen. Demnach folgt für das Matrixelement M_{22} :

$$C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_2)^{\nu\alpha} \cdot (v_2)^{\sigma\beta} = (k_1)_a(k_2)_b(p_2)_c(p_1)_d \cdot \varepsilon_{\sigma\beta}^{ab} \cdot \varepsilon^{c\sigma d\beta}$$

Das Matrixelement $M_{22}/(-64c^\mu c^q)$ kann mit Antisymmetrie des Epsilon-Tensors aus den Gleichung (A.10) und dem Produkt zweier Epsilon-Tensoren gemäß Gleichung (A.11) vereinfacht werden zu:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_2)^{\nu\alpha} \cdot (v_2)^{\sigma\beta} &= 2(k_1)_a(k_2)_b(p_2)_c(p_1)_d \cdot (g^{da}g^{cb} - g^{db}g^{ca}) \\ &= 2\langle k_1, p_1 \rangle \langle p_2, k_2 \rangle - 2\langle p_1, k_2 \rangle \langle p_2, k_1 \rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

Das andere Matrixelemente M_{32} liefert:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_2)^{\nu\alpha} \cdot (v_3)^{\sigma\beta} &= (k_1)_a(k_2)_b \cdot \varepsilon_{\sigma\beta}^{ab} \cdot g^{\sigma\beta} \\ &= (k_1)_a(k_2)_b \varepsilon_{\sigma}^{ab\sigma} = 0 , \end{aligned}$$

und durch die Symmetrie von M folgt für das Matrixelement M_{23} ebenfalls:

$$C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_3)^{\nu\alpha} \cdot (v_2)^{\sigma\beta} = 0$$

Es fehlt nur noch das letzte Matrixelement M_{33} , das direkt berechnet werden kann:

$$\begin{aligned}
C_{\alpha\beta\nu\sigma}(w_3)^{\nu\alpha} \cdot (v_3)^{\sigma\beta} &= \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M_z^2} \right) \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) g^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta} \\
&= \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M_z^2} \right) \left(g^{\alpha\beta} - \frac{(k)^\alpha (k)^\beta}{M_z^2} \right) \\
&= 4 - 2 \frac{\langle k, k \rangle}{M_z^2} + \frac{\langle k, k \rangle^2}{M_z^4} \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Der Term N_c betragt 3, sodass schließlich für $|\mathcal{M}_{Z^0}|^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{Z^0}|^2 &= \frac{g^4 |Z|^2}{12 \cos^4(\theta_w)} \cdot \left\{ c_+^\mu c_+^q \cdot \left(2 \cdot \left[\langle p_2, k_1 \rangle \langle p_1, k_2 \rangle + \langle p_2, k_2 \rangle \langle p_1, k_1 \rangle \right] \right. \right. \\
&\quad + \frac{2}{M_z^2} \left[\langle k_2, k \rangle \cdot (\langle p_1, p_2 \rangle \langle k_1, k \rangle - \langle k_1, p_2 \rangle \langle k, p_1 \rangle - \langle k_1, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle) \right. \\
&\quad + \langle k_1, k \rangle \cdot (\langle k_2, k \rangle \langle p_1, p_2 \rangle - \langle k_2, p_2 \rangle \langle k, p_1 \rangle - \langle k_2, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle) \\
&\quad \left. \left. + \langle k_1, k_2 \rangle \cdot (2 \langle k, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle - \langle p_1, p_2 \rangle \langle k, k \rangle) \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{M_z^4} \left[4 \langle k, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle \langle k, k_1 \rangle \langle k, k_2 \rangle + \langle k, k \rangle^2 \langle p_1, p_2 \rangle \langle k_1, k_2 \rangle \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \langle k, k \rangle \cdot (\langle k, k_2 \rangle \langle k, k_1 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle + \langle k_1, k_2 \rangle \langle k, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle) \right] \right) \\
&\quad - 8 c^\mu c^q \left(\langle k_1, p_1 \rangle \langle p_2, k_2 \rangle - \langle p_1, k_2 \rangle \langle p_2, k_1 \rangle \right) \\
&\quad + m_q^2 m_\mu^2 c_-^\mu c_-^q \cdot \left(4 - 2 \frac{\langle k, k \rangle}{M_z^2} + \frac{\langle k, k \rangle^2}{M_z^4} \right) \\
&\quad + m_q^2 c_+^\mu c_+^q \cdot \left(- 2 \langle k_1, k_2 \rangle + \frac{2}{M_z^2} (\langle k_1, k_2 \rangle \langle k, k \rangle - 2 \langle k_1, k \rangle \langle k_2, k \rangle) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\langle k, k \rangle}{M_z^4} (2 \langle k_1, k \rangle \langle k_2, k \rangle - \langle k, k \rangle \langle k_1, k_2 \rangle) \right) \\
&\quad + m_\mu^2 c_-^\mu c_+^q \cdot \left(- 2 \langle p_1, p_2 \rangle + \frac{2}{M_z^2} (\langle p_1, p_2 \rangle \langle k, k \rangle - 2 \langle p_1, k \rangle \langle p_2, k \rangle) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\langle k, k \rangle}{M_z^4} (2 \langle p_1, k \rangle \langle p_2, k \rangle - \langle k, k \rangle \langle p_1, p_2 \rangle) \right) \left. \right\}. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Im Abschnitt der Kinematik vereinfacht sich das Endergebnis, da dort die Massen der Quarks und Myonen vernachlässigt werden.

3.3 Berechnung von $\text{Re}(\mathcal{M}_\gamma^\dagger \cdot \mathcal{M}_{Z^0})$

Nun wird der Interferenzterm berechnet. Dazu wird das Produkt von (3.3) mit (3.9) gebildet und der Realteil genommen:

$$\begin{aligned} \text{Re}(M_\gamma^\dagger \cdot M_{Z^0}) &= \frac{g^2 e_l^2 e_q \text{Re}(Z)}{4 \cos^2(\theta_w) k^2} \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) \cdot \\ &\quad \left[\bar{v}(k_2) \gamma^\alpha u(k_1) \right] \left[\bar{u}(k_1) \gamma^\nu (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) v(k_2) \right] \cdot \\ &\quad \left[\bar{u}(p_1) \gamma_\alpha v(p_2) \right] \left[\bar{v}(p_2) \gamma^\sigma (c_V^q - c_A^q \gamma^5) u(p_1) \right]. \end{aligned}$$

Die Mittelung über den Spin der Fermionen und die Farbladung der Quarks liefert:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\mathcal{M}_\gamma^\dagger \mathcal{M}_{Z^0}) &= \frac{1}{4} \frac{1}{N_c^2} \sum_{\text{Farbe}} \sum_{\text{Spin}} \text{Re}(M_\gamma^\dagger M_{Z^0}) = \frac{g^2 e_l^2 e_q \text{Re}(Z)}{16 N_c \cos^2(\theta_w) k^2} \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) \cdot \\ &\quad \text{Tr} \left[(\not{k}_2 - m_\mu) \gamma^\alpha (\not{k}_1 + m_\mu) A^\nu \right] \text{Tr} \left[(\not{p}_1 + m_q) \gamma_\alpha (\not{p}_2 - m_q) B^\sigma \right] \quad (3.31) \end{aligned}$$

Die Berechnungen der Spuren können analog wie in den letzten Abschnitt berechnet werden. Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\mathcal{M}_\gamma^\dagger \cdot \mathcal{M}_{Z^0}) &= \frac{g^2 e_l^2 e_q \text{Re}(Z)}{N_c \cos^2(\theta_w) k^2} \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) \cdot \\ &\quad (\mathbf{v}^\top)_\alpha^\sigma \begin{pmatrix} c_V^\mu c_V^q & i c_V^q c_A^\mu & -m_\mu^2 c_V^\mu c_V^q \\ i c_V^\mu c_A^q & -c_A^\mu c_A^q & -i m_\mu^2 c_V^\mu c_A^q \\ -m_q^2 c_V^\mu c_V^q & -i m_q^2 c_A^\mu c_V^q & m_\mu^2 m_q^2 c_V^\mu c_V^q \end{pmatrix} (\mathbf{w})^{\alpha\nu} \\ &= : \frac{g^2 e_l^2 e_q \text{Re}(Z)}{N_c \cos^2(\theta_w) k^2} \sum_{i,j=1}^3 N_{ij}. \quad (3.32) \end{aligned}$$

Wobei N ähnlich wie M aus (3.22) definiert ist:

$$\begin{aligned} N =: \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) \text{diag} \left((\mathbf{v}^\top)_\alpha^\sigma \right) &\begin{pmatrix} c_V^\mu c_V^q & i c_V^q c_A^\mu & -m_\mu^2 c_V^\mu c_V^q \\ i c_V^\mu c_A^q & -c_A^\mu c_A^q & -i m_\mu^2 c_V^\mu c_A^q \\ -m_q^2 c_V^\mu c_V^q & -i m_q^2 c_A^\mu c_V^q & m_\mu^2 m_q^2 c_V^\mu c_V^q \end{pmatrix} \cdot \\ &\text{diag} \left((\mathbf{w})^{\alpha\nu} \right) \end{aligned}$$

Man erhält dementsprechend ein ähnlichen Ausdruck wie aus den letzten Abschnitt 3.2. Aus diesem Grund ist der Berechnung der Ergebnisse nicht so detailliert wie im letzten Abschnitt. Die Ausdrücke N_{12} , N_{21} , N_{32} und N_{23} sind wieder 0, welches

schnell mit Gleichung (A.10) gezeigt werden kann. Die anderen Matrixelemente von N sind:

$$\begin{aligned}
N_{11} &= c_V^\mu c_V^q \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) \left((p_2)_\alpha (p_1)^\sigma - \langle p_1, p_2 \rangle g_\alpha^\sigma + (p_2)^\sigma (p_1)_\alpha \right) \cdot \\
&\quad \left((k_1)^\alpha (k_2)^\nu - \langle k_1, k_2 \rangle g^{\alpha\nu} + (k_1)^\nu (k_2)^\alpha \right) \\
&= c_V^\mu c_V^q \left(2 \cdot \left(\langle p_2, k_1 \rangle \langle p_1, k_2 \rangle + \langle p_1, k_1 \rangle \langle p_2, k_2 \rangle \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{M_z^2} \left(- \langle k_1, k \rangle \left(\langle k_2, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle + \langle k_2, p_2 \rangle \langle k, p_1 \rangle \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \langle k_2, k \rangle \left(\langle k_1, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle + \langle k_1, p_2 \rangle \langle k, p_1 \rangle \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2 \langle k_1, k_2 \rangle \langle k, p_1 \rangle \langle k, p_2 \rangle + 2 \langle p_1, p_2 \rangle \langle k, k_1 \rangle \langle k, k_2 \rangle \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \langle k, k \rangle \langle k_1, k_2 \rangle \langle p_1, p_2 \rangle \right) \right) \\
N_{22} &= -c_A^\mu c_A^q \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) (p_2)_c (p_1)_d (k_1)_a (k_2)_b \varepsilon_\alpha^{cd} \cdot \varepsilon^{\alpha b \nu} \\
&= 2c_A^\mu c_A^q \left(\langle k_1, p_2 \rangle \langle k_2, p_1 \rangle - \langle k_1, p_1 \rangle \langle k_2, p_2 \rangle \right) \\
N_{33} &= m_\mu^2 m_q^2 c_V^\mu c_V^q \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) g_\alpha^\sigma g^{\alpha\nu} \\
&= m_\mu^2 m_q^2 c_V^\mu c_V^q \left(4 - \frac{\langle k, k \rangle}{M_z^2} \right) \\
N_{13} &= -m_q^2 c_V^\mu c_V^q \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) \left((k_1)^\alpha (k_2)^\nu - \langle k_1, k_2 \rangle g^{\alpha\nu} + (k_1)^\nu (k_2)^\alpha \right) g_\alpha^\sigma \\
&= m_q^2 c_V^\mu c_V^q \left(2 \langle k_1, k_2 \rangle + 2 \frac{\langle k_1, k \rangle \langle k_2, k \rangle}{M_z^2} - \frac{\langle k, k \rangle \langle k_1, k_2 \rangle}{M_z^2} \right) \\
N_{31} &= -m_\mu^2 c_V^\mu c_V^q \left(g_{\nu\sigma} - \frac{k_\nu k_\sigma}{M_z^2} \right) \left((p_2)_\alpha (p_1)^\sigma - \langle p_1, p_2 \rangle g_\alpha^\sigma + (p_2)^\sigma (p_1)_\alpha \right) g^{\alpha\nu} \\
&= m_\mu^2 c_V^\mu c_V^q \left(2 \langle p_1, p_2 \rangle + 2 \frac{\langle p_1, k \rangle \langle p_2, k \rangle}{M_z^2} - \frac{\langle k, k \rangle \langle p_1, p_2 \rangle}{M_z^2} \right)
\end{aligned}$$

Auch hier werden später sich die Terme vereinfachen, weil die Massen der Fermionen vernachlässigt werden.

4 Kinematik

Hier wird der Streuprozess aus [2] mit einer invarianten Masse von 66 GeV bis 116 GeV in verschiedenen Inertialsystemen betrachtet. Die Betrachtung ist dafür notwendig, dass die Daten mithilfe der Berechnungen des Drell-Yan Prozesses ausgewertet werden können.

4.1 Partonschwerpunktsystem

Das Partonschwerpunktsystem ist so definiert, dass für die Impulse der Myonen

$$\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = |\mathbf{k}_1| \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

gilt. Der Vektor \mathbf{k}_1 ist auf der rechten Seite in Kugelkoordinaten ausgeschrieben. θ beschreibt den Winkel zwischen Myon und Quark oder zwischen Antiquark und Antimyon. Die Impulse der beiden Quarks verlaufen dementsprechend entlang der z-Achse, also gilt $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = p_1 \mathbf{e}_z$. Außerdem werden die Massen der Quarks und Myonen vernachlässigt. Diese Näherung ist damit gerechtfertigt, da die Quarks und Myonen hohe relativistische Impulse erreichen und der Einfluss der Masse vernachlässigbar klein ist. Aus der Energie-Impuls-Beziehung folgt demnach:

$$|\mathbf{k}_1| = k_1^0 =: E .$$

Aus der Energieerhaltung und dem Schwerpunktsystem folgt $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = E$. Die Mandelstam-Variablen können dann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (k_1 + k_2)^2 = 2\langle k_1, k_2 \rangle = 2(E^2 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) = 4E^2 \\ \hat{t} &= (p_1 - k_1)^2 = -2\langle p_1, k_1 \rangle = -2(E^2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1) = -\frac{\hat{s}}{2}(1 - \cos \theta) \\ \hat{u} &= (p_1 - k_2)^2 = -2\langle p_1, k_2 \rangle = -2(E^2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_2) = -\frac{\hat{s}}{2}(1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Ergebnisse aus Abschnitt 3 sind von den sechs verschiedenen Skalarprodukten abhängig. Diese ergeben sich mit den Gleichungen aus (4.2) zu:

$$\begin{aligned} \langle k_1, k_2 \rangle &= \langle p_1, p_2 \rangle = \frac{\hat{s}}{2} , \\ \langle p_1, k_1 \rangle &= \langle p_2, k_2 \rangle = -\frac{\hat{t}}{2} = -\frac{\hat{s}}{4}(1 - \cos \theta) , \\ \langle p_1, k_2 \rangle &= \langle p_2, k_1 \rangle = -\frac{\hat{u}}{2} = -\frac{\hat{s}}{4}(1 + \cos \theta) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Desweiteren werden die Massen der Quarks m_q und der Myonen m_μ in den Endergebnissen der Matrixelemente ebenfalls vernachlässigt:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_\gamma|^2 &= \frac{2e_q^2 e_l^4}{3\hat{s}^2} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) \\
|\mathcal{M}_{Z^0}|^2 &= \frac{g^4 |Z|^2}{12 \cos^4(\theta_w)} \cdot \left(\frac{c_+^\mu c_+^q}{2} \left((\hat{t}^2 + \hat{u}^2) + \frac{\hat{s}^2}{2M_z^2} \underbrace{(\hat{s} + \hat{t} + \hat{u})}_{=0} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2c^\mu c^q (\hat{t}^2 - \hat{u}^2) \right) \\
&= \frac{g^4 |Z|^2}{12 \cos^4(\theta_w)} \cdot \left(\frac{c_+^\mu c_+^q}{2} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) - 2c^\mu c^q (\hat{t}^2 - \hat{u}^2) \right) \\
2\text{Re}(\mathcal{M}_\gamma^\dagger \mathcal{M}_{Z^0}) &= \frac{2g^2 e_l^2 e_q \text{Re}(Z)}{3 \cos^2(\theta_w) \hat{s}} \left(\frac{c_V^q c_V^\mu}{2} \left((\hat{u}^2 + \hat{t}^2) + \frac{\hat{s}^2}{2M_z^2} \underbrace{(\hat{u} + \hat{t} + \hat{s})}_{=0} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{c_A^\mu c_A^q}{2} (\hat{t}^2 - \hat{u}^2) \right) \\
&= \frac{g^2 e_l^2 e_q \text{Re}(Z)}{3 \cos^2(\theta_w) \hat{s}} \left(c_V^q c_V^\mu (\hat{u}^2 + \hat{t}^2) - c_A^\mu c_A^q (\hat{t}^2 - \hat{u}^2) \right) \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Die Mandelstam-Variablen \hat{t} und \hat{u} werden im folgenden mit den Ausdrücken aus Gleichung (4.2) der rechten Seite ersetzt:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_\gamma|^2 &= \frac{e_q^2 e_l^4}{3} (1 + \cos^2 \theta) \\
|\mathcal{M}_{Z^0}|^2 &= \frac{g^4 \hat{s}^2 |Z|^2}{12 \cos^4(\theta_w)} \cdot \left(\frac{c_+^\mu c_+^q}{4} (1 + \cos^2 \theta) + 2c^\mu c^q \cos \theta \right) \\
2\text{Re}(\mathcal{M}_\gamma^\dagger \mathcal{M}_{Z^0}) &= \frac{g^2 e_l^2 e_q \hat{s} \text{Re}(Z)}{6 \cos^2(\theta_w)} (c_V^q c_V^\mu (1 + \cos^2 \theta) + 2c_A^\mu c_A^q \cos \theta) \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Der Wirkungsquerschnitt berechnet sich gemäß Gleichung (2.2) mit:

$$d\hat{\sigma} = \frac{1}{64\pi^2 \hat{s}} \left(|\mathcal{M}_\gamma|^2 + |\mathcal{M}_{Z^0}|^2 + 2\text{Re}(\mathcal{M}_\gamma^\dagger \mathcal{M}_{Z^0}) \right) d\Omega . \tag{4.6}$$

Das Integral über φ liefert einen Faktor von 2π :

$$d\hat{\sigma} = \frac{1}{32\pi \hat{s}} \left(|\mathcal{M}_\gamma|^2 + |\mathcal{M}_{Z^0}|^2 + 2\text{Re}(\mathcal{M}_\gamma^\dagger \mathcal{M}_{Z^0}) \right) d\cos \theta \tag{4.7}$$

Bei der Auswertung des Winkels $\cos\theta$ und den Identitäten aus den Gleichungen (B.1) ergibt sich:

$$\hat{\sigma}(\hat{s}) = \frac{4}{3}\pi\alpha^2 \left(\frac{e_q^2}{3\hat{s}} + \frac{|Z|^2\hat{s}c_+^\mu c_+^q}{48\cos^4(\theta_w)\sin^4(\theta_w)} + \frac{e_q\operatorname{Re}(Z)c_V^\mu c_V^q}{6\cos^2(\theta_w)\sin^2(\theta_w)} \right) \quad (4.8)$$

Dabei ist α die elektromagnetische Kopplungskonstante.

4.2 Nukleon-Nukleon-Schwerpunktsystem

Der Drell-Yan Prozess kann nicht direkt durchgeführt werden, da Quarks nicht einzeln vorkommen. Stattdessen werden Protonenstrahlen in den Streuprozess verwendet. In [2] kollidieren diese Protonen mit einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_{NN}} = 7\text{ TeV}$ miteinander. Die in den Prozess vorhandenen Anti-Quarks stammen aus den Seequarks der Nukleonen. Eine wichtige Überlegung ist die Unterscheidung zwischen dem Nukleon-Nukleon-Schwerpunktsystem oder auch Laborsystem mit dem Partonschwerpunktsystem. Die Daten aus [2] sind hauptsächlich als differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dy_{\text{CM}}$ angegeben. Das y_{CM} ist die Rapidität des Myonpaares und beschreibt den Unterschied zwischen Laborsystem und dem Partonschwerpunktsystem. Der Impuls des Nukleons mit positiver Rapidität soll im Laborsystem p_A sein und der Impuls des Nukleons mit negativer Rapidität ist im Laborsystem p_B . Die Partons besitzen einen Anteil des Impulses vom Nukleon:

$$x_1 p_A = p_1 = x_1 \begin{pmatrix} E_A \\ E_A \end{pmatrix}, \quad x_2 p_B = p_2 = x_2 \begin{pmatrix} E_B \\ -E_B \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt $x_1, x_2 \in (0, 1)$. Unter der Annahme, dass der Impuls der Protonen auf der z -Achse verläuft, gilt für das Partonschwerpunktsystem

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 E_A + x_2 E_B \\ x_1 E_A - x_2 E_B \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{s_{NN}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

welches den Ausdruck der Geschwindigkeit liefert:

$$\beta = \frac{x_1 E_A - x_2 E_B}{x_1 E_A + x_2 E_B}.$$

Mit der Gleichung $\beta = \tanh(y_{\text{CM}})$ kann die Rapidität y_{CM} ermittelt werden:

$$y_{\text{CM}} = \operatorname{arctanh} \left(\frac{x_1 E_A - x_2 E_B}{x_1 E_A + x_2 E_B} \right).$$

Im Nukleon-Nukleon-Schwerpunktsystem sind E_B und E_A gleich, sodass

$$y_{\text{CM}} = \operatorname{arctanh} \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \quad (4.9)$$

folgt, wobei im letzten Schritt die Identität

$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

ausgenutzt wurde.

4.3 Wirkungsquerschnitt

Da die Schwerpunktsysteme nicht gleich sind, muss die Schwerpunktsenergie der Partonen näher betrachtet werden. Dafür wird wieder die Masse der Quarks vernachlässigt:

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 = (x_1 p_A + x_2 p_B)^2 = 2x_1 x_2 \langle p_A, p_B \rangle = x_1 x_2 s_{NN} =: \tau s_{NN} .$$

Aus vorherigen Überlegungen lässt sich der Wirkungsquerschnitt aus Gleichung (4.7) nicht messen. Stattdessen gilt für den Gesamtwirkungsquerschnitt gemäß [7]:

$$\sigma = \sum_{i,j} \int_0^1 \int_0^1 f_i(x_1, M_z^2) f_j(x_2, M_z^2) \cdot \hat{\sigma}(x_1 x_2 s_{NN}) dx_1 dx_2 .$$

Die Parameter i und j stehen für Down-, Up-, Strange-, Charm-, Bottom- und das jeweilige Antiquark. Die Terme f_i und f_j sind Partonverteilungsfunktionen aus [5]. Die Größen x_1 und x_2 sind nicht im differentiellen Wirkungsquerschnitt aus [2] vorhanden. Deswegen werden die Variablen mit den Größen τ und y_{CM} ersetzt:

$$\sigma = \sum_{i,j} \int_0^1 \int_{\frac{1}{2} \ln(\tau)}^{-\frac{1}{2} \ln(\tau)} f_i(\sqrt{\tau} e^{y_{\text{CM}}}, M_z^2) f_j(\sqrt{\tau} e^{-y_{\text{CM}}}, M_z^2) \cdot \hat{\sigma}(\tau s_{NN}) dy_{\text{CM}} d\tau . \quad (4.10)$$

Eine Vertauschung der Grenzen sorgt für:

$$\sigma = \sum_{i,j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{e^{-2|y_{\text{CM}}|}} f_i(\sqrt{\tau} e^{y_{\text{CM}}}, M_z^2) f_j(\sqrt{\tau} e^{-y_{\text{CM}}}, M_z^2) \cdot \hat{\sigma}(\tau s_{NN}) d\tau dy_{\text{CM}} .$$

In [2] wird unter anderem der differentielle Wirkungsquerschnitt gemessen:

$$\frac{d\sigma}{dy_{\text{CM}}} = \sum_{i,j} \int_0^{e^{-2|y_{\text{CM}}|}} f_i(\sqrt{\tau} e^{y_{\text{CM}}}, M_z^2) f_j(\sqrt{\tau} e^{-y_{\text{CM}}}, M_z^2) \cdot \hat{\sigma}(\tau s_{NN}) d\tau . \quad (4.11)$$

Eine andere hilfreiche Darstellung für die Berechnung der Integralen ist der differentielle Wirkungsquerschnitt bezüglich allen drei Komponenten:

$$\frac{d^3\sigma}{d \cos \theta d\tau dy_{\text{CM}}} = \sum_{i,j} \frac{f_i(\sqrt{\tau} e^{y_{\text{CM}}}, M_z^2) f_j(\sqrt{\tau} e^{-y_{\text{CM}}}, M_z^2) |\mathcal{M}|^2}{32\pi\tau s_{NN}} \quad (4.12)$$

4.4 Partonverteilungsfunktion CT18NLO

In den Berechnungen wird die Partonverteilungsfunktion CT18NLO aus [5] verwendet. Diese Partonverteilungsfunktionen sind für die Down-, Up-, Strange-, Charm- und Bottomquark in Abbildung 7 links dargestellt, während die dazugehörigen Antiquarks rechts dargestellt sind.

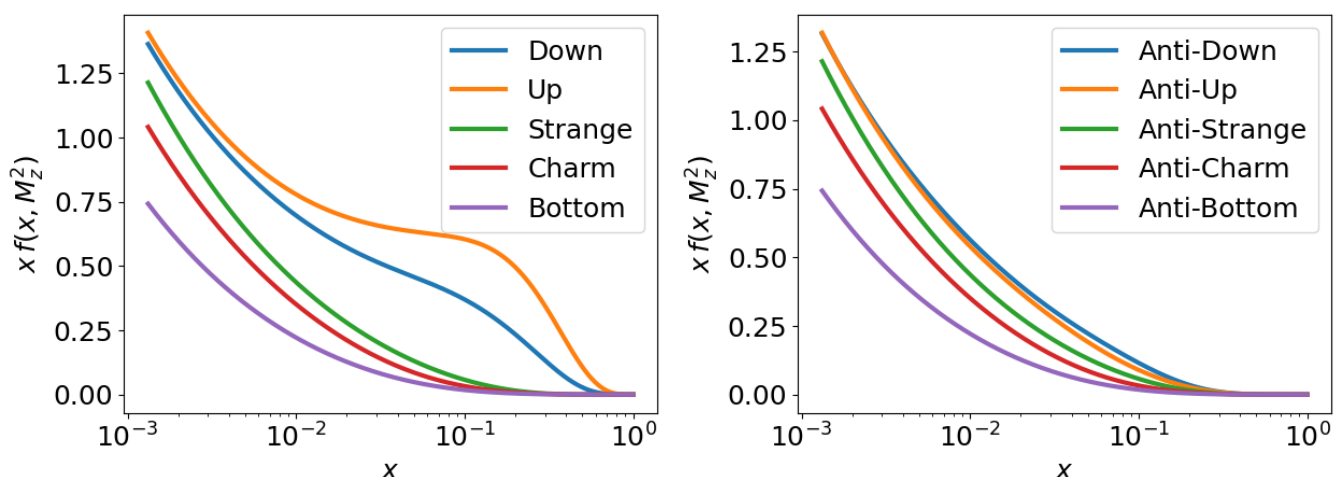


Abbildung 7: Die Partonverteilungsfunktionen (PDF's) aus [5] der verschiedenen Quarks (links) und Antiquarks (rechts) mit einem Faktor x sind gegen x aufgetragen. Hierbei wurde der Impuls des Protons mit $Q = M_z$ gewählt.

Im allgemeinen beschreiben die Partonverteilungsfunktionen $f(x, Q)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Parton im Proton mit einem Impuls von Q den Impulsanteil x aufweist [4]. Daraus folgt, dass die Partonverteilungsfunktionen normiert sein müssen:

$$\sum_i \int_0^1 x f_i(x, Q) dx = 1 .$$

i steht hier für alle Quarks, Antiquarks und Gluonen. Es wird häufig behauptet, dass das Proton aus zwei Up- und einem Downquark besteht. Anhand der Verteilungsfunktionen wird einem klar wie es zu der Behauptung kommt:

$$\int_0^1 [f_u(x) - f_{\bar{u}}(x)] dx = 2 ,$$

$$\int_0^1 [f_d(x) - f_{\bar{d}}(x)] dx = 1 ,$$

$$\int_0^1 [f_j(x) - f_{\bar{j}}(x)] dx = 0 .$$

Dabei steht hier j für s, c, b und t .

5 Numerische Berechnung mit `scipy`

Die gemessenen Daten aus [2] geben jedoch Grenzen der invarianten Masse $m_{\mu\mu}$ von $m_0 = 66$ GeV bis $m_1 = 116$ GeV an. Anhand dieses Spektrums gilt aus Gleichung (4.10) nicht mehr $\tau \in (0, 1)$, sondern:

$$\tau \in \left(\tau_0 = \frac{m_0^2}{s_{NN}}, \tau_1 = \frac{m_1^2}{s_{NN}} \right) .$$

In Gleichung (4.10) können dementsprechend die richtigen Grenzen für τ und der Ausdruck aus Gleichung (4.8) eingesetzt werden. Die anderen Integrale werden in Python berechnen, weil die Partonverteilungsfunktionen nicht analytisch bekannt sind.

Mithilfe der `scipy.integrate` Bibliothek ist es möglich dieses Integral auszuwerten. Die Konstanten sind so gewählt wie in dem Anhang B, sodass sich

$$\sigma = 816 \text{ pb}$$

ergibt, wobei auf die nächstliegende Einerstelle aufgerundet wurde. Der Gesamtwirkungsquerschnitt aus [2] weist einen Wirkungsquerschnitt von (990 ± 24) pb auf. Daraus ergibt sich eine prozentuale Abweichung von 18%. Die Abweichung ist damit zu erklären, dass hier nur die erste Ordnung betrachtet wird und die höheren Ordnungen in der Theorie vernachlässigt werden.

Im folgendem wird nun der differentielle Wirkungsquerschnitt aus Gleichung (4.11) berechnet. Dabei wird berücksichtigt, dass die Grenzen von τ eingeschränkt sind, was zu folgender Änderung führt:

$$\int d\tau = \begin{cases} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau, & \text{wenn } 2|y_{\text{CM}}| \leq -\ln \tau_1 \\ \int_{\tau_0}^{e^{-2|y_{\text{CM}}|}} d\tau, & \text{wenn } -\ln \tau_1 \leq 2|y_{\text{CM}}| \leq -\ln \tau_0 \\ 0, & \text{wenn } -\ln \tau_0 \leq 2|y_{\text{CM}}| \end{cases}$$

In Abbildung 8 sind die sowohl die berechneten Vorhersagen, als auch die experimentellen Daten aus [2] aufgetragen.

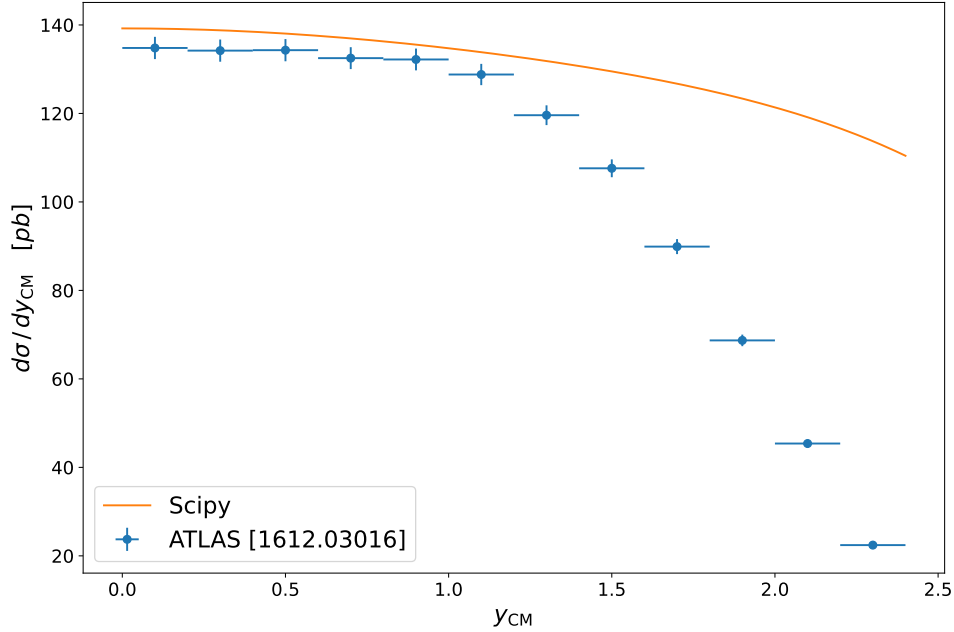


Abbildung 8: Der differentielle Wirkungsquerschnitt des Drell-Yan Prozesses $q\bar{q} \rightarrow Z^0/\gamma^* \rightarrow \mu^-\mu^+$ ist gegen die Rapidity des Myonpaares aufgetragen. Hierbei liegt das Intervall der invarianten Masse bei $66 \text{ GeV} \leq m_{\mu\mu} \leq 116 \text{ GeV}$. Die kontinuierliche Linie sind die theoretischen Vorhersagen, während die blauen Ergebnisse die experimentellen Daten aus [2] repräsentieren.

Ein Vergleich zeigt, dass bei hohen Rapiditäten des Myonpaares große Abweichungen zu erkennen sind. Diese liegen zum einen für die Einschränkung der senkrechten Impulskomponente $|p_T| > 20 \text{ GeV}$ und zum anderen muss die Rapidity der Myonen $|\eta_\mu| < 2.4$ erfüllen. Das wurde in der bisherigen Berechnung nicht berücksichtigt. Anhand der Abbildung 8 ist zu erkennen, dass die Cuts einen großen Einfluss bei hohen Rapiditäten des Myonpaares aufweisen, da dort die Abweichungen am größten sind. Im folgendem Abschnitt werden diese Cuts in der Monte-Carlo-Integration berücksichtigt.

6 Monte-Carlo-Simulation

In diesem Abschnitt werden die Berechnungen erneut durchgeführt, jedoch werden die beiden Cuts $|p_T| > 20 \text{ GeV}$ und $|\eta_\mu| < 2.4$ berücksichtigt. Dazu wird zunächst die Monte-Carlo-Integration besprochen, wobei die folgenden Informationen aus [6]

entnommen wurden. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt nach dem Mittelwert der Integralrechnung:

$$I = \int_V f(\mathbf{x}) d^n x = \text{Vol}_n(V) \cdot \langle f \rangle . \quad (6.1)$$

Dabei kann der Mittelwert $\langle f \rangle$ approximiert werden:

$$I = \text{Vol}_n \cdot \langle f \rangle \approx \frac{\text{Vol}_n(V)}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) , \quad (6.2)$$

wobei $\mathbf{x}_i \in V$ ein Zufallsvektor ist. Der Zufallsvektor \mathbf{x}_i wird Event genannt. Die Unsicherheit des Integralwertes liegt bei:

$$\sigma = \text{Vol}_n(V) \sqrt{\frac{\sigma_f}{N}} . \quad (6.3)$$

Dabei ist σ_f mit

$$\sigma_f = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$$

die Varianz der Funktion f . Diese Varianz wird in dem Abschnitt 6.3 relevant. Dort ist das Ziel sie zu reduzieren. Eine weitere Methode zur Bestimmung von Integralen aus Gleichung (6.1) und mithilfe von zufällig generierten Events ist die Hit-or-Miss Methode. Als erstes wird dafür das Maximum der Funktion in dem Bereich V ermittelt:

$$f_{\max} = \max(f(\mathbf{x})) .$$

Mithilfe dieses Maximums werden wieder N verschiedene Phasenraumpunkte definiert \mathbf{v}_i und ein weitere Zufallszahl $w_i \in (0, f_{\max})$. Beide zusammen bilden ein Event. Dieses Event wird verworfen, wenn $f(\mathbf{v}_i) < w_i$ und sonst als Treffer gezählt. Das Integral kann durch die Gesamtzahl der Treffer h ausgedrückt werden:

$$I = \int_V f(\mathbf{x}) d^n x \approx \text{Vol}_n(V) \frac{h}{N} f_{\max} . \quad (6.4)$$

Als letztes sollte vor den Cuts allerdings ein dreidimensionale Volumen definiert werden:

$$\text{Vol}_3(V) := \int_{-1}^1 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{\ln(\tau)/2}^{-\ln(\tau)/2} dy_{\text{CM}} d\tau d \cos(\theta) = 2\tau_1(1 - \ln(\tau_1)) - 2\tau_0(1 - \ln(\tau_0)) .$$

Das Integral stellt nämlich den Phasenraum dar worüber der differentielle Wirkungsquerschnitt aus Gleichung (4.12) integriert werden muss um den Wirkungsquerschnitt zu erhalten.

6.1 Cuts

In der Monte-Carlo-Integration werden zufällige Punkte im Phasenraum generiert. Punkte, welche die Cuts verletzen, werden verworfen. Mit der senkrechten Komponente des Impulses ist gemeint, dass der Impuls senkrecht zur der z -Achse steht. Damit ist dieser Impuls im Laborsystem und im Partonschwerpunktsystem gleich, da die Geschwindigkeit der Quarks entlang der z -Achse verläuft. Die einfachste Form um p_T zu berechnen ist

$$p_T = \frac{\sqrt{\tau s_{NN}}}{2} \sin(\theta) . \quad (6.5)$$

Hier muss lediglich nur ein Impuls der Myonen überprüft werden, da die beiden sich lediglich um ein Vorzeichen unterscheiden und dieses beim Betrag irrelevant ist. Hingegen sind beide der Rapiditäten η_μ der Myonen zu betrachten. Das Myon mit dem Impuls k_1 besitzt die Rapidität

$$\eta_\mu^{(1)} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos(\theta_L)}{1 - \cos(\theta_L)} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{1 - \cos(\theta)} \right) + y_{CM} \quad (6.6)$$

während das Myon mit dem Impuls k_2 die Rapidität

$$\eta_\mu^{(2)} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos(\theta'_L)}{1 - \cos(\theta'_L)} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{1 - \cos(\theta)} \right) + y_{CM} \quad (6.7)$$

aufweist. Der Winkel θ_L ist hierbei der Winkel zwischen den Impuls \mathbf{k}_1 im Laborsystem und der z -Achse und θ'_L ist der Winkel zwischen Impuls \mathbf{k}_2 im Laborsystem und der z -Achse. Anhand der Ergebnisse ist zu beobachten, dass die Rapiditäten sich im Schwerpunktsystem auch nur um Vorzeichen unterscheiden. Die Transformation in das Laborsystem sorgt jedoch um einen Boost um $+y_{CM}$, sodass sich bezüglich des Betrags eine große und eine kleine Rapidität der Myonen ergeben. Wenn diese kleinere Rapidität den Cut verletzt wird dieser Phasenraumpunkt verworfen. Dazu wurde in Python eine Funktion definiert:

```

1 def pTetaCheck(y_CM, tau, cost):
2     pTeta = 0
3     tempEvent = Events4mom(y_CM, tau, cost, 0)
4     costlabk1 = tempEvent[2][3]/tempEvent[2][0]
5     costlabk2 = tempEvent[3][3]/tempEvent[3][0]
6     absetak1 = abs(0.5*np.log((1 + costlabk1)/(1 - costlabk1))
7     )
8     absetak2 = abs(0.5*np.log((1 + costlabk2)/(1 - costlabk2))
9     )
10    p_T = abs(np.sqrt(1 - costlab**2)*tempEvent[2][0])

```

```

9     if p_T < P_T_Cut:
10         pTeta = 1
11     elif absetak1 > Rapidität_Cut or absetak2 > Rapidität_Cut:
12         pTeta = 2
13     return pTeta

```

Diese gibt den Wert 0 aus, wenn die Cuts berücksichtigt werden. Der Wert 1 wird ausgegeben, wenn die senkrechte Impulskomponente zu klein ist und 2 ist für den Fall, dass die kleine absolute Rapidität des Myons größer ist als 2.4. Die Funktion Events4mom benötigt einen Punkt im Phasenraum als Eingabeparameter und berechnet damit die Viererimpulse p_1, p_2, k_1, k_2 im Laborsystem. Jeder Viererimpuls ist dabei ein Array der Länge 4. Die erste Komponente entspricht der Energie, die zweite Komponente ist der x -Anteil der Impulskomponente, die dritte der y -Anteil der Impulskomponente und die vierte der z -Anteil der Impulskomponente. Die Ausgabe der Funktion sind dabei alle 4 dieser Viererimpulse in einem Array:

```

1 [p1mom, p2mom, k1mom, k2mom]

```

6.2 Eventgenerierung

Als erstes wird für die Eventgenerierung eine Funktion benötigt, welche einen Zufallspunkt im Phasenraum generiert, definiert:

```

1 #Generierung von Zufallspunkten:
2 def RandomPointGenerator():
3     costheta = np.random.uniform(-1, 1)
4     tau = np.random.uniform(m_0**2/s_NN, m_1**2/s_NN)
5     y_CM = np.random.uniform(0.5*np.log(tau), -0.5*np.log(tau))
6
7     return np.array([y_CM, tau, costheta])

```

m_0 und m_1 sind hierbei die invarianten Massen m_0 und m_1 , während s_{NN} das Quadrat der Schwerpunktsenergie s_{NN} ist. Mithilfe dieser Funktion und der Funktion pTetaCheck aus dem vorherigen Abschnitt ist es möglich Events zu generieren, welche die Cuts berücksichtigen. In Abbildung 9 sind 10^5 Events generiert. Die Events sind gegen die verschiedenen Größen τ , y_{CM} und $\cos(\theta)$ auf der rechten Seite aufgetragen. Auf der linken Seite wurden die Größen x_1 , x_2 und $\cos(\theta)$ wieder eingeführt, da diese einfacher zu interpretieren sind. Die grünen Punkte sind hierbei die Werte, welche akzeptiert wurden, während die blauen und orangenen Punkte verworfen wurden. Die blauen Punkte weisen eine zu kleine senkrechte Impulskomponente auf, während die orangenen eine zu große Rapidität der Myonen aufweisen.

In den oberen linken Graph ist zu erkennen, dass die Phasenraumpunkte verworfen werden, wenn die x -Werte große Unterschiede aufweisen, da diese somit eine

zu große Rapidity der Myonen aufweisen. Dies lässt sich anschaulich im Nukleon-Nukleon-Schwerpunkt erklären. Die z -Komponente des Gesamtimpulses von den beiden Quarks ist groß, wenn die beiden x -Werte sich stark voneinander unterscheiden. Somit gilt dies auch für den Gesamtimpuls des Myonpaares. Daraus folgt, dass die z -Komponente eines Myons deutlich vergrößert wird, welches zu einer hohen Rapidity der Myonen äquivalent ist. Ein mathematischer aber äquivalenter Ansatz verwendet die Gleichungen (6.6) und auch (6.7). Nach dem Cut müssen deren Betrag kleiner als 2.4 sein, sodass diese mit Gleichung (4.9) umgeschrieben werden können:

$$\left| \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_1 (1 + \cos(\theta))}{x_2 (1 - \cos(\theta))} \right) \right| < 2.4 \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_2 (1 + \cos(\theta))}{x_1 (1 - \cos(\theta))} \right) \right| < 2.4 .$$

Bei einem großen Unterschied zwischen den Werten x_1 und x_2 folgt, dass ein Bruch x_1/x_2 oder x_2/x_1 klein wird. Dies hat zur Folge, dass einer der beiden Logarithmen groß wird und somit auch eine Ungleichung verletzt wird. Allerdings können aus diesem Graphen nur wenige Schlussfolgerungen aus den blauen Punkten gewonnen werden. Die Werte x_1 und x_2 haben keinen Einfluss auf den Winkel $\cos \theta$. Dieser Winkel hat allerdings einen starken Einfluss auf der senkrechten Impulskomponente p_T gemäß Gleichung (6.5). Demnach ergibt diese Unordnung bezüglich der Anordnung der blauen Punkte Sinn. In den mittleren und unteren linken Graphen ist $\cos(\theta)$ gegen x_1 bzw. x_2 aufgetragen. In den unteren rechten Graph ist der Winkel $\cos(\theta)$ gegen die Rapidity des Myonpaares y_{CM} aufgetragen. Zwischen diesen 3 Graphen ist eine ähnliche Form zu erkennen, wobei der Graph mit der Rapidity des Myonpaares eine schärfere Kante zwischen den Grünen und den orangenen Punkten aufweist. Die Symmetrie zwischen den beiden linken Graphen erschließt sich dadurch, dass in diesem Experiment die beiden Protonenstrahlen dieselbe Energie aufweisen. Bevor jedoch besprochen wird, weshalb die 3 Graphen sich ähneln, sollte vorher besprochen werden, warum der untere rechte Graph einen scharfen Übergang bezüglich den orangenen und grünen Punkten hat. Dafür gibt es wieder einen mathematischen Ansatz. Es ist wieder davon auszugehen, dass die Gleichungen (6.6) und (6.7) kleiner als 2.4 sein müssen:

$$|y_{\text{CM}} \pm \text{arctanh}(\cos(\theta))| < 2.4 .$$

Mithilfe dieser Ungleichung ergibt sich die grüne Form aus den Graphen. Aus diesem Grund sind auch die Grenzen scharf definiert. Eine Umschreibung dieser Ungleichung gelingt mit Gleichung (4.9), sodass folgt:

$$\left| \frac{1}{2} \ln(x_1) - \frac{1}{2} \ln(x_2) \pm \text{arctanh}(\cos(\theta)) \right| < 2.4 .$$

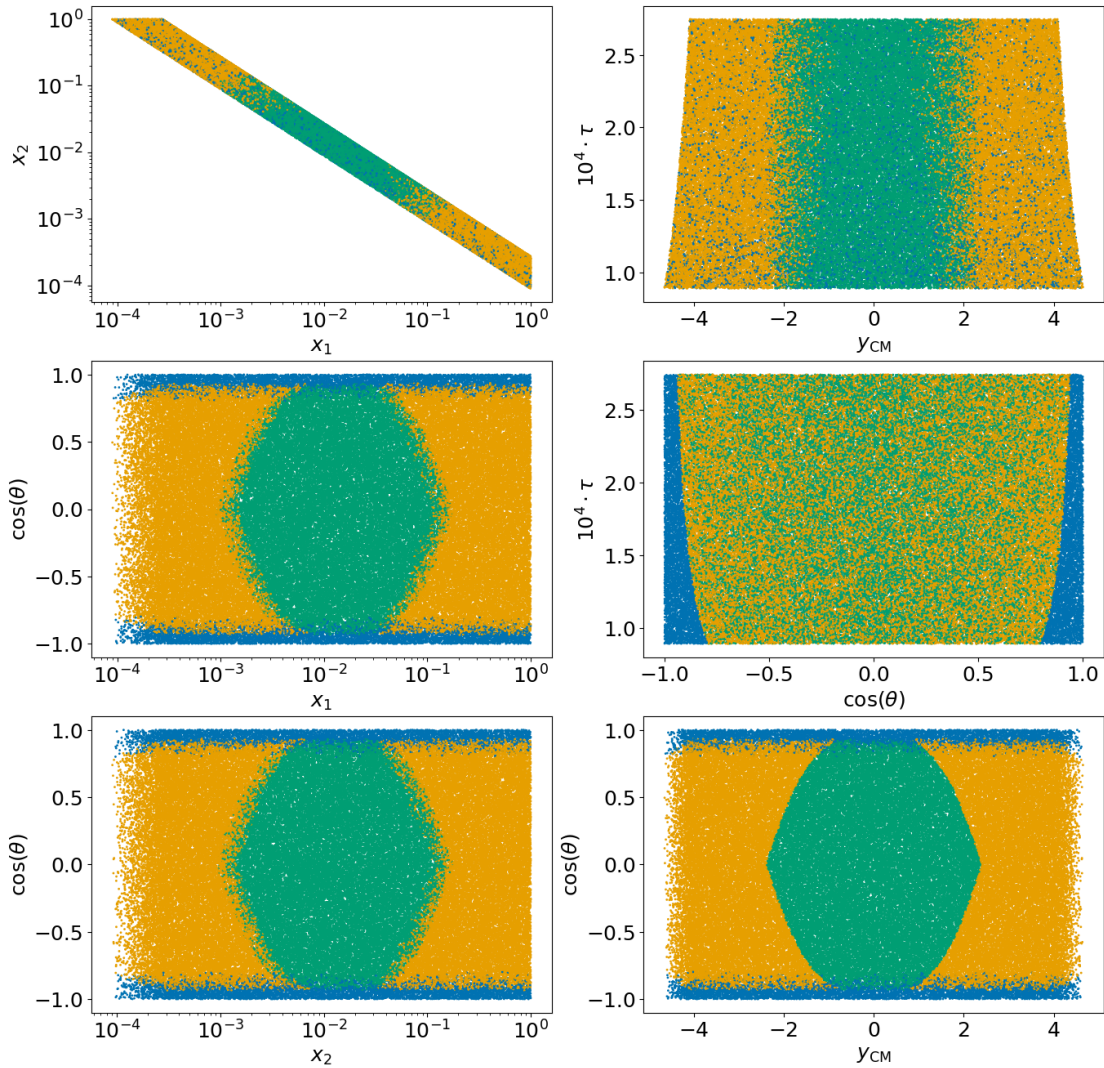


Abbildung 9: In dieser Abbildung sind 10^5 zufällige Events generiert worden. Die Events wurden dann zu verschiedenen Größen gegeneinander aufgetragen. Auf der linken Seite werden die Größen x_1 , x_2 und $\cos(\theta)$ verwendet, während auf der rechten Seite die Größen y_{CM} , τ und $\cos(\theta)$ verwendet wird. Die Grünen Punkte berücksichtigen die Cuts, während die blauen Punkte eine zu kleine senkrechte Impulskomponente aufweisen und die orangenen Punkte eine zu große Rapidität der Myonen.

Somit erhält man in den linken mittleren und unteren Graphen dieselbe Form, wobei die unscharfe Grenze durch den jeweils anderen logarithmischen x -Wert entsteht. Die Größe y_{CM} zeigt dementsprechend den Unterschied zwischen den beiden x -Werten an. Ein betragsmäßig großes y stellt einen großen Unterschied zwischen

den x -Werten dar. Anhand den blauen Punkten können wieder keine neuen Erkenntnisse geschlossen werden. Die Gleichung (6.5) zeigt, dass die senkrechte Impulskomponente von τ und von $\cos(\theta)$ abhängig ist und nicht von y_{CM} , weswegen in den Abbildungen keine Abhängigkeit der blauen Punkte zwischen den x -Werten oder dem y_{CM} zu erkennen sind. Es sieht jedoch anders aus bei dem mittleren rechten Graphen. Dieser weist eine Abhängigkeit der blauen Punkte auf. Mit der Ungleichung $|p_T| > 20 \text{ GeV}$ kann die Gleichung (6.5) umgeschrieben werden zu:

$$\frac{\sqrt{\tau S_{NN}}}{2} \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} > 20 \text{ GeV} .$$

Die Unordnung der orangenen und grünen Punkten in diesen Graphen lässt sich damit erklären, dass die Größe τ keinerlei Einfluss auf der Rapidität der Myonen η_μ hat. Stattdessen zeigt die Größe τ wie groß beide x -Werte sind. Dementsprechend ist das τ eine Größe, die den übertragenen Gesamtimpuls von den Quarks auf den Partonen überträgt. Aus dem oberen rechten Graphen lassen sich jedoch keine neue Erkenntnisse gewinnen.

Schließlich soll in diesem Unterabschnitt der Wirkungsquerschnitt σ_{fid} mit den generierten Events berechnet werden. Allerdings ist die Anzahl der Events auf $5 \cdot 10^6$ erhöht worden. Die kleinere Eventanzahl von vorhin ist damit begründen, dass die Graphen aus der Abbildung 9 überschaulich sind. Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitt wird das Verfahren verwendet, das auf den Mittelwertsatz der Integralrechnung beruht. Allerdings kann nicht $\text{Vol}_3(V)$ verwendet werden, da das Volumen nicht die Cuts berücksichtigt. Stattdessen wird ein effektives Volumen V_{eff} verwendet, das die Cuts berücksichtigt. Um das V_{eff} zu berechnen werden ebenfalls die generierten Events verwendet. Allerdings wird dafür die Hit-or-Miss Methode verwendet. Demnach ergibt sich:

$$V_{\text{eff}} = \text{Vol}_3(V) \frac{h}{10^6} .$$

Dabei ist h die Anzahl der grünen Punkte oder Treffer. Laut der Gleichung (6.2) ist Gleichung (4.12) der Integrand und es folgt:

$$\sigma_{\text{fid}} = \frac{V_{\text{eff}}}{h} \sum_{i=1}^h \frac{d^3\sigma}{d \cos \theta d\tau dy_{\text{CM}}}(\cos \theta_i, \tau_i, y_{\text{CM},i}) = (405.58 \pm 0.71) \text{ pb} . \quad (6.8)$$

Die Unsicherheit wurde mithilfe von Gleichung (6.3) berechnet. Das Ergebnis weist eine Abweichung mit den experimentellen Daten $(502.2 \pm 2.6) \text{ pb}$ aus [2] auf und beträgt 19%. Die Abweichung kann, wie im Abschnitt 5, mit der Vernachlässigung der höheren Ordnungen erklärt werden.

6.3 Importance Sampling

In diesem Abschnitt werden die zufällig generierten Events nicht mehr gleichverteilt sein, damit die Effizienz der Berechnungen zunimmt. Ziel ist es nämlich die Unsicherheit aus Gleichung (6.3) zu reduzieren, indem die Varianz der Funktion σ_f abnimmt. Dieser Vorgang wird Importance Sampling genannt und die Information über das Importance Samplings wurden wieder aus [6] übernommen. Dazu wird das Integral, das berechnet werden soll, substituiert:

$$I = \int_V f(\mathbf{x}) d^n x = \int_{V'} f(\mathbf{x}') \underbrace{\frac{dx_j}{d\rho}}_{=:g(\mathbf{x}')} dx_1 \dots dx_{j-1} d\rho dx_{j+1} \dots dx_n .$$

Dieses kann wieder auf dieselbe Weise approximiert werden:

$$I \approx \frac{\text{Vol}_n(V')}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}'_i) .$$

Das Importance Sampling ist dabei erfolgreich, wenn die Ungleichung

$$\text{Vol}_n(V')\sqrt{\sigma_g} < \text{Vol}_n(V)\sqrt{\sigma_f} \quad (6.9)$$

erfüllt ist. Hier wird die Größe τ mit

$$\tau = \frac{M_z \Gamma}{s_{NN}} \tan \rho + \frac{M_z^2}{s_{NN}} \quad (6.10)$$

substituiert, dabei ist $\rho \in (\rho_0, \rho_1)$ eine gleichverteilte Zufallszahl mit den Grenzen:

$$\rho_0 = \arctan\left(\frac{m_0^2 - M_z^2}{M_z \Gamma}\right) , \quad \rho_1 = \arctan\left(\frac{m_1^2 - M_z^2}{M_z \Gamma}\right) .$$

Die Substitution sorgt dafür, dass die Breit-Wigner-Funktion der Form

$$f(\hat{s}) = \frac{1}{(\hat{s} - M_z^2)^2 + M_z^2 \Gamma^2}$$

konstant wird. Die Funktion besitzt eine ähnliche Form mit dem Z^0 -Bosonterm aus dem Partonwirkungsquerschnitt. Und wegen den Schranken der invarianten Massen von 66 GeV bis 116 GeV, die nahe an der Masse $M_z = 91.1880$ GeV liegen, ist davon auszugehen, dass in diesem Bereich der Z^0 -Bosonterm dominiert, weil der Term $|Z|^2$ maximal wird und somit deutlich größer sein sollte als die anderen beiden Terme.

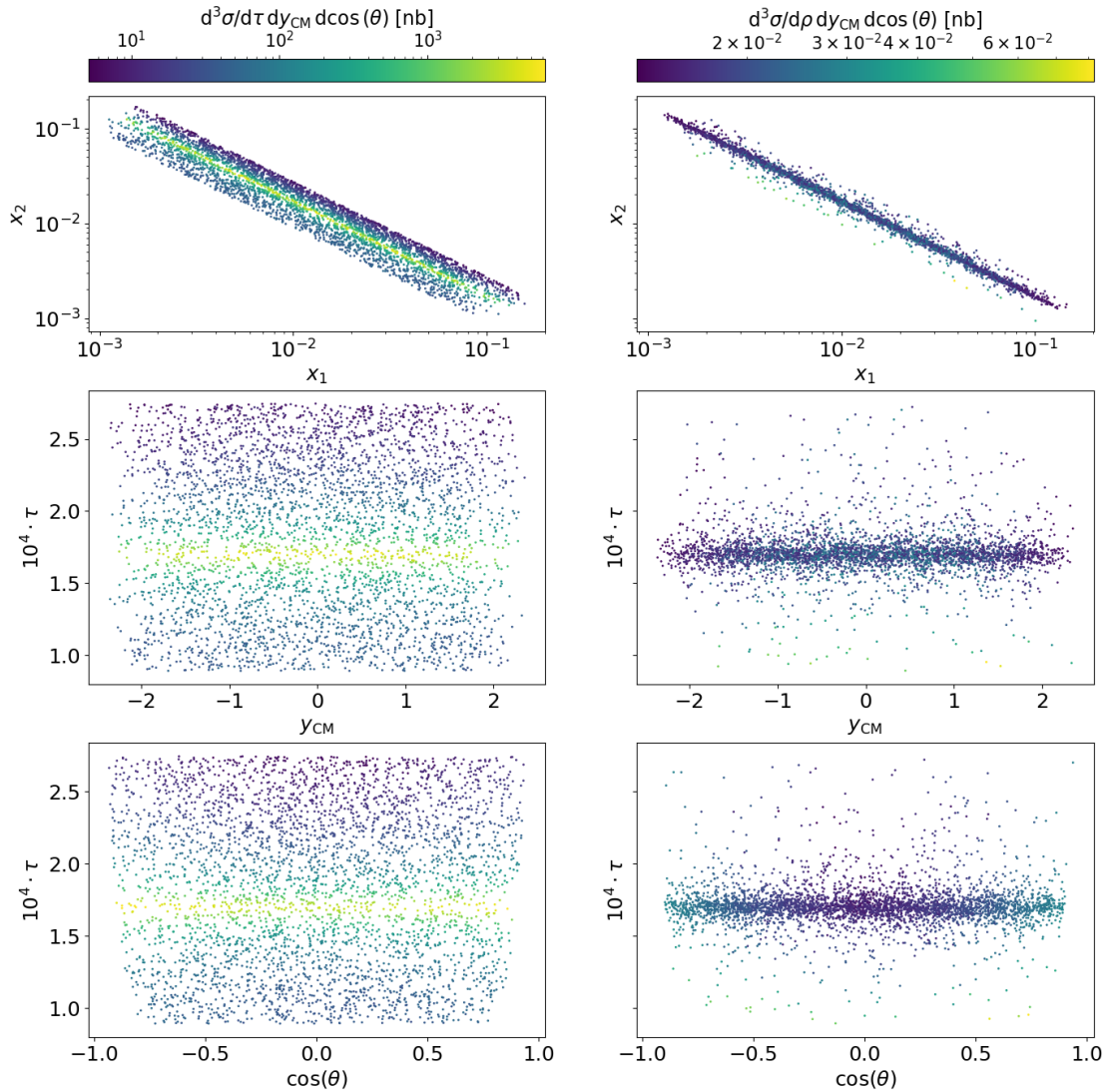


Abbildung 10: In dieser Abbildung sind 10^4 zufällige Events generiert. Einmal wurden diese Events mit dem Importance Sampling generiert, welche auf der rechten Seite dargestellt sind. Auf der linken Seite wurden die Events demnach gleichverteilt generiert. In den oberen Graphen sind die x_2 -Werte der Events gegen die x_1 -Werte aufgetragen. In den mittleren Bereich ist der Wert $10^4 \cdot \tau$ gegen die Rapidity des Myonpaares aufgetragen. Zum Schluss sind bei den unteren Graphiken die Größe $10^4 \cdot \tau$ gegen den Winkel $\cos(\theta)$ aufgetragen. Zusätzlich haben die linken und rechten Graphiken noch eine Farbskala, welche den Wert des differentiellen Wirkungsquerschnitts aus Gleichung (4.12) angeben. Dabei ist der Wirkungsquerschnitt auf der rechten Seite zusätzlich mit der Jacobimatrix $d\tau/d\rho$ multipliziert.

Durch der neuen Verteilung der Zufallspunkte wird die Funktion RandomPointGenerator() mit RandomPointGeneratorImportanceSampling() ausgetauscht:

```

1 #Generierung von Zufallspunkten mit Importance Sampling:
2 def RandomPointGeneratorImportanceSampling():
3     rho = np.random.uniform(rho_0, rho_1)
4     tau = M_z*Gamma_width*np.tan(rho)/s_NN + M_z**2/s_NN
5     cost = np.random.uniform(-1, 1)
6     y_CM = np.random.uniform(0.5*np.log(tau), -0.5*np.log(tau))
7
8     return np.array([y_CM, tau, cost])

```

Die Variablen rho_0 und rho_1 sind ρ_0 und ρ_1 . s_NN ist wie vorhin das Quadrat der Schwerpunktsenergie s_{NN} . Schließlich ist M_z die Masse des Z-Bosons M_z und Gamma_width ist Zerfallsbreite des Z-Bosons Γ . Mit dieser Veränderung lassen sich 10^4 zufällige Events generieren. Diese sind in Abbildung 10 dargestellt. Bei den Linken Graphiken der Abbildung wurde das Importance Sampling nicht verwendet. Das wurde lediglich bei den 3 rechten Graphen verwendet. Die Farbe der Punkte zeigt den Wert des differentiellen Wirkungsquerschnitts aus Gleichung (4.12) an, wobei die Werte auf der rechten Seite mit dem Term $d\tau/d\rho$ multipliziert wurden. Ein Vergleich der Farbskalen zeigt, dass die Werte des Wirkungsquerschnitts ohne das Importance Sampling deutlich größere Unterschiede aufweisen, als mit Importance Sampling. Desweiteren zeigen die rechten Graphen mit dem dazugehörigen linken Graphen, dass die zufälligen generierten Events beim Importance Sampling sich im Bereich mit hohen Werten des differentiellen Wirkungsquerschnitts anhäufen. Die beiden Aspekte sprechen für ein erfolgreiches Importance Sampling.

Auch im Unterabschnitt 6.3 lässt sich der Wirkungsquerschnitt σ_{fid} analog berechnen. Als erstes werden dafür wieder $5 \cdot 10^6$ Events generiert. Danach wird das Volumen $\text{Vol}_3(V')$ bestimmt:

$$\text{Vol}_3(V') = \int_{V'} d \cos \theta dy_{CM} d\rho$$

Daraus ergibt sich

$$\text{Vol}_3(V') = -2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} \ln \left(\tan(\rho) + \frac{M_z^2}{s_{NN}} \right) d\rho ,$$

das analytisch nicht lösbar ist. Deswegen ist das Integral mithilfe der Pythonbibliothek scipy numerisch ermittelt worden. Es folgt

$$\text{Vol}_3(V') \approx 52.80 .$$

Daraufhin muss wieder das effektive Volumen V'_{eff} bestimmt werden, da das Volumen $\text{Vol}_3(V')$ die Cuts nicht berücksichtigt. Mithilfe der Hit-or-Miss Methode lässt sich V'_{eff} berechnen, wobei h die Anzahl der Treffer ist:

$$V'_{\text{eff}} = \text{Vol}_3(V') \frac{h}{10^6} .$$

Es ergibt sich:

$$\sigma_{\text{fid}} = \frac{V'_{\text{eff}}}{h} \sum_{i=1}^h \frac{d^3\sigma}{d \cos \theta d\rho dy_{\text{CM}}}(\cos \theta_i, \rho_i, y_{\text{CM},i}) = (405.893 \pm 0.070) \text{ pb} . \quad (6.11)$$

Das Ergebnis stimmt mit dem letzten Abschnitt überein. Somit weicht das Ergebnis immer noch mit experimentellen Daten (502.0 ± 9.2) pb aus [2] ab. Allerdings war das auch zu erwarten, da das Importance Samplings lediglich die Unsicherheit reduzieren soll und das Ergebnis beibehalten sollte. Das Reduzieren der Unsicherheit ist durch einen Vergleich der beiden Gleichungen (6.8) und (6.11) auch gelungen. Die Anzahl der Events ist deswegen gleich gewählt, da sonst der Unterschied der Unsicherheiten darauf zurückzuführen ist. Die Unsicherheit des Importance Sampling ist ungefähr eine Größenordnung kleiner als die Unsicherheit ohne dem Importance Sampling. Anhand dessen Ergebnis lässt sich schließen, dass die Ungleichung aus (6.9) erfüllt ist und somit das Importance Sampling geglückt.

6.4 Auswertung der Events

In dem finalen Unterabschnitt soll nun der differentielle Wirkungsquerschnitt berechnet werden und dieser die blauen Daten aus der Abbildung 8 besser widerspiegeln, als die vorherige Methode, weil nun die Cuts berücksichtigt werden. Dazu wird das Maximum der Funktion

$$\frac{d^3\sigma}{d \cos \theta d\rho dy_{\text{CM}}}(\cos \theta, \rho, y_{\text{CM}}) \quad (6.12)$$

gesucht, wobei dieses σ_{max} oder im Code `sigma_max` genannt wird. Mithilfe des Maximums und den vorherigen definierten Funktionen können $5 \cdot 10^6$ gültige Events gespeichert werden. Mit gültig ist in diesem Kontext gemeint, dass ein generiertes Event die Cuts berücksichtigt. Das gelingt mit dem Python Code:

```

1 Nevents = 5*10**6
2 Hits = 0
3 evcounts = 0
4 Events = []
5 while evcounts < Nevents:
6     RndEv = RandomPointGeneratorImportanceSampling()
```

```

7     if pTetaCheck(*RndEv) == 0:
8         tmp = HadCS(*RndEv)*Jacobi(RndEv[1])
9         evcounts += 1
10        if tmp/sigma_max > np.random.random():
11            Events.append(tmp, *RndEv)
12            Hits += 1

```

In diesem Code müssen jedoch einige Größen und Funktionen noch erklärt werden. Die Größe Nevents sind die $5 \cdot 10^6$ gültigen Events. Die Größe Hits beschreibt dabei die Anzahl an Treffern von den Nevents. evcounts ist lediglich dafür verantwortlich, dass genau $5 \cdot 10^6$ gültige Events generiert werden. Der Integer wird nämlich nach jedem gültigen Event um 1 hochgezählt. RndEv entspricht den zufällig generierten Phasenraumpunkt mit Importance Sampling als Liste und besitzt die Einträge y_{CM} , τ und $\cos\theta$. tmp ist der Wert des differentiellen Wirkungsquerschnitt aus Gleichung (6.12) beim Phasenraumpunkt RndEv ausgewertet. Events ist eine Liste mit allen Events, die auch ein Treffer sind. Die Funktionen HadCS() und Jacobi() erhalten beide, als Eingabeparameter ein Phasenraumpunkt und geben als Produkt den differentiellen Wirkungsquerschnitt (6.12) zu dem dazugehörigen Phasenraumpunkt aus. Die Elemente der Liste werden nach der Rapidität des Myonpaares in 12 Bins sortiert, sodass sich für jeden Bin eine Anzahl an Ereignissen ergibt. Dabei gilt für die Ränder der Bins:

$$[0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2, 2.4] .$$

Mithilfe der Unterteilung kann für jeden Bin ein differentieller Wirkungsquerschnitt berechnet werden. Das Vorgehen ist bei jedem Bin analog und kann gleichzeitig besprochen werden. Das Summieren der Bins über die Anzahl ergeben die Trefferanzahl. Jedoch sollte sich bei der Addition aller Bins der Wirkungsquerschnitt σ_{fig} ergeben und nicht die Trefferanzahl. Demnach werden die Bins mit dem Faktor σ_{fid}/h normiert, wobei h wieder die Anzahl an Treffern ist und σ_{fid} Gleichung (6.11) entspricht. Innerhalb eines Bins soll der differentielle Wirkungsquerschnitt konstant sein, weswegen mit der Breite 0.2 dividiert werden muss. Die Idee dahinter ist, dass bei einer Integration über y_{CM} die Breite 0.2 als Faktor auftaucht. Das finale Ergebnis ist in Abbildung 11 zu erkennen. Die Ergebnisse weisen wieder wie in Abbilung 8 eine Abweichung auf. Allerdings sind die theoretischen Vorhersagen kleiner als die experimentellen Daten aus [2]. Die Abweichungen können mit der Vernachlässigung der höheren Ordnungen erklärt werden. Außerdem lässt sich beobachten, dass die Abweichung bei steigender Rapidität des Myonpaares größer wird. Bei kleinen Werten von y_{CM} sind Abweichungen von ca 12% vorhanden, während allerdings im letzten Bin eine Abweichung von 62% vorliegt. Daraus lässt sich schließen, dass die höheren Ordnungen bei kleinen Werten von y_{CM} die Daten noch beschreiben können. Jedoch sollten bei größeren Rapiditäten

des Myonpaares die höheren Ordnungen berücksichtigt werden, da die Abweichungen sonst zu groß werden.

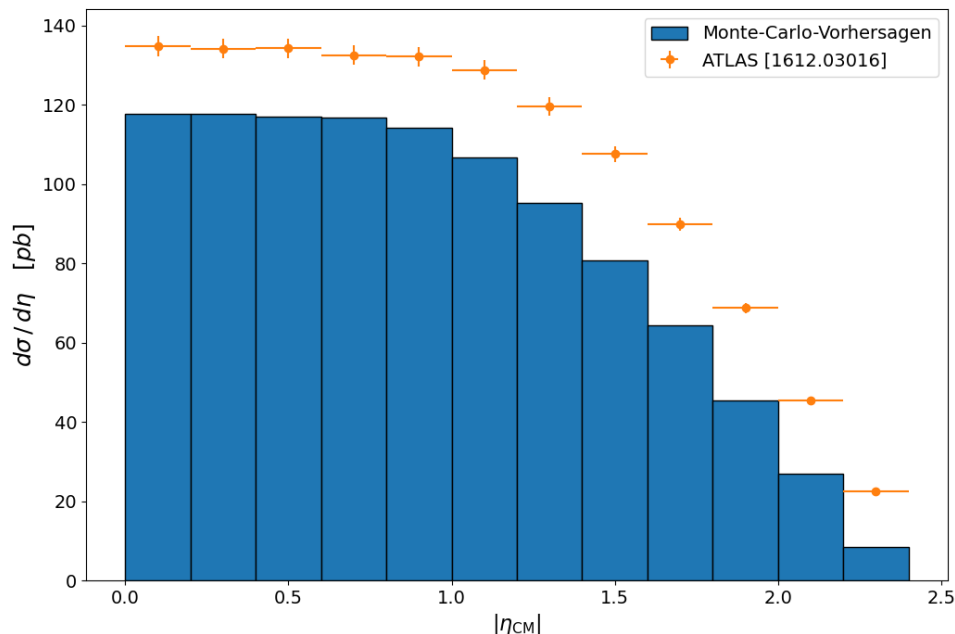


Abbildung 11: Der differentielle Wirkungsquerschnitt des Drell-Yan Prozesses $q\bar{q} \rightarrow Z^0/\gamma \rightarrow \mu^-\mu^+$ ist gegen die Rapidity des Myonpaares aufgetragen. Dabei entspricht der blaue Graph die theoretischen Vorhersagen, während die orangenen Daten die experimentellen Daten aus [2] repräsentiert.

7 Zusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit wurde der Drell-Yan Prozess am LHC beschrieben. Als erstes wurde der Wirkungsquerschnitt des Prozesses analytisch berechnet bis die Partonverteilungsfunktionen verwendet wurden, welche nur numerisch bekannt sind. Deswegen konnte der Wirkungsquerschnitt und damit auch der differentielle Wirkungsquerschnitt nicht mehr analytisch berechnet werden, sondern musste stattdessen in einer Programmiersprache, in diesem Fall Python, implementiert werden. Dabei wurden verschiedene Methoden verwendet. Als erstes ist der Gesamtwirkungsquerschnitt mithilfe der scipy-Bibliothek aus Python berechnet worden. Dort ergab sich 816 pb. Das Ergebnis hatte eine Abweichung von 18% mit den experimentellen Daten aus [2]. Hierbei wurde die Abweichung mit der Vernachlässigung

höherer Ordnungen erklärt. Danach wurde der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dy_{\text{CM}}$ bestimmt. Bei dieser Methode war es jedoch nicht möglich die Cuts $|p_T| > 20 \text{ GeV}$ und $|\eta_\mu| < 2.4$ zu berücksichtigen. Die Vernachlässigung der Cuts sorgte, vor allem bei großen Rapiditäten des Myonpaares, für große Abweichungen zu den experimentellen Daten.

Daraufhin ist das Verfahren mit einer Monte-Carlo-Simulation ersetzt worden. Dieses Verfahren war nämlich in der Lage die Cuts zu berücksichtigen. Bei der Eventgenerierung sind auch die physikalischen Bedeutungen der Größen von y_{CM} und τ veranschaulicht worden. Zum einen beschreibt y_{CM} die Rapidität des Myonpaares, welche anschaulich als Geschwindigkeit zwischen dem Nukleon-Nukleon-System und dem Partonschwerpunktsystem interpretiert werden kann, aber im Bezug auf die Größen x_1 und x_2 gibt die Größe y_{CM} den Größenunterschied der beiden Werte an. Ein betragsmäßig großes y_{CM} ergibt einen großen Unterschied zwischen den beiden x -Werten. Die Größe τ konnte im Bezug auf den x -Werten beschreiben wie groß die beiden x -Werte sind. Ein τ von 1 ergibt zum Beispiel, dass beide x -Werte den Wert 1 betragen, während ein τ -Wert von 0 dafür sorgt, dass beide x -Werte ebenfalls 0 sind. Zum Schluss wurde in der Eventgenerierung der Wirkungsquerschnitt mit $(405.58 \pm 0.71) \text{ pb}$ bestimmt und weist eine Abweichung von 19% mit dem experimentellen Daten aus [2] auf, die ebenfalls mit der Vernachlässigung höherer Ordnungen erklärt wurde.

Für eine bessere Effizienz ist das Importance-Sampling eingeführt worden. Die invarianten Massen lagen nahe an der Masse des Z -Bosons. Der Z -Bosonterm hatte eine ähnliche Form wie die Breit-Wigner-Funktion, sodass die Größe τ mit ρ substituiert wurde, wodurch eine Breit-Wigner-Funktion konstant wird. Diese Umschreibung der Daten war dadurch in der Lage das Ergebnis auf $(405.893 \pm 0.070) \text{ pb}$ zu bestimmen und die Varianz des Wirkungsquerschnitts und damit auch die Unsicherheit der Ergebnisse zu reduzieren.

Zum Schluss wurden die generierten Events verwendet, um den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu berechnen. Die Beschreibung der Daten ist durch das Berücksichtigen der Cuts verbessert worden. Dennoch waren zum Teil Abweichungen von bis zu 62% zu beobachten. Die großen Abweichungen lagen jedoch bei hohen Rapiditäten des Myonpaares, während bei kleinen Werten die Abweichungen lediglich bei 12% betragen. Folglich waren die höheren Ordnungen bei hohen Werten von y_{CM} nicht mehr zu vernachlässigen, aber für die Beschreibung bei kleinen Rapiditäten des Myonpaares ausreichend.

A Mathematische Relationen in der QED

In diesem Anhang werden wichtige Relationen aufgestellt, welche im Abschnitt 3 essenziell sind und aus [4] und [7] entnommen wurden. Im folgendem werden

Eigenschaften der verschiedenen γ -Matrizen besprochen. Diese sind in der Matrixschreibweise definiert mit:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Definitionen kann leicht gezeigt werden, dass:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (\text{A.1})$$

gilt. Aber auch Eigenschaften der Spur können gezeigt werden:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0 \quad (\text{A.2})$$

oder die allgemeinere Form für eine ungerade Anzahl an γ -Matrizen, welche mit Γ_{2N+1} definiert wird:

$$\text{Tr}[\Gamma_{2N+1}] \equiv \text{Tr} \left[\prod_{i=1}^{2N+1} \gamma^{\mu_i} \right] = 0, \quad (\text{A.3})$$

wobei N eine natürliche Zahl ist und $\mu_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ mit $i = 1, \dots, 2N + 1$. Dies sieht anders aus bei einem Produkt von einer geraden Anzahl an γ -Matrizen. Die ersten 2 Spuren ergeben sich zu:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (\text{A.5})$$

Durch der schwachen Wechselwirkung spielt die Chiralität der Spinoren eine Rolle, weswegen die Einführung der Größe $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ notwendig ist. Diese besitzt auch hilfreiche Relationen, welche in Abschnitt 3 unumgänglich sind. Die γ^5 -Matrix ist antikommutativ mit den anderen γ -Matrizen:

$$\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu. \quad (\text{A.6})$$

Außerdem gilt für die Spur:

$$\text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad (\text{A.7})$$

oder eine allgemeine Form:

$$\text{Tr}[\Gamma_N \gamma^5] = 0 \ , \quad (\text{A.8})$$

für $N \neq 4$. Für $N = 4$ ergibt sich:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] = -4i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \ . \quad (\text{A.9})$$

Die Größe $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ist dabei der vier dimensionale Epsilon-Tensor, dessen Identitäten auch benötigt werden. Zum einen ist dieser Tensor antisymmetrisch bezüglich jeder Komponente:

$$\varepsilon^{\dots i \dots j \dots} = -\varepsilon^{\dots j \dots i \dots} \ . \quad (\text{A.10})$$

Die andere benötigte Identität ist die Summation über 2 gleiche Indizes:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -2(g_\alpha^\rho g_\beta^\sigma - g_\beta^\rho g_\alpha^\sigma) \quad (\text{A.11})$$

In den Grundlagen der QED wurden kurz die Spinoren mit deren Adjungierung erwähnt. Der Zusammenhang benötigt die γ^0 -Matrix:

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma^0 \ , \quad \bar{v} = v^\dagger \gamma^0 \ . \quad (\text{A.12})$$

Schließlich existiert die Relation:

$$\sum_{\text{Spin}} (u(p))_a (\bar{u}(p))_b = (\not{p} + m)_{ab} \ , \quad \sum_{\text{Spin}} (v(k))_a (\bar{v}(k))_b = (\not{k} - m)_{ab} \quad (\text{A.13})$$

mit der Feynman-Slash-Notation:

$$\not{B} \equiv \gamma^\mu B_\mu \quad (\text{A.14})$$

B Deklaration der Konstanten

Die Beschreibung der Konstanten verwendet die natürlichen Einheiten, sodass $\hbar = c = \epsilon_0 = 1$ gilt. Die Bosonen der schwachen Wechselwirkung besitzen Massen. Die Masse des Z -Bosons wird dabei M_z und die Masse der W -Bosonen M_W genannt und betragen:

$$M_W = 80.3692 \text{ GeV} \ , \quad M_z = 91.1880 \text{ GeV} \ .$$

Außerdem ist in dieser Bachelorarbeit die Zerfallsbreite des Z -Bosons mit

$$\Gamma = 2.4955 \text{ GeV}$$

relevant. Desweiteren existiert die Fermiekonstante G_F und der Weinberg-Winkel θ_W . Diese beiden Größen werden unter anderem für die elektromagnetische Kopplungskonstante benötigt und sind mit

$$G_F = (1.1663788 \cdot 10^{-5}) \text{ GeV}^{-2} \quad , \quad \sin^2(\theta_W) = 0.23129 \quad ,$$

bestimmt. Die erwähnten Konstanten sind hierbei aus [1] entnommen worden. Aus den vorherigen Größen können weitere Konstanten deklariert werden. Wie schon erwähnt ergeben sich daraus die elektromagnetische Kopplungskonstante, aber auch die elektromagnetische Ladung e_l und die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung g leiten sich gemäß [3] aus diesen Größen her:

$$\alpha = \frac{G_F \sqrt{2} M_W^2 \sin^2(\theta_W)}{\pi} \quad , \quad e_l = \sqrt{4\pi\alpha} \quad , \quad g = \frac{e_l}{\sin(\theta_W)} \quad . \quad (\text{B.1})$$

Die Ladung von einem Myon beträgt lediglich $e_\mu e_l = -e_l$. Jedoch müssen die Quarks nach [4] zwischen up- und downartig unterschieden werden:

$$e_q = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{Up- und Charmquark} \\ -\frac{1}{3}, & \text{Down-, Strange- und Bottomquark} \end{cases} \quad ,$$

sodass sich die Ladungen eines Quarks zu $e_q e_l$ ergibt. Nun werden die vektoriellen (c_V^f) und den axialen (c_A^f) Kopplungskoeffizienten besprochen. Dabei steht hier das f für Fermionen. Die erlaubten Fermionen, die in der Bachelorarbeit relevant sind, ist das Myon, die Down-, Up-, Strange-, Charm- und Bottomquarks. Für diese gilt laut [4] im allgemeinen:

$$c_A^f = \frac{1}{2} \text{sgn}(e_f) \quad , \quad c_V^f = c_A^f - 2e_l e_f \sin^2(\theta_W) \quad .$$

Zum Schluss werden noch über wichtigen Konstanten des Collider-Experiments am LHC aus [2] besprochen. Die Schwerpunktsenergie der Quarks liegt nämlich bei $\sqrt{s_{NN}} = 7 \text{ TeV}$. Außerdem existieren Cuts. Wenn die Myonen die Cuts verletzen können diese nicht mehr detektiert werden. Die Cuts lauten $|p_T| > 20 \text{ GeV}$ und $|\eta_\mu| < 2.4$. Desweiteren existieren Schranken bei der invarianten Masse $m_{\mu\mu}$. Die untere Schranke wird hier m_0 genannt und die obere m_1 . Diese betragen:

$$m_0 = 66 \text{ GeV} \quad , \quad m_1 = 116 \text{ GeV} \quad .$$

Diese Schranken lassen sich auch in einer Abhängigkeit in τ umformulieren:

$$\tau_0 = \frac{m_0^2}{s_{NN}} \quad , \quad \tau_1 = \frac{m_1^2}{s_{NN}} \quad .$$

Literatur

- [1] S. Navas *et al.* (Particle Data Group). “Review of Particle Physics”. In: *Phys. Rev. D* **110**, 030001 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevD.110.030001.
- [2] Morad Aaboud u. a. “Precision measurement and interpretation of inclusive W^+ , W^- and Z/γ^* production cross sections with the ATLAS detector”. In: *The European Physical Journal C* 77.6 (2017).
- [3] Guido Altarelli und James Wells. *The Theory of Electroweak Interactions*. Springer, 2017. Kap. 3.11, S. 131–132.
- [4] Francis Halzen und Alan D Martin. *Quark & Leptons: An introductory course in modern particle physics*. John Wiley & Sons, 2008.
- [5] Tie-Jiun Hou u. a. “New CTEQ global analysis of quantum chromodynamics with high-precision data from the LHC”. In: *Phys. Rev. D* 103 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevD.103.014013.
- [6] Andreas Papaefstathiou. “How to write your own Monte Carlo event generator”. In: *Physik-Institut, Universität Zürich, Winterthurerstr* (2014).
- [7] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2013.

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über Monte-Carlo-Generierung des Drell-Yan Prozesses am LHC selbstständig von mir und ohne fremde Hilfe verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel, als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien und KI-Tools – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind. Mir ist bekannt, dass es sich bei einem Plagiat um eine Täuschung handelt, die gemäß der Prüfungsordnung sanktioniert werden kann.

Ich erkläre hiermit, dass ich Kenntnis von einer zum Zweck der Plagiatskontrolle vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in einer Datenbank sowie von ihrem Abgleich mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen habe.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit oder Teile daraus nicht anderweitig als Prüfungsarbeit eingereicht habe.

03.09.25, Fabian Bolting

Datum, Unterschrift