

**DIE PAULI-GLEICHUNG ALS  
NICHT-RELATIVISTISCHER GRENZFALL DER  
DIRAC-GLEICHUNG IN DER SUPERSYMMETRISCHEN  
QUANTENMECHANIK**

The Pauli equation as non-relativistic limit of the Dirac  
equation in supersymmetric quantum mechanics

BACHELORARBEIT

im Fachbereich Physik



Autor: FRIEDRICH BACH

7. Februar 2012

Studiengang:	Physik
Matrikelnummer:	xxxxxx
Erstgutachter:	Prof. Dr. Klasen
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Münster



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren . . . . .	2
2.1.1 Lie-Gruppen . . . . .	2
2.1.2 Lie-Algebren . . . . .	2
2.1.3 Super-Lie-Algebren . . . . .	3
2.1.4 Die Gruppen $SU(2)$ und $SO(3)$ . . . . .	4
2.2 Supersymmetrie . . . . .	10
2.2.1 Definition der SUSY-Algebra . . . . .	13
2.2.2 Die kanonische Darstellung . . . . .	13
2.2.3 Das Eigenwertspektrum . . . . .	14
2.2.4 Exakte und gebrochene Supersymmetrie . . . . .	14
2.3 Supersymmetrische Quantenmechanik . . . . .	15
2.3.1 Definition der supersymmetrischen Quantenmechanik . . . . .	15
2.3.2 Faktorisierung des Hamiltonoperators . . . . .	15
2.3.3 Forminvariante Potentiale . . . . .	17
2.3.4 Supersymmetrische WKB-Näherung . . . . .	18
<b>3 Relativistische supersymmetrische Quantenmechanik</b>	<b>20</b>
3.1 Relativistische Quantenmechanik . . . . .	20
3.1.1 Die Lagrange-Dichte der Dirac-Gleichung . . . . .	20
3.2 Die Dirac-Gleichung in supersymmetrischer Formulierung . . . . .	23
3.2.1 Supersymmetrischer Hamiltonoperator und Involution . . . . .	23
3.2.2 Die kanonische Darstellung . . . . .	24
3.2.3 Der Dirac-Hamiltonoperator mit einem Coulomb-Potential . . . . .	25
3.3 Die Pauli-Gleichung . . . . .	30
3.4 Die supersymmetrische Pauli-Gleichung . . . . .	33
3.5 Elektronen im Magnetfeld . . . . .	35
3.5.1 Symmetrische und asymmetrische Eichung . . . . .	35
3.5.2 Asymmetrische Eichung . . . . .	35
3.5.3 Potentiale für die symmetrische Eichung . . . . .	36
3.5.4 Symmetrische Eichung . . . . .	37
<b>4 Zusammenfassung</b>	<b>42</b>
<b>A Abbildungen</b>	<b>I</b>
<b>B Anhang</b>	<b>VI</b>
B.1 Notation . . . . .	VI
B.2 Diagonalisieren der Dirac-Gleichung . . . . .	VI
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>IX</b>

# 1 Einleitung

Das Thema dieser Arbeit ist die Supersymmetrie in der Quantenmechanik.

Es motivieren hier die Bücher [KS97] [CKS01] [Jun96], sich näher mit Methoden der Supersymmetrie in der klassischen wie auch in der relativistischen Quantenmechanik zu beschäftigen. Insbesondere die analytische Lösbarkeit vieler Potentiale (näher besprochen in [CKS01]), die Genauigkeit möglicher Näherungslösungen nach SUSY-WKB-Methode [Jun96] und auch die enge Verbindung von relativistischen Effekten in der nicht-relativistischen Betrachtung von quantenmechanischen Problemen [KS97] wird deutlich gemacht.

Die Arbeit wird sich insbesondere mit der Dirac-Gleichung und ihrer supersymmetrischen Behandlung beschäftigen. Es wird die Lösung der Dirac-Gleichung im Coulomb-Potential betrachtet. Zur Untersuchung von Teilchen im Magnetfeld soll der nicht-relativistische Grenzfall zur Pauli-Gleichung durchgeführt werden.

Zunächst werden im ersten Kapitel mathematische Grundlagen eingeführt. Besonderes Augenmerk wird auf die Behandlung von Lie-Gruppen und Lie-Algebren gerichtet, da diese in der Supersymmetrie unerlässlich sind und auch in der relativistischen Behandlung eine große Rolle spielen. Darauf basierend sollen im zweiten Abschnitt die Grundlagen der Supersymmetrie und der supersymmetrischen Quantenmechanik hergeleitet werden.

Im Hauptteil wird dann die Dirac-Gleichung aus Symmetrie-Überlegungen der Lorentz-Gruppe hergeleitet und diese dann supersymmetrisch untersucht. Dies geschieht für ein skalares Potential am Beispiel des Coulomb-Potentials.

Im nächsten Abschnitt wird die Dirac-Gleichung in einer supersymmetrischen Behandlung mit Methoden der Funktionalanalysis im nicht-relativistischen Limes auf die Pauli-Gleichung geführt. Für diese wird zunächst der gyromagnetische Faktor exakt bestimmt. In einem folgenden Abschnitt sollen dann einige forminvariante Potentiale untersucht werden. Mit dieser Methode können dann die Landau-Niveaus bestimmt werden.

# 2 Grundlagen

## 2.1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

In diesem Abschnitt sollen mathematische Definitionen gegeben sowie Sätze bewiesen werden, welche im folgenden häufig gebraucht werden. Dazu gehören insbesondere die Definition der Lie-Algebren, welche in der gesamten Arbeit gebraucht werden, sowie die in der relativistischen Supersymmetrie auftretenden Supervektorräume. Des weiteren werden wichtige Lie-Gruppen definiert, aus welchen dann aus der Lorentz-Invarianz die Lagrange-Dichte der Dirac-Gleichung hergeleitet werden kann.

Wir benutzen für die später folgenden Gruppen die Eigenschaften der infinitesimalen Methode, um für die Generatoren einer Lie-Gruppe eine Lie-Algebra<sup>1</sup> zu erhalten.

Falls nicht anders gekennzeichnet sind die Definitionen und Erkenntnisse dieses Abschnittes aus [Hei90] und [Böh11] entnommen.

### 2.1.1 Lie-Gruppen

Lie-Gruppen sind kontinuierliche Gruppen, welche über eine überabzählbar unendliche Anzahl von (homogenen) Elementen verfügen. Lie-Gruppen verhalten sich wie differenzierbare Mannigfaltigkeiten, lokal sogar wie der euklidische Raum  $\mathbb{R}^n$ . Die Gruppenoperationen von Lie-Gruppen sind durch die Axiome von Gruppen gegeben. Lineare Lie-Gruppen besitzen eine endlich-dimensionale Matrixdarstellung.

Die Algebren, welche die Elemente der Lie-Gruppen erfüllen, heißen Lie-Algebren. Dies sind für die Matrixdarstellungen zum Beispiel die Kommutatoren  $[,]$ . Da sich Lie-Gruppen lokal wie der  $\mathbb{R}^n$  verhalten, bietet es sich an, diese lokal zu betrachten. Die Struktur der Lie-Algebren bleibt bei dieser Linearisierung bestehen. Die Matrixexponentialfunktion schafft den Zusammenhang zwischen den sogenannten *infinitesimalen Generatoren* und den Elementen der Lie-Gruppen.

### 2.1.2 Lie-Algebren

**Definition 2.1.1.** Eine *Lie-Algebra* ist ein linearer Vektorraum  $\mathfrak{g}$  mit der Bilinearform  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  sodass für  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) die Vertauschungsrelation  $[X, Y] = -[Y, X]$
- (ii) die Jacobi-Identität  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

*Bemerkung:* Insbesondere folgt aus (i)  $[X, X] = 0$ . Man kann den Kommutator  $[X, Y] = XY - YX$  als *Lie-Klammer*  $[\cdot, \cdot]$  auffassen.

---

<sup>1</sup>Benannt nach dem norwegischen Mathematiker Sophus Lie (1842-1899). Beinahe zeitgleich wurden Lie-Algebren im Zusammenhang mit der Differentialgeometrie von Wilhelm Killing (1847-1923) entwickelt, welcher später auch an der Universität Münster forschte und sogar zeitweilig deren Rektor war.

### 2.1.3 Super-Lie-Algebren

In der Supersymmetrie werden Bosonen und Fermionen in einem Formalismus zusammen behandelt. Da für Bosonen und Fermionen jedoch die Kommutatoren aufgrund der symmetrischen bzw. antisymmetrischen Wellenfunktionen anders definiert sind, werden sie zusammen in einer sogenannten *Super-Lie-Algebra* oder auch *graduierten Algebra* behandelt. Mit diesem Ansatz kann auf die Grassmann-Zahlen verzichtet werden, da die Zugehörigkeit eines Elementes zum jeweiligen Teil des Vektorraumes die zugrunde liegende Kommutatorrelation festlegt. Hierzu ist es wichtig, einen Hilbertraum zu konstruieren, welcher Wellenfunktionen beider Teilchenarten beinhalten kann. Ein solcher Vektorraum wird *Supervektorraum* genannt. Die folgenden Definitionen werden insbesondere in der Beschreibung von Vertex-Operator-Algebren<sup>2</sup> genutzt und sind zum Beispiel in [Kac98] gegeben.

**Definition 2.1.2.** Ein *Supervektorraum* ist ein aus einem geraden (Index 0) und ungeraden (Index 1) Anteil bestehender Vektorraum

$$V = V_0 \oplus V_1.$$

*Bemerkung:* Man definiert die *Parität*  $p(v)$  für ein Element  $v \in V$  für die gilt, dass  $p(v) = 0$  falls  $v \in V_0$  und  $p(w) = 1$  falls  $w \in V_1$ . Das Element  $v$  ist *homogen* genau dann, wenn  $v \in V_i$  für ein  $i = 0, 1$ .

**Definition 2.1.3.** Die *Super-Lie-Algebra* ist ein Supervektorraum  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ , mit einer bilinearen Abbildung  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , die für homogene Elemente  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  folgende Identitäten erfüllt:

(i) Schiefsymmetrische Vertauschungsrelation

$$[X, Y] = -(-1)^{p(X)p(Y)}[Y, X]$$

(ii) Jacobi-Identität

$$0 = (-1)^{p(X)p(Y)}[X, [Y, Z]] + (-1)^{p(Y)p(Z)}[Y, [Z, X]] + (-1)^{p(Z)p(X)}[Z, [X, Y]]$$

Des weiteren kann ein Homomorphismus von Super-Lie-Algebren angegeben werden. Dieser ist eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  mit dem Grad 0 mit

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)].$$

Eine lineare Abbildung hat den Grad 0, falls  $f(V_1) \subset V_1$  und den Grad 1, falls gilt  $f(V_0) \subset V_1$  und  $f(V_1) \subset V_0$ . Ist  $V$  Supervektorraum so ist auch

$$\text{End}(V) = \text{End}(V)_0 \oplus \text{End}(V)_1$$

ein Supervektorraum. Die Räume  $\text{End}(V)_0$  und  $\text{End}(V)_1$  sind wie folgt gegeben:

$$\text{End}(V) = \begin{pmatrix} \text{Hom}(V_0, V_0) & \text{Hom}(V_0, V_1) \\ \text{Hom}(V_1, V_0) & \text{Hom}(V_1, V_1) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Elemente aus  $\text{End}(V)_0$  sind die Diagonalelemente dieser Matrix, und Elemente aus  $\text{End}(V)_1$  sind die Nichtdiagonalelemente.

<sup>2</sup>Vertex-Operator-Algebren werden häufig als Darstellungen der Virasoro-Algebra oder der affinen Kac-Moody-Algebra benutzt. Die konformen Feldtheorien in  $1 + 1$  Dimensionen und darauf aufbauend die String-Theorie sind besondere Anwendungen dieser Algebren.

Der Kommutator ist hier definiert als

$$[f, g] = fg - (-1)^{p(f)p(g)}gf$$

für  $f, g \in \text{End}(V)$ . Für zwei Elemente  $f, g \in \text{End}(V)_1$  gilt dann:

$$[f, g] = fg + gf \equiv \{f, g\}.$$

Man nennt  $\{f, g\}$  auch den *Antikommutator*.

**Definition 2.1.4.** Die *Darstellung einer Super-Lie-Algebra*  $\mathfrak{g}$  ist ein Supervektorraum  $V$  zusammen mit einer linearen Abbildung  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ , sodass

$$\pi([X, Y]) = [\pi(X), \pi(Y)]$$

für alle  $X, Y \in \mathfrak{g}$  gilt.

Eine Darstellung einer Lie-Algebra mit  $f, g \in \text{End}(V)_0$ , ist

$$[g_i, g_j] = f_{ijk}g_k \quad (2.2)$$

mit den *Strukturkonstanten*  $f_{ijk}$ . Der Kommutator ist hier die aus Definition 2.1.1 bekannte Vertauschungsrelation.

Eine weitere Darstellung von Super-Lie-Algebren ist die *Clifford-Algebra*.

**Definition 2.1.5.** Eine *Clifford-Algebra* ist gegeben durch die Super-Lie-Algebra  $\mathcal{C}\ell = 0 \oplus V_1$ . Für die Elemente  $a_i, a_j \in \mathcal{C}\ell$  gilt der Antikommutator

$$\{a_i, a_j\} = \mathbb{1}f\delta_{ij}. \quad (2.3)$$

mit der Strukturkonstanten  $f \in \mathbb{C}$ .

#### 2.1.4 Die Gruppen SU(2) und SO(3)

Im folgenden werden die Gruppen SU(2) und SO(3) auftreten und zusammen die Darstellungen der genutzten Lorentz-Gruppe definieren. In diesem Abschnitt soll kurz auf die mathematischen Eigenschaften dieser Gruppen und deren Darstellungen eingegangen werden. Die Definitionen der Gruppen und weiterführende Beweise finden sich zum Beispiel in Ref. [Hei90], [Böh11] und auch [KS97].

Die oben genannten Gruppen sind Matrix-Gruppen, lassen sich also durch Matrizen darstellen. Die Gruppenmultiplikation entspricht dann der Matrixmultiplikation.

Zunächst sind die Matrixgruppen allgemeine (G für engl. general) lineare (L) Abbildungen, welche bis auf die Invertierbarkeit keinen Einschränkungen unterliegen, d.h.

$$\text{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{K}) \mid A \text{ invertierbar}\}.$$

Hier steht  $\text{Mat}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n \times n}$  für  $n \times n$  Matrizen mit Einträgen aus dem Körper  $\mathbb{K}$ , welcher im folgenden  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  sein wird. Aus der linearen Algebra ist für die Invertierbarkeit die Äquivalenz

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

bekannt. Damit folgt direkt die wichtige Definition der speziellen (S) linearen Gruppe.

**Definition 2.1.6.** Die spezielle lineare Gruppe  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$  ist gegeben durch die Menge der Matrizen

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\}.$$

Eine orthogonale (O) reelle Matrix  $M \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$  ist gegeben, wenn gilt

$$M^{-1} = M^T \Leftrightarrow MM^T = M^TM = \mathbb{1}.$$

Die orthogonale Gruppe ist dann durch die folgenden reellen Matrizen gegeben:

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = A^TA = \mathbb{1}\}.$$

Diese können wir direkt in der nachfolgenden Definition eingrenzen.

**Definition 2.1.7.** Die spezielle orthogonale Gruppe  $\mathrm{SO}(n)$  ist die Schnittmenge der speziellen linearen Gruppe  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  und der orthogonalen Gruppe  $\mathrm{O}(n)$

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(n) &= \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \\ &= \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\} \end{aligned}$$

Wenn eine Matrix  $M \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$  unitär U ist, dann gilt

$$M^{-1} = M^\dagger \Leftrightarrow MM^\dagger = M^\dagger M = \mathbb{1},$$

wobei das hochgestellte Symbol  $\dagger$  adjungiert bedeutet.

Wir kommen damit zu den Definitionen der speziellen unitären Gruppe

**Definition 2.1.8.** Die spezielle unitäre Gruppe  $\mathrm{SU}(n)$  ist gegeben durch die Menge der Matrizen

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(n) &= \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \\ &= \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1\}. \end{aligned}$$

Die oben definierten Gruppen besitzen einige wichtige Eigenschaften, welche später noch häufig gebraucht werden. Deshalb soll ein kleiner Einblick in die Struktur und Darstellung der Gruppen gegeben werden.

### Die spezielle unitäre Gruppe $\mathrm{SU}(2)$

Komplexe  $2 \times 2$  Matrizen  $M$  der obigen Definition 2.1.8 lassen sich für  $a, b \in \mathbb{C}$  in der Form

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

finden. In der komplexen Schreibweise erhält man vier reelle Parameter, von denen durch die Bedingung  $\det M = 1$  drei linear unabhängig sind. Die drei infinitesimalen Generatoren sind durch die *Pauli-Matrizen* gegeben:

$$a_1 = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \frac{\sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \frac{\sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

*Bemerkung 1.* Die Pauli-Matrizen erfüllen die folgenden Eigenschaften:

(i) Sie sind spurfrei:

$$\text{Sp}(\sigma_i) = 0, \quad (2.5a)$$

(ii) bilden die Clifford-Algebra:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1} \quad (2.5b)$$

(iii) und die Lie-Algebra:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (2.5c)$$

(iv) Des weiteren gilt für  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  und die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  die wichtige Relation

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\mathbb{1} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.5d)$$

Aus (ii) folgt, dass  $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ . Des weiteren gilt mit (iii):

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i = i\epsilon_{ijk} \sigma_k \sigma_i = i^2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{jki} \sigma_j = \begin{cases} -\sigma_j & \text{falls } j \neq i \\ \sigma_j & \text{falls } j = i \end{cases}$$

Für  $i = 2$  gilt zum Beispiel

$$\sigma_2 \sigma_j \sigma_2 = -\sigma_j^* \quad (2.5e)$$

wobei das Sternchen bedeutet, dass die Einträge der Matrix komplex konjugiert wurden.

### Die Drehgruppe $\text{SO}(3)$

Drehungen im dreidimensionalen Raum lassen sich durch Drehmatrizen  $R \in \text{SO}(3)$  realisieren, welche einer linearen, homogenen Transformation

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R\vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

entsprechen. Eine infinitesimale Drehung um den Winkel  $\varphi$  in eine Raumrichtung ist gegeben durch:

$$R = \mathbb{1} + \varphi\tau,$$

wobei  $\tau \in \text{Mat}(3, \mathbb{R})$  der Generator der kleinen Drehungen ist. Zusammen mit der Orthogonalitätsforderung für  $R$  findet man unter Vernachlässigung höherer Ordnungen  $\mathcal{O}(\varphi^2)$

$$\tau + \tau^T = 0.$$

Diese Forderung lässt sich durch eine antisymmetrische Matrix mit drei freien Parametern  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  realisieren

$$\varphi\tau = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \tau_i,$$

wobei die Generatoren  $\tau_i$  antisymmetrische Matrizen sind, welche sich mit

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

einfach finden lassen. Das Matrixelement

$$(\tau_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk}$$

lässt sich mit dem total antisymmetrischen Tensor  $\epsilon_{ijk}$  finden. Die Matrixelemente kleiner Transformationen  $(R)_{ik} = \delta_{ik} - \varphi_i \epsilon_{ijk}$  führen auf die Koordinatentransformation

$$\delta x_i = \epsilon_{ijk} \varphi_j x_k$$

Weiterhin ergibt sich aus den Eigenschaften des totalen antisymmetrischen Tensors die Vertauschungsrelation

$$[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ijk} \tau_k.$$

Des weiteren kann unter Auszeichnung einer Drehachse mit dem Einheitsvektor  $\vec{n}$  in Richtung der Drehachse und dem endlichen Drehwinkel  $\varphi$  durch  $\vec{\varphi} = \vec{n}\varphi$  eine indexfreie Notation erreicht werden. Eine  $N$ -fache Drehung um den infinitesimalen Winkel  $\frac{\vec{\varphi}}{N}$  ist dann

$$R(\vec{\varphi})_N = R\left(\underbrace{\frac{\vec{\varphi}}{N} + \cdots + \frac{\vec{\varphi}}{N}}_{N \text{ mal}}\right) = \left[R\left(\frac{\vec{\varphi}}{N}\right)\right]^N = \left(\mathbf{1} + \frac{\vec{\varphi}}{N} \vec{r}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp(\vec{\varphi} \cdot \vec{r})$$

Aus der Quantenmechanik sind die hermitischen Drehimpulsoperatoren  $\vec{J} = i\vec{r}$  bekannt, welche die Drehimpulsalgebra

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

erfüllen. Für diese kann eine unitäre Darstellung konstruiert werden, indem die Matrixelemente mit Leiteroperatoren  $J_{\pm}$  ausgewertet werden und augenutzt wird, dass der Operator  $\vec{J}^2$  mit allen Generatoren der Gruppe vertauscht. Die Drehung kann also mit

$$R = \exp(-i\varphi_i J_i) \tag{2.6}$$

durchgeführt werden.

Es können zwei verschiedene Darstellungsformen gewählt werden:

**Tensordarstellung** Die dann folgende in der Quantenmechanik bekannte Darstellung der  $3 \times 3$  Matrizen  $J_i$  für ganzzahlige Eigenwerte  $j \in \mathbb{N}$  lässt sich durch eine Äquivalenzumformung in obige Form bringen. Dies bedeutet, dass man eine Tensorgleichung erfüllt.

**Spinordarstellung** Für halbzahlige  $j \in \mathbb{N}_0 + \frac{1}{2}$  können die  $2 \times 2$  Matrizen  $J_i$  in folgender Form geschrieben werden:

$$\vec{J} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}. \quad (2.7)$$

Hier treten die aus der Gruppe  $SU(2)$  bekannten Pauli-Matrizen  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  auf. Für  $j = \frac{1}{2}$  sind die Darstellungen (2.7) der  $SO(3)$  also äquivalent zur unitären Darstellung von  $SU(2)$ . Die *Spinordarstellung* ist dann wie folgt gegeben:

$$U = \exp\left(-\frac{i}{2}\varphi_i \sigma_i\right). \quad (2.8)$$

Hier sieht man, dass  $U(2\pi) = -\mathbb{1}$  ist, also bei einer Drehung um  $2\pi$  nur die halbe Drehung ausgeführt wurde. Die Einselemente  $R(2\pi) = R(0) = \mathbb{1}$  der Darstellung (2.6) führen auf zwei verschiedene Elemente in der Darstellung (2.8).

### Die Lorentz-Gruppe

In der speziellen Relativitätstheorie wurden die Lorentz-Transformationen entwickelt. Unter diesen muss das Längenquadrat im vierdimensionalen Minkowski-Raum unter einer Transformation  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$s^2 \equiv c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (2.9)$$

erhalten bleiben. Im folgenden wird die Notation

$$x^\mu \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (x^1, x^2, x^3) = (x^i) = \vec{x}$$

benutzt. Die Nullkomponente dieses Vierervektors ist  $x^0 = ct$ . In dieser Notation lässt sich obige Gleichung schreiben als

$$s^2 = x^0 x^0 - x^i x^i \equiv x^\mu x^\nu g_{\mu\nu},$$

wo  $g_{\mu\nu}$  die Metrik ist. Aus der Transformation (2.9) lässt sich ablesen, dass  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  geschrieben werden kann.

Gesucht werden jetzt lineare Transformationen  $\Lambda_\nu^\mu$ , welche  $s^2$  erhalten:

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\mu.$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Erhaltung der Metrik. Die Matrizen  $\Lambda$  müssen die Beziehung

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^T g \Lambda = g \quad (2.10)$$

erfüllen, welche bei einer euklidischen Metrik ( $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ) einer Orthogonalitätsrelation entspräche. Aus dieser Gleichung folgt  $\det g = \det(\Lambda^T g \Lambda)$ . Nach den Regeln der linearen Algebra ( $\det(a \cdot b) = \det a \det b$  und  $\det(A^T) = \det A$ ) folgt, dass die Matrizen  $\Lambda$  die Determinanten  $\det \Lambda = \pm 1$  haben.

Wir benötigen im folgenden ausschließlich die Rotationen und Lorentz-Boosts. Deshalb beschränken wir uns auf die Betrachtung der eigentlichen (+), orthochronen Lorentztransformationen<sup>3</sup>

$$L_\pm^\uparrow = \{\Lambda \in O(n) \mid \det \Lambda = \pm 1, \Lambda_0^0 > 0\}.$$

---

<sup>3</sup>Die uneigentlichen Lorentztransformationen werden mit einem Minus (-) symbolisiert.

Die eigentliche Lorentzgruppe  $L_+^\uparrow$  besitzt als einzige das Einselement  $\mathbb{1}$ .  $L_-^\uparrow$  besitzt die Raumspiegelung  $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

Für die infinitesimalen Lorentztransformationen wird der Ansatz

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \lambda_{\mu\nu}$$

gewählt. Hier kann wieder unter Vernachlässigung höherer Ordnungen  $\mathcal{O}(\lambda^2)$  gezeigt werden, dass  $\lambda_{\mu\nu}$  antisymmetrisch ist. Wir können die räumlichen Parameter also mit denen der Drehgruppe  $O(3)$  identifizieren.

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

konstruieren, wobei  $R$  eine  $3 \times 3$  Drehmatrix mit  $\det R = 1$  ist. Wir können also schließen, dass  $R \in SO(3)$  ist.

Die Lorentz-Boosts sind Transformationen zwischen zwei verschiedenen Koordinatensystemen, welche sich relativ zueinander mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen. Eine Transformation aus einem System IS in ein System IS', welche sich mit  $\vec{v}$  relativ zueinander bewegen ist gegeben durch

$$x'_i = L(v_i)x_i, \quad L(v_i) \equiv L_i$$

Des weiteren gilt  $L^T = L$ . Die Matrixelemente sind mit der Rapidity  $\nu_i = \text{artanh}(\frac{v_i}{c})$

$$L_i^{00} = \cosh \nu_i, \quad L_i^{0j} = -\delta_{ij} \sinh \nu_i = L_i^{0j}, \quad L_i^{jj} = 1 - (1 - \cosh \nu_i) \delta_{ij}$$

Für infinitesimale Änderungen  $\delta \nu_i$  werden die Matrixelemente in erster Ordnung genähert. Dies führt auf die Generatoren:

$$N_i^{jj} = 0, \quad N_i^{0j} = N_i^{j0} = -\delta \nu_i \delta_{ij}$$

Zum Beispiel ist ein Boost in  $x_1$ -Richtung gegeben durch

$$L_1 = \begin{pmatrix} \cosh \nu_1 & -\sinh \nu_1 & & \\ -\sinh \nu_1 & \cosh \nu_1 & & \\ & & \mathbb{1}_2 & \\ & & & \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Mit dem Vektor  $\vec{K} = i\vec{N}$  sind die infinitesimalen Lorentzboosts gegeben als

$$L(\delta \vec{v}) = \mathbb{1} + i\delta \nu K \rightarrow \exp(-i\vec{v} \cdot \vec{K}).$$

Die Einträge  $\vec{K} = (K^1, K^2, K^3)^T$  sind die Boost-Generatoren. Die Transformationen der eigentlichen, orthochromen Lorentzgruppe sind die Hintereinanderausführungen der beiden Operationen, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt:

$$\Lambda = \mathcal{R} \cdot L(\vec{v})$$

Man erhält also durch die infinitesimalen Generatoren dieser Operation die Matrix

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) \quad (2.12)$$

mit

$$M^{ij} = \epsilon_{ijk}J^k, \quad M^{0i} = K^i, \quad (2.13)$$

wobei  $M^{\mu\nu}$  die Generatoren der Gruppe  $\text{SO}_+(3, 1)$  sind,<sup>4</sup> welche durch den oben hergestellten Zusammenhang mit  $L_+^\uparrow$  äquivalent ist. Die Operatoren  $K^i$  und  $J^i$  sind hermitesch, jedoch sind die Lorentz-Boosts nicht kompakt, da der Parameterbereich für  $\nu$  in (2.11) nicht beschränkt ist.

Des weiteren können wir durch eine komplexe Linearkombination einen neuen Generator konstruieren:

$$T_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i),$$

welcher die Vertauschungsrelationen der Lie-Algebra

$$[T_i, T_j] = [T_i^\dagger, T_j^\dagger] = i\epsilon_{ijk}T_k, \quad [T_i^\dagger, T_j] = 0$$

erfüllen. Dies ist jeweils die Drehimpulsalgebra der  $\text{SU}(2)$ . Diese Lie-Algebra ist die Lie-Algebra zu  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ , welche lokal isomorph zur Produktgruppe  $\text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2)$  ist.

Von den Drehimpulsoperatoren ist bekannt, dass  $\vec{J}^2$  mit allen anderen Generatoren der Drehimpulsalgebra  $J_i$  vertauscht. Mit Hilfe dieses Operators können die unitären Darstellungen einer Gruppe konstruiert werden, wie dies für  $\text{SO}(3)$  mit der Tensor- und Spinordarstellung zuvor geschehen ist. Einen solchen Operator nennt man *Casimir-Operator*. Genauso sind  $\vec{T}^2$  und  $(\vec{T}^\dagger)^2$  Casimir-Operatoren mit den Eigenwerten  $n(n+1)$  und  $m(m+1)$ . Für Spinor-Darstellungen sind  $n, m \in \mathbb{N}_0 + \frac{1}{2}$  zu wählen.

Mit den Drehwinkeln  $\varphi_i$  aus (2.8) und der Rapidität  $\nu_i$  aus (2.11) können die Koeffizienten  $\omega_{\mu\nu}$  in (2.12) durch die Vorschriften in (2.13) mit  $\omega_{0i} = \nu_i = -\omega_{i0}$  und  $\omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\varphi_k$  identifiziert werden. Es folgt dann für (2.12):

$$\Lambda = \exp\left(-i(\vec{\varphi} - i\vec{\nu}) \cdot \vec{T}\right) \exp\left(-i(\vec{\varphi} - i\vec{\nu}) \cdot \vec{T}^\dagger\right) \equiv \Lambda^{(n,m)}. \quad (2.14)$$

Die nicht unitären Darstellungen der Gruppe  $L_+^\uparrow$  können mit den Eigenwerten der Casimir-Operatoren  $(n, m)$  beschrieben werden. Falls  $m > n$  bezeichnet man die Darstellung als Rechtshändig, bei  $m < n$  als Linkshändig. Die nicht-trivialen Fundamentaldarstellungen sind dann  $(0, \frac{1}{2})$  und  $(\frac{1}{2}, 0)$ . Verschiedene Darstellungen können noch über das direkte Produkt und die direkte Summe aus den Fundamentaldarstellungen erzeugen werden [Ram90].

## 2.2 Supersymmetrie

Zunächst wird ein einfaches Modell genutzt, um Supersymmetrie mathematisch zu motivieren. Es soll einen einen Operator  $Q$  geben, welcher Transformationen zwischen Fermionen und Bosonen vermittelt.

Es soll gelten:

$$Q|\text{Boson}\rangle \propto |\text{Fermion}\rangle \quad \text{und} \quad Q|\text{Fermion}\rangle \propto |\text{Boson}\rangle.$$

Mit Bosonen und Fermionen sind grundlegende physikalische Eigenschaften verknüpft, welche durch die algebraischen Strukturen der zu Grunde liegenden Super-Lie-Algebra zum Ausdruck gebracht werden können. Bosonen sind Elemente des geraden Anteils und Fermionen Elemente des ungeraden Anteils des Supervektorraums. Daher unterliegen Bosonen einer Lie-Algebra und Fermionen einer Clifford-Algebra.

---

<sup>4</sup>Die Gruppe  $\text{SO}_+(3, 1)$  beschreibt Matrizen der speziellen orthogonalen Gruppe in einer Zeit- und drei Raumrichtungen, wobei die Zeitrichtung mit  $\Lambda_0^0 > 0$  festgelegt ist.

### Besetzungszahldarstellung von bosonischen und fermionischen Zuständen

Es werden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eingeführt. Der Operator  $b^+$  (bzw.  $b^-$ ) soll die Besetzungszahl des bosonischen Zustandes  $|n_B\rangle$  um einen erhöhen (bzw. vermindern). In der Besetzungszahldarstellung führt dies auf die folgende Definition.

**Definition 2.2.1.** Die *bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren*  $b^\pm : \otimes^n \mathcal{H} \rightarrow \otimes^{n\pm 1} \mathcal{H}$ , welche ein beliebiges Boson der Energie  $E$  erzeugen (bzw. vernichten) sind definiert durch:

$$b^+|n_B\rangle = \sqrt{n_B + 1}|n_B + 1\rangle, \quad b^-|n_B\rangle = \sqrt{n_B}|n_B - 1\rangle.$$

*Bemerkung 2.* Im Zustand  $|n_B = 0\rangle$  kann wegen  $b^-|0\rangle = 0$  kein Teilchen vernichtet werden. Der Zustand  $\Omega := |0\rangle$  symbolisiert daher das *Vakuum*.

Des weiteren kann ein Teilchenzahl-Operator  $N_B := b^+b^-$  definiert werden, welcher den Eigenwert  $n_B$  besitzt:

$$N_B|n_B\rangle = b^+b^-|n_B\rangle = \sqrt{n_B}b^+|n_B - 1\rangle = n_B|n_B\rangle.$$

Bosonen unterliegen der algebraischen Struktur einer Lie-Algebra. Hier wird schnell ersichtlich, dass die Vertauschungsrelationen des symmetrischen Anteils auf den folgenden wichtigen Satz führen.

**Satz 2.2.2.** Die Operatoren  $b^+$  und  $b^- \in \text{End}(\mathcal{H})_0$  unterliegen den Vertauschungsrelationen der Lie-Algebra

$$[b^\mp, b^\pm] = \pm 1, \quad [b^\pm, b^\pm] = 0. \quad (2.15)$$

*Beweis.* Der Kommutator wird auf den Zustand  $|n_B\rangle$  angewandt:

$$\begin{aligned} [b^-, b^+]|n_B\rangle &= (b^-b^+ - N_B)|n_B\rangle = b^-b^+|n_B\rangle - n_B|n_B\rangle \\ &= \sqrt{n_B + 1}b^-|n_B + 1\rangle - n_B|n_B\rangle = (n_B + 1 - n_B)|n_B\rangle = 1|n_B\rangle. \end{aligned}$$

Es kann schnell eingesehen werden, dass die gleichartigen Kommutatoren direkt Null ergeben.  $\square$

Leicht kann auch gezeigt werden, dass die Operatoren  $b^-$  und  $b^+$  jeweils zueinander adjungiert sind, d.h.  $(b^\pm)^\dagger = b^\mp$ . Der Teilchenzahl-Operator ist daher selbstadjungiert. Mit Hilfe des Operators  $b^+$  kann jeder Zustand aus dem Vakuumzustand  $\Omega$  erzeugt werden.

**Definition 2.2.3.** Die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $f^\pm : \wedge^n \mathcal{H} \rightarrow \wedge^{n\pm 1} \mathcal{H}$ , welche ein Fermion der Energie  $E$  erzeugen bzw. vernichten sind durch folgende Relationen definiert:

$$f^+|n_F\rangle = \sqrt{n_F + 1}|n_F + 1\rangle, \quad f^-|n_F\rangle = \sqrt{n_F}|n_F - 1\rangle.$$

Für fermionische Zustände soll das *Pauli-Prinzip* gelten. Dies bedeutet, dass jeweils nur ein Teilchen einen Zustand gleicher Energie  $E$  besetzen kann. Aus der Konstruktion eines geeigneten Fock-Raumes für antisymmetrische Wellenfunktionen [Str05] ginge dies ebenfalls automatisch hervor. Auf diesem können dann auch die Fock-Darstellungen der Clifford-Algebra hergeleitet werden [Ott95].

Der Teilchenzahl-Operator  $N_F := f^+f^-$  ist analog zum bosonischen definiert, und die Operatoren  $f^\pm$  sind ebenfalls zueinander adjungiert.

**Satz 2.2.4.** Die Operatoren  $f^\pm \in \text{End}(\mathcal{H})_1$  unterliegen den Vertauschungsrelationen der Clifford-Algebra

$$\{f^\mp, f^\pm\} = 1, \quad \{f^\pm, f^\pm\} = 0. \quad (2.16)$$

*Beweis.* Für diesen Beweis muss das antisymmetrische Tensorprodukt im Fockraum benutzt werden. Da aber angenommen wurde, dass das Pauli-Prinzip gilt, kann festgestellt werden, dass für die Erzeugungsoperatoren die Nilpotenz<sup>5</sup>

$$(f^+)^2 = 0$$

gilt. Daher können nur die Zustände  $|n_F = 0\rangle$  und  $|n_F = 1\rangle$  existieren. Die Vernichter sind also ebenfalls nilpotent, da gilt

$$f^-|0\rangle = 0 \Rightarrow (f^-)^2|1\rangle = 0.$$

Die Antikommunitatoren

$$\{f^\pm, f^\pm\} = 2(f^\pm)^2 = 0$$

verschwinden also. Die gemischten Kommutatoren hingegen wirken auf die beiden möglichen Zustände  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  also wie folgt:

$$\begin{aligned} (f^-f^+ + f^+f^-)|0\rangle &= f^-f^+|0\rangle = f^-|1\rangle = 1|0\rangle \\ (f^-f^+ + f^+f^-)|1\rangle &= f^+f^-|1\rangle = f^+|0\rangle = 1|1\rangle. \end{aligned}$$

Es folgt also Aussage (2.16).  $\square$

### SUSY-Operatoren

Es sollen Fermionen und Bosonen in einem Formalismus studiert werden. Dazu werden Produktzustände  $|n_B n_F\rangle = |n_B\rangle |n_F\rangle$  betrachtet. Da wie zuvor gesehen  $n_B \in \mathbb{N}_0$  und  $n_F \in \{0, 1\}$  nennen wir die Zustände mit  $n_F = 0$  bosonische Zustände  $|\text{Boson}\rangle$  und solche mit  $n_F = 1$  fermionische Zustände  $|\text{Fermion}\rangle$ .

Es können die SUSY-Operatoren

$$\begin{aligned} Q_+|n_B n_F\rangle &\propto |n_B - 1, n_F + 1\rangle, \\ Q_-|n_B n_F\rangle &\propto |n_B + 1, n_F - 1\rangle, \end{aligned}$$

gefunden werden, welche bosonische und fermionische Zustände ineinander transformieren:

$$\begin{aligned} Q_-|\text{Boson}\rangle &= 0, & Q_-|\text{Fermion}\rangle &\propto |\text{Boson}\rangle, \\ Q_+|\text{Fermion}\rangle &= 0, & Q_+|\text{Boson}\rangle &\propto |\text{Fermion}\rangle. \end{aligned}$$

Mit Hilfe den obigen Vorschriften können diese Operatoren zweckmäßigerweise wie folgt definiert werden:

$$Q_- := b^+ f^-, \quad Q_+ := b^- f^+. \quad (2.17)$$

Diese Operatoren sind ebenfalls nilpotent und zueinander adjungiert. Wir fordern des weiteren, dass Supersymmetrie gilt. Dies bedeutet nach [KS97], dass die *Energie des Systems unter Transformationen der SUSY-Operatoren erhalten bleibt*. Der supersymmetrische Hamiltonoperator  $H_S$  unterliegt demnach den folgenden algebraischen Bedingungen:

$$[H_S, Q_\pm] = 0, \quad H_S = \{Q_+, Q_-\} = Q_+Q_- + Q_-Q_+. \quad (2.18a)$$

---

<sup>5</sup>Mit Nilpotenz bezeichnet man die Eigenschaft eines Operators  $A \neq 0$ , dass sein Quadrat Null ergibt, d.h.  $A^2 = 0$ .

### 2.2.1 Definition der SUSY-Algebra

Da die Operatoren  $Q_{\pm}$  nicht hermitesch sind, können nach den folgenden Definitionen die hermitesch Operatoren

$$Q_1 = Q_+ + Q_-, \quad Q_2 = i(Q_+ - Q_-)$$

eingeführt werden, welche aufgrund der Nilpotenz der Operatoren  $Q_{\pm}$  antivertauschen:

$$\{Q_1, Q_2\} = i\{Q_+, Q_-\} - i\{Q_-, Q_+\} = 0$$

Der supersymmetrische Hamiltonoperator erhält dann folgende Form:

$$H_S = Q_1^2 = Q_2^2.$$

Es wurde also neben (2.18a) ein zweiter Satz an SUSY-Operatoren konstruiert:

$$\{Q_1, Q_2\} = 0, \quad H_S = Q_1^2 = Q_2^2 \quad (2.18b)$$

Dieser Satz von SUSY-Operatoren hat den Vorteil, dass die Superladungen eine hermitesch Form besitzen. Wir können somit zwischen zwei Sätzen von SUSY-Operatoren für eine SUSY-Algebra auswählen, welche sich durch obige Definition ineinander überführen lassen.

### 2.2.2 Die kanonische Darstellung

Der vorherige Ansatz (2.17) für die Superladungen zur Erfüllung der SUSY-Algebra kann noch weiter verallgemeinert werden, indem neue Operatoren  $B^{\pm}(b^+, b^-)$  eingeführt werden. Mit diesem Ansatz wird erreicht, dass nichtlineare Systeme betrachtet werden können, bei denen Elemente des bosonischen und der fermionischen Zustandsraumes unter Erhaltung der Supersymmetrie miteinander wechselwirken können.

Falls wir den vorherigen Ansatz (2.17) benutzen, um die SUSY-Operatoren zu finden, kann die Energie mit Hilfe der Zustände  $n_B$  und  $n_F$  nicht allgemein festgelegt werden, da  $N_B$  im Fall nichtlinearer Potentiale nicht mit dem Hamiltonoperator vertauscht. Die Zustände können jedoch durch eine zweikomponentige Darstellung charakterisiert werden:

$$|En_F\rangle = \begin{pmatrix} |E0\rangle \\ |E1\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Hier symbolisiert der obere Zustand einen bosonischen Zustand und der untere Zustand einen fermionischen Zustand. Die Energie  $E$  ist Eigenwert zum Hamiltonoperator  $H_S$  und  $n_F$  Eigenwert zum fermionischen Operator  $N_F$ . Daraus folgt, dass die Operatoren  $2 \times 2$ -Matrizen sind. Der supersymmetrische Hamiltonoperator ist dann gegeben durch:

$$H = \begin{pmatrix} B^+B^- & 0 \\ 0 & B^-B^+ \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{2}\{B^-, B^+\}\mathbb{1} - \frac{1}{2}[B^-, B^+]\sigma_3. \quad (2.21)$$

### 2.2.3 Das Eigenwertspektrum

Da der Hamiltonoperator  $H_S$  das Quadrat eines hermiteschen Operators ist, welcher reelle Eigenwerte besitzt, ist das Spektrum des Operators positiv oder Null. Außerdem lässt sich leicht zeigen, dass die Eigenwerte  $E > 0$  der Superladung  $Q_1^2$  auch Eigenwerte der Superladung  $Q_2^2$  sind. Man nennt diese Superladungen *Superpartner*. Durch Einführung eines Superpotentials  $W(\hat{q})$  mit

$$B^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ W(\hat{q}) \mp \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m}} \right] \quad (2.22)$$

kann nun der Hamiltonoperator nach (2.21) geschrieben werden, wobei von den Operatoren  $\hat{q} \rightarrow x$  und  $\hat{p} \rightarrow p = -i\hbar \frac{d}{dx}$  in die Ortsdarstellung gewechselt wird. Die Kommutatoren aus (2.21) ergeben

$$\{B^-, B^+\} = W^2 + \frac{p^2}{m}, \quad [B^-, B^+] = \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{dW}{dx}.$$

Hier ist  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  das reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum und  $m$  die Masse des betrachteten Teilchens.

### 2.2.4 Exakte und gebrochene Supersymmetrie

Im Grundzustand  $E = 0$  ergibt die Schrödingergleichung in der Darstellung (2.19)

$$H(|00\rangle, |01\rangle)^T = (0, 0)^T.$$

Diese Gleichung kann mit den Operatoren  $B^\pm$  gelöst werden. Wenn (2.22) in obige Schrödingergleichung für die Grundzustandswellenfunktionen eingesetzt wird, ergibt sich

$$\Psi_0^{(1,2)} = C \exp \left( \mp \frac{\sqrt{m}}{\hbar} \int_0^x W(x') dx' \right). \quad (2.23)$$

Um einen physikalischen Zustand zu erhalten muss die Wellenfunktion normierbar sein. Wird diese Vorzeichenkonvention benutzt, so muss also  $\Psi^{(1)}$  quadratintegrierbar sein, so dass  $H_S$  den Grundzustand  $E = 0$  für den Operator  $H_1$  liefert. Die Vorzeichen werden im folgenden so gewählt, dass der Grundzustand immer bei  $H_1$  liegt. Dann ist  $\Psi_0^{(1)} \in L^2(\mathbb{R})$ , wenn die Bedingungen

$$\int_{-\infty}^0 W(x') dx' = -\infty, \quad \int_0^\infty W(x') dx' = \infty$$

erfüllt sind. Man spricht dann von *exakter Supersymmetrie*. Diese ist nach den obigen Bedingungen genau dann erfüllt, wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W(x) > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) < 0$$

erfüllt ist. Strebt das Superpotential hingegen in beiden  $x$ -Richtungen in die gleiche Richtung, so konvergiert das Integral in (2.23) nicht und man spricht von *gebrochener Supersymmetrie*. Gebrochene Supersymmetrie besitzt keinen Grundzustand mit  $E = 0$ , da die Wellenfunktion nicht normierbar ist.

## 2.3 Supersymmetrische Quantenmechanik

Nachdem die Supersymmetrie in einem Formalismus mit abstrakten Operatoren beschrieben wurde, soll in diesem Abschnitt die supersymmetrische Beschreibung der Quantenmechanik als erste Anwendung eingeführt werden. Diese Darstellung basiert auf den Arbeiten von Nicolai [Nic76] und von Witten [Wit81], welcher die Symmetriebrechung der Supersymmetrie mit diesem Modell untersuchen wollte. Man nennt dieses Modell auch  $N = 2$  Supersymmetrie, da eine SUSY-Algebra mit zwei Superladungen betrachtet wird. Die Idee der forminvarianten Potentiale geht auf Gendenshtein [Gen83] zurück. Das von Witten entwickelte Modell soll in diesem Abschnitt genauer betrachtet werden, da durch eine neue Herangehensweise erstaunlich einfach Ergebnisse der klassischen Quantenmechanik reproduziert werden können. Die supersymmetrische Quantenmechanik weist jedoch starke Parallelen zur zunächst von Erwin Schrödinger (1887-1961) zur Lösung des Wasserstoff-Problems entwickelten und von Infeld und Hull [IH51] verallgemeinerten Faktorisierungsmethode auf und ist in vielen Teilen dazu äquivalent [Jun96].

Mit diesen Hilfsmitteln kann eine einfache algebraische Struktur für die Quantenmechanik konstruiert werden, in deren Formalismus neuartige Potentiale zum Teil analytisch leichter lösbar sind [CKS01].

### 2.3.1 Definition der supersymmetrischen Quantenmechanik

Die Quantenmechanik kennt keine Unterscheidung zwischen fermionischen und bosonischen Zuständen. Im folgenden Verfahren wird die sogenannte kanonische Darstellung benutzt, welche wie in Abschnitt 2.2.2 gezeigt nur bosonische Operatoren enthält. Diese SUSY-Operatoren transformieren zwischen einem positiven und einem negativen Eigenzustand eines zweifach entarteten Multipletts. Allein der Grundzustand bei nicht-gebrochener Supersymmetrie ist nicht entartet. Jedoch ist supersymmetrische Quantenmechanik nicht auf diesen Fall beschränkt, es gibt sie auch für die Fälle  $N > 2$  [Jun96], wobei sich die folgenden Beispiele auf  $N = 2$  Supersymmetrie beschränken.

Zunächst soll ein supersymmetrisches Quantensystem auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  definiert werden, welches eine SUSY-Algebra nach (2.18a) oder (2.18b) mit  $N = n$  Superladungen erfüllt. Die folgende Definition kann diese Anforderungen erfüllen.

**Definition 2.3.1** (Nach [Jun96]). Ein Quantensystem, welches durch die Menge  $\{H, Q_1, \dots, Q_n; \mathcal{H}\}$  charakterisiert ist, heißt supersymmetrisch, falls die SUSY-Algebra (2.18b) erfüllt ist, also folgender Antikommator gilt:

$$\{Q_i, Q_j\} = \frac{1}{2} H \delta_{ij}.$$

Dieses Quantensystem erfüllt eine  $N = n$  Supersymmetrie. In dem im folgenden betrachteten Fall für  $N = 2$  ist ein supersymmetrisches Quantensystem  $\{H, Q_1, Q_2; \mathcal{H}\}$  mit obigem Antikommator gegeben.

### 2.3.2 Faktorisierung des Hamiltonoperators

Es wird im folgenden ein eindimensionales System betrachtet. Nach [KS97] besitzen alle eindimensionalen Hamiltonoperatoren wie auch rotationssymmetrischen Hamiltonoperatoren einen supersymmetrischen Partner. Nach (2.20) kann ein supersymmetrischer Hamiltonoperator  $H_S$  als  $2 \times 2$ -Matrix geschrieben werden:

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Für ein quantenmechanisches System gilt die Schrödinger-Gleichung, welche für  $H_S$  durch die zwei Hamiltonoperatoren

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} + V_1(x), \quad H_2 = \frac{p^2}{2m} + V_2(x)$$

dargestellt werden kann. Die Potentiale  $V_1(x)$  und  $V_2(x)$  sind *Partnerpotentiale*. Die Superladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  werden den Hamiltonoperator  $H_S$  erzeugen. Man findet [Jun96]

$$Q_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{\sqrt{2m}} \cdot \sigma_1 + W(x) \cdot \sigma_2 \right), \quad Q_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{\sqrt{2m}} \cdot \sigma_2 - W(x) \cdot \sigma_1 \right),$$

welche nach der SUSY-Algebra (2.18b)

$$H_S = 2Q_1^2 = 2Q_2^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{2m} + W^2(x) \right) \cdot \mathbb{1} - \frac{\hbar}{2\sqrt{m}} W'(x) \cdot \sigma_3 \quad (2.25)$$

ergeben. Der zugehörige Hilbertraum ist gegeben durch  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ , wobei  $L^2(\mathbb{R})$  der Raum der nach Lebesgue-Maß quadratintegrablen Funktionen über  $\mathbb{R}$  ist und  $\mathbb{C}^2$  der durch die Pauli-Matrizen  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  aufgespannte Raum. Das Potential  $W(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wird *Superpotential* genannt. Es besitzt die Dimension [Energie] $^{\frac{1}{2}}$ . Aus diesem können die Partnerpotentiale durch die Gleichung

$$V_{1,2} = \frac{1}{2} \left( W^2(x) \mp \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W'(x) \right) \quad (2.26)$$

erhalten werden. Der in (2.25) erhaltene Hamiltonoperator kann mit (2.21) verglichen werden:

$$\begin{aligned} [B^-, B^+] &= B^- B^+ - B^+ B^- = \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W'(x), \\ \{B^-, B^+\} &= B^- B^+ + B^+ B^- = \frac{p^2}{2m} + W^2(x). \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich mit dem Impulsoperator  $p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$  durch folgende zueinander adjungierte Differentialoperatoren erfüllen:

$$B^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( W(x) \mp \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \right). \quad (2.27)$$

Der Hamiltonoperator  $H_S$  lässt sich jetzt wie in (2.20) ausdrücken und die Hamiltonoperatoren in (2.24) können faktorisiert werden:

$$H_1 = B^+ B^-, \quad H_2 = B^- B^+. \quad (2.28)$$

Hier wurde die Konvention eingeführt, dass  $H_1$  im Fall exakter Supersymmetrie den Grundzustand mit  $E = 0$  besitzt.

Die Schrödinger-Gleichungen für zwei Quantensysteme, welche durch ein bestimmtes Superpotential definiert sind, sind durch die Hamiltonoperatoren

$$H_i \Psi_n^{(i)} = E_n^{(i)} \Psi_n^{(i)} \quad i = 1, 2 \quad (2.29)$$

gegeben. Betrachtet werden nun die gebundenen Zustände bei exakter Supersymmetrie. Mit Gleichung (2.28) kann ein Zusammenhang zwischen den beiden Systemen gefunden werden:

$$H_2(B^- \Psi_n^{(1)}) = B^- B^+ B^- \Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} (B^- \Psi_n^{(1)}), \quad H_1(B^+ \Psi_n^{(2)}) = E_n^{(2)} (B^+ \Psi_n^{(1)}).$$

Die Systeme besitzen also bis auf den Grundzustand die gleichen Energieniveaus  $E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}$  für  $n > 0$ . Die Eigenzustände, also die Wellenfunktionen  $B^- \Psi_n^{(1)}$  von  $H_2$  und  $B^+ \Psi_n^{(2)}$  von  $H_1$  bei gleicher Energie, sind dann durch Schrödingergleichung (2.29) durch folgende Beziehung miteinander verbunden:

$$\Psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} B^- \Psi_{n+1}^{(1)}, \quad \Psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} B^+ \Psi_n^{(2)}. \quad (2.30)$$

Der Operator  $B^-$  angewandt auf den Grundzustand muss den Zustand vernichten:

$$B^- \Psi_0^{(1)} = 0. \quad (2.31)$$

### 2.3.3 Forminvariante Potentiale

**Definition 2.3.2.** Zwei Partnerpotentiale  $V_1(x, a_2)$  und  $V_2(x, a_1)$  und heißen *forminvariant*, wenn sie sich nur um einen additiven, nicht von der Ortskoordinaten  $x$  abhängigen Rest  $R(a_1)$  unterscheiden

$$V_2(x, a_1) = V_1(x, a_2) + R(a_1),$$

wobei sich der neue Parameter  $a_2$  einzig durch eine Abbildung

$$a_2 = f(a_1)$$

ergibt.

Für forminvariante Potentiale gelten einige Eigenschaften, die die Berechnung der Energiespektren und Wellenfunktionen besonders einfach machen.

**Satz 2.3.3.** Für forminvariante Potentiale gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) Das Energiespektrum ist gegeben durch

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n R(a_k), \quad E_0^{(1)} = 0. \quad (2.32)$$

(ii) Die Wellenfunktion  $\Psi_n(x, a_1)$  lässt sich durch die folgende Rekursion berechnen:

$$\Psi_n(x, a_1) = \frac{1}{\sqrt{E_n - E_0}} B^+ \Psi_{n-1}(x, a_2). \quad (2.33)$$

*Beweis.* Aufgrund der Tatsache, dass  $V_1$  und  $V_2$  Partnerpotentiale sind, bleiben sie es auch, wenn zu beiden eine Konstante abhängig von  $a_3 = f(a_1)$  hinzugefügt wird. Es kann dann ein drittes Potential

$$V_3(x, a_1) = V_2(x, f(a_1)) + R(a_1) = V_1(x, a_3) + R(a_2) + R(a_1).$$

gefunden werden. Allgemein ergibt sich für das  $s$ -te Partnerpotential  $V_s$  mit dem Parameter  $a_s = f^{s-1}(a_1)$  unter  $(s-1)$ -facher Anwendung

$$V_s(x, a_1) = V_1(x, a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k).$$

Es gibt also die Partner-Hamiltonoperatoren

$$H_s(a_1) = \frac{p^2}{2m} + V_1(x, a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \quad (2.34)$$

$$H_{s+1}(a_1) = \frac{p^2}{2m} + V_2(x, a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k). \quad (2.35)$$

Bis auf den Grundzustand von  $H_s$  sind die Spektren identisch. Da  $E_0^{(s=1)} = 0$  der Grundzustand von  $H_1$  ist, besitzt der Grundzustand von  $H_s$  die Energie

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k).$$

Da der Grundzustand für  $s = 1$  mit dem Grundzustand des Systems übereinstimmt, stimmt der  $n$ -te Zustand von  $H_1$  mit  $H_n$  überein [KS97]. Das Energiespektrum für  $H_1$  ist also gegeben durch (2.32).

Aufgrund der Tatsache, dass sich die Hamiltonoperatoren  $H_s(a_1)$  und  $H_1(a_s)$  ebenfalls nur durch eine Konstante unterscheiden, sind die Grundzustands-Wellenfunktionen identisch:

$$\Psi_0^{(s)}(x, a_1) = \Psi_0^{(1)}(x, a_s).$$

Dies kann jetzt in Gleichung (2.30) eingesetzt werden und wir erhalten

$$\Psi_1^{(1)}(x, a_1) = \frac{1}{\sqrt{E_0^{(2)}}} B_1^+ \Psi_0^{(2)}(x, a_1) = \frac{1}{\sqrt{E_0^{(2)}}} B_1^+ \Psi_0^{(1)}(x, a_2),$$

wobei wir wissen, dass  $E_0^{(2)} = E_1 - E_0$  ist. Der Operator  $B_1^+$  ist der Erzeugungsoperator für  $H_1$ . Dies lässt sich für allgemeine  $n \in \mathbb{N}$  immer so schreiben, da sie sich jeweils nur um die Konstante von  $H_1$  unterscheiden. Der Index kann hier weggelassen werden, da hier nur die zu  $H_1$  zugehörigen Wellenfunktionen betrachtet werden. Es gilt also (2.33).  $\square$

*Bemerkung 1.* Durch Anwendung der Erzeugungsoperatoren  $B_s^+$  von  $H_s$  für  $s = 1, 2, \dots, n$  lässt sich eine Wellenfunktion direkt aus dem Grundzustand durch die Relation

$$\Psi_n(x, a_1) = \left( \prod_{i=1}^n \frac{B_i^+}{\sqrt{E_n - E_{i-1}}} \right) \cdot \Psi_0(x, a_{n+1}) \quad (2.36)$$

erzeugen.

### 2.3.4 Supersymmetrische WKB-Näherung

Ein weiteres Mittel, das Spektrum eines supersymmetrischen Hamiltonoperators zu erhalten, ist die supersymmetrische WKB-Näherung (SWKB), welche bei forminvarianten Potentialen sogar die exakte Energie der Zustände zu berechnen vermag.

Die klassische WKB-Methode (nach Wentzel, Kramers und Brillouin) wird benutzt, um Energieniveaus der Schrödinger-Gleichung in einem quasi-klassischen Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0$  anzunähern. Sie ist also eine Näherungs-Methode, welche im semiklassischen Grenzfall, d.h. bei hohen Quantenzahlen  $n$ , gute Resultate erzielt. Mit Hilfe des Superpotentials kann diese Methode auf die supersymmetrische Quantenmechanik erweitert werden.

Die WKB-Quantisierungsbedingung in der niedrigsten Ordnung lautet [Mes90]:

$$\int_{q_L}^{q_R} \sqrt{2m(E_n - V(x))} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\pi,$$

wobei  $q_L$  und  $q_R$  die klassischen Umkehrpunkte sind, welche durch  $V(q_L) = E_n = V(q_R)$  gegeben sind. Wir können jetzt  $V_1(x) = W^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{m}}W'$  aus (2.26) benutzen. Dies liefert die Quantisierungsbedingung

$$\int_{q_L}^{q_R} \sqrt{2m \left( E - W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{m}}W'(x) \right)} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\pi.$$

Wie in der klassischen WKB-Methode wird jetzt nach  $\hbar$  entwickelt, und die Ordnungen  $\mathcal{O}(\hbar)$  werden vernachlässigt. Nach dieser Entwicklung erhält man für exakte Supersymmetrie die Quantisierungsbedingungen

$$\int_{x_L}^{x_R} \sqrt{2m \left( E_n^{(1)} - \frac{1}{2}W^2(x) \right)} dx = n\hbar\pi \quad \text{für } H_1, \quad (2.37)$$

$$\int_{x_L}^{x_R} \sqrt{2m \left( E_n^{(2)} - \frac{1}{2}W^2(x) \right)} dx = (n+1)\hbar\pi \quad \text{für } H_2 \quad (2.38)$$

mit den Umkehrpunkten

$$-W(x_L) = W(x_R) = \sqrt{2E_n}. \quad (2.39)$$

*Bemerkung 1.* Bei  $n = 0$  ergibt die rechte Seite von (2.37) sofort Null. Das Integral ist ebenfalls Null, falls  $x_L = x_R$ , was nach (2.39)  $E_0^{(1)} = 0$  liefert. Die Grundzustandsenergie von  $H_1$  ist nach vorherigen Betrachtungen exakt Null, sodass die supersymmetrische WKB-Methode für forminvariante Potentiale bei  $n = 0$  die exakte Energie ergibt. Es kann weiterhin gezeigt werden, dass dann für  $n \in \mathbb{N}_0$  das komplette Spektrum von  $H_1$  und  $H_2$  exakt bestimmt werden kann.

*Bemerkung 2.* Die WKB-Methode und die SWKB-Methode sind nicht äquivalent, da letztere den exakten Grundzustand liefert. Es kann erwartet werden, dass sie auch bei nicht-forminvarianten Potentialen einen genaueren Wert ergibt als die WKB-Methode [KS97].

# 3 Relativistische supersymmetrische Quantenmechanik

Im folgenden soll eine relativistische SUSY-Quantenmechanik konstruiert werden. Diese soll wieder die zuvor gefundene SUSY-Algebra erfüllen, sodass die Konzepte der supersymmetrischen Quantenmechanik (SUSY-QM), die im vorherigen Abschnitt entwickelt worden sind, wieder angewendet werden können. Es wird also eine Lorentz-invariante Formulierung gesucht unter welcher sich die Hamiltonoperatoren wieder faktorisieren lassen, sodass auf forminvariante Potentiale, wie auch die SWKB-Methode zurückgegriffen werden kann.

## 3.1 Relativistische Quantenmechanik

Die relativistische Quantenmechanik kennt im Gegensatz zur klassischen Quantenmechanik die Unterscheidung zwischen Fermionen und Bosonen. Die Theorie, die hier unter relativistischer Quantenmechanik beschrieben wird, wird aus Weyl-Spinoren konstruiert und ist deshalb im Gegensatz zur SUSY-QM eine fermionische Theorie. Der nicht-relativistische Grenzfall wird durchgeführt und ergibt die Pauli-Gleichung.

Die zentrale, hier betrachtete Gleichung ist die auf Paul Dirac (1902-1984) zurückgehende Dirac-Gleichung für den fermionischen Fall. Diese beschreibt ein Teilchen mit halbzahligem Spin (zum Beispiel das Elektron) unter relativistischen Annahmen. Die Herleitung durch Dirac basiert auf der Konstruktion eines geeigneten vierdimensionalen Hamiltonoperators zur Lösung der Schrödinger-Gleichung.

Mit dem in die Schrödinger-Gleichung eingesetzten Dirac-Hamiltonoperator konnte zum ersten Mal die Spin-Entartung theoretisch beschrieben werden.

In diesem Abschnitt wird analog zur genutzten Literatur zur Quantenfeldtheorie [Sch08, Str05, Ram90] und Supersymmetrie [KS97] das Gauß'sche Einheitensystem benutzt.

### 3.1.1 Die Lagrange-Dichte der Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen kann durch Konstruktion der Lorentz-Invarianten [KS97, Ram90] sowie durch die Herleitung Diracs gewonnen werden.

Die links- und rechtshändige Darstellung der Lorentz-Gruppe  $(\frac{1}{2}, 0)$  und  $(0, \frac{1}{2})$  können durch zweikomponentige, komplexe Spinoren dargestellt werden. Diese Spinoren werden *Weyl-Spinoren*<sup>1</sup> genannt. Die Spinoren seien durch  $\psi_L$  und  $\psi_R$  gegeben. Diese transformieren sich unter der  $2 \times 2$ -Matrix  $\Lambda^{(n,m)} = \Lambda_{L,R} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  aus (2.14) nach

$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = \Lambda_L \Psi_L \quad \psi_R \rightarrow \psi'_R = \Lambda_R \Psi_R. \quad (3.1)$$

Die Form dieser Transformationen ist also

$$\Lambda_{L,R} = \exp \left( \frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\omega} \mp i \vec{\nu}) \right).$$

---

<sup>1</sup>Nach Hermann Weyl (1885-1995).

Zunächst kann festgestellt werden, dass  $\Lambda_L$  und  $\Lambda_R$  durch

$$\Lambda_L^{-1} = \Lambda_R^\dagger \quad (3.2)$$

miteinander verknüpft sind. Die Pauli-Matrizen erlauben nun nach (2.5e)  $\sigma_2 \sigma_i \sigma_2 = -\sigma_i^*$  eine normale komplexe Konjugation einzuführen:

$$\sigma_2 \Lambda_L \sigma_2 = \exp \left( -\frac{i}{2} \vec{\sigma}^* \cdot (\vec{\omega} - i\vec{\nu}) \right) = \Lambda_R^*$$

Da für die Pauli-Matrizen  $\sigma_2^T = -\sigma_2$  gilt, gilt des weiteren:

$$\Lambda_L^{-1} \stackrel{(3.2)}{=} \Lambda_R^\dagger = (\Lambda_R^*)^T = \sigma_2 \Lambda_L^T \sigma_2,$$

und es ergeben sich die Relationen

$$\Rightarrow \sigma_2 \Lambda_L^T \sigma_2 \Lambda_L = 1 \quad \Rightarrow \Lambda_L^T \sigma_2 \Lambda_L = \sigma_2.$$

Nach (3.1) verhalten sich die komplex konjugierten Spinoren unter Transformation wie der jeweils anders drehende Spinor:

$$\begin{aligned} \sigma_2 \Psi_R^* &\rightarrow \sigma_2 \Lambda_R^* \Psi_R^* = \sigma_2 \Lambda_R^* \sigma_2 \sigma_2 \Psi_R^* = \Lambda_L (\sigma_2 \Psi_R^*) \\ \sigma_2 \Psi_L^* &\rightarrow \sigma_2 \Lambda_L^* \Psi_L^* = \sigma_2 \Lambda_L^* \sigma_2 \sigma_2 \Psi_L^* = \Lambda_R (\sigma_2 \Psi_L^*). \end{aligned}$$

Dies erlaubt die einfache Konstruktion der komplex konjugierten Spinoren:

$$\Psi_R = -i\sigma_2 \Psi_L^*, \quad \Psi_L = i\sigma_2 \Psi_R^*. \quad (3.3)$$

Zwei Spinoren  $\chi_L$  und  $\Psi_L$  der Darstellung  $(\frac{1}{2}, 0)$  transformieren dann wie folgt:

$$\chi_L^T \sigma_2 \Psi_L \rightarrow \chi_L^T \Lambda_L^T \sigma_2 \Lambda_L \Psi_L = \chi_L^T \sigma_2 \Lambda_L^{-1} \sigma_2 \sigma_2 \Lambda_L \Psi_L = \chi^T \sigma_2 \Psi_L.$$

Der obige Vektor bleibt also invariant unter der Transformation. Insbesondere kann für  $\Psi_L = \chi_L = (\psi_1, \psi_2)^T$  die Invariante

$$\Psi_L^T \sigma_2 \Psi_L = i(\psi_2 \psi_1 - \psi_1 \psi_2)$$

konstruiert werden. Da für die Darstellung mit halbzahligem Spin der Kommutator der Clifford-Algebra  $\{\psi_i, \psi_j\} = f \delta_{ij}$  gilt, kann eine Null hinzugefügt werden und es folgt:

$$\Psi_L^T \sigma_2 \Psi_L = 2i\psi_2 \psi_1 \quad (3.4)$$

Bei einer skalaren Darstellung der Spinoren verschwindet diese Invariante aufgrund des Kommutators. Sie kommt also bei skalaren Feldern nicht vor. Mit den obigen Berechnungen kann der Lorenzskalar umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \chi_L^T \sigma_2 \Psi_L &\stackrel{(3.3)}{=} (i\sigma_2 \chi_R^*)^T \sigma_2 \Psi_L = i\chi_R^\dagger \sigma_2^T \sigma_2 \Psi_L = -i\chi_R^\dagger \Psi_L \\ \chi_R^T \sigma_2 \Psi_R &\stackrel{(3.3)}{=} (-i\sigma_2 \chi_L^*)^T \sigma_2 \Psi_R = -i\chi_L^\dagger \sigma_2^T \sigma_2 \Psi_R = i\chi_L^\dagger \Psi_R. \end{aligned}$$

Aus der speziellen linearen Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  gibt es einen Homomorphismus in die bisher betrachtete Lorentz-Gruppe. Die  $SL(2, \mathbb{C})$  besitzt zwei verschiedene Sätze von

Matrizen, welche eine ähnliche Rolle spielen, wie die Pauli-Matrizen für die  $SU(2)$ . Diese sind die um das Einselement erweiterten Pauli-Matrizen:

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}).$$

Die  $SL(2, \mathbb{C})$  wird manchmal auch Möbius-Gruppe genannt, da diese Matrizen eine Möbius-Transformation durchführen können. Diese Transformationen sind gegeben durch

$$x^\mu \rightarrow X = x^\mu \sigma_\mu, \quad x^\mu \rightarrow \bar{X} = x^\mu \bar{\sigma}_\mu.$$

Die Transformationsmatrix lässt sich wiederum durch  $\Lambda_L$  nach  $X'$  transformieren:

$$X \rightarrow X' = \Lambda_L X \Lambda_L^\dagger, \quad \bar{X} \rightarrow \bar{X}' = \Lambda_R \bar{X} \Lambda_R^\dagger = (\Lambda_L^{-1})^\dagger \bar{X} \Lambda_L^{-1}. \quad (3.5)$$

Die Größe  $\sigma^\mu \partial_\mu$  mit einem Vierervektor  $\partial_\mu$  transformiert sich nun wie  $X$  (bzw.  $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu$  wie  $\bar{X}$ ). Hieraus lassen sich mit der Transformation (3.5) die folgenden Skalare bilden:

$$\chi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L, \quad \chi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \Psi_R. \quad (3.6)$$

Da die Weyl-Spinoren sich unter einer Spiegelung  $\vec{T} \rightarrow \vec{T}^\dagger$  jeweils in die andere Fundamentaldarstellung transformieren, gibt es keine Paritätseigenzustände. Abhilfe kann eine vierkomponentige Darstellung der Spinoren

$$\Psi = (\Psi_L, \Psi_R)^T$$

schaffen, welche durch die direkte Summe  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$  entsteht. Ein solcher Spinor wird *Bispinor* genannt. Er bleibt im Gegensatz zum Weyl-Spinor unter Spiegelung im Darstellungsraum. Die Spiegelung kann durch die Transformation

$$P\Psi = \gamma^0 \Psi$$

ausgedrückt werden. Die Projektionsoperatoren eines allgemeinen Bispinors  $\Psi = (\Psi_L, \Psi_R)^T$  in die jeweiligen Unterräume sind gegeben durch

$$P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5).$$

Dieser Bispinor wird *Dirac-Spinor* genannt. Die zuletzt aufgetauchten Matrizen sind gegeben durch:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Nun kann der konjugierte Dirac-Spinor

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0$$

definiert werden, um die Lorentz-Skalare (3.4) kompakt zu schreiben:

$$\bar{\Psi} \Psi = \chi_R^\dagger \Psi_L + \Psi_L^\dagger \chi_R \quad (3.7)$$

Der zweite Loretz-Skalar (3.6) ergibt in dieser Schreibweise:

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi = \chi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \chi_R + \Psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Psi_L. \quad (3.8)$$

Bemerkung 1. Die Gamma-Matrizen bilden eine Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}.$$

Die Lagrange-Dichte des Spinorfeldes kann aus den Lorentz-Invarianten (3.7) und (3.8) erhalten werden. Da die Lagrange-Dichte reell ist und beide Skalare die gleiche Dimension besitzen sollen, wurden die Konstanten  $i\hbar$  und  $mc$  eingeführt:

$$\mathcal{L} = i\hbar\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - mc\bar{\Psi}\Psi.$$

Aus der Euler-Lagrange-Gleichung folgt sogleich die Dirac-Gleichung

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0.$$

Die obige Lagrange-Dichte ist jedoch nicht invariant gegenüber lokalen Eichtransformationen. Es muss also die Ableitung durch die kovariante Ableitung ersetzt werden [Str05]. Dies führt auf

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\hbar\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - mc\bar{\Psi}\Psi \\ &= \bar{\Psi}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi - \frac{e}{c}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu.\end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Dirac-Gleichung für ein Elektron im elektromagnetischen Feld:

$$\left[\gamma^\mu\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) - mc\right]\Psi = 0.$$

Diese Gleichung kann auch wie die Schrödinger-Gleichung als Eigenwertgleichung

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_D\Psi$$

mit dem Dirac-Hamiltonoperator in der bekannten Form

$$H_D = c\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \beta mc^2 + e\varphi \quad (3.9)$$

dargestellt werden. Hier ist  $\varphi = A_0$  das skalare elektrische Feld und die Matrizen  $\alpha$  und  $\beta$  wie folgt definiert:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

## 3.2 Die Dirac-Gleichung in supersymmetrischer Formulierung

### 3.2.1 Supersymmetrischer Hamiltonoperator und Involution

Zunächst benötigt die Definition eines supersymmetrischen Quantensystems 2.3.1 nach [Tha92] einen Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , auf welchem eine unitäre Involution  $\tau$  definiert ist. Eine Involution ist ein unitärer Operator in  $\mathcal{H}$ , welcher  $\tau^2 = \mathbf{1}$  erfüllt. Dieser Operator erfüllt die folgende Gleichung:

$$\tau^\dagger\tau = \tau\tau^\dagger = \tau^2 = \mathbf{1}.$$

Die Involution  $\tau$  kann also nur die Eigenwerte  $+1$  und  $-1$  besitzen. Die zugehörigen Eigenräume seien für den Eigenwert  $+1$   $\mathcal{H}_0$  bzw.  $-1$  für  $\mathcal{H}_1$ . Der Hilbertraum  $\mathcal{H}$  ist also nach Definition 2.1.2 ein Supervektorraum  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ , wobei die Operatoren

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \tau) \quad (3.11)$$

orthogonale Projektoren auf die Unterräume  $\mathcal{H}_0$  und  $\mathcal{H}_1$  sind. Man nennt  $\mathcal{H}_0$  (bzw.  $\mathcal{H}_1$ ) auch den geraden (ungeraden) oder bosonischen (fermionischen) Unterraum von  $\mathcal{H}$ . Ein hermitescher Operator  $H \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  lässt sich nun in einen geraden  $H_{\vee}$  und ungeraden  $H_{\wedge}$  Anteil zerlegen:

$$H = (P_+ H P_+ + P_- H P_-) + (P_+ H P_- + P_- H P_+) \equiv H_{\vee} + H_{\wedge}. \quad (3.12)$$

Des weiteren ist es leicht zu zeigen, dass die Kommutatorrelationen

$$[H_{\vee}, \tau] = 0, \quad \{H_{\wedge}, \tau\} = 0 \quad (3.13)$$

gelten. Die Involution wirkt also für die jeweiligen Unterräume wie ein Element dieses Unterraumes. Es kann dann eine ungerade, selbstadjungierte Superladung  $Q \in \mathcal{H}_1$  bezüglich  $\tau$  gefunden werden:

$$Q = Q^{\dagger}, \quad \{Q, \tau\} = 0. \quad (3.14)$$

Diese Superladung definiert den supersymmetrischen Dirac-Hamiltonoperator

$$H_D := \frac{1}{mc^2} Q^2, \quad (3.15)$$

welcher mit  $\tau$  kommutiert und daher ein gerader Operator ist.

Es kann eine zugehörige Superladung  $Q' := iQ\tau$  definiert werden, welche ebenfalls hermitesch ist. Zusammen erfüllen  $Q$  und  $Q'$  die SUSY-Algebra (2.18b):

$$Q'^2 = Q^2, \quad \{Q', Q\} = 0, \quad (Q')' = Q.$$

### 3.2.2 Die kanonische Darstellung

Es erweist sich als zweckmäßig, den in einen geraden und ungeraden Anteil aufgeteilten Hamiltonoperator als Matrix zu schreiben. Mit der Definition des Projektionsoperators in (3.11) kann die Involution mit der Dirac'schen Matrix  $\beta$  identifiziert werden:

$$\tau = \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

Der Hamiltonoperator ist dann durch die Zerlegung in (3.12) als  $2 \times 2$  Matrix gegeben

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & H_{+-} \\ H_{-+} & H_- \end{pmatrix} = H_{\vee} + H_{\wedge}.$$

Hier lassen sich der gerade Anteil auf der Diagonalen und der ungerade Anteil als Nicht-diagonalelemente ausmachen. Da die Superladungen ungerade Operatoren sind, lassen sich sich als

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & D^+ \\ D^- & 0 \end{pmatrix}, \quad Q' = i \begin{pmatrix} 0 & -D^+ \\ D^- & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

finden. Damit diese hermitesch sind, muss für die Operatoren  $(D^{\pm})^{\dagger} = D^{\mp}$  gelten. Die Operatoren sind Abbildungen  $D^+ : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$  bzw.  $D^- : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1$ . Nach (2.1) gilt also  $D^{\pm} \in \text{End}(\mathcal{H})_1$ .

Im nächsten Schritt wird eine verallgemeinerte Superladung definiert:

**Definition 3.2.1.** Eine verallgemeinerte Superladung  $H \in \mathcal{H}$  sei durch die Superladung  $Q \in \mathcal{H}_1$  bezüglich der Involution  $\tau$  mit einem hermiteschen Operator  $M \in \mathcal{H}_0$ , welcher mit  $Q$  sowie mit  $\tau$  vertauscht gegeben als

$$H = Q + M\tau. \quad (3.17)$$

In der kanonischen Darstellung kann dieser verallgemeinerte Superladung in der Form

$$H = \begin{pmatrix} M_+ & D^+ \\ D^- & -M_- \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

dargestellt werden. Diese Darstellung ist supersymmetrisch, wenn folgende Relationen gelten:

$$D^+ M_- = M_+ D^+, \quad D^- M_+ = M_- D^-.$$

Die letzten Relationen entstehen aus der Forderung, dass  $Q \in \mathcal{H}_1$  und  $M \in \mathcal{H}_0$ , wobei  $D^\pm \in \text{End}(\mathcal{H})_1$  jeweils in den anderen Unterraum von  $\mathcal{H}$  abbildet. Der Operator  $M$  vertauscht mit  $Q$  sowie mit  $\tau$  und nach (3.13) vertauschen diese unter dem geraden Kommutator, wie zuvor gefordert:

$$[M, Q] = [M, \tau] = 0.$$

Da  $M$  sowohl mit  $Q$  als auch mit  $\tau$  vertauscht, impliziert diese Definition für den supersymmetrischen Dirac-Hamiltonoperator nach (3.15):

$$H_S = \frac{1}{mc^2} H^2 = \frac{1}{mc^2} \begin{pmatrix} D^+ D^- + M_+^2 & 0 \\ 0 & D^- D^+ + M_-^2 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Mit (3.15) und

$$[H_S, Q] = [H^2, Q] = [H^2, M] = 0$$

findet sich also eine SUSY-Algebra der Form (2.18b) mit  $Q = Q_1$  und  $Q' = Q_2$ .

Wir können den Dirac-Hamiltonoperator (3.9) jetzt mit den Superladungen

$$D^+ = c \cdot \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\sigma} = D^-, \quad M_\pm = mc^2 \quad (3.20)$$

identifizieren. Dies ist eine  $2 \times 2$  Matrix. Da nun drei Superladungen vorhanden sind, ist dies eine  $N = 3$  Supersymmetrie.

Eine weitere Art von supersymmetrischen Dirac-Hamiltonoperatoren können wir mit skalaren Potentialen  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  finden. Dies kann zum Beispiel für Bandstrukturen ausgenutzt werden [Jun96].

### 3.2.3 Der Dirac-Hamiltonoperator mit einem Coulomb-Potential

Das Coulomb-Potential

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$$

für ein relativistisches Elektron lässt sich mit einem Produktansatz und Sommerfeld'scher Polynom-Methode exakt lösen [Sch08]. Der Dirac-Hamiltonoperator (3.9) in einem Zentraalfeld mit  $\vec{A} = 0$  und  $e\Phi = V(r)$  ist gegeben als

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + V. \quad (3.21)$$

Aus diesem folgt die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + V)\psi(x) = E\psi(x). \quad (3.22)$$

Diese Gleichung kann in Kugelkoordinaten separiert werden. Zur Untersuchung der Energieniveaus ist aus der Quantenmechanik bekannt, dass es ausreicht den Radialanteil zu betrachten. Dieser ist nach [Sch08] gegeben durch die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{d\rho} + \frac{k}{\rho} \right) F - \left( \frac{\alpha_2}{\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} \right) G &= 0 \\ \left( \frac{d}{d\rho} - \frac{k}{\rho} \right) G - \left( \frac{\alpha_1}{\sigma} + \frac{\gamma}{\rho} \right) F &= 0, \end{aligned}$$

wobei die Abkürzungen

$$\alpha_1 = m + E, \quad \alpha_2 = m - E, \quad \sigma = \sqrt{m^2 - E^2} \quad \rho = \sigma r, \quad \gamma = Z\alpha$$

mit der Feinstrukturkonstanten  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$  und  $k = \pm (j + \frac{1}{2})$  dem Eigenwert des Drehimpulsoperators benutzt werden. Die Ruheenergie ist mit  $m := mc^2$  gegeben. In Matrixschreibweise führen die obigen Gleichungen auf

$$\begin{pmatrix} G' \\ F' \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \underbrace{\begin{pmatrix} k & -\gamma \\ \gamma & -k \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_2}{\sigma} \\ \frac{\alpha_1}{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

### Versteckte Supersymmetrie

Dieses System von Differentialgleichungen soll jetzt auf versteckte Supersymmetrie untersucht werden. Dazu wird die Matrix  $M$  diagonalisiert. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass eine Matrix  $S$  mit der Eigenschaft

$$SMS^{-1} = D_M$$

dies erreichen kann, wobei  $D_M$  die Diagonalmatrix ist. Die Matrix  $M$  besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1}_2 - M) = 0,$$

welches auf die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{k^2 - \gamma^2} =: \pm \lambda$$

führt. Nach [Suk85] kann die Matrix  $M$  durch folgende Matrix

$$S = \begin{pmatrix} k + \lambda & -\gamma \\ -\gamma & k + \lambda \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

diagonalisiert werden. Dies wird im Anhang B.2 explizit nachvollzogen, indem Gleichung (3.23) von links mit der Matrix  $S$  multipliziert wird.

Wir können nun die Abkürzung

$$\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} := S \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix}$$

benutzen und mit  $r = \frac{E}{\sqrt{m^2 - E^2}} \rho$  die Operatoren

$$A^+ = \left[ \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} + \frac{\gamma}{\lambda} \right], \quad A^- = \left[ -\frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} + \frac{\gamma}{\lambda} \right]$$

einführen. Die gekoppelten Differentialgleichungen sind jetzt

$$A^+ f(r) = \left[ \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} + \frac{\gamma}{\lambda} \right] f(r) = \left( \frac{m}{E} + \frac{k}{\lambda} \right) g(r), \quad (3.25)$$

$$A^- g(r) = \left[ -\frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} + \frac{\gamma}{\lambda} \right] g(r) = \left( \frac{m}{E} - \frac{k}{\lambda} \right) f(r) \quad (3.26)$$

und können die Hamiltonoperatoren

$$\begin{aligned} H_- = A^- A^+ &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\lambda^2}{r^2} + \frac{\gamma^2}{\lambda^2} - 2\frac{\gamma}{r} + \underbrace{\frac{d}{dr} \frac{\lambda}{r}}_{= \frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r^2}} - \frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr} \\ &= -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda}{r^2} + \left( \frac{\lambda}{r} - \frac{\gamma}{\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

und

$$H_+ = A^+ A^- = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\lambda}{r^2} + \left( \frac{\lambda}{r} - \frac{\gamma}{\lambda} \right)^2. \quad (3.28)$$

definieren. Der Dirac-Hamiltonoperator lässt sich also faktorisieren und somit können die gesuchten Gleichungen entkoppelt werden. Die Superladungen seien wie folgt definiert:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^- \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es lässt sich nun einfach nachrechnen, dass die SUSY-Algebra

$$H = \{Q, Q^\dagger\} = \begin{pmatrix} A^- A^+ & 0 \\ 0 & A^+ A^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix}.$$

erfüllt wird, welche mit (3.25) und (3.26) auf die folgenden, entkoppelten Gleichungen führt

$$H_- f(r) = \left( \frac{m^2}{E^2} - \frac{k^2}{\lambda^2} \right) f(r), \quad H_+ g(r) = \left( \frac{m^2}{E^2} + \frac{k^2}{\lambda^2} \right) g(r)$$

Es ist also gezeigt, dass der Dirac-Hamiltonoperator Supersymmetrie besitzt.

### Energieniveaus mit forminvarianten Potentialen

Im Folgenden können die Energieniveaus mit Hilfe der forminvarianten Potentiale aus Abschnitt 2.3.3 bestimmt werden.

Die Partnerpotentiale  $H_+(r, \lambda)$  und  $H_-(r, \lambda)$  lassen sich mit Hilfe einer Parameterverschiebung

$$H_+(r, \lambda) = H_-(r, \lambda + 1) - R(\lambda)$$

mit dem Restglied

$$\begin{aligned}
 R(\lambda) &= -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda}{r^2} + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 - \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\lambda+1}{r^2} + \left(\frac{\lambda+1}{r} - \frac{\gamma}{\lambda+1}\right)^2\right) \\
 &= -\frac{\lambda}{r^2} + \left(\frac{\lambda}{r} - \frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 - \frac{\lambda}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \left(\frac{\lambda^2+2\lambda+1}{\rho^2} - 2\frac{\gamma}{\rho} + \frac{\gamma^2}{(\lambda+1)^2}\right) \\
 &= \frac{\gamma^2}{\lambda^2} - \frac{\gamma^2}{(\lambda+1)^2}
 \end{aligned}$$

ausdrücken.

Die Eigenwerte von  $H_-$  können mit

$$E_n^{(-)} = \sum_{k=1}^{n'} R(a_k) \quad (3.29)$$

ausgerechnet werden, wobei

$$R(a_k) = \gamma^2 \left( \frac{1}{a_{k-1}^2} - \frac{1}{a_k^2} \right), \quad a_0 = \lambda, \quad a_k = \lambda + k$$

ist. Diese Summe lässt sich leicht berechnen, da alle bis auf den ersten und den  $n'$ -ten Term aufheben. Nach (3.29) kann jetzt die Energie des Zustandes bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{m^2}{E^2} - \frac{k^2}{\lambda^2} \right) &= \gamma^2 \left( \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{(\lambda+n')^2} \right) \\
 \Leftrightarrow E^2 &= m^2 \frac{\lambda^2(\lambda+n')^2}{k^2(\lambda+n')^2 - \gamma^2 n(2l+n)} \\
 &= m^2 \frac{1}{\frac{k^2}{\lambda^2} - \frac{\gamma^2 n' (2l+n')}{\lambda^2 (\lambda+n')^2}} \\
 &= m^2 \frac{1}{\frac{k^2}{\lambda^2} - \frac{\gamma^2}{\lambda^2} + \frac{\gamma^2}{(\lambda+n')^2}} \\
 &= m^2 \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{(\lambda+n')^2}}. \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Die Quantenzahl  $n'$  ist aufgrund der Kugelflächenfunktionen durch  $n' = n - |k| = n - (j + \frac{1}{2})$  mit der Hauptquantenzahl  $n$  verknüpft. Die erlaubten Werte sind in Tabelle 3.1 angegeben.

### Energieniveaus mit SWKB-Methode

Die resultierende Energie kann anstatt mit der Methode der SI-Potentiale auch durch die SWKB-Methode erhalten werden. Die SWKB-Quantisierungsbedingung (2.37) ist dann:

$$\int_0^{x_R} \sqrt{2m(E - W^2(r))} dr = n' \hbar \pi.$$

Für  $A^+$  ist das Superpotential nach (2.27) durch

$$W(r) = -\frac{\lambda}{r} + \frac{\gamma}{\lambda}$$

Tabelle 3.1: Mögliche Zustände im Coulomb-Potential

$n'$	$n$	$ k $	$j$
0	1	1	1/2
1	2	1	1/2
0	2	2	3/2
2	3	1	1/2
1	3	2	3/2
0	3	3	5/2

gegeben. Dies eingesetzt in eine vereinfachte Gleichung (2.25)

$$H_1 = -\frac{d^2}{dr^2} + W^2(r) - W'(r)$$

ergibt sofort den Hamiltonoperator  $H_-$  aus (3.27). Eingestzt in die Quantisierungsbedingung ergibt sich:

$$\int_{x_L}^{x_R} \sqrt{2m \left( E - \frac{\lambda^2}{r^2} + 2\frac{\gamma}{r} - \frac{\gamma^2}{\lambda^2} \right)} dr = n' \hbar \pi.$$

Die Umkehrpunkte sind durch  $W(x_{R,L}) = \pm\sqrt{E}$  gegeben. Dieses Integral ist unter bestimmten Annahmen analytisch lösbar [Rog71]. Dieser Weg ist jedoch sehr aufwändig und erfordert ein ein großes Wissen in der Funktionentheorie. Der Integrand wird durch die sogenannte Langer-Modifikation (siehe [KS97]) angepasst und der Integrationsweg in die komplexe Ebene verlegt. In [Don07] ist die Lösung mit

$$\lambda \pi \left( \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2 E}{\gamma^2}} - 1 \right) = n' \pi$$

angegeben, welches sich durch Umformen auf die Form der exakten Lösung (3.30) bringen lässt. Da es sich um die SWKB-Methode handelt war auch zu erwarten, dass die exakte Lösung erhalten wird.

### Wellenfunktion der Dirac-Gleichung im Coulomb-Potential

Zunächst kann der Grundzustand mit Hilfe der Relation (2.31) für  $H_-$  bestimmt werden:

$$A^- f(r) = 0.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich leicht der Grundzustand zu

$$f_0(r) = N r^\lambda e^{-\frac{\gamma}{\lambda} r}$$

bestimmen. Die Normierungskonstante ergibt durch Integrieren über das Quadrat der Funktion

$$N^{-2} = \int_0^\infty r^{2\lambda} e^{-2\frac{\gamma}{\lambda} r} dr = \frac{1}{4^\lambda} \left( \frac{\gamma}{\lambda} \right)^{-1-2\gamma} \Gamma(2\gamma).$$

Hier wurde substituiert und die Definition der  $\Gamma$ -Funktion eingesetzt.

Durch Anwendung des Operators  $A^+$  können wir nun nach (3.25) in den Grundzustand von  $g(r) \sim f_1(r)$  übergehen:

$$f_1(r) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} A^+ f_0(r) = N \frac{r^{\lambda-1} (\gamma r - 2\lambda^2)}{\lambda \sqrt{E_1}} e^{-\frac{\gamma r}{\lambda}}.$$

Dies kann jetzt so weiter geführt werden. Eine allgemeine Lösung für beliebiges  $f_n(r)$  führt auf konfluente hypergeometrische Funktionen [WW80], welche speziell für diesen Fall auch als Coulomb-Wellen-Funktionen oder durch Transformation ins Komplexe als Whittaker Funktionen bekannt sind.

Der Übergang von einem Partner-Hamiltonoperator zum Nächsten ist mit der Abbildung  $\lambda \rightarrow \lambda + 1$  verknüpft. So können die Aufsteigeoperatoren die folgenden Wellenfunktionen nach (2.33) erzeugen.

Die ersten Zustände wurden nach obiger Methode mit dem Programm **Mathematica** berechnet und in den Abbildungen A.1 bis A.3 für  $n' = 0, 1, 2$  und den daraus resultierenden Quantenzahlen aus Tabelle 3.1 dargestellt. Hier wurde  $\gamma = \frac{1}{2}$  zusammen mit den dimensionslosen Konstanten  $\hbar = e = c = 1$  benutzt.

### 3.3 Die Pauli-Gleichung

Mit Hilfe der Pauli-Gleichung und ihrer Beschreibung durch die Supersymmetrie können alte Ergebnisse reproduziert und in den meisten Fällen einfacher hergeleitet werden. Insbesondere die Bestimmung des gyromagnetischen Faktors kann als eine besondere Leistung der supersymmetrischen Methoden angesehen werden. Die Pauli-Gleichung vereinfacht die Handhabung von nicht-relativistischen Problemstellungen, in denen der Spin berücksichtigt werden soll.

#### Die phänomenologische Aufstellung durch Pauli

Die nach Wolfgang Pauli (1900-1958) benannte Gleichung wurde in einer im Jahr 1927 erschienenen Arbeit [Pau27] von Pauli, basierend auf der Schrödingerschen Theorie und der von Goudsmith/Uhlenbeck geforderten inneren Drehmomenten des Elektrons im Magnetfeld, aufgestellt. Es wird jedoch darauf hingewiesen, dass diese Gleichung nur approximativ betrachtet werden kann, da sie nicht relativistisch invariant ist. In heutiger Notation kann sie wie folgt wiedergegeben werden:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{r}, t) = \left[ \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{g}{2} \mu_B \vec{B} \cdot \vec{\sigma} \right] \varphi(\vec{r}, t). \quad (3.31)$$

Hier ist das Magnetfeld  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  die Rotation des Vektorpotentials  $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g$  der gyromagnetische Faktor und  $\mu_B = \frac{q\hbar}{2mc}$  das Bohr'sche Magneton des Teilchens im Gauß'schen Einheitensystem. Speziell für das Elektron gilt  $q = |e| =: e$  und  $g = 2$ , wie sich später herausstellen wird. Letztere Annahme über den gyromagnetischen Faktor (auch Landé-Faktor)  $g$  ist zunächst den experimentellen Ergebnissen geschuldet, nach welchen sich der Elektronenstrahl in zwei Eigenfunktionen aufspaltet.

Für die in diesem Zusammenhang zuerst aufgetauchten Pauli-Matrizen werden die Vertauschungsrelationen der Lie-Algebra und der Clifford-Algebra gefordert. Demnach haben sie genau die Darstellung der  $SU(2)$ . Hier sei darauf hingewiesen, dass beide algebraischen Strukturen Pauli bereits bekannt waren. So weist Pauli in seiner Arbeit in

einer Fußnote darauf hin, dass Pascual Jordan (1902-1980) ihm die Vertauschungsrelationen der Quaternionen-Algebra nahelegt. Diese kann nach [Die71] (in [Hei90]) auch als antivertauschende Algebra, also als Clifford-Algebra interpretiert werden.

### Die Pauli-Gleichung als nicht-relativistischer Grenzfall

Die Pauli-Gleichung wurde vor der Dirac-Gleichung aufgestellt, ist jedoch als nicht-relativistischer Grenzfall in dieser enthalten. Dies kann wie in [LL71] mittels weniger Umformungen durchgeführt werden, als auch im Formalismus der supersymmetrischen Quantenmechanik wie in [Tha92] durchgeführt. Der nicht-relativistische Grenzfall soll hier durch den Limes  $c \rightarrow \infty$  durchgeführt werden.

Im allgemeinen besitzen Hamiltonoperatoren ein nach oben unbeschränktes Spektrum. Zum Studium eines unbeschränkten, selbstadjungierten Operators  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  kann die Resolvente

$$R(A, z) = (A - \mathbb{1}z)^{-1}$$

betrachtet werden. Diese weist nach dem folgenden Lemma die Eigenschaften eines beschränkten Operators auf.

**Lemma 3.3.1** (Satz VII.2.15 in [Wer07]). *Die Resolventenabbildung  $R : \rho(A) \rightarrow L(H)$ ,  $R(A, z) = (A - \mathbb{1}z)^{-1}$  aus der Resolventenmenge*

$$\rho(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid A - \mathbb{1}z \text{ beschränkt und invertierbar}\}$$

*in den Hilbertraum der linearen Operatoren ist analytisch und das Spektrum des Operators ist abgeschlossen. Ist  $A$  selbstadjungiert, so ist das Spektrum reell.*

**Satz 3.3.2.** *Der Operator  $H(c)$  auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit der Involution  $\tau$  und dem selbstadjungierten Operator  $M \equiv mc^2$ , gegeben durch die  $4 \times 4$ -Matrix*

$$H(c) \equiv cQ + M\tau \tag{3.32}$$

*führt im Limes  $c \rightarrow \infty$  auf den zweidimensionalen Pauli-Hamiltonoperator*

$$H_P = \frac{1}{2mc^2} D^+ D^-, \tag{3.33}$$

*wobei der Operator  $D^+ D^-$  die gerade Projektion der Superladung  $Q$  (3.16)  $P^+ Q^2$  ist.*

*Beweis.* Nach Lemma 3.3.1 wird die beschränkte Resolvente des Operators

$$A_{\pm} = H \pm mc^2 \pm z = cQ + (\tau \pm \mathbb{1})mc^2 \pm z^2 = cQ \pm 2mc^2 P_{\pm} \pm z$$

betrachtet. Hier wurde  $z \in \mathbb{C}$  eingeführt und  $mc^2$  von (3.32) abgezogen, da die Ruhemasse  $mc^2$  kein nicht-relativistisches Pendant besitzt. Es gilt weiterhin wegen (3.14)

$$P_+ Q - Q P_- = (\mathbb{1} + \tau)Q - Q(\mathbb{1} - \tau) = \{\tau, Q\} = 0$$

und mit (3.11) dann

$$A_+ A_- = A_- A_+ = c^2 Q^2 - 2mc^2 z - z^2,$$

woraus gefolgert werden kann, dass

$$A_{\pm}^{-1} = A_{\mp}(A_{\pm}A_{\mp}) = \frac{A_{\mp}}{2mc^2} \left( H_{\infty} - z - \frac{z^2}{2mc^2} \right)^{-1}$$

ist. Hier bietet sich die einfach nachzuvollziehende Identität  $(A+B)^{-1} = (\mathbb{1}+A^{-1}B)^{-1}A^{-1}$  an, um mit  $A = H_{\infty} = \frac{1}{2mc^2}Q^2$  und  $B = -\frac{z^2}{2mc^2}$  die folgende Form zu erreichen:

$$\begin{aligned} A_{\pm}^{-1} &= \frac{A_{\mp}}{2mc^2} \left( \mathbb{1} - \underbrace{\frac{z^2}{2mc^2}(H_{\infty} - z^2)^{-1}}_{-A^{-1}B} \right)^{-1} (H_{\infty} - z)^{-1} \\ \Leftrightarrow (H - mc^2 - z)^{-1} &= \left( P_{+} + \frac{cQ + z}{2mc^2} \right) \left( \mathbb{1} - \frac{z^2}{2mc^2}(H_{\infty} - z^2)^{-1} \right)^{-1} (H_{\infty} - z)^{-1}. \end{aligned}$$

Jetzt kann der Limes  $c \rightarrow \infty$  ausgeführt werden. Es fallen also alle Terme mit  $1/c^2$  heraus:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (H - mc^2 - z)^{-1} = P_{+}(H_{\infty} - z)^{-1} \quad (3.34)$$

In der kanonischen Darstellung nach (3.18) folgt mit der verallgemeinerte Superladung (3.32):

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} M_{+} - mc^2 - z & D^{+} \\ D^{-} & -M_{-} - mc^2 - z \end{pmatrix}^{-1} &= \lim_{c \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} -z & D^{+} \\ D^{-} & -2mc^2 - z \end{pmatrix}^{-1} \\ \stackrel{(3.34)}{=} \begin{pmatrix} (H_{\infty} - z)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da die Resolventenmenge nach Lemma 3.3.1 analytisch ist, kann sie um  $\frac{1}{c} = 0$  in eine Potenzreihe entwickelt werden. Die Resolvente von  $(H_{\infty} - 1)^{-1}$  ist gegeben durch  $(1 - (H_{\infty} - 1)^{-1})$ . In eine Potenzreihe entwickelt ergibt diese:

$$1 - (H_{\infty} - 1)^{-1} = 1 - (1 - H_{\infty} + H_{\infty}^2 - \dots).$$

In erster Ordnung erhalten wir den Pauli-Hamitonoperator:

$$H_P := P_{+}H_{\infty} = \frac{1}{2mc^2}P_{+}Q = \frac{1}{2mc^2}D^{+}D^{-}. \quad (3.35)$$

□

Mit Gleichung (3.20) und der Identität (2.5d) folgt direkt aus Gleichung (3.33) die Pauli-Gleichung mit skalarem Potential und Vektorpotential mit dem Impulsoperator in Ortsdarstellung:

$$\begin{aligned} H_P^{(3)} &= \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\sigma} \cdot \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\sigma} \\ &= \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \cdot \mathbb{1} + \frac{i}{2m} \frac{i\hbar e}{c} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \\ &= \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \cdot \mathbb{1} - \mu_B \vec{B} \cdot \vec{\sigma}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

### 3.4 Die supersymmetrische Pauli-Gleichung

Die in (3.36) erhaltenen Pauli-Gleichung mit der Superladung  $Q_1 := \frac{1}{\sqrt{4mc}} D^\pm$  aus (3.20) erfüllt eine Schrödinger-Gleichung  $H_P \Psi = E \Psi$  mit dem Hamiltonoperator  $H_P^{(3)} := 2Q_1^2$  in drei Dimensionen. Dies ist eine  $N = 1$  Supersymmetrie. Dieser Hamiltonoperator agiert auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ .

In einem zur  $(x, y)$ -Ebene senkrecht stehenden Magnetfeld  $\vec{B} = B_z(x, y) \vec{e}_3$  ist das Vektorpotential gegeben durch:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x(x, y) \\ A_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B(x, y) := B_z(x, y) = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

und der dreidimensionale Hamiltonoperator reduziert sich auf einen zweidimensionalen:

$$H_P^{(3)} = H_P^{(2)} + \frac{p_z^2}{2m},$$

wobei  $H_P^{(2)}$  jetzt der zweidimensionale Pauli-Hamiltonoperator auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}^2$  ist. Dieser zweidimensionale Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} H_P^{(2)} &= \frac{1}{2m} \left( \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \left( p_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 \right) - \mu_B B \sigma_3 \\ &\equiv \frac{1}{2m} (a_1^2 + a_2^2) - \mu_B B \sigma_3 \end{aligned} \quad (3.37)$$

mit  $g = 2$  und den Abkürzungen

$$a_1 = p_x - \frac{e}{c} A_x \quad \text{und} \quad a_2 = p_y - \frac{e}{c} A_y \quad (3.38)$$

unterliegt  $N = 2$  Supersymmetrie. Dies kann gezeigt werden, indem zwei SUSY-Operatoren nach [KS97] eingeführt werden:

$$\begin{aligned} Q_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2m}} (-a_2 \sigma_1 + a_1 \sigma_2) \\ Q_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2m}} (a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2). \end{aligned}$$

Wir können so zeigen, dass  $H_P^{(2)}$  eine SUSY-Algebra erfüllt

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= \frac{1}{2m} (a_1 \sigma_2 - a_2 \sigma_1) (a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2) \\ &= \frac{1}{2m} (a_1 \sigma_2 a_1 \sigma_1 - a_2 \sigma_1 a_1 \sigma_1 + a_1 \sigma_2 a_2 \sigma_2 - a_2 \sigma_1 a_2 \sigma_2) \end{aligned}$$

und können wegen  $[a_i, \sigma_j] = 0$  für alle  $i, j \in \{1, 2\}$ , sowie mit  $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$  schreiben

$$Q_1 Q_2 = \frac{1}{2m} (a_1^2 \sigma_2 \sigma_1 - a_2^2 \sigma_1 \sigma_2 + a_1 a_2 - a_2 a_1).$$

Nach analoger Rechnung folgt

$$Q_2 Q_1 = \frac{1}{2m} (a_1^2 \sigma_1 \sigma_2 - a_2^2 \sigma_2 \sigma_1 + a_2 a_1 - a_1 a_2).$$

Jetzt kann mit Hilfe von (2.5b) der Antikommutator berechnet werden:

$$\{Q_1, Q_2\} = \frac{1}{2m} (a_1^2 \{\sigma_2, \sigma_1\} - a_2^2 \{\sigma_1, \sigma_2\}) = 0.$$

Des weiteren gilt mit  $\sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3$ :

$$\begin{aligned} Q_1^2 &= \frac{1}{2m} (a_1^2 \sigma_2^2 + a_2^2 \sigma_1^2 - a_1 a_2 \sigma_2 \sigma_1 - a_2 a_1 \sigma_1 \sigma_2) \\ &= \frac{1}{2m} (a_1^2 + a_2^2 + i a_1 a_2 \sigma_3 - i a_2 a_1 \sigma_3) \\ &= \frac{1}{2m} (a_1^2 + a_2^2) + \frac{i}{2m} [a_1, a_2] \sigma_3 \\ Q_2^2 &= \frac{1}{2m} (a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + a_1 a_2 \sigma_1 \sigma_2 + a_2 a_1 \sigma_2 \sigma_1) \\ &= \frac{1}{2m} (a_1^2 + a_2^2) + \frac{i}{2m} [a_1, a_2] \sigma_3. \end{aligned}$$

Es ist also gezeigt, dass  $H := Q_1^2 = Q_2^2$ .

Da die Kommutatoren  $[p_i, p_j]$  und  $[A_i, A_j]$  für  $i \neq j$  verschwinden, erhalten wir für den fehlenden Kommutator:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2] &= \left[ \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right), \left( p_y - \frac{e}{c} A_y \right) \right] \\ &= \left[ p_x, -\frac{e}{c} A_y \right] + \left[ -\frac{e}{c} A_x, p_y \right]. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Impulses in Ortsdarstellung  $p_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$  erhält man

$$\begin{aligned} [a_1, a_2] &= \frac{ie\hbar}{c} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial x}, A_y \right] + \left[ A_x, \frac{\partial}{\partial y} \right] \right) \\ &= \frac{ie\hbar}{c} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \frac{ie\hbar}{c} B. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ein Vergleich mit (3.37) zeigt, dass die SUSY-Algebra

$$\begin{aligned} 2H\delta_{ij} &= \{Q_i, Q_j\} = 2H_P^{(2)}\delta_{ij} \quad [H_P^{(2)}, Q_i] = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2\} \\ H_P^{(2)} &= \frac{1}{2m} \left( \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \left( p_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 \right) - \mu_B B \cdot \sigma_3 \end{aligned} \tag{3.40}$$

mit dem gyromagnetischen Faktor  $g = 2$  erfüllt ist.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Statt mit den SUSY-Operatoren  $Q_1$  und  $Q_2$  hätte dieses Ergebnis auch durch eine Definition einer komplexen Superladung  $Q$  erzielt werden können:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2m}} [a_1 - ia_2] \cdot (\sigma_1 + i\sigma_2).$$

Diese Superladung muss nach (2.18a) die Superalgebra

$$Q^2 = (Q^\dagger)^2 = 0, \quad \{Q, Q^\dagger\} = H_P^{(2)}$$

erfüllen, was sich schnell zeigen lässt, indem man mit der Clifford-Algebra der Pauli-Matrizen (2.5b) einsieht, dass

$$(\sigma_1 \pm i\sigma_2) \cdot (\sigma_1 \pm i\sigma_2) = \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \pm i\{\sigma_1, \sigma_2\} = 0$$

## 3.5 Elektronen im Magnetfeld

Zur Untersuchung von Elektronen im Magnetfeld bietet es sich jetzt an, passende Potentiale für die Pauli-Gleichung zu finden. Hier gibt es unterschiedliche Eichungen, auf die zunächst eingegangen werden soll.

### 3.5.1 Symmetrische und asymmetrische Eichung

Um passende Potentiale für die Pauligleichung (3.40) zu finden, kann zwischen symmetrischen ( $A_x \neq 0$  und  $A_y \neq 0$ ) und asymmetrischen (z.B.  $A_x \neq 0$  und  $A_y = 0$ ) Eichungen unterschieden werden.

### 3.5.2 Asymmetrische Eichung

Eine asymmetrische Eichung, die die eben genannte Forderung erfüllt, ist zum Beispiel

$$A_y(x, y) = 0, \quad A_x(x, y) = a \cdot f(y)$$

mit einer Funktion  $f(y)$  und einem Faktor  $a \in \mathbb{R}$ , welcher noch bestimmt werden soll. Es folgt für das Magnetfeld

$$B_3 = -\frac{df(y)}{dy}.$$

Damit folgt in (3.40):

$$H := H_P^{(2)} \frac{1}{2m} \left( \left( p_x - \frac{e}{c} af(y) \right)^2 \cdot \mathbb{1} + p_y^2 \right) + \mu_B a f'(y) \cdot \sigma_3.$$

Da die Eichung nicht von  $x$  abhängt, kann der Produktansatz

$$\psi(x, y) = e^{ikx} \psi(y) \quad (3.41)$$

für die Wellenfunktion genommen werden. Hier ist  $k$  Eigenwert von  $p_x$  mit endlicher Energie. Es wird die Abkürzung  $\tilde{a} = \frac{e}{c} a$  eingeführt. Dieser Ansatz kann eingesetzt werden

$$\frac{1}{2m} (p_x - \tilde{a} f(y))^2 = \frac{1}{2m} [p_x^2 - 2\tilde{a} f(y) p_x + a^2 f^2(y)],$$

wobei ausgenutzt wird, dass  $f(y)$  nicht von  $k$  abhängen darf. Zusammen mit der Produktregel gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} [p_x^2 - 2\tilde{a} f(y) p_x + a^2 f^2(y)] e^{ikx} \psi(y) &= \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{2k\tilde{a}}{2m} f(y) - \frac{\tilde{a}^2}{2m} f^2(y) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar k}{\sqrt{m}} - \frac{\tilde{a}}{\sqrt{m}} f(y) \right)^2. \end{aligned}$$

---

ist. Andererseits gilt

$$Q \cdot Q^\dagger = \frac{1}{4m} (a_1^2 + a_2^2 - i[a_1, a_2]) \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - i[\sigma_1, \sigma_2]).$$

Die Mischterme fallen beim Kommutator  $\{Q, Q^\dagger\}$  heraus. Jetzt muss die Relation (3.39) ausgenutzt werden und es ergibt sich das gewünschte Ergebnis (3.40).

Die Funktion  $f$  soll keinen Vorfaktor haben, daher muss gelten:

$$1 = \frac{\tilde{a}}{\sqrt{m}} = \frac{e}{c\sqrt{m}}a \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{c}{e}\sqrt{m}.$$

Es folgt mit dem Produktansatz (3.41) der Pauli-Hamiltonoperator

$$H\psi_{\pm}(y) = \left[ \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar k}{\sqrt{m}} - f(y) \right)^2 \cdot \mathbf{1} + \frac{\hbar}{2\sqrt{m}} f'(y) \cdot \boldsymbol{\sigma}_3 \right] \psi_{\pm}(y).$$

Diese Gleichung kann mit dem Hamiltonoperator der supersymmetrischen Quantenmechanik (2.25) mit dem Superpotential

$$W(y) = f(y) - \frac{\hbar k}{\sqrt{m}}$$

identifiziert werden. Die Wellenfunktion ist durch einen zweikomponentigen Vektor  $\psi_{\pm}(y) = (\psi_{-}(y), \psi_{+}(y))^T$  zu den jeweiligen Eigenwerten von  $\sigma_3$  gegeben.

### 3.5.3 Potentiale für die symmetrische Eichung

In [CKS01] ist eine Liste von analytisch lösbar den Potentialen  $W(y)$  gegeben, welche auf die folgenden Magnetfelder  $B$  führen:

- (i)  $f(y) = \omega_c y + c_1 \Rightarrow B = \text{const}$
- (ii)  $f(y) = a \tanh y + c_1 \Rightarrow B = -a \operatorname{sech}^2 y$
- (iii)  $f(y) = a \tan y + c_1 \Rightarrow B = -a \sec^2 y \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- (iv)  $f(y) = c_1 - c_2 \exp(-y) \Rightarrow B = c_2 \exp(-y)$

Für  $c_1$  wird  $c_1 = \frac{\hbar k}{\sqrt{m}}$  gewählt. Die Lösungen dieser Potentiale sind durch die Methode der forminvarianten Potentiale in Abbildungen A.4 bis A.7 dargestellt. Hierbei wurden dimensionslose Parameter  $\hbar = 1, 2m = 1, e = 1, c = 1$  benutzt und nur die eindimensionale Lösung in  $y$ -Richtung betrachtet. Die Funktionen wurden mit den Aufsteigeoperatoren aus (2.36) analytisch durch das Programm **Mathematica** berechnet und mit **gnuplot** dargestellt. Die benutzten Operatoren und Funktionen sind in Tabelle 3.2 gegeben. Für die Landau-Niveaus ist dies explizit im folgenden Abschnitt berechnet.

#### Landau-Niveaus

Das Potential  $f(y) = \omega_c y + c_1$  führt wie oben gesehen auf ein konstantes Magnetfeld in  $z$ -Richtung. Dieses Potential lässt sich mit Hilfe der forminvarianten Potentiale lösen. Wir setzen dazu

$$W(y) = \sqrt{m}\omega_c y$$

in die Gleichungen für die Partnerpotentiale (2.26) ein und erhalten

$$V_{1,2} = \frac{1}{2} (m\omega_c^2 y^2 \mp \hbar\omega_c).$$

Dies führt auf folgende Relation zwischen den Partnerpotentialen:

$$V_2 = V_1 + \hbar\omega_c.$$

Nach Gleichung (2.32) gilt nun

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n \hbar\omega_c = n\hbar\omega_c.$$

Wir wissen, dass für den harmonischen Oszillator das Potential

$$V_{\text{eff}} = \frac{m\omega_c^2 x^2}{2} = V_1(x) + \frac{\hbar\omega_c}{2}$$

gilt. Dementsprechend ist das Spektrum der Landau-Niveaus nach dieser Definition des Potentials

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

was genau der Lösung der klassischen Behandlung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators entspricht. Die Wellenfunktion ist mit Hilfe von (2.23) leicht zu errechnen:

$$\Psi_0^{(1)}(x) = C \exp \left( -\frac{\sqrt{m}}{\hbar} \int_0^x W(y) dy \right) = C \exp \left( -\frac{m\omega_c}{2\hbar} x^2 \right),$$

welches der Wellenfunktion des harmonischen Oszillators entspricht. Die aus der Quantenmechanik für den harmonischen Oszillator bekannten Aufsteigeoperatoren können mit den Superladungen  $B^+$  identifiziert werden. Die Wellenfunktion  $\Psi_n$  ist dann durch die Hermite-Polynome gegeben.

### 3.5.4 Symmetrische Eichung

Für eine symmetrische Eichung wird für (3.40) der Ansatz

$$A_x(x, y) = \omega y f(\rho) = \omega \rho \sin \varphi f(\rho), \quad (3.42a)$$

$$A_y(x, y) = -\omega x f(\rho) = \omega \rho \cos \varphi f(\rho) \quad (3.42b)$$

mit  $\rho^2 = x^2 + y^2$  und  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  in Zylinderkoordinaten gewählt. Dies führt mit der Rotation in Zylinderkoordinaten auf ein Magnetfeld

$$B_z = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right). \quad (3.43)$$

Die anderen Richtungen des Magnetfeldes verschwinden, dies ist auch in kartesischen Koordinaten leicht einzusehen. Die Komponente  $A_z$  muss also nicht bestimmt werden. Für das Vektorpotential in Zylinderkoordinaten gilt

$$\vec{A} = \omega \rho \sin \varphi f(\rho) \vec{e}_x - \omega \rho \cos \varphi f(\rho) \vec{e}_y.$$

Die Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten sind durch die Jacobi-Matrix gegeben

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix ist eine orthogonale Matrix aus  $SO(3)$  und ihre Transponierte ist schon ihr Inverses. Die kartesischen Einheitsvektoren können in Zylinderkoordinaten angegeben werden

$$\vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_\rho + \sin \varphi \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_y = -\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi, \quad (3.44)$$

sowie auf das Vektorpotential projiziert werden, um die entsprechenden Koeffizienten in Zylinderkoordinaten zu erhalten:

$$A_\rho = 0, \quad A_\varphi = -\omega \rho^2 f(\rho).$$

Dies eingesetzt in (3.43) ergibt

$$B \equiv B_z = -2\omega f(\rho) - \omega \rho f'(\rho). \quad (3.45)$$

Jetzt können wir das Magnetfeld aus (3.45) und die Vektorpotentiale (3.42a) und (3.42b) in den Pauli-Hamiltonoperator (3.37) einsetzen:

$$H_P^{(2)} = \frac{1}{2m} \left( (p_x - A_x)^2 + (p_y - A_y)^2 \right) + \mu_B \omega (2f(\rho) + \rho f'(\rho))$$

Hier wurde der Vorfaktor der Vektorpotentiale in einen neuen Koeffizienten  $\omega_c = \frac{e}{c} \omega$  eingesetzt. Ähnlich wie zuvor mit dem Vektorpotential geschehen können wir jetzt auch die Divergenz  $\vec{\nabla}$  in Zylinderkoordinaten darstellen, um die Impulse  $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  und  $p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$  in Ortsdarstellung zu erhalten. Hierzu projizieren wir wieder die Einheitsvektoren aus (3.44) auf die Divergenz in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \sin \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \cos \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke in den Klammern können jetzt auch in Zylinderkoordinaten geschrieben werden:

$$\begin{aligned} p_x - A_x &= -\frac{i\hbar}{\rho} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \sin \varphi \left( \frac{i\hbar}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \omega_c \rho f(\rho) \right) \\ p_y - A_y &= -\frac{i\hbar}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \cos \varphi \left( \frac{i\hbar}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \omega_c \rho f(\rho) \right). \end{aligned}$$

In der Summe der Quadrate heben sich die Mischterme weg. Für die Differentialoperatoren gilt:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right).$$

Mit der Identität  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} (p_x - A_x)^2 + (p_y - A_y)^2 &= -\frac{\hbar^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left( \frac{i\hbar}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \omega_c \rho f(\rho) \right)^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\hbar^2}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2i\hbar \omega_c f(\rho) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \omega_c^2 \rho^2 f^2(\rho). \end{aligned}$$

Hier kann die  $z$ -Komponente des quantenmechanischen Drehimpulsoperators  $L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$  eingesetzt werden und der Hamiltonoperator lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$H = \frac{1}{2\mu} \left( -\frac{\hbar^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\hbar^2}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\omega_c f(\rho) L_z + \omega_c^2 \rho^2 f^2(\rho) \right) + \mu_B \omega (2f(\rho) + \rho f'(\rho)).$$

In Analogie zu Lösungen von Zentralproblemen in der klassischen Quantenmechanik benutzen wir den Produktansatz

$$\psi_{\pm}(\rho, \varphi) = e^{im\varphi} \frac{R_{\pm}(\rho)}{\sqrt{\rho}}$$

zum Lösen der Gleichung mit dem Eigenwert  $\hbar m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  des Drehimpulsope-  
rators  $L_z$ . Hier steht  $R_{\pm}(\rho)$  für die beiden Lösungen zum Operator  $\sigma_3$ . Mit einer kurzen Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \frac{R_{\pm}(\rho)}{\sqrt{\rho}} &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{\rho^2} \right) R_{\pm}(\rho) \\ - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} e^{im\varphi} &= \frac{m^2}{\rho^2} e^{im\varphi} \end{aligned}$$

können wir die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für den Radialanteil aufstellen:

$$\frac{1}{2\mu} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \hbar^2 \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2} - 2\hbar\omega_c f m + \omega_c^2 \rho^2 f^2 \mp 2\mu\mu_B \underbrace{\omega(2f + \rho f')}_{\substack{(3.45) \\ -B}} \right] R_{\pm}(\rho) = E R_{\pm}(\rho),$$

wobei diese Gleichung jetzt mit dem Hamiltonoperator der SUSY-QM verglichen werden kann. Jetzt kann ein einziges Superpotential mit der Funktion  $f = f(\rho) = 1$  gefunden werden:<sup>3</sup>

$$W(\rho) = \tilde{\omega}_c \rho - \frac{m + \frac{1}{2}}{\sqrt{\mu} \rho} \hbar \quad (3.46)$$

Nun kann der Hamiltonoperator mit dem Superpotential aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\hbar^2}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + W^2(\rho) \right] \mp \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\sqrt{\mu}} W'(\rho) \\ \Rightarrow H_1 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\hbar^2}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \tilde{\omega}_c^2 \rho^2 - \frac{2m\tilde{\omega}_c \hbar}{\sqrt{\mu}} - \frac{2\hbar\tilde{\omega}_c}{\sqrt{\mu}} + \frac{\hbar^2}{\mu} \frac{(m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2})}{\rho^2} \right] \\ &= \frac{1}{2\mu} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \hbar^2 \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{\rho^2} - 2m\tilde{\omega}_c \hbar \sqrt{\mu} + \tilde{\omega}_c^2 \rho^2 \mu \right] - \frac{\hbar\tilde{\omega}_c}{\sqrt{\mu}}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung stimmt für

$$\tilde{\omega}_c = \frac{\omega_c}{\sqrt{\mu}} = \frac{e}{\sqrt{\mu}c} \omega$$

---

<sup>3</sup>Es können noch weitere Superpotentiale gefunden werden, doch diese können nur für bestimmte  $m$  gelten und besitzen in der Regel keine forminvarianten Parnerpotentiale.

mit obiger Gleichung überein, da das Bohr'sche Magneton  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2\mu c}$  ist. Außerdem kann mit Gleichung (3.45) das Magnetfeld eingeführt werden. Insgesamt ist der Faktor  $\omega$  also gegeben durch die Zyklotronfrequenz:

$$\omega_Z := \frac{2\tilde{\omega}_c}{\mu} = 2\frac{e}{c\mu}\omega = \frac{eB}{c\mu}.$$

Der Vorfaktor  $\omega$  der Funktion  $f(\rho)$  kann also mit der Zyklotronfrequenz identifiziert werden. Das Superpotential (3.46) ist das Superpotential eines isotropen, harmonischen Oszillators, dies kann ebenfalls mit Hilfe der forminvarianten Potentiale gelöst werden. Dies wurde ebenfalls wie bei den Potentialen der symmetrischen Eichung durchgeführt (für die Funktionen sie Tabelle 3.2) und in A.8 dargestellt.

Tabelle 3.2: Superpotentiale für Elektronen im Magnetfeld

$W(x)$	$V_{1,2}(x)$	$f(a)$	$R$	$E_n$	$\Psi_0(x)$	$B^+ \Psi(x)$
$\omega x$	$\omega^2 x^2 \mp \omega$	$2\omega = \text{const}$	$2\omega$	$2n\omega$	$\frac{\cosh^{-a}(x)}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}}}$	$\frac{ax\Psi(x)-\Psi'(x)}{\sqrt{2}}$
$a \tanh(x)$	$a^2 \tanh^2(x) \mp a \operatorname{sech}^2(x)$	$a-1$	$2a-1$	$n^2$	$\frac{\cosh^{-a}(x)}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}}}$	$\frac{a\Psi(x) \tanh(x)-\Psi'(x)}{\sqrt{2}}$
$a \tan(x)$	$a^2 \tan^2(x) \mp a \sec^2(x)$	$a+1$	$2a+1$	$2n+n^2$	$\frac{\cos^a(x)}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+1)}}}$	$\frac{a\Psi(x) \tan(x)-\Psi'(x)}{\sqrt{2}}$
$a - e^{-x}$	$(a - e^{-x})^2 \mp e^{-x}$	$a-1$	$2a-1$	$n^2$	$\frac{e^{-ax} - e^{-x}}{\sqrt{4-a} \Gamma(2a)}$	$\frac{(a-e^{-x})\Psi(x)-\Psi'(x)}{\sqrt{2}}$
$x - \frac{a+\frac{1}{2}}{x}$	$\mp \frac{a+\frac{1}{2}}{x^2} + \left(x - \frac{a+\frac{1}{2}}{x}\right)^2 \mp 1$	$a+1$	$4$	$4n$	$\frac{\sqrt{2} \sqrt{x} e^{a \log(x) - \frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\Gamma(a+1)}}$	$\frac{\left(x - \frac{a+\frac{1}{2}}{x}\right) \Psi(x) - \Psi'(x)}{\sqrt{2}}$

## 4 Zusammenfassung

In dieser Arbeit konnten die Methoden der supersymmetrischen Quantenmechanik erfolgreich auf einige Probleme der relativistischen Quantenmechanik angewendet werden.

Zunächst wurde bei der Herleitung darauf geachtet, mit Hilfe der graduierten Algebren einen Formalismus einzuführen, welcher es erlaubt, relativistische Gleichungen in  $4 \times 4$ -Matrizen zu betrachten. Die wichtigen Kommutatoren der Clifford- und Lie-Algebra wurden eingeführt und in der Arbeit häufig angewandt.

Die Ausführungen über Supersymmetrie und supersymmetrische Quantenmechanik wurde größtenteils aus der angegebenen Literatur übernommen und an manchen Stellen bewiesen. Insbesondere bei den Definitionen der fermionischen und bosonischen Leiteroperatoren wurde genau gearbeitet, sodass später elegant die Faktorisierungsmethode hergeleitet werden konnte, welche in der supersymmetrischen Quantenmechanik eine ausgezeichnete Rolle spielt. Die verschiedenen Sätze von SUSY-Algebren wurden beide in den folgenden Abschnitten benötigt.

Mit Hilfe der Lorentz-Invarianten wurde im Hauptteil zunächst die Lagrange-Dichte der Dirac-Gleichung aufgestellt. Hier ist es bemerkenswert, dass dies direkt aus der Lorentz-Gruppe ohne weitere Annahmen gelingen kann. Es sind nur Symmetriebetrachtungen angestellt worden. Die Gruppen  $SO(3)$  und  $SU(2)$  wurden also zuvor nicht umsonst hergeleitet und sind auch beim supersymmetrischen Dirac-Hamiltonoperator wichtige Grundlagen.

Für das Wasserstoff-Problem wurden die in der Original-Literatur angegebenen Methoden explizit ausgerechnet. Es zeigt sich, dass bei der Diagonalisierung der Dirac-Gleichung (siehe B.2) ein wenig Rechenaufwand nötig ist, was der Literatur nicht zu entnehmen ist. Auch die SWKB-Methode kann durch das komplizierte zu berechnende Integral nur bedingt bei der analytischen Berechnung der Probleme herangezogen werden. Auf diese Methode wurde dann im folgenden verzichtet. Die Methode der forminvarianten Potentiale konnte dagegen erfolgreich getestet werden. Auch die Wellenfunktionen konnten berechnet und dargestellt werden.

Der Limes zur nicht-relativistischen Pauli-Gleichung wurde dann relativ streng mathematisch anhand der supersymmetrischen Formulierung durchgeführt. Hier sind einige Beweise zur Funktionalanalysis übergangen worden, welche jedoch genauer in [Tha92] nachgelesen werden können.

Die Pauli-Gleichung wurde dann genutzt, um Elektronen im Magnetfeld zu untersuchen. Zunächst wurde der gyromagnetische Faktor bestimmt, wobei durch die vorherige Definition der Superladungen klar ist, dass hier das richtige Ergebnis gewonnen wird. Die Supersymmetrie weist also auch in der nicht-relativistischen Quantenmechanik relativistische Effekte auf, welche mit Hilfe der Pauli-Gleichung untersucht werden können. Dies wurde anhand von verschiedenen Potentialen durchgeführt und in der eleganten Form der SUSY-Ketten dargestellt.

Insgesamt hat sich gezeigt, dass die Methoden der Supersymmetrie bei der Untersuchung von Teilchen im Magnetfeld Vorteile gegenüber herkömmlichen Methoden bietet. Die Landau-Niveaus konnten in wenigen Zeilen berechnet werden. Der Formalismus der forminvarianten Potentiale ist ein sehr mächtiges Werkzeug, welches zum Teil weniger

elegante Methoden wie die Sommerfeld'sche Polynommethode beim Wasserstoff-Problem ablösen konnte.

Zur Betrachtung von Teilchen im Magnetfeld gibt es insbesondere in [Jun96] weitere Beispiele. So können auch der magnetische Fluss supersymmetrisch bestimmt und Methoden der statistischen Physik supersymmetrisch formuliert werden.

Für das numerische Lösen von Problemen war in dieser Arbeit kein Platz mehr, da die Potentiale für die Magnetfelder auf wenige Fälle beschränkt sind und weitere Potentiale unphysikalisch sind. Der dreidimensionale Pauli-Hamiltonoperator wiederum erlaubt die Bearbeitung von interessanten Fragestellungen, jedoch gibt es aufgrund von dessen  $N = 1$  Supersymmetrie kaum Möglichkeiten, supersymmetrische Methoden anzuwenden.

Insgesamt wurde in dieser Arbeit versucht, in die supersymmetrische relativistische Quantenmechanik vom Standpunkt der klassischen Quantenmechanik einzuführen. Deshalb war einiges an Vorarbeit in den grundlegenden Abschnitten notwendig. Diese ist bei der Behandlung der Dirac- und Pauli-Gleichung erfolgreich mit eingeflossen.

Es konnte des weiteren umrissen werden, dass die supersymmetrische Quantenmechanik keine Methode ist, die zwingend auf die Supersymmetrie zurückgeht, sondern schon in den Anfängen der Quantenmechanik die Faktorisierung von Hamiltonoperatoren untersucht wurde. Die Mathematischen Mittel sind zum Teil schon seit über 100 Jahren bekannt und können hier eine wichtige Grundlage darstellen.

## A Abbildungen

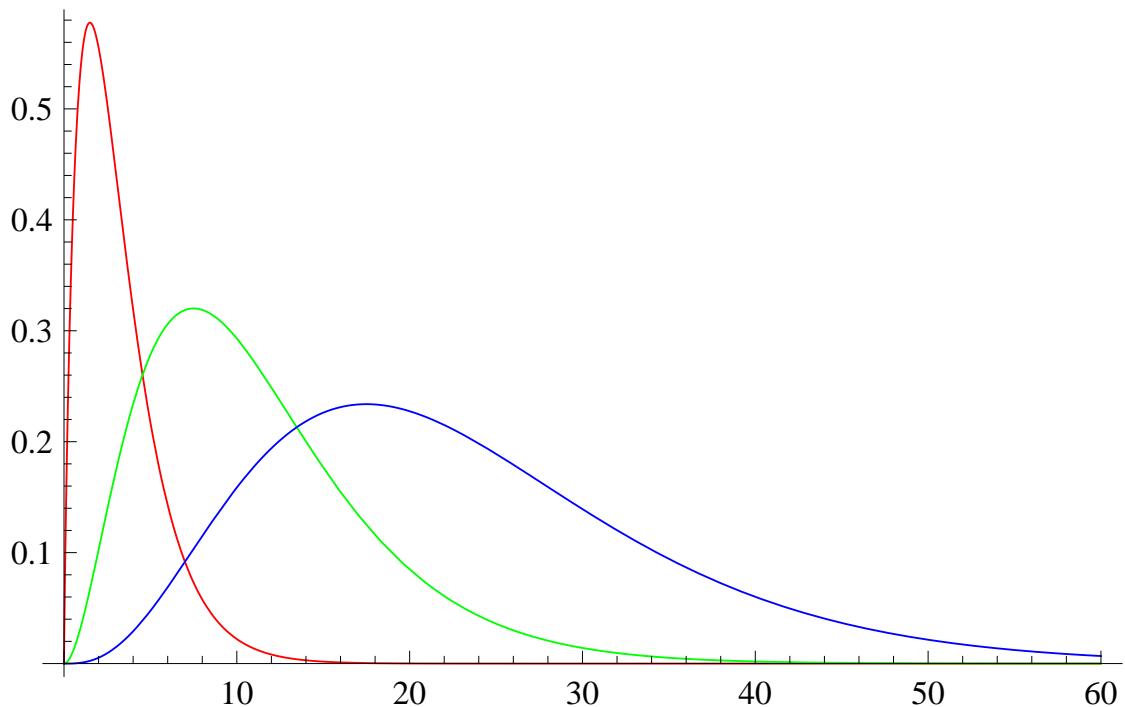


Abbildung A.1: Die Visualisierung der Zustände mit  $n' = 0$  des Coulomb-Potentials. Die Werte aus 3.1 sind  $n = k = 1$  (rot),  $n = k = 2$  (grün) und  $n = k = 3$  (blau).

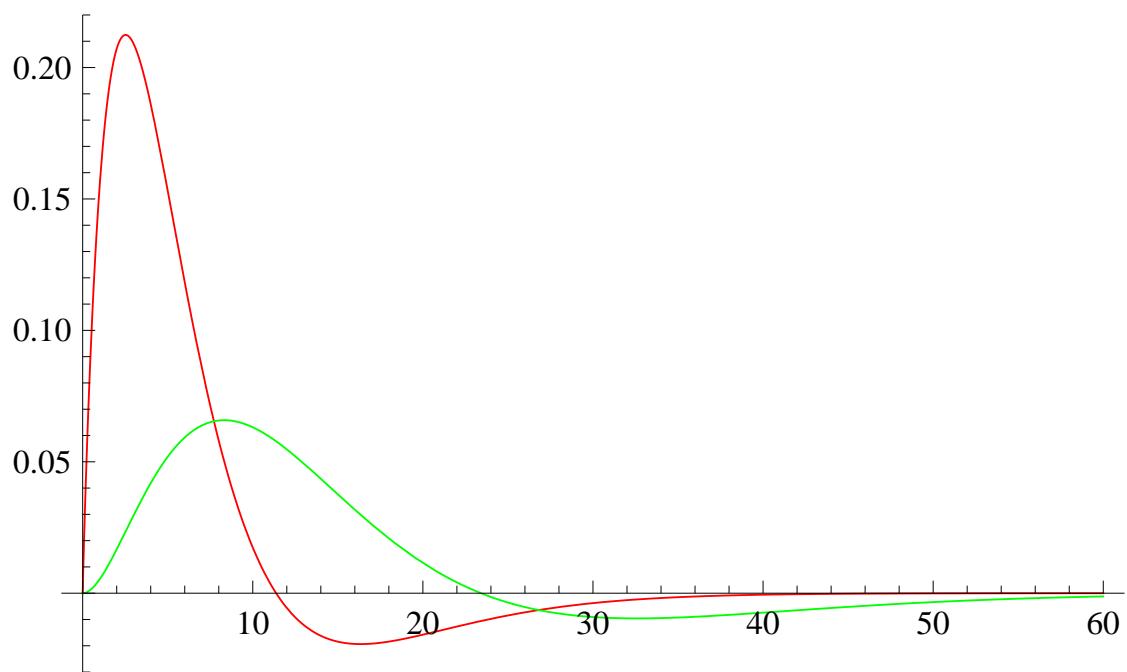


Abbildung A.2: Die Wellenfunktionen für  $n' = 1$ , also  $n = 2, k = 1$  (rot) und  $n = 3, k = 2$  (grün).

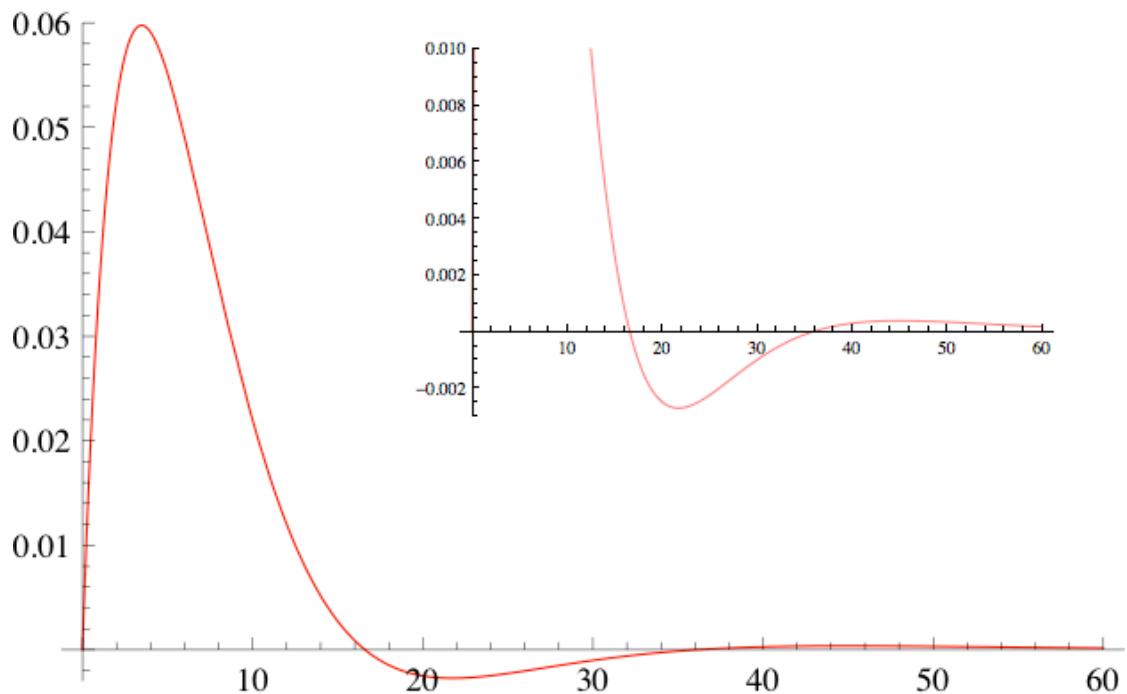


Abbildung A.3: Die Wellenfunktion für  $n' = 2$ , also  $n = 3, k = 1$ .

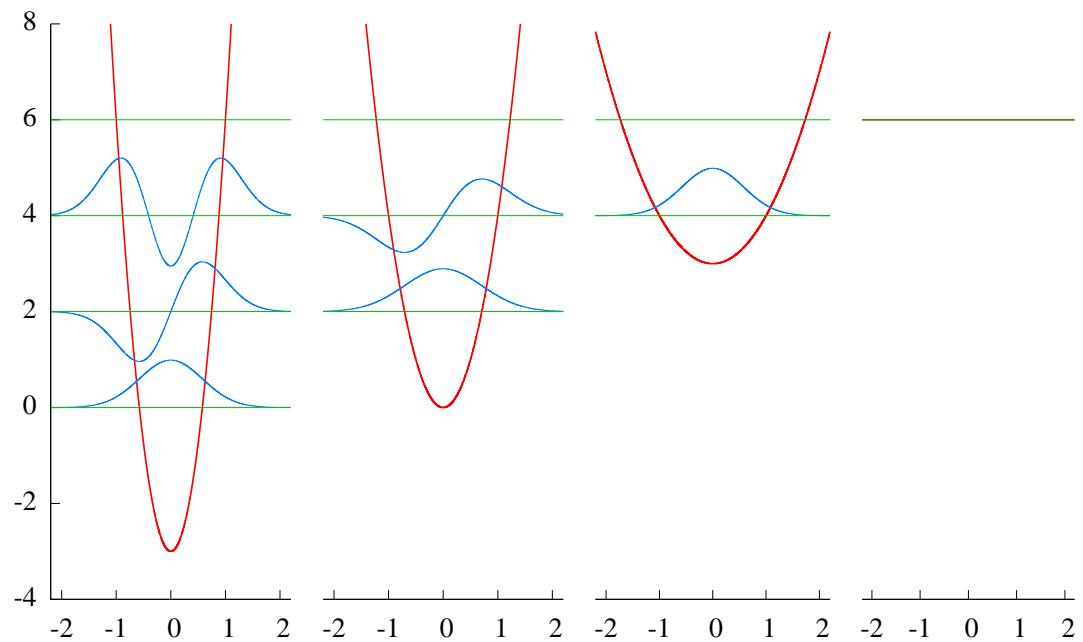


Abbildung A.4: Die Partnerpotentiale des harmonischen Oszillators zur Visualisierung der Landau-Niveaus für Teilchen in einem konstanten Magnetfeld.

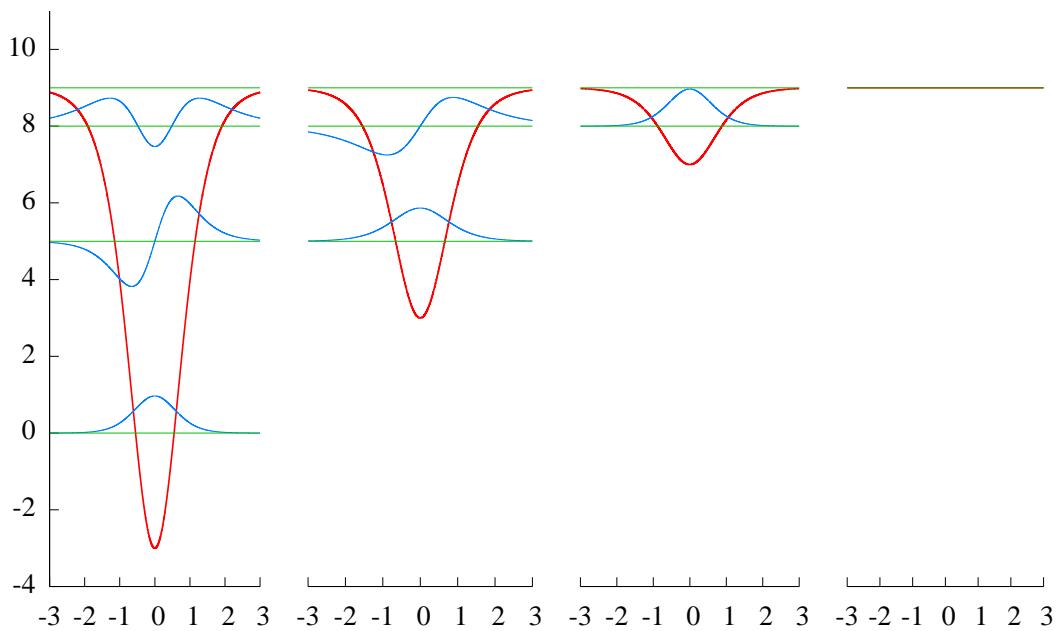


Abbildung A.5: Die Partnerpotentiale des Rosen-Morse-Potentials  $W(x) = a \tanh y$ .

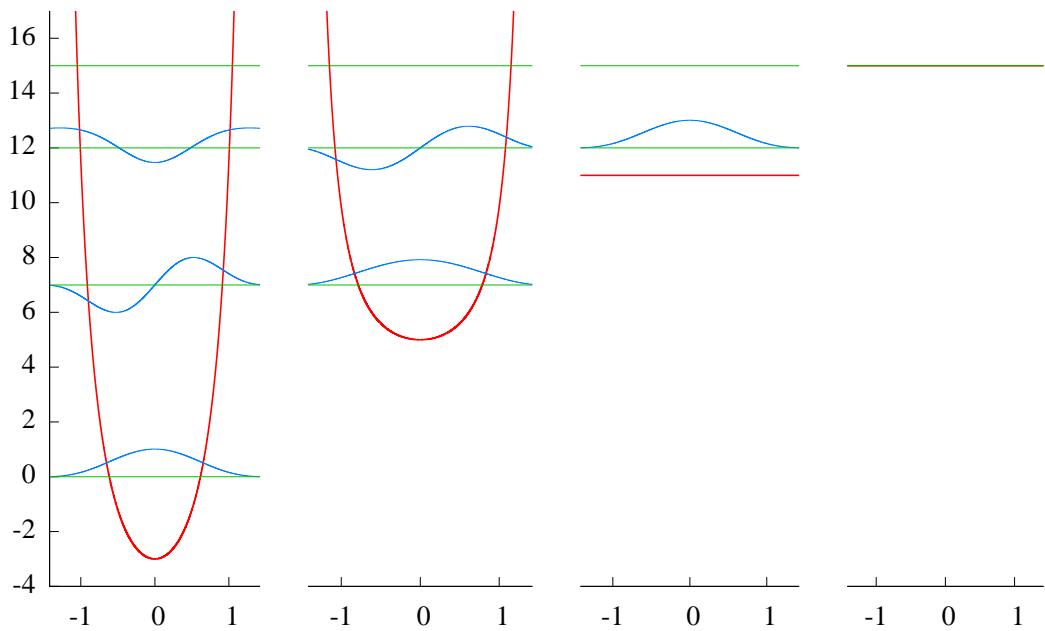


Abbildung A.6: Die Partnerpotentiale des Scarf-I-Superpotentials  $W(x) = a \tan y$ .

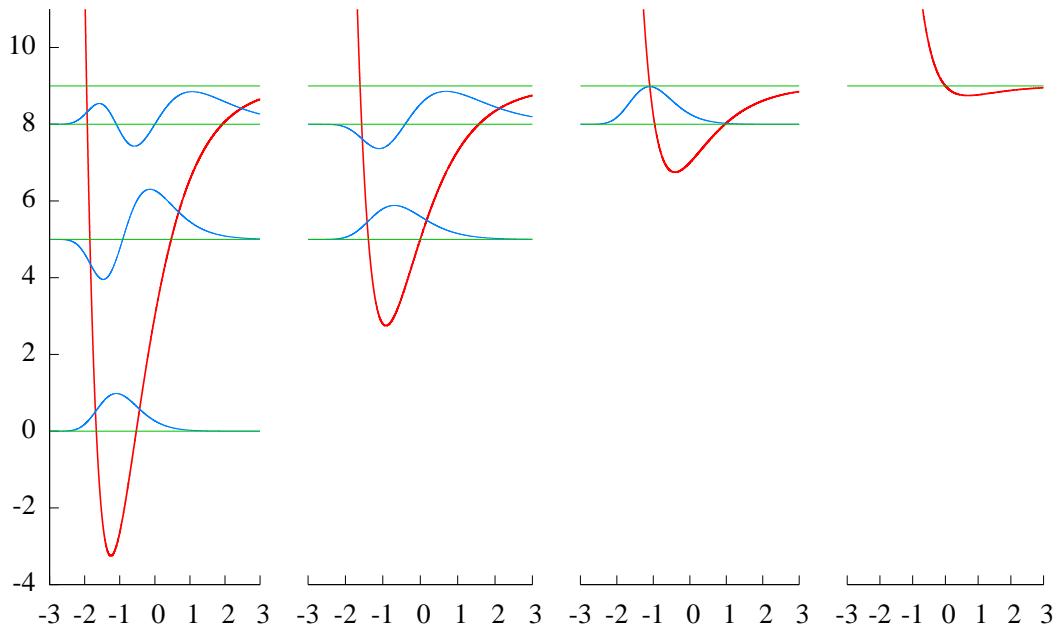


Abbildung A.7: Die Partnerpotentiale des Superpotentials  $W(x) = -a \exp(-y)$ .

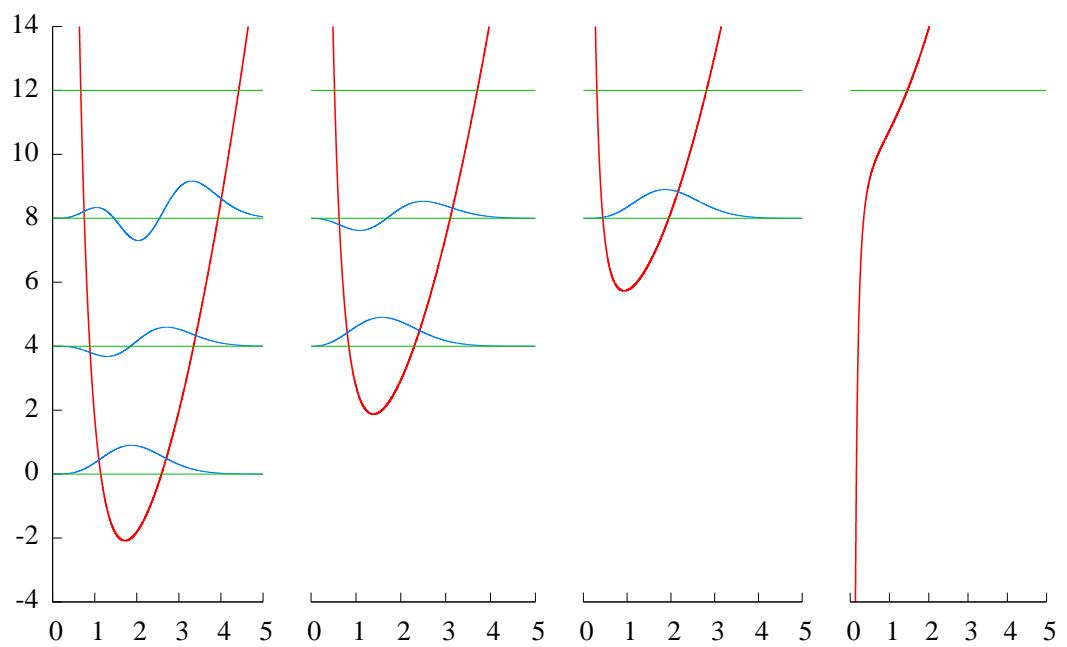


Abbildung A.8: Die Partnerpotentiale des isotropen, harmonischen Oszillators. Von links nach rechts mit aufsteigendem  $m = 0, 1, 2$ .

# B Anhang

## B.1 Notation

Symbol	Beschreibung
$[\cdot, \cdot]$	Kommutator
$\{\cdot, \cdot\}$	Antikommutator
$\mathbb{1}$	Einheitsmatrix, Einselement
$\mathcal{C}\ell$	Clifford-Algebra
$\det$	Determinante
$\text{End}(V)$	Gesamtheit der Endomorphismen von $V$
$\mathcal{H}$	Hilbertraum
$\text{Hom}(V_1, V_2)$	Homomorphismus (lineare Abbildung) zwischen den Vektorräumen $V_1$ und $V_2$
$\mathbb{K}$	Körper $\mathbb{K}$ , in der Regel $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$\mathcal{L}$	Lagrange-Dichte
$L^2(\mathbb{R})$	nach Lebesgue-Maß quadratintegrable Funktionen
$\text{Mat}(n, \mathbb{K})$	$n \times n$ -Matrix mit Elementen aus $\mathbb{K}$
$\otimes^n V$	symmetrisches ( $n$ -faches) Tensorprodukt auf dem Vektorraum $V$
$\wedge^n V$	antisymmetrisches ( $n$ -faches) Tensorprodukt auf dem Vektorraum $V$

## B.2 Diagonalisieren der Dirac-Gleichung

Die Multiplikation der in (3.24) gegebenen Matrix  $S$  von links an die gekoppelten Gleichungen der Dirac-Gleichung (3.23) führt auf:

$$S \begin{pmatrix} G' \\ F' \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} S \underbrace{\begin{pmatrix} k & -\gamma \\ \gamma & -k \end{pmatrix}}_{D_M} S^{-1} S \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_2}{\sigma} \\ \frac{\alpha_1}{\sigma} & 0 \end{pmatrix} S^{-1} S \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix}$$

Die Gleichung soll in diesem Anhang ausgewertet werden.

Die Matrix

$$D_M = S \cdot M \cdot S^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} k & -\gamma \\ \gamma & -k \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} k + \lambda & -\gamma \\ -\gamma & k + \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

mit

$$\lambda = \sqrt{k^2 - \gamma^2} \quad \text{bzw.} \quad \gamma^2 = k^2 - \lambda^2 = (k + \lambda)(k - \lambda) \quad (\text{B.2})$$

soll berechnet werden. Die Inverse Matrix  $S^{-1}$  lässt sich mit der Determinante

$$\det(S) = (k + \lambda)^2 - \gamma^2$$

leicht bestimmen:

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \text{adj}(S) = \frac{1}{(k + \lambda)^2 - \gamma^2} \begin{pmatrix} k + \lambda & \gamma \\ \gamma & k + \lambda \end{pmatrix}.$$

Dann folgt für Gleichung (B.1)

$$\begin{aligned}\det(S)D_M &= \begin{pmatrix} k+\lambda & -\gamma \\ -\gamma & k+\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & -\gamma \\ \gamma & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k+\lambda & \gamma \\ \gamma & k+\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (k(k+\lambda)^2 - 2\gamma^2(k+\lambda) + k\gamma^2) & -(\gamma^3 - 2k\gamma(k+\lambda) + \gamma(k+\lambda)^2) \\ (\gamma^3 - 2k\gamma(k+\lambda) + \gamma(k+\lambda)^2) & -(k(k+\lambda)^2 - 2\gamma^2(k+\lambda) + k\gamma^2) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Elemente dieser Matrix, die nicht auf der Diagonalen liegen lassen sich wie folgt auswerten:

$$\begin{aligned}\gamma(\gamma^2 - 2k(k+\lambda) + (k+\lambda)^2) &\stackrel{(B.2)}{=} \gamma((k^2 - \lambda^2) - 2k(k+\lambda) + (k+\lambda)^2) \\ &= \gamma(k+\lambda)((k-\lambda) - 2k + (k+\lambda)) = 0.\end{aligned}$$

Die Diagonalelemente sind nun wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}\pm(k(k+\lambda)^2 - 2\gamma^2(k+\lambda) + k\gamma^2) &\stackrel{(B.2)}{=} \pm(k+\lambda)(k(k+\lambda) - 2(k-\lambda)(k+\lambda) + k(k-\lambda)) \\ &= \pm(k+\lambda)(k^2 + k\lambda - 2k^2 + 2\lambda^2 + k^2 - k\lambda) \\ &= \pm(k+\lambda)2\lambda^2.\end{aligned}$$

Zusammen mit der Determinante ergibt sich

$$\begin{aligned}\pm \frac{2\lambda^2(k+\lambda)}{(k+\lambda)^2 - \gamma^2} &= \pm \frac{2\lambda^2(k+\lambda)}{(k+\lambda)^2 - (k+\lambda)(k-\lambda)} \\ &= \pm \frac{2\lambda^2}{(k+\lambda) - (k-\lambda)} = \pm\lambda\end{aligned}$$

und die Matrix  $D_M = \text{diag}(\lambda, -\lambda)$  hat die gewünschte Form.

Im nächsten Schritt muss die rechte Seite der Gleichung (3.23) berechnet werden.

$$\begin{aligned}J &:= S \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_2}{\sigma} \\ \frac{\alpha_1}{\sigma} & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{pmatrix} k+\lambda & -\gamma \\ -\gamma & k+\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_2}{\sigma} \\ \frac{\alpha_1}{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k+\lambda & \gamma \\ \gamma & k+\lambda \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\frac{k+\lambda}{(k+\lambda)^2 - \gamma^2}}_{=\frac{1}{2\lambda}} \begin{pmatrix} \gamma(\frac{\alpha_2}{\sigma} - \frac{\alpha_1}{\sigma}) & \frac{\alpha_2}{\sigma}(k+\lambda) - \frac{\alpha_1}{\sigma}(k-\lambda) \\ \frac{\alpha_1}{\sigma}(k+\lambda) - \frac{\alpha_2}{\sigma}(k-\lambda) & \gamma(\frac{\alpha_1}{\sigma} - \frac{\alpha_2}{\sigma}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Hierzu werden zunächst die eingeführten Abkürzungen ausgewertet:

$$\frac{\alpha_1}{\sigma} = \frac{m+E}{\sqrt{m^2-E^2}} = \sqrt{\frac{m+E}{m-E}}, \quad \frac{\alpha_2}{\sigma} = \frac{m-E}{\sqrt{m^2-E^2}} = \sqrt{\frac{m-E}{m+E}}.$$

Es folgt mit

$$\frac{\alpha_1}{\sigma} - \frac{\alpha_2}{\sigma} = \frac{2E}{\sqrt{m^2-E^2}}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1}{\sigma}(k+\lambda) - \frac{\alpha_2}{\sigma}(k-\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{m^2-E^2}} ((k+\lambda)(m+E) - (k-\lambda)(m-E)) \\ &= 2 \frac{Ek + m\lambda}{\sqrt{m^2-E^2}}\end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\alpha_2}{\sigma}(k + \lambda) - \frac{\alpha_1}{\sigma}(k - \lambda) = 2 \frac{m\lambda - Ek}{\sqrt{m^2 - E^2}}$$

die Matrix

$$J = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} -\frac{\gamma E}{\sqrt{m^2 - E^2}} & \frac{m\lambda - Ek}{\sqrt{m^2 - E^2}} \\ \frac{Ek + m\lambda}{\sqrt{m^2 - E^2}} & \frac{\gamma E}{\sqrt{m^2 - E^2}} \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung (3.23) vereinfacht sich also auf folgende Gleichungen

$$A^+ f(\rho) = \frac{1}{\lambda} \frac{Ek + m\lambda}{\sqrt{m^2 - E^2}} g(\rho) = \frac{E \left( \frac{m}{E} + \frac{k}{\lambda} \right)}{\sqrt{m^2 - E^2}} g(\rho),$$

$$A^- g(\rho) = \frac{1}{\lambda} \frac{m\lambda - Ek}{\sqrt{m^2 - E^2}} f(\rho) = \frac{E \left( \frac{m}{E} - \frac{k}{\lambda} \right)}{\sqrt{m^2 - E^2}} f(\rho),$$

mit den Operatoren

$$A^+ = \left( \frac{d}{d\rho} - \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\tau}{\lambda} \right), \quad A^- = \left( -\frac{d}{d\rho} - \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\tau}{\lambda} \right), \quad \tau = \frac{\gamma E}{\sqrt{m^2 - E^2}}.$$

Des Weiteren kann eine neue Variable  $r = \frac{E}{\sqrt{m^2 - E^2}} \rho$  eingeführt werden. Obige Gleichungen vereinfachen sich dann auf

$$A^+ f(r) = \left[ \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} + \frac{\gamma}{\lambda} \right] f(r) = \left( \frac{m}{E} + \frac{k}{\lambda} \right) g(r), \quad (\text{B.3})$$

$$A^- g(r) = \left[ -\frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} + \frac{\gamma}{\lambda} \right] g(r) = \left( \frac{m}{E} - \frac{k}{\lambda} \right) f(r). \quad (\text{B.4})$$

# Literaturverzeichnis

- [Böh11] M. Böhm. *Lie Gruppen und Lie Algebren in der Physik: Eine Einführung in die Mathematischen Grundlagen*. Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [CKS01] F. Cooper, A. Khare, and U.P. Sukhatme. *Supersymmetry in quantum mechanics*. World Scientific Inc., 2001.
- [Die71] J.A. Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*, volume 5. Springer-Verlag, 1971.
- [Don07] S.H. Dong. *Factorization method in quantum mechanics*, volume 1. Springer, Dordrecht, 2007.
- [Gen83] L.E. Gendenshtein. Derivation of exact spectra of the schrodinger equation by means of supersymmetry. *Jetp Lett*, 38(6), 1983.
- [Hei90] W. Hein. *Struktur-und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*. Springer, New York, 1990.
- [IH51] L. Infeld and T.E. Hull. The factorization method. *Rev.Mod.Phys.*, 23:21–68, 1951.
- [Jun96] G. Junker. *Supersymmetric methods in quantum and statistical physics*. Springer, 1996.
- [Kac98] V.G. Kac. *Vertex algebras for beginners: Victor Kac*, volume 10. Amer. Mathematical Society, 1998.
- [KS97] H. Kalka and G. Soff. *Supersymmetrie*. Teubner, 1997.
- [LL71] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Relativistische Quantentheorie*, volume 4 of *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1971.
- [Mes90] A. Messiah. *Quantenmechanik*, volume 2. Walter de Gruyter, 1990.
- [Nic76] H. Nicolai. Supersymmetry and Spin Systems. *J.Phys.A*, A9:1497–1506, 1976.
- [Ott95] J.T. Ottesen. *Infinite dimensional groups and algebras in quantum physics*, volume 27. Springer, 1995.
- [Pau27] W. Pauli. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 43(9):601–623, 1927.
- [Ram90] Pierre Ramond. *Field theory: a modern primer*. Addison-Wesley, 1990.
- [Rog71] F.J. Rogers. Phase shifts of the static screened coulomb potential. *Physical Review A*, 4(3):1145, 1971.
- [Sch08] F. Schwabl. *Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2008.

*Literaturverzeichnis*

- [Str05] N. Straumann. *Relativistische Quantentheorie*. Springer, 2005.
- [Suk85] C.V. Sukumar. Supersymmetry and the dirac equation for a central coulomb field. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 18:L697, 1985.
- [Tha92] B. Thaller. *The Dirac Equation*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [Wer07] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer Verlag, 2007.
- [Wit81] Edward Witten. Dynamical breaking of supersymmetry. *Nuclear Physics B*, 188(3):513 – 554, 1981.
- [WW80] E.T. Whittaker and G.N. Watson. *A Course of modern Analysis*. Cambridge University Press, 1980.

## **Erklärung des Studierenden**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel

*Die Pauli-Gleichung als nicht-relativistischer Grenzfall der Dirac-Gleichung in der supersymmetrischen Quantenmechanik*

selbstständig verfasst habe, und dass ich keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

---

Münster, 07.02.2012

Ort, Datum

---

Unterschrift