



# Produktion identifizierter Pionen bei Proton-Proton-Kollisionen

Production of identified pions in proton-proton collision

Bachelorarbeit  
von  
Nils Tobias Antary

Erstprüfer: Priv.-Doz. Dr. Karol Kovařík

Zweitprüfer: Prof. Dr. Anna Kulesza

WWU Münster  
Institut für theoretische Physik

- 16. November 2020 -



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Wirkungsquerschnitt . . . . .	1
1.2	Der Aufbau eines Protons . . . . .	2
1.3	Starke Wechselwirkung und das Konzept der Farbe . . . . .	2
1.4	Pionproduktion durch Proton-Proton-Kollision . . . . .	4
1.5	Feynmann-Regeln . . . . .	5
1.6	Spin und Polarisierung der freien Teilchen . . . . .	8
1.7	Stärke der Starken Wechselwirkung . . . . .	9
<b>2</b>	<b>QCD Rechnung</b>	<b>11</b>
2.1	Quark-Antiquark $\rightarrow$ Quark-Antiquark . . . . .	11
2.2	Quark-Quark $\rightarrow$ Quark-Quark . . . . .	19
2.3	Gluon-Gluon $\rightarrow$ Gluon-Gluon . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Kinematik</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>Numerische Auswertung</b>	<b>39</b>
<b>5</b>	<b>Schlussfolgerung und Diskussion</b>	<b>45</b>

# 1 Einleitung

In dieser Arbeit wird der Wirkungsquerschnitt für die Produktion von Pionen bei Proton-Proton-Kollision für verschiedene Pion-Impulse bestimmt. Der Wirkungsquerschnitt ist dabei ein Maß für die Häufigkeit der Pionproduktion. In diesem Kapitel werden die notwendigen Grundlagen zur mathematischen Beschreibung erörtert.

## 1.1 Wirkungsquerschnitt

Der Wirkungsquerschnitt ist ein Maß dafür, wie wahrscheinlich die Streuung eines Teilchenstrahls an einem Ziel ist. Dabei gibt der Wirkungsquerschnitt einer Reaktion an, wie viele Teilchen genau durch diese Reaktion gestreut werden. In vielen Fällen ist die genaue Reaktion nicht relevant und es ist nur von Interesse wie viele der einfallenden Teilchen gestreut werden. Allgemein ist der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  definiert als der Anteil des einfallenden Teilchenstrahls pro Fläche, welcher gestreut wird. Es gilt:

$$N_{\text{aus}} = \sigma \frac{N_{\text{ein}}}{A} \quad (1.1)$$

Dabei ist  $\frac{N_{\text{ein}}}{A}$  die einfallende Teilchenstromdichte,  $\sigma$  der Wirkungsquerschnitt und  $N_{\text{aus}}$  die Anzahl der ausgehenden Teilchen pro Zeit. In diesem Experiment wird keine einfache Streuung untersucht, da die ausgehenden Teilchen erst bei der Reaktion produziert werden. Der Wirkungsquerschnitt lässt sich quantenmechanisch verstehen, als die Übergangswahrscheinlichkeit in einen anderen Zustand. Diese Übergangswahrscheinlichkeit berechnet sich durch das Amplitudenquadrat  $|M|^2$ , welches von dem untersuchten Prozess abhängt. Allgemein gilt:

$$d\sigma = \frac{1}{F} |M|^2 dPS_2 \quad (1.2)$$

Dabei ist  $d\hat{\sigma}$  der differentielle Wirkungsquerschnitt,  $F$  der Flux-Faktor und  $dPS_2$  das Phasenraumdifferential der beiden Teilchen im Endzustand.

Da  $F$  bekannt ist reicht zur Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts die Kenntnis über  $|M|^2$  aus. Bei mehreren beteiligten Prozessen ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt des Prozesses als Summe der Teilprozesse.

## 1.2 Der Aufbau eines Protons

Um zu verstehen, wie es bei der Kollision zweier Protonen zur Produktion von Pionen kommen kann, muss der Aufbau des Protons bekannt sein.

Protonen gehören, wie Pionen, zu den Hadronen. Dies bedeutet, dass beide Teilchen aus Quarks und Gluonen aufgebaut sind. Das Proton beinhaltet drei Valenzquarks. Diese sind zu jeder Zeit im Proton zu finden. Bei den Valenzquarks handelt es sich um zwei up- und ein down-Quark. Außerdem besteht das Proton aus Seequarks, Seeantiquarks und Gluonen. Seequarks und Seeantiquarks sind Quark-Antiquark Paare, die zu jeder Zeit entstehen und wieder vernichtet werden. Die Anzahl der Seequarks ist nicht konstant.

Gluonen sind die Wechselwirkungsteilchen der starken Wechselwirkung. Sie können jederzeit von Quarks abgestrahlt oder absorbiert werden. Außerdem entstehen Gluonen bei der Paarvernichtung von Quark und Antiquark und können, bei ausreichender Energie, auch neue Quark-Antiquark-Paare erzeugen.

## 1.3 Starke Wechselwirkung und das Konzept der Farbe

Zum Verständnis der grundlegenden Prozesse im Proton ist es wichtig die starke Wechselwirkung und das Konzept der Farbe zu kennen. Protonen und Neutronen werden im Atomkern mithilfe der starken Wechselwirkung gebunden. Ebenso werden die up- und down-Quarks innerhalb der Protonen und Neutronen durch die starke Wechselwirkung zusammengehalten.

Die starke Wechselwirkung beschreibt eine attraktive Wechselwirkung zwischen Quarks. Ebenso wie bei der elektromagnetischen Wechselwirkung gibt es eine Ladung, an die die Kräfte koppeln. Bei der elektromagnetischen Wechselwirkung

gibt es zwei Ladungen: positive und negative Ladung. Bei der starken Wechselwirkung hingegen gibt es drei verschiedene Ladungen. Diese werden als Farben oder Farbladungen bezeichnet und entsprechend mit rot, grün und blau benannt. Zusätzlich existiert zu jeder Farbe noch eine sogenannte Antifarbe. Antiquarks besitzen Antifarben, während Quarks Farben besitzen. Die Wechselwirkungen zwischen allen Farben sind attraktiv. Zur Beschreibung der Wechselwirkung werden die Gluonen als Austauscheteilchen eingeführt. Sie besitzen immer eine Farbe und eine Antifarbe und können somit von zwei Quarks ausgetauscht werden.

Emittiert ein rotes Quark ein rot-antiblaues Gluon wird es selbst blau, da so die Farben erhalten bleiben. Trifft das rot-antiblaue Gluon nun ein blaues Quark wird dieses rot.

Insgesamt gibt es neun Kombinationsmöglichkeiten von Farbe und Antifarbe. Nach Gruppentheorie teilen sich diese Kombinationen in einen Oktett-Zustand und einen Singulett-Zustand auf. Der Singulett-Zustand ist eine Kombination aller Farben und zugehöriger Antifarben und somit farblos. Aus diesem Grund kann dieser Zustand nicht als Austauscheteilchen wirken. Somit gibt es acht verschiedene Gluonen. Da die Gluonen selbst Farben tragen kann es auch zu Wechselwirkungen zwischen Gluonen kommen.

Alle freien Teilchen sind nach außen farblos, das bedeutet, dass sie entweder aus einer Kombination von rot, grün und blau bestehen oder aus einer Farbe und der dazugehörigen Antifarbe.

Bei der Berechnung der Amplituden  $M$  sind die Farben von großer Bedeutung, da diese im Anfangszustand und im Endzustand nicht festgelegt sind, muss über alle Farben im Endzustand summiert und im Anfangszustand gemittelt werden. Zur Berechnung der Farbsumme werden die sogenannten Generatoren  $T^a$  sowie die Strukturkonstanten  $f_{abc}$  der  $SU(3)$ -Gruppe eingeführt. Diese Faktoren und zugehörigen Relationen stammen aus der Gruppentheorie für  $N$ -Zählige unitäre Symmetriegruppen ( $SU(N)$ ) [9, 7].

Erst am Ende der Rechnung wird verwendet, dass es sich bei der Farbe um eine  $SU(3)$ -Gruppe handelt, da hier drei verschiedene Farben vorliegen.

Die bei der Berechnung auftretenden Faktoren  $T_{bc}^a$  ergeben sich aus den Generatoren als:

$$T_{bc}^a = \bar{q}_b T^a q_c \quad (1.3)$$

Dabei sind  $q_b$  und  $q_c$  die Farbfelder der beteiligten Quarks. Da die Quarks drei Farben haben können, können  $b$  und  $c$  Werte zwischen 1 und 3 annehmen.  $a$  hingegen stammt von den 8 Gluonen und kann daher Werte zwischen 1 und 8 annehmen.

## 1.4 Pionproduktion durch Proton-Proton-Kollision

Wenn zwei Protonen mit großen Impulsen miteinander kollidieren, kollidieren nicht die gesamten Protonen miteinander, sondern deren Bestandteile, die sogenannten Partonen. Daraus folgt, dass die Stöße, die untersucht werden müssen, die Stöße der Partonen sind.

Wird bei einem Stoß genügend Energie auf ein Parton übertragen, kann dieses das Proton verlassen. Da es sich bei Partonen allerdings um farbige Teilchen handelt, führt das Verlassen eines Partons zu einem Hadronenschauer. Dieser entsteht dadurch, dass die starke Wechselwirkung mit größer werdendem Abstand immer stärker wird, bis die Bindungsenergie ausreicht, um neue Elementarteilchen zu erzeugen. Diese Elementarteilchen bilden neue farblosen Hadronen. Eine Teilchenart, die dabei gebildet wird, sind Pionen. Pionen sind die leichtesten Mesonen. Mesonen sind Hadronen, die aus einem Quark und einem Antiquark bestehen. Pionen bestehen nur aus den leichtesten Quarks: up- und down-Quark sowie deren Antiteilchen. Je nach Zusammensetzung ergibt sich eine Ladung, die der positiven oder negativen Elementarladung entspricht oder ein ungeladenes Teilchen. Aus der qualitativen Beschreibung der Pionproduktion ergibt sich auch das mathematische Vorgehen.

In einem ersten Schritt wird das Problem auf der Ebene der Partonen gelöst. Dazu werden alle möglichen Stöße bestimmt und die Streuamplituden ermittelt. Die Streuamplituden werden mithilfe der Feynman-Regeln berechnet. Anschließend wird mithilfe der *Protonendichtefunktionen* bestimmt mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Parton mit welcher Energie, im Anfangszustand, vorliegt. Abschließend kann mit der *Fragmentationsfunktion* ermittelt werden mit welcher Wahrscheinlichkeit ein ausgesandtes Parton eine Pionproduktion zur Folge hat.

## 1.5 Feynmann-Regeln

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts wird die Feynmanamplitude aller beteiligter Prozesse benötigt. Dazu werden folgende Prozesse ausgewertet:

$$\begin{aligned} \text{Quark} + \text{Quark} &\rightarrow \text{Quark} + \text{Quark} \\ \text{Quark} + \text{Antiquark} &\rightarrow \text{Quark} + \text{Antiquark} \\ \text{Gluon} + \text{Gluon} &\rightarrow \text{Gluon} + \text{Gluon} \\ \text{Gluon} + \text{Quark/Antiquark} &\rightarrow \text{Gluon} + \text{Quark/Antiquark} \\ \text{Gluon} + \text{Gluon} &\rightarrow \text{Quark} + \text{Antiquark} \\ \text{Quark} + \text{Antiquark} &\rightarrow \text{Gluon} + \text{Gluon} \end{aligned}$$

Die Feynmanamplituden der ersten drei Prozesse werden in dieser Arbeit explizit bestimmt. Die anderen werden aus Mangano [11] übernommen.

Zur Berechnung der Feynmanamplitude werden die Feynmanregeln verwendet. Die Feynmanregeln folgen aus einer Störungstheorierechnung der partonischen Prozesse und bilden Rechenregeln zur Bestimmung von Amplituden von Feynmandiagrammen. Die verwendeten Regeln sowie die zugehörigen Diagramme werden innerhalb der Rechnung genauer erläutert. Da es sich bei der Rechnung um eine Störungstheorierechnung handelt, muss die Störung klein genug sein, damit die höheren Ordnungen Störungsrechnung ausreichend schnell gegen Null gehen. Der Beitrag einer Ordnung ist proportional zur Stärke der starken Wechselwirkung potenziert mit der Ordnung. Da die starke Wechselwirkung bei großen Abständen zunimmt, kann diese Näherung nur für kleine Abstände gemacht werden, welche nur bei großen Stoßenergien erreicht werden.

Die Feynmanregeln lassen sich aus der Lagrangedichte der Quantenchromodynamik herleiten. Für die Lagrangefunktion gilt allgemein:

$$L = T - V \tag{1.4}$$

Wobei  $T$  für die kinetische Energie und  $V$  für die potenzielle Energie steht.



Ähnliches gilt für die Lagrangedichte. Somit ergibt sich die Lagrangedichte eines freien Quarks nur aus seiner kinetischen Energie. Diese lässt sich mithilfe der Dirac-Gleichung bestimmen. Somit ergibt sich für die Lagrangedichte eines freien Quarks:

$$\mathcal{L} = \bar{q}_j(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q_j \quad (1.5)$$

Der Index  $j$  deutet an, dass das Quark in drei verschiedenen Farben vorliegen kann. Man spricht bei  $q_j$  daher auch vom Farbfeld.

Da die Physik allerdings nicht von der spezifischen Farbe abhängen soll, muss eine Änderung der Farbe die Lagrangedichte unverändert lassen. Die Veränderung der Farbe lässt sich mathematisch als eine Transformation in der Farb-SU(3)-Gruppe darstellen und stellt eine lokale Eichtransformation da. Es gilt:

$$q(x) \rightarrow Uq(x) = e^{i\alpha_a(x)T_a}q(x) \quad (1.6)$$

Dabei ist  $U$  der Symmetrieoperator und daher unitär. Er lässt sich als 3x3 Matrix darstellen.  $T_a$  mit  $a = 1 - 8$  sind 8 linear unabhängige 3x3 Matrizen. Sie sind die Generatoren der SU(3)-Gruppe, eine mögliche Darstellung der  $T_a$ -Matrizen bieten die Gellmann-Matrizen  $\lambda_a$ , dabei gilt:

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2} \quad (1.7)$$

Die Farb-SU(3)-Gruppe ist eine nicht abelsche Gruppe, da gilt:

$$[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a = if_{abc} T_c \quad (1.8)$$

$f_{abc}$  wird als Strukturfaktor bezeichnet und ist eine reale Größe, welche antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes ist.

Wichtig ist außerdem das die Transformation selbst vom Ort abhängt, man spricht daher von einer lokalen Transformation.

Falls die Lagrangedichte unter Anwendung der Transformation erhalten bleibt, muss sie auch unter Anwendung einer infinitesimalen Transformation erhalten bleiben. Diese lässt sich darstellen als:

$$U = 1 + i\alpha_a(x)T_a \quad (1.9)$$

Da die Ableitung in der Lagrangedichte auf die Transformation wirkt, ist die oben definierte Lagrangedichte nicht invariant unter dieser Transformation. Allerdings kann diese so erweitert werden, dass sie invariant ist. Hierzu wird ein neues Feld, das Gluonfeld eingeführt. Dies transformiert unter der lokalen Eichtransformation auf folgende Weise:

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a - f_{abc} \alpha_b G_\mu^c \quad (1.10)$$

Mithilfe des Gluonfelds lässt sich die invariante Lagrangedichte der Quantenchromodynamik schreiben als:

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma^\mu T_a q)G_\mu^a - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (1.11)$$

mit

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\nu G_\mu^a - \partial_\mu G_\nu^a - gf_{abc}G_\mu^b G_\nu^c \quad (1.12)$$

Wobei  $G_\mu^a$  als Gluonfeld bezeichnet wird. Mit dieser Interpretation von  $G_\mu^a$  und  $q$  interpretiert als Quark lassen sich in der Lagrangedichte folgende Kopplungen feststellen:

1. Eine Kopplung zwischen Antiquark und Quark. Dies kann als ein propagierendes Quark interpretiert werden.
2. Eine Kopplung zwischen zwei Gluonfeldern. Dies kann als propagierendes Gluon interpretiert werden.
3. Eine Kopplung zwischen Antiquark, Quark und einem Gluon. Dies kann als ein Übergang von zum Beispiel Quark, Antiquark zu Gluon oder umgekehrt interpretiert werden. Dieser Prozess ist mit dem Faktor  $g$  gewichtet. Dieser taucht, wie später zu sehen, in der entsprechenden Feynmanregel auf.
4. Eine Kopplung zwischen drei Gluonen. Dies ist die Gluon-Gluon Wechselwirkung. Diese geht ebenfalls mit  $g$  ein.
5. Und eine Kopplung zwischen vier Gluonen. Diese geht mit  $g^2$  ein.

## 1.6 Spin und Polarisation der freien Teilchen

Da bei experimentellen Messdaten keine Differenzierung nach der Polarisation oder dem Spin möglich ist, muss das theoretische Ergebnis entsprechend gemittelt werden.

Da es sich bei Quarks und Antiquarks um Fermionen mit Spin  $1/2$  handelt, gibt es für jedes Quark zwei mögliche Spin-Stellungen. Die Summation über alle möglichen Spin-Stellungen findet in der Rechnung statt. Die Mittelung über die Ausgangsspins muss im Anschluss vorgenommen werden. Da es im Startzustand zwei Spin- $1/2$ -Teilchen gibt muss das Ergebnis der Summation durch den Faktor vier geteilt werden.

Bei Gluonen handelt es sich um Vektorteilchen mit Spin 1. Daraus folgen drei verschiedene Stellungen im Raum, welche als Polarisation bezeichnet werden. Da es sich bei Gluonen allerdings um masselose Teilchen handelt, besitzen diese, genau wie Photonen, keine Polarisierung in Bewegungsrichtung.

Zur Berechnung wird die Summation über die Polarisation umgeschrieben. Dies geschieht hier anhand des eingehenden Teilchens mit Impuls  $k$ . Dabei wird die Impulsrichtung entlang der  $z$ -Achse gesetzt. Für ein masseloses Teilchen gilt dann:

$$k = \begin{pmatrix} k_0 \\ 0 \\ 0 \\ k_0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Die Polarisationsvektoren müssen so gewählt werden, dass sie zum Teilchenimpuls, sowie zueinander orthogonal sind. Außerdem müssen sie normiert sein. Eine mögliche Wahl ist:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Da hier gilt:

$$\epsilon_1 \epsilon_1^* = \epsilon_2 \epsilon_2^* = -1 \quad \epsilon_1 \epsilon_2^* = 0 \quad (1.15)$$

Bei Berechnung des Amplitudenquadrats tritt somit folgende Summe auf:

$$\sum_{i=1,2} \epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Dies kann umgeschrieben werden zu:

$$\sum_{i=1,2} \epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu = -g_{\mu\nu} + \frac{k^\mu \bar{k}^\nu + k^\nu \bar{k}^\mu}{k \cdot \bar{k}} \quad (1.17)$$

Dabei wird  $\bar{k}$  folgendermaßen gewählt:

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} k_0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Aufgrund der Eichinvarianz kann  $\bar{k}$  auch anders gewählt werden. Es muss allerdings immer gelten, dass  $\bar{k} \cdot k \neq 0$ .

## 1.7 Stärke der Starke Wechselwirkung

Wie bereits im Abschnitt 1.4 beschrieben, wächst die Stärke der starken Wechselwirkung mit steigendem Abstand. Da die minimale Entfernung zweier Partonen bei der Proton-Proton-Kollision direkt von der Energie abhängt, kann man die Stärke auch in Abhängigkeit der Kollisionsenergie angeben. Dabei ergibt sich in erster Näherung [5]:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (1.19)$$

Mit:

$$\Lambda^2 = \mu^2 e^{-\frac{4\pi}{\beta_0 \alpha_s(\mu^2)}} \quad (1.20)$$

Und:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f \quad (1.21)$$

Dabei ist  $n_f$  die Anzahl der Quarksorten, welche in diesem Energiebereich an der Wechselwirkung beteiligt sind. In dieser Rechnung wird von  $n_f = 5$  ausgegangen. Außerdem hängt  $\alpha_s$  von  $\mu^2$  und  $\alpha_s(\mu^2)$  ab. Dabei handelt es sich um Referenzwerte, die bereits experimentell bestimmt wurden. Die hier verwendeten Werte sind [4]:

$$\begin{aligned}\mu &= m_z = 91,18 \text{ GeV} \\ \alpha_s(\mu^2) &= \alpha_s(m_z^2) = 0,1181\end{aligned}\tag{1.22}$$

Der Verlauf von  $\alpha_s$  ist in Abb. 1.1 abgebildet.

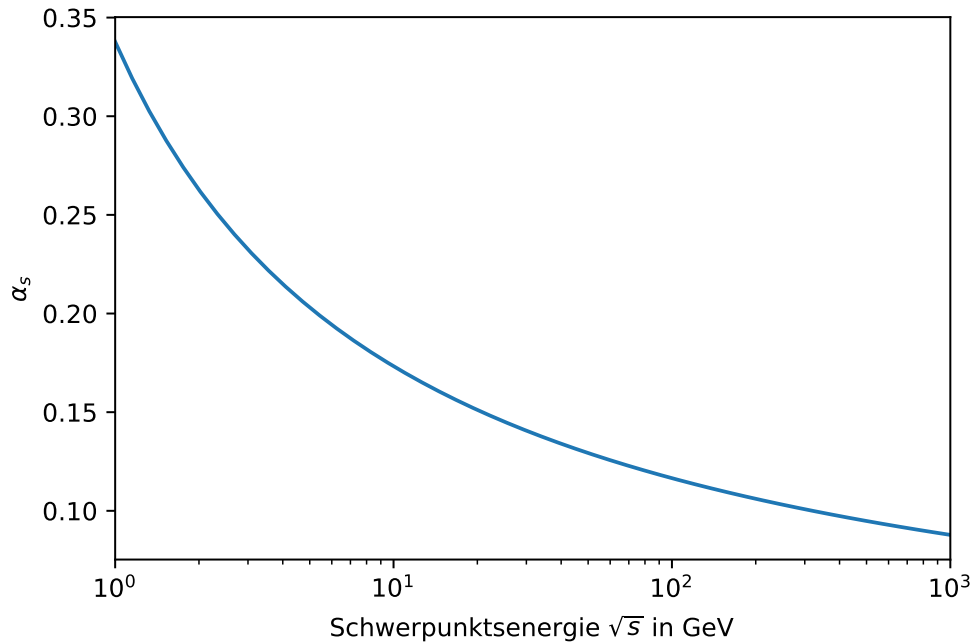


Abbildung 1.1: Stärke der starken Wechselwirkung in Abhängigkeit des Schwerpunktsenergie

In den Feynman-Regeln tritt anstelle von  $\alpha_s$  die Ladung der starken Wechselwirkung  $g$  auf. Definitionsgemäß gilt:

$$g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s}\tag{1.23}$$

## 2 QCD Rechnung

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts der Pionproduktion werden die Amplitudenquadrate der beteiligten Prozesse benötigt. Es gilt:

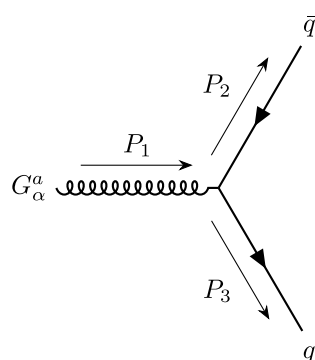
$$d\hat{\sigma} = \frac{1}{F} |M^2| dPS_2 \quad (2.1)$$

Und sich der gesamte differentielle Wirkungsquerschnitt aus den Wirkungsquerschnitten der einzelnen Prozesse zusammensetzt (vgl. Kapitel 3).

Im Folgenden werden Quarks in Abbildungen und in der Prozessbenennung als  $q$  und Antiquarks als  $q^*$  bezeichnet. Gluonen werden mit  $G$  abgekürzt.

### 2.1 Quark-Antiquark $\rightarrow$ Quark-Antiquark

Das erste Amplitudenquadrat, welches bestimmt wird, gehört zu dem Prozess  $qq^* \rightarrow qq^*$ . Zur Berechnung der Amplitude wird nur eine Art von Vertex und ein Propagator benötigt. Mit Vertex wird eine Stelle in einem Feynmandiagramm bezeichnet an welcher mindestens drei Teilchen aneinander koppeln. Der hier relevante Vertex ist der Vertex, welcher ein Gluon mit zwei Quarks oder Antiquarks oder einem Quark und einem Antiquark verbindet. Die Feynmanregel ist folgende:



$$= -ig_s T_{bc}^a \gamma_\alpha \quad (2.2)$$

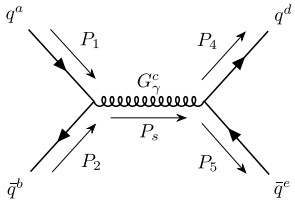
Neben den Vertices werden zusätzlich Regeln für die Verbindungsstücke zwischen den Vertices benötigt. Diese werden als Propagatoren bezeichnet. In diesem Fall wird nur der Gluon Propagator benötigt für diesen gilt:

$$\frac{\text{wavy line with } G_\gamma^c \text{ above}}{P} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{P^2} \quad (2.3)$$

Für ein- und ausgehende Teilchen werden sogenannte Vierer-Spinoren verwendet. Dabei handelt es sich um vierdimensionale Vektoren, welche zur Charakterisierung freier Teilchen verwendet werden. Dabei unterscheidet man in

$$\begin{aligned} u(P) &\text{ für Quark} \\ v(P) &\text{ für Antiquark} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Insgesamt ergibt sich somit für die Amplitude des im Feynmandiagramm dargestellten Prozesses:



$$\begin{aligned} M &= \bar{v}(P_2)ig_sT_{ba}^c\gamma^\mu u(P_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{P_s^2}\bar{u}(P_4)ig_sT_{de}^c\gamma^\nu v(P_5) \\ &= T_{ba}^cT_{de}^c\bar{v}(P_2)ig_s\gamma^\mu u(P_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{P_s^2}\bar{u}(P_4)ig_s\gamma^\nu v(P_5) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Wie in der Gleichung zu sehen ist, werden die Formeln der Vertices jeweils von den Vierer-Spinoren der äußeren Teilchen eingerahmt wobei der erste Spinor zusätzlich transponiert und mit  $\gamma^0$  multipliziert wird. Es gilt:  $\bar{v} = v^t\gamma^0$ . Die so erhaltenen Terme werden mit dem Propagator multipliziert.

Zur Berechnung des Amplitudenquadrats wird dieser Term in vier Faktoren aufgeteilt. Der erste Faktor wird Farbfaktor genannt und lässt sich von den anderen Termen unabhängig bestimmen. Es gilt:

$$M = M_{Farbe}M_{Impuls} \quad (2.6)$$

$$\text{mit} \quad (2.7)$$

$$M_{Farbe} = T_{ba}^cT_{de}^c \quad (2.8)$$

Der restliche Term wird als Impulsamplitude bezeichnet. Dieser wird zur Vereinfachung der Rechnung in drei Terme aufgeteilt: den Term für den ersten Vertex, den Propagator und den Term für den zweiten Vertex.

$$M_{Impuls} = M_I M_{II} M_{III} \quad (2.9)$$

$$M_I = \bar{v}(P_2) i g_s \gamma^\mu u(P_1) \quad (2.10)$$

$$M_{II} = \frac{-i g_{\mu\nu}}{P_s^2} \quad (2.11)$$

$$M_{III} = \bar{u}(P_4) i g_s \gamma^\nu v(P_5) \quad (2.12)$$

Bei der Berechnung von  $|M|^2$  führt  $M_I$  auf folgenden Term:

$$Tr[\bar{v}(P_2) i g_s \gamma^\mu u(P_1) \bar{u}(P_1) (-i g_s) \gamma^\alpha v(P_2)] \quad (2.13)$$

$$= Tr[g_s^2 \gamma^\mu u(P_1) \bar{u}(P_1) \gamma^\alpha v(P_2) \bar{v}(P_2)] \quad (2.14)$$

Mit [7]:

$$\sum_s u(P) \bar{u}(P) = \gamma^\rho P_\rho \quad (2.15)$$

$$\sum_s v(P) \bar{v}(P) = \gamma^\sigma P_\sigma \quad (2.16)$$

Ergibt sich:

$$Tr[g_s^2 \gamma^\mu \gamma^\rho P_{1,\rho} \gamma^\alpha \gamma^\sigma P_{2,\sigma}] \quad (2.17)$$

$$= g_s^2 P_{1,\rho} P_{2,\sigma} Tr[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\sigma] \quad (2.18)$$

$$= g_s^2 P_{1,\rho} P_{2,\sigma} 4 (g_{\mu\rho} g_{\alpha\sigma} - g_{\mu\alpha} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\alpha}) \quad (2.19)$$

$$= 4 g_s^2 (P_1^\mu P_2^\alpha - P_1^\sigma P_{2,\sigma} g_{\mu\alpha} + P_1^\alpha P_2^\mu) \quad (2.20)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass gilt [7]:

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\sigma] = g_{\mu\rho} g_{\alpha\sigma} - g_{\mu\alpha} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\alpha} \quad (2.21)$$



Für  $M_{III}$  ergibt sich auf gleiche Weise:

$$\text{Tr}[\bar{u}(P_4)ig_s\gamma^\nu v(P_5)\bar{v}(P_5)(-ig_s)\gamma^\beta u(P_4)] \quad (2.22)$$

$$=4g_s^2 \left( P_5^\nu P_4^\beta - P_5^\sigma P_{4,\sigma} g_{\nu\beta} + P_5^\beta P_4^\nu \right) \quad (2.23)$$

Für  $M_{II}$  ergibt sich durch Bildung des Betragsquadrats:

$$|M_{II}|^2 = \frac{g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}}{s^2} \quad (2.24)$$

Insgesamt ergibt sich, wenn man über alle vier Anfangsspinzustände mittelt:

$$\begin{aligned} & \overline{|M_{Impuls}|^2} \\ &= \frac{4g_s^4}{s^2} \left( (P_1^\mu P_2^\alpha - P_1^\sigma P_{2,\sigma} g_{\mu\alpha} + P_1^\alpha P_2^\mu) g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \left( P_5^\nu P_4^\beta - P_5^\rho P_{4,\rho} g_{\nu\beta} + P_5^\beta P_4^\nu \right) \right) \\ &= \frac{4g_s^4}{s^2} \left( P_1^\mu P_{5,\mu} P_2^\alpha P_{4,\alpha} - P_1^\mu P_{2,\mu} P_5^\rho P_{4,\rho} + P_1^\mu P_{4,\mu} P_2^\alpha P_{5,\alpha} \right. \\ &\quad - P_1^\sigma P_{2,\sigma} P_5^\alpha P_{4,\alpha} + 4P_1^\sigma P_{2,\sigma} P_5^\rho P_{4,\rho} - P_1^\sigma P_{2,\sigma} P_5^\alpha P_{4,\alpha} \\ &\quad \left. + P_1^\mu P_{4,\mu} P_2^\alpha P_{5,\alpha} - P_1^\mu P_{2,\mu} P_5^\rho P_{4,\rho} + P_1^\mu P_{5,\mu} P_2^\alpha P_{4,\alpha} \right) \\ &= \frac{8g_s^4}{s^2} \left( P_1^\mu P_{5,\mu} P_2^\alpha P_{4,\alpha} + P_1^\mu P_{4,\mu} P_2^\alpha P_{5,\alpha} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Für große Energien kann dies in die vereinfachten Mandelstammvariablen umgeschrieben werden. Dabei gilt:

$$s = \frac{1}{2}P_1P_2 = \frac{1}{2}P_4P_5 \quad (2.26)$$

$$t = -\frac{1}{2}P_1P_4 = -\frac{1}{2}P_2P_5 \quad (2.27)$$

$$u = -\frac{1}{2}P_1P_5 = -\frac{1}{2}P_2P_4 \quad (2.28)$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\overline{|M_{Impuls}|^2} = \frac{2g_s^4}{s^2} (u^2 + t^2) \quad (2.29)$$

Im nächsten Schritt wird der Farbfaktor bestimmt:

$$|M_{Farbe}|^2 = T_{ba}^c T_{de}^c T_{ba}^k T_{de}^k \quad (2.30)$$

Dazu wird folgende Relation verwendet:

$$T_{ba}^c T_{de}^c = \frac{1}{2} \left( \delta_{b,e} \delta_{a,d} - \frac{1}{N} \delta_{b,a} \delta_{d,e} \right) \quad (2.31)$$

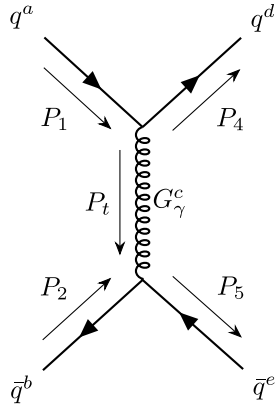
Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned} |M_{Farbe}|^2 &= \frac{1}{4} \left( \delta_{b,e} \delta_{a,d} - \frac{1}{N} \delta_{b,a} \delta_{d,e} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \delta_{b,e} \delta_{b,e} \delta_{a,d} \delta_{a,d} - \frac{2}{N} \delta_{b,e} \delta_{a,d} \delta_{b,a} \delta_{d,e} + \frac{1}{N^2} \delta_{b,a} \delta_{b,a} \delta_{d,e} \delta_{d,e} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( N^2 - \frac{2}{N} N + \frac{1}{N^2} N^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} (N^2 - 1) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Wird zusätzlich über alle  $N^2$  Startfarbenkombinationen gemittelt ergibt sich insgesamt für den s-Kanal:

$$\overline{|M|}^2 = \frac{1}{4} \frac{N^2 - 1}{N^2} \frac{2g_s^4}{s^2} (u^2 + t^2) \quad (2.33)$$

Diese Rechnungen lassen sich auf den t-Kanal übertragen.



$$M = T_{da}^c T_{be}^c \bar{v}(P_2) i g_s \gamma^\mu v(P_5) \frac{-i g_{\mu\nu}}{P_t^2} \bar{u}(P_4) i g_s \gamma^\nu v(P_1)$$

$$(2.34)$$

Beim Übergang von s zu t-Kanal müssen also folgende Ersetzungen gemacht werden:

$$P_1 \leftrightarrow -P_5 \quad (2.35)$$

Daraus folgt für die Mandelstamm Variablen:

$$s = (P_1 + P_2)^2 \leftrightarrow (P_2 - P_5)^2 = t \quad (2.36)$$

$$u = (P_1 - P_5)^2 \leftrightarrow (-P_5 + P_1)^2 = s \quad (2.37)$$

Die Farbfaktorrechnung verläuft völlig äquivalent zur oberen Rechnung es ergibt sich also insgesamt für den t-Kanal:

$$|\overline{M}|^2 = \frac{1}{4} \frac{N^2 - 1}{N^2} \frac{2g_s^4}{t^2} (u^2 + s^2) \quad (2.38)$$

Für Prozesse, bei denen beide Kanäle möglich sind, muss zusätzlich der Mischterm bestimmt werden. Dabei ergibt sich für den Impulsanteil:

$$\begin{aligned} M_{s-Kanal} M_{t-Kanal}^\dagger &= \bar{v}(P_2) i g_s \gamma^\mu u(P_1) \frac{-i g_{\mu\nu}}{P_s^2} \bar{u}(P_4) i g_s \gamma^\nu v(P_5) \\ &\quad \cdot \bar{v}(P_5) (-i g_s) \gamma^\alpha v(P_2) \frac{i g_{\alpha\beta}}{P_t^2} \bar{u}(P_1) (-i g_s) \gamma^\beta v(P_4) \\ &= \bar{v}(P_2) i g_s \gamma^\mu u(P_1) \bar{u}(P_1) (-i g_s) \gamma^\beta v(P_4) \\ &\quad \cdot \bar{u}(P_4) i g_s \gamma^\nu v(P_5) \bar{v}(P_5) (-i g_s) \gamma^\alpha v(P_2) \frac{g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}}{P_s^2 \cdot P_t^2} \\ &= \frac{g_s^4}{P_s^2 \cdot P_t^2} \text{Tr}[\gamma^\sigma P_{2,\sigma} \gamma^\mu \gamma^\gamma P_{1,\gamma} \gamma_\alpha \gamma^\xi P_{4,\xi} \gamma_\mu \gamma^w P_{5,\omega} \gamma^\alpha] \\ &= \frac{g_s^4}{P_s^2 \cdot P_t^2} P_{2,\sigma} P_{1,\gamma} P_{4,\xi} P_{5,\omega} \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma_\alpha \gamma^\xi \gamma_\mu \gamma^w \gamma^\alpha] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Um dies auszuwerten, müssen die  $\gamma$ -Matrizen vertauscht werden, bis zwei gleiche  $\gamma$ -Matrizen nebeneinander stehen und vernichtet werden können. Diese Relation und die Vertauschungsrelation lauten wie folgt:

$$\gamma^\alpha \gamma_\alpha = 4 \quad (2.40)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad (2.41)$$

In einem ersten Schritt wird nur ein Teil betrachtet und umgeformt:

$$\begin{aligned}
& \gamma_\alpha \gamma^\xi \gamma_\mu \gamma^w \gamma^\alpha \\
&= (2g_\alpha^\xi - \gamma^\xi \gamma_\alpha) \gamma_\mu (g^{w\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^w) \\
&= 4\gamma_\mu g^{w\xi} - 2\gamma_\mu \gamma^\xi \gamma^w - 2\gamma^\xi \gamma^w \gamma_\mu + \gamma^\xi \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^w \\
&= 4\gamma_\mu g^{w\xi} - 2\gamma_\mu (2g^{\xi w} - \gamma^w \gamma^\xi) - 2\gamma^\xi (2g_\mu^w - \gamma_\mu \gamma^w) + \gamma^\xi (2g_{\alpha\mu} - \gamma_\mu \gamma_\alpha) \gamma^\alpha \gamma^w \\
&= 2\gamma_\mu \gamma^w \gamma^\xi - 4\gamma^\xi g_\mu^w + 2\gamma^\xi \gamma_\mu \gamma^w + 2\gamma^\xi \gamma_\mu \gamma^w - 4\gamma^\xi \gamma_\mu \gamma^w \\
&= 2(2g_\mu^w - \gamma^w \gamma_\mu) \gamma^\xi - 4\gamma^\xi g_\mu^w \\
&= -2\gamma^w \gamma_\mu \gamma^\xi
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Dieses Ergebnis kann nun in Gleichung (2.39) eingesetzt werden:

$$-2 \frac{g_s^4}{P_s^2 \cdot P_t^2} P_{2,\sigma} P_{1,\gamma} P_{4,\xi} P_{5,\omega} \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma^w \gamma_\mu \gamma^\xi] \tag{2.43}$$

Nun wird folgender Teil betrachtet.

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma^w \gamma_\mu &= (2g^{\mu\gamma} - \gamma^\gamma \gamma^\mu) (2g_\mu^w - \gamma_\mu \gamma^w) \\
&= 4g^{\gamma w} - 2\gamma^\gamma \gamma^w - 2\gamma^\gamma \gamma^w + 4\gamma^\gamma \gamma^w \\
&= 4g^{\gamma w}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Wird dies nun in Gleichung (2.43) eingesetzt erhält man:

$$\begin{aligned}
& -8 \frac{g_s^4}{P_s^2 \cdot P_t^2} g^{\gamma w} P_{2,\sigma} P_{1,\gamma} P_{4,\xi} P_{5,\omega} \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\xi] \\
&= -32 \frac{g_s^4}{P_s^2 \cdot P_t^2} g^{\gamma w} P_{2,\sigma} P_{1,\gamma} P_{4,\xi} P_{5,\omega} g^{\sigma\xi} \\
&= -32 \frac{g_s^4}{P_s^2 \cdot P_t^2} P_2^\xi P_{4,\xi} P_1^\omega P_{5,\omega}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Durch Einsetzen der Mandelstammvariablen und Mittelung über die vier Anfangsspinzustände erhält man:

$$M_{s\text{-Kanal}} M_{t\text{-Kanal}}^\dagger = 2g_s^4 \frac{u^2}{t \cdot s} \tag{2.46}$$

Und für die Farbe

$$T_{ba}^c T_{de}^c T_{da}^k T_{be}^k = \frac{1}{4} \left( \delta_{b,e} \delta_{a,d} - \frac{1}{N} \delta_{b,a} \delta_{d,e} \right) \left( \delta_{d,e} \delta_{a,b} - \frac{1}{N} \delta_{d,a} \delta_{b,e} \right) \quad (2.47)$$

$$= \frac{1}{4} \left( \delta_{b,e} \delta_{a,d} \delta_{d,e} \delta_{a,b} - \frac{1}{N} \delta_{b,a} \delta_{d,e} \delta_{d,e} \delta_{a,b} \right. \quad (2.48)$$

$$\left. - \frac{1}{N} \delta_{b,e} \delta_{a,d} \delta_{d,a} \delta_{b,e} + \frac{1}{N^2} \delta_{b,a} \delta_{d,e} \delta_{d,a} \delta_{b,e} \right) \quad (2.49)$$

$$= N - \frac{1}{N} N^2 - \frac{1}{N} N^2 + \frac{1}{N^2} N \quad (2.50)$$

$$= \frac{1}{4} \left( -N + \frac{1}{N} \right) \quad (2.51)$$

$$= -\frac{1}{4N} (N^2 - 1) \quad (2.52)$$

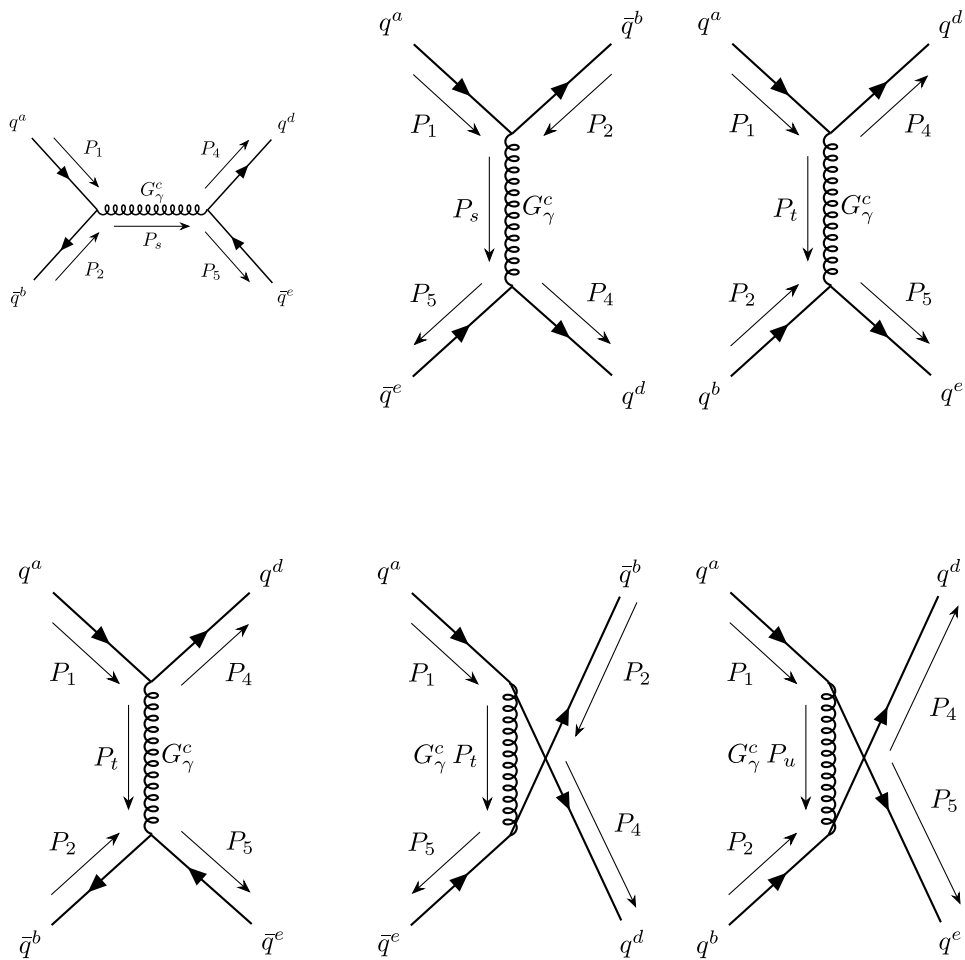
Insgesamt ergibt sich somit für Prozesse mit s- und t-Kanal:

$$\overline{|M|}^2 = \frac{1}{4} \frac{N^2 - 1}{N^2} \frac{2g_s^4}{s^2} (u^2 + t^2) + \frac{1}{4} \frac{N^2 - 1}{N^2} \frac{2g_s^4}{t^2} (u^2 + s^2) + \frac{N^2 - 1}{2N^3} \frac{2g_s^4}{ts} u^2 \quad (2.53)$$

$$= \frac{(N^2 - 1)g_s^4}{2N^2} \left( \frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{u^2 + s^2}{t^2} + \frac{2}{N} \frac{u^2}{ts} \right) \quad (2.54)$$

## 2.2 Quark-Quark $\rightarrow$ Quark-Quark

Zur Bestimmung des Amplitudenquadrats des Prozesses  $qq \rightarrow qq$  kann der Prozess  $qq^* \rightarrow qq^*$  betrachtet werden. Durch Umsortieren der Impulse können die Feynmandiagramme ineinander überführt werden. In der folgenden Abbildung ist dies ersichtlich. Dabei ist das erste abgebildete Diagramm jeder Zeile das bekannte Feynmandiagramm aus dem Prozess  $qq^* \rightarrow qq^*$ . Das mittlere Bild zeigt das umsorierte Diagramm. Dieses wird mit dem letzten Bild der Zeile, dem Diagramm des Prozesses  $qq \rightarrow qq$  verglichen.



Durch Vergleich der Diagramme können in beiden Zeilen folgende Ersetzungen gefunden werden:

$$P_5 \rightarrow -P_2 \quad (2.55)$$

$$P_4 \rightarrow P_5 \quad (2.56)$$

$$P_2 \rightarrow -P_4 \quad (2.57)$$

Daraus folgt für die Mandelstammvariablen:

$$s = (P_1 + P_2)^2 \rightarrow (P_1 - P_4)^2 = t \quad (2.58)$$

$$t = (P_1 - P_4)^2 \rightarrow (P_1 - P_5)^2 = u \quad (2.59)$$

$$u = (P_1 - P_5)^2 \rightarrow (P_1 + P_2)^2 = s \quad (2.60)$$

Daraus folgt für Prozesse nur mit t-Kanal:

$$|\overline{M}|^2 = \frac{(N^2 - 1)g_s^4}{2N^2} \left( \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right) \quad (2.61)$$

Und für Prozesse nur mit u-Kanal:

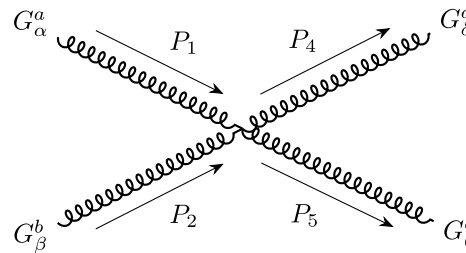
$$|\overline{M}|^2 = \frac{(N^2 - 1)g_s^4}{2N^2} \left( \frac{s^2 + t^2}{u^2} \right) \quad (2.62)$$

Insgesamt ergibt sich also für Prozesse mit t- und u-Kanal:

$$|\overline{M}|^2 = \frac{(N^2 - 1)g_s^4}{2N^2} \left( \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} + \frac{2}{N} \frac{s^2}{ut} \right) \quad (2.63)$$

## 2.3 Gluon-Gluon $\rightarrow$ Gluon-Gluon

Zur Berechnung der Amplitude des Prozesses  $GG \rightarrow GG$ , müssen in einem ersten Schritt alle möglichen Feynmandiagramme gefunden werden. Diese sind im Folgenden dargestellt. Der einfachste Fall ist der vier Gluonen Vertex:



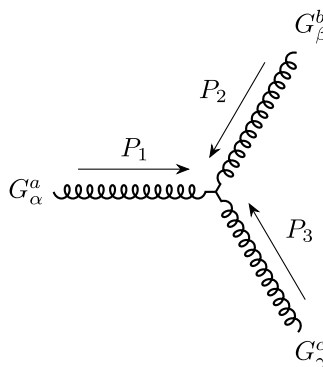
$$(2.64)$$

Hierbei ergibt sich die Amplitude direkt zu:

$$\begin{aligned}
 M = & -ig_s^2 \left( (f^{bdk} f^{eak} - f^{bak} f^{dek}) g_{\beta\theta} g_{\delta\alpha} \right. \\
 & + (f^{bek} f^{dak} - f^{bak} f^{edk}) g_{\beta\delta} g_{\theta\alpha} \\
 & \left. + (f^{bdk} f^{aek} - f^{bek} f^{dak}) g_{\beta\alpha} g_{\delta\theta} \right) \\
 & \cdot \epsilon^\alpha \epsilon^\beta \epsilon^{\delta*} \epsilon^{\theta*}
 \end{aligned}
 \tag{2.65}$$

Dabei beschreiben die ersten drei Zeilen den Vertex selbst, während die Letzte die vier freien Gluonen beschreibt.

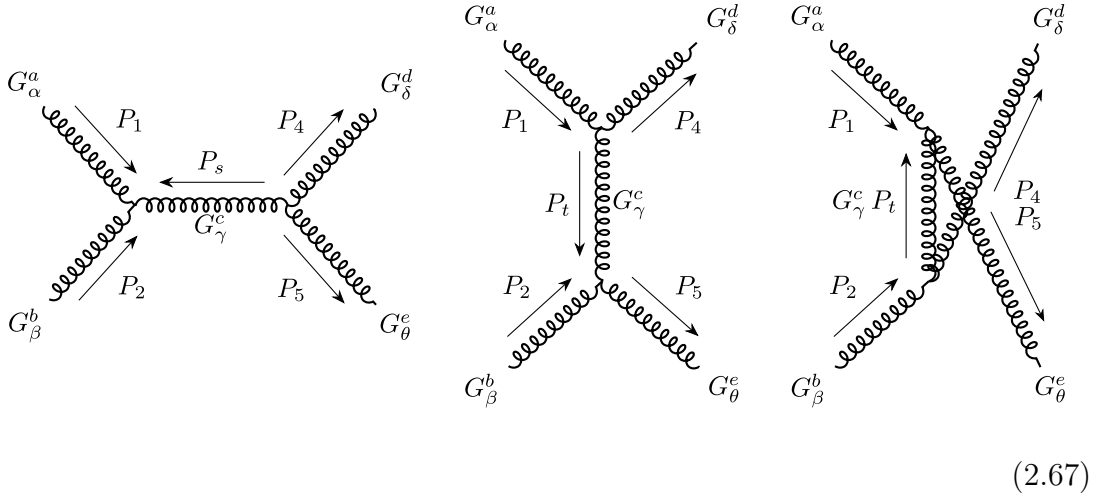
Neben dem Vierervertex gibt es noch die Möglichkeit zwei Dreiervertices zu verbinden. In der folgenden Abbildung ist ein Dreiervertex mit zugehöriger Feynmannregel dargestellt:



$$\begin{aligned}
 M = & -g_s f^{abc} (g_{\alpha\beta} (P_1 - P_2)_\gamma \\
 & + g_{\beta\gamma} (P_2 - P_3)_\alpha \\
 & + g_{\gamma\alpha} (P_3 - P_1)_\beta)
 \end{aligned}
 \tag{2.66}$$



Die Dreiervertices können auf drei verschiedene Arten verbunden werden. Die drei Möglichkeiten (s-, t- und u-Kanal) sind in folgender Abbildung zu finden:



Die Amplitude dieser Diagramme baut sich aus drei Bestandteilen auf: den freien Gluonen, den beiden Vertices sowie dem Propagator zwischen den beiden Vertices. Dabei ist die Richtung der Viererimpulse zu beachten, zeigt ein Impuls aus dem Vertex hinaus muss er mit einem Minuszeichen versehen werden. Die Amplitude des s-Kanals ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned}
 M = & g_s^2 f_{abc} f_{cde} \\
 & \cdot (g_{\alpha\beta}(P_1 - P_2)_\gamma + g_{\beta\gamma}(P_2 - P_s)_\alpha + g_{\gamma\alpha}(P_s - P_1)_\beta) \epsilon_\alpha(P_1) \epsilon_\beta(P_2) \\
 & \cdot \frac{-i g_{\chi\gamma}}{P_s^2} \\
 & \cdot (g_{\chi\delta}(-P_s + P_4)_\theta + g_{\delta\theta}(-P_4 + P_5)_\chi + g_{\theta\chi}(-P_5 + P_s)_\delta) \epsilon_\delta^*(P_4) \epsilon_\theta^*(P_5)
 \end{aligned}$$

(2.68)

Dabei ist die hier gezeigte Formel wie folgt aufgebaut: In der ersten Zeile sind die Vorfaktoren für Farbe und starke Wechselwirkung zusammengefasst. Die zweite Zeile beinhaltet den ersten Vertex sowie die damit verbunden äußeren Gluonen. In der dritten Zeile stehen der Propagator und die letzte Zeile umfasst den zweiten Vertex, sowie die beiden Gluonen aus dem Endzustand.

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts ist es notwendig  $|M|^2$  zu bestimmen. Wie zuvor lässt sich  $|M|^2$  in zwei Faktoren aufteilen. Einen Faktor für die Impulse, sowie einen Faktor für die Farben:

$$|M|^2 = |M_{Impuls}|^2 |M_{Farbe}|^2 \quad (2.69)$$

$|M_{Impuls}|^2$  lässt sich wiederum aufteilen in ersten Vertex, Propagator und zweiten Vertex:

$$|M_{Impuls}|^2 = |M_I|^2 |M_{II}|^2 |M_{III}|^2 \quad (2.70)$$

Im ersten Schritt wird  $|M_I|^2$  berechnet dazu wird  $M_I^*$  bestimmt:

$$M_I^* = (g_{\phi\psi}(P_1 - P_2)_\mu + g_{\psi\mu}(P_2 - P_s)_\phi + g_{\mu\phi}(P_s - P_1)_\psi) \epsilon_\phi^*(P_1) \epsilon_\psi^*(P_2) \quad (2.71)$$

Zur weiteren Berechnung ist es notwendig die Polarisationssumme auszuführen. Die Formel für die Polarisationssumme wird in Abschnitt 1.6 explizit hergeleitet. Es gilt:

$$\epsilon_\alpha(P) \epsilon_{\phi^*}(P) = -g_{\alpha\phi} + \frac{P^\alpha \bar{P}^\phi + P^\phi \bar{P}^\alpha}{P \cdot \bar{P}} \quad (2.72)$$

$$\epsilon_\beta(P) \epsilon_{\psi^*}(P) = -g_{\beta\psi} + \frac{P^\beta \bar{P}^\psi + P^\psi \bar{P}^\beta}{P \cdot \bar{P}} \quad (2.73)$$

Dabei muss  $\bar{P}$  die Relation  $P \cdot \bar{P} \neq 0$  erfüllen und kann ansonsten frei gewählt werden. Eine für die Berechnung günstige Wahl ist  $\bar{P} = P_2$ , falls das multiplizierte  $P = P_1$  und umgekehrt. Genauso falls  $P = P_4$ ,  $\bar{P} = P_5$  und umgekehrt. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} |M_I|^2 = M_I \cdot M_I^* = & (g_{\alpha\beta}(P_1 - P_2)_\gamma + g_{\beta\gamma}(P_2 - P_s)_\alpha + g_{\gamma\alpha}(P_s - P_1)_\beta) \\ & \cdot (g_{\phi\psi}(P_1 - P_2)_\mu + g_{\psi\mu}(P_2 - P_s)_\phi + g_{\mu\phi}(P_s - P_1)_\psi) \\ & \cdot \left( -g_{\alpha\phi} + \frac{P_1^\alpha P_2^\phi + P_1^\phi P_2^\alpha}{P_1 \cdot P_2} \right) \\ & \cdot \left( -g_{\beta\psi} + \frac{P_2^\beta P_1^\psi + P_2^\psi P_1^\beta}{P_2 \cdot P_1} \right) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Die Berechnung erfolgt mit *Mathematica* [8]. Es ergibt sich:

$$|M_I|^2 = 2 \cdot (P_1 - P_2)_\gamma \cdot (P_1 - P_2)_\mu \quad (2.75)$$

Durch Vergleich von  $M_I$  mit  $M_{III}$  ist zu erkennen, dass zur Bestimmung von  $|M_{III}|$  folgende Ersetzungen ausreichen:

$$\begin{aligned} P_1 &\rightarrow -P_4 \\ P_2 &\rightarrow -P_5 \\ \gamma &\rightarrow \chi \\ \mu &\rightarrow \nu \end{aligned}$$

Wobei  $\nu$  als neue Variable eingeführt wird. Die negativen Vorzeichen heben sich beim Einsetzen auf, sodass sich Folgendes ergibt:

$$|M_{III}|^2 = 2 \cdot (P_4 - P_5)_\chi \cdot (P_4 - P_5)_\nu \quad (2.76)$$

Für den Propagator ergibt sich quadriert:

$$|M_{II}|^2 = M_{II} \cdot M_{II}^* = \frac{g_{\gamma\chi} g_{\mu\nu}}{P_s^4} \quad (2.77)$$

Wobei die Summationsindizes passend zu  $M_I$  und  $M_{III}$  gewählt werden müssen. Insgesamt ergibt sich für  $|M_{Impuls}|$ :

$$\begin{aligned} |M_{Impuls}|^2 &= |M_I|^2 |M_{II}|^2 |M_{III}|^2 \\ &= \frac{4}{P_s^4} ((P_1 - P_2)_\gamma (P_4 - P_5)_\gamma)^2 \\ &= \frac{4}{P_s^4} (P_1 \cdot P_4 - P_1 \cdot P_5 - P_2 \cdot P_4 + P_2 \cdot P_5)^2 \end{aligned} \quad (2.78)$$

Um dies zu vereinfachen wird ausgenutzt, dass Gluonen keine Masse besitzen. Somit folgt:

$$P_1^2 = P_2^2 = P_4^2 = P_5^2 = 0 \quad (2.79)$$

$$P_s^2 = s \quad (2.80)$$

Des Weiteren kann durch Einführen der Mandelstammvariablen weiter zusammengefasst werden

$$\begin{aligned}
s &= (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + 2P_1 \cdot P_2 + P_2^2 = 2P_1 \cdot P_2 \\
s &= (P_4 + P_5)^2 = P_4^2 + 2P_5 \cdot P_4 + P_5^2 = 2P_4 \cdot P_5 \\
t &= (P_1 - P_4)^2 = P_1^2 - 2P_1 \cdot P_4 + P_4^2 = -2P_1 \cdot P_4 \\
t &= (P_2 - P_5)^2 = P_2^2 - 2P_2 \cdot P_5 + P_5^2 = -2P_2 \cdot P_5 \\
u &= (P_2 - P_4)^2 = P_2^2 - 2P_2 \cdot P_4 + P_4^2 = -2P_2 \cdot P_4 \\
u &= (P_1 - P_5)^2 = P_1^2 - 2P_1 \cdot P_5 + P_5^2 = -2P_1 \cdot P_5
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Durch Einsetzen:

$$|M_{Impuls}|^2 = 4(u - t)^2 \tag{2.82}$$

Durch das gleiche Vorgehen ergeben sich die Amplitudenquadrate der beiden anderen Kanäle. Die Amplitude des t-Kanals ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
M &= g_s^2 f_{adc} f_{bec} \\
& \frac{(g_{\alpha\delta}(P_1 - (-P_4))_\gamma + g_{\delta\gamma}(-P_4 - (-P_t))_\alpha + g_{\gamma\alpha}(-P_t - P_1)_\delta) \epsilon_\alpha(P_1) \epsilon_\delta^*(P_4) - i g_{\chi\gamma}}{P_t^2} \\
& \frac{(g_{\beta\theta}(P_2 - (-P_5))_\chi + g_{\theta\chi}(-P_5 - P_t)_\beta + g_{\chi\beta}(P_t - P_2)_\theta) \epsilon_\beta(P_2) \epsilon_\chi^*(P_5)}{P_t^2}
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Das Amplitudenquadrat ergibt sich zu:

$$|M_{Impuls}|^2 = \frac{4(4s^6 + 4s^5t + 17s^4t^2 + 36s^3t^3 + 24s^2t^4 + 8st^5 + 4t^6)}{s^4t^2} \tag{2.84}$$

Für den u-Kanal lautet die Amplitude:

$$\begin{aligned}
M &= g_s^2 f_{bdc} f_{aec} \\
& \frac{(g_{\beta\delta}(P_2 - (-P_4))_\gamma + g_{\delta\gamma}(-P_4 - (-P_u))_\beta + g_{\gamma\beta}(-P_u - P_2)_\delta) \epsilon_\beta(P_2) \epsilon_\delta^*(P_4) - i g_{\chi\gamma}}{P_u^2} \\
& \frac{(g_{\alpha\theta}(P_1 - (-P_5))_\chi + g_{\theta\chi}(-P_5 - P_u)_\alpha + g_{\chi\alpha}(P_u - P_1)_\theta) \epsilon_\alpha(P_1) \epsilon_\chi^*(P_5)}{P_u^2}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Für das Amplitudenquadrat folgt:

$$|M_{Impuls}|^2 = \frac{4(s^6 + 2s^5t + 33s^4t^2 + 60s^3t^3 + 44s^2t^4 + 16st^5 + 4t^6)}{s^4u^2} \quad (2.86)$$

Die Berechnung des Amplitudenbetragsquadrats für den Viergluonvertex lässt sich nicht aufteilen in Farbe und Impuls. Es resultiert insgesamt:

$$\begin{aligned} |M|^2 = & (g^{\zeta\psi} g^{\xi\omega} (f^{aec} f^{bdc} - f^{dac} f^{bec}) + g^{\zeta\xi} g^{\psi\omega} (f^{eac} f^{bdc} - f^{bac} f^{dec}) \\ & + g^{\zeta\omega} g^{\xi\psi} (f^{dac} f^{bec} - f^{bac} f^{edc})) \\ & \cdot (g^{\alpha\beta} g^{\delta\theta} (f^{aek} f^{bdk} - f^{dak} f^{bek}) + g^{\alpha\delta} g^{\beta\theta} (f^{eak} f^{bdk} - f^{bak} f^{dek}) \\ & + g^{\alpha\theta} g^{\beta\delta} (f^{dak} f^{bek} - f^{bak} f^{edk})) \\ & \cdot \left( \frac{2(P_\zeta^1 P_\alpha^2 + P_\alpha^1 P_\zeta^2)}{s} - g^{\alpha\zeta} \right) \\ & \cdot \left( \frac{2(P_\psi^1 P_\beta^2 + P_\beta^1 P_\psi^2)}{s} - g^{\beta\psi} \right) \\ & \cdot \left( \frac{2(P_\xi^4 P_\delta^5 + P_\delta^4 P_\xi^5)}{s} - g^{\delta\xi} \right) \\ & \cdot \left( \frac{2(P_\omega^4 P_\theta^5 + P_\theta^4 P_\omega^5)}{s} - g^{\theta\omega} \right) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Die Berechnung wird hier vollständig mit *Mathematica* durchgeführt: Es ergibt sich:

$$|M|^2 = \frac{6N^2(N^2 - 1)(3s^4 + 8s^3t + 16s^2t^2 + 16st^3 + 8t^4)}{s^4} \quad (2.88)$$

Um  $|M_{Farbe}|^2$  von s-,t- und u-Kanal zu bestimmen wird die Farbrechnung analytisch durchgeführt. Die verwendeten Relationen sind [9]:

$$f^{abc} f^{abc} = N(N^2 - 1) \quad (2.89)$$

$$f^{abc} f^{abd} = N\delta_{cd} \quad (2.90)$$

$$f^{abc} f^{cde} f^{efa} = -\frac{1}{2}N f^{bdf} \quad (2.91)$$

Die Rechnung ist hier beispielhaft für den s-Kanal gezeigt kann allerdings auf t- und u-Kanal übertragen werden.

$$\begin{aligned}
|M_{Farbe}|^2 &= f^{abc} f^{cde} f^{abk} f^{cdk} = f^{abc} f^{cdk} f^{cde} f^{abk} \\
&= N\delta^{kc} N\delta^{kc} \\
&= N^2(N^2 - 1)
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Neben  $|M|^2$  für die vier zu Grunde liegenden Feynmandiagramme müssen zusätzlich noch die sechs Mischterme berechnet werden. Die Berechnung der Mischterme erfolgt analog zu den bisherigen Rechnungen. Die Berechnung wird mithilfe von *Mathematica* durchgeführt.

Die Ergebnisse werden an dieser Stelle nur angegeben. Es ergibt sich:

$$M_{Impuls,s} M_{Impuls,t}^* = \frac{(2s^4 + s^3t - 8s^2t^2 - 2st^3 + 4t^4)}{s^2 \cdot s \cdot t} \tag{2.93}$$

$$M_{Impuls,s} M_{Impuls,u}^* = -\frac{(s^4 - 5s^3t - 22s^2t^2 - 18st^3 - 4t^4)}{s^2 \cdot s \cdot u} \tag{2.94}$$

$$M_{Impuls,t} M_{Impuls,u}^* = \frac{(2s^6 - 9s^5t + 19s^4t^2 + 48s^3t^3 + 4s^2t^4 - 24st^5 - 8t^6)}{s^4 \cdot t \cdot u} \tag{2.95}$$

Das negative Vorzeichen der zweiten Gleichung besitzt keine physikalische Bedeutung, sondern ist der Wahl der Termreihenfolge für  $M_{Impuls}$  geschuldet. Das Vorzeichen kürzt sich später gegen den entsprechenden Farbfaktor weg.

Im Folgenden werden die entsprechenden Farbfaktoren bestimmt.

$$\begin{aligned}
M_{Farbe,s}M_{Farbe,t}^* &= f^{abc}f^{cde}f^{adk}f^{bek} \\
&= f^{abc}(-1)f^{ced}f^{dka}f^{bek} \\
&= \frac{1}{2}Nf^{bek}f^{bek} \\
&= \frac{1}{2}N^2(N^2 - 1)
\end{aligned} \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned}
M_{Farbe,s}M_{Farbe,u}^* &= f^{abc}f^{cde}f^{bdk}f^{aek} \\
&= (-1)f^{bac}(-1)f^{ced}f^{dkb}f^{aek} \\
&= -\frac{1}{2}N^2(N^2 - 1)
\end{aligned} \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned}
M_{Farbe,t}M_{Farbe,u}^* &= f^{adc}f^{bec}f^{bdk}f^{aek} \\
&= (-1)f^{dac}(-1)f^{ceb}(-1)f^{bkd}f^{aek} \\
&= \frac{1}{2}N^2(N^2 - 1)
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Die Mischterme mit dem Viergluonvertex wurden vollständig mit *Mathematica* bestimmt und ergeben sich zu:

$$M_{4g}M_s^* = 0 \tag{2.99}$$

$$M_{4g}M_t^* = -\frac{6N^2(N^2 - 1)t(6s^4 + 11s^3t + 9s^2t^2 + 8st^3 + 4t^4)}{s^4t} \tag{2.100}$$

$$M_{4g}M_u^* = \frac{6N^2(N^2 - 1)t(-s^4 + 8s^3t + 17s^2t^2 + 12st^3 + 4t^4)}{s^4(-s - t)} \tag{2.101}$$

Zum Erhalt des vollständigen Ergebnisses muss noch über alle Startfarben und Polarisationen gemittelt werden:

$$\begin{aligned}
|M|^2 &= \frac{g_s^4}{4(N^2 - 1)^2} (|M_{4g}|^2 + |M_{Farbe,s}|^2 |M_{Impuls,s}|^2 \\
&\quad + |M_{Farbe,t}|^2 |M_{Impuls,t}|^2 + |M_{Farbe,u}|^2 |M_{Impuls,u}|^2 \\
&\quad + 2M_{Farbe,s} M_{Farbe,t}^* M_{Impuls,s} M_{Impuls,t}^* \\
&\quad + 2M_{Farbe,s} M_{Farbe,u}^* M_{Impuls,s} M_{Impuls,u}^* \\
&\quad + 2M_{Farbe,t} M_{Farbe,u}^* M_{Impuls,t} M_{Impuls,u}^* \\
&\quad + 2M_{4g} M_s^* + 2M_{4g} M_t^* + 2M_{4g} M_u^*) \\
&= \frac{N^2}{4(N^2 - 1)} \frac{16(s^2 + st + t^2)^3}{s^2 t^2 (s + t)^2}
\end{aligned} \tag{2.102}$$





# 3 Kinematik

Zur numerischen Bestimmung des Wirkungsquerschnitts müssen die partonischen Wirkungsquerschnitte, wie in Kapitel 1 beschrieben, kombiniert werden. Da es sich bei dem Ergebnis um ein Differential handelt, muss das Ergebnis außerdem in die gesuchte Differentialform gebracht werden. Bei experimentellen Daten ist diese Form meistens  $E \frac{d^3\sigma}{dp^3}$ . In diesem Abschnitt wird hergeleitet, wie ein solches Ergebnis erzielt werden kann. Da das Ergebnis nicht in allen vorkommenden Größen differentiell ist, ist es notwendig Integrale auszuführen. Dabei ist die Wahl der zu integrierenden Variablen nicht eindeutig.

In diesem Abschnitt wird folgende Konvention verwendet:

$$P = \begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Dabei ist  $P$  ein Vierervektor,  $E$  die Energie und  $p$  ein Dreiervektor. Allgemein gilt für die Wirkungsquerschnitte:

$$d\sigma = \frac{1}{F} |M^2| dPS_2 \quad (3.2)$$

Dabei wird über den gesamten Phasenraum beider Teilchen im Endzustand integriert.

$$dPS_2 = \frac{d^4P_4}{(2\pi)^3} \frac{d^4P_5}{(2\pi)^3} \delta(P_4^2 - m_4^2) \delta(P_5^2 - m_5^2) (2\pi)^4 \delta(P_1 + P_2 - P_4 - P_5) \quad (3.3)$$

Die  $\delta$ -Funktionen garantieren Energie und Impulserhaltung. Das erste Differential lässt sich wie folgt umschreiben:

$$d^4P \cdot \delta(P^2 - m^2) = \frac{d^3p}{2E} \quad (3.4)$$

Eingesetzt folgt:

$$dPS_2 = \frac{d^3p_4}{2(2\pi)^3 E_4} d^4P_5 \delta(P_5^2 - m_5^2) 2\pi \delta(P_1 + P_2 - P_4 - P_5) \quad (3.5)$$

Durch Anwendung der Vierer- $\delta$ -Funktion kann das vierer Differential aufgelöst werden. Außerdem werden die Massen aller Teilchen vernachlässigt. Dann gilt:

$$dPS_2 = \frac{d^3p_4}{2(2\pi)^2 E_4} \delta((P_1 + P_2 - P_4)^2) \quad (3.6)$$

Im Schwerpunktsystem gilt:

$$(P_1 + P_2)^2 = s \quad (3.7)$$

$$E_1 = E_2 = E_4 = E_5 \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2 - P_4)^2 &= (P_1 + P_2)^2 - 2 \cdot (P_1 + P_2)P_4 + P_4^2 \\ &= s - 2(E_1 + E_2)E_4 + 0 \\ &= s - 4E_4^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Um das Differential auf die Rapidität umzuschreiben muss die Energie umgeschrieben werden. Hierzu wird die Energie in Abhängigkeit von  $E_T$  und  $y$  berechnet.

$y$  ist die Rapidität, es gilt:

$$y = \operatorname{arctanh}(v_p/c) \quad (3.11)$$

Dabei ist  $v_p$  die Geschwindigkeit in Richtung des eingehenden Teilchenstrahls. Die hier gewählte Rapidität besitzt also auch die Richtung des Teilchenstrahls. Allgemein gilt für die Energie:

$$E_T = E \cdot \sin \phi \quad (3.12)$$

$\phi$  ist dabei der Winkel zwischen der Flugbahn der eintreffenden Teilchen und der Flugbahn der ausgehenden Teilchen.

Dieser Winkel lässt sich berechnen aus der Geschwindigkeit in Richtung des eingehenden Strahls und der Gesamtgeschwindigkeit.

$$\phi = \arccos(v_p/v_{ges}) \quad (3.13)$$

In unserem Fall ist die Gesamtgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit und somit gilt:

$$\phi = \arccos(\tanh(y)) \quad (3.14)$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{aligned} E_T &= E \cdot \sin(\arccos(\tanh(y))) \\ &= E \cdot \sqrt{1 - \tanh(y)^2} \\ &= E \cdot \frac{1}{\cosh y} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Für die Rapidität gilt außerdem:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_p}{E - p_p} \quad (3.16)$$

$p_p$  ist dabei die parallele Impulskomponente. Daraus folgt für  $p_p$ :

$$p_p = E \cdot \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = E \frac{\sinh y}{\cosh y} = E_T \sinh y \quad (3.17)$$

Daraus ergibt sich für das Differential:

$$dp_p = E_T \cosh y dy = E dy \quad (3.18)$$

Eine der drei Impulskomponenten in Gleichung (3.6) kann mit  $dp_p$  identifiziert werden. Die anderen Impulskomponenten sind dann tangential. Insgesamt ergibt sich dann:

$$dPS_2 = \frac{d^2 p_T dy}{2(2\pi)^2} \delta(s - 4E^2) \quad (3.19)$$

Wenn außerdem berücksichtigt wird, dass sich die Partonen in einem Proton aufhalten, müssen für beide Protonen die *Protonendichtefunktionen* multipliziert werden. Zusätzlich muss die *Fragmentationsfunktion* multipliziert werden, um die Pion-Produktion ausgehend von einem Parton zu bestimmen. Durch die zusätzlichen Terme treten auch die zusätzlichen Differentiale auf:

$$d\sigma = dx_1 dx_2 dx_3 f_1(x_1, q^2) f_2(x_2, q^2) D(x_3, q^2) \frac{1}{F} |M^2| dPS_2 \quad (3.20)$$

Um diese umzuschreiben wird wieder die Rapidität und zusätzlich eine Variable  $\tau$  eingeführt. Dabei ergibt sich für die Energie und den Transversalimpuls der ausgehenden Teilchen:

$$p_p = (x_1 - x_2) \cdot p_{Proton} \quad (3.21)$$

$$E = (x_1 + x_2) \cdot E_{Proton} \quad (3.22)$$

Daraus folgt:

$$y_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_p}{E - p_p} = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_2} \quad (3.23)$$

Diese Rapidität ist die Schwerpunktsrapidität, da sie aus Gesamtimpuls und Gesamtenergie bestimmt wird. Diese beschreibt um welche Rapidität das Parton CMS-System vom Laborsystem abweicht. Diese Rapidität kann außerdem durch die Rapiditäten der ausgehenden Teilchen bestimmt werden. Es gilt:

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (3.24)$$

Für  $\tau$  gilt:

$$\tau = x_1 x_2 \quad (3.25)$$

Daraus ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$x_1 = \sqrt{\tau} e^{y_0} \quad (3.26)$$

$$x_2 = \sqrt{\tau} e^{-y_0} \quad (3.27)$$

$$(3.28)$$

Zum Umschreiben der Differentiale wird die Determinante der Jacobimatrix verwendet, diese ergibt sich zu:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\tau}}e^{-y_0} & -\sqrt{\tau}e^{-y_0} \\ \frac{1}{2\sqrt{\tau}}e^{y_0} & \sqrt{\tau}e^{y_0} \end{vmatrix} = 1 \quad (3.29)$$

Insgesamt gilt also:

$$dx_1 dx_2 = dy_0 d\tau \quad (3.30)$$

$x_3$  gibt den Bruchteil des Pionimpuls am Impuls des Partons an. Es gilt also:

$$x_3 = \frac{p_{Pion}}{p_{Parton}} \quad (3.31)$$

Auf Transversalimpulse umgeschrieben ergibt sich:

$$x_3 = \frac{p_{Pion,T}}{p_{Parton,T}} \quad (3.32)$$

$$dx_3 = \frac{dp_{Pion,T}}{p_{Parton,T}} \quad (3.33)$$

Für den Wirkungsquerschnitt ergibt sich also:

$$d\sigma = dy_0 d\tau \frac{dp_{Pion,T}}{p_{Parton}} f_1(x_1, q^2) f_2(x_2, q^2) D(x_3, q^2) \frac{1}{F} |M^2| dPS_2 \quad (3.34)$$

Durch einsetzen der Partonlösung und ausnutzen von:

$$d\tau \delta(s - 4E_4^2) = d\tau \delta(\tau S - 4E_4^2) = \frac{1}{S} \quad (3.35)$$

ergibt sich:

$$d\sigma = \frac{1}{S \cdot p_{Parton,T}} dy_0 dp_{Pion,T} f_1(x_1, q^2) f_2(x_2, q^2) D(x_3, q^2) \frac{1}{F} |M^2| \frac{d^2 p_{Parton,T} dy}{2(2\pi)^2} \quad (3.36)$$

Nach umschreiben von  $d^2 p_{Parton}$  in Polarkoordinaten und Integration über den Winkel ergibt sich:

$$d\sigma = \frac{1}{S} dy_0 dp_{Pion,T} f_1(x_1, q^2) f_2(x_2, q^2) D(x_3, q^2) \frac{1}{F} |M^2| \frac{dp_{Parton,T} dy}{(4\pi)} \quad (3.37)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Rapidity  $y$  im CMS-System der Partonkollision definiert ist und somit nicht experimentell zugänglich ist.  $y$  kann mithilfe von  $y_0$  ins Laborsystem überführt werden. Im Laborsystem haben die beiden ausgehenden Teilchen die unterschiedlichen Rapiditäten  $y_1$  und  $y_2$ . Diese ergeben sich zu:

$$y_1 = y_0 + y \quad (3.38)$$

$$y_2 = y_0 - y \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

Durch Einsetzen von  $y_0$  erhält man:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{2} \quad (3.41)$$

Beim Umschreiben des Differentials ergibt sich:

$$dy dy_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} dy_1 dy_2 = \frac{1}{2} dy_1 dy_2 \quad (3.42)$$

Daraus folgt das Endresultat:

$$d\sigma = \frac{1}{S} f_1(x_1, q^2) f_2(x_2, q^2) D(x_3, q^2) \frac{1}{F} |M^2| dp_{P_{ion,T}} \frac{dp_{P_{ion,T}} dy_1 dy_2}{8\pi} \quad (3.43)$$

Experimentellen Daten sind häufig in

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} = \frac{1}{2\pi p_{P_{ion,T}}} \frac{d^2\sigma}{dP_{P_{ion,T}} dy_1} \quad (3.44)$$

angegeben.

Um die theoretischen Daten vergleichen zu können, müssen diese nach  $y_2$  und  $dp_{P_{ion,T}}$  integriert werden und anschließend mit dem Faktor  $\frac{1}{2\pi p_{P_{ion,T}}}$  multipliziert werden.

Die Integrationsgrenzen ergeben sich dabei folgendermaßen.

Der maximal mögliche Parton-Transversalimpuls ist  $\sqrt{S}/2$ . In diesem Fall besäße das ausgehende Pion die Hälfte der Gesamtenergie der Proton-Proton-Kollision. Die andere Hälfte muss aufgrund der Impulserhaltung genau in die entgegengesetzte Richtung abgegeben werden. Die untere Grenze ist 0.

Um die Grenzen für die Rapidity  $y_2$  zu bestimmen wird der Gesamtimpuls untersucht. Es gilt:

$$p_1 + p_2 = \sqrt{s} \quad (3.45)$$

$p_1$  und  $p_2$  lassen sich aus den zugehörigen Rapiditäten bestimmen (vgl. Gleichung (3.15)).

$$p_1 = p_T \cosh y_1 \quad (3.46)$$

$$p_2 = p_T \cosh y_2 \quad (3.47)$$

Somit gilt:

$$p_1 + p_2 = p_T(\cosh y_1 + \cosh y_2) = \sqrt{s} \quad (3.48)$$

Durch Umstellen nach  $y_2$  folgt:

$$y_2 = \pm \operatorname{arccosh} \left( \frac{\sqrt{s}}{p_t} - \cosh y_1 \right) \quad (3.49)$$

In den verwendeten Messdaten gilt  $y_1 = 0$ .  $y_2$  wird maximal, wenn  $\sqrt{s}$  maximal wird. Dies geschieht falls  $\sqrt{s} = \sqrt{S}$ . Somit ergibt sich für die Grenzen:

$$y_{2,min} = -\operatorname{arccosh} \left( \frac{\sqrt{S}}{p_t} - 1 \right) \quad (3.50)$$

$$y_{2,max} = \operatorname{arccosh} \left( \frac{\sqrt{S}}{p_t} - 1 \right) \quad (3.51)$$

Somit gilt:

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} = \frac{1}{2\pi p_{T,Pion}} \frac{1}{8\pi} \int_{p_{T,Pion}}^{\sqrt{s}/2} dp_{T,Parton} \int_{y_{2,min}}^{y_{2,max}} dy_2 \frac{1}{S} f_1(x_1, q^2) f_2(x_2, q^2) D(x_3, q^2) \frac{|M^2|}{F} \quad (3.52)$$

Wobei  $F$  der Flux-Faktor ist für diesen gilt [7]:  $F = 2s$ .

Als Einheit ergibt sich, falls natürliche Einheiten verwendet werden,  $\text{GeV}^{-4}$ . Messdaten liegen in den meisten Fällen in der Einheit  $\text{mb GeV}^{-2}$  vor. Für die Umrechnung gilt [1]:

$$\text{mb GeV}^{-2} = 0,389 \text{ GeV}^{-4} \quad (3.53)$$





## 4 Numerische Auswertung

Aus den errechneten Amplitudenquadraten kann mithilfe von Gleichung (3.52) für jeden einzelnen Prozess der differentielle Wirkungsquerschnitt ermittelt werden. Durch Aufsummation erhält man dann den gesamten differentiellen Wirkungsquerschnitt der Pionen-Produktion bei Proton-Proton-Kollisionen.

Zur Berechnung wird die *Protonendichtefunktionen* CT10 verwendet [6]. Diese wird mithilfe des python-package *lhpdf* implementiert [2]. Es wird die *Fragmentationsfunktion* DSS14 verwendet [3]. Diese ist für Pionen mit einem Impulsanteil  $x_3$  zwischen 0,05 und 1 definiert. Werte außerhalb dieses Bereichs werden extrapoliert. Diese untere Grenze ist in den Grafiken eingezeichnet.

Die Integration wird mithilfe des python-package *vegas* vorgenommen [10].

In dieser Arbeit wird der Wirkungsquerschnitt positiv geladener Pionen vorge-sagt. In Tabelle 4.1 sind alle Amplitudenquadrate dargestellt. Außerdem sind in Tabelle 5.1 alle berechneten Prozesse zusammengefasst.

Tabelle 4.1: Amplitudenquadrate der unterschiedlichen Parton-Parton-Streuungen nach eigener Rechnung und Mangano [11].

Prozess	Amplitudenquadrat
$qq \rightarrow qq$ t-Kanal	$\frac{4}{9} \frac{s^2+u^2}{t^2}$
$qq \rightarrow qq$ t- und u-Kanal	$\frac{4}{9} \left( \frac{s^2+t^2}{u^2} + \frac{s^2+u^2}{t^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{s^2}{ut}$
$qq^* \rightarrow qq^*$ t-Kanal	$\frac{4}{9} \frac{s^2+u^2}{t^2}$
$qq^* \rightarrow qq^*$ s-Kanal	$\frac{4}{9} \frac{t^2+u^2}{s^2}$
$qq^* \rightarrow qq^*$ s- und t-Kanal	$\frac{4}{9} \left( \frac{u^2+t^2}{s^2} + \frac{s^2+u^2}{t^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{u^2}{st}$
$qq^* \rightarrow GG$	$\frac{32}{27} \frac{t^2+u^2}{tu} - \frac{8}{3} \frac{t^2+u^2}{s^2}$
$GG \rightarrow qq^*$	$\frac{1}{6} \frac{t^2+u^2}{tu} - \frac{3}{8} \frac{t^2+u^2}{s^2}$
$Gq \rightarrow Gq$	$-\frac{4}{9} \frac{s^2+u^2}{su} + \frac{u^3+s^2}{t^2}$
$GG \rightarrow GG$	$\frac{9}{2} \left( 3 - \frac{tu}{s^2} - \frac{su}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right)$

Zusätzlich ist zu beachten, dass Prozesse mit zwei identischen Teilchen im Endzustand mit einem Faktor ein halb gewichtet werden müssen. Insgesamt ergibt sich das Ergebnis, welches in Abb. 4.1 abgebildet ist.

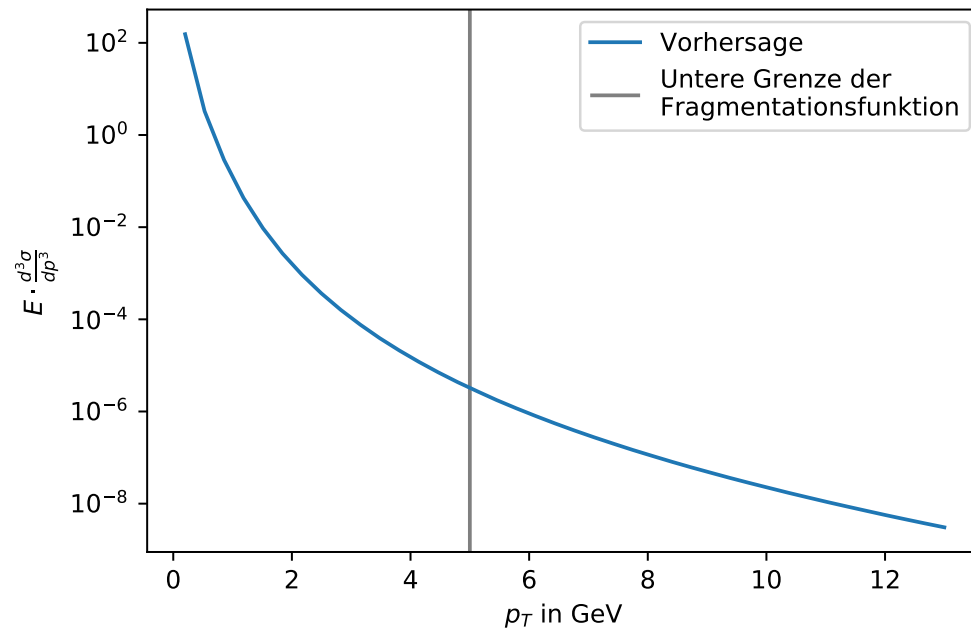


Abbildung 4.1: Errechneter differentieller Wirkungsquerschnitt der Pion-Produktion bei Proton-Proton-Kollision bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{S} = 200$  GeV und einer Rapidität von  $y = 0$ . Für Werte unterhalb der unteren Grenze der *Fragmentationsfunktion* wird diese extrapoliert.

Der Grafik ist zu entnehmen, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt mit zunehmendem Transversalimpuls der Pionen nahezu exponentiell abnimmt. Dies bedeutet, dass überwiegend Pionen mit sehr niedrigen Transversalimpulsen produziert werden.

Da der differentielle Wirkungsquerschnitt für alle Prozesse einzeln bestimmt wird, können die Anteile der verschiedenen Prozesse analysiert werden. Die prozentuale Verteilung ist in Abb. 4.2 dargestellt.

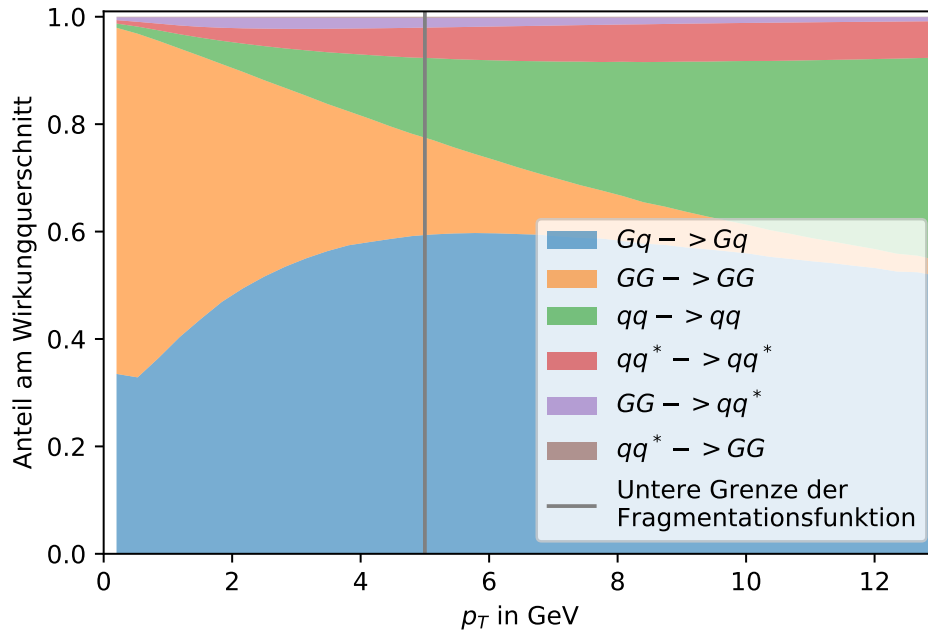


Abbildung 4.2: Prozentualer Anteil der partonischen Stoßprozesse am Gesamtwirkungsquerschnitt bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{S} = 200 \text{ GeV}$  und einer Rapidität von  $y = 0$ .

Hier lässt sich erkennen, dass der Prozess  $Gq \rightarrow Gq$  den größten Anteil am Wirkungsquerschnitt hat. Zu kleinen Transversalimpulsen nimmt der eben beschriebene Anteil ab und dafür der Anteil des Prozesses  $GG \rightarrow GG$  zu. Bei größeren Impulsen gewinnt der Prozess  $qq \rightarrow qq$  an Bedeutung.

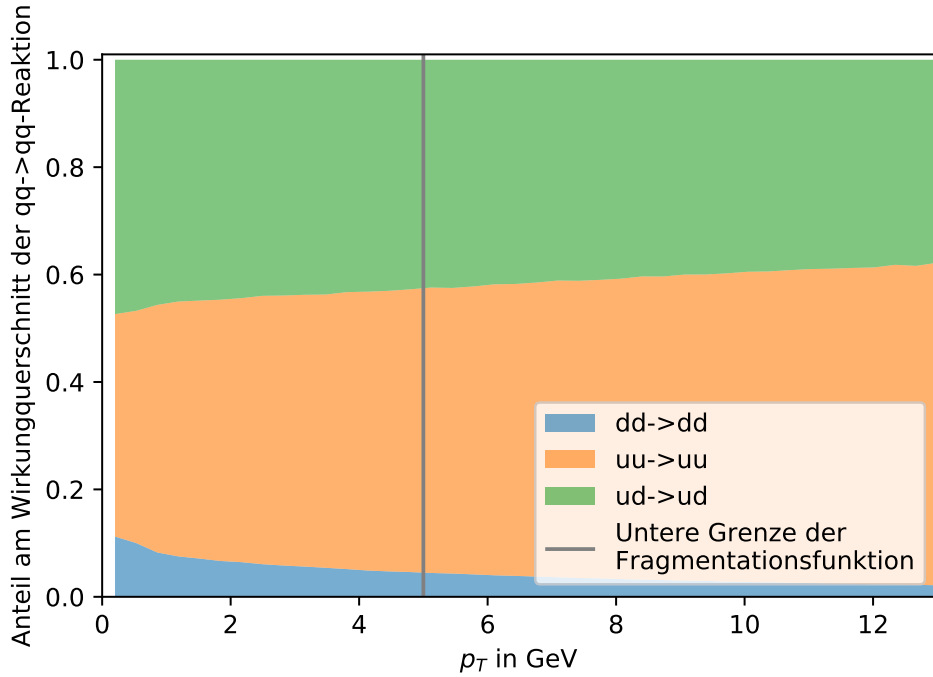


Abbildung 4.3: Prozentualer Anteil der einzelnen  $qq \rightarrow qq$ -Prozesse am Gesamtwirkungsquerschnitt dieser Prozesse bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{S} = 200$  GeV und einer Rapidität von  $y = 0$ .

Bei Untersuchung des Prozess  $qq \rightarrow qq$  kann festgestellt werden, dass die Prozesse  $uu \rightarrow uu$  und  $ud \rightarrow ud$  in allen Impulsbereichen in etwa gleich viel zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Das entsprechende Diagramm ist in Abb. 4.3 abgebildet. Zu kleineren Impulsen hin wächst der Anteil von  $ud \rightarrow ud$  etwas an. Der Prozess  $dd \rightarrow dd$  macht weniger als 10% des Wirkungsquerschnitts der Prozesse  $qq \rightarrow qq$  aus und spielt damit eine sehr untergeordnete Rolle. Dies ist damit zu begründen, dass bei dieser Rechnung die Entstehung von positiv geladenen Pionen vorhergesagt wird und diese aus einem  $u$  und einem  $d^*$ -Quark bestehen.

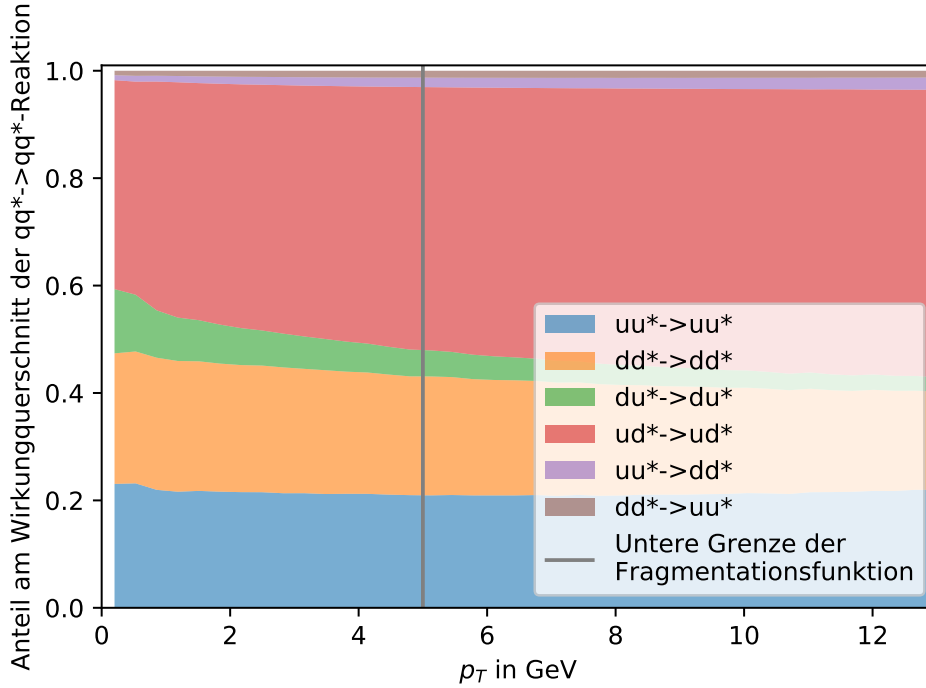


Abbildung 4.4: Prozentualer Anteil der einzelnen  $qq^* \rightarrow qq^*$ -Prozesse am Gesamtwirkungsquerschnitt dieser Prozesse bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{S} = 200$  GeV und einer Rapidität von  $y = 0$ .

Die gleiche Untersuchung kann für die einzelnen  $qq^* \rightarrow qq^*$ -Prozesse gemacht werden. Das Ergebnis ist in Abb. 4.4 zu sehen. Hier ist der dominierende Prozess der  $ud^* \rightarrow ud^*$ -Prozess. Dies ist wie oben beschreiben damit zu begründen, dass die beteiligten Partonen genau die Bestandteile eines positiv geladenen Pions sind. Außerdem ist zu erkennen, dass die reinen s-Kanal Prozesse  $uu^* \rightarrow dd^*$  und  $dd^* \rightarrow uu^*$  stark unterdrückt sind. Dies kann anhand des zugehörigen Amplitudenquadrats verstanden werden, da bei s-Kanal Prozessen  $s$  im Nenner auftaucht und  $s$  mindestens doppelt so groß ist wie  $u$  und  $t$  [11].



## 5 Schlussfolgerung und Diskussion

In dieser Arbeit wurde die Pion-Produktion bei Proton-Proton-Kollision in erster Ordnung Störungstheorie bestimmt. Hierzu wurden alle partonischen Stoßprozesse, welche bei einer Proton-Proton-Kollision stattfinden, ausgewertet. Das Amplitudenquadrat der partonischen Prozesse  $GG \rightarrow GG$  sowie  $qq \rightarrow qq$  und  $qq^* \rightarrow qq^*$  wurde dabei in dieser Arbeit berechnet.

Zusätzlich wurde in einer numerischen Analyse der differentielle Wirkungsquerschnitt der Produktion positiver Pionen bei einer Schwerpunktsenergie von 200 GeV und einer Rapidität von 0 bestimmt. Dieser wurde auf die Anteile einzelner Prozesse am gesamten Wirkungsquerschnitt untersucht.

Ein Vergleich mit experimentellen Daten ist auf Grundlage dieser Arbeit nicht möglich, da Prozesse höherer Ordnung gänzlich vernachlässigt wurden. Trotzdem lässt sich sowohl der globale Verlauf, als auch die Zerlegung in die verschiedenen Anteile als qualitative Ergebnisse festhalten. Es konnte gezeigt werden, dass vor allem Pionen mit sehr niedrigen Transversalimpulsen produziert werden und dass bei 200 GeV der dominierende Prozess  $Gq \rightarrow Gq$  ist. Bei Prozessen an den nur Quarks und Antiquarks beteiligt sind, tragen Prozesse mit  $u$  oder  $d^*$  im Endzustand besonders stark zum Wirkungsquerschnitt bei.





# Literaturverzeichnis

- [1] P. Avery. Basic units and introduction to natural units, 2015. [https://indico.cern.ch/event/636519/attachments/1452833/2248541/natural\\_units.pdf](https://indico.cern.ch/event/636519/attachments/1452833/2248541/natural_units.pdf).
- [2] A. Buckley, J. Ferrando, S. Lloyd, K. Nordström, B. Page, M. Rufenacht, M. Schönherr, and G. Watt. Lhapdf6: parton density access in the lhc precision era. *The European Physical Journal C*, 75(3), Mar 2015. ISSN 1434-6052. doi: 10.1140/epjc/s10052-015-3318-8. URL <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3318-8>.
- [3] D. de Florian, R. Sassot, M. Epele, R. J. Hernández-Pinto, and M. Stratmann. Parton-to-pion fragmentation reloaded. *Physical Review D*, 91(1), Jan 2015. ISSN 1550-2368. doi: 10.1103/physrevd.91.014035. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.91.014035>.
- [4] D. d’Enterria.  $\alpha_s$  status and perspectives (2018), 2018.
- [5] A. Deur, S. J. Brodsky, and G. F. de Téra mond. The qcd running coupling. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 90:1–74, Sep 2016. ISSN 0146-6410. doi: 10.1016/j.pnpnp.2016.04.003. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.pnpnp.2016.04.003>.
- [6] M. Guzzi, P. Nadolsky, E. Berger, H.-L. Lai, F. Olness, and C. P. Yuan. Ct10 parton distributions and other developments in the global qcd analysis, 2011.
- [7] M. A. Halzen F. *Quarks and leptons*. John Wiley & Sons, 1984.
- [8] W. R. Inc. Mathematica, Version 12.1. URL <https://www.wolfram.com/mathematica>. Champaign, IL, 2020.
- [9] K. Kovarik. Hitchiker’s guide to renormalization. unpublished.

- [10] G. P. Lepage. Adaptive multidimensional integration: Vegas enhanced, 2020.
- [11] M. L. Mangano. Introduction to QCD. (CERN-OPEN-2000-255), 1999. doi: 10.5170/CERN-1999-004.53. URL <https://cds.cern.ch/record/454171>.

Tabelle 5.1: Tabelle aller partonischer Prozesse.

Teilchen 1	Teilchen 2	Teilchen 3	Teilchen 4	Formel
u	u	u	u	$qq \rightarrow qq$ t- und u-Kanal
d	d	d	d	$qq \rightarrow qq$ t- und u-Kanal
u	d	u	d	$qq \rightarrow qq$ t-Kanal
d	u	d	u	$qq \rightarrow qq$ t-Kanal
u	u*	u	u*	$qq^* \rightarrow qq^*$ t- und u-Kanal
u*	u	u*	u	$qq^* \rightarrow qq^*$ t- und u-Kanal
d	d*	d	d*	$qq^* \rightarrow qq^*$ t- und u-Kanal
d*	d	d*	d	$qq^* \rightarrow qq^*$ t- und u-Kanal
u	d*	u	d*	$qq^* \rightarrow qq^*$ t-Kanal
d*	u	d*	u	$qq^* \rightarrow qq^*$ t-Kanal
u*	d	u*	d	$qq^* \rightarrow qq^*$ t-Kanal
d	u*	d	u*	$qq^* \rightarrow qq^*$ t-Kanal
u	u*	d	d*	$qq^* \rightarrow qq^*$ s-Kanal
u*	u	d*	d	$qq^* \rightarrow qq^*$ s-Kanal
d*	d	u*	u	$qq^* \rightarrow qq^*$ s-Kanal
d	d*	u	u*	$qq^* \rightarrow qq^*$ s-Kanal
G	G	G	G	$GG \rightarrow GG$
u	u*	G	G	$qq^* \rightarrow GG$
u*	u	G	G	$qq^* \rightarrow GG$
d	d*	G	G	$qq^* \rightarrow GG$
d*	d	G	G	$qq^* \rightarrow GG$
G	G	u	u*	$GG \rightarrow qq^*$
G	G	d	d*	$GG \rightarrow qq^*$
G	d	G	d	$Gq \rightarrow Gq$
d	G	d	G	$Gq \rightarrow Gq$
G	u	G	u	$Gq \rightarrow Gq$
u	G	u	G	$Gq \rightarrow Gq$
G	d*	G	d*	$Gq \rightarrow Gq$
d*	G	d*	G	$Gq \rightarrow Gq$
G	u*	G	u*	$Gq \rightarrow Gq$
u*	G	u*	G	$Gq \rightarrow Gq$

## Plagiatserklärung der / des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über Produktion identifizierter Pionen bei Proton-Proton-Kollisionen selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

16.11.2020, N. Muz  
(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in einer Datenbank einverstanden.

16.11.2020, N. Muz  
(Datum, Unterschrift)