

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Diplomarbeit

Nicht-perturbative Bestimmung von HQET-Parametern und der Quarkmassen-Abhängigkeit des Spin-Splittings im B-Meson-System

MICHAEL TOPP



institut für
theoretische physik

28. Februar 2012

Gegenüber der ursprünglichen Version dieser Arbeit vom 28. Februar 2012 wurden in der vorliegenden Version neben orthographischen Korrekturen Ergänzungen im Abschnitt “Spin-Splitting” des Kapitels 7 vorgenommen.

Münster, 19. Juni 2012

*“Auf eine Welt, welche nicht unsere Vorstellung ist,
sind die Gesetze der Zahlen völlig unanwendbar:
diese gelten allein in der Menschen-Welt.”*

- Friedrich Nietzsche

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	7
2. Heavy Quark Effective Theory	11
2.1. Motivation	11
2.2. Herleitung der Lagrangedichte - Kontinuum	12
2.3. Eigenschaften - Kontinuum	14
2.4. Herleitung der Lagrangedichte - Gitter	17
2.5. Eigenschaften - Gitter	18
2.6. $O(a)$ -Verbesserung	18
3. Korrelationsfunktionen im Schrödinger-Funktional	21
3.1. Randbedingungen	21
3.2. Korrelationsfunktionen in der QCD und deren Renormierung	23
3.3. Korrelationsfunktionen in der HQET und deren Renormierung	25
4. HQET-Parameter	27
4.1. Strategie zur Bestimmung der Parameter	28
4.2. Konkrete Umsetzung	35
5. Spin-Splitting	41
5.1. Motivation	41
5.2. Untersuchung	44
6. Ergebnisse	47
6.1. HQET-Parameter aus den Simulationsdaten mit $z = 10.4 - 13.3$	52
6.2. HQET-Parameter aus den Simulationsdaten mit $z = 12.48 - 20$	59
6.3. Resultate für das Spin-Splitting	67
7. Ausblick und Diskussion von Methoden und Ergebnissen	73

A. Konventionen	77
A.1. Verwendung von Indizes	77
A.2. Gamma-Matrizen	77
A.3. Eichfelder im Kontinuum	79
A.4. Ableitungen auf dem Gitter	79
A.5. Wirkung auf dem Gitter	80
B. Werte von ω für die Interpolation zu $z = 12.48$	83
C. Werte von $\Phi(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand und Werte von $\Phi(L_2)$	85
C.1. Resultate aus den Simulationsdaten mit $z = 10.4 - 13.3$	85
C.2. Resultate aus den Simulationsdaten mit $z = 12.48 - 20$	87
D. Werte der Step-Scaling-Funktionen und von ϕ^{-1}	89
E. Kontinuumslimiten der Elemente der Step-Scaling-Funktionen	93
Abbildungsverzeichnis	95
Tabellenverzeichnis	97
Literaturverzeichnis	99

1. Einleitung

Das Standardmodell (SM) der Teilchenphysik beschreibt die Physik, die durch drei der vier fundamentalen Kräfte (nämlich der starken, schwachen und elektromagnetischen Kräfte) hervorgerufen wird und erklärt damit Phänomene auf Ebene der Elementarteilchen, wenn auch mit gewissen Einschränkungen. Die Gravitationskraft, beschrieben in der allgemeinen Relativitätstheorie, ließ sich bisher nicht in das Standardmodell der Teilchenphysik integrieren. Dennoch ist dieses Modell besonders im Bereich der elektromagnetischen Wechselwirkung, einer Abelschen Eichtheorie des Modells, sehr erfolgreich. Für diese Arbeit ist aber eine nicht-Abelsche Eichtheorie, die Quantenchromodynamik (QCD), von Interesse. Das SM der Teilchenphysik geht von 12 fundamentalen Teilchen (und ihrer 12 Antiteilchen) sowie von 12 Mediatoren der Wechselwirkungen aus. Quarks können auf Grund des so genannten Confinements nie einzeln auftreten, während die übrigen Teilchen elementar vorkommen und Leptonen genannt werden. Die aus Quarks aufgebauten Teilchen sind die Hadronen, die man wiederum in Mesonen (Bindungszustände aus einem Quark und einem Antiquark) und Baryonen (Bindungszustände aus drei Quarks) unterteilt (ggf. sind noch weitere Kombinationen möglich, dies ist auch noch Gegenstand aktueller Forschung). Quarks tragen eine Ladung, die man Farbe nennt (Antiquarks haben eine Antifarbe) und die drei "Werte" annehmen kann, üblicher Weise rot, grün und blau. Man beobachtet nur farbneutrale Teilchen. Eine Kombination aus Farbe und Antifarbe bzw. aus rot, grün und blau ist neutral, was die Einteilung in Mesonen und Baryonen sowie das Confinement veranschaulicht.

Die Teilchen des SM sind in drei Generationen mit steigender Masse eingeteilt. In der ersten Generation finden sich das Up- und Down-Quark, das Elektron und das Elektron-Neutrino. In den weiteren Generationen folgen bei den Quarks das Charm und Strange, schließlich das Bottom und Top, während man bei den Leptonen das Myon und das Tauon sowie deren zugeordnete Neutrinos findet. Die Wechselwirkungsteilchen (Eichbosonen) sind für die starke Wechselwirkung die Gluonen, die, da sie selbst die Ladung der Theorie tragen, mit sich selbst wechselwirken können (was letztlich Ursache des Confinements und der asymptotischen Freiheit ist). Für die schwache Wechselwirkung hat man die W^\pm - und Z-Bosonen, bei der elektromagnetischen Wechselwirkung noch das Photon γ .

1. Einleitung

Die QCD, die also die Wechselwirkung von Quarks und Gluonen beschreibt, hat die Eigenart, dass bei hohen Energien (also kleinen Abständen) die Kopplungskonstante der Theorie (also die Wechselwirkungsstärke) klein wird, während sie bei niedrigen Energien (großen Abständen) groß wird, was auch anschaulich gut in Einklang mit dem Confinement zu bringen ist. Die bekannten Feynman-Diagramme, die man zur Veranschaulichung und zur Rechenhilfe verschiedener Prozesse zeichnen kann, entspringen dem Gedanken einer Störungsrechnung. Bei der Betrachtung von Observablen stößt man dann auf eine Entwicklung, die Potenzen der Kopplungskonstante enthält. Nun stellt sich aber das Problem, dass diese Entwicklung nicht für alle Energiebereiche durchgeführt werden kann (wegen der nicht konstanten Kopplungskonstanten). Für den Bereich, der störungstheoretisch nicht zugänglich ist, sind andere Methoden erforderlich. Hier sind Monte-Carlo-Simulationen auf einem Gitter zu nennen. Die Grundlagen der Gitter-QCD werden in dieser Arbeit allerdings als bekannt vorausgesetzt. Zum Verständnis seien aber [1, 2, 3] genannt.

Die QCD und ihre Formulierung auf dem Gitter ist in dieser Arbeit wichtig, da sie die Grundlage für die “Heavy Quark Effective Theory“ (HQET) bildet. Untersuchungsgegenstand sind nämlich B-Mesonen, für die, wie später erklärt wird, sich die HQET eignet, um gewissen Problemen, die man im Falle der QCD hätte, zu umgehen. Dennoch muss gewährleistet sein, dass man mit der HQET die ”wahre Welt“ der QCD für gewisse Spezialfälle (wie den von Teilchen mit einem schweren Quark, daher der Name HQET) richtig beschreibt, wozu ein so genanntes Matching und letztlich die Bestimmung einiger Parameter nötig sind. B-Mesonen sind Mesonen, die ein Bottom-Quark und ein leichtes Anti-Quark (Up oder Down) enthalten (wenn hier von Quarkinhalt gesprochen wird, sind damit immer Valenzquarks gemeint, die Dynamik innerhalb eines Teilchens ist natürlich wesentlich komplexer), wobei natürlich auch die Kombination aus Antibottom und Up/Down denkbar ist. Da es sich bei der HQET um eine effektive Theorie handelt, hat man es, wie der Name schon besagt, mit einer Entwicklung zu tun, bei der die zuvor erwähnten Parameter auftreten. Die Implementierung einer Bestimmungsmethode dieser Parameter ist ein Ziel dieser Arbeit. Ein weiteres Ziel besteht als Anwendung darin, mit Hilfe der Parameter die Quark-Massenabhängigkeit des Spin-Splittings zu untersuchen. Dafür betrachtet man die Massendifferenz von B-Mesonen und B^* -Mesonen, wobei erstere Pseudoskalare- und letztere Vektormesonen sind. Bei den pseudoskalaren Mesonen koppeln die Spins der beteiligten Quarks zu einem Gesamtspin von $J = 0$, während sie bei den Vektormesonen zu einem Gesamtspin von $J = 1$ koppeln. Unter Berücksichtigung auftretender Symmetrien wird dies in [4] diskutiert.

In dieser Arbeit wird zunächst die HQET entwickelt, und dann werden ihre Eigenschaften und die Übertragung auf das Gitter besprochen. Anschließend werden kurz das Schrödinger-Funktional (SF) und die für diese Arbeit relevanten Korrelationsfunktionen im SF eingeführt sowie deren HQET-Entwicklung erläutert. Schließlich folgt die Vorstellung einer Strategie [5], die auf [6] zurückgeht, wie man mit Hilfe dieser Korrelationsfunktionen die Parameter der HQET bestimmen kann. Dies schließt den ersten und grundlegenden Theorieteil ab, wobei ich dort auch schon auf die konkrete Umsetzung (d.h. welche Daten den Berechnungen zu Grunde liegen, welche Parameter bei den Simulationen eingestellt wurden und was ich bei der Auswertung beachten musste) in einem von mir geschriebenen Computerprogramm eingehe. Es folgt ein zweiter kurzer Theorieteil über das Spin-Splitting, also die Anwendung der HQET-Parameter zur Erklärung der auftretenden Massendifferenz zwischen B- und B*-Mesonen, wobei auch hier abschließend auf die konkrete Datenausgangslage eingegangen wird. Zum Schluss folgen die Darstellung der Bestimmung der HQET-Parameter und Resultate für das Spin-Splitting sowie eine Diskussion dieser Ergebnisse.

Es sei noch erwähnt, dass hier, wie es in der Quantenfeldtheorie und Teilchenphysik üblich ist, natürliche Einheiten verwendet werden, d.h. es wird $\hbar = c = 1$ gesetzt. Daraus folgt, dass Massen dieselbe Einheit wie Energien besitzen und Länge und Zeit als Einheit inverse Energie haben. Bei der Berechnung irgendeiner Größe muss dann letztlich nur solange mit c und/oder \hbar multipliziert bzw. dadurch dividiert werden, bis die zu erwartende SI-Einheit der Größe erhalten wird. Außerdem werden alle Dezimalzahlen mit einem Punkt als Trennzeichen angegeben, um für eine mögliche Übertragung ins Englische bereits gemäß internationalen Standards angepasst zu sein.

2. Heavy Quark Effective Theory

Die Heavy Quark Effective Theory ist, wie der Name schon besagt, eine effektive Theorie der schweren Quarks. Damit sind in der Regel Charm- oder Bottom(anti)quarks gemeint, jedoch in dieser Arbeit ausschließlich b - oder \bar{b} -Quarks. Die Theorie wird durch eine Entwicklung in $1/m_b$ formuliert. Deren Herleitung und Problematik, dass, wie in [6] darauf hingewiesen wird, ihre Parameter nicht störungstheoretisch bestimmt werden dürfen, da andernfalls der Kontinuumsimes der Theorie nicht existieren würde, ihre Anwendungen und die sich daraus ergebenden Vorhersagen werden im Folgenden besprochen.

Die hier verwendeten Konventionen sind im Anhang erläutert, werden aber auch, wenn es sinnvoll erscheint, teilweise im Text eingefügt.

2.1. Motivation

Die HQET wurde bereits um 1990 [7, 8, 9, 10, 11] erdacht. Mit ihr bieten sich heute, nachdem Fortschritte z.B. bei der verwendeten Wirkung gemacht wurden, wichtige Möglichkeiten zur Anwendung. In der Flavour-Physik ist man stets auf der Suche nach Anzeichen für Physik jenseits des Standardmodells. Dafür ist eine hohe Präzision erforderlich, die aber im Bereich der Gitter-QCD schwer zu erreichen ist, wenn man speziell an schweren Quarks interessiert ist. Es stellt sich hier das Problem, dass man zum Einen eine genügend große Gitterausdehnung L haben möchte, deren Längenskala zur Beschreibung physikalisch interessanter Prozesse (z.B. Zerfälle von Hadronen) nötig ist, aber zum Anderen eine hohe Auflösung L/a , also einen kleinen Gitterabstand a benötigt, um Gitterartefakte bei der Beschreibung von schweren Quarks (kleine Comptonwellenlänge) zu minimieren. Ein Vorteil der HQET auf dem Gitter besteht darin, dass ihre Diskretisierungsfehler besser zu handhaben sind als die der Gitter-QCD ($O(a\Lambda_{\text{QCD}})^n$ statt $O(am_b)^n$) [12]. Eine Simulation auf entsprechend großen Gittern ist unter realistischen Gesichtspunkten (Zeit) nicht durchführbar. In [13] wird angemerkt, dass man schon für Simulationen mit einem Charm-Quark $L/a \approx 60 \dots 120$ benötigt, während sich dies im Fall der B-Physik um einen Faktor 4 erhöhen würde. Wie später noch genau erklärt werden wird, stellt die HQET im Zusammenhang mit der so genannten "step-

scaling“-Funktion hier eine Lösung dar.

Die dieser Arbeit zugrunde liegende Idee [6] besteht nun darin, QCD-Observablen aus Simulationen zu berechnen und diese mittels Matching zur nicht-störungstheoretischen Bestimmung der HQET-Parameter zu verwenden, so dass dabei die auftretenden potenzartigen Divergenzen subtrahiert werden. Dabei wird das Matching in einem kleinen Volumen vollzogen, das Schrödinger-Funktional (SF) Randbedingungen unterliegt. Bevor dieses erklärt wird, soll aber zunächst die Herleitung der Lagrangedichte der HQET und ihre anschließende Übertragung auf das Gitter besprochen werden.

2.2. Herleitung der Lagrangedichte - Kontinuum

Die grundsätzliche Idee bei der folgenden Herleitung, die [13, 14] folgt und auf [15] beruht, ist, dass man den Fall eines ruhenden b-Quarks (im Bezugssystem seines Hadrons bzw. von nun an Mesons, da B-Mesonen betrachtet werden sollen), also $m = m_b \rightarrow \infty$ betrachtet. Dabei soll dieses Quark dann für das leichte Antiquark (\bar{u}, \bar{d}) und Gluonen als eine Art Farbquelle dienen, so dass weiterhin eine dynamische Situation beschrieben werden kann. Ausgangspunkt bildet zwar die Lagrangedichte der QCD, jedoch werden die dort auftretenden Terme für das b-Quark nun entwickelt. Da später die Theorie auf dem Gitter betrachtet werden soll, muss der Ausgangspunkt aber eine euklidische Formulierung der Wirkung sein. Darin werden für die hier geschilderte Situation die dominanten Freiheitsgrade der großen Komponenten für das b-Quark und die kleinen Komponenten für das leichte Quark identifiziert und in Ordnungen von D_k/m entkoppelt. Dabei wird für den Fall einer verschwindenden Geschwindigkeit $u_k = 0$ des schweren Quarks den auftretenden kovarianten Ableitungen folgende Ordnung in der Masse zugeschrieben

$$\mathcal{D}_{\parallel}\psi = O(m)\psi \quad (\mathcal{D}_{\parallel} = D_0\gamma_0), \quad (2.1)$$

$$\mathcal{D}_{\perp}\psi = O(1)\psi \quad (\mathcal{D}_{\perp} = D_k\gamma_k). \quad (2.2)$$

Außerdem werden alle weiteren Felder wie z.B. $F_{\mu\nu}$ als $O(1)$ gezählt. Für den hier aufgezeigten Fall ergeben sich die Projektionsoperatoren gemäß

$$P(u) = P_+ = \frac{1 + \gamma_0}{2} \quad P(-u) = P_- = \frac{1 - \gamma_0}{2}. \quad (2.3)$$

Es ist nötig, nun zwei so genannte Fouldy Wouthuysen-Tani (FTW) Transformationen durchzuführen. Für die quantisierte Theorie muss man kein anderes Integralmaß berücksichtigen,

da die Jakobideterminante der Transformation eins ist.

Die erste Transformation erfolgt gemäß

$$\psi \rightarrow \psi' = e^S \psi, \quad S = \frac{1}{2m} D_k \gamma_k = -S^\dagger \text{ und} \quad (2.4)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-\bar{S}} = \bar{\psi} e^{-\bar{D}_k \gamma_k / (2m)}. \quad (2.5)$$

Damit ergibt sich die Lagrangedichte der transformierten Größen

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}' (\mathcal{D}' + m) \psi', \quad (2.6)$$

wobei ihr Diracoperator sich gemäß

$$\mathcal{D}' + m = e^{-S} (\mathcal{D} + m) e^{-S} \quad (2.7)$$

schreiben lässt. Entwickelt man nun jeweils die Exponentialfunktionen und berücksichtigt, dass wegen (2.2) $S = O(1/m)$ ist, so findet man

$$\mathcal{D}' + m = \underbrace{\mathcal{D} + m}_{O(m)} + \underbrace{\{-S, \mathcal{D} + m\}}_{O(1)} + \frac{1}{2} \underbrace{\{-S, \{-S, \mathcal{D} + m\}\}}_{O(1/m)} + \dots \quad (2.8)$$

Nach einigen Umformungen von (2.8) erhält man den Ausdruck

$$\mathcal{D} + m + \{-S, \mathcal{D} + m\} = D_0 \gamma_0 - \frac{1}{2m} \left[\gamma_k \gamma_0 F_{k0} + \frac{1}{i} \sigma_{kl} F_{kl} + 2D_k D_k \right], \quad (2.9)$$

mit $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, $F_{kl} = [D_k, D_l]$. Ebenfalls durch Umformen sieht man

$$\frac{1}{2} \{-S, \underbrace{\{-S, \mathcal{D} + m\}}_{-D_k \gamma_k + O(1/m)}\} = \frac{1}{4m} \left[\frac{1}{i} \sigma_{kl} F_{kl} + 2D_k D_k \right]. \quad (2.10)$$

Man erkennt also nach Einsetzen in (2.8), dass der transformierte Diracoperator einen nicht diagonalen Anteil besitzt, die kleinen und großen Komponenten also noch nicht vollständig bis zu $O(1/m)$ entkoppelt wurden:

$$\mathcal{D}' = D_0 \gamma_0 - \frac{1}{2m} \left[\underbrace{\gamma_k \gamma_0 F_{k0}}_{\text{nicht diagonal}} + \frac{1}{2i} \sigma_{kl} F_{kl} + D_k D_k \right] + O(1/m^2). \quad (2.11)$$

2. Heavy Quark Effective Theory

Eine zweite FTW-Transformation $\psi'' = e^{S'} \psi'$ ist also erforderlich, bei der die Bedingung

$$\{-S, \mathcal{D} + m\} = \frac{1}{2m} \gamma_k \gamma_0 F_{k0} + O(1/m^2) \quad (2.12)$$

erfüllt werden muss, um einen diagonalisierten Diracoperator zu erhalten. Man stellt fest, dass dies durch die Wahl von

$$S' = \frac{1}{4m^2} \gamma_0 \gamma_k F_{k0} \quad (2.13)$$

gewährleistet wird. Schließlich ergibt sich damit die Lagrangedichte der HQET

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_h^{\text{stat}} + \frac{1}{2m} \mathcal{L}_h^{(1)} + \mathcal{L}_{\bar{h}}^{\text{stat}} + \frac{1}{2m} \mathcal{L}_{\bar{h}}^{(1)} + O(1/m^2) \quad (2.14)$$

mit

$$\mathcal{L}_h^{\text{stat}} = \bar{\psi}_h (m + D_0) \psi_h, \quad P_+ \psi_h = \psi_h, \quad \bar{\psi}_h P_+ = \bar{\psi}_h, \quad (2.15)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{h}}^{\text{stat}} = \bar{\psi}_{\bar{h}} (m - D_0) \psi_{\bar{h}}, \quad P_- \psi_{\bar{h}} = \psi_{\bar{h}}, \quad \bar{\psi}_{\bar{h}} P_- = \bar{\psi}_{\bar{h}}, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{L}_h^{(1)} = -(\mathcal{O}_{\text{kin}} + \mathcal{O}_{\text{spin}}), \quad \mathcal{L}_{\bar{h}}^{(1)} = -(\bar{\mathcal{O}}_{\text{kin}} + \bar{\mathcal{O}}_{\text{spin}}), \quad (2.17)$$

$$\mathcal{O}_{\text{kin}}(x) = \bar{\psi}_h(x) \mathbf{D}^2 \psi_h(x), \quad \mathcal{O}_{\text{spin}}(x) = \bar{\psi}_h(x) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}(x) \psi_h, \quad (2.18)$$

$$\bar{\mathcal{O}}_{\text{kin}}(x) = \bar{\psi}_{\bar{h}}(x) \mathbf{D}^2 \psi_{\bar{h}}(x), \quad \bar{\mathcal{O}}_{\text{spin}}(x) = \bar{\psi}_{\bar{h}}(x) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}(x) \psi_{\bar{h}}. \quad (2.19)$$

Dabei gilt $\sigma_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma_{ij}$, der Projektionsoperator ist durch $P_{\pm} = \frac{1 \pm \gamma_0}{2}$ und das chromomagnetische Feld ist durch $B_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{ij}$ gegeben. Es bleibt noch zu erwähnen, dass die Herleitung bisher die einer klassischen Theorie ist, was unter anderem an der Annahme (2.2) zu sehen ist, man also "glatte" Felder annimmt und somit Quantenfluktuationen unberücksichtigt lässt. Erst durch die Einführung des Pfadintegrals wird diese Theorie quantisiert.

Zunächst genügt es aber, die klassische Theorie zu betrachten und einige ihrer Eigenschaften zu untersuchen, die auch im Hinblick auf eine Übertragung auf das Gitter wichtig sind.

2.3. Eigenschaften - Kontinuum

Zunächst findet man ein interessantes Ergebnis bei der Berechnung des statischen Propagators. Man berechnet also für ein Quark die Greens-Funktion $G_h(x, y)$ des statischen Anteils des Diracoperators und startet demnach mit der Bedingung

$$(\partial_{x_0} + A_0(x) + m) G_h(x, y) = \delta(x - y) P_+. \quad (2.20)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$G_h(x, y) = \theta(x_0 - y_0) \exp(-m(x_0 - y_0)) \mathcal{P} \exp \left\{ - \int_{y_0}^{x_0} dz_0 A_0(z_0, \mathbf{x}) \right\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_+, \quad (2.21)$$

wobei \mathcal{P} der Pfadordnungsoperator für das Eichfeld A ist, so dass Felder am Ende des Integrationsweges links stehen. Mit dem entsprechenden Ansatz für ein Antiquark

$$(-\partial_{x_0} - A_0(x) + m) G_{\bar{h}}(x, y) = \delta(x - y) P_- \quad (2.22)$$

findet man als Lösung

$$G_{\bar{h}}(x, y) = \theta(y_0 - x_0) \exp(-m(y_0 - x_0)) \mathcal{P} \exp \left\{ - \int_{y_0}^{x_0} dz_0 A_0(z_0, \mathbf{x}) \right\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_-. \quad (2.23)$$

Hier fällt auf, dass die Masse jeweils in Form einer Exponentialfunktion $e^{\pm m(x_0 - y_0)}$ auftritt. Dies gilt auch dann noch, wenn man für eine 2-Punkt-Funktion mit einem schweren Quark das Pfadintegral ausgewertet hat, also

$$C_h(x, y; m) = C_h(x, y; 0) \exp(-m(x_0 - y_0)). \quad (2.24)$$

Deshalb ist es nun zweckmäßig, die Massenterme in (2.15) und (2.16) wegfällen zu lassen, wobei man dies später bei Berechnungen entsprechender Korrelationsfunktionen dadurch korrigieren müsste, die soeben angesprochenen Exponentialfaktoren nachträglich hinzuzufügen. Das Weglassen der Massen in den Termen der Lagrangedichte für die statische Ordnung führt letztlich dazu, dass man gegenüber der QCD eine konstante Energieverschiebung zu berücksichtigen hat.

Der statische Anteil der Lagrangedichte der HQET weist außerdem einige Symmetrien auf. Beim Übergang zur Theorie auf dem Gitter ist dann stets darauf zu achten, dass diese Symmetrien nicht verletzt werden. Konkret gibt es drei Symmetrien:

- Flavour

Fasst man ψ_h als F -komponentigen Vektor auf (für F Flavours), so findet man die offensichtliche Symmetrie

$$\psi_h(x) \rightarrow V \psi_h(x), \quad \bar{\psi}_h(x) \rightarrow \bar{\psi}_h(x) V^\dagger, \quad V \in \text{SU}(F). \quad (2.25)$$

2. Heavy Quark Effective Theory

- Spin

Die Lagrangedichte der HQET enthält keine Spin-Wechselwirkungsterme. Daher findet man auch für beliebige reelle Parameter α_k mit den Matrizen $\sigma_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma_{ij}$ eine Symmetrie (für jede Flavourkomponente von ψ_h) unter den SU(2)-Rotationen

$$\psi_h(x) \rightarrow e^{i\alpha_k\sigma_k}\psi_h(x), \quad \bar{\psi}_h(x) \rightarrow \bar{\psi}_h(x)e^{-i\alpha_k\sigma_k}. \quad (2.26)$$

- Lokale Flavour-Zahl

Da in der Lagrangedichte der statischen Theorie keine Ortsableitungen vorkommen, bildet auch die Transformation

$$\psi_h(x) \rightarrow e^{i\eta(\mathbf{x})}\psi_h(x), \quad \bar{\psi}_h(x) \rightarrow \bar{\psi}_h(x)e^{-i\eta(\mathbf{x})} \quad (2.27)$$

eine Symmetrie für jede lokale Phase $\eta(\mathbf{x})$. Zu jedem Ort \mathbf{x} gehört dann auch eine Noetherladung, die lokale Quarkzahl genannt wird

$$Q_h(x) = \bar{\psi}_h(x)\psi_h(x) \quad (2.28)$$

und Erhaltungsgröße ist $(\partial_0 Q_h(x) = 0 \ \forall x)$.

Die statische Theorie ist renormierbar, da die Massendimension der auftretenden Produkte von Feldern und Operatoren nicht die Raumzeit-Dimension übersteigen. Mögliche Gegen-terme sind dann leicht zur Theorie hinzuzufügen, wobei man wegen der angesprochenen Symmetrien aber eingeschränkt ist. Für die Lagrangedichte der quantisierten Theorie ergibt sich so

$$\mathcal{L}_h(x) = c_1 \mathcal{O}_1(x) + c_2 \mathcal{O}_2(x) \quad (2.29)$$

$$\mathcal{O}_1(x) = \bar{\psi}_h(x)\psi_h(x), \quad \mathcal{O}_2(x) = \bar{\psi}_h(x)D_0\psi_h(x). \quad (2.30)$$

Dabei kann $c_2 = 1$ gewählt werden und $c_1 = \delta m$ mit Massendimension $[\delta m] = 1$. δm wirkt dann als eine additive Massenrenormierung, was in diesem Fall nicht wegen chiraler Symmetrie verboten sein kann, da diese Symmetrie für ein statisches Quark nicht vorhanden ist.

Berücksichtigt man nun auch die Renormierung der Massen von leichten Quarks, so lassen sich die dann auftretenden Divergenzen auch in δm absorbieren. Der Zusammenhang zwischen Energiewerten der QCD und der HQET drückt sich nun wie folgt aus

$$E_{h,\bar{h}}^{\text{QCD}} = E_{h,\bar{h}}^{\text{stat}} \Big|_{\delta m=0} + \delta m + m = E_{h,\bar{h}}^{\text{stat}} \Big|_{\delta m=0} + m_{\text{bare}}. \quad (2.31)$$

Hier werden in m_{bare} und δm Divergenzen (Selbstenergie) absorbiert, wobei m endlich ist. Allerdings ist eine Aufteilung der endlichen Anteile der Renormierung auf m und δm beliebig.

2.4. Herleitung der Lagrangedichte - Gitter

Um die Theorie nun auf dem Gitter zu formulieren, müssen die Ableitungen durch Gitterableitungen im diskretisierten Raum ersetzt werden. Konkret bedeutet dies gemäß Wilson

$$D_0 \gamma_0 \rightarrow \frac{1}{2} \{ (\nabla_0 \nabla_0^*) \gamma_0 - a \nabla_0^* \nabla_0 \}, \quad (2.32)$$

wobei der hintere Term dazu dient, die ‘‘Doubler-Moden’’ zu entfernen (siehe z.B. [3]). Mit den Projektoren $P_+ \psi_h(x) = \psi_h$ und $P_- \psi_{\bar{h}}(x) = \psi_{\bar{h}}$ ergeben sich auf dem Gitter

$$D_0 \psi_h(x) = \nabla_0^* \psi_h(x) \quad D_0 \psi_{\bar{h}}(x) = \nabla_0 \psi_{\bar{h}}(x). \quad (2.33)$$

Mit einem weiteren Normierungsfaktor folgt für die Lagrangedichte der statischen Theorie schließlich

$$\mathcal{L}_h(x) = \frac{1}{1 + a\delta m} \bar{\psi}_h(x) [\nabla_0^* + \delta m] \psi_h(x), \quad (2.34)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{h}}(x) = \frac{1}{1 + a\delta m} \bar{\psi}_{\bar{h}}(x) [-\nabla_0 + \delta m] \psi_{\bar{h}}(x). \quad (2.35)$$

Die Wirkung, die zu dieser Lagrangedichte gehört, die also bei der Zeitableitung einen einfachen zeitartigen Link auf dem Gitter als Verknüpfung der Felder auf zwei Gitterpunkten nutzt, wird als Eichten-Hill-Wirkung bezeichnet. Denkbar sind natürlich auch andere Diskretisierungen, bei denen andere Paralleltransporter verwendet werden, um das Verhältnis von statistischen Fehlern zum Signal auf dem Gitter zu minimieren. Dies wird in [16, 17] besprochen. Für diese Arbeit sind die dort vorgestellten Wirkungen HYP1 und HYP2 von Bedeutung. Diese bewirken anschaulich ein Verschmieren der Links in Zeitrichtung.

2.5. Eigenschaften - Gitter

Wie auch im Kontinuumsfall kann man wieder den Propagator eines Quarks in der statischen Theorie betrachten. Die folgende Gleichung stellt die nötige Definition dar:

$$\frac{1}{1 + a\delta m} (\nabla_0^* + \delta m) G_h(x, y) = \delta(x - y) P_+ := a^{-4} \prod_{\mu} \delta \frac{x_{\mu}}{a} \frac{y_{\mu}}{a} P_+. \quad (2.36)$$

Als Lösung findet sich hier

$$G_h(x, y) = \theta(x_0, y_0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \exp\left(-\widehat{\delta m}(x_0 - y_0)\right) \mathcal{P}(y, x; 0)^{\dagger} P_+ \quad (2.37)$$

bzw. für ein Antiquark mit zu (2.36) analoger Definition

$$G_{\bar{h}}(x, y) = \theta(y_0, x_0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \exp\left(-\widehat{\delta m}(y_0 - x_0)\right) \mathcal{P}(y, x; 0) P_- \quad (2.38)$$

mit $\widehat{\delta m} = \frac{1}{a} \ln(1 + a\delta m)$ und \mathcal{P} dem Paralleltransporter entlang eines zeitartigen Pfades. Völlig analog zu (2.31) (Kontinuumsfall) ergibt sich

$$E_{h/\bar{h}}^{\text{QCD}} = E_{h/\bar{h}}^{\text{stat}} \Big|_{\delta m=0} + m_{\text{bare}}, \quad m_{\text{bare}} = \widehat{\delta m} + m \quad (2.39)$$

mit dem Unterschied, dass hier δm durch $\widehat{\delta m}$ ersetzt ist. Die Aufteilung der endlichen Renormierungsbeiträge auf m und $\widehat{\delta m}$ ist auch hier beliebig. Die zuvor besprochenen Symmetrien der Kontinuumstheorie (also Flavour, Spin und lokale Flavour-Zahl) sind auch auf dem Gitter erhalten.

2.6. $O(a)$ -Verbesserung

Um auftretende Gitterartefakte in systematischer Weise zu unterdrücken, kam bereits K. Symanzik 1983 auf die Idee, Terme zur Wirkung hinzuzufügen, die bei der Extrapolation zum Kontinuum verschwinden [18, 19]. Für die QCD wurde dies von Lüscher et al. [20] und für statische Quarks von Kurth und Sommer [21] entwickelt. Die so gewonnene effektive Kontinuumstheorie lässt sich demnach als Potenzreihe in der Gitterkonstanten a darstellen:

$$S_{\text{eff}} = S_0 + aS_1 + \dots, \quad S_i = \int d^4x \mathcal{L}_i(x). \quad (2.40)$$

Dabei ist S_0 die zu $\mathcal{L}_0(x) = \mathcal{L}_h^{\text{stat}}$ (Lagrangedichte der Kontinuumsstheorie in statischer Approximation) gehörende Wirkung. Es handelt sich hier um $O(a)$ -Verbesserung. Es werden also die führenden Gitterartefakte eliminiert. Daher werden nur die Terme, die in der zu S_1 gehörigen Lagrangedichte auftreten können,

$$\mathcal{L}_1(x) = \sum_{i=3}^5 c_i O_i(x), \quad (2.41)$$

betrachtet. In Frage kommen hier nur Terme, deren Massendimension fünf ergibt, damit diese zusammen mit a multipliziert mit der Dimension der unverbesserten Theorie (also wegen drei Raumdimensionen und der Zeit vier) übereinstimmt. Die Koeffizienten c_i sind Funktionen, die nur von der nackten Kopplungskonstanten g_0 abhängen. Berücksichtigt man nun, dass die O_i die Symmetrien der Theorie erhalten müssen, kommen letztlich nur noch

$$O_3 = \bar{\psi}_h D_0 D_0 \psi_h \quad O_4 = m_1 \bar{\psi}_h \quad O_5 = m_1^2 \bar{\psi}_h \psi_h \quad (2.42)$$

in Frage. Die Bewegungsgleichung für schwere Quarks

$$D_0 \psi_h = 0 \quad (2.43)$$

liefert ein weiteres Ausschlusskriterium. Es verbleibt nur der Term O_5 . Dieser stellt aber nichts anderes als eine weitere Massenrenormierung dar, so dass dieser Beitrag in δm mit berücksichtigt werden kann, womit δm dann aber explizit von der Masse des leichten Quarks abhängt.

Renormierung des Axialvektorstroms Neben dieser $O(a)$ -Verbesserung ist es ebenso wichtig, die Renormierung und Verbesserung der Zeitkomponente des Axialvektorstroms zu betrachten, da diese einerseits das Feld eines leichten Quarks enthält und andererseits dieser Strom im Folgenden zur Bestimmung der HQET-Parameter wichtig ist. In der effektiven Theorie von Symanzik ergibt sich laut [21]

$$\left(A_0^{\text{stat}}\right)_{\text{eff}} = A_0^{\text{stat}} + a \sum_{k=1}^4 \omega_k \left(\delta A_0^{\text{stat}}\right)_k, \quad A_0^{\text{stat}} = \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_5 \psi_h. \quad (2.44)$$

Der Index l bei Feldern für ein leichtes Quark wird der Einfachheit halber von nun an weggelassen. An (2.44) liest man ab, dass die zusätzlichen Terme für eine $O(a)$ -Verbesserung eine Massendimension von vier haben müssen.

2. Heavy Quark Effective Theory

Eine mögliche Basis dafür ist durch

$$\left(\delta A_0^{\text{stat}}\right)_1 = \bar{\psi} \overleftarrow{D}_j \gamma_j \gamma_5 \psi_h \quad (2.45)$$

$$\left(\delta A_0^{\text{stat}}\right)_2 = \bar{\psi} \gamma_5 D_0 \psi_h \quad (2.46)$$

$$\left(\delta A_0^{\text{stat}}\right)_3 = \bar{\psi} \overleftarrow{D}_0 \gamma_5 \psi_h \quad (2.47)$$

$$\left(\delta A_0^{\text{stat}}\right)_4 = m_1 \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_5 \psi_h \quad (2.48)$$

gegeben. Die Bewegungsgleichung (2.43) schließt direkt (2.46) aus. Die Bewegungsgleichung für $\bar{\psi}$ verbindet aber die übrigen drei Kandidaten miteinander, so dass man auch z.B. (2.47) wegfallen lassen kann. Nimmt man zusätzlich an, dass $am_1 \ll 1$ gilt, kann man (2.48) ebenfalls wegfallen lassen, so dass man mit

$$\left(A_0^{\text{stat}}\right)_{\text{eff}} = A_0^{\text{stat}} + a\tilde{\omega}_1 \left(\delta A_0^{\text{stat}}\right)_1 \quad (2.49)$$

verbleibt.

Auf dem Gitter stellt sich der renormierte und verbesserte Axialvektorstrom (Zeitkomponente) dann durch

$$\left(A_{\text{R}}^{\text{stat}}\right)_0 = Z_{\text{A}}^{\text{stat}}(g_0, a\mu) \left(A_{\text{I}}^{\text{stat}}\right)_0 \quad (2.50)$$

$$\left(A_{\text{I}}^{\text{stat}}\right)_0 = A_0^{\text{stat}} + ac_{\text{A}}^{\text{stat}}(g_0) \bar{\psi} \gamma_j \gamma_5 \left(\overleftarrow{\nabla}_j + \overleftarrow{\nabla}_j^*\right) \psi_h \quad (2.51)$$

dar, wobei $Z_{\text{A}}^{\text{stat}}$ eine von der Masse unabhängige Renormierungskonstante und $c_{\text{A}}^{\text{stat}}$ ein dimensionsloser Verbesserungskoeffizient ist, der nur von der nackten Kopplungskonstanten abhängt. Dieser Koeffizient lässt sich so bestimmen, dass sich die Zeitkomponente des Axialvektorstroms in der effektiven Theorie von Symanzik als

$$\left(A_0^{\text{stat}}\right)_{\text{eff}} = \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_5 \psi_h + O(a^2) \quad (2.52)$$

darstellen lässt, d.h. die Regularisierungsartefakte sind somit von $O(a^2)$, während $\tilde{\omega}_1$ also von $O(a) = O(1/m)$ ist.

3. Korrelationsfunktionen im Schrödinger-Funktional

Das Schrödinger-Funktional (SF), dessen Renormierbarkeit für die skalare Feldtheorie bereits 1981 von Symanzik gezeigt wurde [22], stellt eine Quantenfeldtheorie in einem endlichen euklidischen Raumzeit-Volumen ($L^3 \times T$) mit weiter unten besprochenen speziellen Randbedingungen dar. Wichtige Grundlagen des Schrödinger-Funktional der QCD werden in [23] besprochen, während die hier verwendete Wahl der räumlichen Randbedingungen sich nach [24] richtet. Ansonsten richtet sich die Darstellung hier wieder nach [13, 14].

3.1. Randbedingungen

Häufig wird das Schrödinger-Funktional grafisch durch einen Zylinder dargestellt. Dieser soll ein Raumzeit-Volumen ($L^3 \times T$) repräsentieren, bei dem die speziellen Randbedingungen zum Ausdruck kommen sollen. In den drei Raumrichtungen wählt man für die Fermionfelder periodische Randbedingungen mit einer zusätzlichen Phase

$$\psi(x + L\hat{k}) = e^{i\theta_k} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x + L\hat{k}) = e^{-i\theta_k} \bar{\psi}(x), \quad (3.1)$$

während man für die Zeitdimension bei $t = 0$ und $t = T$ feste Werte vorgibt

$$P_+ \psi(x) \big|_{x_0=0} = 0, \quad P_- \psi(x) \big|_{x_0=T} = 0. \quad (3.2)$$

Entsprechend gelten auch

$$\bar{\psi}(x) P_- \big|_{x_0=0} = 0, \quad \bar{\psi}(x) P_+ \big|_{x_0=T} = 0. \quad (3.3)$$

Führt man eine Transformation $\psi(x) \rightarrow e^{i\theta_k x_k/L} \psi(x)$ und $\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\theta_k x_k/L} \bar{\psi}(x)$ durch, so werden aus den räumlichen Randbedingungen einfache periodische Randbedingungen ohne Pha-

3. Korrelationsfunktionen im Schrödinger-Funktional

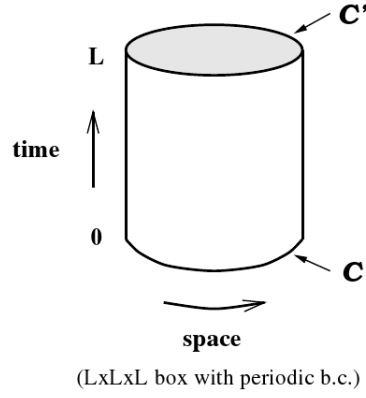


Abbildung 3.1.: schematische Darstellung des SF für eine räumliche Dimension [14]

se, aber bei räumlichen Ableitungen auf dem Gitter muss eine Phase berücksichtigt werden

$$\nabla_k \psi(x) = \frac{1}{a} \left[e^{i\theta_k a/L} U(x, \mu) \psi(x + a\hat{k}) - \psi(x) \right]. \quad (3.4)$$

Im Folgenden wird $\theta = \theta_k \forall k$ gesetzt. Für statische (schwere) Quarks verschwinden die Projektionen durch P_- sowieso, so dass sich für diesen Fall als Randbedingungen noch

$$P_+ \psi_h(x) \big|_{x_0=0} = 0, \quad \bar{\psi}_h(x) P_+ \big|_{x_0=T} = 0 \quad (3.5)$$

ergeben. Definiert man für die Fermionenfelder “außerhalb” des Schrödinger-Zylinders

$$\psi_h(x) = 0, \text{ falls } x_0 < 0 \text{ oder } x_0 \geq T, \quad (3.6)$$

findet man für die Wirkung auf dem Gitter mit Schrödinger-Funktional-Randbedingungen

$$S_h = \frac{1}{1 + a\delta m} a^4 \sum_x \bar{\psi}_h(x) [\nabla_0^* + \delta m] \psi_h(x). \quad (3.7)$$

Dabei werden dieselben Randbedingungen für die statischen Quarks verwendet wie für die relativistischen (leichten Quarks), also

$$\psi_h(x + L\hat{k}) = \psi_h(x), \quad \bar{\psi}_h(x + L\hat{k}) = \bar{\psi}_h(x). \quad (3.8)$$

Weiterhin lassen sich im Schrödinger-Funktional Randfelder definieren, die nur bei $t = 0$

$$\zeta_l(\mathbf{x}), \quad \bar{\zeta}_l(\mathbf{x}), \quad \zeta_{\bar{h}}(\mathbf{x}), \quad \bar{\zeta}_{\bar{h}}(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

und $t = T$ existieren

$$\zeta'_1(\mathbf{x}), \bar{\zeta}'_1(\mathbf{x}), \zeta'_h(\mathbf{x}), \bar{\zeta}'_h(\mathbf{x}). \quad (3.10)$$

Diese Randfelder dienen zur Bildung bestimmter Korrelationsfunktionen, die im nächsten Abschnitt besprochen werden. Die hier vorgestellten Randbedingungen haben außerdem den Vorteil, dass durch sie eine Lücke im Spektrum des Diracoperators erzeugt wird, so dass man Simulationen im Schrödingerfunktional bei verschwindender leichter Quarkmasse durchführen kann.

3.2. Korrelationsfunktionen in der QCD und deren Renormierung

Im Falle der QCD verwende ich nun zur Kennzeichnung von Feldern schwerer Quarks den Index b statt h . Es gibt zwei Arten von Korrelationsfunktionen, die hier betrachtet werden müssen. Zum Einen gibt es Rand-Rand-Korrelationsfunktionen, wie die hier wichtigen f_1 und k_1 und Rand-Volumen-Korrelationsfunktionen, von denen f_A , f_P , g_A und g_P benötigt werden. Vom Prinzip her ähneln sich g_A und f_A sowie g_P und f_P , so dass hier nur letztere vorgestellt werden. Der Unterschied besteht bis auf ggf. unterschiedliche Vorzeichen darin, dass es sich bei den “g“-Funktionen um Rand-Volumen-Korrelationsfunktionen mit Quellen am oberen Rand bei $t = T$ (im Gegensatz zu Quellen am unteren Rand bei $t = 0$) handelt.

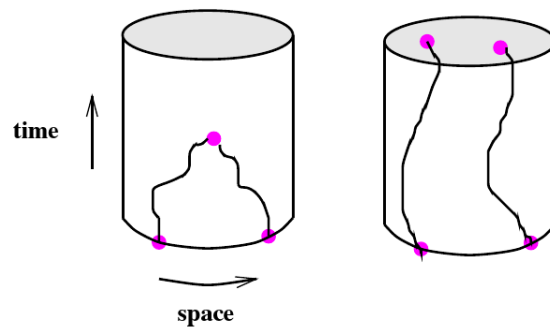


Abbildung 3.2.: links - Darstellung einer Rand-Volumen-Korrelationsfunktion im SF, rechts - Darstellung einer Rand-Rand-Korrelationsfunktion im SF [14]

3. Korrelationsfunktionen im Schrödinger-Funktional

Die Rand-Volumen-Korrelationsfunktionen werden gemäß

$$f_A(x_0, \theta) = -\frac{a^6}{2} \sum_{\mathbf{y}, \mathbf{z}} \langle (A_L)_0(x) \bar{\zeta}_b(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_l(\mathbf{z}) \rangle \quad (3.11)$$

$$f_P(x_0, \theta) = -\frac{a^6}{2} \sum_{\mathbf{y}, \mathbf{z}} \langle P(x) \bar{\zeta}_b(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_l(\mathbf{z}) \rangle \quad (3.12)$$

definiert. Dabei ist zu beachten, dass $P(x)$ keine $O(a)$ -Artefakte besitzt und somit hier keine Verbesserung nötig ist. f_P wird hier nur zur Verbesserung von Gitter-QCD-Daten der Korrelationsfunktion f_A

$$f_A^I(x_0) = f_A(x_0) + c_A \frac{1}{2} (\partial_0 + \partial_0^*) f_P(x_0) \quad (3.13)$$

benötigt. Bei der Besprechung des von mir geschriebenen Computerprogrammes wird darauf noch näher eingegangen. Die Rand-Rand-Korrelationsfunktionen lauten

$$f_1(\theta) = -\frac{a^{12}}{2L^6} \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}} \langle \bar{\zeta}'_l(\mathbf{u}) \gamma_5 \zeta'_b(\mathbf{v}) \bar{\zeta}_b(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_l(\mathbf{z}) \rangle, \quad (3.14)$$

$$k_1(\theta) = -\frac{a^{12}}{2L^6} \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, k} \langle \bar{\zeta}'_l(\mathbf{u}) \gamma_k \zeta'_b(\mathbf{v}) \bar{\zeta}_b(\mathbf{y}) \gamma_k \zeta_l(\mathbf{z}) \rangle. \quad (3.15)$$

Die Renormierung der einzelnen Korrelationsfunktionen erfolgt multiplikativ durch entsprechende Z 's für die Randfelder oder den Axialvektorstrom und additiv durch Terme, die entsprechende Verbesserungskoeffizienten aufweisen:

$$[f_A]_R(x_0, \theta) = Z_A \left(1 + \frac{1}{2} b_A a m_{q,b} \right) Z_\zeta^2 \left(1 + b_\zeta a m_{q,b} \right) f_A(x_0, \theta), \quad (3.16)$$

$$[f_1]_R(\theta) = Z_\zeta^4 \left(1 + b_\zeta a m_{q,b} \right)^2 f_1(\theta). \quad (3.17)$$

3.3. Korrelationsfunktionen in der HQET und deren Renormierung

Der $O(1/m)$ -Anteil der Lagrangedichte der HQET

$$\mathcal{L}_h^{(1)}(x) = -\left(\omega_{\text{kin}} \mathcal{O}_{\text{kin}}(x) + \omega_{\text{spin}} \mathcal{O}_{\text{spin}}(x)\right) \quad (3.18)$$

enthält Terme, die Massendimension fünf besitzen. Daher, wie von [25] gezeigt, ist eine Theorie mit dem Pfadintegralmaß

$$W_{\text{NRQCD}} \propto \exp\left(-a^4 \sum_x \left[\mathcal{L}_{\text{light}}(x) + \mathcal{L}_h^{\text{stat}}(x) + \mathcal{L}_h^{(1)}(x)\right]\right), \quad (3.19)$$

wobei $\mathcal{L}_{\text{light}}$ die QCD-Anteile ohne schwere Quarks enthält, nicht renormierbar. Man erhielte in Störungsrechnung in jeder Ordnung neue Divergenzen, so dass immer mehr Gegenterme hinzugefügt werden müssten und letztlich der Kontinuumslikes der Gittertheorie nicht existieren würde. Daher wählt man für die HQET den Ansatz W in $1/m$ zu entwickeln, wobei man $\omega_{\text{kin}} = O(1/m) = \omega_{\text{spin}}$ zählt und erhält

$$W_{\text{NRQCD}} \rightarrow W_{\text{HQET}} := \exp\left(-a^4 \sum_x \left[\mathcal{L}_{\text{light}}(x) + \mathcal{L}_h^{\text{stat}}(x)\right]\right) \left\{1 - a^4 \sum_x \mathcal{L}_h^{(1)}(x)\right\}. \quad (3.20)$$

Im Prinzip kann man (3.20) auch als Definition der HQET ansehen. Diese Gleichung verrät nämlich nun, wie man Erwartungswerte in der HQET berechnet:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{stat}} + \omega_{\text{kin}} a^4 \sum_x \langle \mathcal{O} \mathcal{O}_{\text{kin}}(x) \rangle_{\text{stat}} + \omega_{\text{spin}} a^4 \sum_x \langle \mathcal{O} \mathcal{O}_{\text{spin}}(x) \rangle_{\text{stat}} \quad (3.21)$$

$$:= \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{stat}} + \omega_{\text{kin}} \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{kin}} + \omega_{\text{spin}} \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{spin}}, \quad (3.22)$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{stat}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\text{Felder}} \mathcal{O} \exp\left(-a^4 \sum_x \left[\mathcal{L}_{\text{light}}(x) + \mathcal{L}_h^{\text{stat}}(x)\right]\right). \quad (3.23)$$

Dabei ist \mathcal{Z} durch $\langle 1 \rangle_{\text{stat}} = 1$ bestimmt und das Integral geht über alle Felder.

Für die Renormierung treten in der HQET nur multiplikative Z -Faktoren auf (und natürlich wie für die Korrelationsfunktionen dort erforderlich eine entsprechende Exponentialfunktion, vgl. (2.24)):

$$[f_A]_{\text{R}} = Z_A^{\text{HQET}} Z_{\zeta_h} Z_{\zeta} e^{-m_{\text{bare}} x_0} \left\{ f_A^{\text{stat}} + c_A^{\text{HQET}} f_{\delta A}^{\text{stat}} + \omega_{\text{kin}} f_A^{\text{kin}} + \omega_{\text{spin}} f_A^{\text{spin}} \right\}, \quad (3.24)$$

$$[f_1]_{\text{R}} = Z_{\zeta_h}^2 Z_{\zeta}^2 e^{-m_{\text{bare}} T} \left\{ f_1^{\text{stat}} + \omega_{\text{kin}} f_1^{\text{kin}} + \omega_{\text{spin}} f_1^{\text{spin}} \right\}. \quad (3.25)$$

3. Korrelationsfunktionen im Schrödinger-Funktional

Die Randfelder haben also eine einfache multiplikative Renormierung, hier stellvertretend für $\zeta_l(\mathbf{x})$ gezeigt:

$$(\zeta_l(\mathbf{x}))_R = Z_\zeta \zeta_l(\mathbf{x}). \quad (3.26)$$

Will man nun z.B. f_A^{stat} oder f_A^{kin} berechnen, muss man die entsprechenden Terme aus der geschwungenen Klammer von (3.20) wählen, also für statische Anteile nur die 1, für "kin"-Anteile den entsprechenden Term aus der Lagrangedichte usw. und diesen Term für O in (3.23) einsetzen, natürlich auch den Ausdruck für f_A unter dem Integral. Allerdings muss man bei f_A^{stat} aufpassen, von der Zeitkomponente des Axialvektorstroms keine Verbesserungsterme mitzunehmen. Betrachtet man (3.11), so wird klar, dass wegen der Verbesserung der Zeitkomponente des Axialvektorstroms auch der Term $f_{\delta A}^{\text{stat}}$ in (3.24) auftritt. Dieser Term wird also mit der 1 für O berechnet, berücksichtigt aber die Verbesserungsterme statt der statischen Anteile der Zeitkomponente des Axialvektorstroms bei der Einsetzung von f_A unter dem Integral. Hingegen tritt in (3.12) kein Axialvektorstrom auf, so dass es auch nur f_1 , f_1^{kin} und f_1^{spin} geben kann (vgl. (3.25)).

Bei den Berechnungen von Matrixelementen oder Korrelationsfunktionen einer effektiven quantisierten Theorie müssen alle zusätzlichen möglichen Terme mit passenden Quantenzahlen und passender Massendimension berücksichtigt werden. Im Falle des Axialvektorstroms - hier wird nur die Zeitkomponente benötigt - findet man für die HQET

$$A_0^{\text{HQET}}(x) = Z_A^{\text{HQET}} \left[A_0^{\text{stat}}(x) + \sum_{i=1}^2 c_A^{(i)} A_0^{(i)}(x) \right], \quad (3.27)$$

$$A_0^{(1)}(x) = \bar{\psi}(x) \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_i \left(\nabla_i^S - \overleftarrow{\nabla}_i^S \right) \psi_h(x), \quad (3.28)$$

$$A_0^{(2)}(x) = -\tilde{\partial}_i A_i^{\text{stat}}. \quad (3.29)$$

Die darin auftretenden Ableitungen sind als symmetrische Ableitungen zu verstehen, also:

$$\tilde{\partial}_i = \frac{1}{2} (\partial_i + \partial_i^*), \quad \overleftarrow{\nabla}_i^S = \frac{1}{2} \left(\overleftarrow{\nabla}_i + \overleftarrow{\nabla}_i^* \right), \quad \nabla_i^S = \frac{1}{2} (\nabla_i + \nabla_i^*). \quad (3.30)$$

Wegen der periodischen Randbedingungen des SF entfällt hier (3.29).

Aus den zuvor besprochenen Korrelationsfunktionen lassen sich nun weitere Funktionen berechnen, die zum Matching, der Step-Scaling-Funktion und somit letztlich zur Berechnung der HQET-Parameter benötigt werden. Eine mögliche Strategie wird im nächsten Kapitel vorgestellt.

4. HQET-Parameter

Die im Folgenden vorgestellte Strategie zur Bestimmung der HQET-Parameter ω_i basiert auf [6] und wurde im Fall der “quenched Approximation” in [5] durchgeführt. Bei dieser Strategie geht man nach dem hier illustrierten Schema vor:

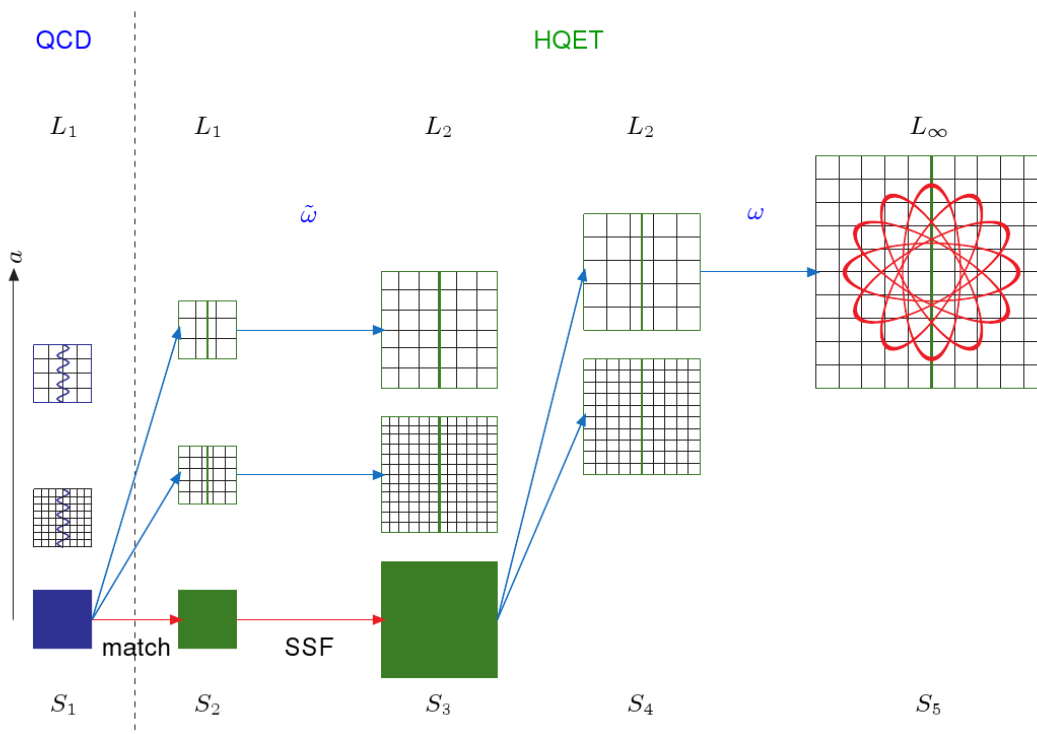


Abbildung 4.1.: Darstellung der Strategie zur Bestimmung der HQET-Parameter [5]

Man führt insgesamt vier Simulationen auf jeweils mehreren Gittern durch. Die Simulationen sind hier mit S_1 , S_2 , S_3 und S_4 bezeichnet. Davon werden zwei Simulationen bei einer Gitterausdehnung L_1 und zwei bei einer Gitterausdehnung L_2 durchgeführt. Für jede Simulation werden verschiedene Auflösungen benutzt, wie man, durch die Gitterkonstante a in der Grafik angedeutet, erkennen kann. Außerdem gibt es jeweils zwei Arten von Gittern. Entweder entspricht die Anzahl der Gitterpunkte in Zeitrichtung der Anzahl der Gitterpunkte in

4. HQET-Parameter

Raumrichtung, oder aber man betrachtet “halbe“ Gitter, bei denen quasi der obere Rand des SF-Zylinders in die Mitte des SF-Zylinders gelegt wird und der obere Teil entfällt ($T = L/2$).

Ersichtlich aus Abb. 4.1 ist auch, dass die Simulation S_1 QCD-Daten bereitstellt, während in den übrigen Simulationen HQET-Korrelationsfunktionen berechnet werden. Dabei möchte man letztlich HQET-Parameter erhalten, mit denen man physikalisch relevante Größen wie z.B. die Zerfallskonstanten von Hadronen in entsprechend großen Volumina berechnen kann, was hier mit S_5 angedeutet ist. Um diese zu bekommen, sind die Daten von S_4 zur Bestimmung der HQET-Parameter maßgeblich, weil man dort die Werte für die Gitterkonstante passend zu denen für Größen, die in S_5 berechnet wurden, gewählt hat, während die Gitterausdehnung mit der aus S_3 übereinstimmt. Um diese Daten aber nutzen zu können, braucht man zum Einen die Step-Scaling-Funktion (SSF in Abb. 4.1) und zum Anderen das Matching der HQET zur QCD (match in Abb. 4.1). Für das Matching sind offenbar die Daten von S_1 wichtig, während für die SSF die Daten von S_2 und S_3 benötigt werden. Die einzelnen Schritte, die nun die Daten der einzelnen Simulationen verknüpfen und letztlich in der Berechnung der HQET-Parameter ω_i münden, werden im nächsten Abschnitt erläutert.

4.1. Strategie zur Bestimmung der Parameter

In der folgenden Tabelle sind die fünf HQET-Parameter, die bestimmt werden sollen, zusammengestellt. Bei dieser hier vorgestellten Strategie zur Bestimmung der HQET-Parameter hat

Tabelle 4.1.: Zusammenstellung der HQET-Parameter in verschiedenen Theorien [5]

ω_i	Definition	Klassischer Wert	Wert in statischer Theorie
ω_1	m_{bare}	m_b	$m_{\text{bare}}^{\text{stat}}$
ω_2	$\ln(Z_A^{\text{HQET}})$	0	$\ln(Z_{A,\text{RGI}}^{\text{stat}} C_{\text{PS}})$
ω_3	$c_A^{(1)}$	$-1/(2m_b)$	ac_A^{stat}
ω_4	ω_{kin}	$1/(2m_b)$	0
ω_5	ω_{spin}	$1/(2m_b)$	0

man den Vorteil, dass die Observablen im endlichen Raumzeit-Volumen so gewählt werden können, so dass sie linear in ω ausgedrückt werden können

$$\Phi(L, M, a) = \eta(L, a) + \phi(L, a) \omega(M, a). \quad (4.1)$$

Dabei enthält der 5er-Vektor η nur Korrelationsfunktionen der statischen Theorie, während ϕ eine blockdiagonale 5×5 Matrix ist, deren Einträge aus HQET-Korrelationsfunktionen gebildet werden. ω ist, da hier fünf HQET-Parameter betrachtet werden, natürlich auch ein 5er-Vektor. Um die HQET-Parameter zu erhalten, ist nun das Matching der HQET-Observablen (auch ein 5er-Vektor) Φ bei einer bestimmten Gittergröße L_1 mit den entsprechenden Observablen auf Seite der QCD Φ^{QCD} nötig. Dazu wird für die QCD-Daten zuerst deren Kontinuumslimites gebildet

$$\Phi_i^{\text{QCD}}(L_1, M, 0) = \lim_{a \rightarrow 0} \Phi_i^{\text{QCD}}(L_1, M, a), \quad (4.2)$$

so dass komponentenweise die Matchingbedingung

$$\Phi_i(L_1, M, a) = \Phi_i^{\text{QCD}}(L_1, M, 0) \quad (4.3)$$

angesetzt wird. Für die Matchingobservablen werden

$$\Phi^{\text{QCD}} = \left(L\Gamma^{\text{P}}, \ln \left(\frac{-f_A}{\sqrt{f_1}} \right), R_A, R_1, \frac{3}{4} \ln \left(\frac{f_1}{k_1} \right) \right)^{\text{t}} \quad (4.4)$$

gewählt. Dabei gelten folgende Definitionen:

$$\Gamma^{\text{P}} = -\tilde{\partial}_0 (\ln(-f_A(x_0, \theta_0))) \Big|_{(x_0=T/2, T=L)}, \quad (4.5)$$

$$R_A = \ln \left(\frac{f_A(T/2, \theta_1)}{f_A(T/2, \theta_2)} \right) \Big|_{T=L}, \quad (4.6)$$

$$R_1 = \frac{1}{4} \left(\ln(f_1(\theta_1) k_1(\theta_1)^3) - \ln(f_1(\theta_2) k_1(\theta_2)^3) \right) \Big|_{T=L/2}. \quad (4.7)$$

Die beiden übrigen bereits in (4.4) direkt angegebenen Komponenten werden aus Korrelationsfunktionen von Gittern mit $T = L$ berechnet. Beachtet man diese Definitionen sowie (3.14) und (3.15), erkennt man, dass für große L die ersten beiden Komponenten bis auf konstante kinematische Korrekturen gegen die Masse und Zerfallskonstante des B-Mesons streben. Entsprechende Bedeutung für die zusätzlichen HQET-Parameter zu $O(1/m)$ erkennt man auch in den übrigen Komponenten von Φ^{QCD} . Z.B. enthält die fünfte Komponente offensichtlich noch einen spinsensiblen Anteil (durch die Gammamatrizen, über die bei k_1 summiert wird), während dieser Anteil auf Grund der Logarithmengesetze in der vierten Komponente nicht mehr zum Tragen kommen kann.

Die statischen Korrekturanteile in (4.1) sind durch

$$\eta = \left(L\Gamma^{\text{stat}}, \zeta_A, R_A^{\text{stat}}, R_1^{\text{stat}}, 0 \right)^{\text{t}} \quad (4.8)$$

4. HQET-Parameter

gegeben. Für die HQET sind die Definitionen der in den hier angegebenen Vektoren und Matrizen auftretenden Größen am Ende dieses Abschnitts angegeben.

Das Matching muss deshalb in einem kleinen Volumen $(L_1)^3$ geschehen, damit die Entwicklung in $1/m_b$ für die HQET mit moderatem Gitterabstand präzise durchgeführt werden kann und damit seitens der QCD für verschiedene Gitter $am_b < 1/2$ bleibt, wobei nur dann der Kontinuumslikes gebildet werden darf und somit renormierte Größen der QCD zur Bestimmung der HQET-Parameter benutzt werden können. Als vernünftige Wahl hat sich hier $L_1 \approx 0.4 \text{ fm}$ erwiesen [12].

Nun ist man aber an ω in einem größeren Volumen interessiert. Dazu invertiert man zunächst (4.1) und erhält so den Ausdruck

$$\tilde{\omega}(M, a) := \phi^{-1}(L_1, a) \left[\Phi^{\text{QCD}}(L_1, M, 0) - \eta(L_1, a) \right], \quad (4.9)$$

wobei hier das $\tilde{\omega}$ ein Zwischenresultat für das kleine Volumen andeuten soll. Im größeren Volumen bei L_2 soll aber nun ω erhalten werden. An Hand von (4.9) erkennt man, dass also $\Phi(L, M, 0)$ bei $L = L_2$ benötigt wird. Daher setzt man von der Form her erneut mit (4.1) an, allerdings mit $\tilde{\omega}$, und bildet den Kontinuumslikes, so dass sich

$$\Phi(L_2, M, 0) = \lim_{a \rightarrow 0} \{ \eta(L_2, a) + \phi(L_2, a) \tilde{\omega}(M, a) \} \quad (4.10)$$

ergibt. Für den konkreten Fall hier genügt es, diesen Prozess nur ein einziges Mal durchzuführen. Theoretisch könnte man aber mit diesem Schema zu noch größeren Werten für L übergehen, solange man $n_2 = L_2/a$, $n_1 = L_1/a$ und $s = n_2/n_1$ konstant hält. Nach einem einmalig ausgeführten Schritt gelangt man von L zu sL (hier ist $s = 2$). Dieses Verfahren wird “step-scaling” genannt und wurde erstmalig in [26] diskutiert.

Die gesuchten HQET-Parameter finden wir nun in Analogie zu (4.9) durch

$$\omega(M, a) := \phi^{-1}(L_2, a) \left[\Phi(L_2, M, 0) - \eta(L_2, a) \right] \quad (4.11)$$

mit Φ aus (4.10) gegeben. $\omega(M, a)$ hängt also nun durch das Matching zur QCD von der RGI-invarianten Masse M einerseits und der Gitterkonstanten a andererseits ab. Dabei sind natürlich gemäß des Schemas in Abb. 4.1 für ϕ^{-1} und η die Daten von S_4 zu verwenden, wobei auf eine Abweichung noch später eingegangen wird.

Welche Daten aber für Φ zu verwenden sind und wie darin die Step-Scaling-Funktion (SSF) enthalten ist, zeigt sich, wenn man (4.9) in (4.10) einsetzt, also

$$\Phi(L_2, M, 0) = \lim_{a/L_1 \rightarrow 0} \left\{ \eta(L_2, a) + \phi(L_2, a) \phi^{-1}(L_1, a) [\Phi(L_1, M, 0) - \eta(L_1, a)] \right\} \quad (4.12)$$

betrachtet. Die SSF tritt dabei in zwei Formen auf, additiv und multiplikativ. Der multiplikative Anteil ergibt sich aus dem Matrixprodukt von $\phi(L_2)$ und $\phi^{-1}(L_1)$. Anschaulich zeigt sich hier ja gerade das Verhältnis gewisser Größen bei L_2 und L_1 . Der additive Anteil ist etwas komplizierter. Dazu muss man die Zerlegung

$$\eta = \eta^a + \eta^b, \text{ mit } \eta_{i \geq 3}^a = 0 \text{ und } \eta_{i \leq 2}^b = 0 \quad (4.13)$$

vornehmen. Für η^b existiert der Kontinuumslimit, für η^a hingegen nicht, dort nämlich nur, wenn man die Differenz von dessen Werten bei L_2 und L_1 bildet. Die Ursache ist, dass bei den Elementen von η^b per Definition keine divergenten $1/a$ -Anteile mehr auftreten, bei η^a hingegen erst nach der Differenzbildung nicht mehr.

Bezeichnet man nun den multiplikativen Anteil mit Σ und den additiven Anteil, bei dem man die Differenzbildung berücksichtigen muss, mit $\hat{\Sigma}$, so findet man schließlich

$$\Phi(L_2, M, 0) = \eta^b(L_2, 0) + \lim_{a/L_1 \rightarrow 0} \left\{ \Sigma(L_1, a) [\Phi(L_1, M, 0) - \eta^b(L_1, 0)] + \hat{\Sigma}(L_1, a) \right\}. \quad (4.14)$$

Hier gilt es aber noch zu berücksichtigen, dass $\eta^a(L_1)$ vor der Differenzbildung mit $\eta^a(L_2)$ mit Σ multipliziert werden muss. Durch die Blockdiagonalgestalt von $\phi(L_2)$ und $\phi^{-1}(L_1)$ ergibt sich auch eine entsprechende Gestalt bei Σ , so dass

$$\hat{\Sigma}_i(L_1, a) = \eta_i(L_2, a) - D_i \eta_i(L_1, a), \quad i = 1, 2 \quad (4.15)$$

mit $D = \text{diag}(L_2/L_1, 1)$ gilt.

4. HQET-Parameter

Die Elemente von Σ (hier nur Elemente mit nicht-verschwindenden Werten angegeben) ergeben sich bei dieser Strategie wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{11} &= L_2/L_1 \\
\Sigma_{13} &= L_2 (\Gamma_{\delta A}(L_2) - \Gamma_{\delta A}(L_1)) / R_{\delta A}(L_1) \\
\Sigma_{14} &= L_2 (\Gamma_{\delta A}(L_2) - \Gamma_{\delta A}(L_1)) / K_{12}(L_1) + L_2 (\Gamma^{\text{kin}}(L_2) - \Gamma^{\text{kin}}(L_1)) / R_1^{\text{kin}}(L_1) \\
\Sigma_{15} &= L_2 (\Gamma_{\delta A}(L_2) - \Gamma_{\delta A}(L_1)) / K_{13}(L_1) + L_2 (\Gamma^{\text{spin}}(L_2) - \Gamma^{\text{spin}}(L_1)) / \rho_1^{\text{spin}}(L_1) \\
\Sigma_{22} &= 1 \\
\Sigma_{23} &= (\rho_{\delta A}(L_2) - \rho_{\delta A}(L_1)) / R_{\delta A}(L_1) \\
\Sigma_{24} &= (\rho_{\delta A}(L_2) - \rho_{\delta A}(L_1)) / K_{12}(L_1) + (\Psi^{\text{kin}}(L_2) - \Psi^{\text{kin}}(L_1)) / R_1^{\text{kin}}(L_1) \\
\Sigma_{25} &= (\rho_{\delta A}(L_2) - \rho_{\delta A}(L_1)) / K_{13}(L_1) + (\Psi^{\text{spin}}(L_2) - \Psi^{\text{spin}}(L_1)) / \rho_1^{\text{spin}}(L_1) \\
\Sigma_{33} &= R_{\delta A}(L_2) / R_{\delta A}(L_1) \\
\Sigma_{34} &= R_{\delta A}(L_2) K_{12}(L_1) + R_A^{\text{kin}}(L_2) / R_1^{\text{kin}}(L_1) \\
\Sigma_{35} &= R_{\delta A}(L_2) K_{13}(L_1) + R_A^{\text{spin}}(L_2) / \rho_1^{\text{spin}}(L_1) \\
\Sigma_{44} &= R_1^{\text{kin}}(L_2) / R_1^{\text{kin}}(L_1) \\
\Sigma_{55} &= \rho_{1^*}^{\text{spin}}(L_2) / \rho_1^{\text{spin}}(L_1)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

mit den Abkürzungen

$$K_{12} = \frac{-R_A^{\text{kin}}}{R_1^{\text{kin}} R_{\delta A}} \text{ und} \tag{4.17}$$

$$K_{13} = \frac{-R_A^{\text{spin}}}{\rho_1^{\text{spin}} R_{\delta A}}. \tag{4.18}$$

Hierzu ist eine Anmerkung nötig:

Beim Matching der fünften Komponente, also $\frac{3}{4} \ln\left(\frac{f_1}{k_1}\right)$ findet man als HQET-Entwicklung gerade den Ausdruck $\omega_5 \cdot \rho_1^{\text{spin}}$. Da die fünften Komponenten der Vektoren η^b und $\hat{\Sigma}$ verschwinden und in der fünften Zeile von Σ nur das Element Σ_{55} nicht verschwindet, findet man also ausgehend von (4.14), dass $\Sigma_{55}(L_1, a) = \rho_1^{\text{spin}}(L_2, a) / \rho_1^{\text{spin}}(L_1, a)$ sein müsste. Da aber durch Φ_5 die Propagation eines schweren Quarks über $T = L$ beschrieben wird, treten dabei gerade bei Gittern mit größerer Ausdehnung, also hier bei L_2 , auch stärkere statistische Fehler auf. Daher ist es sinnvoll, Σ_{55} abweichend - wie in (4.16) geschehen - zu definieren. Die Verkleinerung des Gitters bei L_2 in Zeitrichtung auf $T = L/2$, also durch die Verwendung von $\rho_{1^*}^{\text{spin}}$ im Zähler, erwirkt so eine höhere numerische Präzision laut [5].

4.1. Strategie zur Bestimmung der Parameter

Die in (4.11) auftretende Matrix ϕ^{-1} (in diesem Fall mit Daten von S_4 , also bei $L = L_2$, daher hier ohne explizite Angabe für L) enthält folgende nicht-verschwindende Elemente:

$$\begin{aligned}
 \phi_{11}^{-1} &= 1/L \\
 \phi_{13}^{-1} &= -\Gamma_{\delta A}/R_{\delta A} \\
 \phi_{14}^{-1} &= -\Gamma_{\delta A}K_{12} - \Gamma^{\text{kin}}/R_1^{\text{kin}} \\
 \phi_{15}^{-1} &= -\Gamma_{\delta A}K_{13} - \Gamma^{\text{spin}}/\rho_1^{\text{spin}} \\
 \phi_{22}^{-1} &= 1 \\
 \phi_{23}^{-1} &= -\rho_{\delta A}/R_{\delta A} \\
 \phi_{24}^{-1} &= -\rho_{\delta A}K_{12} - \Psi^{\text{kin}}/R_1^{\text{kin}} \\
 \phi_{25}^{-1} &= -\rho_{\delta A}K_{13} - \Psi^{\text{spin}}/\rho_1^{\text{spin}} \\
 \phi_{33}^{-1} &= 1/R_{\delta A} \\
 \phi_{34}^{-1} &= K_{12} \\
 \phi_{35}^{-1} &= K_{13} \\
 \phi_{44}^{-1} &= 1/R_1^{\text{kin}} \\
 \phi_{55}^{-1} &= 1/\rho_1^{\text{spin}}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Es bleibt nun, abschließend die Definitionen der einzelnen Funktionen, die in den Elementen von η , ϕ^{-1} und Σ auftreten, anzugeben.

4. HQET-Parameter

Für die HQET wird, um Wiederholungen zu sparen, eine Abkürzung $y \in \{\text{kin, spin}\}$ eingeführt. Damit werden

$$\Gamma^{\text{stat}}(L) = -\frac{\partial_0 + \partial_0^*}{2} \left(\ln \left(-f_A^{\text{stat}}(x_0, \theta_0) \right) \right) \Big|_{(x_0=T/2, T=L)} \quad (4.20)$$

$$\zeta_A(L) = \ln \left(\frac{-f_A^{\text{stat}}(x_0, \theta_0)}{\sqrt{f_1^{\text{stat}}(\theta_0)}} \right) \Big|_{(x_0=T/2, T=L)} \quad (4.21)$$

$$R_A^{\text{stat}}(L) = \ln \left(\frac{f_A^{\text{stat}}(x_0, \theta_1)}{f_A^{\text{stat}}(x_0, \theta_2)} \right) \Big|_{(x_0=T/2, T=L)} \quad (4.22)$$

$$R_1^{\text{stat}}(L) = \ln \left(\frac{f_1^{\text{stat}}(\theta_1)}{f_1^{\text{stat}}(\theta_2)} \right) \Big|_{T=L/2} \quad (4.23)$$

$$\Gamma^y(L) = -\frac{\partial_0 + \partial_0^*}{2} \left(f_A^y(x_0, \theta_0) / f_A^{\text{stat}}(x_0, \theta_0) \right) \Big|_{(x_0=T/2, T=L)} \quad (4.24)$$

$$\Gamma_{\delta A}(L) = -\frac{\partial_0 + \partial_0^*}{2} \left(f_{\delta A}(x_0, \theta_0) / f_A^{\text{stat}}(x_0, \theta_0) \right) \Big|_{(x_0=T/2, T=L)} \quad (4.25)$$

$$\Psi^y(L) = \left(\frac{f_A^y(x_0, \theta_0)}{f_A^{\text{stat}}(x_0, \theta_0)} - \frac{1}{2} \frac{f_1^y(\theta_0)}{f_1^{\text{stat}}(\theta_0)} \right) \Big|_{(x_0=T/2, T=L)} \quad (4.26)$$

$$\rho_1^y(L) = \frac{f_1^y(\theta_0)}{f_1^{\text{stat}}(\theta_0)} \Big|_{T=L} \quad (4.27)$$

$$\rho_{1^*}^y(L) = \frac{f_1^y(\theta_0)}{f_1^{\text{stat}}(\theta_0)} \Big|_{T=L/2} \quad (4.28)$$

$$\rho_{\delta A}^y(L) = \frac{f_{\delta A}^{\text{stat}}(x_0, \theta_0)}{f_A^{\text{stat}}(x_0, \theta_0)} \Big|_{(x_0=T/2, T=L)} \quad (4.29)$$

$$R_A^y(L) = \left(\frac{f_A^y(x_0, \theta_1)}{f_A^{\text{stat}}(x_0, \theta_1)} - \frac{f_A^y(x_0, \theta_2)}{f_A^{\text{stat}}(x_0, \theta_2)} \right) \Big|_{(x_0=T/2, T=L)} \quad (4.30)$$

$$R_{\delta A}(L) = \left(\frac{f_{\delta A}^{\text{stat}}(x_0, \theta_1)}{f_A^{\text{stat}}(x_0, \theta_1)} - \frac{f_A^y(x_0, \theta_2)}{f_{\delta A}^{\text{stat}}(x_0, \theta_2)} \right) \Big|_{(x_0=T/2, T=L)} \quad (4.31)$$

$$R_1^y(L) = \left(\frac{f_1^y(\theta_1)}{f_1^{\text{stat}}(\theta_1)} - \frac{f_1^y(\theta_2)}{f_1^{\text{stat}}(\theta_2)} \right) \Big|_{T=L/2} \quad (4.32)$$

gebildet.

4.2. Konkrete Umsetzung

Meine Aufgabe für diese Diplomarbeit bestand darin, ein Computerprogramm zu schreiben, das zunächst aus den Simulationsdaten die HQET-Parameter bestimmen kann und sich bei der Implementierung dafür an die im vorherigen Kapitel vorgestellte Strategie aus [5] hält. Die Rohdaten wurden dafür auf dem APE-System am DESY in Zeuthen ab 2006 erzeugt. Dabei wurden die Simulationen S_1 bis S_4 auf folgenden Gittern ausgeführt.

Tabelle 4.2.: Auflösungen der bei den einzelnen Simulationen verwendeten Gitter [5]

Simulation	L	Theorie	L/a
S_1	L_1	QCD	40, 32, 24, 20
S_2	L_1	HQET	16, 12, 10, 8, 6
S_3	L_2	HQET	32, 24, 20, 16, 12
S_4	L_2	HQET	16, 12, 8

Für die HQET-Simulationen verwende ich nur die mit HYP1 und HYP2 erzeugten Daten. Bei der QCD-Simulation S_1 wurden stets vier Werte für κ verwendet, jeweils ein Wert für das leichte Quark und drei κ -Werte für das b-Quark. Konkret wurden folgende Parameter gewählt. Es handelt sich bei allen Daten um die Ergebnisse aus Simulationen in der sogenannten “quenched approximation”, also Simulationen ohne Seequarks.

Tabelle 4.3.: einige Parameter der QCD-Simulationen

L/a	κ_l	κ_{h1}	κ_{h2}	κ_{h3}	β
40	0.133373	0.128989	0.128214	0.127656	7.8439
32	0.133632	0.127991	0.126967	0.126222	7.6547
24	0.133961	0.126055	0.124528	0.123383	7.4082
20	0.134145	0.124195	0.122119	0.120483	7.2611

Dabei deutet ein Index l das leichte Quark an und h1,h2,h3 bezeichnen die Werte für das b-Quark. Diese Hopping-Parameter wurden so ermittelt, dass sie für

$$z = M_b L \quad (4.33)$$

mit der RGI-invarianten Masse

$$M_b = h \frac{ZZ_A}{Z_P} m_{q,h} \left(1 + b_m a m_{q,h} \right) \quad (4.34)$$

den Werten $z = 10.4$, $z = 12.1$ und $z = 13.3$ entsprechen und somit die zu erwartende b-

4. HQET-Parameter

Masse einschließen. Die Werte für β gehen auf [27] zurück. Entsprechende Angaben zu den in (4.34) auftretenden Größen lassen sich in [12] finden, deren Grundlage [28] (b_m, Z) bzw. [29] (Z_A) bildet. Die am Ende berechneten HQET-Parameter werden dann quadratisch in z interpoliert und für $z = 12.48(20)$ mit $1/m$ -Korrekturen bzw. für $z = 12.3(19)$ für die statische Theorie berechnet. Diese Werte wurden zuvor aus ω_1 und ω_4 bzw. aus ω_1 in [12] bestimmt.

Da nun auf jedem einzelnen Gitter aber eine unterschiedliche Anzahl von Messwerten für die jeweiligen Observablen generiert wurden, wird festgelegt, aus wie vielen Einzelwerten paketweise ein Mittelwert gebildet wird, so dass die Anzahl dieser Mittelwerte dann auf allen Gittern übereinstimmt. Sowohl im Falle der QCD-Daten wie auch bei den HQET-Daten wird diese Anzahl hier auf 100 festgelegt. Bevor man aber einfach diese Mittelwerte bildet, sind noch zwei Punkte wichtig.

Replika Zunächst kann es gerade bei kleineren Gittern vorkommen, dass mehrere Gitter derselben Größe parallel simuliert wurden. D.h. es gibt mehrere Replika des Gitters; der Replikafaktor für diese Simulation ist dann die Anzahl dieser Replika. Gibt es keine parallelen Simulationen, so ist der Faktor damit eins. In diesem Fall werden beim Einlesen die Daten der einzelnen Replika aneinander gereiht, so dass erst alle Ergebnisse des ersten Replikums gespeichert werden, dann die des nächsten usw.. Ist nun die Gesamtzahl der Messwerte nicht durch 100 ohne Rest teilbar, so müssen Messergebnisse gestrichen werden. Dazu wird beginnend beim ersten Replikum der dort erste Messwert gelöscht und so mit den weiteren Replika verfahren, bis man nach dem letzten Replikum wieder beim ersten Replikum fortfährt, nun aber den ursprünglich zweiten Messwert auf diesem Replikum löscht usw., bis man genau die nötige Mindestanzahl an Werten gelöscht hat, so dass die verbliebene Anzahl ohne Rest durch 100 teilbar ist.

Thermalisierung Da sich durch den verwendeten MC-Algorithmus erwartungsgemäß die Werte für einzelne Korrelationsfunktionen erst nach einer gewissen Laufzeit so eingestellt haben, dass sie weniger stark schwanken (gemessen an einzelnen “Sweeps“, d.h.: neuen Konfigurationen auf dem Gitter), müssen einige Messwerte verworfen werden, die chronologisch gesehen zuerst auf den einzelnen Replika erzeugt und dann gespeichert wurden. Daher wurden zur Sicherheit zunächst einige Werte für jede Korrelationsfunktion auf jedem Gitter gestrichen und erst dann nach dem im vorherigen Absatz erläuterten Schema zur Reduktion der gesamten Anzahl der Messwerte verfahren.

Jackknifing Nachdem das von mir geschriebene Programm die Daten für die benötigten Korrelationsfunktionen wie beschrieben eingelesen und bearbeitet hat, also 100 gemittelte Werte jeweils liefert, folgt der zweite wichtige Schritt, bevor mit der eigentlichen Berechnung der HQET-Parameter begonnen werden kann. Die Grunddaten sind, da sie aus Monte-Carlo-Simulationen stammen, auf jedem einzelnen Replikum korreliert. Dieser Effekt ist aber durch das Mitteln ("pre-binning") bereits weitestgehend behoben, da die Autokorrelationszeit (in MC-Richtung) in "quenched" Rechnungen im Allgemeinen entsprechend kurz ist. Dennoch stellt sich die Frage, wie man für solche Daten, die in Abhängigkeit von z betrachtet werden, eine sinnvolle Unsicherheit angeben kann. Diese sind nämlich weiterhin korreliert, da sie auf den einzelnen Gittern jeweils auf dem Hintergrund derselben Eichfeldkonfigurationen berechnet wurden. Hier hat sich das Jackknife-Verfahren etabliert. Es ist stark an die Berechnung einer normalen Standardabweichung angelehnt, jedoch bildet man zunächst aus den vorliegenden N Werten (hier $N = 100$) N neue Mittelwerte und zwar so, dass man jeweils einen der N Werte auslässt, die restlichen $N - 1$ Werte aufsummiert und durch $N - 1$ dividiert. Dabei muss jeder der ursprünglichen N Werte einmal ausgelassen werden. Die neuen N Werte x_i enthalten dann jeweils für sich die Information über den fast vollständigen ursprünglichen Datensatz. Die Unsicherheit $u_{\bar{x}}$ für den Mittelwert \bar{x} der x_i Werte erhält man dann aus

$$u_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^2 - \bar{x}^2)} \quad (4.35)$$

bei diesem Verfahren. Aus den 100 berechneten Werten nach dem Jackknife-Verfahren werden dann im Prinzip die Elemente von Φ gemäß (4.4) seitens der QCD und entsprechende Elemente von Größen für die HQET gebildet. Sämtliche Berechnungen erfolgen für $\theta_0 = 0.5$, $\theta_1 = 0.5$ und $\theta_2 = 1$ den Erfahrungen aus [5] folgend.

f_A -Verbesserung (QCD) Allerdings verwende ich für f_A die verbesserte Version f_A^I , die sich gemäß (3.13) berechnen lässt. Dabei ergibt sich im Falle der "quenched approximation" der Verbesserungskoeffizient c_A für die Zeitkomponente des Axialvektorstroms für die QCD [30] aus

$$c_A = -0.00756 \cdot g_0^2 \cdot \frac{1 - 0.748 \cdot g_0^2}{1 - 0.977 \cdot g_0^2}, \quad (4.36)$$

wobei hier $g_0^2 = 2 \cdot N_c / \beta$ mit $N_c = 3$ gilt und β für das jeweilige Gitter aus Tab. 4.3 zu entnehmen ist. Da bei der Generierung der Daten bereits entsprechende Verbesserungen wie der Kleeblatt-Term für Fermionfelder in der Wirkung berücksichtigt wurden, ist nach der hier vorgestellten Verbesserung f_A nun vollständig $O(a)$ verbessert. f_1 und f_P sind bereits

4. HQET-Parameter

$O(a)$ -verbessert, da die Pseudoskalardichte automatisch bis zu dieser Ordnung verbessert ist und seitens der Datenerzeugung natürlich dieselben Verbesserungen wie für f_A eingegangen sind.

Optionale Verwendung von g_A und g_P Es besteht zudem die Möglichkeit, durch eine Mittelung Daten zu erhalten, die - so hofft man - kleinere statistische Fehler aufweisen. Dazu werden ebenso die Werte der Jackknife-Samples für g_A und g_P benutzt, um diese mit den Jackknife-Werten für f_A und f_P entsprechend zu mitteln (also vor dem Verbessern von f_A). Entsprechend heißt hier, dass man unter Berücksichtigung möglicher auftretender Unterschiede im Vorzeichen die Mittelwerte jeweils von $f_A(x_0)$ und $g_A(T - x_0)$ bildet (entsprechend für f_P und g_P).

Von nun an ist, ohne dies explizit kenntlich zu machen, mit f_A stets die verbesserte Version gemeint, die auch die entsprechenden Mittelungen enthält. Bei der Betrachtung von (3.16) fallen aber noch weitere Koeffizienten auf, die bestimmt werden müssen, konkret Z_A , b_A und $m_{q,h}$. Die weiteren Koeffizienten sind nicht relevant, da sie entsprechend weggekürzt werden, wenn man die Elemente von Φ bildet. Hier gelten nun

$$Z_A = \frac{1 - 0.8496 \cdot g_0^2 + 0.061 \cdot g_0^4}{1 - 0.7332 \cdot g_0^2}, \quad (4.37)$$

$$b_A = 1 + 0.1522 \cdot g_0^2, \quad (4.38)$$

$$m_{q,h} = \frac{1}{2} \cdot (1/\kappa_h - 1/\kappa_c), \quad (4.39)$$

wobei die letzte Gleichung natürlich dreimal, also für jede der drei κ -Kombinationen, gesondert berechnet werden muss und hier $\kappa_c = \kappa_l$ gilt. Die hier angegebenen numerisch bestimmten Faktoren in (4.37) und (4.38) stammen von [29] und [31].

Bildung der Kontinuumslimiten Nun gilt es noch zu berücksichtigen, wie jeweils der Kontinuumslimites gebildet werden muss (also zunächst seitens der QCD, dann für η^b und bei (4.14) (SSF). Dazu muss man jeweils betrachten, ob man $O(a)$ -Verbesserung verwendet hat oder nicht. Für die QCD wurden ja bereits Verbesserungen diskutiert, so dass hier die Funktionswerte bei $(a/L)^2$, also in Gittereinheiten bei $1/L^2$, zu betrachten sind. In der HQET muss man bei der statischen Approximation aufpassen, ob man die normale unverbesserte Theorie betrachtet oder auch $O(a)$ -Verbesserung in die statische Theorie miteinbezieht. Der Verbesserungskoeffizient ist eigentlich der dritte HQET-Parameter, wird also hier erst bestimmt, wenn man $1/m$ -Terme berücksichtigt. Dadurch wird klar, dass man in diesem Fall Funktionswerte bei a/L ansetzen muss. Benutzt man aber für die statische Theorie Verbesserungsterme (die

Koeffizienten c_A^{stat} für HYP1 und HYP2 sind dann entweder störungstheoretisch oder nicht-störungstheoretisch anderweitig bestimmt worden - konkret verwende ich die Ergebnisse aus [32]), so müssen Funktionswerte bei $(a/L)^2$ bzw. in Gittereinheiten bei $1/L^2$ gesetzt werden. Nun könnte man meinen, dass diese Unterscheidung sowohl für (4.14), als auch für η^b gilt, da dieser Vektor nur statische Korrekturterme enthält. Allerdings trifft dies auf η^b nicht zu, weil die zu interpolierenden Elemente aus der Matchingbedingung stammen und für die QCD, wie gerade erwähnt, $O(a)$ -Verbesserung inbegriffen ist. Somit müssen die “gematchten” Terme auch von $O(a)$ sein, Gitterartefakte also schon von $O(a^2)$. Dies macht es notwendig, für die Interpolation die Funktionswerte bei $(a/L)^2$ zu betrachten. Wie gerade gesagt, kommt es für die SSF hingegen darauf an, welche Theorie man betrachtet. Im Fall der statischen Approximation dürfen in Σ nur noch Elemente berücksichtigt werden, die keine $1/m$ -Terme enthalten. Allerdings werden für die statische Approximation nur noch zwei Funktionen aus der QCD für das Matching benötigt, so dass statt 5er-Vektoren und 5×5 -Matrizen nur noch 2er Vektoren und 2×2 -Matrizen verwendet werden. Deshalb verbleiben nur noch Σ_{11} und Σ_{22} . D.h. es werden nur die ersten zwei Komponenten jeweils noch berücksichtigt. In dieser Arbeit werden Ergebnisse nur für die Theorie inklusive der $1/m$ -Korrekturen vorgestellt.

Tree-Level-Improvement Außerdem hat sich gezeigt, dass störungstheoretische Verbesserungen von Observablen Gitterartefakte reduzieren können [33]. Die so genannten Tree-Level-Improvement (TLI) Observablen werden dabei wie folgt definiert

$$O_{\text{impr}}(a/L) = \frac{O(a/L)}{1 + \delta(a/L)} \quad (4.40)$$

$$\delta(a/L) = \frac{O^{\text{tree}}(a/L) - O^{\text{tree}}(0)}{O^{\text{tree}}(0)} \quad (4.41)$$

oder als

$$O_{\text{impr}}(a/L) = O(a/L) - \delta(a/L) \quad (4.42)$$

$$\delta(a/L) = O^{\text{tree}}(a/L) - O^{\text{tree}}(0). \quad (4.43)$$

Darin ist O_{impr} die TLI-verbesserte Observable, O eine nicht-störungstheoretisch bestimmte Observable und O^{tree} dieselbe Observable, die man allerdings bei verschwindender nackter Kopplungskonstante $g_0 = 0$ bestimmt hat. Die von mir verwendeten Tree Level Improvement - Koeffizienten δ sind http://www-zeuthen.desy.de/alpha/public_tables/ entnommen [5]. Die TLI-Koeffizienten werden natürlich nur bei den Größen verwendet, die auch zum Kontinuumslimit extrapoliert werden.

5. Spin-Splitting

Eine interessante Fragestellung ist, ob man mit der HQET die Massendifferenz von B- und B^* -Mesonen erklären kann. Dabei spielen die Spin-Korrekturterme der Lagrangedichte der HQET die entscheidende Rolle, wenn man die Theorie soweit entwickelt, dass $1/m$ -Terme auftreten. Im Folgenden werden die bisherigen Ergebnisse vorgestellt, wobei ich mich an [34] orientiere. Wie sich herausstellt, existiert eine Unverträglichkeit zwischen den Quarkmassen-abhängigen Resultaten beim Spin-Splitting zu dem Resultat für den statischen Limes. Daher soll mit Hilfe des von mir geschriebenen Programms ein weiterer Datensatz analysiert werden, mit dem die Quarkmassen-Abhängigkeit weiter untersucht werden und ggf. Aufschluss darüber geben kann, inwiefern $O(1/m^2)$ -Korrekturen eine Rolle spielen. Grundsätzlich handelt es sich bei allen erwähnten Daten wieder um Daten aus Simulationen in der “quenched approximation”.

5.1. Motivation

Beim Spin-Splitting wird häufig die Massenformel

$$\Delta m := m_{B^*} - m_B = \frac{2\lambda_2^{\text{RGI}}}{M_b} C_{\text{spin}} \left(M_b / \Lambda_{\overline{\text{MS}}} \right) + O(1/M_b^2) \quad (5.1)$$

erwähnt. Diese Gleichung lässt einen linearen Zusammenhang zwischen $\Delta m / C_{\text{spin}}(M_b)$ und $1/M_b$ erwarten, deren Steigung auf Grund der bekannten Beziehung

$$r_0^2 \lambda_2^{\text{RGI}} = -\frac{1}{3} Z_{\text{spin}}^{\text{RGI}} r_0^2 E_1^{\text{spin}} \quad (5.2)$$

festgelegt sein sollte.

In Abb. 5.1 ist ein linearer Fit (blau), ein quadratischer Fit (magentafarben) und ein Fit mit der theoretisch zu erwartenden Steigung (λ_2^{RGI} multipliziert mit $2r_0^2$ gemäß [35]) (grün) dargestellt. Der b-Punkt ist der Punkt, der der physikalischen b-Quarkmasse entspricht - hier der zweite Datenpunkt von links. Für den ersten Punkt (links) kann gar kein Spin-Splitting

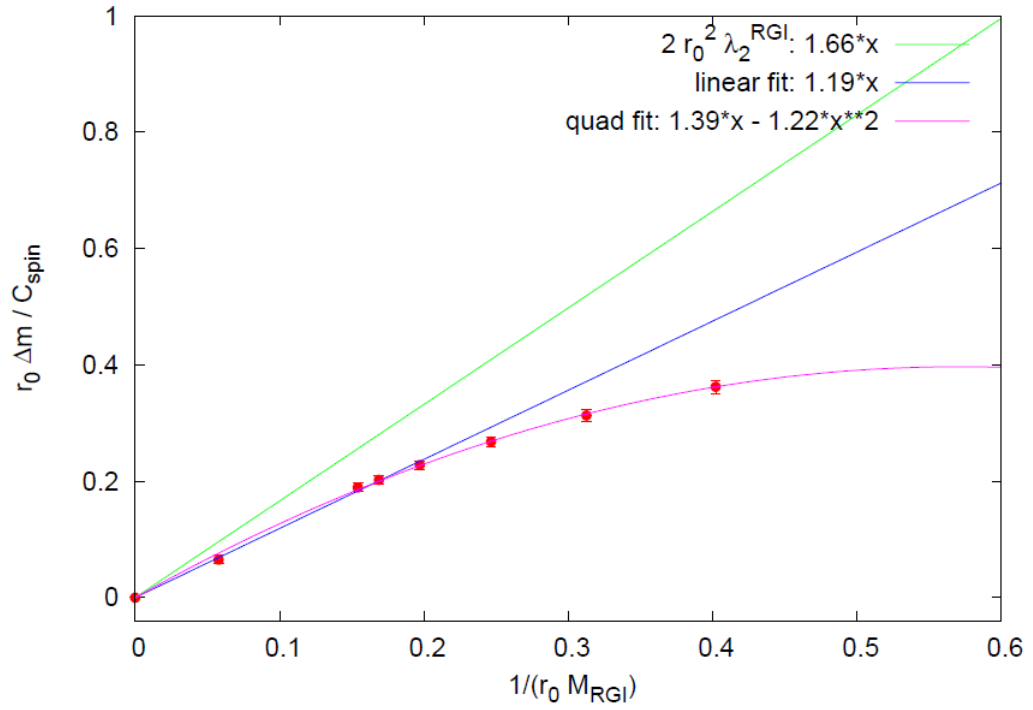


Abbildung 5.1.: linearer (blau) und quadratischer (magentafarben) Fit durch Datenpunkte aus der Charmregion und der B-Physik sowie theoretisch zu erwartender Zusammenhang (grün) [34]

mehr berechnet werden - wegen der Spin-Symmetrie im statischen Limes -, weshalb der zugehörige Funktionswert auch verschwindet, also bei 0 liegt. Die übrigen Datenpunkte stammen aus dem Bereich der D-Physik, also von Mesonen, die ein c-Quark enthalten, wobei hier der sechste dieser Punkte (von links gezählt) dem c-Punkt entspricht. Zur Berechnung der Datenpunkte wurden die HQET-Parameter [5] entnommen und die nötigen Daten seitens der b-Physik [36], während die QCD-Daten für den Charm-Bereich aus [37] stammen. Die Funktion C_{spin} hingegen ist in [38] angegeben. Es handelt sich dabei um eine “conversion function“, die durch das Verhältnis $M_b/\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ parametrisiert werden kann. Mit ihr lassen sich - für den Vergleich mit dem Experiment - Werte für das Spin-Splitting bei endlichen Quarkmassen ausgehend vom für den statischen Limes berechneten Matricelement λ_2^{RGI} erhalten.

Es besteht aber nun ein Widerspruch zu den theoretischen Vorhersagen einerseits darin, dass ein linearer Fit eine zu kleine Steigung liefert und außerdem darin, dass bei der erwarteten Steigung nicht einmal der Datenpunkt, der zu der physikalischen b-Quarkmasse gehört, innerhalb dessen Unsicherheit auf dem Graphen mit der erwarteten Steigung liegt.

Formt man (5.1) um, erhält man

$$\Delta m M_b = 2\lambda_2^{\text{RGI}} C_{\text{spin}} \left(M_b / \Lambda_{\overline{\text{MS}}} \right) + O(1/M_b). \quad (5.3)$$

In diesem Fall sollte ein entsprechender Plot den Graphen einer konstanten Funktion liefern. Natürlich betrachtet man hier den statischen Punkt (in Abb. 5.2 rot dargestellt) nicht mit (5.3), sondern gemäß (5.2).

Wie man in Abb. 5.2 erkennt, sollte die zu erwartende konstante Funktion einen Wert innerhalb des Fehlerbereichs des roten Datenpunktes besitzen (dieser Punkt entspricht wieder den theoretischen Vorhersagen). Allerdings zeigen die übrigen Datenpunkte, dass einerseits eine konstante Funktion nur unzureichend gefittet werden kann und dass außerdem diese Funktion vermutlich einen zu kleinen Funktionswert besäße. Dies steht natürlich im Einklang mit der zuvor geschilderten Sichtweise ohne Umformung.

Um die Datenpunkte für diese Plots zu erhalten, benötigt man letztlich den fünften HQET-Parameter, da gemäß

$$\Delta m = -\frac{4}{3} \omega_{\text{spin}} E_1^{\text{spin}} \quad (5.4)$$

die Massendifferenz berechnet werden kann, wie in [36] beschrieben. Hier gilt es aber noch zu berücksichtigen, wie diese Größen mit a -Faktoren behaftet sind, was in Kapitel 6 beschrieben wird.

5. Spin-Splitting

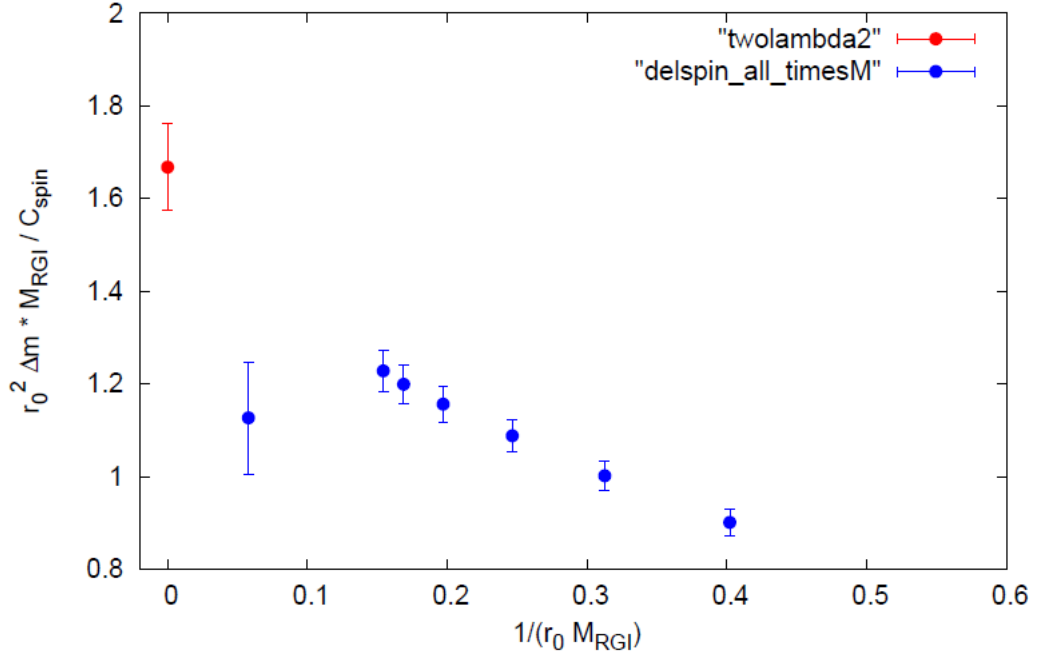


Abbildung 5.2.: alternative Auftragung der Daten (vgl. Abb. 5.1) [34]

5.2. Untersuchung

Um diese Diskrepanzen besser verstehen zu können, wurden teilweise auf dem APE-System erzeugte Daten und teilweise auf dem PALMA-Cluster der Westfälischen Wilhelms Universität Münster 2011 für Gitter mit $T = L/2$ generierte Daten verwendet [39]. Diese Daten ersetzen die bisherigen Simulationen S_1 mit nun entsprechend großen Werten für z , so dass daraus neue Datenpunkte jenseits des b-Punkts hin zu größeren b-Quarkmassen gewonnen werden können. Für diese Simulationen seien hier einige Daten, deren Grundlage zum Teil wieder [28] bildet, angegeben:

Tabelle 5.1.: einige Werte für die neuen QCD-Simulationen

L/a	β	Z_A	Z_P	Z	Z_m	b_m
32	7.6547	0.8736	0.6713	1.0916	1.4205	-0.6218
40	7.8439	0.8785	0.6679	1.0900	1.4337	-0.6228
48	7.9993	0.8823	0.6632	1.0882	1.4476	-0.6260

Diese neuen Daten werden mit den bisher auch verwendeten HQET-Daten von S_2 bis S_4 kombiniert, aber durch die festgelegten Werte für z bei diesen neuen Simulationen S_1 wird beim Matching dem b-Quark eine gleich große oder größere als die physikalische Masse zuteil. Die konkret verwendeten Werte für z sind in Tab. 5.2 aufgelistet.

Der erste Wert ($z = 12.48$) liefert dieses Mal ohne eine benötigte Interpolation direkt die HQET-Parameter für den b-Punkt. Für die anderen Daten ist in diesem Fall auch keine Interpolation angedacht, so dass einerseits die Daten für den b-Punkt reproduziert werden können und andererseits fünf neue Datenpunkte für die Plots im vorherigen Abschnitt erzeugt werden können, um direkt die Quarkmassen-Abhängigkeit untersuchen zu können.

Zur Vervollständigung sind hier nur die zu den oben genannten Werten von z gehörigen Werte für κ gegeben.

Tabelle 5.2.: Auflistung der Hopping-Parameter κ für die neuen QCD-Simulationen

L/a	$z = 12.48$		$z = 14$	$z = 15$	$z = 16$	$z = 18$	$z = 20$
	κ_l	κ_{h1}	κ_{h2}	κ_{h3}	κ_{h4}	κ_{h5}	κ_{h6}
32	0.133432	0.126736	0.125788	0.125145	0.124483	0.123097	0.121602
40	0.133373	0.128041	0.127334	0.126860	0.126378	0.125386	0.124353
48	0.133159	0.128825	0.128262	0.127886	0.127506	0.126730	0.125932

Hier deutet ein Index l wieder die Bezeichnung für das leichte Quark an und die Indizes h_i bezeichnen die Parameter für das schwere Quark.

6. Ergebnisse

Für alle hier angegebenen Daten gilt, dass Werte und ihre Unsicherheiten stets normal gerundet wurden. Wenn es nicht anders angegeben ist, handelt es sich bei Fehlerangaben auch stets um den Jackknife-Fehler. An den Stellen, an denen etwa Gauß'sche Fehlerfortpflanzung Verwendung findet, sind die entsprechenden Formeln zur Berechnung der Fehler angegeben bzw. in einfachen Fällen ist darauf hingewiesen, dass Gauß'sche Fehlerfortpflanzung benutzt wurde. Im Folgenden bezeichnet u_x stets den absoluten Fehler der Größe x und Δ_x den relativen Fehler der Größe x . Grundsätzlich werden alle Fits mit der "least square"-Methode behandelt. Alle hier gezeigten Fits enthalten die Mittelwerte der je 100 Samples einer eingehenden Größe. Bevor nun aber die Resultate präsentiert werden, sind noch einige Bemerkungen nötig:

- In (4.11) wird jeweils der Kontinuumslices für L_2 in der dritten und vierten Komponente von $\eta(L_{\text{ref}})$ gebildet (für die ersten beiden Komponenten werden aber die Werte von S_4 genutzt), so dass sich dies mit den entsprechenden Werten in (4.14) heraushebt. Der Grund dafür, dass man dies so macht, ist, dass in der HQET-Entwicklung die entsprechenden Komponenten von η im großen Volumen gar nicht auftreten und deshalb sich auf diese Weise herausheben sollen [40].
- Für die erste Komponente von $\Phi^{\text{QCD}}(L_1)$ darf der Kontinuumslices gemäß (4.2) nicht direkt gebildet werden. Es muss nämlich noch berücksichtigt werden, dass die z -Werte fehlerbehaftet sind, weshalb der Jackknife-Fehler von $\Phi^{\text{QCD}}(L_1)$ noch modifiziert werden muss. Für die alten auf dem APE-System erzeugten QCD-Daten finden sich in dieser Arbeit nicht explizit angegebene weitere benötigte Werte zur Fehlerberechnung in [12], während für die neuen, zum Teil in Münster erzeugten Werte entsprechende Daten von [28] ausgehend bestimmt wurden. Für den zusätzlichen Fehler, der bei endlichem Gitterabstand gemäß Gauß zu dem Jackknife-Fehler hinzugerechnet werden muss, findet man zunächst

$$\Delta_{z(\Phi)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial \Phi_1^{\text{QCD}}}{\partial z} \cdot Lhm_{q,h} (1 + b_m am_{q,h}) \cdot \frac{ZZ_A}{Z_P} \cdot \sqrt{(\Delta_{Z_P})^2 + (\Delta_{Z_A})^2}, \quad (6.1)$$

6. Ergebnisse

wobei diese Berechnung unter der Annahme gemacht wurde, dass der Fehler von Z vernachlässigbar klein ist und die Ableitung von Φ_1^{QCD} als symmetrische diskrete Ableitung gebildet wird, sofern dies möglich ist. D.h., dass für den kleinsten Wert von z eine Vorwärtsableitung, für den größten Wert von z hingegen eine Rückwärtsableitung und für alle übrigen Werte von z die symmetrische Ableitung gebildet wird.

Anschließend folgt nach Gauß (wobei Δ_Φ den relativen Jackknife-Fehler von Φ_1^{QCD} bezeichnen soll) für den absoluten Fehler der Daten bei endlichem Gitterabstand

$$u_{\Phi_1^{\text{QCD}}} = \sqrt{(\Delta_\Phi)^2 + (\Delta_{z(\Phi)})^2} \cdot \Phi_1^{\text{QCD}}. \quad (6.2)$$

Zu dem Fehler, den man für den Kontinuumswert aus einem Element der Kovarianzmatrix erhält, muss mit analoger Formel schließlich der Fehler von h berücksichtigt werden, da dieser nur im Kontinuumslimit existiert und im Übrigen auch den dominierenden Anteil des z -Fehlers ausmacht. Der Grund dafür, dass es mit meinem Programm problematisch wäre, hier einen Jackknife-Fehler zu verwenden, ist weiter unten genannt. Außerdem ist es in diesem Fall legitim, den Fehler aus der Kovarianzmatrix zu berechnen, da die Eingangsdaten für unterschiedliche Gitter unkorreliert sind.

- Für alle Extrapolationen im Rahmen der HQET (d.h. die Kontinuumslimiten von Komponenten von η und im Rahmen von (4.14)) wird ein “constrained Fit“ genutzt. Dabei verlangt man, dass der Kontinuumslimit für die HYP1-Daten mit dem für die HYP2-Daten übereinstimmen muss, während die Steigungen der beiden Ausgleichsgeraden unabhängig voneinander berechnet werden. Theoretisch müsste der Kontinuumslimit für HYP1- und HYP2-Daten zwar übereinstimmen (Universalität), aber numerisch auf Grund der durch MC-Simulationen erzeugten Daten muss dies nicht der Fall sein. Daher verwendet man beim Fit die erwähnte Nebenbedingung.
- Der zusätzliche Fehler von $\Phi(L_1)_1$ (z -Anteil) ist bei dem von mir genutzten Extrapolationsalgorithmus nicht in den Jackknife-Samples für die Werte im Kontinuumslimit erhalten (d.h. die Werte streuen nicht stark genug, um diesen Anteil am gesamten Fehler repräsentieren zu können, sie streuen nur entsprechend stark gemäß der Jackknife-Fehler der Werte bei endlichem Gitterabstand). Der vergrößerte Fehler muss aber bei $\Phi(L_2)_1$ und ω_1 berücksichtigt werden. Da dies die einzigen Größen sind, die von $\Phi(L_1)_1$ abhängen (bzw. ω_1 nur von $\Phi(L_2)_1$), wurde für die Abschätzung des tatsächlichen Fehlers dieser Größen ihr Jackknife-Fehler jeweils wie folgt modifiziert:

$$u_{\Phi(L_2)_1}^{\text{neu}} = \sqrt{(u_{\Phi(L_2)_1})^2 + (u_{\Phi(L_1)_1})^2} \quad (6.3)$$

bzw.

$$u_{\omega_1}^{\text{neu}} = \sqrt{(u_{\omega_1})^2 + (u_{\Phi(L_2)_1}^{\text{neu}})^2}. \quad (6.4)$$

Mit $u_{\Phi(L_1)_1}$ ist hier der Fehler im Kontinuumslimites gemeint, nachdem der Fehler von h dort berücksichtigt wurde. Außerdem muss bei der Bestimmung der HQET-Parameter (außer des ersten, bei dem das durch zuvor beschriebene Weise bereits berücksichtigt wird) die z -Unsicherheit ebenfalls berücksichtigt werden. Dazu habe ich $\frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot u_z$ berechnet, wobei ich für die Steigung (diskrete Ableitung) wenn möglich die symmetrische Ableitung gebildet und für den kleinsten bzw. größten Wert von κ die Vorwärts- bzw. Rückwärtsableitung genutzt habe. Hier verwendete ich für die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung $u_z = z/100$, was aus der Abschätzung $\Delta z = 0.01$ folgt.

- Wie in [5] angemerkt, muss für $\theta_0 = \frac{1}{2}$ eine leichte Korrektur für den statischen Anteil von ω_2 in Form von $\Delta \ln(Z_A^{\text{stat}}) = 0.008(5)$ berücksichtigt werden. Die Ursache dafür ist in [12] begründet (L_1 ist nicht identisch mit den verwendeten Gitterausdehnungen, bei denen die Kopplungskonstante bekannt war - man hat die dort auftretende Verschiebung für den statischen Anteil abgeschätzt und durch obige Korrektur behoben). Daher ist bei allen hier aufgeführten Werten von ω_2 (es wird nie der reine Korrekturanteil angegeben) diese Korrektur bereits eingerechnet und ihre Unsicherheit mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung gemäß

$$u_{\omega_2}^{\text{neu}} = \sqrt{(u_{\omega_2})^2 + (u_{\Delta \ln(Z_A^{\text{stat}})})^2} \quad (6.5)$$

berücksichtigt, wobei u_{ω_2} der Jackknife-Fehler ist.

- In (4.14) werden die Daten aus den QCD- und den HQET-Simulationen zusammengeführt. Hier habe ich jeweils die Daten des i -ten Samples seitens der QCD mit den Daten des i -ten Samples der HQET zur Bildung des i -ten Samples von $\Phi(L_2, M, 0)$ verwendet, so dass sich auch hier wieder eine Anzahl von 100 Jackknife-Samples ergibt. Eine Möglichkeit hätte sicherlich darin bestanden, stets nur den Mittelwert seitens der QCD-Daten zu verwenden. Dies habe ich getestet und in weiteren Ergebnissen¹ aber keine signifikanten Unterschiede feststellen können. Allerdings habe ich bei der Berechnung von (4.14) zuerst alle Kontinuumslimiten einzeln gebildet (quasi die geschweifte Klammer in dieser Gleichung aufgelöst), was machbar ist, da wie zuvor besprochen für alle enthaltenen Größen der Kontinuumslimites separat existiert.

¹Dies betrifft die Werte von später berechneten Größen, nicht hingegen ihre Fehler.

6. Ergebnisse

- An einigen Stellen wurden jedoch Mittelwerte in Berechnungen innerhalb der einzelnen Samples verwendet. Dies betrifft aber lediglich:
 1. Bei der Berücksichtigung des z -Fehlers von $\Phi_1^{\text{QCD}}(L_1, M, a)$ wurde für die Steigung $\frac{\partial \Phi_1^{\text{QCD}}}{\partial z}$ in (6.1) der Mittelwert der Jackknife-Samples für die einzelnen κ -Kombinationen jeweils bei den einzelnen Gittern gebildet. Dies scheint gerechtfertigt, wenn man bedenkt, dass der dominierende Fehler der zusätzliche Fehler von h ist, den man nach der Bildung des Kontinuumslimites noch berücksichtigen muss.
 2. Bei der vorhin beschriebenen Fortpflanzung des Fehlers von $\Phi_1^{\text{QCD}}(L_1, M, 0)$ wurde dementsprechend nicht für jedes Sample ein genauer Fehler berechnet (dies hätte ja schon unter 1. geschehen müssen, um so einen Fehler jeweils nutzen zu können), sondern es wurde jeweils derselbe Fehler zu den Samples der aus $\Phi_1^{\text{QCD}}(L_1, M, 0)$ berechneten Größen propagiert.
 3. Bei der Berechnung des Spin-Splittings wird auch für den Fehler bei endlichem Gitterabstand für ΔE_1^{spin} nicht jeweils der Wert des i -ten Samples von E_1^{spin} verwendet, sondern erneut der Mittelwert. Da auch hier die Samples (einerseits für ω und andererseits für E_1^{spin}) gepaart werden - also der erste Wert von ω geht mit dem ersten Wert von E_1^{spin} für den ersten von 100 Fits ein usw. - wurde der Einfachheit halber die beschriebene Methode zur Fehlerberechnung angewandt. Mehr dazu siehe weiter unten.

Unterschiede bei der Auswertung der Daten aus den neuen QCD-Simulationen

Bei Verwendung der neu erzeugten QCD-Daten ergeben sich einige Unterschiede im Hinblick auf die bisher geschilderte Auswertung. Da eine κ -Kombination so gewählt ist, dass damit Werte bei $z = 12.48$ direkt erzeugt werden, ist eine Interpolation für die HQET-Parameter nicht mehr nötig. Außerdem soll ja bei den übrigen Werten ganz bewusst nicht interpoliert werden, da man bei der Untersuchung der Quarkmassen- Abhängigkeit des Spin-Splittings einige diskret verteilte Werte erzeugen möchte und dafür genügend κ -Kombinationen bei der Simulation der Daten berücksichtigt hat.

Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass für die verwendeten Gitter und Werte für κ keine TLI-Koeffizienten verfügbar sind, so dass seitens der QCD ein TLI nicht möglich ist. Des Weiteren wurden nur aus bereits thermalisierten Konfigurationen auf den einzelnen QCD-Gittern erzeugte Werte für Korrelationsfunktionen abgespeichert, weshalb keine Daten von Hand verworfen wurden. Dies ist aber natürlich weiterhin für die HQET-Daten nötig.

Berechnung der Massendifferenz beim Spin Splitting Für die Berechnung werden die Jackknife-Samples der jeweiligen κ -Kombinationen für ω_5 inklusive Jackknife-Fehler für alle verwendeten Gitterauflösungen von S_4 gebraucht. Gemäß (5.4) müssen diese Werte von ω_5 - nun abgesehen vom dort angegebenen Vorfaktor - mit E_1^{spin} aus [36] multipliziert werden. Es werden die unter "Plateau" angegebenen Werte genutzt. Tatsächlich lagen mir aber Jackknife-Samples für E_1^{spin} vor [41], deren Mittelwerte leicht von den in [36] angegebenen abweichen. Da diese Werte aber in der Form $a^2 E_1^{\text{spin}}$ angegeben sind und sich nur ein a mit dem von ω_5 kürzt (da wegen der Gittereinheiten eigentlich ω_5/a vorliegt), muss das verbleibende a mittels der "quenched Formel" für r_0 aus [42] beseitigt werden. Gemäß den Angaben dort findet man $\Delta_{r_0} = 0.003 \cdot (1 + \frac{\beta-5.7}{6.57-5.7})$ für r_0 in Gittereinheiten. Dabei ist r_0 die so genannte Sommer-Skala, die in [43] vorgestellt wird. Anschließend muss der Kontinuumslimites (linear in a/L) gebildet werden. Damit ergibt sich für die Extrapolation zur Berechnung der gesuchten Massendifferenz bei endlichem Gitterabstand schließlich der Fehler für die Samples aus

$$u_{\Delta m}(L) = \Delta m \cdot \sqrt{(\Delta_{E_1^{\text{spin}}})^2 + (\Delta_{\omega_5})^2 + (\Delta_{r_0})^2}. \quad (6.6)$$

Wie zuvor schon angesprochen, stammen die Fehler unter der Wurzel zwar aus Mittelwerten, aber für Δm wurde (wie auch sonst für den Fehler der zu berechnenden Größe bei Fehlerfortpflanzungen mit relativen Fehlern) jeweils der Wert der einzelnen Samples genommen. Der z -Fehler wird erneut aus den diskreten Ableitungen in z -Richtung und der Annahme $\Delta z = 0.01$ gewonnen. Es folgt dann nach Gauß für den Fehler im Kontinuumslimites als Modifikation des reinen Jackknife-Fehlers $u_{\Delta m}(0)$

$$u_{\Delta m^{\text{neu}}(0)} = \Delta m \cdot \sqrt{(\Delta_{\Delta m(0)})^2 + (\Delta z)^2}. \quad (6.7)$$

Verwendete Daten bei Extrapolationen Für alle Extrapolationen von HQET-Größen wurden stets die beiden Gitter mit der geringsten Auflösung nicht berücksichtigt. Man erkennt an den entsprechenden Grafiken für $\Phi(L_2)$ in den nächsten beiden Abschnitten auch, dass bei diesen Gittern (die letzten zwei Datenpunkte rechts jeweils) teilweise signifikante Gitterartefakte vorliegen müssen. Um das Auslassen von Datenpunkten beim Fitten deutlich zu machen, sind die gefundenen Ausgleichsgeraden in dem Bereich, in dem vorkommende Daten keine Berücksichtigung fanden, stets gestrichelt und nicht als durchgezogene Linie dargestellt. Für das Gitter mit der kleinsten Auflösung gilt dies auch für die ursprünglichen QCD-Daten.

6.1. HQET-Parameter aus den Simulationsdaten mit

$$z = 10.4 - 13.3$$

Es folgt die Darstellung der Elemente von $\Phi(L_1)$ für die QCD im Kontinuumslimites. In den folgenden Grafiken sind jeweils alle Plots der einzelnen κ -Kombinationen dargestellt, wobei sich dort für die farbliche Kennzeichnung κ_i auf die Kombinationen von κ_1 mit κ_{hi} aus Tab. 4.3 bezieht. Im Anschluss folgt eine Zusammenstellung der gefundenen Kontinuumslimiten in tabellarischer Form. Alle Werte bei endlichem Gitterabstand finden sich in Anhang C.

Danach folgen entsprechende Grafiken von $\Phi(L_2)$, wo die Methode eines ”constrained Fits“ veranschaulicht wird. Aus Platzgründen und der Übersichtlichkeit halber sind hier in den Grafiken nur Plots für die κ -Kombination mit dem mittleren Wert für z angegeben. Eine Auflistung aller Werte bei endlichem Gitterabstand und der gefundenen Werte im Kontinuumslimites finden sich ebenfalls in Anhang C.

Schließlich folgt die Angabe der so ermittelten HQET-Parameter.

Für die nachfolgend aufgelisteten Resultate gilt, dass für die QCD die optional zu verwendenden Daten für g_A und g_P genutzt wurden und - falls nicht hier oder bereits zuvor anders angegeben - gilt, dass stets TLI-Koeffizienten für QCD- und HQET-Größen verwendet wurden.

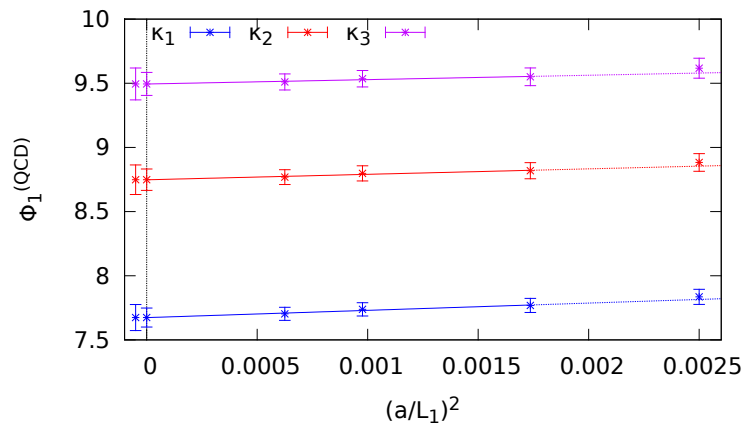


Abbildung 6.1.: Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_1$ ohne Berücksichtigung des Datenpunkts bei $L_1 = 20$

6.1. HQET-Parameter aus den Simulationsdaten mit $z = 10.4 - 13.3$

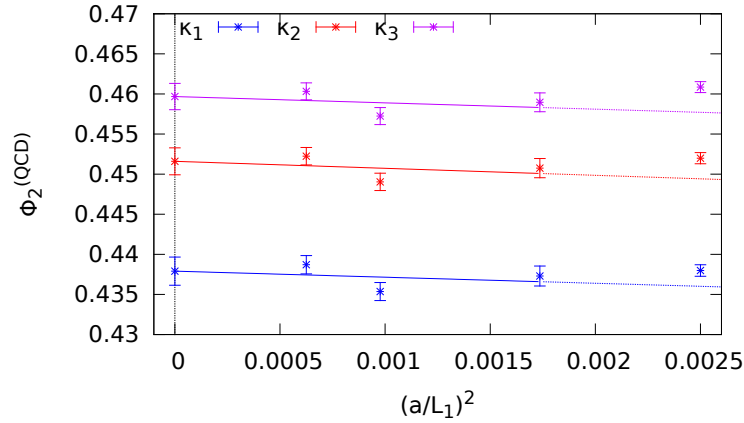


Abbildung 6.2.: Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_2$ ohne Berücksichtigung des Datenpunkts bei $L_1 = 20$

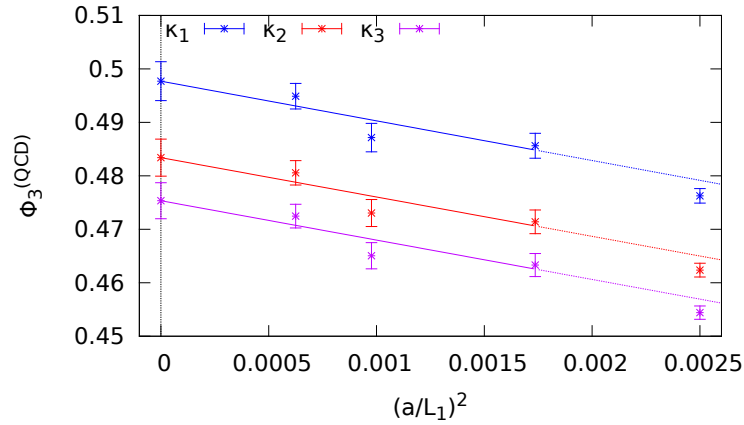


Abbildung 6.3.: Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_3$ ohne Berücksichtigung des Datenpunkts bei $L_1 = 20$

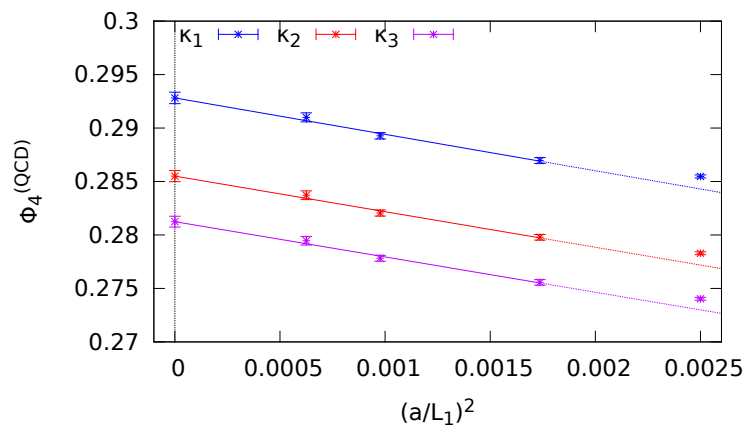


Abbildung 6.4.: Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_4$ ohne Berücksichtigung des Datenpunkts bei $L_1 = 20$

6. Ergebnisse

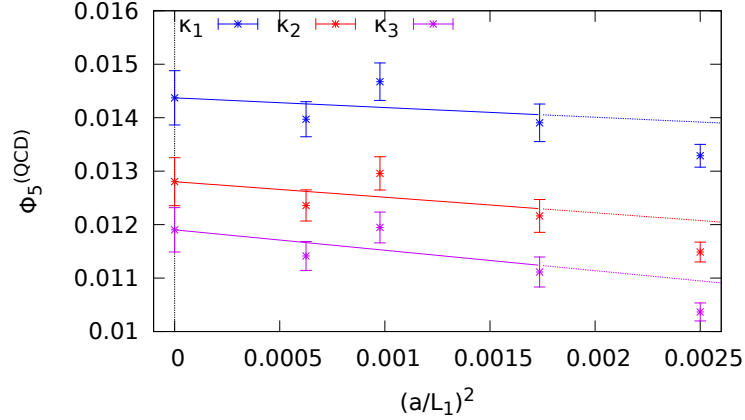


Abbildung 6.5.: Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_5$ ohne Berücksichtigung des Datenpunkts bei $L_1 = 20$

Bei den hier gezeigten Graphen zeigt sich jeweils das erwartete Verhalten, also etwa bei der ersten Komponente (Abb. 6.1) monoton steigende Funktionen mit etwa gleichen Steigungen. Dies liegt daran, dass mit zunehmend schlechter aufgelösten Gittern die Gitterartefakte zunehmend auftreten. Da die gewählten Werte für z allerdings nahe beieinander liegen, sollten diese Effekte bei allen drei Graphen etwa gleich stark auftreten, was zu den etwa gleichen Steigungen führt. Außerdem erkennt man dort ebenfalls, dass bei den Daten für das Gitter mit der schlechtesten Auflösung die Gitterartefakte zunehmend sichtbar werden. Die Datenpunkte für Gitter mit feineren Auflösungen liegen fast direkt auf der Ausgleichsgeraden, der jeweils rechts dargestellte Datenpunkt hingegen nur innerhalb seines Fehlerbereichs auf dieser Geraden, die dort nur gepunktet dargestellt ist, um die Nichtbeachtung entsprechender Datenpunkte beim Fitten kenntlich zu machen.

Im Kontinuumsmlimes wurden folgende Werte gefunden:

Tabelle 6.1.: Ermittelte Werte für die Elemente von $\Phi(L_1)$ im Kontinuumsmlimes

$\Phi(L_1)_i$	κ_1	κ_2	κ_3
$i = 1$	7.67(10)	8.75(12)	9.49(12)
$i = 2$	0.4379(18)	0.4516(17)	0.4597(16)
$i = 3$	0.4977(36)	0.4834(35)	0.4753(34)
$i = 4$	0.29282(54)	0.28551(52)	0.28125(50)
$i = 5$	0.01437(51)	0.01280(45)	0.01190(41)

6.1. HQET-Parameter aus den Simulationsdaten mit $z = 10.4 - 13.3$

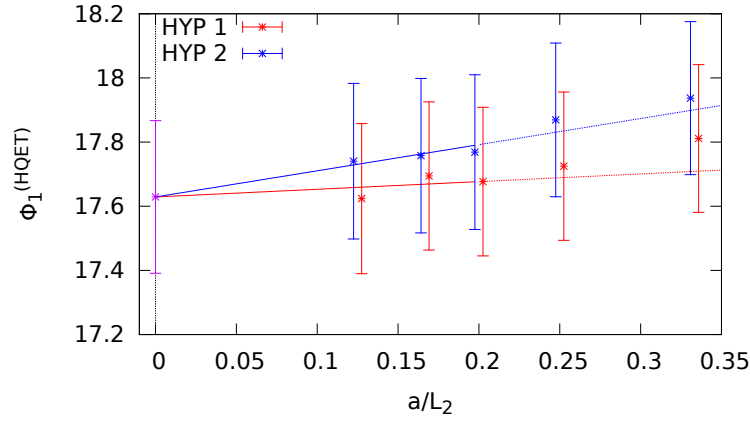


Abbildung 6.6.: Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_1$, gezeigt für κ_2 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)

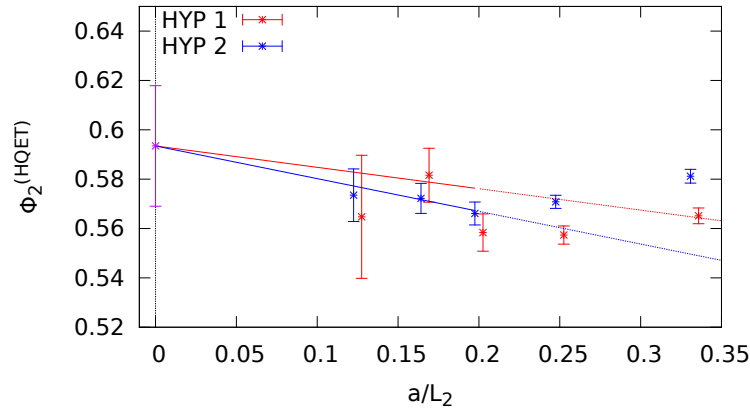


Abbildung 6.7.: Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_2$, gezeigt für κ_2 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)

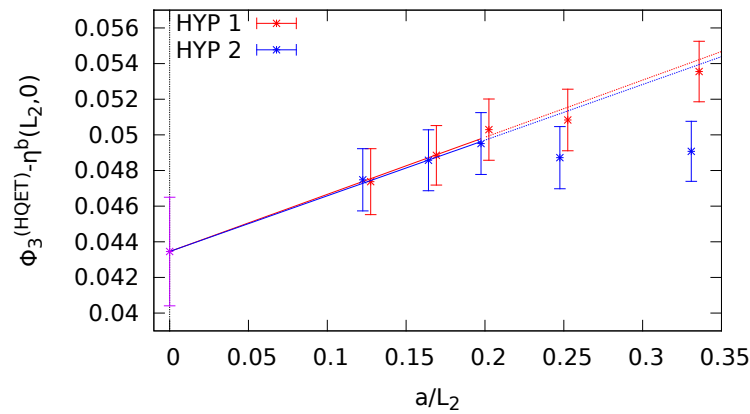


Abbildung 6.8.: Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_3$, gezeigt für κ_2 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)

6. Ergebnisse

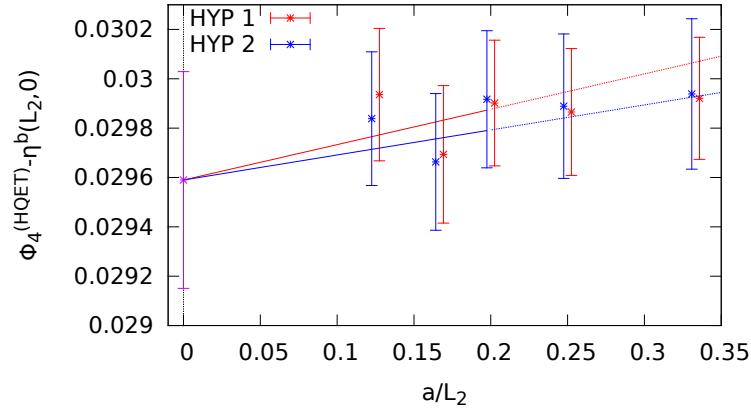


Abbildung 6.9.: Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_4$, gezeigt für κ_2 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)

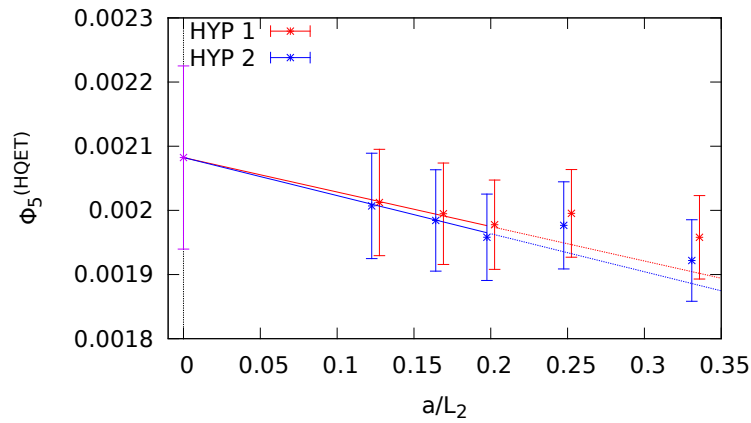


Abbildung 6.10.: Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_5$, gezeigt für κ_2 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)

Es folgt die Darstellung der Interpolation der Werte von ω zu $z = 12.48$ zur Bestimmung der HQET Parameter für den physikalischen Wert der Masse des b-Quarks. Der Fehler zu dem interpolierten Wert wurde für die erste Komponente aus der Kovarianzmatrix und für die übrigen Komponenten aus dem Jackknife-Fehler berechnet, wobei dieser als relativer Fehler - wie bereits mehrfach in Kapitel 6 beschrieben - mit dem relativen z -Fehler und für die zweite Komponente zusätzlich mit dem relativen Fehler von $\Delta \ln(Z_A^{\text{stat}})$ modifiziert wird. Mehr dazu findet sich in Kapitel 7.

6.1. HQET-Parameter aus den Simulationsdaten mit $z = 10.4 - 13.3$

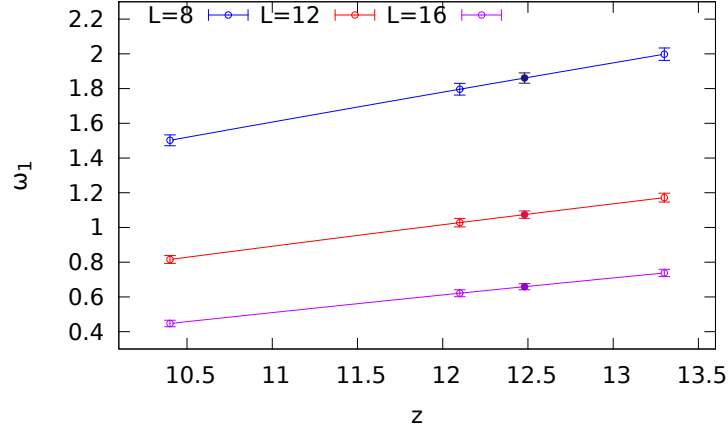


Abbildung 6.11.: Interpolation zu $z = 12.48$ für ω_1

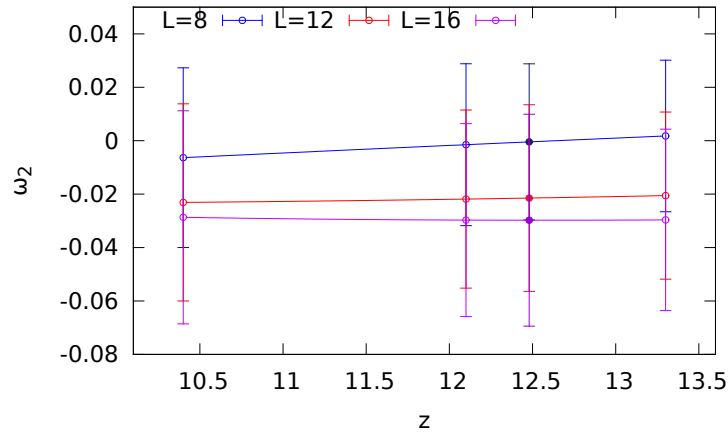


Abbildung 6.12.: Interpolation zu $z = 12.48$ für ω_2

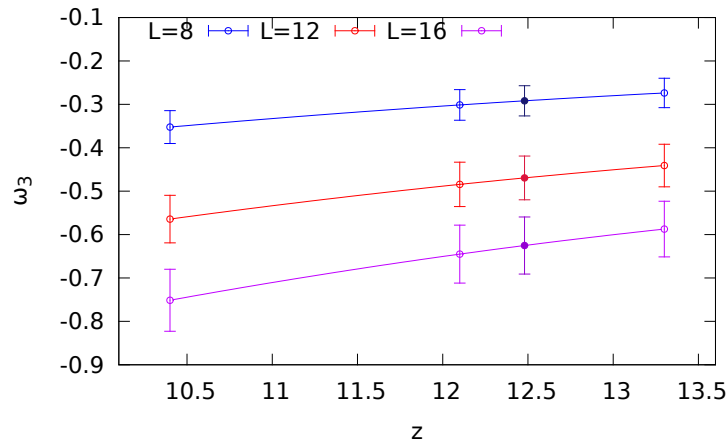


Abbildung 6.13.: Interpolation zu $z = 12.48$ für ω_3

6. Ergebnisse

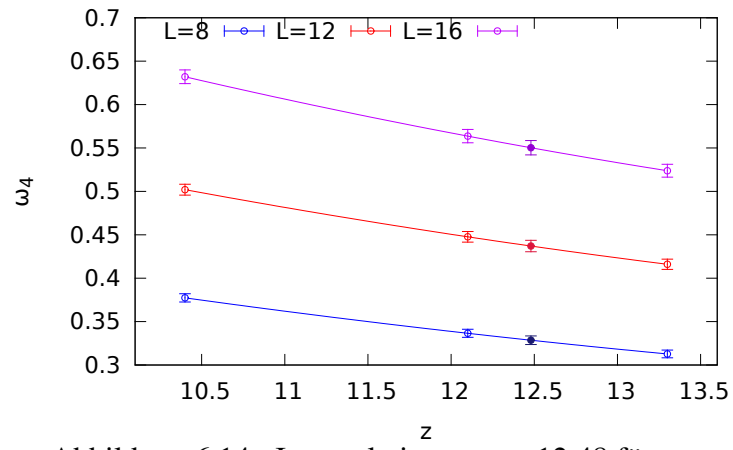


Abbildung 6.14.: Interpolation zu $z = 12.48$ für ω_4

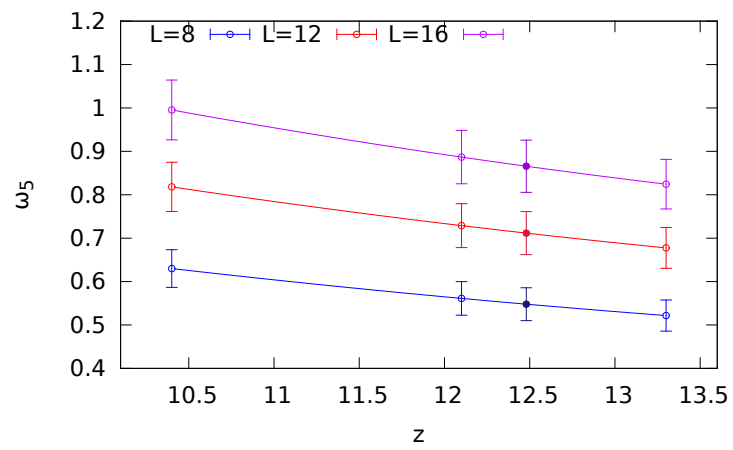


Abbildung 6.15.: Interpolation zu $z = 12.48$ für ω_5

6.2. HQET-Parameter aus den Simulationsdaten mit $z = 12.48 - 20$

Damit lassen sich die folgenden HQET Parameter finden, wobei berücksichtigt werden muss, dass die hier angegebenen Werte für β zu L_{ref} , also zu den Simulationen S_4 gehören und damit geringfügig zu den β -Werten bei L_2 (also S_3) abweichen:

Tabelle 6.2.: HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 interpoliert zu $z = 12.48$. Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$.

ω_i	HYP2		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	0.659(18)	1.074(21)	1.861(30)
$i = 2$	-0.030(40)	-0.021(35)	-0.0004(292)
$i = 3$	-0.625(66)	-0.469(50)	-0.292(35)
$i = 4$	0.5503(83)	0.4371(66)	0.3286(50)
$i = 5$	0.866(60)	0.712(50)	0.548(38)

ω_i	HYP1		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	0.646(17)	1.054(21)	1.831(30)
$i = 2$	0.011(37)	-0.0031(326)	-0.0075(297)
$i = 3$	-0.184(67)	-0.077(52)	0.018(37)
$i = 4$	0.5471(82)	0.4347(65)	0.3262(50)
$i = 5$	0.757(53)	0.593(41)	0.425(29)

6.2. HQET-Parameter aus den Simulationsdaten mit

$$z = 12.48 - 20$$

Im vorherigen Abschnitt diente die Beschränkung auf die Veranschaulichung der Kontinuumsextrapolationen auf Seiten der HQET auf die entsprechenden Daten bei $z = 12.1$ dazu, direkt Daten in der Nähe des Wertes $z = 12.48$ für die HQET-Parameter anzugeben. Bei den neuen QCD-Simulationen entspricht das erste κ bereits $z = 12.48$. Um nun nicht erneut fast identische Resultate vorzuführen, ist hier die Darstellung der Extrapolationen für $\Phi(L_2)$ auf den Wert von κ beschränkt, der zu dem größten verwendeten Wert von z gehört. Dadurch lässt sich bereits eine Tendenz für die Untersuchung der Quarkmassen-Abhängigkeit beim Spin-Splitting im nächsten Abschnitt erkennen. Wie zuvor sind fehlende Angaben im Kontinuumslimit und bei endlichem Gitterabstand in Anhang C zu finden. Die Reihenfolge der Darstellung der einzelnen Extrapolationen entspricht zunächst derselben wie im vorherigen Abschnitt, mit dem Unterschied, dass am Ende entsprechende Interpolationen für ω nicht gezeigt werden.

6. Ergebnisse

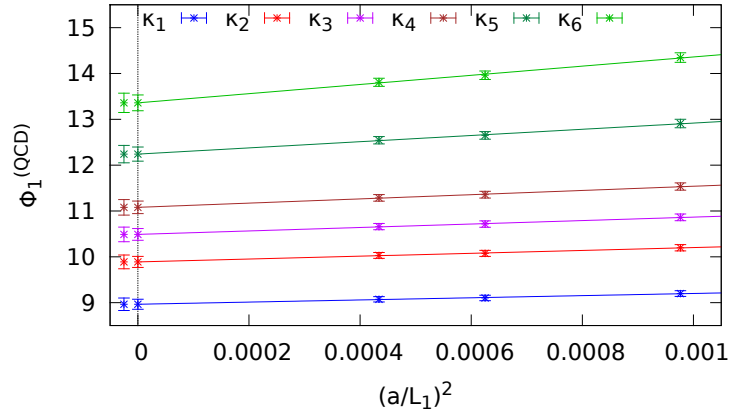


Abbildung 6.16.: Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_1$

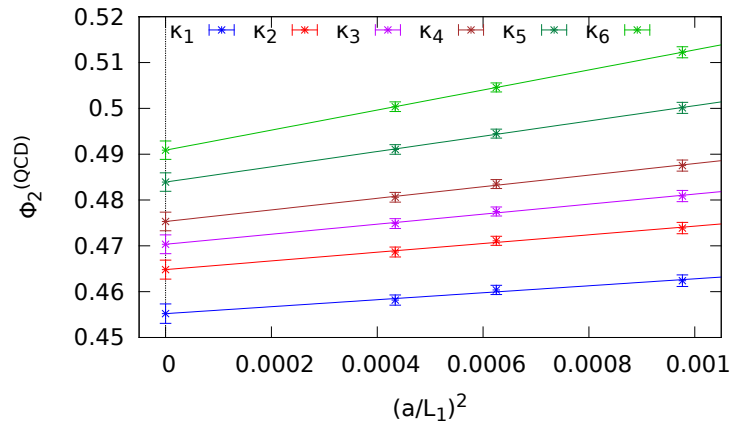


Abbildung 6.17.: Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_2$

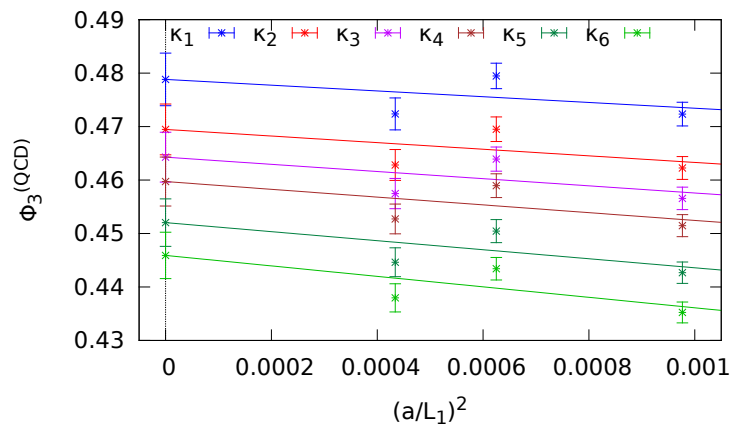


Abbildung 6.18.: Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_3$

6.2. HQET-Parameter aus den Simulationsdaten mit $z = 12.48 - 20$

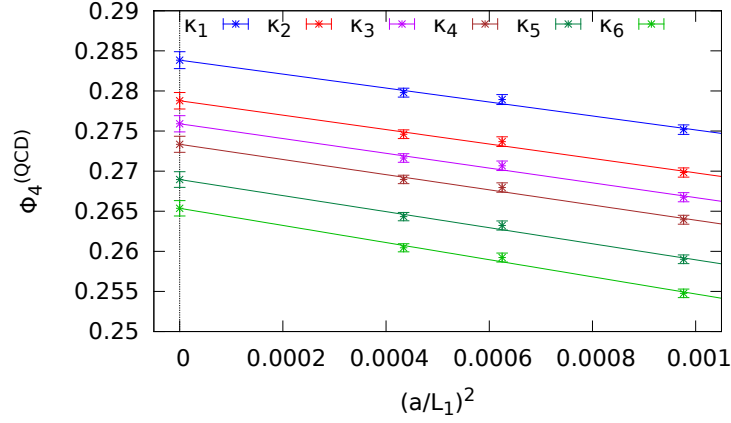


Abbildung 6.19.: Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_4$

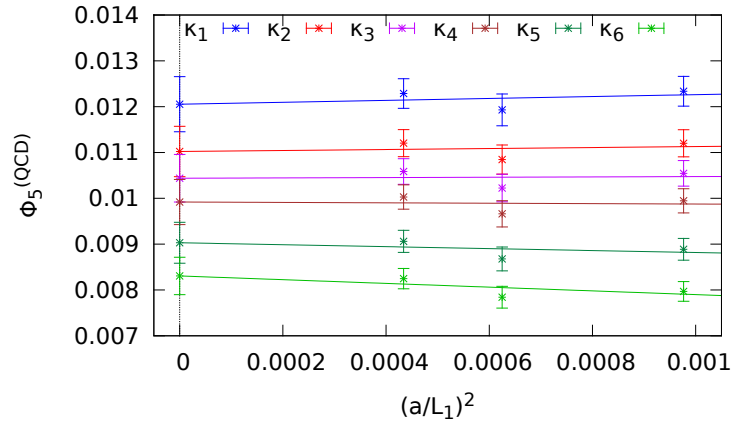


Abbildung 6.20.: Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_5$

Betrachtet man wieder die Ergebnisse für die erste Komponente (Abb. 6.16), stellt man dieses Mal fest, dass die Steigungen der Ausgleichsgeraden signifikante Unterschiede aufweisen. Dies stimmt allerdings völlig mit der theoretischen Erwartung überein, dass für größere Werte von z und damit größeren b -Quarkmassen die cutoff- Effekte zunehmen, was man in diesem Fall beobachten können sollte, da ein größerer Bereich für die Werte von z abgedeckt wurde als im vorherigen Unterkapitel. Außerdem wurden hier feinere Gitterauflösungen verwendet, was wegen größerer z -Werte auch nötig ist. Allerdings sind die Auflösungen hier nun hinreichend fein, so dass alle Datenpunkte berücksichtigt werden können (daher auch keine gepunkteten Ausgleichsgeraden).

6. Ergebnisse

Im Kontinuumslimites wurden folgende Werte gefunden:

Tabelle 6.3.: Ermittelte Werte für die Elemente von $\Phi(L_1)$ im Kontinuumslimites

$\Phi(L_1)_i$	κ_1	κ_2	κ_3
$i = 1$	8.96(14)	9.89(15)	10.49(16)
$i = 2$	0.4552(21)	0.4648(21)	0.4703(20)
$i = 3$	0.4788(49)	0.4695(48)	0.4643(47)
$i = 4$	0.2838(11)	0.2788(10)	0.2759(10)
$i = 5$	0.01205(60)	0.01102(55)	0.01044(52)
$\Phi(L_1)_i$	κ_4	κ_5	κ_6
$i = 1$	11.08(17)	12.24(19)	13.36(21)
$i = 2$	0.4753(20)	0.4839(20)	0.4909(20)
$i = 3$	0.4597(46)	0.4520(44)	0.4459(43)
$i = 4$	0.2733(10)	0.2690(10)	0.2654(10)
$i = 5$	0.00992(49)	0.00903(45)	0.00831(41)

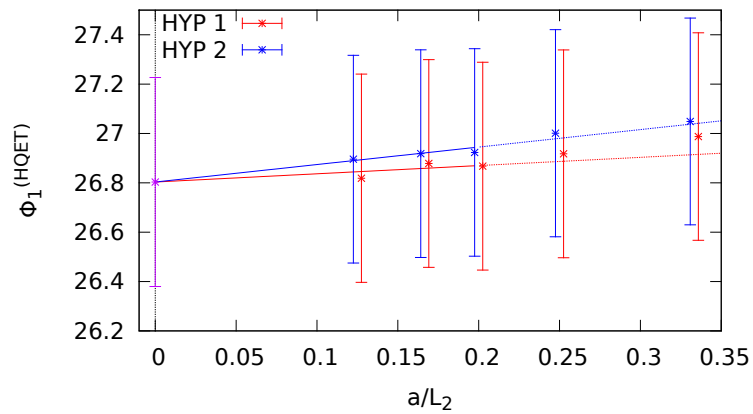


Abbildung 6.21.: Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_1$, gezeigt für κ_6 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)

6.2. HQET-Parameter aus den Simulationsdaten mit $z = 12.48 - 20$

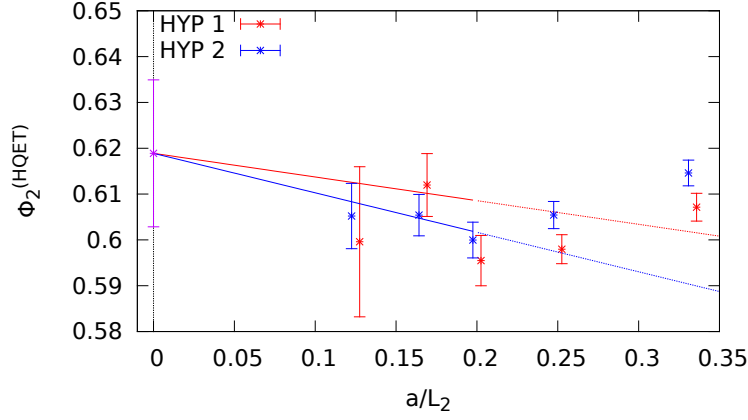


Abbildung 6.22.: Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_2$, gezeigt für κ_6 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)

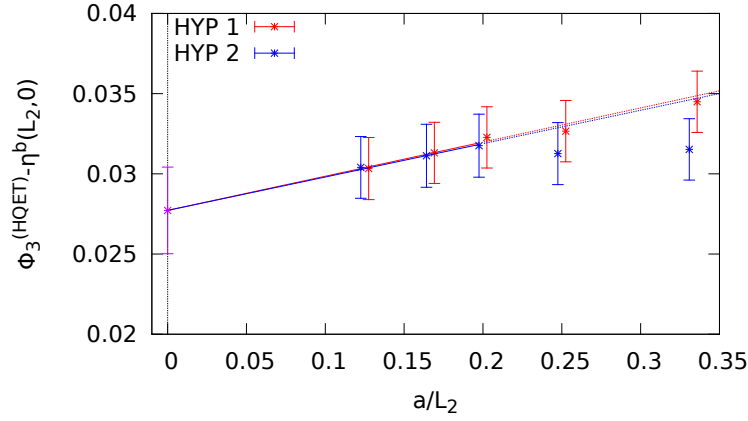


Abbildung 6.23.: Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_3$, gezeigt für κ_6 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)

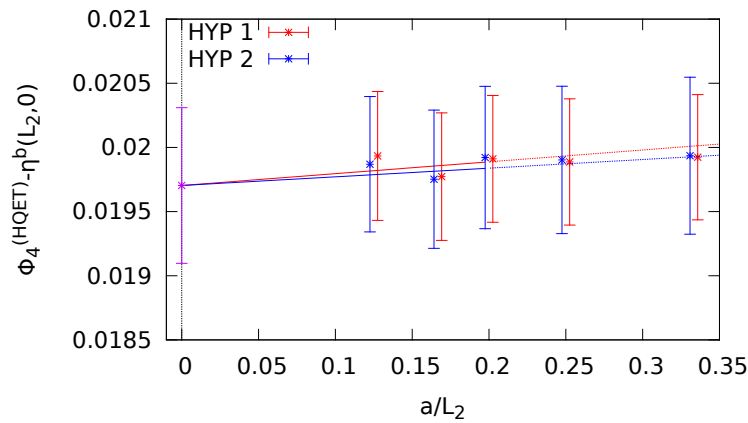


Abbildung 6.24.: Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_4$, gezeigt für κ_6 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)

6. Ergebnisse

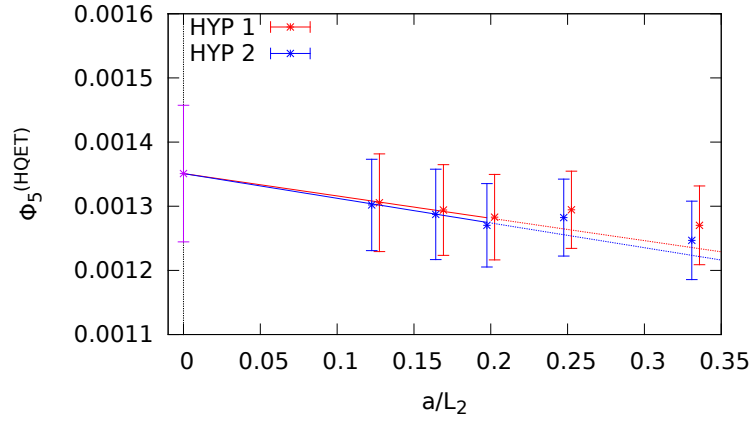


Abbildung 6.25.: Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_5$, gezeigt für κ_6 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)

Damit lassen sich die folgenden HQET Parameter finden:

Tabelle 6.4.: HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_1 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$.

ω_i	HYP2		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	0.657(24)	1.071(29)	1.855(40)
$i = 2$	-0.026(37)	-0.018(34)	0.0025(305)
$i = 3$	-0.604(78)	-0.454(59)	-0.282(41)
$i = 4$	0.548(12)	0.4353(93)	0.3273(69)
$i = 5$	0.835(65)	0.686(54)	0.528(40)

ω_i	HYP1		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	0.644(23)	1.051(28)	1.825(40)
$i = 2$	0.013(38)	-0.0015(345)	-0.0064(306)
$i = 3$	-0.164(81)	-0.062(63)	0.026(44)
$i = 4$	0.545(12)	0.4330(92)	0.3249(69)
$i = 5$	0.730(57)	0.571(45)	0.410(31)

6.2. HQET-Parameter aus den Simulationsdaten mit $z = 12.48 - 20$

Tabelle 6.5.: HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_2 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$.

ω_i	HYP2		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	0.800(25)	1.248(31)	2.104(43)
$i = 2$	-0.026(35)	-0.016(32)	0.0064(282)
$i = 3$	-0.539(75)	-0.405(57)	-0.251(39)
$i = 4$	0.501(11)	0.3977(91)	0.2990(68)
$i = 5$	0.763(60)	0.627(49)	0.483(37)

ω_i	HYP1		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	0.786(25)	1.228(31)	2.074(43)
$i = 2$	0.0029(356)	-0.0087(321)	-0.0099(284)
$i = 3$	-0.137(78)	-0.047(60)	0.031(42)
$i = 4$	0.498(11)	0.3956(90)	0.2969(67)
$i = 5$	0.667(53)	0.523(41)	0.375(29)

Tabelle 6.6.: HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_3 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$.

ω_i	HYP2		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	0.891(26)	1.361(32)	2.265(45)
$i = 2$	-0.025(35)	-0.015(30)	0.0088(269)
$i = 3$	-0.503(73)	-0.378(55)	-0.234(38)
$i = 4$	0.474(11)	0.3764(88)	0.2830(66)
$i = 5$	0.723(57)	0.594(47)	0.458(35)

ω_i	HYP1		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	0.876(26)	1.340(32)	2.235(45)
$i = 2$	-0.0023(341)	-0.012(31)	-0.015(27)
$i = 3$	-0.123(76)	-0.040(58)	0.033(41)
$i = 4$	0.471(11)	0.3744(88)	0.2810(65)
$i = 5$	0.632(50)	0.495(39)	0.355(27)

6. Ergebnisse

Tabelle 6.7.: HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_4 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$.

ω_i	HYP2		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	0.979(27)	1.472(33)	2.421(47)
$i = 2$	-0.025(32)	-0.014(29)	0.011(26)
$i = 3$	-0.473(71)	-0.355(54)	-0.220(37)
$i = 4$	0.450(11)	0.3574(86)	0.2687(64)
$i = 5$	0.687(54)	0.565(44)	0.435(34)

ω_i	HYP1		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	0.964(26)	1.450(33)	2.392(47)
$i = 2$	-0.0067(328)	-0.016(29)	-0.013(26)
$i = 3$	-0.112(74)	-0.034(57)	0.034(40)
$i = 4$	0.447(11)	0.3554(86)	0.2668(64)
$i = 5$	0.601(48)	0.470(37)	0.337(26)

Tabelle 6.8.: HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_5 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$.

ω_i	HYP2		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	1.149(29)	1.685(36)	2.728(52)
$i = 2$	-0.023(30)	-0.011(27)	0.016(24)
$i = 3$	-0.423(69)	-0.318(52)	-0.196(36)
$i = 4$	0.409(10)	0.3247(83)	0.2441(62)
$i = 5$	0.625(50)	0.514(41)	0.396(31)

ω_i	HYP1		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	1.132(29)	1.663(36)	2.698(52)
$i = 2$	-0.014(31)	-0.020(27)	-0.015(24)
$i = 3$	-0.095(72)	-0.026(55)	0.034(39)
$i = 4$	0.407(10)	0.3230(83)	0.2424(62)
$i = 5$	0.547(43)	0.428(34)	0.307(24)

Tabelle 6.9.: HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_6 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$.

ω_i	HYP2		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	1.309(31)	1.888(39)	3.021(56)
$i = 2$	-0.022(28)	-0.0091(252)	0.019(22)
$i = 3$	-0.385(67)	-0.289(51)	-0.178(35)
$i = 4$	0.375(10)	0.2981(82)	0.2241(61)
$i = 5$	0.575(46)	0.473(38)	0.364(28)

ω_i	HYP1		
	$\beta = 6.4956$	$\beta = 6.2885$	$\beta = 6.0219$
$i = 1$	1.291(31)	1.867(39)	2.991(56)
$i = 2$	-0.019(29)	-0.024(26)	-0.016(23)
$i = 3$	-0.083(70)	-0.020(54)	0.034(38)
$i = 4$	0.373(10)	0.2965(81)	0.2225(61)
$i = 5$	0.503(40)	0.394(31)	0.282(22)

6.3. Resultate für das Spin-Splitting

Wie zu Anfang dieses Kapitels beschrieben, wird die auftretende Massendifferenz beim Spin-Splitting berechnet. Es folgen eine Darstellung der constrained Fits sowie die Angabe der gefundenen Resultate.

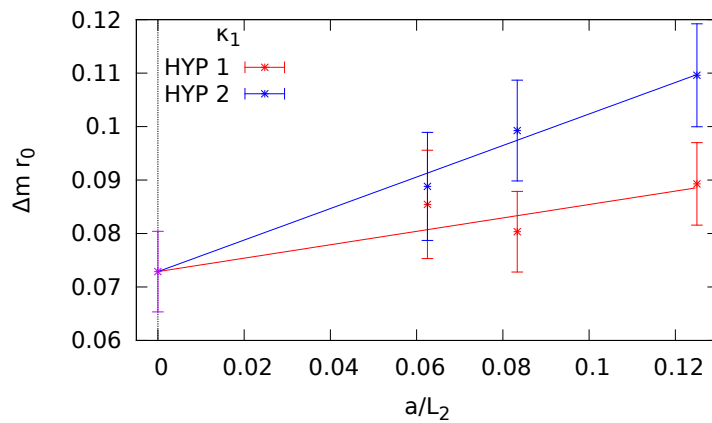


Abbildung 6.26.: Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_1

6. Ergebnisse

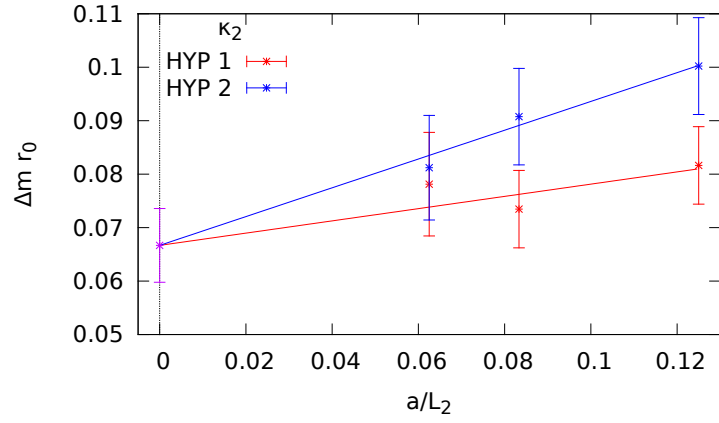


Abbildung 6.27.: Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_2

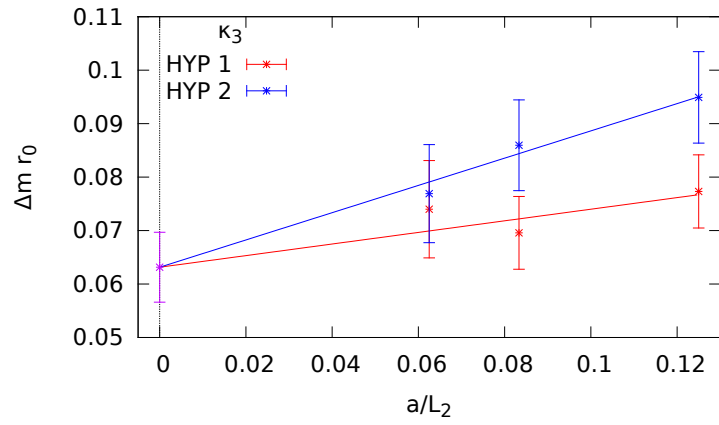


Abbildung 6.28.: Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_3

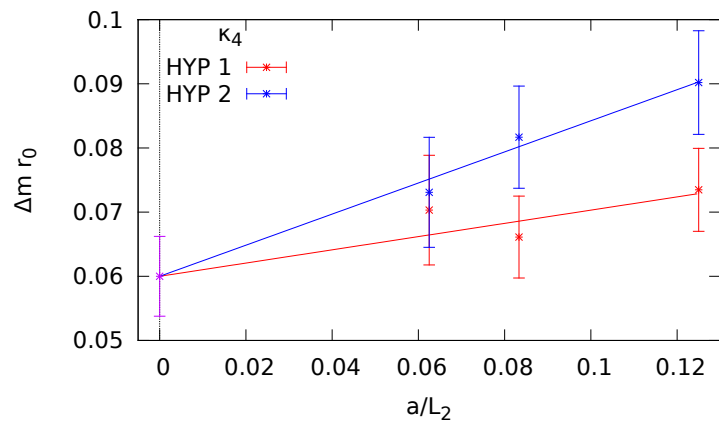


Abbildung 6.29.: Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_4

6.3. Resultate für das Spin-Splitting

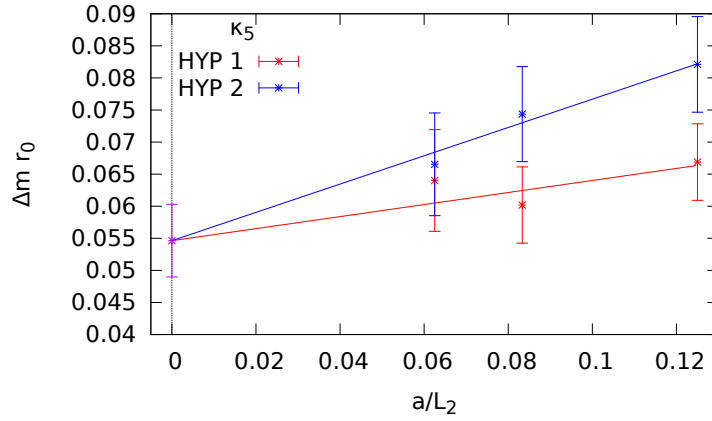


Abbildung 6.30.: Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_5

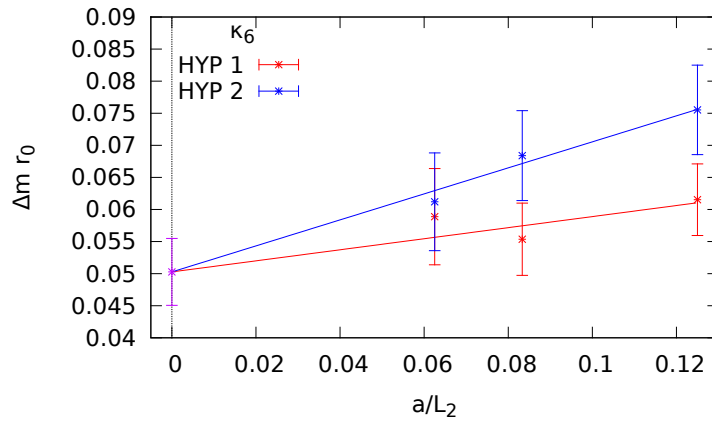


Abbildung 6.31.: Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_6

Es ergeben sich dabei für die gewählten z nachstehend aufgeführte, tabellarisch zusammengefasste Ergebnisse:

Tabelle 6.10.: Massendifferenz $\Delta m \cdot r_0$ beim Spin-Splitting für verschiedene κ -Werte

κ_i	$\Delta m \cdot r_0$
$i = 1$	0.0729(75)
$i = 2$	0.0667(69)
$i = 3$	0.0631(65)
$i = 4$	0.0600(62)
$i = 5$	0.0546(57)
$i = 6$	0.0503(52)

6. Ergebnisse

Analog zu Abb. 5.1 lassen sich die gefundenen Daten darstellen. Grün ist hier eine Gerade mit der theoretisch erwarteten Steigung dargestellt, Datenpunkte aus meinen Ergebnissen sind durch rote Kreise wiedergegeben, während die Datenpunkte aus der Charm-Region blau dargestellt sind. Der Punkt für den statischen Limes ist hier ein roter nicht ausgefüllter Stern.

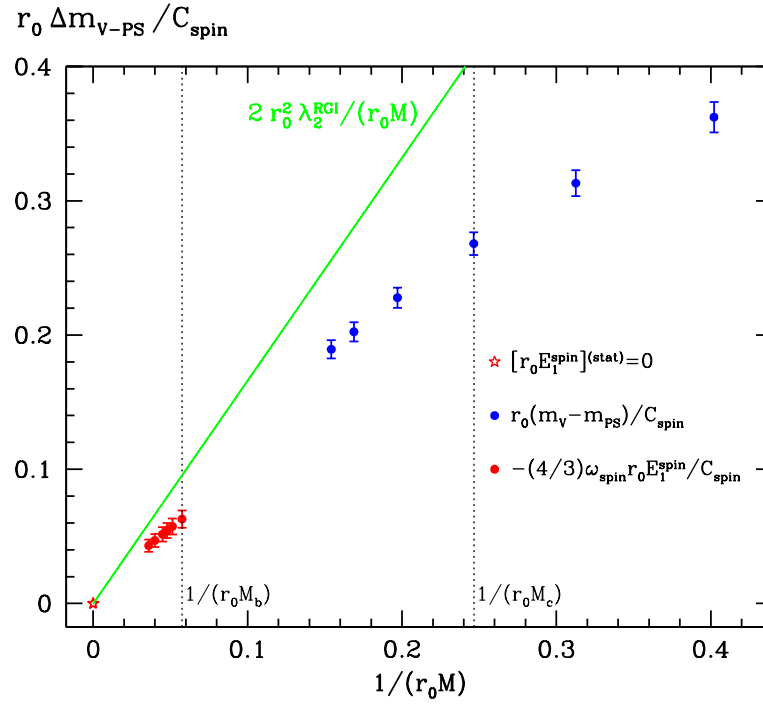


Abbildung 6.32.: Darstellung der gefundenen Resultate für das Spin-Splitting mit Vergleich zu Resultaten aus der Charm-Region [39]

Analog zu Abb. 5.2 lassen sich die gefundenen Daten auch alternativ darstellen.

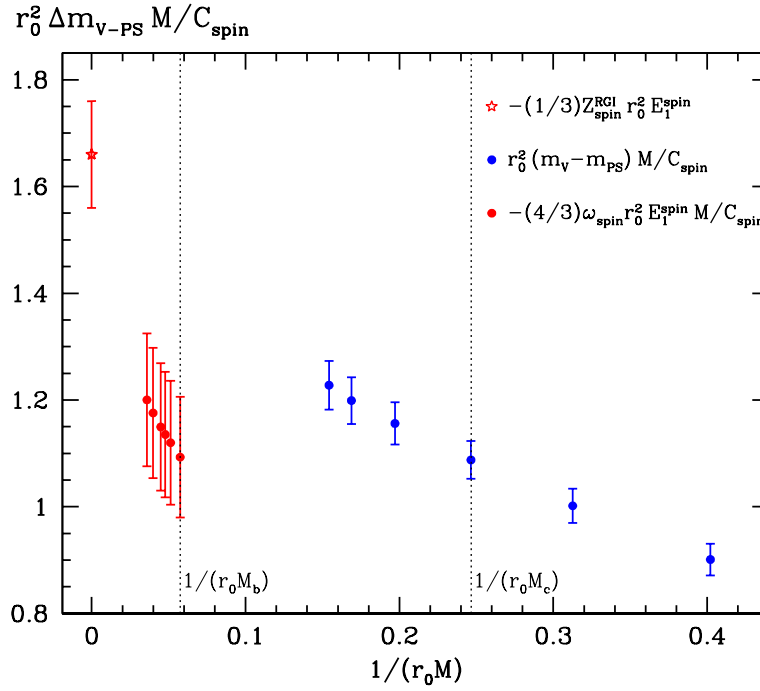


Abbildung 6.33.: alternative Darstellung der gefundenen Resultate für das Spin-Splitting mit Vergleich zu Resultaten aus der Charm-Region [39]

Abschließende Bemerkungen zu diesen Resultaten finden sich in Kapitel 7.

7. Ausblick und Diskussion von Methoden und Ergebnissen

HQET-Parameter

Für die Ergebnisse aus den Daten der Simulationen am DESY wurden mir dankenswerter Weise Zwischenresultate zur Verfügung gestellt [40], die in die bereits durchgeführte Analyse eingingen [5]. Dadurch war ich in der Lage, meine Ergebnisse auf ihre Richtigkeit zu überprüfen und somit Bugs in meinem Quellcode zu finden. Hier fand allerdings eine Mitteilung der Werte für f_A mit denen von g_A nicht statt. Nachdem ich sichergestellt hatte, dass die Resultate innerhalb ihrer Fehlergrenzen übereinstimmen, habe ich diese Möglichkeit erst selbst genutzt.

Berücksichtigung der z -Fehler

Für die Fehler in der ersten Komponente von $\Phi(L_2)$ und ω stellte sich zunächst die Frage, ob es eine alternative Möglichkeit gibt, den vergrößerten Fehler (gegenüber einer Extrapolation unter Berücksichtigung nur der Jackknife-Fehler) der ersten Komponente von $\Phi(L_1)$ innerhalb der Jackknife-Samples berücksichtigen zu können. Nach verschiedenen Ansätzen fand ich aber nur eine Methode, mit der ich die Fehler gut reproduzieren konnte. Es fällt natürlich auf, dass bei der von mir gewählten Methode, den z -Fehler zu transportieren, jeweils der Jackknife-Fehler von $\Phi(L_1)_1$ zum Fehler von $\Phi(L_2)_1$ mittransportiert wird usw. und so auf den Jackknife-Fehler von $\Phi(L_2)_1$ (obwohl hier der von $\Phi(L_1)_1$ bereits enthalten ist) usw. aufgeschlagen wird. Somit wird der Fehler im Endeffekt also etwas überschätzt. Ein weiterer Punkt bei der von mir gewählten Methode ist, dass zwar z.B. ω_1 direkt eine Funktion von unter anderem $\Phi(L_2)_1$ ist, aber nicht von z in diesem Sinne, weshalb die Fehler demnach eigentlich eher als relative Fehler gemäß Gauß addiert werden sollten. Dabei hätten sich aber kleinere Fehler ergeben, die zwar noch in der Größenordnung mit den Fehlern von [40] übereinstimmen, dennoch signifikante Abweichungen aufgewiesen hätten. Allerdings ist der z -abhängige Anteil des Fehlers der hier betrachteten Größen jeweils dominierend (h -Anteil), so dass im Sinne einer Abschätzung des vergrößerten Fehlers bei $\Phi(L_2)_1$ und ω_1

7. Ausblick und Diskussion von Methoden und Ergebnissen

die von mir gewählte Methode gerechtfertigt zu sein scheint. Dies gilt auch für die Berechnung des Fehlers von ω_1 aus der Kovarianzmatrix bei der Interpolation zu $z = 12.48$, wodurch der Fehler im Gegensatz zu denen der Eingangsdaten verkleinert wird. Da aber zuvor der Fehler wie beschrieben eher zu groß abgeschätzt wurde, halte ich dies für gerechtfertigt.

Für die übrigen Komponenten von ω bei der Interpolation zu $z = 12.48$ ist es auch möglich, den z -Fehler für die Eingangsdaten nicht als relative Fehler zu berücksichtigen und dies nur beim interpolierten Wert mit relativen Fehlern zu berechnen, da die gefundenen interpolierten Werte und Fehler andernfalls nur eine so geringe Abweichung zeigen, dass sich dies in den Angaben in dieser Arbeit nicht wiederfinden würde.

Spin-Splitting

Der generelle Verlauf von abnehmenden Werten von $\Delta m \cdot r_0$ mit steigenden Werten für z (vgl. 6.10) stimmt mit der Erwartung überein, dass für steigende Werte von z der statische Limes der HQET approximiert wird und für den statischen Anteil der Lagrangedichte der HQET die Spin-Symmetrie existiert, weshalb eine Massenaufspaltung in diesem Limes nicht zu erklären wäre.

Betrachtet man jedoch Abb. 6.33, erkennt man, dass zwar die Datenpunkte jenseits des Charm-Punktes etwa in derselben Größenordnung liegen, aber keinesfalls innerhalb der Fehler mit dem Wert der statischen Theorie übereinstimmen.

Man stellt ebenso fest, dass zwar die neu gefundenen Datenpunkte gegen den Wert des statischen Limes zu streben scheinen. Allerdings muss man berücksichtigen, dass die Daten in z -Richtung korreliert sind, da sie nicht in unabhängigen MC-Simulationen erzeugt wurden, sondern jeweils auf dem Hintergrund derselben Eichfeldkonfiguration entstanden sind.

Eine mögliche Ursache dafür, dass es eine Diskrepanz zwischen dem Wert im statischen Limes und den Datenpunkten für Quarkmassen, die größer als die physikalische c -Quarkmasse sind, könnte darin liegen, dass die Unsicherheit der nur perturbativ bestimmten Funktion C_{spin} unterschätzt ist. Außerdem könnten Korrekturen höherer Ordnung (aus der HQET) noch Beiträge zum Spin-Splitting liefern, die eine Verkleinerung der in [36] angesprochenen Differenz zwischen experimentellem Ergebnis und theoretischer Vorhersage bewirken.

Die Tatsache, dass alle Ergebnisse in dieser Arbeit aus Simulationen in der "quenched approximation" stammen, ist eine weitere mögliche Ursache.

Ausblick

Daher bleibt es abzuwarten, wie sich die Resultate verändern, falls dieselbe Untersuchung für $N_f = 2$ -Simulationen durchgeführt wird. Nach einigen Modifikationen an dem von mir geschriebenen Programm ließen sich mit dessen Hilfe einfach entsprechende neue Resultate

gewinnen, sofern entsprechende Datensätze vorliegen.

Unabhängig davon, ob man nun mit Daten bei $N_f = 2$ oder aus der “quenched approximation” arbeitet, bieten sich natürlich noch weitere Anwendungsmöglichkeiten mit den bestimmten bzw. bei $N_f = 2$ mit den dann zu bestimmenden HQET-Parametern. In dieser Arbeit wurde mit dem Spin-Splitting lediglich der fünfte Parameter verwendet. Außerdem ist es denkbar, weitere Observablen beim Matching zu berücksichtigen, um auch Korrelationsfunktionen zu betrachten, bei denen nicht nur die Zeitkomponente des Axialvektorstroms enthalten ist und so weitere HQET-Parameter zu bestimmen, für die sich weitere Anwendungen ergeben.

A. Konventionen

Die hier gezeigte Darstellung, d.h. nur die in Anhang A, ist [13] entnommen.

A.1. Verwendung von Indizes

Grundsätzlich werden kleine griechische Buchstaben aus der Mitte des Alphabets, also etwa μ, ν, \dots , als Index verwendet, wenn diese die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen können, während kleine lateinische Buchstaben aus der Mitte des Alphabets als Index nur die Werte 1, 2, 3 annehmen können. Große lateinische Buchstaben werden als Dirac-Indizes benutzt und laufen von 1 bis 4. Vektoren in der fundamentalen Darstellung der $SU(N)$ sind N -dimensional. Für Vektoren im Farbraum werden kleine griechische Buchstaben ab dem Anfang des griechischen Alphabets verwendet, die dann die Werte $1, \dots, N$ annehmen können. In der adjungierten Darstellung hat man $N^2 - 1$ Basisvektoren. Hier finden schließlich kleine Buchstaben für Indizes ab dem Beginn des lateinischen Alphabets Verwendung, die dann von 1 bis $N^2 - 1$ laufen. Da es sich hier um eine Arbeit zur QCD handelt, gilt $N = 3$. Grundsätzlich gilt die Einsteinsche Summenkonvention, sofern nicht explizit erwähnt wird, dass nicht summiert werden darf. Skalarprodukte sind mit der euklidischen Metrik zu bilden.

A.2. Gamma-Matrizen

In der so genannten chiralen Darstellung sind die Gamma-Matrizen wie folgt definiert

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & e_\mu \\ e_\mu^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

wobei die darin auftretenden 2×2 Matrizen in den meisten Fällen nur mit $-i$ multiplizierte Pauli-Matrizen sind

$$e_0 = -1, \quad e_k = -i\sigma_k. \quad (\text{A.2})$$

A. Konventionen

Die Gamma-Matrizen sind hermitesch und erfüllen die so genannte Clifford Algebra

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

Außerdem lässt sich eine fünfte Gamma-Matrix gemäß

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

definieren, für die

$$\gamma_5 = \gamma_5^\dagger, \quad \gamma_5^2 = 1 \quad (\text{A.5})$$

gilt. Es lassen sich weitere hermitesche Matrizen durch

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (\text{A.6})$$

eingeführen, die dann wegen $\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ durch

$$\sigma_{0k} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} =: -\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (\text{A.7})$$

gegeben sind, wobei ε_{ijk} ein total antisymmetrischer Tensor mit $\varepsilon_{123} = 1$ ist.

Neben der chiralen Darstellung ist auch die so genannte Dirac-Darstellung wichtig, in der die Gamma-Matrizen und Sigma-Matrizen durch

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

und

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

gegeben sind. Natürlich gelten hier die zuvor angesprochenen Eigenschaften auch.

A.3. Eichfelder im Kontinuum

Das Eichfeld in einer nicht-Abelschen Eichtheorie ist ein Vektorfeld, das sich mit den Generatoren T^a wie folgt schreiben lässt

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a. \quad (\text{A.10})$$

Für diese gelten die Eigenschaften

$$(T^a)^\dagger = -T^a, \quad \text{Sp} \{T^a T^b\} = -\frac{1}{2}\delta^{ab}. \quad (\text{A.11})$$

Aus dem Eichfeld lässt sich der Feldstärketensor gemäß

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (\text{A.12})$$

aufbauen. Schließlich sind die nach links bzw. rechts wirkenden kovarianten Ableitungen durch

$$D_\mu \psi(x) = (\partial_\mu + A_\mu) \psi(x) \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{\psi}(x) \bar{D}_\mu = \bar{\psi}(x) (\bar{\partial}_\mu - A_\mu) \quad (\text{A.14})$$

definiert. Im Falle periodischer Randbedingungen bis auf eine Phase θ_μ muss das Eichfeld gemäß $A_\mu \mapsto A_\mu + i\theta_\mu/L$ transformiert werden.

A.4. Ableitungen auf dem Gitter

Für eine skalare Farbsinglett-Funktion $f(x)$ wird die Ableitung auf dem Gitter gemäß

$$\partial_\mu f(x) = \frac{1}{a} [f(x + a\hat{\mu}) - f(x)], \quad (\text{A.15})$$

$$\partial_\mu^* f(x) = \frac{1}{a} [f(x) - f(x - a\hat{\mu})] \quad (\text{A.16})$$

definiert. Dabei bezeichnet $\hat{\mu}$ den Einheitsvektor in μ -Richtung. Es lässt sich nun auch eine symmetrische Ableitung einführen

$$\tilde{\partial}_\mu = \frac{1}{2} (\partial_\mu + \partial_\mu^*). \quad (\text{A.17})$$

A. Konventionen

Für Quarkfelder $\Psi(x)$ wird die kovariante Ableitung auf dem Gitter wie folgt verwendet:

$$\nabla_\mu \psi(x) = \frac{1}{a} \left[\lambda_\mu U(x, \mu) \psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x) \right], \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla_\mu^* \psi(x) = \frac{1}{a} \left[\psi(x) - \lambda_\mu^{-1} U(x - a\hat{\mu}, \mu)^{-1} \psi(x - a\hat{\mu}) \right]. \quad (\text{A.19})$$

Für die darin auftretenden Faktoren gilt:

$$\lambda_\mu = e^{ia\theta_\mu/L}, \quad \theta_0 = 0, \quad -\pi < \theta_k \leq \pi. \quad (\text{A.20})$$

Für eine nach links wirkende kovariante Ableitung definiert man

$$\bar{\psi}(x) \overleftarrow{\nabla}_\mu = \frac{1}{a} \left[\bar{\psi}(x + a\hat{\mu}) U(x, \mu)^{-1} \lambda_\mu^{-1} - \bar{\psi}(x) \right], \quad (\text{A.21})$$

$$\bar{\psi}(x) \overleftarrow{\nabla}_\mu^* = \frac{1}{a} \left[\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}(x - a\hat{\mu}) U(x - a\hat{\mu}, \mu) \lambda_\mu \right]. \quad (\text{A.22})$$

Die Rolle des Eichfeldes auf dem Gitter übernehmen die Verbindungen (Links) zwischen den einzelnen Gitterpunkten, also hier $U(x, \mu)$ auf der Verbindung zwischen dem Gitterpunkt x und dem Punkt $x + \hat{\mu}$.

A.5. Wirkung auf dem Gitter

Die Wirkung auf dem Gitter

$$S[U, \bar{\psi}, \psi] = S_G[U] + S_F[U, \bar{\psi}, \psi] \quad (\text{A.23})$$

ist zerlegt in einen fermionischen Anteil für die Quarks (S_F), der durch

$$S_F[U, \bar{\psi}, \psi] = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) (D_W + m_0) \psi(x) \quad (\text{A.24})$$

gegeben ist. Er enthält eine diagonale Matrix m_0 , die als Einträge auf der Hauptdiagonale die nackten Quarkmassen der unterschiedlichen Flavours enthält. Außerdem enthält er den Wilson-Dirac-Operator

$$D_W = \frac{1}{2} \left\{ \gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) - a \nabla_\mu^* \nabla_\mu \right\}. \quad (\text{A.25})$$

Der andere Anteil der Wirkung auf dem Gitter (S_G) ist die Wilson-Plaketten-Wirkung. Eine Plakette ist durch

$$P_{\mu,\nu}(x) = U(x, \mu) U(x + a\hat{\mu}, \nu) U(x + a\hat{\nu}, \mu)^{-1} U(x, \nu)^{-1} \quad (\text{A.26})$$

definiert. Damit ergibt sich S_G zu

$$S_G[U] = \frac{1}{g_0^2} \sum_p \text{Sp} \{1 - U(p)\} = \frac{1}{g_0^2} \sum_x \sum_{\mu,\nu} P_{\mu\nu}(x). \quad (\text{A.27})$$

Die Summe über p läuft über alle orientierten Plaketten, also unabhängig über μ und ν . Dementsprechend soll $U(p)$ den Paralleltransporter um die Plakette p bezeichnen. Die nackte Kopplungskonstante ist g_0 .

B. Werte von ω für die Interpolation zu $z = 12.48$

Hier sind die Werte von allen Komponenten von ω bei allen drei Gittern ($L = 8$, $L = 12$ und $L = 16$) für $z = 10.4$, $z = 12.1$ und $z = 13.3$ angegeben.

Tabelle B.1.: Werte von ω_i bei verschiedenen Werten von z

HYP 2	z	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$L = 8$	10.4	1.502(31)	-0.0063(336)	-0.352(38)	0.3774(48)	0.630(43)
	12.1	1.796(34)	-0.0015(303)	-0.301(35)	0.3365(46)	0.561(39)
	13.3	1.998(36)	0.0018(284)	-0.274(34)	0.3128(45)	0.522(36)
$L = 12$	10.4	0.816(23)	-0.0231(369)	-0.564(55)	0.5020(63)	0.818(57)
	12.1	1.028(24)	-0.0219(333)	-0.484(51)	0.4477(61)	0.729(51)
	13.3	1.172(26)	-0.0206(313)	-0.441(49)	0.4160(59)	0.678(47)
$L = 16$	10.4	0.447(19)	-0.0287(399)	-0.751(71)	0.6320(79)	0.995(69)
	12.1	0.621(20)	-0.0297(361)	-0.645(67)	0.5637(77)	0.887(61)
	13.3	0.738(21)	-0.0296(340)	-0.587(64)	0.5238(74)	0.824(57)
HYP 1	z	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$L = 8$	10.4	1.472(31)	-0.0001(337)	0.003(40)	0.3747(48)	0.488(33)
	12.1	1.766(34)	-0.0064(304)	0.016(37)	0.3342(46)	0.435(30)
	13.3	1.968(36)	-0.0095(285)	0.021(36)	0.3105(45)	0.405(28)
$L = 12$	10.4	0.797(22)	0.0120(372)	-0.114(57)	0.4993(62)	0.681(47)
	12.1	1.008(24)	-0.0009(337)	-0.082(53)	0.4452(61)	0.607(42)
	13.3	1.152(25)	-0.0072(316)	-0.067(51)	0.4138(59)	0.564(39)
$L = 16$	10.4	0.435(19)	0.0301(409)	-0.245(73)	0.6284(78)	0.870(60)
	12.1	0.608(20)	0.0138(371)	-0.193(68)	0.5604(76)	0.775(54)
	13.3	0.724(21)	0.0052(350)	-0.167(65)	0.5208(74)	0.721(50)

C. Werte von $\Phi(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand und Werte von $\Phi(L_2)$

Im Folgenden sind einige Daten (Zwischenresultate) angegeben, die bei der Bildung eines Kontinuumslikes nötig sind bzw. im Falle von $\Phi(L_2)$ für die Darstellung, da der Kontinuumslikes für diese Größe ja einzeln für alle darin auftretenden Größen gebildet wurde, aber in den Grafiken in dieser Arbeit Werte für $\Phi(L_2)$ bei endlichem Gitterabstand zu erkennen sind. Die Fehler wurden analog zu den Fehlern der Werte im Kontinuumslikes berechnet, also als Jackknife-Fehler bzw. für die erste Komponente unter Berücksichtigung des Fehlers von $\Phi(L_2)_1$ per Gauß'scher Fehlerfortpflanzung, wie bereits im Hauptteil der Arbeit beschreiben.

C.1. Resultate aus den Simulationsdaten mit

$$z = 10.4 - 13.3$$

Für die hier angegebenen Werte von $\Phi(L_2)_3$ und $\Phi(L_2)_4$ gilt, dass von ihnen der entsprechende Wert von $\eta^b(L_2)_i$ ($i = 3, 4$) subtrahiert wurde. Bei den hier angegebenen Werten für den Kontinuumslikes gilt dies hingegen nicht.

Tabelle C.1.: Werte von $\Phi_i(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand

$\Phi(L_1)_i$		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$L = 24$	κ_1	7.769(49)	0.4373(12)	0.4856(23)	0.28696(27)	0.01390(35)
	κ_2	8.819(55)	0.4508(12)	0.4714(22)	0.27978(26)	0.01216(31)
	κ_3	9.551(59)	0.4590(12)	0.4633(22)	0.27557(26)	0.01111(28)
$L = 32$	κ_1	7.738(49)	0.4354(11)	0.4872(27)	0.28927(30)	0.01467(35)
	κ_2	8.798(56)	0.4490(11)	0.4730(25)	0.28205(28)	0.01296(31)
	κ_3	9.535(60)	0.4572(11)	0.4651(25)	0.27782(28)	0.01195(29)
$L = 40$	κ_1	7.703(49)	0.4387(11)	0.4949(24)	0.29010(43)	0.01397(33)
	κ_2	8.769(56)	0.4522(11)	0.4806(23)	0.28372(41)	0.01236(29)
	κ_3	9.510(60)	0.4603(11)	0.4725(22)	0.27946(40)	0.01141(27)

C. Werte von $\Phi(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand und Werte von $\Phi(L_2)$

Tabelle C.2.: Werte von $\Phi_i(L_2)$ bei endlichem Gitterabstand

HYP 2		$\Phi(L_2)_1$	$\Phi(L_2)_2$	$\Phi(L_2)_3$	$\Phi(L_2)_4$	$\Phi(L_2)_5$
$L_2 = 20$	κ_1	15.65(21)	0.5541(051)	0.0564(18)	0.03355(29)	0.002198(76)
	κ_2	17.77(24)	0.5661(046)	0.0495(17)	0.02992(28)	0.001958(67)
	κ_3	19.25(26)	0.5732(044)	0.0456(17)	0.02780(27)	0.001820(62)
$L_2 = 24$	κ_1	15.63(21)	0.5604(068)	0.0553(18)	0.03326(29)	0.002227(89)
	κ_2	17.76(24)	0.5722(061)	0.0486(17)	0.02966(28)	0.001984(79)
	κ_3	19.24(26)	0.5792(057)	0.0448(17)	0.02757(27)	0.001845(73)
$L_2 = 32$	κ_1	15.62(21)	0.5623(120)	0.0541(18)	0.03346(28)	0.002253(92)
	κ_2	17.74(24)	0.5735(106)	0.0475(17)	0.02984(27)	0.002007(82)
	κ_3	19.22(26)	0.5802(099)	0.0438(17)	0.02773(26)	0.001866(76)
HYP 1		$\Phi(L_2)_1$	$\Phi(L_2)_2$	$\Phi(L_2)_3$	$\Phi(L_2)_4$	$\Phi(L_2)_5$
$L_2 = 20$	κ_1	15.54(21)	0.5452(085)	0.0572(18)	0.03353(26)	0.002220(78)
	κ_2	17.68(23)	0.5584(076)	0.0503(17)	0.02990(25)	0.001978(70)
	κ_3	19.16(25)	0.5662(070)	0.0464(17)	0.02779(25)	0.001839(64)
$L_2 = 24$	κ_1	15.56(20)	0.5709(123)	0.0556(18)	0.03330(29)	0.002239(89)
	κ_2	17.69(23)	0.5816(109)	0.0489(17)	0.02969(28)	0.001995(79)
	κ_3	19.18(25)	0.5880(101)	0.0450(16)	0.02759(27)	0.001854(73)
$L_2 = 32$	κ_1	15.49(21)	0.5524(281)	0.0540(20)	0.03357(28)	0.002259(93)
	κ_2	17.62(23)	0.5647(249)	0.0474(19)	0.02994(27)	0.002012(83)
	κ_3	19.11(25)	0.5721(231)	0.0437(18)	0.02782(26)	0.001871(77)

Tabelle C.3.: Werte von $\Phi_i(L_2)$ im Kontinuumslimites (CL)

$\Phi(L_2)_i$		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
CL	κ_1	15.50(21)	0.585(27)	0.3943(32)	0.25127(46)	0.00234(16)
	κ_2	17.63(24)	0.593(24)	0.3882(30)	0.24748(44)	0.00208(14)
	κ_3	19.11(25)	0.599(23)	0.3848(30)	0.24559(43)	0.00194(13)

C.2. Resultate aus den Simulationsdaten mit

$$z = 12.48 - 20$$

Für die hier angegebenen Werte von $\Phi(L_2)_3$ und $\Phi(L_2)_4$ gilt, dass von ihnen der entsprechende Wert von $\eta^b(L_2)_i$ ($i = 3, 4$) subtrahiert wurde. Bei den hier angegebenen Werten für den Kontinuumslikes gilt dies hingegen nicht.

Tabelle C.4.: Werte von $\Phi_i(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand

$\Phi(L_1)_i$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	
$L = 32$	κ_1	9.198(62)	0.4624(13)	0.4723(22)	0.27518(59)	0.01234(33)
	κ_2	10.198(69)	0.4739(12)	0.4623(21)	0.26983(58)	0.01120(30)
	κ_3	10.861(74)	0.4809(12)	0.4566(21)	0.26675(57)	0.01054(28)
	κ_4	11.534(80)	0.4875(12)	0.4515(21)	0.26394(56)	0.00995(26)
	κ_5	12.909(92)	0.5001(12)	0.4427(20)	0.25901(54)	0.00889(24)
	κ_6	14.35(10)	0.5122(12)	0.4352(20)	0.25476(53)	0.00797(21)
$L = 40$	κ_1	9.102(59)	0.4604(10)	0.4795(24)	0.27893(62)	0.01193(35)
	κ_2	10.075(65)	0.47110(99)	0.4695(23)	0.27368(60)	0.01085(32)
	κ_3	10.714(70)	0.47750(98)	0.4639(23)	0.27067(59)	0.01022(30)
	κ_4	11.356(74)	0.48348(98)	0.4589(22)	0.26796(58)	0.00966(29)
	κ_5	12.649(83)	0.49449(98)	0.4504(22)	0.26322(57)	0.00868(26)
	κ_6	13.962(93)	0.50457(98)	0.4434(21)	0.25923(56)	0.00784(24)
$L = 48$	κ_1	9.073(58)	0.4582(11)	0.4724(30)	0.27979(56)	0.01229(32)
	κ_2	10.030(64)	0.4687(11)	0.4628(29)	0.27461(54)	0.01120(30)
	κ_3	10.659(68)	0.4749(11)	0.4575(28)	0.27164(53)	0.01059(28)
	κ_4	11.286(72)	0.4806(11)	0.4527(28)	0.26897(53)	0.01003(27)
	κ_5	12.544(80)	0.4910(11)	0.4446(27)	0.26433(52)	0.00906(24)
	κ_6	13.808(88)	0.5004(10)	0.4380(26)	0.26044(51)	0.00825(22)

Tabelle C.5.: Werte von $\Phi_i(L_2)$ im Kontinuumslikes (CL)

$\Phi(L_2)_i$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	
CL	κ_1	18.05(28)	0.595(23)	0.3863(31)	0.24686(68)	0.00196(15)
	κ_2	19.89(31)	0.601(21)	0.3824(30)	0.24438(65)	0.00179(14)
	κ_3	21.08(32)	0.605(20)	0.3801(29)	0.24297(64)	0.00170(13)
	κ_4	22.26(34)	0.608(19)	0.3782(28)	0.24171(63)	0.00161(13)
	κ_5	24.57(38)	0.614(17)	0.3749(28)	0.23955(62)	0.00147(12)
	κ_6	26.80(42)	0.619(16)	0.3723(27)	0.23779(61)	0.00135(11)

C. Werte von $\Phi(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand und Werte von $\Phi(L_2)$

Tabelle C.6.: Werte von $\Phi_i(L_2)$ bei endlichem Gitterabstand

HYP 2		$\Phi(L_2)_1$	$\Phi(L_2)_2$	$\Phi(L_2)_3$	$\Phi(L_2)_4$	$\Phi(L_2)_5$
$L = 20$	κ_1	18.19(27)	0.5680(051)	0.0477(23)	0.02909(61)	0.001843(094)
	κ_2	20.02(30)	0.5766(047)	0.0432(22)	0.02658(59)	0.001686(086)
	κ_3	21.21(32)	0.5816(045)	0.0407(21)	0.02515(58)	0.001596(082)
	κ_4	22.39(34)	0.5860(044)	0.0385(21)	0.02388(58)	0.001517(078)
	κ_5	24.70(38)	0.5937(041)	0.0347(20)	0.02170(56)	0.001381(071)
	κ_6	26.92(42)	0.6000(039)	0.0318(20)	0.01992(55)	0.001270(065)
$L = 24$	κ_1	18.18(27)	0.5741(061)	0.0468(23)	0.02884(59)	0.001868(102)
	κ_2	20.01(30)	0.5825(057)	0.0423(22)	0.02635(58)	0.001708(093)
	κ_3	21.20(32)	0.5874(054)	0.0399(21)	0.02494(57)	0.001618(088)
	κ_4	22.38(34)	0.5918(052)	0.0377(21)	0.02368(56)	0.001537(084)
	κ_5	24.69(38)	0.5993(048)	0.0341(20)	0.02152(55)	0.001400(077)
	κ_6	26.92(42)	0.6054(045)	0.0311(20)	0.01975(54)	0.001287(070)
$L = 32$	κ_1	18.16(27)	0.5753(104)	0.0457(22)	0.02901(58)	0.001889(102)
	κ_2	19.99(30)	0.5833(095)	0.0414(21)	0.02651(57)	0.001728(094)
	κ_3	21.18(32)	0.5880(090)	0.0390(21)	0.02509(56)	0.001636(089)
	κ_4	22.36(34)	0.5921(085)	0.0368(20)	0.02382(55)	0.001555(085)
	κ_5	24.67(38)	0.5994(077)	0.0333(20)	0.02164(54)	0.001416(077)
	κ_6	26.90(42)	0.6052(071)	0.0304(19)	0.01987(53)	0.001302(071)
HYP 1		$\Phi(L_2)_1$	$\Phi(L_2)_2$	$\Phi(L_2)_3$	$\Phi(L_2)_4$	$\Phi(L_2)_5$
$L = 20$	κ_1	18.10(27)	0.5606(079)	0.0484(22)	0.02908(54)	0.001862(096)
	κ_2	19.94(30)	0.5700(072)	0.0439(21)	0.02657(53)	0.001702(088)
	κ_3	21.14(32)	0.5754(068)	0.0413(21)	0.02514(52)	0.001612(084)
	κ_4	22.32(34)	0.5803(065)	0.0391(20)	0.02387(51)	0.001532(080)
	κ_5	24.63(38)	0.5887(059)	0.0353(20)	0.02169(50)	0.001395(073)
	κ_6	26.87(42)	0.5955(055)	0.0323(19)	0.01991(49)	0.001283(067)
$L = 24$	κ_1	18.12(27)	0.5833(101)	0.0470(22)	0.02887(55)	0.001878(102)
	κ_2	19.96(30)	0.5910(092)	0.0426(21)	0.02638(53)	0.001717(094)
	κ_3	21.15(32)	0.5955(087)	0.0401(21)	0.02497(53)	0.001626(089)
	κ_4	22.33(34)	0.5995(082)	0.0379(20)	0.02370(52)	0.001545(084)
	κ_5	24.65(38)	0.6064(075)	0.0343(20)	0.02154(51)	0.001407(077)
	κ_6	26.88(42)	0.6120(069)	0.0313(19)	0.01977(50)	0.001294(071)
$L = 32$	κ_1	18.05(28)	0.5669(241)	0.0456(22)	0.02911(56)	0.001894(109)
	κ_2	19.89(30)	0.5757(220)	0.0413(21)	0.02660(54)	0.001732(100)
	κ_3	21.09(32)	0.5807(208)	0.0389(21)	0.02517(53)	0.001641(095)
	κ_4	22.27(34)	0.5853(197)	0.0368(21)	0.02390(53)	0.001559(090)
	κ_5	24.58(38)	0.5932(179)	0.0332(20)	0.02172(51)	0.001419(083)
	κ_6	26.82(42)	0.5996(164)	0.0303(19)	0.01993(50)	0.001305(076)

D. Werte der Step-Scaling-Funktionen und von ϕ^{-1}

In der vorliegenden Arbeit (inklusive Anhang bis zu diesem Punkt) wurden die Daten für Φ seitens der QCD (bei L_1) und der HQET (bei L_2) präsentiert, nicht aber die übrigen Werte¹, die zur Berechnung von $\Phi(L_2, M, 0)$ (vgl. (4.14)), teilweise bei endlichem Gitterabstand und teilweise im Kontinuumslimit, benötigt werden. Dies sind die SSFs Σ , $\hat{\Sigma}$ und η . Außerdem sind für die Berechnung der HQET-Parameter ω (vgl. (4.11)) noch die Werte von $\phi^{-1}(L_2, a)$ nachzutragen. Sofern ein Wert benötigt wird, den man aus Bildung des Kontinuumslimit erhalten hat, sind hier auch die Werte bei endlichem Gitterabstand angegeben. Im Folgenden bezeichnet CL stets den Kontinuumslimit. Werte für verschwindende oder nicht benötigte Elemente sind nicht angegeben. Die Bezeichnung L_{ref} deutet auf die Simulationen S_4 hin.

Tabelle D.1.: Werte von $\eta_i(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand für $i = 3, 4$

i	HYP2			HYP1		
	$L = 16$	$L = 12$	$L = 10$	$L = 16$	$L = 12$	$L = 10$
3	0.38339(71)	0.38180(94)	0.38425(58)	0.37938(70)	0.37600(92)	0.37695(57)
4	0.22539(15)	0.22550(12)	0.22563(09)	0.22538(15)	0.22548(13)	0.22559(09)

CL: $\eta_3 = 0.3813(12)$ und $\eta_4 = 0.22524(22)$.

Tabelle D.2.: Werte von $\eta_i(L_2)$ bei endlichem Gitterabstand für $i = 3, 4$

i	HYP2			HYP1		
	$L = 32$	$L = 24$	$L = 20$	$L = 32$	$L = 24$	$L = 20$
3	0.3441(09)	0.3400(10)	0.3423(14)	0.3423(09)	0.3374(10)	0.3389(13)
4	0.21807(13)	0.21746(17)	0.21789(14)	0.21806(13)	0.21745(17)	0.21788(14)

CL: $\eta_3 = 0.3448(17)$ und $\eta_4 = 0.21809(23)$.

¹Die bei diesen Werten erstmals auftretenden Fehlerangaben mit einem Dezimaltrennzeichen der Gestalt 123.4(5.6) sind als 123.4 ± 5.6 zu verstehen.

D. Werte der Step-Scaling-Funktionen und von ϕ^{-1}

Tabelle D.3.: Werte von $\Sigma_{ij}(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand

ij	HYP2		
	$L = 16$	$L = 12$	$L = 10$
11	2	2	2
13	2.38(10)	2.38(10)	2.36(07)
14	-3.43(48)	-3.78(30)	-3.63(18)
15	10.80(38)	11.22(31)	12.14(26)
22	1	1	1
23	-0.048(08)	-0.074(10)	-0.070(10)
24	-0.26(17)	-0.31(09)	-0.37(07)
25	3.236(56)	3.336(61)	3.447(41)
33	0.4352(31)	0.4367(31)	0.4374(41)
34	0.1016(56)	0.1171(47)	0.1372(44)
35	-0.2411(73)	-0.2404(67)	-0.2671(55)
44	0.4951(12)	0.4922(11)	0.4964(07)
55	0.1568(33)	0.1550(34)	0.1529(24)

ij	HYP1		
	$L = 16$	$L = 12$	$L = 10$
11	2	2	2
13	2.33(11)	2.31(11)	2.21(07)
14	-5.34(58)	-4.92(32)	-5.25(20)
15	10.96(43)	11.67(32)	12.49(24)
22	1	1	1
23	-0.050(09)	-0.077(11)	-0.077(10)
24	-0.38(43)	-0.13(18)	-0.48(14)
25	3.087(71)	3.187(68)	3.279(43)
33	0.4350(32)	0.4370(31)	0.4377(42)
34	0.0982(91)	0.1200(56)	0.1492(53)
35	-0.2316(90)	-0.2342(71)	-0.2652(58)
44	0.4967(24)	0.4927(17)	0.4961(12)
55	0.1572(40)	0.1558(36)	0.1545(26)

Tabelle D.4.: Werte von $\hat{\Sigma}_i(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand

i	HYP2			HYP1		
	$L = 16$	$L = 12$	$L = 10$	$L = 16$	$L = 12$	$L = 10$
1	0.069(10)	0.102(12)	0.095(12)	0.070(10)	0.109(13)	0.111(12)
2	0.1009(18)	0.1039(20)	0.1000(19)	0.1015(20)	0.1048(22)	0.1018(21)

Tabelle D.5.: Werte von $\phi_{ij}^{-1}(L_{\text{ref}})$ bei endlichem Gitterabstand

ij	HYP2		
	$L = 16$	$L = 12$	$L = 8$
11	0.0625	0.0833	0.1250
13	0.0947(39)	0.1294(28)	0.2098(31)
14	-11.890(15)	-10.223(07)	-8.665(13)
15	2.983(43)	4.192(29)	6.738(79)
22	1	1	1
23	6.569(36)	5.346(15)	3.929(17)
24	-0.864(62)	-0.533(25)	-3.919(18)
25	-106.03(69)	-90.43(39)	-72.70(72)
33	-33.67(17)	-25.53(06)	-17.41(06)
34	35.69(16)	26.64(06)	18.31(05)
35	-114.3(1.0)	-78.5(0.4)	-41.5(0.4)
44	19.049(16)	15.130(08)	11.374(15)
55	425.8(2.7)	350.0(1.5)	269.5(2.6)

ij	HYP1		
	$L = 16$	$L = 12$	$L = 8$
11	0.0625	0.0833	0.1250
13	0.0897(42)	0.1200(29)	0.1844(33)
14	-11.427(16)	-9.888(10)	-8.568(14)
15	2.799(37)	3.849(28)	5.950(65)
22	1	1	1
23	8.007(44)	6.548(18)	4.883(20)
24	-0.233(98)	-0.076(41)	-1.069(29)
25	-89.43(63)	-73.38(34)	-55.71(54)
33	-34.18(17)	-26.02(06)	-17.90(06)
34	51.38(20)	40.47(08)	29.25(07)
35	-109.7(1.0)	-71.6(0.4)	-34.5(0.4)
44	18.939(19)	15.047(10)	11.293(15)
55	372.2(2.5)	291.5(1.3)	209.0(2.0)

Tabelle D.6.: Werte von $\eta_i(L_{\text{ref}})$ bei endlichem Gitterabstand für $i = 1.2$

i	HYP2			HYP1		
	$L = 16$	$L = 12$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 12$	$L = 8$
1	2.2238(53)	1.8356(30)	1.3924(36)	2.6419(54)	2.1756(31)	1.6331(36)
2	0.6703(14)	0.6515(08)	0.6107(08)	0.7424(15)	0.7318(09)	0.7009(10)

E. Kontinuumslimiten der Elemente der Step-Scaling-Funktionen

Die hier angegebenen Werte sind eigentlich nicht notwendig, um $\Phi(L_2, M, 0)$ gemäß (4.14) zu berechnen. Allerdings habe ich, wie ich es zuvor in dieser Arbeit erwähnt habe, für alle dort auftretenden Größen innerhalb der Klammer, von dessen Inhalt der Kontinuumslimites gebildet werden soll, dies separat durchgeführt. Daher gebe ich nun abschließend die Werte derjenigen Größen im Kontinuumslimites an, für die bisher entsprechende Werte nicht angegeben wurden. D.h., da entsprechende Werte für η in jedem Fall (also, wenn man sich genau nach (4.14) richtet) gebraucht werden, sind sie hier nicht angegeben. Diese finden sich in Anhang D. Auch hier gilt wieder, dass für die bereits bei endlichem Gitterabstand verschwindenden Größen keine Werte angegeben werden.

Tabelle E.1.: Kontinuumslimiten von Σ_{ij}

ij	Σ_{ij}
11	2
13	2.49(29)
14	-4.02(96)
15	8.3(1.1)
22	1
23	-0.009(29)
24	0.07(42)
25	2.83(17)
33	0.431(11)
34	0.029(17)
35	-0.178(23)
44	0.4910(37)
55	0.1626(92)

Tabelle E.2.: Kontinuumslimiten von $\hat{\Sigma}_i$

i	$\hat{\Sigma}_i$
1	0.014(33)
2	0.1022(60)

Abbildungsverzeichnis

3.1.	schematische Darstellung des SF für eine räumliche Dimension [14]	22
3.2.	links - Darstellung einer Rand-Volumen-Korrelationsfunktion im SF, rechts - Darstellung einer Rand-Rand-Korrelationsfunktion im SF [14]	23
4.1.	Darstellung der Strategie zur Bestimmung der HQET-Parameter [5]	27
5.1.	linearer (blau) und quadratischer (magenta) Fit durch Datenpunkte aus der Charmregion und der B-Physik sowie theoretisch zu erwartender Zusam- menhang (grün) [34]	42
5.2.	alternative Auftragung der Daten (vgl. Abb. 5.1) [34]	44
6.1.	Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_1$ ohne Berücksichtigung des Datenpunkts bei $L_1 = 20$	52
6.2.	Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_2$ ohne Berücksichtigung des Datenpunkts bei $L_1 = 20$	53
6.3.	Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_3$ ohne Berücksichtigung des Datenpunkts bei $L_1 = 20$	53
6.4.	Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_4$ ohne Berücksichtigung des Datenpunkts bei $L_1 = 20$	53
6.5.	Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_5$ ohne Berücksichtigung des Datenpunkts bei $L_1 = 20$	54
6.6.	Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_1$, gezeigt für κ_2 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)	55
6.7.	Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_2$, gezeigt für κ_2 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)	55
6.8.	Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_3$, gezeigt für κ_2 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)	55
6.9.	Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_4$, gezeigt für κ_2 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)	56

6.10. Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_5$, gezeigt für κ_2 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)	56
6.11. Interpolation zu $z = 12.48$ für ω_1	57
6.12. Interpolation zu $z = 12.48$ für ω_2	57
6.13. Interpolation zu $z = 12.48$ für ω_3	57
6.14. Interpolation zu $z = 12.48$ für ω_4	58
6.15. Interpolation zu $z = 12.48$ für ω_5	58
6.16. Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_1$	60
6.17. Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_2$	60
6.18. Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_3$	60
6.19. Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_4$	61
6.20. Kontinuumsextrapolation (linearer Fit) für $\Phi(L_1)_5$	61
6.21. Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_1$, gezeigt für κ_6 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)	62
6.22. Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_2$, gezeigt für κ_6 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)	63
6.23. Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_3$, gezeigt für κ_6 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)	63
6.24. Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_4$, gezeigt für κ_6 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)	63
6.25. Darstellung eines constrained Fits für $\Phi(L_2)_5$, gezeigt für κ_6 (Punkte für HYP 2 nach links und für HYP 1 nach rechts verschoben)	64
6.26. Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_1	67
6.27. Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_2	68
6.28. Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_3	68
6.29. Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_4	68
6.30. Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_5	69
6.31. Constrained Fit zum Kontinuum zur Bestimmung von Δm für κ_6	69
6.32. Darstellung der gefundenen Resultate für das Spin-Splitting mit Vergleich zu Resultaten aus der Charm-Region [39]	70
6.33. alternative Darstellung der gefundenen Resultate für das Spin-Splitting mit Vergleich zu Resultaten aus der Charm-Region [39]	71

Tabellenverzeichnis

4.1. Zusammenstellung der HQET-Parameter in verschiedenen Theorien [5] . . .	28
4.2. Auflösungen der bei den einzelnen Simulationen verwendeten Gitter [5] . . .	35
4.3. einige Parameter der QCD-Simulationen	35
5.1. einige Werte für die neuen QCD-Simulationen	44
5.2. Auflistung der Hopping-Parameter κ für die neuen QCD-Simulationen	45
6.1. Ermittelte Werte für die Elemente von $\Phi(L_1)$ im Kontinuumslimites	54
6.2. HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 interpoliert zu $z = 12.48$. Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$	59
6.3. Ermittelte Werte für die Elemente von $\Phi(L_1)$ im Kontinuumslimites	62
6.4. HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_1 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$	64
6.5. HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_2 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$	65
6.6. HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_3 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$	65
6.7. HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_4 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$	66
6.8. HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_5 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$	66
6.9. HQET-Parameter ω_i für HYP2 und HYP1 für κ_6 . Die Werte für β entsprechen $L = 16, 12, 8$	67
6.10. Massendifferenz $\Delta m \cdot r_0$ beim Spin-Splitting für verschiedene κ -Werte	69
B.1. Werte von ω_i bei verschiedenen Werten von z	83
C.1. Werte von $\Phi_i(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand	85
C.2. Werte von $\Phi_i(L_2)$ bei endlichem Gitterabstand	86

C.3. Werte von $\Phi_i(L_2)$ im Kontinuumslimites (CL)	86
C.4. Werte von $\Phi_i(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand	87
C.5. Werte von $\Phi_i(L_2)$ im Kontinuumslimites (CL)	87
C.6. Werte von $\Phi_i(L_2)$ bei endlichem Gitterabstand	88
D.1. Werte von $\eta_i(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand für $i = 3, 4$	89
D.2. Werte von $\eta_i(L_2)$ bei endlichem Gitterabstand für $i = 3, 4$	89
D.3. Werte von $\Sigma_{ij}(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand	90
D.4. Werte von $\hat{\Sigma}_i(L_1)$ bei endlichem Gitterabstand	90
D.5. Werte von $\phi_{ij}^{-1}(L_{\text{ref}})$ bei endlichem Gitterabstand	91
D.6. Werte von $\eta_i(L_{\text{ref}})$ bei endlichem Gitterabstand für $i = 1, 2$	91
E.1. Kontinuumslimiten von Σ_{ij}	93
E.2. Kontinuumslimiten von $\hat{\Sigma}_i$	93

Literaturverzeichnis

- [1] I. Montvay und G. Münster. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [2] T. Degrand und C. DeTar. *Lattice Methods for Quantum Chromodynamics*. World Scientific Publishing Company, Singapur, 2006.
- [3] C. Gattringer und C. B. Lang. *Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation*. Springer, Heidelberg, 2009.
- [4] Matthias Neubert. Heavy-quark symmetry. *Physics Reports*, 245(5–6):259 – 395, 1994.
- [5] Benoit Blossier, Michele della Morte, Nicolas Garron, and Rainer Sommer. HQET at order $1/m$: I. Non-perturbative parameters in the quenched approximation. *JHEP*, 06:002, 2010, 1001.4783.
- [6] Jochen Heitger and Rainer Sommer. Non-perturbative heavy quark effective theory. *JHEP*, 02:022, 2004, hep-lat/0310035.
- [7] Estia Eichten and Brian Russell Hill. An Effective Field Theory for the Calculation of Matrix Elements Involving Heavy Quarks. *Phys. Lett.*, B234:511, 1990.
- [8] Estia Eichten and Brian Russell Hill. Static Effective Field Theory: $1/m$ Corrections. *Phys. Lett.*, B243:427–431, 1990.
- [9] Howard Georgi. An Effective Field Theory for Heavy Quarks at Low Energies. *Phys. Lett.*, B240:447–450, 1990.
- [10] Benjamin Grinstein. The static quark effective theory. *Nuclear Physics B*, 339(2):253 – 268, 1990.
- [11] Nathan Isgur and Mark B. Wise. Weak decays of heavy mesons in the static quark approximation. *Physics Letters B*, 232(1):113 – 117, 1989.

- [12] Michele Della Morte, Nicolas Garron, Mauro Papinutto, and Rainer Sommer. Heavy quark effective theory computation of the mass of the bottom quark. *JHEP*, 01:007, 2007, hep-ph/0609294.
- [13] Rainer Sommer. Introduction to Non-perturbative Heavy Quark Effective Theory. 2010, 1008.0710.
- [14] Rainer Sommer. Non-perturbative QCD: Renormalization, $O(a)$ -improvement and matching to heavy quark effective theory. 2006, hep-lat/0611020.
- [15] J. G. Körner and George Thompson. The Heavy mass limit in field theory and the heavy quark effective theory. *Phys. Lett.*, B264:185–192, 1991.
- [16] Michele Della Morte, Andrea Shindler, and Rainer Sommer. On lattice actions for static quarks. *JHEP*, 08:051, 2005, hep-lat/0506008.
- [17] Michele Della Morte et al. Lattice HQET with exponentially improved statistical precision. *Phys. Lett.*, B581:93–98, 2004, hep-lat/0307021. [Erratum-ibid.B612:313-314,2005].
- [18] Symanzik. Continuum limit and improved action in lattice theories: (I). Principles and ϕ^4 theory. *Nuclear Physics B*, 226(1):187 – 204, 1983.
- [19] Symanzik. Continuum limit and improved action in lattice theories: (II). $O(N)$ non-linear sigma model in perturbation theory. *Nuclear Physics B*, 226(1):205 – 227, 1983.
- [20] Martin Lüscher, Stefan Sint, Rainer Sommer, and Peter Weisz. Chiral symmetry and $O(a)$ improvement in lattice QCD. *Nuclear Physics B*, 478(1-2):365 – 397, 1996.
- [21] Martin Kurth and Rainer Sommer. Renormalization and $O(a)$ -improvement of the static axial current. *Nuclear Physics B*, 597(1-3):488 – 518, 2001.
- [22] Symanzik. Schrödinger representation and Casimir effect in renormalizable quantum field theory. *Nuclear Physics B*, 190(1):1 – 44, 1981.
- [23] Martin Lüscher, Rajamani Narayanan, Peter Weisz, and Ulli Wolff. The Schrödinger functional — a renormalizable probe for non-abelian gauge theories. *Nuclear Physics B*, 384(1-2):168 – 228, 1992.
- [24] Stefan Sint and Rainer Sommer. The running coupling from the QCD Schrödinger functional: a one-loop analysis. *Nuclear Physics B*, 465(1-2):71 – 98, 1996.

- [25] B. A. Thacker and G. Peter Lepage. Heavy-quark bound states in lattice QCD. *Phys. Rev. D*, 43:196–208, Jan 1991.
- [26] Martin Lüscher, Peter Weisz, and Ulli Wolff. A numerical method to compute the running coupling in asymptotically free theories. *Nuclear Physics B*, 359(1):221 – 243, 1991.
- [27] Stefano Capitani, Martin Lüscher, Rainer Sommer, and Hartmut Wittig. Non-perturbative quark mass renormalization in quenched lattice QCD. *Nucl.Phys. B*, 544:669–698, 1999, hep-lat/9810063.
- [28] Jochen Heitger and Jan Wennekers. Effective heavy-light meson energies in small-volume quenched QCD. *JHEP*, 0402:064, 2004, hep-lat/0312016.
- [29] Martin Lüscher, Stefan Sint, Rainer Sommer, and Hartmut Wittig. Non-perturbative determination of the axial current normalization constant in $O(a)$ improved lattice QCD. *Nucl.Phys. B*, 491:344–364, 1997, hep-lat/9611015.
- [30] Martin Lüscher, Stefan Sint, Rainer Sommer, Peter Weisz, and Ulli Wolff. Non-perturbative $O(a)$ improvement of lattice QCD. *Nucl.Phys. B*, 491:323–343, 1997, hep-lat/9609035.
- [31] Stefan Sint and Peter Weisz. Further results on $O(a)$ improved lattice QCD to one-loop order of perturbation theory. *Nucl.Phys. B*, 502:251–268, 1997, hep-lat/9704001.
- [32] A. Grimbach, D. Guazzini, F. Knechtli, and F. Palombi. $O(a)$ improvement of the HYP static axial and vector currents at one-loop order of perturbation theory. *JHEP*, 0803:039,2008, February 2008, 0802.0862.
- [33] G. de Divitiis, R. Frezzotti, M. Guagnelli, M. Luescher, R. Petronzio, R. Sommer, P. Weisz, and U. Wolff. Universality and the approach to the continuum limit in lattice gauge theory. *Nucl.Phys. B*, 437:447–470, 1995, hep-lat/9411017.
- [34] Tereza Mendez ALPHA Collaboration. Comparison of Vector-Pseudoscalar Meson Mass Splittings in HQET and QCD. 8 2010.
- [35] Damiano Guazzini, Harvey B. Meyer, and Rainer Sommer. Non-perturbative renormalization of the chromo-magnetic operator in Heavy Quark Effective Theory and the $B^* - B$ mass splitting. *JHEP*, 0710:081,2007, May 2007, 0705.1809.

- [36] Benoît Blossier, Michele Della Morte, Nicolas Garron, Georg von Hippel, Tereza Mendes, Hubert Simma, and Rainer Sommer. HQET at order $1/m$: II. Spectroscopy in the quenched approximation. *JHEP*, 1005:074,2010, April 2010, 1004.2661.
- [37] Andreas Jüttner. Precision Lattice Computations in the Heavy Quark Sector. 2007, hep-lat/0503040.
- [38] A. G. Grozin, D. Guazzini, P. Marquard, H. B. Meyer, J. H. Piclum, R. Sommer, and M. Steinhauser. The B-meson mass splitting from non-perturbative quenched lattice QCD. *PoS LAT*, 2007:100,2007, October 2007, 0710.0578.
- [39] Jochen Heitger. Private Mitteilung. 2012.
- [40] Nicolas Garron. Private Mitteilung. 2011.
- [41] Georg von Hippel. Private Mitteilung. 2012.
- [42] M. Guagnelli, R. Sommer, and H. Wittig. Precision computation of a low-energy reference scale in quenched lattice QCD. *Nucl.Phys. B*, 535:389–402, 1998, hep-lat/9806005.
- [43] R. Sommer. A New Way to Set the Energy Scale in Lattice Gauge Theories and its Application to the Static Force and α_s in SU(2) Yang–Mills Theory. *Nucl.Phys.B*, 411:839-854,1994, Nucl.Phys.B411:839-854,1994, hep-lat/9310022.

Danksagung

Ich danke...

meiner Freundin	für ihre Liebe und Aufmunterung, wenn es mal nicht so leicht voran ging
meiner Familie	für die umfängliche Unterstützung während meines gesamten Studiums
Dr. Jochen Heitger	für die interessante Aufgabenstellung und die Geduld bei meinen vielen Besuchen in seinem Büro
Dr. Nicolas Garron	für die Beantwortung meiner Fragen und Unterstützung in Form von Tabellen mit Vergleichswerten
Prof. Dr. Michael Klasen	für die Möglichkeit, schon vorzeitig einen neuen Computer inklusive größerem Monitor nutzen zu können
Christian Wittemeier	für die Hilfe bei den immer mal wieder auftauchenden Problemen mit C++

... und allen, die ich hier leider vergessen habe, mir aber ebenso in der einen oder anderen Form eine Hilfe und Unterstützung waren.

ICH HABE FERTIG!

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, diese Diplomarbeit selbstständig angefertigt und keine außer den angegeben Quellen und Hilfsmitteln verwendet zu haben.

Michael Topp

Münster, 28. Februar 2012

