Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Theoretische Physik

Die Einsteinschen Feldgleichungen im synchronisierten Bezugssystem

Bachelorarbeit

Autor: Jonas Potthoff

Betreuer und Erstgutachter: PD Dr. Jochen Heitger

Zweitgutachter: Prof. Dr. Gernot Münster

Münster, den 16.09.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Motivation

Die Allgemeine Relativitätstheorie (im Folgenden mit ART abgekürzt) gilt in der Physik als eine der erfolgreichsten Theorien des 20. Jahrhunderts. Der Grund dafür wird bei näherer Beschäftigung mit ihr schnell klar. So liefert sie einerseits auf kleiner kosmologischer Skala, etwa bezogen auf unser Planetensystem oder kollabierende Sterne, andererseits aber auch im Hinblick auf die kosmologische Rotverschiebung und die Entwicklung des Universums hervorragende Vorhersagen, die sich mit Erkenntnissen der experimentellen Astronomie decken. Ihr Grundkonzept wurde im Wesentlichen Ende des 19. sowie in den ersten drei Jahrzehnten des vergangenen Jahrhunderts entwickelt. Im Gegensatz zur Speziellen Relativitätstheorie kann der physikalische Gehalt der ART beinahe vollständig zum Werk Albert Einsteins gerechnet werden. Dies gilt freilich nicht für den mathematischen Formalismus der ART, welcher von berühmten Mathematikern wie Bernhard Riemann, Elwin Christoffel und Gregorio Ricci entwickelt wurde; ihre Namen werden in dieser Arbeit in mathematischen Größen wieder auftauchen. Kenntnis über das für die ART äußerst wichtige Gebiet der Differentialgeometrie erwarb Einstein von dem Mathematiker David Hilbert[1].
Während die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) als klassischen Grenzfall die Newtonsche Mechanik liefert, ist dies für die ART die Newtonsche Gravitationstheorie. Anders formuliert ist die ART die relativistische Erweiterung der Newtonschen Gravitationstheorie. Die dabei auftretende Schwierigkeit, die bei der Entwicklung der SRT aufgrund ihrer Unabhängigkeit von Massen keine Rolle spielt, wird qualitativ sehr gut in einem berühmten Zitat des theoretischen Physikers John Archibald Wheeler deutlich:

'*Matter tells space how to curve. Space tells matter how to move.*'

Die in der SRT definierte Raum-Zeit wird nun in der ART von den in ihr befindlichen Massen beeinflusst. Daraus folgt, dass auch der Formalismus der SRT für sie von Bedeutung ist. Außerdem führt der Aspekt, dass das Gravitationsfeld aufgrund seines Energiegehalts seine eigene Quelle ist, zu nichtlinearen Gleichungen[2]. Konsequenz dieser Komplexität ist die Tatsache, dass viele spezielle physikalische Probleme im Rahmen der ART nur mit Näherungen bzw. vereinfachenden Annahmen 'exakt' lösbar sind. Dazu zählt auch der Gravitationskollaps staubförmiger Materie in Kapitel 5, welcher dort im Zusammenhang mit dem in der aktuellen Forschung relevanten Lemaître-Tolman-Bondi-Modell diskutiert wird.
Der erste Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Herleitung der Robertson-Walker-Metrik und der Friedmann-Gleichungen. Diese beiden Werkzeuge der ART können trotz der simpel erscheinenden Annahme von einer Kugelsymmetrie der Raum-Zeit hervorragend auf kosmologische Problemstellungen angewendet werden. Während die Form dieser Metrik in Kapitel 3 aus einer Auswertung der Einsteinschen Feldgleichungen im synchronisierten Bezugssystem folgt, werden die Friedmann-Gleichungen in Kapitel 4 für einen speziellen Fall aus einem Variationsprinzip hergeleitet.

[1]**Genaueres zur historischen Entwicklung der ART findet man in [4], S. 9-15**.
[2]**siehe [1], S. 4-6**.

2 Formalismus der ART

Dieses Kapitel dient der Einführung der für die anschließenden Rechnungen relevanten Größen und Gleichungen. Letztere sind [1] entnommen, wobei Indexbezeichnungen unterschiedlich sein können. Da es sich um in der ART allgemein bekannte Gleichungen handelt, variieren bezüglich Darstellungen in anderen Lehrbüchern ebenfalls lediglich die Indizes, selten auch mal eine Vorzeichenkonvention. Es gilt stets die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über Indizes, die nur auf der rechten Seite einer Gleichung auftreten, ist zu summieren. Für eine genauere Motivation und Herleitung der Beziehungen sei auf die angegebene Literatur verwiesen. Eine Kenntnis der SRT wird zudem vorausgesetzt.

2.1 Äquivalenzprinzip und Kovarianzprinzip

Die Gleichheit von träger und schwerer Masse und damit von Trägheits- und Gravitationskräften ist experimentell sehr gut bestätigt. Diese Erkenntnis hat weitreichende Auswirkungen auf das Verhältnis von SRT und ART in Form des Äquivalenzprinzips:

Es kann in der ART stets ein Inertialsystem gefunden werden, in dem die Gesetze der SRT gelten. Dieses wird Lokales Inertialsystem genannt.

Der Übergang in ein solches System geschieht mit einer Koordinatentransformation $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$ im Riemannschen Raum (mathematisch gesprochen: auf der 4-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit), der das Pendant zum Minkowskiraum der SRT ist. Die Bezeichnung 'lokal' weist darauf hin, dass es sich um kein echtes Inertialsystem im Sinne der SRT handelt, da schließlich das Gravitationsfeld durch eine Beschleunigung kompensiert wird. Die Transformation ist stets nur für einen Punkt der 4-dim. Raum-Zeit möglich, falls das Gravitationsfeld real ist.
Das Kovarianzprinzip ergibt sich direkt aus dem Äquivalenzprinzip, indem es dieses gewissermaßen umkehrt: Aus einem Gesetz der SRT wird über eine Koordinatentransformation das entsprechende Gesetz der ART bestimmt. Entscheidend dabei ist, dass die so bestimmten Gesetze bei beliebigen Transformationen ihre Form behalten. Trifft dies zu, hat man ein 'kovariantes' Gesetz gefunden. In der Regel ist es sogar möglich, den beschriebenen Übergang direkt zu vollziehen. Es resultieren Tensorgleichungen, die den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}(x)$ enthalten, welcher das Gravitationspotential beschreibt.

2.2 Der metrische Tensor

In allen Grundgleichungen der ART kommen Tensoren vor. Die drei in der Physik wichtigsten sind die Tensoren der drei niedrigsten Stufen, Skalare, Vektoren und Matrizen. Von letzterer Art ist auch der metrische Tensor. Er kommt bereits in der SRT als $\eta_{\alpha\beta}$ vor, um das infinitesimale Linienelement ds im Minkowskiraum kompakt schreiben zu können. Entsprechend der 4-dim. Raum-Zeit ist er eine 4×4-Matrix, deren Einträge

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\ (1, -1, -1, -1)$$

lauten. Für das infinitesimale Linienelement der SRT gilt damit

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\ d\xi^\alpha d\xi^\beta = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1}$$

in kartesischen Koordinaten (Summation konventionell über die Werte 0,1,2 und 3). Die Anwendung des Kovarianzprinzips darauf liefert den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}(x)$ der ART. Zunächst ergibt sich der Ausdruck

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\ \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\ \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\ dx^\mu dx^\nu \qquad , \tag{2}$$

aus dem sich der metrische Tensor, oft einfach als Metrik bezeichnet, zu

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\ \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\ \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \tag{3}$$

ablesen lässt. Aus der Diagonalgestalt von $\eta_{\alpha\beta}$ folgt die Vertauschbarkeit der Ableitungen in (3) und damit die für Anwendungen äußerst nützliche Symmetrie

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x) \qquad . \tag{4}$$

Die zu $g_{\mu\nu}$ inverse Matrix ist $g^{\mu\nu}$, sie erfüllt wegen (4) die Relation

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma \qquad . \tag{5}$$

Im Fall des oben diskutierten Lokalen Inertialsystems oder eines materiefreien Universums geht $g_{\mu\nu}$ in $\eta_{\alpha\beta}$ über.

2.3 Christoffelsymbole

Während der metrische Tensor $g_{\mu\nu}(x)$ das Gravitationspotential und damit bereits die Krümmung des Raums beschreibt, können die Christoffelsymbole $\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$ als Maß für die Stärke des Gravitationsfeldes interpretiert werden. Dies wird an ihrer Darstellung durch Ableitungen des metrischen Tensors nach dem Orts-Vierervektor $x^\mu = (ct, x, y, z)$ über

$$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \frac{g^{\kappa\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right) \tag{6}$$

deutlich. Aus dieser folgt direkt ihre nützliche Symmetrie

$$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \tag{7}$$

in den unteren Indizes. Aufgrund eines abweichenden Verhaltens bei Koordinatentransformation handelt es sich bei den Christoffelsymbolen nicht um Tensoren.

2.4 Kovariante Ableitung

Bei der Bildung einer partiellen Ableitung eines Tensors (ausgenommen Skalare und Vektoren) entsteht nicht wieder ein Tensor. Dieses Problem wird mithilfe der kovarianten Ableitung, ausgedrückt durch ein Semikolon[3], umgangen. Für einen Tensor in gemischter Form (es gilt definitionsgemäß $T^i{}_k = g_{\mu k} T^{i\mu} = g^{\mu i} T_{\mu k}$)[4] findet man den Ausdruck

$$T^i{}_{k;p} = T^i{}_{k,p} + \Gamma^i_{pm} T^m{}_k - \Gamma^m_{kp} T^i{}_m \qquad , \tag{8}$$

worin das Komma die gewöhnliche partielle Ableitung beschreibt.

2.5 Kovariantes Volumenelement

Auch bei Integration über die 4-dim. Raum-Zeit muss in der ART eine leichte Modifikation des gewöhnlichen Volumenelements d^4x vorgenommen werden. Sie beinhaltet den Betrag der Determinante des metrischen Tensors $\det(g_{\mu\nu}) =: g$, mit dem das neue Volumenelement als

$$\sqrt{|g|}\; d^4x \tag{9}$$

geschrieben werden kann. Es heißt kovariantes Volumenelement.

2.6 Beschreibung der Krümmung

Zur Aufstellung der Einsteinschen Feldgleichungen, den wichtigsten Grundgleichungen der ART, reichen der metrische Tensor und insbesondere die Christoffelsymbole aufgrund ihrer nicht-tensoriellen Transformationseigenschaft nicht aus. Benötigt wird hingegen ein Tensor, der die Krümmung des Raums quantitativ beschreibt, sodass es nahe liegt, ihn geschickt aus den Christoffelsymbolen zu bilden. Dies gelingt tatsächlich und führt zur Definition des Krümmungstensors $R^\lambda{}_{\mu\rho\nu}$, der sich mithilfe der $\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$ als

$$R^\lambda{}_{\mu\rho\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\sigma\rho} \tag{10}$$

schreiben lässt. Für die Feldgleichungen genügt allerdings, obwohl er weniger Information enthält, der Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$. Er geht aus dem Krümmungstensor über eine Kontraktion, d.h. die Gleichsetzung zweier Indizes, hervor, was mit (10) die Beziehung

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} \tag{11}$$

zur Folge hat. Diese Kontraktion ist allerdings eine Frage der Konvention: Bei Gleichsetzung von λ und ν resultiert ein Ricci-Tensor mit umgekehrtem Vorzeichen. Es besteht wiederum eine Symmetrie in den Indizes,

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \qquad . \tag{12}$$

[3] **Diese Konvention gilt in [2].**

[4] **Der metrische Tensor senkt bzw. hebt in der ART Indizes von Tensoren in der hier gezeigten Art, sodass aus kontravarianten kovariante bzw. aus kovarianten kontravariante Indizes werden.**

Eine weitere Kontraktion führt auf den Krümmungsskalar

$$R = R^{\nu}{}_{\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \qquad , \tag{13}$$

der ebenfalls in die Feldgleichungen eingeht. Wie auch die Christoffelsymbole verschwinden natürlich all diese Krümmungsgrößen im Grenzfall $g_{\mu\nu}(x) \to \eta_{\alpha\beta}$.

2.7 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Da die Feldgleichungen der ART keine Entsprechung in der SRT haben, können sie nicht mithilfe des Kovarianzprinzips gefunden werden. Es ist jedoch als Kriterium zu setzen, dass sie möglichst einfache Tensorgleichungen sein sollten, die im klassischen Grenzfall das Newtonsche Gravitationsgesetz liefern. Mit diesen Forderungen lassen sich zwei äquivalente Gleichungen aufstellen, in denen die Krümmung des Raums mit der sie hervorrufenden Masse bzw. Energie in Beziehung gesetzt wird. Die erste Form ist durch

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu} \tag{14}$$

gegeben, wobei G die (empirisch gefundene) Gravitationskonstante, und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Größe $T_{\mu\nu}$ wird Energie-Impuls-Tensor genannt.
Die zweite, alternative Form lautet

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\, g_{\mu\nu} \right) \qquad , \tag{15}$$

wobei analog zu (12) $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ ist. Häufig wird als Abkürzung die Konstante

$$\kappa =: \frac{8\pi G}{c^2} \tag{16}$$

definiert, welche beim Aufstellen von (14) bzw. (15) einzig aus dem Newtonschen Grenzfall folgt. Beide Formen heißen Einsteinschen Feldgleichungen.

2.8 Energie-Impuls-Tensor

Für die in dieser Arbeit betrachteten Fälle des Universums im Ganzen sowie eines kollabierenden Sterns lässt sich das Modell einer ausgedehnten, idealen Flüssigkeit verwenden. Ideal bedeutet dabei, dass sie inkompressibel ist, und ihre Konstituenten bis auf ihren 'Zusammenhalt' nicht miteinander wechselwirken. Im Rahmen der relativistischen Hydrodynamik[5] erhält der zugehörige Energie-Impuls-Tensor die Form

$$T_{\mu\nu} = \left(\varrho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - \eta_{\mu\nu} p \qquad , \tag{17}$$

worin ϱ die (Massen-)Dichte, p der Druck und u_μ die aus der SRT bekannte Vierergeschwindigkeit ist.

[5] **siehe [1], S. 30-34**.

Im synchronisierten (mitbewegten) Bezugssystem (siehe Kapitel 3) verschwinden alle räumlichen Geschwindigkeiten, d.i. $u_\mu = (c, 0, 0, 0)$, sodass der Energie-Impuls-Tensor die einfache Form

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(\varrho c^2, p, p, p) \tag{18}$$

annimmt.

3 Das synchronisierte Bezugssystem

3.1 Motivation und Definition

Eine der schwerwiegendsten Konsequenzen der SRT ist die Relativität der Gleichzeitigkeit bzw. die Schwierigkeit, Uhren in verschiedenen Bezugssystemen zu synchronisieren. Während letzteres jedoch durch vergleichsweise einfache Rechnungen stets möglich ist, ergibt sich in der ART zusätzlich das Problem, dass gewöhnlich sogar im selben Bezugssystem die Uhren an verschiedenen Raumpunkten nicht synchron laufen. Die Aufgabe soll daher nun sein, ein Bezugssystem zu finden, das diesen Effekt der ART aufhebt. Aufgrund der Möglichkeit beliebiger Koordinatentransformationen gelingt dies tatsächlich. Das Resultat wird synchronisiertes Bezugssystem genannt. Es zeichnet sich dadurch aus, dass ein in diesem betrachtetes, dynamisches System in ihm ruht, was sich an der Vierergeschwindigkeit $u_\mu = (c, 0, 0, 0)$ ablesen lässt.[6]
Das gesuchte Bezugssystem ist vollständig durch seinen metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ festgelegt. Damit sich Zeitdifferenzen wie in einem Bezugssystem der SRT verhalten, muss in (2) im Hinblick auf (1) offensichtlich $g_{00} = 1$ sein. Weiter kann man zeigen, dass die Komponenten $g_{0\nu} = g_{\nu 0}$, welche ein Vermischen zeitlicher und räumlicher Komponenten beschreiben, identisch verschwinden müssen.[7] Unter Verwendung der Definition[8]

$$\gamma_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \tag{19}$$

für die rein räumlichen Anteile des metrischen Tensors nimmt das Linienelement (2) die Form (von nun an wird c=1 gesetzt)

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \tag{20}$$

an. Dies ist das allgemeine, infinitesimale Linienelement des synchronisierten (mitbewegten) Bezugssystems. Seinen Wert offenbart es insbesondere bei der Lösung physikalischer Probleme der ART, da es Rechnungen erheblich vereinfacht bzw. abkürzt.
Im weiteren Verlauf (Abschnitt 3.3) werden die räumlichen Anteile (19) noch einmal stark vereinfacht werden können.

3.2 Christoffelsymbole und Ricci-Tensor

In diesem Abschnitt werden Christoffelsymbole und Komponenten des Ricci-Tensors für das synchronisierte Bezugssystem berechnet. Sie werden in dieser allgemeinen Form in Kapitel 4 benötigt. Unter Nutzung von $\kappa_{\mu\nu} =: \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial t}$ sowie $\kappa^\mu_\mu = \gamma^{\mu\nu}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial t}$ können mit (6) und unter Berücksichtigung von (7) zunächst die Christoffelsymbole bestimmt werden:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\gamma^{0\nu}}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial\gamma_{0\nu}}{\partial x^0}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial\gamma_{0\nu}}{\partial x^0}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\nu}}_{=0}\right) = 0\ ,\ \Gamma^\kappa_{00} = \frac{\gamma^{\kappa\nu}}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial\gamma_{0\nu}}{\partial x^0}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial\gamma_{0\nu}}{\partial x^0}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\nu}}_{=0}\right) = 0\ ,$$

[6] **siehe [1], S. 270**.
[7] **siehe [2], S. 276-277**.
[8] **Konvention in [2]**.

$$\Gamma^0_{0\mu} = \Gamma^0_{\mu 0} = \frac{\gamma^{0\nu}}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial\gamma_{0\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\gamma_{\mu 0}}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\gamma^{00}}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial\gamma_{\mu 0}}{\partial x^0}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\mu}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial\gamma_{\mu 0}}{\partial x^0}}_{=0}\right) = 0 \ ,$$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{\lambda\mu} = \Gamma^0_{\mu\lambda} &= \frac{\gamma^{0\nu}}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial\gamma_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\gamma^{00}}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial\gamma_{\mu 0}}{\partial x^\lambda}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial\gamma_{\lambda 0}}{\partial x^\mu}}_{=0} - \frac{\partial\gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^0}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\,\gamma^{00}\,\frac{\partial\gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^0} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^0} = \frac{1}{2}\,\kappa_{\mu\lambda} \quad ,\end{aligned}$$

$$\Gamma^\kappa_{0\mu} = \frac{\gamma^{\kappa\nu}}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^0} + \underbrace{\frac{\partial\gamma_{0\nu}}{\partial x^\mu}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial\gamma_{\mu 0}}{\partial x^\nu}}_{=0}\right) = \frac{\gamma^{\kappa\nu}}{2}\,\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^0} = \frac{1}{2}\,\kappa^\kappa_\mu \quad .$$

Die dreidimensionalen Christoffelsymbole $\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$, d.h. $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\kappa \neq 0$, bleiben vorerst unbestimmt. Dennoch findet man mit (11) nützliche Ausdrücke für die Komponenten des Ricci-Tensors:

$$R_{00} = \frac{\partial\Gamma^\rho_{0\rho}}{\partial x^0} - \underbrace{\frac{\partial\Gamma^\rho_{00}}{\partial x^\rho}}_{=0} + \Gamma^\sigma_{0\rho}\Gamma^\rho_{\sigma 0} - \underbrace{\Gamma^\sigma_{00}}_{=0}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} = \frac{\partial\Gamma^\rho_{0\rho}}{\partial x^0} + \Gamma^\sigma_{0\rho}\Gamma^\rho_{\sigma 0} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\kappa^\rho_\rho + \frac{1}{4}\,\kappa^\sigma_\rho\kappa^\rho_\sigma \tag{21}$$

$$R_{0\nu} = R_{\nu 0} = \frac{\partial\Gamma^\rho_{0\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\rho_{0\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\sigma_{0\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{0\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} = \frac{1}{2}\,\kappa^\rho_{\rho,\nu} - \frac{1}{2}\,\kappa^\rho_{\nu,\rho} + \frac{1}{2}\,\kappa^\sigma_\rho\Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}\,\kappa^\sigma_\nu\Gamma^\rho_{\sigma\rho} \tag{22}$$

Der letzte Ausdruck lässt sich durch Einfügen zweier Summanden kompakt als kovariante Ableitung schreiben:

$$\begin{aligned}R_{0\nu} = \frac{1}{2}\,(\kappa^\rho_{\rho,\nu} + \Gamma^\rho_{\sigma\nu}\kappa^\sigma_\rho - \kappa^\rho_{\nu,\rho} - \Gamma^\rho_{\sigma\rho}\kappa^\sigma_\nu) &= \frac{1}{2}\,(\underbrace{\kappa^\rho_{\rho,\nu} + \Gamma^\rho_{\sigma\nu}\kappa^\sigma_\rho - \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\kappa^\rho_\sigma}_{\text{zusammenfassen mit (8)}}\underbrace{-\kappa^\rho_{\nu,\rho} - \Gamma^\rho_{\sigma\rho}\kappa^\sigma_\nu + \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\kappa^\rho_\sigma}_{\text{zusammenfassen mit (8)}}) \\ &= \frac{1}{2}\,(\kappa^\rho_{\rho;\nu} - \kappa^\rho_{\nu;\rho})\end{aligned} \tag{23}$$

Die rein räumlichen Komponenten können nur teilweise angegeben werden, mit $P_{\mu\nu}$ wird dabei der nicht näher bekannte, aus den $\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$ gebildete Anteil bezeichnet:

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} &= \underbrace{\frac{\partial\Gamma^0_{\mu 0}}{\partial x^\nu}}_{=0} - \frac{\partial\Gamma^0_{\mu\nu}}{\partial x^0} + \Gamma^0_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{0\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu 0}\Gamma^0_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\underbrace{\Gamma^0_{\sigma 0}}_{=0} - \Gamma^0_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{0\rho} + P_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\kappa_{\mu\nu} + \underbrace{\frac{1}{4}\,(\kappa_{\mu\rho}\kappa^\rho_\nu + \kappa^\sigma_\mu\kappa_{\sigma\nu})}_{=\frac{1}{2}\kappa^\rho_\mu\kappa_{\nu\rho}} - \frac{1}{4}\,\kappa_{\mu\nu}\kappa^\rho_\rho + P_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{24}$$

Da ρ und σ unabhängige Indizes sind, über die summiert wird, und der Ausdruck symmetrisch unter Vertauschung von μ und ν ist, kann der zweite Summand wie angegeben zusammengefasst werden. Es verbleibt als Endergebnis

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\,(2\kappa^{\rho}_{\mu}\kappa_{\nu\rho} - \kappa_{\mu\nu}\kappa^{\rho}_{\rho}) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\kappa_{\mu\nu} + P_{\mu\nu} \quad . \tag{25}$$

Damit sind die in [2] (§99) notierten Ergebnisse abgeleitet (man beachte die unterschiedliche Vorzeichenkonvention). Eine explizite Berechnung für den speziellen Fall der Robertson-Walker-Metrik erfolgt im nächsten Abschnitt.

3.3 Herleitung der Robertson-Walker-Metrik

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ermöglicht die Annahme einer kugelsymmetrischen Raum-Zeit neben immensen rechnerischen Vorteilen sehr gute Übereinstimmungen mit experimentellen Ergebnissen. Ein solches Modell ist in der Robertson-Walker-Metrik verwirklicht, die in der Sprechweise der ART als isotrope zeitabhängige Metrik bezeichnet wird. Neben der Anwendung auf kollabierende Sterne ist sie insbesondere dafür geeignet, Weltmodelle aufzustellen, welche die Evolution des Universums beschreiben. Dies führt unmittelbar zu den Friedmann-Gleichungen im nächsten Kapitel.
Für eine isotrope Metrik sollten Kugelkoordinaten geeignet sein. In diesen lautet das infinitesimale Linienelement der SRT

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\; d\varphi^2 \quad . \tag{26}$$

Die Konstituenten des Tupels $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$, das von nun an der Orts-Vierervektor ist, heißen Gaußsche Normalkoordinaten. Um aus (26) das Pendant der ART (2) zu erhalten, erlaubt es die räumliche Symmetrie, die einzelnen Summanden mit Koeffizienten zu multiplizieren, die lediglich von der Radialkoordinate r und der Zeit t abhängen. Da die Winkelkoordinaten nicht ausgezeichnet sind, genügt für sie ein einziger Koeffizient. Wird darüber hinaus derjenige vor dem Term c^2dt^2 gleich 1 gesetzt, ergibt sich ein synchronisiertes Bezugssystem. Insgesamt lässt sich das entsprechende Linienelement der ART folglich als

$$ds^2 = c^2dt^2 - U(r,t)\; dr^2 - V(r,t)\,\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\; d\varphi^2\right) \tag{27}$$

schreiben.[9] Mit (3) lassen sich die auf diese Weise motivierten Koeffizienten als metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\;(1, -U(r,t), -V(r,t), -V(r,t)\;\sin^2\theta) \tag{28}$$

identifizieren. Nach Berechnung der Christoffelsymbole und des Ricci-Tensors können die Koeffizienten durch Lösen der zugehörigen Einsteinschen Feldgleichungen explizit bestimmt werden. Dies soll im Folgenden geschehen.

[9] **In diesem Abschnitt werden die Bezeichnungen aus [1] (S.269-274) benutzt, und die dort motivierten Schritte nachvollzogen**.

Es werden nur die nicht verschwindenden Christoffelsymbole angegeben. Mit Punkt werden Ableitungen nach x^0 (wieder mit $c = 1$), mit Strich die Ableitungen nach x^1 gekennzeichnet. Die Abhängigkeiten der Koeffizienten (r, t) werden nicht mehr explizit ausgeschrieben. Außer für den dreidimensionalen Fall können die Ergebnisse mithilfe des letzten Abschnitts direkt hingeschrieben werden:

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{U}}{2U} \ , \ \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{V}}{2V} \ , \ \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{U}}{2} \ , \ \Gamma^0_{22} = \frac{\dot{V}}{2} \ , \ \Gamma^0_{33} = \frac{\dot{V}\sin^2\theta}{2} \quad .$$

Die dreidimensionalen Christoffelsymbole müssen noch aus (6) berechnet werden:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{g^{11}}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right) = \frac{g^{11}}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2U}(-U') = \frac{U'}{2U} \quad ,$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{g^{11}}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}}_{=0} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2U}(-(-V')) = -\frac{V'}{2U} \quad ,$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{g^{11}}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3}}_{=0} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2U}(-(-V'\sin^2\theta)) = -\frac{V'\sin^2\theta}{2U} \quad ,$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{g^{22}}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \underbrace{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}}_{=0}\right) = -\frac{1}{2V}(-V') = \frac{V'}{2V} \quad ,$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{g_{33}}{2}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + \underbrace{\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3}}_{=0}\right) = -\frac{1}{2V\sin^2\theta}(-V'\sin^2\theta) = \frac{V'}{2V} \quad ,$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{g^{22}}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3}}_{=0} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2V}(-(-2V\sin\theta\cos\theta)) = -\sin\theta\cos\theta \quad ,$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{g^{33}}{2}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3}}_{=0}\right) = -\frac{1}{2V\sin^2\theta}\left(\frac{\partial(-V\sin^2\theta)}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{2\ \sin\theta\cos\theta}{2\ \sin^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \quad .$$

Für die Berechnung des Ricci-Tensors sind die Ergebnisse aus Kapitel 3.2 nicht besonders hilfreich. Es bietet sich an, auf die Grundformel (11) zurückzugreifen:

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{0\rho}}{\partial x^0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma^{\rho}_{00}}{\partial x^{\rho}}}_{=0} + \Gamma^{\sigma}_{0\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma 0} - \underbrace{\Gamma^{\sigma}_{00}}_{=0}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} = \frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^2_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^3_{03}}{\partial x^0} + \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{30}$$
$$= \frac{\ddot{U}}{2U} - \frac{\dot{U}^2}{2U^2} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{V}^2}{V^2} + \frac{\dot{U}^2}{4U^2} + \frac{\dot{V}^2}{4V^2} + \frac{\dot{V}^2}{4V^2} = \frac{\ddot{U}}{2U} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2} \tag{29}$$

$$R_{01} = R_{10} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{0\rho}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{01}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\sigma}_{0\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma 1} - \Gamma^{\sigma}_{01}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} = \underbrace{\frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial x^1}}_{\text{fällt heraus}} + \frac{\partial \Gamma^2_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^3_{03}}{\partial x^1} \underbrace{- \frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial x^1}}_{\text{fällt heraus}} + \underbrace{\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11}}_{\text{fällt heraus}}$$
$$+ \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{31} \underbrace{- \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11}}_{\text{fällt heraus}} - \Gamma^1_{01}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{01}\Gamma^3_{13} = \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{\dot{V}V'}{V^2} + \frac{2\dot{V}V'}{4V^2} - \frac{2\dot{U}V'}{4UV}$$
$$= \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{\dot{V}V'}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} \tag{30}$$

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{1\rho}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{11}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\sigma}_{1\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma 1} - \Gamma^{\sigma}_{11}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} = \underbrace{\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1}}_{\text{fällt heraus}} + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^0_{11}}{\partial x^0} \underbrace{- \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1}}_{\text{fällt heraus}} + \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11} +$$
$$\underbrace{\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01}}_{\text{fällt heraus}} + \underbrace{\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11}}_{\text{fällt heraus}} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \underbrace{- \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01}}_{\text{fällt heraus}} - \Gamma^0_{11}\Gamma^2_{02} - \Gamma^0_{11}\Gamma^3_{03} \underbrace{- \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11}}_{\text{fällt heraus}} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13}$$
$$= \frac{V''}{2V} - \frac{V'^2}{2V^2} + \frac{V''}{2V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{\ddot{U}}{2} + \frac{2\dot{U}^2}{4U} + \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{4V} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{4V} - \frac{U'V'}{4UV} - \frac{U'V'}{4UV}$$
$$= \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{V^2} - \frac{\ddot{U}}{2} + \frac{\dot{U}^2}{2U} + \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} - \frac{U'V'}{2UV}$$
$$= -\frac{\ddot{U}}{2} + \frac{\dot{U}^2}{4U} + \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} - \frac{U'V'}{2UV} \tag{31}$$

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{2\rho}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{22}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\sigma}_{2\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma 2} - \Gamma^{\sigma}_{22}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} = \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^0_{22}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} + \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{22} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \underbrace{\Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02}}_{\text{fällt heraus}}$$
$$+ \underbrace{\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12}}_{\text{fällt heraus}} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} - \Gamma^0_{22}\Gamma^1_{01} \underbrace{- \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02}}_{\text{fällt heraus}} - \Gamma^0_{22}\Gamma^3_{03} - \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} \underbrace{- \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12}}_{\text{fällt heraus}} - \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13}$$
$$= -1 - \cot^2\theta - \frac{\ddot{V}}{2} + \frac{V''}{2U} - \frac{U'V'}{2U^2} + \frac{\dot{V}^2}{4V} - \frac{V'^2}{4UV} + \cot^2\theta - \frac{\dot{V}\dot{U}}{4U} - \frac{\dot{V}^2}{4V} + \frac{V'U'}{4U^2} + \frac{V'^2}{4UV}$$
$$= -1 - \frac{\ddot{V}}{2} + \frac{V''}{2U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{4U} - \frac{U'V'}{4U^2} \tag{32}$$

$$R_{33} = \underbrace{\frac{\partial \Gamma^{\rho}_{3\rho}}{\partial x^3}}_{=0} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{33}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\sigma}_{3\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma 3} - \Gamma^{\sigma}_{33}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} = -\frac{\partial \Gamma^{0}_{33}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{33}}{\partial x^2} + \Gamma^{3}_{30}\Gamma^{0}_{33} + \Gamma^{3}_{31}\Gamma^{1}_{33} + \Gamma^{3}_{32}\Gamma^{2}_{33}$$

$$+ \underbrace{\Gamma^{0}_{33}\Gamma^{3}_{03}}_{\text{fällt heraus}} + \underbrace{\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{13}}_{\text{fällt heraus}} + \underbrace{\Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{23}}_{\text{fällt heraus}} - \Gamma^{0}_{33}\Gamma^{1}_{01} - \Gamma^{0}_{33}\Gamma^{2}_{02} \underbrace{-\Gamma^{0}_{33}\Gamma^{3}_{03}}_{\text{fällt heraus}} - \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{2}_{12} \underbrace{-\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{13}}_{\text{fällt heraus}} \underbrace{-\Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{23}}_{\text{fällt heraus}}$$

$$= -\frac{\ddot{V}\sin^2\theta}{2} + \frac{V''\sin^2\theta}{2U} - \frac{V'U'\sin^2\theta}{2U^2} + \cos^2\theta - \sin^2\theta + \frac{\dot{V}^2\sin^2\theta}{4V} - \frac{V'^2\sin^2\theta}{4UV} - \cos^2\theta$$

$$-\frac{\dot{V}\dot{U}\sin^2\theta}{4U} - \frac{\dot{V}^2\sin^2\theta}{4V} + \frac{V'U'\sin^2\theta}{4U^2} + \frac{V'^2\sin^2\theta}{4UV}$$

$$= -\sin^2\theta - \frac{\ddot{V}\sin^2\theta}{2} + \frac{V''\sin^2\theta}{2U} - \frac{\dot{U}\dot{V}\sin^2\theta}{4U} - \frac{U'V'\sin^2\theta}{4U^2} = R_{22}\cdot\sin^2\theta \tag{33}$$

Alle übrigen Komponenten des Ricci-Tensors sind gleich null. Dies soll exemplarisch für R_{21} demonstriert werden:

$$R_{21} = R_{12} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{2\rho}}{\partial x^1} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma^{\rho}_{21}}{\partial x^{\rho}}}_{=0} + \Gamma^{\sigma}_{2\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma 1} - \Gamma^{\sigma}_{21}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} = \frac{\partial \Gamma^{3}_{23}}{\partial x^1} + [\Gamma^{0}_{20}\Gamma^{0}_{01} - \Gamma^{0}_{21}\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{1}_{20}\Gamma^{0}_{11} - \Gamma^{1}_{21}\Gamma^{0}_{10} + \Gamma^{2}_{20}\Gamma^{0}_{21} -$$

$$\Gamma^{2}_{21}\Gamma^{0}_{20} + \Gamma^{3}_{20}\Gamma^{0}_{31} - \Gamma^{3}_{21}\Gamma^{0}_{30}] + \underbrace{[\Gamma^{0}_{21}\Gamma^{1}_{01} - \Gamma^{0}_{21}\Gamma^{1}_{01} + \Gamma^{1}_{21}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{1}_{21}\Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{21} - \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{21} + \Gamma^{3}_{21}\Gamma^{1}_{31} - \Gamma^{3}_{21}\Gamma^{1}_{31}]}_{\text{verschwindet für beliebige }\Gamma}$$

$$+[\Gamma^{0}_{22}\Gamma^{2}_{01} - \Gamma^{0}_{21}\Gamma^{2}_{02} + \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{11} - \Gamma^{1}_{21}\Gamma^{2}_{12} + \Gamma^{2}_{22}\Gamma^{2}_{21} - \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{2}_{22} + \Gamma^{3}_{22}\Gamma^{2}_{31} - \Gamma^{3}_{21}\Gamma^{2}_{32}] + [\Gamma^{0}_{23}\Gamma^{3}_{01} - \Gamma^{0}_{21}\Gamma^{3}_{03}$$

$$+\Gamma^{1}_{23}\Gamma^{3}_{11} - \Gamma^{1}_{21}\Gamma^{3}_{13} + \Gamma^{2}_{23}\Gamma^{3}_{21} - \underbrace{\Gamma^{2}_{21}\Gamma^{3}_{23}}_{\neq 0} + \underbrace{\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{31}}_{\neq 0} - \Gamma^{3}_{21}\Gamma^{3}_{33}] = -\frac{V'}{2V}\cot\theta + \cot\theta\frac{V'}{2V} = 0 \quad .$$

Es verschwinden alle Summanden bis auf zwei, die sich gegenseitig aufheben.
Für die Näherung $p \approx 0$ im Energie-Impuls-Tensor (18) können die Koeffizienten U und V aus den Einsteinschen Feldgleichungen eindeutig abgeleitet werden. Diese Annahme ist im Fall eines kollabierenden Sterns auch völlig plausibel, da dort der materielle Druck P dem gravitativen Druck P_{grav} nichts entgegenzusetzen hat. Es gilt $P \ll P_{\text{grav}}$. Dass die so resultierende Metrik (28) auch auf das gesamte Universum angewendet werden kann, ist jedoch eher als *glücklicher Zufall* zu werten. Die Massendichte ϱ soll nun homogen und zeitabhängig sein, d.h. $\varrho = \varrho(t)$. Diese Homogenität, welche für das Universum wiederum eine gewagte Näherung zu sein scheint (siehe Kapitel 5), bleibt im Laufe der Zeit (des Kollapses) erhalten, weil im mitbewegten Bezugssystem ja alle Konstituenten ruhen.
Für die Feldgleichungen bietet sich die Form (15) an. Unter Berücksichtigung von

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = g^{00}T_{00} = \varrho c^2$$

können diese jetzt mit den Ergebnissen (29)-(32) explizit angegeben werden:

$$\frac{\ddot{U}}{2U} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2} = -\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t) \tag{34}$$

$$\frac{\dot{V}'}{V} - \frac{\dot{V}V'}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} = 0 \tag{35}$$

$$-\frac{\ddot{U}}{2} + \frac{\dot{U}^2}{4U} + \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} - \frac{U'V'}{2UV} = -\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)\; U \tag{36}$$

$$-1 - \frac{\ddot{V}}{2} + \frac{V''}{2U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{4U} - \frac{U'V'}{4U^2} = -\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)\; V \tag{37}$$

Die Gleichung mit R_{33} enthält natürlich keine weitere Information, da sie nach Kürzen von $\sin^2\theta$ identisch mit (37) ist. Die gefundenen Einsteinschen Feldgleichungen sind offensichtlich gekoppelte Differentialgleichungen, sodass im nächsten Schritt ein geeigneter Ansatz gefunden werden muss. Da in (34), (36) und (37) zeitliche und räumliche Ableitungen getrennt in Summanden auftauchen, bietet sich ein Separationsansatz an. Eine der dann auftretenden, von $x^1 = r$ abhängigen Funktionen kann zudem aufgrund der Kugelsymmetrie frei gewählt werden (Freiheit der Skalierung). Mit Kenntnis dessen lässt sich der Ansatz

$$U(r,t) = R(t)^2\; f(r)\;,\; V(r,t) = S(t)^2\; g(r) =: S(t)^2\; r^2$$

wählen. Einsetzen in Gleichung (35), die als einzige gemischte Ableitungen enthält, liefert als Bedingung (Zeit- bzw. Ortsabhängigkeiten inbegriffen)

$$\frac{4S\dot{S}r}{S^2r^2} - \frac{4S\dot{S}r^2S^2r}{2S^4r^4} - \frac{4R\dot{R}fS^2r}{2R^2S^2fr^2} = \frac{4\dot{S}}{Sr} - \frac{2\dot{S}}{Sr} - \frac{2\dot{R}}{Rr} = \frac{2\dot{S}}{Sr} - \frac{2\dot{R}}{Rr} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{R}}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(S) = \ln(R) + c \quad \Leftrightarrow \quad S(t) = C \cdot R(t)$$

mit einer Konstante C. Da die Funktion $f(r)$ noch nicht bestimmt ist, kann $C = 1$ gewählt werden. Der Ansatz lautet also nun

$$U(r,t) = R(t)^2\; f(r)\;,\; V(r,t) = R(t)^2\; r^2 \qquad .$$

Er wird als nächstes in die Gleichungen (36) und (37) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
-\dot{R}^2 f - \ddot{R}Rf + \frac{(2R\dot{R}f)^2}{4R^2f} + \frac{2R^2}{R^2r^2} - \frac{(2R^2r)^2}{2R^4r^4} - \frac{(2R\dot{R}f)(2R\dot{R}r^2)}{2R^2r^2} - \frac{2R^4f'r}{2R^4fr^2} &= -\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)R^2f \\
\Leftrightarrow \quad -\dot{R}^2f - \ddot{R}Rf + \dot{R}^2f + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} - 2\dot{R}^2f - \frac{f'}{fr} &= -\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)R^2f \\
\Leftrightarrow \quad -\dot{R}^2 - \ddot{R}R + \dot{R}^2 - 2\dot{R}^2 - \frac{f'}{rf^2} &= -\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)R^2 \\
\Leftrightarrow \quad -\frac{f'}{rf^2} &= \ddot{R}R + 2\dot{R}^2 - \frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)R^2
\end{aligned} \tag{38}$$

$$-1-\dot{R}^2r^2-\ddot{R}Rr^2+\frac{2R^2}{2R^2f}-\frac{(2R\dot{R}f)(2R\dot{R}r^2)}{4R^2f}-\frac{(R^2f')(2R^2r)}{4R^4f^2}=-\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)R^2r^2$$
$$\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{r^2}-\dot{R}^2-\ddot{R}R+\frac{1}{r^2f}-\dot{R}^2-\frac{f'}{2rf^2}=-\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)R^2$$
$$\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2f}-\frac{f'}{2rf^2}=\ddot{R}R+2\dot{R}^2-\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)R^2 \tag{39}$$

In diesen beiden Gleichungen sind Zeit- und Ortsabhängigkeiten voneinander durch das Gleichheitszeichen getrennt. Die Übereinstimmung der rechten Seiten macht es möglich, die Definition

$$\ddot{R}R+2\dot{R}^2-\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)R^2=:-2k$$

vorzunehmen. k wird darin Separationskonstante genannt. Nun kann die Funktion $f(r)$ bestimmt werden, indem die aus (38) folgende Beziehung

$$-\frac{f'}{rf^2}=-2k$$

in (39) eingesetzt wird:

$$-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2f}-k=-2k\quad\Leftrightarrow\quad 1-\frac{1}{f}=kr^2$$
$$\Leftrightarrow\quad f(r)=\frac{1}{1-kr^2} \tag{40}$$

Damit ist die Robertson-Walker-Metrik (28) zu

$$g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\left(1,-\frac{R(t)^2}{1-kr^2},-R(t)^2r^2,-R(t)^2r^2\sin^2\theta\right)\quad, \tag{41}$$

und das entsprechende Linienelement (27) zu

$$ds^2=c^2dt^2-R(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\ d\varphi^2)\right) \tag{42}$$

bestimmt.

Die Funktion $R(t)$ wird kosmologischer Skalenfaktor genannt. Üblicherweise wird diesem die Dimension einer Länge zugeordnet, sodass r und damit auch k dimensionslos sind. Auf diese Weise übernimmt nun $R(t)$ für r die Rolle eines radialen Maßstabs. Dies wird insbesondere plausibel, wenn man den Fall $k=0$ mit einem nicht-gekrümmten Raum identifiziert - dann entspricht (42) einfach dem klassischen Linienelement in Kugelkoordinaten (26).

Die explizite Bezeichnung der Metrik (41) als Robertson-Walker-Metrik ist nur bei einer Anwendung auf das ganze Universum/den gesamten Raum üblich. In diesem Fall ist sie Ausdruck des kosmologischen Prinzips, welches besagt, dass im Universum keine Position oder Richtung gegenüber einer jeweils anderen ausgezeichnet ist.

4 Friedmann-Gleichungen und Variationsprinzip

Die Friedmann-Gleichungen, oft auch Friedmann-Modell genannt, dienen der Aufstellung von Weltmodellen, welche die bisherige und die weitere Entwicklung des Universums beschreiben. Sie basieren auf dem kosmologischen Prinzip und folgen daher aus der Robertson-Walker-Metrik. In ihrer allgemeinen Form sind sie durch

$$3\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda = \kappa\varrho \quad \text{und} \tag{43}$$

$$\frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda = -\kappa p \tag{44}$$

gegeben[10], wobei κ (16) entspricht. Neben Massendichte ϱ und Druck p ist R der kosmologische Skalenfaktor, und k die Konstante aus dem letzten Kapitel. Üblicherweise wird k auf die Werte $+1$,-1 (Krümmung) und 0 (keine Krümmung) festgelegt.
Die Herleitung kann auf zwei Weisen erfolgen. Die oben angegebene, allgemeine Form erhält man am einfachsten aus den Einsteinschen Feldgleichungen, die um einen Term erweitert werden. Anstelle von (14) ist die modifizierte Feldgleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu} \tag{45}$$

mit der kosmologischen Konstante Λ zu lösen. Sie wurde ebenfalls erstmals von Einstein postuliert, später jedoch von ihm wieder zurückgenommen. Nach heutigen Erkenntnissen wird ihr ein sehr kleiner Wert zugeordnet, der einer Vakuum-Energiedichte entspricht.[11]
Ihre Bedeutung zeigt sich im Rahmen der Weltmodelle, da sich diese größtenteils über die kosmologische Konstante unterscheiden.[12]
Der zweite Weg einer Herleitung, der in dieser Arbeit beschritten wird, benutzt ein Variationsprinzip, das auf die Einstein-Hilbert-Wirkung angewandt wird. Dazu werden im nächsten Abschnitt ein paar nützliche bzw. notwendige Beziehungen eingeführt.

4.1 Vorbereitende Rechnungen

Von nun an soll im Gegensatz zur Festlegung (19)

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \tag{46}$$

gelten. Ziel dieses Kapitels ist neben der Ableitung der Friedmann-Gleichungen, die Einstein-Hilbert-Wirkung im synchronisierten Bezugssystem allgemein anzugeben. Daher muss auf die allgemeinen Ergebnisse aus Kapitel 3.2 zurückgegriffen werden. Für die anschließende Herleitung der Gleichungen muss der in Gleichung (24) bzw. (25) auftretende Tensor $P_{\mu\nu}$ in Form seiner Verjüngung $P = \gamma^{\mu\nu}P_{\mu\nu}$ dann jedoch für die Robertson-Walker-Metrik bestimmt werden. Dies soll vorgreifend nun geschehen. Der Tensor $P_{\mu\nu}$

[10] **siehe [3], S. 465. Dort werden allerdings relativistische Einheiten (G=c=1) verwendet.**
[11] **siehe [1], S. 120-121.**
[12] **Genaueres dazu in [3], Kap. 23.**

wird, wie in Kapitel 3.2 besprochen, aus den Christoffelsymbolen im dreidimensionalen Unterraum gebildet. Folglich fällt jegliche Zeitabhängigkeit samt Zeitableitungen heraus. $P_{\mu\nu}$ kann direkt mit den rein räumlichen Komponenten des Ricci-Tensors der Robertson-Walker-Metrik identifiziert werden, d.h. $P_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$. Somit ist

$$P = \gamma^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \gamma^{11} R_{11} + \gamma^{22} R_{22} + \gamma^{33} R_{33} \tag{47}$$

zu berechnen. Mithilfe von Kapitel 3.3, speziell der Gleichungen (38) und (39), sind die Komponenten schnell bestimmt:

$$R_{11} = -\ddot{R}Rf - 2\dot{R}^2 f - \frac{f'}{rf} = -\frac{1}{1-kr^2}(\ddot{R}R + 2\dot{R}^2) - \frac{(2kr)(1-kr^2)}{r(1-kr^2)^2} = -\frac{1}{1-kr^2}(\ddot{R}R + 2\dot{R}^2 + 2k) \quad ,$$

$$R_{22} = -\ddot{R}Rr^2 - 2\dot{R}^2 r^2 - 1 + \frac{1}{f} - \frac{f'r}{2f^2} = -r^2(\ddot{R}R + 2\dot{R}^2) - 1 + (1-kr^2) - \frac{(2kr)(1-kr^2)^2 r}{2(1-kr^2)^2}$$

$$= -r^2(\ddot{R}R + 2\dot{R}^2 + 2k) \quad ,$$

$$R_{33} = R_{22} \cdot \sin^2\theta \quad .$$

Einsetzen dieser Werte und der Robertson-Walker-Metrik in (47) ergibt somit

$$P = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} + \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} + \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} = \underbrace{\frac{3\ddot{R}}{R}}_{=0} + \underbrace{\frac{6\dot{R}^2}{R^2}}_{=0} + \frac{6k}{R^2} = \frac{6k}{R^2} \quad . \tag{48}$$

Darüber hinaus sollen an dieser Stelle zwei weitere Beziehungen eingeführt werden, die sich im übernächsten Abschnitt als dienlich erweisen werden. Die erste betrifft die Determinante γ des metrischen Tensors $\gamma_{\mu\nu}$. Da letzterer im synchronisierten Bezugssystem ja lediglich eine Matrix ist, kann sie für die Robertson-Walker-Metrik leicht zu

$$\gamma = \gamma_{11} \cdot \gamma_{22} \cdot \gamma_{33} = -\frac{1}{1-kr^2} R^6(t) r^4 \sin^2\theta \tag{49}$$

angegeben werden. Die erwähnte Beziehung[13] lautet

$$\dot{\gamma} = \gamma \gamma^{\mu\nu} \dot{\gamma}_{\mu\nu} \quad , \tag{50}$$

wobei der Punkt wiederum die zeitliche Ableitung (nach x^0) meint.
Die zweite Beziehung liefert eine Möglichkeit, ein spezielles Produkt aus Komponenten des metrischen Tensors zusammenzufassen. Dazu wird die Identität (5) benötigt, aus der durch zeitliche Ableitung

$$\gamma^{\mu\nu} \dot{\gamma}_{\nu\sigma} = -\dot{\gamma}^{\mu\nu} \gamma_{\nu\sigma}$$

folgt. Damit lässt sich das Produkt $\gamma^{\sigma\beta} \dot{\gamma}_{\beta\delta} \gamma^{\mu\nu} \dot{\gamma}_{\nu\sigma}$ zu

$$(\gamma^{\sigma\beta} \dot{\gamma}_{\beta\delta})(\gamma^{\mu\nu} \dot{\gamma}_{\nu\sigma}) = (\gamma^{\sigma\beta} \dot{\gamma}_{\beta\delta})(-\dot{\gamma}^{\mu\nu} \gamma_{\nu\sigma}) = -\underbrace{\gamma^{\sigma\beta} \gamma_{\nu\sigma}}_{=\,\delta^\beta_\nu} \dot{\gamma}_{\beta\delta} \dot{\gamma}^{\mu\nu} = -\dot{\gamma}_{\beta\delta} \dot{\gamma}^{\mu\beta} \tag{51}$$

auswerten.

[13] **siehe [1], S. 91**.

4.2 Variationsprinzip und Einstein-Hilbert-Wirkung

Das Variationsprinzip hat sich in der Physik als mächtiges Werkzeug zur Lösung vieler Probleme auf verschiedenen Gebieten erwiesen. Aus der Mechanik ist es als Hamiltonsches Prinzip bekannt. Dort wird ein Wirkungsfunktional S über

$$S\left(q(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right) \mathrm{d}t \tag{52}$$

definiert, worin L die Lagrange-Funktion, und q eine generalisierte, zeitabhängige Koordinate ist. Erstere berechnet sich über $L = T - V$ aus der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V. Das Hamiltonsche Prinzip[14] sagt nun aus, dass in einem physikalischen System diejenige Funktion bzw. Bahnkurve $q(t)$ realisiert ist, für die die Variation der Wirkung δS verschwindet,

$$\delta S = 0 \quad .$$

Dies ist mit (52) nach Vertauschen von Integration und Differentiation gleichbedeutend damit, dass für die Lagrange-Funktion die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\delta L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{53}$$

erfüllt ist.[15]
Auch in der ART ist es gelungen, ein Wirkungsfunktional zu finden. Es entspricht der Einstein-Hilbert-Wirkung, die durch

$$S_{EH} = \int \left[\frac{1}{2\kappa}(-R + 2\Lambda) + \mathcal{L}_M\right] \sqrt{|g|}\ \mathrm{d}^4x \tag{54}$$

gegeben ist.[16] Sie enthält als einzige in dieser Arbeit noch nicht eingeführte Größe die materielle Lagrangedichte $\mathcal{L}_M$ (R ist der Ricci-Skalar, nicht der Skalenfaktor). Im Folgenden wird $\mathcal{L}_M = 0$ gesetzt, was äquivalent zum Verschwinden der rein räumlichen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$ ist. Der auffälligste Unterschied zur Wirkung der Mechanik (52) ist der Integrationsbereich, der sich nun auch über den Raum erstreckt. Die Rolle von q in der Euler-Lagrange-Gleichung (53) übernimmt jetzt der Skalenfaktor $R(t)$, was sich während der anschließenden Rechnungen herausstellen wird.

4.3 Herleitung der Friedmann-Gleichungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Friedmann-Gleichungen nur für den Spezialfall $k = 0$ und $\mathcal{L}_M = 0$ abgeleitet. Letztere Einschränkung impliziert den Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(\varrho c^2, 0, 0, 0\right) \quad , \tag{55}$$

[14] **siehe [5], S. 62-63.**
[15] **siehe [5], S. 73.**
[16] **Die Vorzeichen in der runden Klammer sind umgekehrt zu setzen, falls die andere Konvention bzgl. des Ricci-Tensors (11) bzw. des Ricci-Skalars (13) gilt.**

wie er schon für die Herleitung der Robertson-Walker-Metrik Verwendung fand. Daraus lässt sich schließen, dass aus einer Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung auf die Einstein-Hilbert-Wirkung nur die zweite Friedmann-Gleichung (44) (für $p = 0$ und $k = 1$) folgen kann. Um zusätzlich die erste Gleichung (43) zu erhalten, müssen wiederum die Einsteinschen Feldgleichungen herangezogen werden.
Die Einstein-Hilbert-Wirkung soll nun zunächst allgemein für ein synchronisiertes Bezugssystem bestimmt werden. Als erster Schritt ist daher der Ricci-Skalar R zu berechnen. Dazu sind die Ergebnisse (21) und (25) in die Definition (13) einzusetzen, wobei κ wieder über den metrischen Tensor ausgedrückt wird ($\kappa_{\mu\nu} =: \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial t}$, $\kappa^\mu_\mu = \gamma^{\mu\nu}\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial t}$). Die im Folgenden auftretenden Vorzeichenwechsel liegen an der neuen Definition (46) im Unterschied zu (19).

$$\begin{aligned} R = \gamma^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R_{00} &= -\frac{1}{4}\left(2\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}^\rho_\mu\dot{\gamma}_{\nu\rho} - \gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\rho_\rho\right) + \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\ddot{\gamma}_{\mu\nu} + P + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\gamma^{\delta\epsilon}\dot{\gamma}_{\delta\epsilon}) + \frac{1}{4}\dot{\gamma}^\beta_\alpha\dot{\gamma}^\alpha_\beta \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}^\rho_\mu\dot{\gamma}_{\nu\rho}}_{\text{I.}} + \underbrace{\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\rho_\rho}_{\text{II.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\ddot{\gamma}_{\mu\nu}}_{\text{III.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\gamma}^{\delta\epsilon}\dot{\gamma}_{\delta\epsilon}}_{\text{IV.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\gamma^{\delta\epsilon}\ddot{\gamma}_{\delta\epsilon}}_{\text{V.}} + \underbrace{\frac{1}{4}\dot{\gamma}^\beta_\alpha\dot{\gamma}^\alpha_\beta}_{\text{VI.}} + P \end{aligned} \tag{56}$$

Nun können die einzelnen Terme weiter vereinfacht werden. Dabei erweist es sich als nützlich, dass der Ricci-Skalar an sich unabhängig von Indizes ist. Dies hat zur Konsequenz, dass mehrere Summanden, die alle unterschiedliche Indizes enthalten, zusammengefasst werden können, und zudem Indizes in verschiedenen Summanden gleich benannt werden dürfen. Damit sind die Vereinfachungen rasch umgesetzt:

I. $$-\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}^\rho_\mu\dot{\gamma}_{\nu\rho} = -\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\sigma\rho}\dot{\gamma}_{\mu\sigma}\dot{\gamma}_{\nu\rho} = -\frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}\dot{\gamma}_{\sigma\mu}\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{\mu\sigma}\dot{\gamma}^{\mu\sigma}$$

Hierbei wurde, neben den gewöhnlichen Symmetrierelationen, im letzten Schritt Beziehung (51) verwendet.

II. $$\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\rho_\rho = \frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu}\gamma^{\sigma\rho}\dot{\gamma}_{\rho\sigma} = \frac{1}{4}(\gamma^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_{\alpha\beta})^2$$

III. + V. $$\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\ddot{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\gamma^{\delta\epsilon}\ddot{\gamma}_{\delta\epsilon} = \gamma^{\mu\nu}\ddot{\gamma}_{\mu\nu}$$

VI. $$\frac{1}{4}\dot{\gamma}^\beta_\alpha\dot{\gamma}^\alpha_\beta = \frac{1}{4}\gamma^{\sigma\kappa}\dot{\gamma}_{\kappa\rho}\gamma^{\rho\lambda}\dot{\gamma}_{\lambda\sigma} = -\frac{1}{4}\dot{\gamma}_{\kappa\rho}\dot{\gamma}^{\kappa\rho}$$

I. + IV. + VI. $$\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{\mu\sigma}\dot{\gamma}^{\mu\sigma} + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{\delta\epsilon}\dot{\gamma}^{\delta\epsilon} - \frac{1}{4}\dot{\gamma}_{\kappa\rho}\dot{\gamma}^{\kappa\rho} = \frac{3}{4}\dot{\gamma}_{\mu\nu}\dot{\gamma}^{\mu\nu}$$

Bei VI. wurde im letzten Schritt wiederum (51) benutzt. Nach Vereinheitlichung der verbliebenen Indizes folgt somit

$$S_{EH} = \int \frac{1}{2\kappa}\left(-\frac{3}{4}\dot{\gamma}_{\mu\nu}\dot{\gamma}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}\ddot{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}(\dot{\gamma}_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu})^2 - P + 2\Lambda\right)\sqrt{-\gamma}\,\mathrm{d}^4x \tag{57}$$

als Zwischenergebnis für die Einstein-Hilbert-Wirkung, wobei nun von einer negativen Determinante, d.h. $|\gamma| = -\gamma$, ausgegangen wird. Letzteres ist in allen relevanten Anwendungen der Fall. Das erzielte Ergebnis kann jedoch noch weiter vereinfacht werden. Dazu ist der Satz von Fubini hilfreich, der es ermöglicht, die Integration über die Koordinate x^0, welche wegen $c = 1$ der Zeit entspricht, separat auszuführen. Es soll der zweite Summand in (57) betrachtet werden, der mit der Kettenregel wie folgt geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(\gamma^{\mu\nu}\ddot{\gamma}_{\mu\nu}\sqrt{-\gamma})\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu}\sqrt{-\gamma})\right]\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{\infty}(\dot{\gamma}^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu}\sqrt{-\gamma})\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu}\frac{\dot{\gamma}}{2\sqrt{-\gamma}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu}\sqrt{-\gamma})\,\mathrm{d}t\right] - \int_{-\infty}^{\infty}(\dot{\gamma}^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu}\sqrt{-\gamma})\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\gamma^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu})^2\sqrt{-\gamma}\,\mathrm{d}t \quad .\end{aligned}$$

Hier wurde im ersten Summanden Integration und Differentiation vertauscht, und der letzte mit Beziehung (50) umgeformt. Dieser erste Summand entspricht nun offensichtlich einer Eichtransformation und darf daher vernachlässigt werden.[17] Die verbleibenden können direkt mit denjenigen des Zwischenergebnisses (57) verwertet werden, sodass sich als Endergebnis die kompakte Gleichung

$$S_{EH} = \int \frac{1}{2\kappa}\left(\frac{1}{4}\,\dot{\gamma}_{\mu\nu}\dot{\gamma}^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\,(\dot{\gamma}_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu})^2 - P + 2\Lambda\right)\sqrt{-\gamma}\;\mathrm{d}^4x \tag{58}$$

ergibt. Sie stellt die Einstein-Hilbert-Wirkung für ein allgemeines synchronisiertes Bezugssystem dar.

Das Ergebnis (58) wird nun auch weiter für die Herleitung der Friedmann-Gleichung (44) mit $p = 0$ und $k = 1$ verwendet. Dazu ist die Robertson-Walker-Metrik (41) heranzuziehen. Da die beiden ersten Summanden in (58) zeitliche Ableitungen enthalten, wird die Komponente $\gamma^{00} = \gamma_{00} = 1$ keine Bedeutung haben. Die benötigten Komponenten können direkt angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= -\frac{R^2}{1-r^2} \quad , & \gamma_{22} &= -R^2r^2 \quad , & \gamma_{33} &= -R^2r^2\sin^2\theta \quad , \\
\gamma^{11} &= -\frac{1-r^2}{R^2} \quad , & \gamma^{22} &= -\frac{1}{R^2r^2} \quad , & \gamma^{33} &= -\frac{1}{R^2r^2\sin^2\theta} \quad , \\
\dot{\gamma}_{11} &= -\frac{2\dot{R}R}{1-r^2} \quad , & \dot{\gamma}_{22} &= -2\dot{R}Rr^2 \quad , & \dot{\gamma}_{33} &= -2\dot{R}Rr^2\sin^2\theta \quad , \\
\dot{\gamma}^{11} &= \frac{2\dot{R}}{R^3}(1-r^2) \quad , & \dot{\gamma}^{22} &= \frac{2\dot{R}}{R^3r^2} \quad , & \dot{\gamma}^{33} &= \frac{2\dot{R}}{R^3r^2\sin^2\theta} \quad .
\end{aligned}$$

[17]**siehe [6]**, **S. 34**.

Mit ihnen berechnet sich der erste Teil der großen Klammer in (58) zu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\,\dot\gamma_{\mu\nu}\dot\gamma^{\mu\nu}+\frac{1}{4}\,(\dot\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu})^2 &= \frac{1}{4}\,(\dot\gamma_{11}\dot\gamma^{11}+\dot\gamma_{22}\dot\gamma^{22}+\dot\gamma_{33}\dot\gamma^{33})+\frac{1}{4}\,(\dot\gamma_{11}\gamma^{11}+\dot\gamma_{22}\gamma^{22}+\dot\gamma_{33}\gamma^{33})^2\\
&= \frac{1}{4}\,\left(-\frac{4\dot R^2}{R^2}-\frac{4\dot R^2}{R^2}-\frac{4\dot R^2}{R^2}\right)+\frac{1}{4}\,\left(\frac{2\dot R}{R}+\frac{2\dot R}{R}+\frac{2\dot R}{R}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\,\left(-\frac{12\dot R^2}{R^2}\right)+\frac{1}{4}\,\left(\frac{36\dot R^2}{R^2}\right)=-\frac{3\dot R^2}{R^2}+\frac{9\dot R^2}{R^2}=\frac{6\dot R^2}{R^2}\quad .
\end{aligned}$$

Der Skalar P wurde in den vorbereitenden Rechnungen als Gleichung (48) bestimmt. Zusammen mit der dort in (49) ebenfalls berechneten Determinante γ kann die nun spezielle Einstein-Hilbert-Wirkung zu

$$S_{EH}=\int\frac{1}{2\kappa}\,\left(\frac{6\dot R^2}{R^2}-\frac{6}{R^2}+2\Lambda\right)\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}R^3(t)\,\sin\theta\,\mathrm{d}^4x \tag{59}$$

angegeben werden[18]. Wegen $\mathrm{d}^4x=(\mathrm{d}t,\mathrm{d}r,\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}\varphi)$ faktorisiert das Integral offenbar. Der oben in der allgemeinen Herleitung verwendete Satz von Fubini wird folglich für den Fall der Robertson-Walker-Metrik gar nicht benötigt. Unter Berücksichtigung der Definitionsbereiche der räumlichen Koordinaten lässt sich die Wirkung konkret als

$$S_{EH}=\frac{1}{2\kappa}\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}_{=4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(6\dot R^2R-6R+2\Lambda R^3)\,\mathrm{d}t \tag{60}$$

schreiben. Hierbei muss noch sichergestellt werden, dass das Integral über $\mathrm{d}r$ existiert und endlich ist. Es bietet sich eine Substitution an, die auf ein etwas geläufigeres Integral führt. Mit $r^2=:1-x^2\Leftrightarrow r=\sqrt{1-x^2}$ (für gleiche Definitionsbereiche von r und x) folgt $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ und somit für das Integral

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r &= \int_1^0\frac{1-x^2}{x}\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{1}{2}\,\arcsin(x)+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}\quad .
\end{aligned}$$

So vereinfacht sich das Ergebnis (60) nach Ausführung der räumlichen Integration zu

$$S_{EH}=\frac{\pi^2}{2\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}(6\dot R^2R-6R+2\Lambda R^3)\,\mathrm{d}t\quad . \tag{61}$$

Laut der allgemeinen Definition (52) ist der in Klammern stehende Term (der konstante Vorfaktor sei vernachlässigt) mit der Lagrange-Funktion gemäß

$$L=6\dot R^2R-6R+2\Lambda R^3 \tag{62}$$

[18] **Es sei zur Sicherheit darauf hingewiesen, dass R=R(t) nun den Skalenfaktor meint.**

zu identifizieren. Jetzt wird deutlich, dass die Variation über die Euler-Lagrange-Gleichung (53) nur bezüglich des Skalenfaktors R durchgeführt werden kann. Dies soll nun geschehen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(12\dot{R}R) - (6\dot{R}^2 - 6 + 6\Lambda R^2) = 12\ddot{R}R + 12\dot{R}^2 - 6\dot{R}^2 - 6\Lambda R^2 + 6 \\ &= 12\ddot{R}R + 6\dot{R}^2 - 6\Lambda R^2 + 6 = 0 \quad .\end{aligned} \tag{63}$$

Hiermit ist schon nach kurzer Rechnung die Friedmann-Gleichung (44) mit $p = 0$ und $k = 1$ gefunden, denn

$$\begin{aligned} & 12\ddot{R}R + 6\dot{R}^2 - 6\Lambda R^2 + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\ddot{R}R + \dot{R}^2 + 1 - \Lambda R^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + 1}{R^2} - \Lambda = 0 \quad .\end{aligned}$$

Die Friedmann-Gleichung (43) folgt nun nach (45) mit dem Energie-Impuls-Tensor (55) aus der Feldgleichung

$$R_{00} - \frac{R}{2}\, g_{00} + \Lambda\, g_{00} = -\frac{8\pi G}{c^2}\varrho = -\kappa\varrho \quad . \tag{64}$$

Dazu sind noch drei weitere Koeffizienten zu berechnen:

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}_{11} &= \frac{\partial}{\partial t}\dot{\gamma}_{11} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{2\dot{R}R}{1-r^2}\right) = -\frac{1}{1-r^2}(2\ddot{R}R + 2\dot{R}^2) \quad , \\ \ddot{\gamma}_{22} &= \frac{\partial}{\partial t}\dot{\gamma}_{22} = \frac{\partial}{\partial t}(-2\dot{R}Rr^2) = -r^2(2\ddot{R}R + 2\dot{R}^2) \quad , \\ \ddot{\gamma}_{33} &= \frac{\partial}{\partial t}\dot{\gamma}_{33} = \frac{\partial}{\partial t}(-2\dot{R}Rr^2\sin^2\theta) = -r^2\sin^2\theta(2\ddot{R}R + 2\dot{R}^2) \quad .\end{aligned}$$

Die Vorschriften zur Berechnung von R_{00} und R können den Gleichungen (56) und (57) sowie den Vereinfachungen dazwischen entnommen werden. Gleichung (58) kann nicht benutzt werden, da sie infolge der Eichtransformation nicht mehr den korrekten Ricci-Skalar enthält.

$$\begin{aligned}R_{00} &= \frac{1}{2}\,\dot{\gamma}^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\gamma^{\mu\nu}\ddot{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\,\dot{\gamma}_{\mu\nu}\dot{\gamma}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\,\dot{\gamma}^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\gamma^{\mu\nu}\ddot{\gamma}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4}\,(\dot{\gamma}^{11}\dot{\gamma}_{11} + \dot{\gamma}^{22}\dot{\gamma}_{22} + \dot{\gamma}^{33}\dot{\gamma}_{33}) + \frac{1}{2}\,(\gamma^{11}\ddot{\gamma}_{11} + \gamma^{22}\ddot{\gamma}_{22} + \gamma^{33}\ddot{\gamma}_{33}) \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{4\dot{R}^2}{R^2} - \frac{4\dot{R}^2}{R^2} - \frac{4\dot{R}^2}{R^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{12\dot{R}^2}{R^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{6\ddot{R}}{R} + \frac{6\dot{R}^2}{R^2}\right) = -\frac{3\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3\ddot{R}}{R} = \frac{3\ddot{R}}{R} \quad ,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{3}{4}\ \dot\gamma_{\mu\nu}\dot\gamma^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}\ddot\gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\ (\dot\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu})^2 + P \qquad\qquad (\text{mit } P \text{ aus (48)})\\
&= \frac{3}{4}\ \underbrace{(\dot\gamma_{11}\dot\gamma^{11} + \dot\gamma_{22}\dot\gamma^{22} + \dot\gamma_{33}\dot\gamma^{33})}_{\text{schon für } R_{00} \text{ berechnet}} + \underbrace{(\gamma^{11}\ddot\gamma_{11} + \gamma^{22}\ddot\gamma_{22} + \gamma^{33}\ddot\gamma_{33})}_{\text{schon für } R_{00} \text{ berechnet}} + \frac{1}{4}\ (\dot\gamma_{11}\gamma^{11} + \dot\gamma_{22}\gamma^{22} + \dot\gamma_{33}\gamma^{33})^2 + \frac{6}{R^2}\\
&= \frac{3}{4}\ \left(-\frac{12\dot R^2}{R^2}\right) + \left(\frac{6\ddot R}{R} + \frac{6\dot R^2}{R^2}\right) + \frac{1}{4}\ \left(\frac{2\dot R}{R} + \frac{2\dot R}{R} + \frac{2\dot R}{R}\right)^2 + \frac{6}{R^2}\\
&= -\frac{9\dot R^2}{R^2} + \frac{6\ddot R}{R} + \frac{6\dot R^2}{R^2} + \frac{9\dot R^2}{R^2} + \frac{6}{R^2} = \frac{6\ddot R}{R} + \frac{6\dot R^2}{R^2} + \frac{6}{R^2} \quad .
\end{aligned}
$$

Einsetzen dieser Ergebnisse in die Feldgleichung (64) ergibt somit

$$
\begin{aligned}
R_{00} - \frac{R}{2}\ g_{00} + \Lambda\ g_{00} &= \frac{3\ddot R}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{6\ddot R}{R} + \frac{6\dot R^2}{R^2} + \frac{6}{R^2}\right) + \Lambda = \frac{3\ddot R}{R} - \frac{3\ddot R}{R} - \frac{3\dot R^2}{R^2} - \frac{3}{R^2} + \Lambda\\
&= -\frac{3\dot R^2}{R^2} - \frac{3}{R^2} + \Lambda = -\kappa\varrho\\
\Leftrightarrow \qquad & 3\frac{\dot R^2 + 1}{R^2} - \Lambda = \kappa\varrho \quad .
\end{aligned}
\tag{65}
$$

Hiermit ist gezeigt, dass die verwendete Feldgleichung tatsächlich äquivalent zu der ersten der zu Beginn des Kapitels angegebenen Friedmann-Gleichungen ist. Gleichzeitig bedeuten die erzielten Ergebnisse aber auch, dass sowohl die mit (45) angegebene Feldgleichung als auch die mit (54) motivierte Einstein-Hilbert-Wirkung, welche beide im Rahmen dieser Arbeit lediglich postuliert worden sind, ihre Berechtigung haben.
Eine ausführliche Abhandlung über sich aus den Friedmann-Gleichungen ergebende Weltmodelle ist in [1] und insbesondere [3] der angegebenen Literatur zu finden.
Eine Erweiterung, die bis zu Themen aktueller Forschung führt, erfährt das Friedmann-Modell bzw. die Robertson-Walker-Metrik im Rahmen des Lemaître-Tolman-Bondi-Modells. Dieses soll im letzten Kapitel dieser Arbeit eingeführt werden.

5 Lemaître-Tolman-Bondi-Modell

5.1 Einführung

Kosmologische Daten, die mit den theoretischen Ergebnissen der ART in Einklang zu bringen sind, stammen aus der Detektion von Strahlung. Dazu zählt die Mikrowellen-Hintergrundstrahlung ebenso wie das Licht naher und ferner Galaxien, insbesondere der leuchtstarken Supernovae. Die oftmals hervorragende Anwendbarkeit der Ergebnisse der zurückliegenden Kapitel, der Robertson-Walker-Metrik und der Friedmann-Gleichungen, auf diese Daten ist unbestritten. Probleme bereitet allerdings, eine plausible Erklärung für die indirekt gemachte[19] Beobachtung zu finden, dass das Universum beschleunigt expandiert. Im Rahmen der Friedmann-Gleichungen kann dazu lediglich die kosmologische Konstante Λ dienen, welche als Vakuumenergie fungiert. Im wissenschaftlichen Sprachgebrauch wird sie als dunkle Energie bezeichnet. Letztere Namensgebung weist schon daraufhin, dass diese Herangehensweise nicht zufriedenstellend ist, zumal sie nicht physikalisch plausibel begründet werden kann.

Eine andere Perspektive auf dieses Problem der aktuellen Forschung bietet das Lemaître-Tolman-Bondi-Modell (LTB-Modell), das ebenfalls eine exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen ist. Ansatzpunkt dieses Modells ist die bereits bei der Herleitung der Robertson-Walker-Metrik etwas anmaßend wirkende Annahme, dass die Massendichte ϱ im Universum räumlich homogen ist. Der dafür im Weiteren betrachtete Ansatz für den metrischen Tensor,

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\ (1, -e^{\lambda(R,t)}, -r^2(R,t), -r^2(R,t)\ \sin^2\theta) \quad , \tag{66}$$

bzw. das Linienelement,

$$ds^2 = dt^2 - e^{\lambda(R,t)}\ dR^2 - r^2(R,t)\ (d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2) \quad , \tag{67}$$

unterscheidet sich, bis auf den Variablentausch $R \longleftrightarrow r$, weder qualitativ noch quantitativ von demjenigen in (27) bzw. (28). Das andere Resultat entsteht schließlich dadurch, dass die korrespondierenden Feldgleichungen nicht wiederum durch einen Ansatz, sondern sukzessive durch Integration gelöst werden. Dies wird im folgenden Abschnitt ausführlich demonstriert.

Da es an dortiger Stelle nur indirekt deutlich wird, sei vorweggenommen, dass diese Vorgehensweise auf einen Skalenfaktor führt, der nicht mehr nur von der Zeit, sondern auch von der Radialkoordinate abhängt. Damit wird es möglich, ein Universum mit inhomogener Massenverteilung zu beschreiben, was sich schließlich als Alternative für die Hypothese der dunklen Energie offenbart. Dies soll u.a. im übernächsten Abschnitt motiviert werden.

[19] **siehe [7], S. 3, Z. 3-6**.

5.2 Gravitationskollaps staubförmiger Materie

Die Diskussion des Gravitationskollapses staubförmiger Materie schließt direkt an diejenige der Robertson-Walker-Metrik und der Friedmann-Gleichungen an, da ihr die gleichen Annahmen zugrunde liegen. Das Attribut 'staubförmig' weist darauf hin, dass die betrachteten Teilchen lediglich gravitativ miteinander wechselwirken, was wiederum die Näherung $p \approx 0$ im Energie-Impuls-Tensor zulässt. Dieser hat folglich weiterhin die Form (55). Ziel der folgenden Rechnungen ist nun, aus den Feldgleichungen (14) die allgemeinen Bewegungsgleichungen abzuleiten, und dadurch deren exakte Lösbarkeit zu demonstrieren. Da die entstehenden Feldgleichungen Basis für alle derzeit diskutierten LTB-Modelle sind, stellen einige der auftretenden Ergebnisse zudem allgemeine Eigenschaften von ihnen dar.
Die Berechnung der Feldgleichungen verkürzt sich dadurch ein wenig, dass die Ergebnisse (29)-(33) für die Komponenten des Ricci-Tensors aus Kapitel 3.3 benutzt werden können, wenn man die metrischen Koeffizienten aus (28) mit denjenigen aus (66) ersetzt. Es ergibt sich (der Strich ist nun eine Ableitung nach R):

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\ddot{\lambda}e^{\lambda} + \dot{\lambda}^2 e^{\lambda}}{2e^{\lambda}} - \frac{(\dot{\lambda}e^{\lambda})^2}{4(e^{\lambda})^2} + \frac{2\ddot{r}r + 2\dot{r}^2}{r^2} - \frac{(2\dot{r}r)^2}{2r^4} = \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{2\ddot{r}}{r} + \frac{2\dot{r}^2}{r^2} - \frac{2\dot{r}^2}{r^2} \\
&= \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{2\ddot{r}}{r} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{01} = R_{10} &= \frac{2\dot{r}'r + 2\dot{r}r'}{r^2} - \frac{(2\dot{r}r)(2r'r)}{2r^4} - \frac{(\dot{\lambda}e^{\lambda})(2r'r)}{2r^2 e^{\lambda}} = \frac{2\dot{r}'}{r} + \frac{2\dot{r}r'}{r^2} - \frac{2\dot{r}r'}{r^2} - \frac{\dot{\lambda}r'}{r} \\
&= \frac{2\dot{r}'}{r} - \frac{\dot{\lambda}r'}{r} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -\frac{\ddot{\lambda}e^{\lambda} + \dot{\lambda}^2 e^{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}e^{\lambda}}{4} + \frac{2r''r + 2r'^2}{r^2} - \frac{(2r'r)^2}{2r^4} - \frac{(\dot{\lambda}e^{\lambda})(2\dot{r}r)}{2r^2} - \frac{(\lambda' e^{\lambda})(2r'r)}{2r^2 e^{\lambda}} \\
&= -\frac{\ddot{\lambda}e^{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2 e^{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2 e^{\lambda}}{4} + \frac{2r''}{r} + \frac{2r'^2}{r^2} - \frac{2r'^2}{r^2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{r}e^{\lambda}}{r} - \frac{\lambda' r'}{r} \\
&= -e^{\lambda}\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{r}\right) + \frac{2r''}{r} - \frac{\lambda' r'}{r} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= -1 - \frac{2\ddot{r}r + 2\dot{r}^2}{2} + \frac{2r''r + 2r'^2}{2e^{\lambda}} - \frac{(\dot{\lambda}e^{\lambda})(2\dot{r}r)}{4e^{\lambda}} - \frac{(\lambda' e^{\lambda})(2r'r)}{4(e^{\lambda})^2} \\
&= e^{-\lambda}\left(r''r + r'^2 - \frac{\lambda' r' r}{2}\right) - \ddot{r}r - \dot{r}^2 - \frac{\dot{\lambda}\dot{r}r}{2} - 1 \quad ,
\end{aligned}$$

$$R_{33} = R_{22} \cdot \sin^2\theta \quad .$$

Außerdem ist noch der Ricci-Skalar zu berechnen:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} = R_{00} - e^{-\lambda}R_{11} - 2\frac{R_{22}}{r^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\ddot\lambda}{2}+\frac{\dot\lambda^2}{4}+\frac{2\ddot r}{r}\right]+\left[-e^{-\lambda}\left(\frac{2r''}{r}-\frac{\lambda' r'}{r}\right)+\frac{\ddot\lambda}{2}+\frac{\dot\lambda^2}{4}+\frac{\dot\lambda\dot r}{r}\right]\\
&\quad +\left[2\left(-e^{-\lambda}\left(\frac{r''}{r}+\frac{r'^2}{r^2}-\frac{\lambda' r'}{2r}\right)+\frac{\ddot r}{r}+\frac{\dot r^2}{r^2}+\frac{1}{r^2}\right)\right]\\
&= -e^{-\lambda}\left(\frac{4r''}{r}+\frac{2r'^2}{r^2}-\frac{2\lambda' r'}{r}\right)+\ddot\lambda+\frac{\dot\lambda^2}{2}+\frac{2\dot\lambda\dot r}{r}+\frac{4\ddot r}{r}+\frac{2\dot r^2}{r^2}+\frac{2}{r^2}
\end{aligned}
$$

Mit diesen Ergebnissen erhält man die linke Seite der Feldgleichungen:

$$
\begin{aligned}
R_{00}-\frac{R}{2}\,g_{00} &= \frac{\ddot\lambda}{2}+\frac{\dot\lambda^2}{4}+\frac{2\ddot r}{r}+e^{-\lambda}\left(\frac{2r''}{r}+\frac{r'^2}{r^2}+\frac{\lambda' r'}{r}\right)-\frac{\ddot\lambda}{2}-\frac{\dot\lambda^2}{4}-\frac{\dot\lambda\dot r}{r}-\frac{2\ddot r}{r}-\frac{\dot r^2}{r^2}-\frac{1}{r^2}\\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{2r''}{r}+\frac{r'^2}{r^2}-\frac{\lambda' r'}{r}\right)-\frac{\dot\lambda\dot r}{r}-\frac{\dot r^2}{r^2}-\frac{1}{r^2}\quad ,
\end{aligned}
$$

$$
R_{01}-\frac{R}{2}\underbrace{g_{01}}_{=0}=R_{01}=\frac{2\dot r'}{r}-\frac{\dot\lambda r'}{r}\quad ,
$$

$$
\begin{aligned}
R_{11}-\frac{R}{2}\,g_{11} &= -e^{\lambda}\left(\frac{\ddot\lambda}{2}+\frac{\dot\lambda^2}{4}+\frac{\dot\lambda\dot r}{r}\right)+\frac{2r''}{r}-\frac{\lambda' r'}{r}+e^{\lambda}\left(\frac{\ddot\lambda}{2}+\frac{\dot\lambda^2}{4}+\frac{\dot\lambda\dot r}{r}+\frac{2\ddot r}{r}+\frac{\dot r^2}{r^2}+\frac{1}{r^2}\right)\\
&\quad +\frac{\lambda' r'}{r}-\frac{2r''}{r}-\frac{r'^2}{r^2}=e^{\lambda}\left(\frac{2\ddot r}{r}+\frac{\dot r^2}{r^2}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{r'^2}{r^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{22}-\frac{R}{2}\,g_{22} &= e^{-\lambda}\left(r''r+r'^2-\frac{\lambda' r' r}{2}\right)-\ddot r r-\dot r^2-\frac{\dot\lambda\dot r r}{2}-1-e^{-\lambda}(2r''r+r'^2-\lambda' r' r)+\frac{\ddot\lambda r^2}{2}+\frac{\dot\lambda^2 r^2}{4}\\
&\quad +\dot\lambda\dot r r+2\ddot r r+\dot r^2+1=e^{-\lambda}\left(r''r-2r''r+r'^2-r'^2-\frac{\lambda' r' r}{2}+\lambda' r' r\right)+\ddot r r+\frac{\ddot\lambda r^2}{2}\\
&\quad +\frac{\dot\lambda\dot r r}{2}+\frac{\dot\lambda^2 r^2}{4}=-e^{-\lambda}\left(r''r-\frac{\lambda' r' r}{2}\right)+\ddot r r+\frac{\ddot\lambda r^2}{2}+\frac{\dot\lambda\dot r r}{2}+\frac{\dot\lambda^2 r^2}{4}\quad .
\end{aligned}
$$

Die vollen Feldgleichungen lauten mit diesen Ergebnissen

$$
-\frac{e^{-\lambda}}{r^2}(2r''r+r'^2-rr'\lambda')+\frac{1}{r^2}(r\dot r\dot\lambda+\dot r^2+1)=\frac{8\pi G}{c^2}\varrho\quad , \tag{68}
$$

$$
2\dot r'-\dot\lambda r'=0\quad , \tag{69}
$$

$$
-e^{-\lambda}r'^2+2\ddot r r+\dot r^2+1=0\quad , \tag{70}
$$

$$
-\frac{e^{-\lambda}}{r}(2r''-r'\lambda')+\frac{\dot r\dot\lambda}{r}+\ddot\lambda+\frac{\dot\lambda^2}{2}+\frac{2\ddot r}{r}=0\quad , \tag{71}
$$

womit ihre in [6], §103, angegebene Form bestätigt ist.[20] Sie eignen sich dazu, mithilfe direkter Integration, Substitution und einiger Fallunterscheidungen Bewegungsgleichungen für den Gravitationskollaps abzuleiten, was im Folgenden deutlich wird.

[20]**Dieser Abschnitt orientiert sich auch im Weiteren inhaltlich an [6].**

Offenbar ermöglicht Gleichung (69) eine direkte zeitliche Integration. Dafür bietet sich an, sie gemäß

$$2\dot{r}' - \dot{\lambda} r' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\lambda} = \frac{2\dot{r}'}{r'}$$

umzuschreiben, da auf diese Weise die Lösung

$$\lambda = \ln(r'^2) + C$$

sofort eingesehen werden kann. C ist eine Integrationskonstante, die natürlich noch von R abhängen kann, d.h. $C = C(R)$. Exponenzieren führt auf die Gleichung

$$e^{\lambda} = r'^2 e^{C(R)} = \frac{r'^2}{1 + f(R)} \quad , \tag{72}$$

wobei im zweiten Schritt die Definition $e^{C(R)} =: (1 + f(R))^{-1}$ verwendet wurde.
An dieser Stelle wird die Analogie zu der Funktion U in der Robertson-Walker-Metrik (28) bzw. (41) deutlich. Während dort die Lösungsvielfalt durch einen Separationsansatz eingeschränkt wurde, stellt (72) jetzt die allgemeine Lösung dar. Damit wird auch plausibel, dass das Friedmann-Modell ein Spezialfall des LTB-Modells ist.
Als nächster Schritt kann der metrische Koeffizient $e^{-\lambda}$ in (70) durch die gefundene Beziehung (72) ersetzt werden,

$$-\left(\frac{1+f}{r'^2}\right) r'^2 + 2\ddot{r}r + \dot{r}^2 + 1 = -1 - f + 2\ddot{r}r + \dot{r}^2 + 1 = 2\ddot{r}r + \dot{r}^2 - f \quad ,$$

sodass die kompakte Gleichung

$$2\ddot{r}r + \dot{r}^2 - f = 0 \tag{73}$$

resultiert. Sie ist bemerkenswerterweise zur vierten Feldgleichung (71) äquivalent. Um dies zu zeigen, müssen darin alle von λ abhängigen Größen ersetzt werden, was wiederum mithilfe von (72) gelingt. Zunächst lassen sich die folgenden Zusammenhänge herstellen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda}) = \dot{\lambda} e^{\lambda} = \frac{2\dot{r}' r'}{1+f} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\lambda} = \frac{2\dot{r}'}{r'} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\lambda} = \frac{2\ddot{r}'}{r'} - \frac{2\dot{r}'^2}{r'^2} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial R}(e^{\lambda}) = \lambda' e^{\lambda} = \frac{2r'' r'}{1+f} - \frac{f' r'^2}{(1+f)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda' = \frac{2r''}{r'} - \frac{f'}{1+f} \quad .$$

Sie können nun zusammen mit (72) in (71) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} -\frac{e^{-\lambda}}{r}(2r'' - r'\lambda') + \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + \frac{2\ddot{r}}{r} &= -\frac{1+f}{rr'^2}\left(2r'' - 2r'' + \frac{r' f'}{1+f}\right) + \frac{2\dot{r}\dot{r}'}{rr'} + \left(\frac{2\ddot{r}'}{r'} - \frac{2\dot{r}'^2}{r'^2}\right) \\ + \frac{2\dot{r}'^2}{r'^2} + \frac{2\ddot{r}}{r} &= \frac{2\ddot{r}}{r} + \frac{2\ddot{r}'}{r'} + \frac{2\dot{r}\dot{r}'}{rr'} - \frac{f'}{rr'} = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & 2\ddot{r}r' + 2\ddot{r}'r + 2\dot{r}'\dot{r} - f' = 0 \end{aligned}$$

Dies ist nichts anderes als die Ableitung von Gleichung (73) nach R,

$$\frac{\partial}{\partial R}(2\ddot{r}r + \dot{r}^2 - f) = 2\ddot{r}r' + 2\ddot{r}'r + 2\dot{r}'\dot{r} - f' = 0 \quad .$$

Dieses überraschende Ergebnis besagt, dass die Feldgleichungen (70) und (71) den gleichen Informationsgehalt besitzen. Insbesondere vereinfacht es aber auch die weiteren Rechnungen, da ohne zusätzliche Bedingungen mit Gleichung (73) fortgefahren werden kann. Sie ermöglicht nach geschickter Umformung zu

$$2\ddot{r}r + \dot{r}^2 - f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{r}f = \dot{r}(2\ddot{r}r + \dot{r}^2) = 2\dot{r}\ddot{r}r + \dot{r}^3 = \frac{\partial}{\partial t}(r\dot{r}^2)$$

ebenfalls eine zeitliche Integration, die dank der nur von R abhängigen Funktion f schnell zu

$$rf = r\dot{r}^2 - F$$

ausgeführt ist. Dieses Ergebnis mit einer weiteren, zunächst beliebigen Funktion
$F = F(R)$ lässt sich zu

$$\dot{r}^2 = f + \frac{F(R)}{r} \tag{74}$$

umformen. Da die linke Seite dieser Gleichung wegen $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{dt}}$ ausschließlich, die rechte hingegen keine Differentiale enthält, kann sie durch Trennung der Variablen weiter gelöst werden. Es verbleibt folglich das unbestimmte Integral

$$t = \pm \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f + \frac{F}{r}}} \quad , \tag{75}$$

welches infolge des Radizierens in (74) mit zwei Vorzeichen versehen ist.
Nun kommt eine Fallunterscheidung bezüglich der freien Funktion f ins Spiel, für die $f > 0$, $f < 0$ und $f = 0$ gelten kann. Diese drei Fälle sind separat zu betrachten, weil sie auf unterschiedliche Gleichungen für r und t führen. Damit (75) analytisch lösbar wird, muss außerdem eine geeignete Substitution von r vorgenommen werden.
Für $f > 0$ erweisen sich die hyperbolischen Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{76}$$

als geeignet. Unter Verwendung eines Parameters η wird r durch

$$r = \frac{F}{f}\sinh^2\left(\frac{\eta}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\eta} = \frac{F}{f}\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

ausgedrückt. Einsetzen in (75) führt zunächst auf den Ausdruck

$$t = \pm \int \frac{F}{f} \frac{\sinh(\frac{\eta}{2})\cosh(\frac{\eta}{2})}{\sqrt{f}\sqrt{1 + \frac{1}{\sinh^2(\frac{\eta}{2})}}}\,\mathrm{d}\eta \quad ,$$

der glücklicherweise mithilfe der Identität $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$ noch stark vereinfacht und nach Rückbesinnung auf (76) auch direkt gelöst werden kann:

$$t=\pm\int\frac{F}{f}\,\frac{\sinh(\frac{\eta}{2})\,\cosh(\frac{\eta}{2})}{\sqrt{f}\sqrt{\frac{\sinh^2(\frac{\eta}{2})+1}{\sinh^2(\frac{\eta}{2})}}}\,\mathrm{d}\eta=\pm\int\frac{F}{f^{3/2}}\,\frac{\sinh(\frac{\eta}{2})\,\cosh(\frac{\eta}{2})}{\sqrt{\frac{\cosh^2(\frac{\eta}{2})}{\sinh^2(\frac{\eta}{2})}}}\,\mathrm{d}\eta=\pm\int\frac{F}{f^{3/2}}\,\sinh^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\,\mathrm{d}\eta$$

$$=\pm\int\frac{F}{f^{3/2}}\,\frac{1}{4}(e^{\eta}+e^{-\eta}-2)\,\mathrm{d}\eta=\pm\frac{F}{f^{3/2}}\,\frac{1}{4}(e^{\eta}-e^{-\eta}-2\eta)+t_0(R)=\pm\frac{F}{2f^{3/2}}\,(\sinh(\eta)-\eta)+t_0(R)$$

Hierbei entspricht die neue Integrationskonstante $t_0(R)$ derjenigen Zeit, die ein Staubteilchen benötigt, um den (ursprünglichen) Mittelpunkt des kollabierenden Körpers zu erreichen.
Die bisherige Abhandlung war rein mathematisch und 'wusste' nichts vom physikalischen Hintergrund der Rechnungen. Letzterer ermöglicht es nun, eines der beiden Vorzeichen auszuwählen: Da bei einem Kollaps mit zunehmender Zeit t der Wert von r bzw. η abnehmen muss, und die Funktion $(\sinh(\eta)-\eta)$ monoton steigend ist, kommt nur das negative Vorzeichen in Frage. Damit lautet das Endergebnis

$$t_0(R)-t=\frac{F}{2f^{3/2}}\,(\sinh(\eta)-\eta)\quad . \tag{77}$$

Für $f<0$ bietet sich eine Ersetzung von r durch

$$r=\frac{F}{2(-f)}\,(1-\cos\eta)=\frac{F}{(-f)}\,\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\eta}=\frac{F}{(-f)}\,\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\cos\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

an. Bei Verwendung der Identität $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ in der zweiten Umformung ist (75) damit ebenfalls lösbar:

$$t=\pm\int\frac{F}{(-f)}\,\frac{\sin(\frac{\eta}{2})\,\cos(\frac{\eta}{2})}{\sqrt{f-\frac{f}{\sin^2(\frac{\eta}{2})}}}\,\mathrm{d}\eta=\pm\int\frac{F}{(-f)^{3/2}}\,\frac{\sin(\frac{\eta}{2})\,\cos(\frac{\eta}{2})}{\sqrt{\frac{1-\sin^2(\frac{\eta}{2})}{\sin^2(\frac{\eta}{2})}}}\,\mathrm{d}\eta$$

$$=\pm\int\frac{F}{(-f)^{3/2}}\,\frac{\sin(\frac{\eta}{2})\,\cos(\frac{\eta}{2})}{\sqrt{\frac{\cos^2(\frac{\eta}{2})}{\sin^2(\frac{\eta}{2})}}}\,\mathrm{d}\eta=\pm\int\frac{F}{(-f)^{3/2}}\,\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\mathrm{d}\eta=\pm\int\frac{F}{2(-f)^{3/2}}\,(1-\cos(\eta))\,\mathrm{d}\eta$$

$$=\pm\frac{F}{2(-f)^{3/2}}\,(\eta-\sin(\eta))+t_0(R)$$

Mit derselben Argumentation wie oben ist auch hier das negative Vorzeichen als Ausdruck eines Kollapses zu wählen, sodass sich als Endergebnis

$$t_0(R)-t=\frac{F}{2(-f)^{3/2}}\,(\eta-\sin(\eta)) \tag{78}$$

ergibt.
Der letzte Fall, $f = 0$, ist zugleich der einfachste, da er eine direkte Lösung des Integrals (75) ohne Parametrisierung und Substitution ermöglicht. Es verbleibt

$$t = \pm \int \sqrt{\frac{r}{F}}\, \mathrm{d}r = \pm \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{F}}\, r^{3/2} + t_0(R) \quad ,$$

wobei offensichtlich wiederum das untere Vorzeichen zu nehmen ist. So resultiert

$$t_0(R) - t = \frac{2}{3\sqrt{F}}\, r^{3/2} \quad \text{bzw.} \quad r = \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} [t_0(R) - t]^{2/3} \tag{79}$$

als exakte Bewegungsgleichung.
Mit den Gleichungen (77), (78) und (79) ist der Gravitationskollaps staubförmiger Materie allgemein gelöst.
Bislang unbenutzt ist die Feldgleichung (68) für die 00-Komponente des Energie-Impuls-Tensors geblieben. Mit ihr und den erzielten Zwischenergebnissen kann nun noch die Massendichte ϱ konkretisiert werden. Zu diesem Zweck sind zunächst (72) sowie die Ersetzungen von λ durch r am Ende von Seite 28 in (68) einzusetzen:

$$\begin{aligned} -\frac{e^{-\lambda}}{r^2}(2r''r + r'^2 - rr'\lambda') + \frac{1}{r^2}(r\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{r}^2 + 1) &= -\frac{1+f}{r^2 r'^2}\left(2rr'' + r'^2 - 2rr'' + \frac{rr'f'}{1+f}\right) \\ +\frac{1}{r^2}\left(\frac{2r\dot{r}\dot{r}'}{r'} + \dot{r}^2 + 1\right) &= -\frac{1+f}{r^2} - \frac{f'}{rr'} + \frac{2\dot{r}'\dot{r}}{rr'} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

Nun kann für f die umgestellte Gleichung (74),

$$f = \dot{r}^2 - \frac{F}{r} \quad ,$$

sowie für den Zähler des dritten Summanden ihre Ableitung nach R,

$$2\dot{r}'\dot{r} = f' + \frac{F'}{r} - \frac{Fr'}{r^2} \quad ,$$

verwendet werden:

$$\begin{aligned} -\frac{1+f}{r^2} - \frac{f'}{rr'} + \frac{2\dot{r}'\dot{r}}{rr'} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} &= -\frac{\dot{r}^2 - \frac{F}{r}}{r^2} - \frac{f'}{rr'} + \frac{f' + \frac{F'}{r} - \frac{Fr'}{r^2}}{rr'} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} \\ &= -\frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{F}{r^3} - \frac{f'}{rr'} + \frac{f'}{rr'} + \frac{F'}{r'r^2} - \frac{F}{r^3} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} = \frac{F'}{r'r^2} \end{aligned}$$

Damit ist der kompakte Ausdruck

$$\frac{8\pi G}{c^2}\varrho = \frac{F'}{r'r^2} \tag{80}$$

für die Massendichte gefunden. Er spielt auch abseits des hier diskutierten Gravitationskollapses eine wichtige Rolle im LTB-Modell.

Abschließend lohnt es sich, die Metrik (66) noch mithilfe der erhaltenen Gleichungen für $t_0(R) = t_0 = const$ zu diskutieren, da sie in diesem Fall eine intuitiv äußerst plausible Gestalt annimmt. Er enthält die physikalische Bedeutung, dass der (ursprüngliche) Mittelpunkt des kollabierenden Körpers von allen Teilchen zum selben Zeitpunkt erreicht wird. Betrachtet werden soll der einfachste, durch (79) repräsentierte Fall von $f = 0$. Für die auf Dimension einer Länge normierten metrischen Koeffizienten gilt dann (man beachte $t_0' = 0$)

$$r = \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} (t_0 - t)^{2/3}$$

und mit (72)

$$e^{\lambda/2} = r' = \left(\frac{9}{4}\right)^{1/3} \frac{F'}{3F^{2/3}} (t_0 - t)^{2/3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{F'}{2F^{2/3}} (t_0 - t)^{2/3}$$

Auch der Ausdruck (80) für die Massendichte lässt sich näher bestimmen:

$$\frac{8\pi G}{c^2}\varrho = \frac{F'}{r'r^2} = F' \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \frac{2F^{2/3}}{F'} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2/3} \frac{1}{F^{2/3}} (t_0 - t)^{-2} = \left(\frac{4}{9}\right)^{1/3} \left(\frac{4}{9}\right)^{2/3} 3(t_0 - t)^{-2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{8\pi G}{c^2}\varrho = \frac{4}{3(t_0 - t)^2}$$

Die Analyse dieser drei Ergebnisse für den Prozess des Kollapses, d.h. $t \to t_0$, bereitet keinerlei Schwierigkeiten: Sämtliche Abstände, d.h. r und $e^{\lambda/2}$, verschwinden im synchronisierten Bezugssystem mit dergleichen funktionellen Abhängigkeit, während die Massendichte gegen unendlich geht. Dies ist - zumindest qualitativ - ein sehr zufriedenstellendes Ergebnis, betrachtet man etwa den Kollaps eines massereichen Sterns, welcher als Schwarzes Loch endet.

5.3 Aspekte aktueller Forschung

Wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt, gilt die Annahme der Existenz dunkler Energie als wenig dankbarer Weg, um die beschleunigte Expansion des Universums zu erklären. Als Nachweis dieses Phänomens dient die Rotverschiebung des Lichts, das ausgesandt von fernen Galaxien die Erde erreicht; sie ist umso größer, je weiter die entsprechende Quelle der Strahlung von der Erde entfernt ist. Die Rotverschiebung wird gerne mit dem Doppler-Effekt verglichen, obwohl sie strenggenommen - vorausgesetzt die Korrektheit der Modelle der Physiker - nicht durch Bewegung von Körpern gegeneinander im Raum, sondern durch die Ausdehnung des Raumes selbst entsteht. Der Hubble-Parameter H, welcher lange - sowohl auf die Zeit als auch auf das Universum als Ganzes bezogen - als Konstante angesehen wurde, beschreibt die Beschleunigung quantitativ. Ist $A = A(R,t)$ der zusätzlich von der Radialkoordinate R abhängige Skalenfaktor des LTB-Modells, so ist der Hubble-Parameter durch

$$H = \frac{\dot{A}}{A} \tag{81}$$

gegeben.
Um den hergestellten Zusammenhang von Beschleunigung und dunkler Energie genauer zu verstehen, bietet sich eine kurze Rechnung mit Ergebnissen des letzten Abschnitts an. Es ist die Beziehung (73), $f = 2\ddot{r}r + \dot{r}^2$, sowie die nach f' umgestellte Ableitung von (73) nach R,

$$f' = 2\ddot{r}r' + 2\ddot{r}'r + 2\dot{r}'\dot{r} \quad ,$$

in die modifizierte Feldgleichung (68) (siehe S. 31 unten) einzusetzen:

$$\begin{aligned}
-\frac{f}{r^2} - \frac{f'}{rr'} + \frac{2\dot{r}'\dot{r}}{rr'} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} &= -\frac{2\ddot{r}r + \dot{r}^2}{r^2} - \frac{2\ddot{r}r' + 2\ddot{r}'r + 2\dot{r}'\dot{r}}{rr'} + \frac{2\dot{r}'\dot{r}}{rr'} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} \\
&= -\frac{2\ddot{r}}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{2\ddot{r}}{r} - \frac{2\ddot{r}'}{r'} - \frac{2\dot{r}'\dot{r}}{rr'} + \frac{2\dot{r}'\dot{r}}{rr'} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} = -\frac{4\ddot{r}}{r} - \frac{2\ddot{r}'}{r'} \\
\Longrightarrow \qquad -\frac{4\ddot{r}}{r} - \frac{2\ddot{r}'}{r'} &= \frac{8\pi G}{c^2}\varrho
\end{aligned} \tag{82}$$

Diese Beziehung zeigt, dass offenbar eine effektive Beschleunigung (auf der linken Seite von (82)) direkt mit der Massendichte ϱ in Verbindung steht. Nun lohnt es sich, die Feldgleichung (45) mit kosmologischer Konstante heranzuziehen[21]. Mit der Definition $\Lambda =: \frac{\varrho_\Lambda}{3}$, wobei ϱ_Λ als Energiedichte des Vakuums zu interpretieren ist, wird (82) zu

$$\frac{2}{3}\frac{\ddot{r}}{r} + \frac{1}{3}\frac{\ddot{r}'}{r'} = -\frac{4\pi G}{3}(\varrho - 2\varrho_\Lambda) \quad . \tag{83}$$

Diese anschauliche Bewegungsgleichung liefert eine gute Motivation für das Konzept der dunklen Energie: Nur falls $2\varrho_\Lambda > \varrho$ gilt, also die zweifache Vakuumenergiedichte die Massendichte übersteigt, tritt eine positive Beschleunigung und damit eine beschleunigte Expansion des Universums auf. Die dunkle Energie ist demnach nichts anderes als die dem Vakuum innewohnende Energie.
Die letzte Rechnung wurde im LTB-Modell durchgeführt, obwohl die dunkle Energie im Grunde ein Ergebnis des Friedmann-Modells ist. Dies ist deshalb kein Widerspruch, weil letzteres lediglich ein Spezialfall des ersteren ist, der eine isotrope und homogene Massendichte annimmt und daher einen lediglich zeitabhängigen Skalenfaktor liefert.
Die Möglichkeit, die Massendichte im LTB-Modell auch räumlich variieren zu lassen, bietet eine weitere und zumindest für den theoretischen Physiker auch attraktivere Perspektive zur Erklärung der (scheinbaren) Beschleunigung. Experimenteller Ansatzpunkt ist dabei die Erkenntnis, dass das Universum eine Wabenstruktur besitzt, in der sich mit gewöhnlicher, baryonischer und dunkler Materie ausgefüllte Bereiche mit großen Leerräumen (engl. *voids*) abwechseln. Erstere Gegenden wirken gravitativ, d.h. stets anziehend, und somit einer Expansion entgegen. Daraus resultiert, dass ein sich dort befindlicher Beobachter einen kleineren Hubble-Parameter messen sollte als ein solcher, der in der Nähe eines Leerraums ist. Würde sich die Erde tatsächlich in einem Bereich befinden, der einen Übergang der einen Gegend in die andere darstellt, wäre der von den Physikern

[21]**siehe auch [7], Kap. 2.**

gemessene Hubble-Parameter ein - bezogen auf das ganze Universum - überdurchschnittlicher Wert. Es wäre in dem Fall denkbar, dass in den von Materie dominierten Bereichen der Hubble-Parameter sogar negativ ist. Ein gänzlich verschwindender Wert im Bereich einzelner Galaxien würde zudem mit der Beobachtung übereinstimmen, dass dort alle Abstände erhalten bleiben.
In vielen aktuellen Veröffentlichungen wird die Übereinstimmung experimenteller Daten mit dem soeben motivierten, theoretischen Konzept diskutiert.
In [7] wird die Möglichkeit von Inhomogenitäten beim Ursprung des Universums diskutiert. Wegen der Ausführlichkeit ist vor allem die Lektüre von [8] zu empfehlen. Dort wird insbesondere demonstriert, dass sich LTB-Modell und Friedmann-Modell ähnlich erfolgreich an die Daten anpassen lassen. Zudem wird - anschließend an [7] - festgestellt, dass nach aktuellem Erkenntnisstand ein homogener *Big Bang* einem inhomogenen vorzuziehen ist, was nicht zuletzt auch die Isotropie der Mikrowellen-Hintergrundstrahlung nahelegt. Die überwiegend theoretische Abhandlung in [9] untersucht den singulären Charakter des LTB-Modells im Symmetriezentrum ($R = 0$). Es wird vorgeführt, dass alle LTB-Modelle, die eine beschleunigte Expansion des Universums vorhersagen, eine solche Singularität besitzen und daher unphysikalisch sind, solange nicht spezielle Voraussetzungen beachtet werden. Dazu gehöre auch ein spezieller Wert der freien Funktion $f(R)$ in (72), welcher wiederum dem Ausdruck $-kr^2$ der Robertson-Walker-Metrik entsprechen müsse. In [10] wird die Bedeutung der Krümmung, d.h. $f(R) \neq 0$ in (72), näher untersucht. Wichtigstes Ergebnis ist, dass eine Mittelung über das Universum, in dem die Leerräume die mit Materie angefüllten Bereiche dominieren, zu einer negativen Krümmung der Leerräume führt. Dies bedeutet, dass das oftmals favorisierte Friedmann-Modell eines flachen Universums ($k = 0$) nicht das richtige sein kann. Darüber hinaus ist bemerkenswert, dass die Größe des Raumbereichs, über den gemittelt wird, in den dort betrachteten Fällen qualitativ kein anderes Ergebnis für den Skalenfaktor (bzw. den Hubble-Parameter) produziert.
Insgesamt kann festgehalten werden, dass die Frage der Evolution des Universums im Detail bislang ungeklärt ist. Die in allen genannten Veröffentlichungen erwähnte Problematik, dass die Interpretation der experimentellen Daten stets vom zugrunde gelegten Modell abhängt, ist daran nicht unbeteiligt. Aus theoretischer Sicht werden in Zukunft ausführliche numerische Simulationen, sowie die bereits begonnene Entwicklung einer Störungstheorie für das LTB-Modell weiteren Zugewinn an Erkenntnissen liefern.

6 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war nicht, im Bereich der ART neue theoretische Erkenntnisse zu liefern. Vielmehr ging es darum, bereits bekannte, grundlegende Zusammenhänge in einer Ausführlichkeit herzuleiten, die in der gewöhnlichen Literatur nicht gefunden werden kann. Den Rahmen der entsprechenden Rechnungen bot das synchronisierte Bezugssystem. Dieses ist zwar aufgrund der Äquivalenz der Bezugssysteme gegenüber irgendeinem anderen nicht prinzipiell privilegiert, verkürzt jedoch die Rechnungen auf einen angemessenen Umfang. Zusammen mit der Annahme einer homogenen und isotropen Raum-Zeit, welche die Verwendung der Gaußschen Normalkoordinaten ermöglichte, wurden relevante Beziehungen für das Friedmann-Modell, welches auf die einfachsten Weltmodelle führt, abgeleitet. Basis des Friedmann-Modells ist die Robertson-Walker-Metrik, welche direkt über die Einsteinschen Feldgleichungen bestimmt wurde. Anschließend wurden die Friedmann-Gleichungen für einen bestimmten Fall berechnet, wozu neben den Feldgleichungen ein Variationsprinzip benutzt wurde. Da die Friedmann-Gleichungen als bekannt angesehen wurden, konnte gleichzeitig die postulierte Form der für das Variationsprinzip herangezogenen Einstein-Hilbert-Wirkung verifiziert werden.
Einen Bogen zur heutigen Forschung schlug das letzte Kapitel über das Lemaître-Tolman-Bondi-Modell (LTB-Modell). In detaillierter Weise wurden darin - anschaulich bezugnehmend auf einen Gravitationskollapses staubförmiger Materie - aus den Feldgleichungen Eigenschaften des Modells bzw. der ihm entsprechenden Metrik sowie Bewegungsgleichungen in Parameterform hergeleitet. Dabei stellte sich zudem das Friedmann-Modell als Spezialfall des LTB-Modells heraus, in dem der Skalenfaktor nur von der Zeit abhängt. Abschließend wurde ein Weg präsentiert, die beschleunigte Expansion des Universums ohne Rückgriff auf das Konzept der dunklen Energie zu erklären, welches sich aus dem Friedmann-Modell über die kosmologische Konstante ergibt. Den Schlüssel dazu stellt die Eigenschaft des LTB-Modells dar, eine Massendichte bzw. einen Skalenfaktor zu enthalten, der außer von der Zeit auch von der Radialkoordinate abhängt. Im Rahmen dieses Erklärungsansatzes stellt die beschleunigte Expansion eine Täuschung bzw. Fehlinterpretation dar, die auf der Tatsache eines räumlich variierenden Skalenfaktors beruht. Schließlich wurde noch aktuelle Literatur erwähnt, die sich auf letztere Problematik bezieht und den versierten Leser interessieren könnte.
Die vielen Erfolge des einfachen Friedmann-Modells, Phänomene des Kosmos zu beschreiben, dürfen nicht darüber hinwegtäuschen, dass mit der (scheinbar) beschleunigten Expansion des Universums das größte Rätsel der Kosmologie noch ungelöst ist. Sollte es in Zukunft gelingen, auch dieses Problem mithilfe der Allgemeinen Relativitätstheorie konsistent und widerspruchsfrei zu lösen, wäre das wohl ihr bislang größter Triumph.

Literatur

[1] **Allgemeine Relativitätstheorie**.
Thorsten Fließbach; Spektrum Akademischer Verlag; 6. Auflage, 2012

[2] **Lehrbuch der Theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie**.
L.D. Landau, E.M. Lifschitz; Akademie-Verlag Berlin; 5. Auflage, 1971

[3] **Einführung in die Relativitätstheorie**.
Ray d'Inverno; WILEY-VCH Verlag; 2. Auflage, 2009

[4] **Gravitation. Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie**.
U.E. Schröder; Verlag Harri Deutsch; 5. Auflage, 2011

[5] **Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik**.
Wolfgang Nolting; Springer-Verlag; 8. Auflage, 2011

[6] **Lehrbuch der Theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie**.
L.D. Landau, E.M. Lifschitz; Verlag Harri Deutsch; 12. Auflage, 1997

[7] http://arxiv.org/pdf/0709.2044.pdf

[8] http://arxiv.org/pdf/0802.1523.pdf

[9] http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0602476.pdf

[10] http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0605195.pdf

Plagiatserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit

Die Einsteinschen Feldgleichungen im synchronisierten Bezugssystem

selbstständig verfasst habe, dass ich keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, in jedem Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Münster, den 16.09.2015 ________________________