

Von der Schwarzschild-Metrik zum Sternengleichgewicht

From the Schwarzschildsolution
to stellar structure

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

vorgelegt von
Kevin David Joachim Mitas
Geb. am: 17.08.1991 in: Geseke
Matrikelnr.: 380 507

Münster, den 15. September 2015

Themensteller:
Priv.-Doz. Dr. Heitger
Institut für Theoretische Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Vierervektor	3
2.2	Koordinatentransformation	3
2.3	Tensoren und ihre Algebra	4
2.4	Quotientenkriterium	5
2.5	Metrischer Tensor	5
2.6	Tensoranalysis	6
2.7	Äquivalenzprinzip	7
2.8	Christoffel-Symbole	7
2.9	Geodätische Linien	9
2.10	Ricci-Tensor	10
2.11	Einsteinsche Feldgleichungen	11
3	Schwarzschild-Metrik	13
3.1	Äußere Schwarzschild-Lösung	13
3.2	Innere Schwarzschild-Lösung	23
3.3	Grenzwert und Übergang	31
4	Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung	32
4.1	Herleitung aus der SSM	32
4.2	Numerische Lösung eines Neutronensterns	33
4.3	Vergleich der numerischen und analytischen Ergebnisse	39
5	Zusammenfassung	40
6	Anhang	41
	Literatur	43

1 Einleitung

In der Physik wird versucht, in der Natur auftretende Phänomene durch mathematische Gesetze zu beschreiben - sei es ein einfacher zu Boden fallender Apfel, oder die quantenfeldtheoretische Betrachtung der elementaren Wechselwirkungen. Durch die nahezu uneingeschränkte Gültigkeit physikalischer Gesetze ergeben sich viele Teilbereiche innerhalb der Physik. Aufgrund dieser Bandbreite physikalischen Verständnisses sind wir in der Lage, Prozesse sowohl auf der mikroskopischen Skala der Quanten, als auch auf der makroskopischen Skala der Sterne und Galaxien zu beschreiben.

Wird zunächst einen Blick auf das sichtbare Universum geworfen, findet sich eine kaum abzählbare Zahl von Sternen und Planeten vor. Die Bewegungen dieser makroskopischen Objekte werden primär durch eine der bekannten Wechselwirkungen - der Gravitation - beschrieben. Mithilfe der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART), die Anfang des 20. Jahrhunderts als eine Erweiterung der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) von Albert Einstein maßgeblich geprägt wurde, können die auftretenden Dynamiken beschrieben werden. Zu den grundlegenden Postulaten Einsteins zählen dabei, die Begrenzung der maximal erreichbaren Geschwindigkeit durch die Lichtgeschwindigkeit mit $c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und der enge Zusammenhang zwischen Energie und Masse, der sich in der berühmten Formel $E = mc^2$ manifestiert.

Moderne Forschungsergebnisse zeigen, dass sowohl der Raum, als auch die Zeit durch starke Gravitationsfelder beeinflusst und gekrümmt werden. Diese Krümmungen der Raum-Zeit lassen sich durch die ART beschreiben, sodass kosmologische Ereignisse präzise vorhergesagt werden können. Im Jahre 1915 stellte Einstein Feldgleichungen auf, die diese Wechselwirkung zwischen Raum-Zeit und Gravitation beschreiben [Fli12]. Diese sind bekannt unter dem Begriff der einsteinschen Feldgleichungen.

1916 gelang es Karl Schwarzschild erstmals, diese Gleichungen zu lösen, indem er bestimmte Randbedingungen kugelsymmetrischer Objekte annahm. Seine Lösungen sind unter der nach ihm benannten Schwarzschild-Metrik (SSM) bekannt. Die SSM ist bis heute ein sehr wichtiges Werkzeug innerhalb der ART. Mithilfe dieser Metrik lässt sich unter anderem der Zusammenhang zwischen Masse und Radius von Sternen beschreiben. Dabei kann zum Beispiel festgestellt werden, ab welchem Masse-zu-Radius-Verhältnis der Kollaps eines Sterns eintritt. Durch das große Gravitationspotential jenseits dieser Schwelle, fällt der Stern in sich zusammen, sodass schließlich ein Schwarzes Loch entsteht, dessen Gravitation jegliches Licht vollständig absorbiert.

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit werden zunächst die wichtigsten Aspekte der ART in kurzer Form zusammengefasst und erläutert. Im Anschluss wird die SSM - sowohl die innere als auch die äußere Lösung - aus der Feldgleichung hergeleitet. Der Rechenweg orientiert sich an den Lehrbüchern von Eckard Rebhan und Hans Stephani. Aufbauend auf die erhaltenen Ergebnissen wird der Übergang zwischen innerer und äußerer SSM analysiert. Dabei wird ein Grenzwert für das oben beschriebene kritische Verhältnis zwischen Masse und Radius bestimmt. Zum Abschluss der Arbeit werden die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen (TOV-Gleichungen) mithilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung numerisch gelöst, um die gewonnenen analytischen Ergebnisse mit der Numerik zu vergleichen.

Diese Verfassung der Arbeit unterscheidet sich an einigen Stellen von der am 15.09.2015 am Prüfungsamt der Fachbereiche der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät in Münster abgegebenen Version.

2 Theoretische Grundlagen

Zunächst werden die für das Verständnis der ART notwendigen mathematischen Aspekte erläutert, um daraus die theoretischen Überlegungen, die die ART prägen, besser verstehen zu können. Die verwendeten Darstellungen in der Theorie orientieren sich an den Lehrbüchern von Dirac [Dir96], Fliessbach [Fli12], Rebhan [Reb13] und Weinberg [Wei08].

2.1 Vierervektor

Die Raum-Zeit Koordinaten werden durch den Vierervektor innerhalb eines Minkowski-Raumes beschrieben, der bereits aus der SRT bekannt ist. Dabei werden zwei grundlegende Typen von Vierervektoren unterschieden: den kontravarianten Vierervektor x^μ mit hochgestelltem Index μ

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad (1)$$

und den kovarianten Vierervektor x_μ mit tiefgestelltem Index μ

$$x_0 = ct \quad x_1 = -x \quad x_2 = -y \quad x_3 = -z. \quad (2)$$

Der Index μ kann die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen.

2.2 Koordinatentransformation

Die Koordinatentransformation ist für die Betrachtung unterschiedlicher Felder und Bezugssysteme notwendig. Es wird festgelegt, dass die Koordinatentransformation durch

$$\boxed{dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu} \quad (3)$$

gegeben ist. Wird die Transformation (3) auf die Komponenten eines beliebigen Vektors A^μ bzw. A_μ im Bezugssystem S angewandt, so ergibt sich in S'

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (4)$$

und

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu. \quad (5)$$

Weiterhin kann die Koordinatentransformation auch auf Tensoren angewandt werden. Dabei wird ein Tensorfeld mit $T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$ betrachtet, bei dem jedem Raumpunkt ein Tupel aus n Zahlen zugeordnet ist. Unmittelbar daraus wird für die Koordinatentransformation eines Tensors erhalten:

$$T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}. \quad (6)$$

2.3 Tensoren und ihre Algebra

In der ART werden mathematische Berechnungen fast ausschließlich mit Tensoren vollzogen. Mit diesen lassen sich die zu betrachtenden Systeme oder Felder einfacher beschreiben. Tensoren werden anhand ihrer Stufen unterschieden:

- 1) Skalare Felder werden durch Tensoren nullter Stufe beschrieben.
- 2) Der Viervektor in ko- und kontravarianter Form wird durch den Tensor erster Stufe beschrieben.
- 3) Matrizen werden von Tensoren zweiter Stufe beschrieben; innerhalb der ART werden weitestgehend (4×4) -Matrizen mit 16 Komponenten betrachtet.

Weiterhin unterliegen Tensoren einer einfachen Algebra, die an dieser Stelle kurz aufgeführt werden soll:

(i) Addition von Tensoren:

$$T^{\mu\nu} + U^{\mu\nu} = V^{\mu\nu}. \quad (7)$$

(ii) Multiplikation mit Skalaren:

$$A \cdot T^{\mu\nu} \equiv V^{\mu\nu}. \quad (8)$$

(iii) Produkt von Tensoren:

$$A^\sigma{}_\rho \cdot T^{\mu\nu} \equiv V^{\mu\nu\sigma}{}_\rho. \quad (9)$$

(iv) Kontraktion:

$$T^{\mu\nu\rho}{}_{\mu\sigma} \equiv V^{\nu\rho}{}_\sigma \quad (10)$$

$$T^\mu \cdot V_\mu = T \cdot V \quad (11)$$

$$T^\mu{}_\mu = T. \quad (12)$$

(v) Vertauschen von Indizes:

$$T_\mu = g_{\mu\nu} T^\nu \quad (13)$$

$$T^\mu = g^{\mu\nu} T_\nu \quad (14)$$

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} T_{\rho\nu} \quad (15)$$

$$\text{mit } g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (16)$$

(vi) Die Invarianz unter Indexvertauschung von einem Tensor:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (17)$$

2.4 Quotientenkriterium

Ein sehr wichtiges Kriterium für Tensoren ist das Quotientenkriterium. Dieses besagt, dass, falls die Produkte $A_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} b^{\nu_1}$ für jeden beliebigen Vektor b^{ν_1} oder b_{μ_1} Tensoren sind, so ist auch $A_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ ein Tensor.

Der Beweis folgt:

Für den Vektor $A^{\mu\nu} b_\mu$ folgt nach Transformation (3)

$$A'^{\mu\nu} b'_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta} b_\alpha. \quad (18)$$

Für $b_\alpha = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} b'_\mu$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(A'^{\mu\nu} - \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta} \right) b'_\mu &= 0 \quad \forall b'_\mu \\ \Rightarrow A'^{\mu\nu} - \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Damit ist gezeigt, dass $A^{\mu\nu}$ ein Tensor ist.

2.5 Metrischer Tensor

Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ ist ein symmetrischer Tensor mit folgenden Eigenschaften:

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu, \quad (20)$$

$$g^{\nu\mu} g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} g^{\mu\nu} = 4 \quad (21)$$

$$\text{und } g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\lambda\sigma}. \quad (22)$$

Die erste Eigenschaft des metrischen Tensors folgt aus der Definition des Kronecker-Symbols

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (23)$$

Weiterhin werden Abstände innerhalb von Raum und Zeit in der ART analog zur SRT durch

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (24)$$

bestimmt. An dieser Stelle werden zwei Zustände mit dem Abstand ds^2 unterschieden. Für $ds^2 < 0$ wird der Abstand als raumartig, für $ds^2 > 0$ als zeitartig bezeichnet. Zusätzlich besitzt der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ in jedem Punkt der Raum-Zeit drei negative und einen positiven Eigenwert, unabhängig davon, in welchem Koordinatensystem er sich befindet.

2.6 Tensoranalysis

Wird die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x^\nu} = ,_\nu$ eines Skalars betrachtet, so ergibt sich ein kovarianter Vektor. Wird die Ableitung auf einen Vektor bzw. einen Tensor angewandt, entsteht kein Tensor daraus. Die Ableitung des Vektors V'_μ ergibt sich zu:

$$V'_{\mu,\nu} = \frac{\partial V'_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} V_\alpha \right) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} V_\alpha + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} V_{\alpha,\beta}. \quad (25)$$

Anhand des hier aufgeführten Beispiels wird ersichtlich, dass die Ableitung des Vektors V'_μ keinen Tensor liefert. Die zweite Ableitung von x^α im ersten Summanden spricht gegen die Tensoreigenschaft.

Erst durch die kovariante Ableitung, die mit folgender Konvention $;\nu$ eingeführt wird, lässt sich aus dem Vektor V_μ ein Tensor generieren. Ausgehend von einem lokal ebenen Koordinatensystem werden die kovarianten Ableitungen von V^μ und V_μ berechnet. Weiterhin soll gelten, dass

$$\tilde{V}_{\mu;\nu} = \tilde{V}_{\mu,\nu} = \frac{\partial \tilde{V}_\mu}{\partial \varepsilon^\nu} \quad (26)$$

gilt. Für den kovarianten Vektor ergibt sich

$$\begin{aligned} V^\mu{}_{;\nu} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \varepsilon^\alpha} \frac{\partial \varepsilon^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial \tilde{V}^\alpha}{\partial \varepsilon^\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \varepsilon^\alpha} \frac{\partial \tilde{V}^\alpha}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \varepsilon^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\lambda} V^\lambda \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \varepsilon^\alpha} \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\nu} + V^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial \varepsilon^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\lambda} \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\nu} + V^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial \varepsilon^\alpha} \right) + \frac{\partial x^\mu}{\partial \varepsilon^\alpha} \frac{\partial^2 \varepsilon^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Nun wird $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} = \delta^\mu_\lambda$ und $\frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \frac{\partial^2 \varepsilon^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}$ eingesetzt, sodass

$$\boxed{\Rightarrow V^\mu{}_{;\nu} = V^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda.} \quad (28)$$

Die genauere Bedeutung vom $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ wird im späteren Verlauf der Arbeit erläutert. Weiterhin ergibt sich für den kontravarianten Vektor

$$\begin{aligned} V_{\mu;\nu} &= \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varepsilon^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial \tilde{V}_\alpha}{\partial \varepsilon^\beta} = \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{V}_\alpha}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial \varepsilon^\alpha} V_\lambda \right) \\ &= \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \varepsilon^\alpha} \frac{\partial V_\lambda}{\partial x^\nu} + V_\lambda \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial \varepsilon^\alpha} \right) \\ &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial V_\lambda}{\partial x^\nu} + V_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \varepsilon^\alpha} \right) - \frac{\partial x^\lambda}{\partial \varepsilon^\alpha} \frac{\partial^2 \varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\boxed{V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda.} \quad (30)$$

Die kovariante Ableitung unterliegt zudem einer mathematischen Algebra:

1. Die Addition einer Linearkombination soll gleich der Linearkombination der kovarianten Ableitungen sein (Distributivgesetz):

$$(aT^{\mu\nu} + bU^{\mu\nu})_{;\lambda} = aT^{\mu\nu}_{;\lambda} + bU^{\mu\nu}_{;\lambda}. \quad (31)$$

2. Es gilt weiterhin die Produktregel mit

$$(T^\mu U_\nu)_{;\lambda} = T^\mu_{;\lambda} U_\nu + T^\mu U_{\nu;\lambda}. \quad (32)$$

3. Die kovariante Ableitung stimmt mit der gewöhnlichen Definition einer Ableitung für Skalare überein:

$$\varphi_{;\lambda} = \varphi_{,\lambda}. \quad (33)$$

4. Die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet:

$$g_{\mu\nu;\lambda} \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad g^{\mu\nu}_{;\lambda} \equiv 0. \quad (34)$$

2.7 Äquivalenzprinzip

Das Äquivalenzprinzip besagt, dass sämtliche physikalischen Gesetze eines isolierten Inertialsystems - ohne jegliche Wechselwirkungen mit äußeren Systemen - lokal gelten. Dabei lässt sich innerhalb eines isolierten Inertialsystems nicht feststellen, in welchem Schwerfeld der Raum-Zeit es sich befindet.

Erst durch Abwesenheit der Gravitation in einem globalen Minkowski-Raum müssen sich die kovarianten Gleichungen der ART in die der SRT überführen lassen. Aus diesen Überlegungen des Äquivalenzprinzip folgt, dass

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\alpha\beta} d\varepsilon^\alpha d\varepsilon^\beta \quad (35)$$

und

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varepsilon^\beta}{\partial x^\nu} \quad (36)$$

gilt. Dadurch wird gezeigt, dass ein lokales System der Metrik $\eta_{\alpha\beta}$ und ein System der Metrik $g_{\mu\nu}$ einer beliebigen Raum-Zeit Koordinate einen Zusammenhang zueinander haben müssen. Deshalb stellt ein lokal ebenes Koordinatensystem eine sehr gute Approximation eines global ebenen Systems dar, die im Rahmen des Riemannschen Raums gültig ist.

2.8 Christoffel-Symbole

Für ein lokal ebenes Koordinatensystem ergibt sich für die Bewegungsgleichung nach dem Äquivalenzprinzip

$$m_0 \frac{d^2 \varepsilon^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (37)$$

Dabei ist $d\tau = \frac{\sqrt{\eta_{\mu\nu} d\varepsilon^\alpha d\varepsilon^\nu}}{c}$ die Eigenzeit der Ruhemasse m_0 . Nun wird über eine beliebige Koordinate x^μ transformiert. Mit der Transformation

$$\frac{d\varepsilon^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial\varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (38)$$

nach Gleichung (3) ergibt sich für die obige Bewegungsgleichung

$$m_0 \frac{d^2\varepsilon^\alpha}{d\tau^2} = m_0 \left(\frac{\partial^2\varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\partial\varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \right) = 0. \quad (39)$$

Daraufhin wird die Gleichung mit $\frac{\partial x^\lambda}{\partial\varepsilon^\alpha}$ und dem Kronecker-Symbol multipliziert, sodass

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial\varepsilon^\alpha} \frac{\partial\varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} = \delta^\lambda_\mu \quad (40)$$

ergibt und sich daraus

$$\boxed{\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0} \quad (41)$$

erschließt. Dies ist die sogenannte Geodätengleichung, die sich mit der Definition

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial^2\varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \cdot \frac{\partial x^\lambda}{\partial\varepsilon^\alpha} \quad (42)$$

ergibt. Γ wird als Christoffel-Symbol bezeichnet. Aus Gleichung (42) lässt sich unmittelbar die Invarianz von Γ unter Vertauschung der Indizes μ und ν ablesen:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (43)$$

Es handelt sich folglich um einen symmetrischen Tensor. Ausgehend von der Ableitung des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ nach einer beliebigen Komponente λ , lässt sich noch ein Zusammenhang zwischen Christoffel-Symbol und metrischen Tensor herstellen. Zunächst gilt

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2\varepsilon^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial\varepsilon^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2\varepsilon^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right). \quad (44)$$

Wird die Relation aus Gleichung (42) umgeformt zu

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\delta \frac{\partial\varepsilon^\alpha}{\partial x^\delta} = \frac{\partial^2\varepsilon^\sigma}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial x^\delta}{\partial\varepsilon^\sigma} \frac{\partial\varepsilon^\alpha}{\partial x^\delta} = \frac{\partial^2\varepsilon^\sigma}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \delta_\sigma^\alpha \quad (45)$$

um und setzt diese in Gleichung (44) ein, vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \left(\Gamma_{\lambda\mu}^{\delta} \frac{\partial \varepsilon^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial \varepsilon^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\delta} \frac{\partial \varepsilon^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \varepsilon^{\beta}}{\partial x^{\delta}} \right) = \Gamma_{\lambda\mu}^{\delta} g_{\delta\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\delta} g_{\mu\delta}. \quad (46)$$

Dabei wurde für das Kronecker-Symbol $\alpha = \sigma$ gesetzt, damit dieses zu eins wird. Nach Addition von $g_{\lambda\nu,\mu}$ und Subtraktion von $g_{\mu\lambda,\nu}$ ergibt sich

$$g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\delta} g_{\delta\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\delta} g_{\mu\delta} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\delta} g_{\delta\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\delta} g_{\lambda\delta} - \Gamma_{\nu\mu}^{\delta} g_{\delta\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\delta} g_{\mu\delta}. \quad (47)$$

Es lassen sich einige Summanden wegkürzen, woraus

$$g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\delta} g_{\delta\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\delta} g_{\delta\nu} = 2\Gamma_{\lambda\mu}^{\delta} g_{\delta\nu} \quad (48)$$

folgt. Durch Multiplikation mit $g^{\nu\delta}$ und Umstellen der Gleichung findet sich der Ausdruck:

$$\boxed{\Gamma_{\lambda\nu}^{\delta} = \frac{1}{2} g^{\nu\delta} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu})}. \quad (49)$$

2.9 Geodätische Linien

Aus der euklidischen Geometrie ist bekannt, dass der kürzeste Abstand zweier Punkte durch eine die beiden Punkte verbindende Gerade gegeben ist. Innerhalb der ART wird der kürzeste Abstand zweier Punkte in Raum-Zeit-Koordinaten nicht durch eine Gerade, sondern durch eine im Allgemeinen gekrümmte Verbindungslinie beschrieben - die sogenannte Geodäten-Linie. Es werden drei Arten von Geodäten-Linien unterschieden:

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = \begin{cases} > 0 & \text{zeitartige Geodäte} \\ = 0 & \text{Null-Geodäte} \\ < 0 & \text{raumartige Geodäte.} \end{cases} \quad (50)$$

Gegeben sei nun eine Kurve mit festen Endpunkten P_1 und P_2 in der Parameterdarstellung $x(p)$, sodass gilt $x(p_1) = P_1$ und $x(p_2) = P_2$. Durch diesen Ansatz lässt sich die Geodäten-Linie in einem mathematischen Zusammenhang formulieren, infolgedessen sich folgendes Integral ergibt:

$$\delta \int_{p_1}^{p_2} ds = \delta \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\pm g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu}(p) \dot{x}^{\nu}(p)} dp \quad \text{mit} \quad \delta x^{\mu}(p_1) = \delta x^{\mu}(p_2) = 0. \quad (51)$$

Dadurch ergibt sich ein hamiltonisches Variations-Problem mit der Lagrange-Funktion

$$L = \sqrt{\pm g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}}. \quad (52)$$

Das Lösen der Euler-Lagrange-Gleichung führt zu

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial F(L)}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial F(L)}{\partial x^\alpha} = \pm \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu}{L} \right) - \frac{1}{2} \frac{g_{\mu\nu, \alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{L} \right] \\
 &= \pm \frac{1}{L} \left[g_{\alpha\nu, \mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu - g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu \frac{1}{L} \frac{dL}{dp} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right].
 \end{aligned} \tag{53}$$

Eine Bogenlänge s , für die $p = \frac{s}{\alpha}$ gelten soll, wird eingeführt. Dabei soll α konstant bleiben. Daraus erschließt sich, dass $ds = L dp$ und $\alpha = \frac{ds}{dp} = L$ gilt, wodurch $L = \text{const.}$ wird. Durch Multiplikation mit $g^{\sigma\alpha}$ und Benutzung von $g_{\alpha\nu, \mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu, \nu} + g_{\alpha\nu, \mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)$ sowie Gleichung (49), vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dp^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu dx^\nu}{dp dp} = 0. \tag{54}$$

Gleichung (54) ist die sogenannte Geodätengleichung.

Mit ihr lässt sich die Trajektorie von massebehafteten Teilchen beschreiben. Dabei sollen die Teilchen nur eine geringe Krümmung der Raum-Zeit-Koordinaten erfahren, solange sie nicht durch Wechselwirkungen mit äußeren Kräften beeinflusst werden. Die Teilchen besitzen den Impuls p auf der Bahnkurve.

2.10 Ricci-Tensor

Um die Unvertauschbarkeit von kovarianten Ableitungen zu zeigen, wird ein Vektorfeld V^κ zweimal differenziert:

$$\begin{aligned}
 V_{;\mu;\nu}^\kappa &= \left(V_{;\mu}^\kappa \right)_{;\nu} = V_{;\mu;\nu}^\kappa + \Gamma_{\nu\rho}^\kappa V_{;\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho V_{;\rho}^\kappa \\
 &= (V_{;\mu}^\kappa + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa V^\lambda)_{;\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\kappa (V_{;\mu}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho (V_{;\rho}^\kappa + \Gamma_{\rho\lambda}^\kappa V^\lambda) \\
 &= V_{;\mu;\nu}^\kappa + \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\kappa V^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa V_{;\nu}^\lambda + \Gamma_{\nu\rho}^\kappa V_{;\mu}^\rho + \Gamma_{\nu\rho}^\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\rho V_{;\rho}^\kappa - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\kappa V^\lambda.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Anschließend wird die Differenz von $V_{;\mu;\nu}^\kappa$ und $V_{;\nu;\mu}^\kappa$ gebildet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 V_{;\mu;\nu}^\kappa - V_{;\nu;\mu}^\kappa &= V_{;\mu;\nu}^\kappa + \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\kappa V^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa V_{;\nu}^\lambda + \Gamma_{\nu\rho}^\kappa V_{;\mu}^\rho + \Gamma_{\nu\rho}^\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\rho V_{;\rho}^\kappa - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\kappa V^\lambda \\
 &\quad - V_{;\nu;\mu}^\kappa - \Gamma_{\nu\lambda,\mu}^\kappa V^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa V_{;\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\rho}^\kappa V_{;\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\kappa \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\rho V_{;\rho}^\kappa + \Gamma_{\nu\mu}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\kappa V^\lambda \\
 &= \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\kappa V^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda,\mu}^\kappa V^\lambda + \Gamma_{\nu\rho}^\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda - \Gamma_{\mu\rho}^\kappa \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda \\
 &= R_{\lambda\mu\nu}^\kappa V^\lambda
 \end{aligned} \tag{56}$$

mit

$$\boxed{R_{\lambda\mu\nu}^\kappa = \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\kappa - \Gamma_{\nu\lambda,\mu}^\kappa + \Gamma_{\nu\rho}^\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\kappa \Gamma_{\nu\lambda}^\rho}. \tag{57}$$

Das Ergebnis zeigt, dass die kovarianten Ableitungen nicht vertauschen. Zudem ist der gefundene Tensor aus (57) der Riemannsche Krümmungstensor. Die Darstellung lässt sich mithilfe von (49) umschreiben zu

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\kappa\mu,\lambda,\nu} + g_{\lambda\nu,\kappa,\mu} - g_{\lambda\mu,\kappa,\nu} - g_{\kappa\nu,\lambda,\mu}) + g_{\rho\sigma}(\Gamma_{\kappa\mu}^{\rho}\Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa\nu}^{\rho}\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma}). \quad (58)$$

Daraus lassen sich Symmetrie-Eigenschaften des Krümmungstensors ableiten. Es gelten die folgenden Identitäten:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}, \quad (59)$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu} = R_{\lambda\kappa\nu\mu} \quad (60)$$

$$\text{und } R_{\kappa\lambda\mu\nu} + R_{\kappa\mu\nu\lambda} + R_{\kappa\nu\mu\lambda} = 0. \quad (61)$$

Durch Verjüngung von (57) mit dem metrischen Tensor $g^{\sigma\kappa}$ folgt unmittelbar

$$R_{\mu\kappa\nu}^{\kappa} = g^{\sigma\kappa}R_{\sigma\mu\kappa\nu} = R_{\mu\nu}. \quad (62)$$

$R_{\mu\nu}$ ist dabei der nach G. Ricci-Curbastro benannte Ricci-Tensor. Es kann abgelesen werden, dass der Ricci-Tensor folgende Symmetrie-Eigenschaft besitzt:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (63)$$

Durch Heben und Senken der Indizes beim Ricci-Tensor ergibt sich

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} \equiv R. \quad (64)$$

Es gilt für die Bianchi-Identitäten:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu;\alpha} + R_{\kappa\lambda\alpha\mu;\nu} + R_{\kappa\lambda\nu\alpha;\mu} \equiv 0. \quad (65)$$

Die Bianchi-Identität wird ohne Beweis eingeführt. Daraus ergibt sich weiterhin, dass

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\mu} \equiv 0 \quad (66)$$

gelten muss.

2.11 Einsteinsche Feldgleichungen

Einstein hat durch Überlegungen bezüglich des Zusammenhangs zwischen Raum-Zeit und Gravitationsfeldern elementare Gleichungen für die ART aufgestellt. Hierbei werden zwei grundlegende Gleichungen unterschieden. Die ersten Gleichungen sind die Feldgleichungen unter Berücksichtigung der Materie:

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R &= -\frac{8\pi G}{c^2}M^{\mu\nu} \\ \text{und } R^{\mu\nu} &= -\frac{8\pi G}{c^2}\left(M^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}M\right). \end{aligned} \quad (67)$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, G die Gravitationskonstante, R der Krümmungstensor, $R^{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor, $g^{\mu\nu}$ der metrische Tensor und M der Materietensor mit

$$M^{\mu\nu} := \frac{1}{c^2} T^{\mu\nu} = M^{\nu\mu}. \quad (68)$$

Die weiteren Gleichungen, auch bekannt als Vakuum-Feldgleichungen, werden im Vakuum betrachtet. Es soll gelten, dass der Materietensor verschwindet, sodass:

$$\boxed{\begin{array}{l} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0 \\ \text{und } R^{\mu\nu} = 0. \end{array}} \quad (69)$$

Die Gleichungen (67) und (69) werden als einsteinsche Feldgleichungen bezeichnet.

3 Schwarzschild-Metrik

Die einsteinschen Feldgleichungen (67) und (69) sind nichtlineare Gleichungen, sodass diese nicht ohne Weiteres analytisch lösbar sind. Mithilfe einer einfachen Symmetrie-Betrachtung ist es allerdings möglich, einen Lösungsansatz zu finden. Ausgegangen wird von einem räumlich kugelsymmetrischen Körper mit einem entsprechenden Gravitationsfeld für einen kugelförmigen Himmelskörper. Damit lässt sich eine Metrik mit räumlichen Kugelkoordinaten aufstellen. Zunächst wird eine Feldgleichung aufgestellt, die den kugelsymmetrischen Ansatz mit unbestimmten Variablen erfüllt. Anschließend wird daraus die äußere Lösung und weitergehend die innere Lösung der SSM hergeleitet. Im letzten Schritt wird der Übergang von der äußeren zur inneren Lösung analysiert.

3.1 Äußere Schwarzschild-Lösung

Unter Annahme eines kugelsymmetrischen Ansatzes lässt sich das Linienelement aufgrund der bekannten Eigenschaften einer Kugelsymmetrie herleiten. Mit der Zeitkoordinate T , der Radialkomponente r , die zur Beschreibung der äußeren Kugeloberfläche konstant gehalten wird, und den invarianten Winkelkomponenten ϑ und φ erschließt sich das Linienelement zu:

$$ds^2 = A^2 dT^2 + B dT dr - C^2 dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (70)$$

Dabei müssen die unbekanntes A, B, C bestimmt werden. Weiterhin wird angenommen, dass betreffende Koeffizienten winkelunabhängig sind und damit räumlich nur von r abhängen.

Es wird eine zunächst unbestimmte Funktion $\nu = \nu(r, t)$ definiert. Dazu wird weiterhin

$$A dT + \frac{B}{2A} dr =: e^{\nu/2} c dt \quad (71)$$

definiert. Anschließend wird Gleichung (71) quadriert zu:

$$A^2 dT^2 + B dT dr = e^{\nu} (dct)^2 - \frac{B^2}{4A^2} dr^2. \quad (72)$$

Diesen Ausdruck aus Gleichung (72) wird in Gleichung (70) eingesetzt, sodass sich ergibt:

$$ds^2 = e^{\nu} (dct)^2 - \frac{B^2}{4A^2} dr^2 - C^2 dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (73)$$

Zusätzlich wird eine Funktion $\lambda = \lambda(r, t)$ mit

$$C^2 + \frac{B^2}{4A^2} =: e^{\lambda(r,t)} \quad (74)$$

definiert und diese wird ebenfalls in Gleichung (70) eingesetzt. Schlussendlich wird die Standardform des Linienelements für eine räumliche Kugelsymmetrie erhalten:

$$\boxed{ds^2 = e^{\nu(r,t)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)}. \quad (75)$$

Unmittelbar daraus findet sich die Oberfläche einer Kugel für konstanten Radius r mit $ds^2 = 4\pi r^2$.

Aus der Metrik (75) sollen die Funktionen $\nu(r, t)$ und $\lambda(r, t)$ bestimmt werden. Dabei wird sich der Euler-Lagrange-Gleichung, um die Christoffel-Symbole zu berechnen, bedient. Anschließend kann diese in den Krümmungstensor (57) eingesetzt werden, um eine der einsteinschen Feldgleichung zu lösen. Zunächst wird festgelegt, dass $F = \frac{L^2}{2}$ ist, mit $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$ und $x^3 = \varphi$. Dadurch ergibt sich aus dem Linienelement

$$F = \frac{1}{2} \left[e^{\nu(r,t)} c^2 \dot{t}^2 - e^{\lambda(r,t)} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \right]. \quad (76)$$

Es werden die Euler-Lagrange-Gleichung für $\mu = 0, 1, 2, 3$ bestimmt:

1. Für $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial F}{\partial ct} \right) - \frac{\partial F}{\partial ct^2} = \frac{d}{dp} (e^\nu ct) - \frac{1}{2} e^\nu c^2 \dot{t}^2 \frac{\partial \nu}{\partial ct} + \frac{1}{2} e^{\lambda} \dot{r}^2 \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \\ &= e^\nu (c\ddot{t} + \frac{\partial \nu}{\partial ct} c^2 \dot{t}^2 + \frac{\partial \nu}{\partial r} ct\dot{r}) - \frac{1}{2} e^\nu c^2 \dot{t}^2 \frac{\partial \nu}{\partial ct} + \frac{1}{2} e^{\lambda} \dot{r}^2 \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \\ &= c\ddot{t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial ct} c^2 \dot{t}^2 + \frac{\partial \nu}{\partial r} ct\dot{r} + \frac{1}{2} e^{(\lambda-\nu)} \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \dot{r}^2. \end{aligned} \quad (77)$$

2. Für $\mu = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial F}{\partial r} = -\frac{d}{dp} e^{\lambda(r,t)} \dot{r} - \frac{\partial F}{\partial r} \\ &= -\ddot{r} e^\lambda - \frac{\partial \lambda}{\partial ct} e^\lambda ct\dot{r} - e^\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial r} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} e^\nu \frac{\partial \nu}{\partial r} c^2 \dot{t}^2 + r\dot{\vartheta}^2 + r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \\ &= \ddot{r} + \frac{1}{2} e^{(\nu-\lambda)} \frac{\partial \nu}{\partial r} c^2 \dot{t}^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial ct} ct\dot{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \dot{r}^2 - r e^{-\lambda} \dot{\vartheta}^2 - r e^{-\lambda} \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (78)$$

3. Für $\mu = 2$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \vartheta} = r^2 \ddot{\vartheta} + 2r\dot{r}\dot{\vartheta} - r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 \\ &= \ddot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (79)$$

4. Für $\mu = 3$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \varphi} = r^2 \ddot{\varphi} \sin^2 \vartheta + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} r^2 \\ &= \ddot{\varphi} \sin^2 \vartheta + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\varphi} + 2 \cot \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (80)$$

Mithilfe von Gleichung (54) können die Christoffel-Symbole direkt abgelesen werden:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial ct}, & \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} e^{\lambda-\nu} \frac{\partial \lambda}{\partial ct}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \nu}{\partial r}, & \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial ct}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, & \Gamma_{33}^1 &= -r e^{-\lambda} \sin^2 \vartheta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \vartheta, \\ \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= 0 \quad \text{sonst.}\end{aligned}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ entsteht in gemischten Termen wie zum Beispiel Γ_{10}^0 , da diese auf Summen der Form $(\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^0)ct\dot{r}$ und der Symmetrie-Eigenschaft der Christoffel-Symbole (vgl. Gleichung (54)) zurückzuführen sind.

Jetzt können die Christoffel-Symbole in den Krümmungstensor (57) eingesetzt werden. Für das Element R_{00} ergibt sich:

$$R_{00} = R_{0\sigma 0}^\sigma = \Gamma_{0\sigma,0}^\sigma - \Gamma_{00,\sigma}^\sigma + \Gamma_{0\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\sigma - \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \quad (81)$$

Im weiteren muss nun über sämtliche ρ und σ summiert werden.

Zuerst werden die Ableitungen des Elementes betrachtet:

$$\Gamma_{0\sigma,0}^\sigma - \Gamma_{00,\sigma}^\sigma = \Gamma_{00,0}^0 - \Gamma_{00,0}^0 + \Gamma_{01,0}^1 - \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{02,0}^2 - \Gamma_{00,2}^2 + \Gamma_{03,0}^3 - \Gamma_{00,3}^3. \quad (82)$$

Da

$$\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{00}^2 = \Gamma_{00}^3 = 0, \quad (83)$$

ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial (ct)^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial (ct)^2} - \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \left(\left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} \right). \quad (84)$$

An dieser Stelle ist zu beachten, dass die Produktregel angewandt wurde, da die Funktionen ν und λ implizit von r und t abhängen. Nun werden die übrigen Terme betrachtet: Für $\rho = 0$ folgt, dass die Christoffel-Symbole Γ_{02}^2 , Γ_{03}^3 , Γ_{00}^2 , Γ_{00}^3 verschwinden, sodass nur die Terme

$$\Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \frac{\partial \nu}{\partial ct} \quad (85)$$

übrig bleiben. Weiterhin folgt für $\rho = 1$, dass die Terme mit Γ_{02}^1 und Γ_{03}^1 null ergeben. Dadurch ergibt sich der Ausdruck:

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial ct} \right)^2 - \frac{1}{4} e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{1}{2r} e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{1}{2r} e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \nu}{\partial r} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial ct} \right)^2 - \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \nu}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{2}{r} \right).\end{aligned} \quad (86)$$

Sämtliche Terme mit den Christoffel-Symbolen $\Gamma_{0\sigma}^2$ und $\Gamma_{0\sigma}^3$ werden für $\rho = 2$ und $\rho = 3$ null. Dadurch folgen keine weiteren Terme, die zum Element R_{00} beitragen und es findet sich

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial (ct)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial ct} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \frac{\partial \nu}{\partial ct} \\
 &\quad - \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \left(\left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \nu}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial (ct)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial ct} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \frac{\partial \nu}{\partial ct} - e^{\nu-\lambda} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right).
 \end{aligned} \tag{87}$$

Aufgrund der Symmetrie-Eigenschaft des Krümmungstensors gilt $R_{01} = R_{10}$ und damit:

$$R_{01} = R_{10} = R_{1\sigma 0}^\sigma = \Gamma_{1\sigma,0}^\sigma - \Gamma_{10,\sigma}^\sigma + \Gamma_{1\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\sigma - \Gamma_{10}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \tag{88}$$

Alle Ableitungen im ersten Teil liefern keinen Beitrag:

$$\Gamma_{10,0}^0 - \Gamma_{10,0}^0 + \Gamma_{11,0}^1 - \Gamma_{10,1}^1 + \Gamma_{12,0}^2 - \Gamma_{10,2}^2 + \Gamma_{13,0}^3 - \Gamma_{10,3}^3 = 0. \tag{89}$$

Werden die Terme für $\rho = 0$, betrachtet, so erschließt sich mit

$$\Gamma_{12}^0 = \Gamma_{10}^2 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{10}^3 = 0, \tag{90}$$

dass Terme, die nicht null ergeben, sich wie folgt aufheben:

$$\Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{4} e^{(\lambda-\nu+\nu-\lambda)} \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial \lambda}{\partial ct} - \frac{1}{4} \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial \lambda}{\partial ct} = 0. \tag{91}$$

Für $\rho = 1$ ergibt sich

$$\Gamma_{10}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{13}^3 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial ct}. \tag{92}$$

Für $\rho = 2$ und $\rho = 3$ folgen keine Beiträge. Damit ergibt sich für das Element R_{10} insgesamt

$$R_{10} = R_{01} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial ct}. \tag{93}$$

Zunächst werden alle Diagonalelemente des Krümmungstensors bestimmt. Es ergibt sich für die erste Komponente R_{11} :

$$R_{11} = R_{1\sigma 1}^\sigma = \Gamma_{1\sigma,1}^\sigma - \Gamma_{11,\sigma}^\sigma + \Gamma_{1\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 1}^\sigma - \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \tag{94}$$

Die Schritte werden analog zu Gleichung (82) bis (86) durchgeführt. Für den ersten Teil ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{11,0}^0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(e^{(\lambda-\nu)} \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} - \frac{1}{2} e^{(\lambda-\nu)} \left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial ct} \right)^2 - \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \frac{\partial \nu}{\partial ct} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial (ct)^2} \right). \end{aligned} \quad (95)$$

Weitere Terme für $\rho = 0$ ergeben:

$$\Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} e^{(\lambda-\nu)} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial ct}. \quad (96)$$

Für $\rho = 1$ erschließt sich

$$\Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{4} e^{(\lambda-\nu)} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial ct} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r}. \quad (97)$$

Die Terme für $\rho = 2$ und $\rho = 3$ liefern erneut keinen Beitrag. Es wird für das Element R_{11}

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{4} e^{(\lambda-\nu)} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial ct} \right)^2 - \frac{1}{4} e^{(\lambda-\nu)} \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \frac{\partial \nu}{\partial ct} - \frac{1}{2} e^{(\lambda-\nu)} \left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial ct} \right)^2 - \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \frac{\partial \nu}{\partial ct} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial (ct)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} - e^{(\lambda-\nu)} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial (ct)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial ct} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial ct} \frac{\partial \nu}{\partial ct} \right) \end{aligned} \quad (98)$$

gefunden. Anschließend folgt für R_{22} :

$$R_{22} = R_{2\sigma 2} = \Gamma_{2\sigma,2}^\sigma - \Gamma_{22,\sigma}^\sigma + \Gamma_{2\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 2}^\sigma - \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \quad (99)$$

Der erste Teil, der sich durch die Ableitungen ergibt, liefert:

$$-\Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{23,2}^3 = -\frac{\partial}{\partial r} (-re^{-\lambda}) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cot \vartheta = e^{-\lambda} - re^{-\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}. \quad (100)$$

Für $\rho = 0$ ergibt sich nach Summation über σ immer der Wert null.

Für $\rho = 1$ ergibt sich

$$-\Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 = \frac{r}{2} e^{-\lambda} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{r}{2} e^{-\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + re^{-\lambda} \frac{1}{r}. \quad (101)$$

Durch weiteres Umformen wird aus Gleichung (101)

$$\frac{r}{2}e^{-\lambda}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{r}{2}e^{-\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r} + re^{-\lambda}\frac{1}{r} = e^{-\lambda}\left(\frac{r}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{r}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial r} + 1\right) \quad (102)$$

erhalten. Für $\rho = 2$ findet sich

$$\Gamma_{21}^2\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{r}re^{-\lambda} = -e^{-\lambda} \quad (103)$$

und für $\rho = 3$ ergibt sich

$$\Gamma_{23}^3\Gamma_{32}^3 = \cot^2\vartheta. \quad (104)$$

Werden alle Terme zusammengeführt, erschließt sich für das Element R_{22}

$$\begin{aligned} R_{22} &= e^{-\lambda} - re^{-\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} + \cot^2\vartheta + e^{-\lambda}\left(\frac{r}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{r}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial r} + 1\right) - e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda}\left(\frac{r}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r} - \frac{r}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial r} + 1\right) - 1. \end{aligned} \quad (105)$$

Es wurde folgende Identität benutzt:

$$-\frac{1}{\sin^2} + \cot^2 = \frac{-1 + \cos^2}{\sin^2} = \frac{-\sin^2 - \cos^2 + \cos^2}{\sin^2} = -1. \quad (106)$$

Anschließend wird das Element R_{33} berechnet. Dieser ist das letzte Element der Diagonale und es folgt:

$$R_{33} = R_{3\sigma 3}^\sigma = \Gamma_{3\sigma,3}^\sigma - \Gamma_{33,\sigma}^\sigma + \Gamma_{3\sigma}^\rho\Gamma_{\rho 3}^\sigma - \Gamma_{33}^\rho\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \quad (107)$$

Der erste Teil, der wieder die Summanden der Ableitungen beinhaltet, ergibt

$$\begin{aligned} -\Gamma_{33,1}^1 - \Gamma_{33,2}^2 &= -\frac{\partial}{\partial r}(-re^{-\lambda}\sin^2\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}(-\sin\vartheta\cos\vartheta) \\ &= e^{-\lambda}\sin^2\vartheta - re^{-\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta. \end{aligned} \quad (108)$$

Die Summation über σ für $\rho = 0$ und $\rho = 2$ ergeben den Wert null.

Für $\rho = 1$ erschließt sich

$$\begin{aligned} -\Gamma_{33}^1\Gamma_{10}^0 - \Gamma_{33}^1\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{33}^1\Gamma_{13}^3 &= \frac{r}{2}e^{-\lambda}\sin^2\vartheta\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{r}{2}e^{-\lambda}\sin^2\vartheta\frac{\partial\lambda}{\partial r} + re^{-\lambda}\sin^2\vartheta\frac{1}{r} \\ &= e^{-\lambda}\sin^2\vartheta\left(\frac{r}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{r}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial r} + 1\right). \end{aligned} \quad (109)$$

Für den letzten Wert $\rho = 3$ erschließt sich

$$\Gamma_{31}^3\Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3\Gamma_{33}^2 = e^{-\lambda}\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta. \quad (110)$$

Alle Termen werden zusammengeführt zu

$$\begin{aligned}
 R_{33} &= e^{-\lambda} \sin^2 \vartheta \left(\frac{r}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{r}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + 1 \right) + e^{-\lambda} \sin^2 \vartheta \\
 &\quad - r e^{-\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta + e^{-\lambda} \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta \\
 &= \sin^2 \vartheta \left(e^{-\lambda} \left(\frac{r}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{r}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + 1 \right) - 1 \right) \\
 &= R_{22} \sin^2 \vartheta .
 \end{aligned} \tag{111}$$

Da alle Elemente mit gleichen Indizes bestimmt worden sind, werden nun die nichtdiagonalen Elemente berechnet:

$$R_{20} = R_{02} = R_{0\sigma 2} = \Gamma_{0\sigma,2}^\sigma - \Gamma_{02,\sigma}^\sigma + \Gamma_{0\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 2}^\sigma - \Gamma_{02}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma = 0, \tag{112}$$

$$R_{30} = R_{03} = R_{0\sigma 3} = \Gamma_{0\sigma,3}^\sigma - \Gamma_{03,\sigma}^\sigma + \Gamma_{0\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 3}^\sigma - \Gamma_{03}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma = 0, \tag{113}$$

$$R_{32} = R_{23} = R_{2\sigma 3} = \Gamma_{2\sigma,3}^\sigma - \Gamma_{23,\sigma}^\sigma + \Gamma_{2\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 3}^\sigma - \Gamma_{23}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma = 0, \tag{114}$$

$$R_{21} = R_{12} = R_{1\sigma 2} = \Gamma_{1\sigma,2}^\sigma - \Gamma_{12,\sigma}^\sigma + \Gamma_{1\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 2}^\sigma - \Gamma_{12}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma = 0 \tag{115}$$

$$\text{und } R_{31} = R_{13} = R_{1\sigma 3} = \Gamma_{1\sigma,3}^\sigma - \Gamma_{13,\sigma}^\sigma + \Gamma_{1\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 3}^\sigma - \Gamma_{13}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma = 0. \tag{116}$$

Dabei sind die einzigen Terme der aufgelisteten nichtdiagonalen Elementen, die einen von null verschiedenen Wert liefern: $-\Gamma_{12}^2 \Gamma_{23}^3 = -\frac{1}{r} \cot \vartheta$ und $\Gamma_{13}^3 \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{r} \cot \vartheta$. Jedoch heben sich gerade diese Beiträge wieder in Summe zu null auf. Dadurch sind nur die Komponenten R_{00} , R_{11} , R_{22} , R_{33} und R_{01} bzw. R_{10} für den Krümmungstensor relevant und für weitere Rechnungen von Bedeutung.

Mithilfe der Vakuum-Feldgleichung (69) können die Funktionen $\lambda(r, t)$ und $\nu(r, t)$ bestimmt werden. Zunächst kann gefordert werden, dass alle Elemente des Krümmungstensors verschwinden. Es ergibt sich

$$R_{00} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{10} = 0. \tag{117}$$

Aus $R_{10} = 0$ folgt:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial ct} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(r, t) = \lambda(r) \tag{118}$$

Aus Gleichung (87) ergibt sich damit

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d^2 \nu}{dr^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr}, \tag{119}$$

aus Gleichung (98)

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d^2 \nu}{dr^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \tag{120}$$

und aus Gleichung (105) und (111) erschließt sich

$$e^{-\lambda} \left(\frac{r}{2} \frac{d}{dr} (\nu - \lambda) + 1 \right) - 1 = 0. \quad (121)$$

Gleichung (121) wird umgestellt, sodass

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{d\lambda}{dr} + \frac{2}{r}(e^\lambda - 1). \quad (122)$$

Hieraus wird ersichtlich, dass die Funktion $\nu(r, t)$ gemäß eines Separationsansatzes $\nu(r, t) = \nu(r) + g(t)$ in zwei Summanden aufgeteilt werden kann. Diesen Ansatz wird in das Linienelement (75) eingesetzt:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} \left(e^{\frac{g(t)}{2}} dct \right)^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (123)$$

Durch eine geschickte Koordinatentransformation $t'(t)$, sodass

$$\frac{dt'}{dt} = e^{\frac{g(t)}{2}} \quad (124)$$

wird, wird eine neue Zeitkoordinate t' definiert. Nach Umbenennung $t' \rightarrow t$ ergibt sich

$$ds^2 = e^{\nu(r)} (dct)^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (125)$$

Das gefundene Linienelement ist die statische - von t unabhängige - Kugelfeldgleichung. Das Ergebnis folgt des Weiteren aus dem Birkhoffschen Satz, der besagt, dass jede räumliche kugelsymmetrische Lösung der Vakuum-Feldgleichung zeitunabhängig ist - die dabei dazugehörige Metrik ist die Schwarzschild-Metrik [Reb13].

Die Feldgleichungen (119) und (120) werden von einander subtrahiert, wodurch sich

$$\frac{d(\nu + \lambda)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu + \lambda = a = \text{const} \quad (126)$$

ergibt. Wird das erhaltene Ergebnis in das Linienelement der statischen Lösung (125) eingesetzt, erschließt sich

$$ds^2 = e^{-\lambda(r)} \left(e^{\frac{a}{2}} dct \right)^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (127)$$

Anschließend wird erneut eine Zeittransformation durchgeführt, um den Faktor $e^{\frac{a}{2}}$ zu eliminieren. Dadurch muss die Integrationskonstante für $e^{\frac{a}{2}} dct = dct'$ gleich null gesetzt werden. Für das Linienelement wird

$$ds^2 = e^{-\lambda(r)} (dct)^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (128)$$

erhalten. Daraus erschließt sich, dass $a = 0$ ist. Wird $\nu = -\lambda$ in Gleichung (121) eingesetzt, ergibt sich

$$e^{-\lambda} \left(\frac{r}{2} \frac{d}{dr} (-2\lambda) + 1 \right) - 1 = 0$$

$$e^\lambda - 1 = r \frac{d\lambda}{dr}. \quad (129)$$

Noch einmal umgeformt, löst sich diese gewöhnliche Differentialgleichung auf zu

$$\frac{d\lambda}{dr} e^{-\lambda} + \frac{1}{r} e^{-\lambda} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_s}{r}. \quad (130)$$

Dabei ist r_s die Integrationskonstante.

Anschließend wird das Grenzverhalten $r \rightarrow \infty$ betrachtet, da es sich um die äußere Lösung einer Feldgleichung für einen kugelsymmetrischen Himmelskörper handelt. Damit gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{00} = \lim_{r \rightarrow \infty} e^\nu = \lim_{r \rightarrow \infty} 1 - \frac{r_s}{r} \rightarrow 1 \quad (131)$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{11} = \lim_{r \rightarrow \infty} e^\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \rightarrow 1. \quad (132)$$

Es entsteht eine pseudo-euklidische Metrik [Reb13] mit

$$g_{00} = 1 - \frac{r_s}{r} \rightarrow 1 + \frac{2\Phi}{c^2}. \quad (133)$$

Aus der Newton-Theorie ist bekannt, dass ein kugelsymmetrisches Vakuumfeld Φ durch

$$\Phi = -\frac{GM}{r_0} \quad (134)$$

gegeben ist. Dabei ist G die Gravitationskonstante und M die Masse der Kugel. Der Radialabstand der pseudo-euklidischen Metrik wird mit r_0 bezeichnet, sodass für $r \rightarrow \infty$ gilt:

$$dr = dr_0, \quad r = r_0 + \text{const} \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{r_0} = 1. \quad (135)$$

Anschließend wird Φ in die Grenzwertbetrachtungen (133) und (135) eingesetzt. Daras ergibt sich

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r_s}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2GM}{r_0 c^2} \quad (136)$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r_s c^2}{2GM} \frac{r_0}{r} = \frac{r_s c^2}{2GM} = 1. \quad (137)$$

Damit findet sich der Schwarzschild-Radius (SSR) r_s :

$$\boxed{r_s = \frac{2GM}{c^2}}. \quad (138)$$

Als resultierendes Ergebnis wird für die Feldgleichung der äußeren Schwarzschild-Metrik

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) (dct)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)} \quad (139)$$

erhalten.

3.2 Innere Schwarzschild-Lösung

Weiter wird nun die Lösung der inneren Schwarzschild-Metrik bestimmt. Dabei wird zunächst von einer idealen Flüssigkeit mit dem isotropen Druck p , der Dichte ρ und der Viergeschwindigkeit u ausgegangen. Weiterhin sollen ρ und p vom Radius r abhängen. Damit ergibt sich ein Energie-Impuls-Tensor, der auch als Feldgleichung für ideale Fluide zu verstehen ist [Ste77]:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}. \quad (140)$$

Es wird festgelegt, dass für ein lokal ebenes Koordinatensystem gilt:

$$u^\mu = (c, 0, 0, 0)^t. \quad (141)$$

Ausgehend von der kugelsymmetrischen statischen Lösung (125)

$$ds^2 = e^{\nu(r)} c^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\vartheta + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (142)$$

ergibt sich das statische Problem zu $\vec{u} = 0$.

Es wird das invariante Betragsquadrat der Vierergeschwindigkeit aus dem Vierervektor bestimmt:

$$c^2 = u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = u^0 u^0 g_{00} = u_0 u_0 g^{00}. \quad (143)$$

Daraus folgt

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{c}{\sqrt{e^{\nu(r)}}} \quad (144)$$

bzw. die kovariante Form

$$u_0 = c \sqrt{e^{\nu(r)}}. \quad (145)$$

Die Form des metrischen Tensors

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(e^{\nu(r)}, -e^{\lambda(r)}, -r^2, -r^2 \sin^2 \vartheta)^t, \quad (146)$$

die für die statische Kugelfeldgleichung (125) verwendet worden ist, wird übernommen. Anschließend werden alle Terme der Feldgleichung für Fluide (140) berechnet:

$$T_{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_0 u_0 - p g_{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) c \sqrt{e^{\nu(r)}} c \sqrt{e^{\nu(r)}} - p e^{\nu(r)} = \rho c^2 e^{\nu(r)} \quad (147)$$

$$T_{11} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_1 u_1 - p g_{11} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \cdot 0 \cdot 0 - p (-e^{\lambda(r)}) = p e^{\lambda(r)} \quad (148)$$

$$T_{22} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_2 u_2 - p g_{22} = 0 - p (-r^2) = p r^2 \quad (149)$$

$$T_{33} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_3 u_3 - p g_{33} = 0 - p (-r^2 \sin^2 \vartheta) = p r^2 \sin^2 \vartheta. \quad (150)$$

Dadurch erschließt sich der Tensor zu

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho c^2 e^{\nu(r)}, p e^{\lambda(r)}, p r^2, p r^2 \sin^2 \vartheta)^t. \quad (151)$$

Durch Verjüngung mit dem metrischen Tensor

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}\left(e^{-\nu(r)}, -e^{-\lambda(r)}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}\right)^t \quad (152)$$

ergibt sich für T^μ_ν :

$$T_0^0 = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^0 u_0 - p g_0^0 = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) c \frac{1}{\sqrt{e^{\nu(r)}}} c \sqrt{e^{\nu(r)}} - p \cdot 1 = \rho c^2 \quad (153)$$

$$T_1^1 = 0 - p = -p \quad (154)$$

$$T_2^2 = -p \quad (155)$$

$$T_3^3 = -p. \quad (156)$$

Anschließend wird der Ricci-Tensor mit

$$R_n^n = R_{00} \cdot g^{00} + R_{11} \cdot g^{11} + R_{22} \cdot g^{22} + R_{33} \cdot g^{33} \quad (157)$$

bestimmt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} R &= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) \\ &\quad - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \left(e^{-\lambda} \left(\frac{r}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{r}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + 1 \right) - 1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left(\sin^2 \vartheta \left(e^{-\lambda} \left(\frac{r}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{r}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + 1 \right) - 1 \right) \right) \\ &= -2e^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{r^2}. \end{aligned} \quad (158)$$

Aus den einsteinschen Feldgleichung für Materie (67) folgt

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2} R g^\mu_\nu = -\chi T^\mu_\nu, \quad (159)$$

mit

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (160)$$

Resultierend daraus werden die vier Feldgleichungen berechnet:

$$-\chi\rho c^2 = R_0^0 - \frac{1}{2}R = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\lambda}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (161)$$

$$\chi p = R_1^1 - \frac{1}{2}R = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (162)$$

$$\chi p = R_2^2 - \frac{1}{2}R = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial\nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial\lambda}{\partial r} \frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial\nu}{\partial r} - \frac{\partial\lambda}{\partial r} \right) \right) \quad (163)$$

$$\chi p = R_3^3 - \frac{1}{2}R = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial\nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial\lambda}{\partial r} \frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial\nu}{\partial r} - \frac{\partial\lambda}{\partial r} \right) \right). \quad (164)$$

Dabei ist zu erkennen, dass $R_2^2 = R_3^3$ ist.

Die Integration dieser Feldgleichungen kann nur durchgeführt werden, wenn die Energie- und Impulsbilanzgleichung erfüllt ist, das heisst die Divergenz muss verschwinden: $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ oder $T^\nu{}_{\mu;\nu} = 0$. Dies folgt unmittelbar aus den Bianchi-Identitäten. Für eine ausführliche Diskussion wird auf [Ste77] verwiesen. Damit ergibt sich

$$T^\nu{}_{\mu;\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)_{;\nu} u_\mu u^\nu + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_{\mu;\nu} u^\nu + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u^\nu{}_{;\nu} - (pg^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \quad (165)$$

oder

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)_{;\nu} u^\mu u^\nu + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu{}_{;\nu} u^\nu + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu{}_{;\nu} - (pg^{\mu\nu})_{;\nu} = 0. \quad (166)$$

Weiterhin muss aufgrund der Zeitunabhängigkeit gelten, dass $u^\nu = (u^0, 0, 0, 0)^t$ ist. Es werden die Summanden einzeln differenziert:

$$\rho_{;\nu} u^\nu = 0 \quad (167)$$

$$(pg^{\mu\nu})_{;\nu} u^\nu = 0 \quad (168)$$

$$u^\nu{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} u^\nu)_{;\nu} = 0 \quad (169)$$

$$u_{\mu;\nu} = u_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^i u_i = 0 - \Gamma_{\mu\nu}^0 u^0 = -u^0 \Gamma_{\mu\nu}^0. \quad (170)$$

Die letzte Gleichung ist nur für $\mu = 0$ lösbar [Mot13].

Aus der Ableitung der Feldgleichung für Fluide ergibt sich

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_{1;\nu} u^\nu &= \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (-u^0) \Gamma_{1\nu}^0 u^\nu = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial r} + (\rho c^2 + p) \Gamma_{10}^0 &= 0 \quad \text{mit} \quad \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial\nu}{\partial r} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial\nu}{\partial r} (c^2 \rho + p). \end{aligned} \quad (171)$$

Nun wird geprüft, ob Gleichung (171) anstelle der drei Feldgleichungen (161), (162) und (163) verwendet werden kann. Dazu wird zunächst die Gleichungen (161) und (162) umgestellt zu

$$r \frac{\partial \lambda}{\partial r} = e^\lambda (\chi \rho r^2 c^2 - 1) + 1 \quad (172)$$

und

$$r \frac{\partial \nu}{\partial r} = e^\lambda (\chi p r^2 + 1) - 1. \quad (173)$$

Gleichung (173) wird nach r differenziert und in das Ergebnis eingesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} &= \frac{\partial \lambda}{\partial r} e^\lambda (\chi p r^2 + 1) + e^\lambda \left(2\chi p r + \chi r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial \lambda}{\partial r} \left(r \frac{\partial \nu}{\partial r} + 1 \right) + e^\lambda \left(2\chi p r + \chi r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} &= \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) + e^\lambda \left(2\chi p + \chi r \frac{\partial p}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (174)$$

Nach dem Einsetzen in Gleichung (163) ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi p e^\lambda &= \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) + e^\lambda \left(\chi p + \frac{1}{2} \chi r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + e^\lambda \left(\chi p + \frac{1}{2} \chi r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \\ -\frac{1}{2} \chi r \frac{\partial p}{\partial r} e^\lambda &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} &= - \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r}}{\chi r e^\lambda} \\ &= - \frac{r \frac{\partial \nu}{\partial r} + r \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r}}{\chi r^2 e^\lambda}. \end{aligned} \quad (175)$$

Wird Gleichung (172) und (173) eingesetzt, findet sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= - \frac{e^\lambda (\chi p r^2 + 1) - 1 + e^\lambda (\chi \rho r^2 c^2 - 1) + 1}{\chi r e^\lambda} \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} \\ &= - \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} (\rho c^2 + p). \end{aligned} \quad (176)$$

Damit ist gezeigt, dass alle Feldgleichungen (161), (162), (163) und (164) in diesem Ausdruck enthalten sind, sodass im Folgenden Gleichung (171) verwendet werden kann.

Weiterhin wird Gleichung (161) durch geschicktes Ausklammern des Differentials umgeformt:

$$\chi\rho c^2 r^2 = -\frac{d}{dr}(e^{-\lambda(r)}r) + 1. \quad (177)$$

Anschließend wird Gleichung (177) über r integriert:

$$re^{-\lambda(r)} = \int_0^r (1 - \chi\rho(\tilde{r})c^2\tilde{r}^2) d\tilde{r} = r - 2\frac{\chi c^2}{2} \int_0^r \rho(\tilde{r})\tilde{r}^2 d\tilde{r}. \quad (178)$$

Dadurch ergibt sich aus dem Integral über ρ für eine Kugel mit Masse m

$$re^{-\lambda(r)} = r - 2m(r) + C \quad (179)$$

$$\text{mit } m(r) = \frac{\chi c^2}{2} \int_0^r \rho(\tilde{r})\tilde{r}^2 d\tilde{r}. \quad (180)$$

Hierbei ist $m(r)$ die lokale Massenfunktion. Die Komponente r ist der Koordinatenradius der Kugel. Der Radius der gesamten Kugel ist gegeben durch

$$R(r) = \int_0^r e^{\lambda(\tilde{r})/2} d\tilde{r} = \int_0^r \sqrt{g^{11}} d\tilde{r}. \quad (181)$$

Die Integrationskonstante C aus Gleichung (179) muss verschwinden, da $\lim_{r \rightarrow 0} g^{11} < \infty$ endlich ist. Dadurch wird erhalten:

$$re^{-\lambda(r)} = r - 2m(r). \quad (182)$$

Um bei weiterer Integration der Feldgleichungen keine neue Zustandsgleichung zu definieren, muss diese fixiert werden. Dabei wird eine konstante Ruhemasse, wodurch $\rho = \text{const.}$ folgt, betrachtet. Diese Zustandsgleichung liefert für relativ kleine Sterne in erster Ordnung eine gute Näherung. Für größere Sterne kann keine konstante Dichte angenommen werden, sodass obige Annahme nicht mehr zutrifft [Ste77].

Für eine konstante Dichte ergibt sich

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - Ar^2 \quad (183)$$

$$\text{mit } A = \frac{1}{3}\chi\rho c^2. \quad (184)$$

Die zuvor gefundene Gleichung (171), lässt sich durch Addition einer Konstante umschreiben zu

$$\frac{\partial}{\partial r}(p + \underbrace{\rho c^2}_{\text{const}}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r}(p + \rho c^2). \quad (185)$$

Unter Verwendung von

$$\frac{\partial}{\partial r} e^{-\frac{\nu}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} e^{-\frac{\nu}{2}} \quad (186)$$

kann für Gleichung (185) folgender Ansatz gemacht werden:

$$(p + \rho c^2) = B e^{-\frac{\nu}{2}} = B \sqrt{g^{00}}. \quad (187)$$

Wird Gleichung (161) von (162) subtrahiert und mit Gleichung (187) gleichgesetzt, führt dies zu

$$\begin{aligned} \chi p + \chi \rho c^2 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \\ \chi(p + \rho c^2) &= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) = \chi B e^{-\frac{\nu}{2}}. \end{aligned} \quad (188)$$

Aus Gleichung (183) wird der Wert, der für $e^{-\lambda}$ gefunden worden ist, in Gleichung (188) eingesetzt. Nach Umformung ergibt sich aus

$$e^{-\lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} e^{-\lambda} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (1 - Ar^2) = 2A \quad (189)$$

und

$$e^{-\lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} = (1 - Ar^2) \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} - Ar \frac{\partial \nu}{\partial r} \quad (190)$$

der Ausdruck

$$\begin{aligned} e^{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} - Ar \frac{\partial \nu}{\partial r} + 2A \right) &= \chi B \\ \Leftrightarrow e^{\frac{\nu}{2}} \frac{\partial \nu}{\partial r} (1 - Ar^2) + e^{\frac{\nu}{2}} 2Ar &= \chi B r. \end{aligned} \quad (191)$$

Durch das Ausmultiplizieren der Klammern und Erweitern mit $\frac{1}{2}(1 - Ar^2)^{-\frac{3}{2}}$ findet sich

$$\frac{1}{2} e^{\frac{\nu}{2}} \frac{\partial \nu}{\partial r} (1 - Ar^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{\nu}{2}} 2Ar (1 - Ar^2)^{-\frac{3}{2}} = \chi B \frac{r}{2} (1 - Ar^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (192)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich folgendes Differential bilden:

$$2(1 - Ar^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d}{dr} \left[e^{\frac{\nu}{2}} (1 - Ar^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \chi B r. \quad (193)$$

Der Ausdruck wird anschließend über r integriert:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\nu}{2}} (1 - Ar^2)^{-\frac{1}{2}} &= \int_0^r \chi B \frac{\tilde{r}}{2(1 - A\tilde{r}^2)^{\frac{3}{2}}} d\tilde{r} \\ &= \frac{\chi B}{2A\sqrt{1 - Ar^2}} + \tilde{C} \\ \Rightarrow e^{\frac{\nu}{2}} &= \frac{\chi B}{2A} + \tilde{C} \sqrt{1 - Ar^2}. \end{aligned} \quad (194)$$

Nun sollen B und \tilde{C} durch Stetigkeitsbedingungen bestimmt werden. Es wird gefordert, dass die Metrik $g_{\mu\nu}$ für $r = r_0$ stetig ist und der Druck p soll auf der Oberfläche verschwinden. Dadurch erschließt sich zunächst für p aus Gleichung (187):

$$\begin{aligned} p &= B e^{-\frac{\nu}{2}} - \rho c^2 \\ &= B \frac{1}{\frac{\chi^B}{2A} + \tilde{C} \sqrt{1 - Ar^2}} - \rho c^2 \end{aligned} \quad (195)$$

$$\text{mit } \rho c^2 = \frac{3A}{\chi}. \quad (196)$$

Durch Erweitern des Bruchs ergibt sich

$$\begin{aligned} p &= B e^{-\frac{\nu}{2}} - \rho c^2 \\ &= B \frac{1}{\frac{\chi^B}{2A} + \tilde{C} \sqrt{1 - Ar^2}} - \frac{3A}{\chi} \cdot \frac{\frac{\chi^B}{2A} + \tilde{C} \sqrt{1 - Ar^2}}{\frac{\chi^B}{2A} + \tilde{C} \sqrt{1 - Ar^2}} \\ &= \frac{B - \frac{3B}{2} - \frac{3A}{\chi} \tilde{C} \sqrt{1 - Ar^2}}{\frac{\chi^B}{2A} + \tilde{C} \sqrt{1 - Ar^2}} \\ &= \frac{1 - 3A \tilde{C} \sqrt{1 - Ar^2} - \frac{B\chi}{2}}{\chi \left(\frac{\chi^B}{2A} + \tilde{C} \sqrt{1 - Ar^2} \right)}. \end{aligned} \quad (197)$$

Da p eine lokale Größe ist, können drei Bedingungen für die Gleichungen aufgestellt werden:

1. e^λ stetig mit $1 - Ar_0^2 = 1 - 2\frac{M}{r_0}$,
2. e^ν stetig mit $\left(\frac{\chi^B}{2A} + \tilde{C} \sqrt{1 - Ar_0^2} \right)^2 = 1 - 2\frac{M}{r_0}$,
3. für $p = 0$ folgt $3A \tilde{C} \sqrt{1 - Ar_0^2} = -\frac{B\chi}{2}$.

Diese drei Bedingungen können weiter aufgelöst werden. Die erste Bedingung ist trivial:

$$M = \frac{A}{2} r_0^3 = \frac{\chi \rho c^2}{6} r_0^3. \quad (198)$$

Für die zweite Bedingung folgt

$$\left(\frac{\chi^B}{2A} + \tilde{C} \sqrt{1 - Ar_0^2} \right)^2 = 1 - Ar_0^2. \quad (199)$$

Wird die dritte Bedingung in Gleichung (199) eingesetzt, erschließt sich

$$\begin{aligned} \left(-3\tilde{C}\sqrt{1-Ar_0^2} + \tilde{C}\sqrt{1-Ar_0^2}\right)^2 &= 1 - Ar_0^2 \\ -4\tilde{C}^2(1 - Ar_0^2) &= 1 - Ar_0^2 \\ \Rightarrow \tilde{C} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (200)$$

Die letzte Bedingung wird zu

$$\begin{aligned} \chi B &= 3A\sqrt{1 - Ar_0^2} \\ &= \chi\rho c^2\sqrt{1 - \frac{1}{3}\chi\rho c^2 r_0^2} \end{aligned} \quad (201)$$

gelöst. Für eine konstante Massendichte ρ und den inneren Radius r_0 ergibt sich das kugelsymmetrische Feld eines Sterns bzw. die innere Schwarzschild-Metrik zu

$$ds^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1 - Ar_0^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - Ar^2}\right)^2 (dct)^2 - \frac{dr^2}{1 - Ar^2} - r^2(d\vartheta + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (202)$$

$$\text{mit } \rho = \text{const}, \quad A = \frac{1}{3}\chi\rho c^2$$

$$\text{und } \chi p = 3A \frac{\sqrt{1 - Ar^2} - \sqrt{1 - Ar_0^2}}{3\sqrt{1 - Ar_0^2} - \sqrt{1 - Ar^2}}. \quad (203)$$

3.3 Grenzwert und Übergang

Zunächst wird die äußere Schwarzschild-Metrik betrachtet

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dct)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (204)$$

Anschließend wird der Übergang zwischen äußerer und innerer Schwarzschild-Metrik anhand des Terms $\propto dr^2$ durchgeführt. Dadurch wird folgender Zusammenhang gefunden:

$$1 - Ar^2 = 1 - \frac{2GM}{rc^2} \Leftrightarrow Ar_0^3 = \frac{2GM}{c^2}. \quad (205)$$

Dabei wurde eine Transformation $r \rightarrow r_0$ durchgeführt, um im Anschluss gezielte Aussagen bezüglich des Gravitationsgleichgewichts zu erhalten.

Für $r = 0$ nimmt p gemäß Gleichung (202) seinen Maximalwert an, falls

$$3\sqrt{1 - Ar_0^2} > 1. \quad (206)$$

Nun wird der gefundene Übergang der äußeren zur inneren Schwarzschild-Metrik eingesetzt:

$$3\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0c^2}} > 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{2GM}{r_0c^2} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{9}{8} \frac{2GM}{c^2} < r_0. \quad (207)$$

Mit dem Schwarzschild-Radius $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ ergibt sich

$$\frac{r_s}{r_0} < \frac{8}{9}. \quad (208)$$

Weitergehend kann auch

$$\frac{M}{r_0} < \frac{4c^2}{9G} \quad (209)$$

geschrieben werden. Anhand der gefundenen Ergebnisse kann festgestellt werden, ab welchem Radius-zu-Masse-Verhältnis aus Gleichung (209), bzw. Schwarzschild-Radius r_s aus Gleichung (208) ein idealisierter Stern im Gleichgewicht bleibt.

4 Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung

Es ist möglich, Sternenmodelle durch einen numerischen Ansatz zu lösen. Da die analytische Lösung, die durch der SSM gefunden wurde, einen Idealfall für die Dichteverteilung annimmt, entspricht diese nicht der Realität. Dennoch erschließen sich aus der SSM drei gekoppelte Differentialgleichungen - die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen. Diese wurden im Jahr 1939 von ihren Namensgebern Richard C. Tolman, Robert Oppenheimer und George M. Volkoff gefunden.

Mithilfe dieser Gleichungen lassen sich die Dichte ρ , der Druck p und die Masse m als Funktionen des Radius r bestimmen.

Zunächst werden die Gleichungen aus der SSM hergeleitet, um anschließend mit einem numerischen Verfahren gelöst zu werden. Beispielhaft wird dabei die Stabilität eines Neutronensterns untersucht. Die so gewonnenen Graphen werden im Anschluss mit den analytischen Ergebnissen verglichen.

4.1 Herleitung aus der SSM

Aus der SSM können die TOV-Gleichungen hergeleitet werden. Um eine Grundgleichung zu finden, wird zunächst Gleichung (162) nach $\frac{\partial \nu}{\partial r}$ umgestellt:

$$\frac{\partial \nu}{\partial r} = \left(1 + \frac{8\pi G}{c^4} p r^2\right) \frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r}. \quad (210)$$

Wird Gleichung (130) und für r_s Gleichung (138) in (210) eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial r} &= \left(1 + \frac{8\pi G}{c^4} r^2 p\right) \frac{\left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1}}{r} - \frac{1}{r} \\ &= \left(1 + \frac{8\pi G}{c^4} r^2 p\right) \frac{1}{r - \frac{2GM(r)}{c^2}} - \frac{1}{r} \\ &= \left(\frac{1}{r - \frac{2GM(r)}{c^2}} + \frac{8\pi G r^2 p / c^2}{r c^2 - 2GM(r)}\right) - \frac{1}{r} \\ &= \frac{c^2 + 8\pi G r^2 p / c^2}{r c^2 - 2GM(r)} - \frac{1}{r} \cdot \frac{c^2 - 2GM(r)/r}{c^2 - 2GM(r)/r} \\ &= \frac{c^2 + 8\pi G r^2 p / c^2 - c^2 + 2GM(r)/r}{r c^2 - 2GM(r)} \\ &= \frac{2G(4\pi r^3 p / c^2 + M(r))}{r(r c^2 - 2GM(r))}. \end{aligned} \quad (211)$$

Die gesamten TOV-Gleichungen lauten:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (212)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G(4\pi r^3 p/c^2 + M(r))}{r(rc^2 - 2GM(r))} (c^2 \rho + p) \quad (213)$$

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{G(4\pi r^3 p/c^2 + M(r))}{r(rc^2 - 2GM(r))} (c^2 \rho + p) \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{-1} \quad (214)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{2G(4\pi r^3 p/c^2 + M(r))}{r(rc^2 - 2GM(r))}. \quad (215)$$

Diese ergeben sich im Wesentlichen aus der zuvor gefundenen Grundgleichung (171). Mit einer inhomogenen Dichteverteilung $p = p(\rho)$ findet sich

$$p(r) = p(\rho(r)) \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dr} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{dp}{dr} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{-1}. \quad (216)$$

4.2 Numerische Lösung eines Neutronensterns

Die TOV-Gleichungen (212) bis (215) können mithilfe eines numerischen Verfahrens gelöst werden. Dafür wird das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung (RK4) angewandt. Im Rahmen dieses Verfahrens lässt sich eine approximierete Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung wie folgt finden [Bar10]:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(h^5) \\ t_{n+1} &= t_n + h \\ \text{für } k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned} \quad (217)$$

Die Schrittweite wird durch h repräsentiert. Bei diesem Verfahren lässt sich eine relative Genauigkeit von $\mathcal{O}(h^5)$ realisieren.

Um eine numerische Lösung der TOV-Gleichungen zu errechnen, muss weitergehend eine Zustandsgleichung für den Druck $p(r)$ als Nebenbedingung definiert werden. Hier wird der Ansatz einer polytropen Zustandsgleichung nach [Ott13] gewählt:

$$p = \kappa \rho^\gamma \quad (218)$$

mit den Konstanten $\gamma = 2,75$ und $\kappa = 1,98183 \cdot 10^{-6}$.

Folgende Lösungen wurden ausschließlich mit dem integrierten Runge-Kutta-Verfahren von MATLAB Ver. R2015a berechnet. Als Einheitensystem wird das (cgs)-System verwendet:

$$[\text{Länge}] = \text{cm}$$

$$[\text{Zeit}] = \text{s}$$

$$[\text{Masse}] = \text{g}.$$

Dadurch ergeben sich für die Naturkonstanten:

Konstante	Symbol	Größe in (cgs)
Lichtgeschwindigkeit	c	$2,99792458 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$
Gravitationskonstante	G	$6,6742 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g s}^2}$
Sonnenmasse [IAU15]	M_{\odot}	$1,9891 \cdot 10^{33} \text{ g}$
mittlere Dichte von Neutronensterne	ρ_c	$\approx 10^{15} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

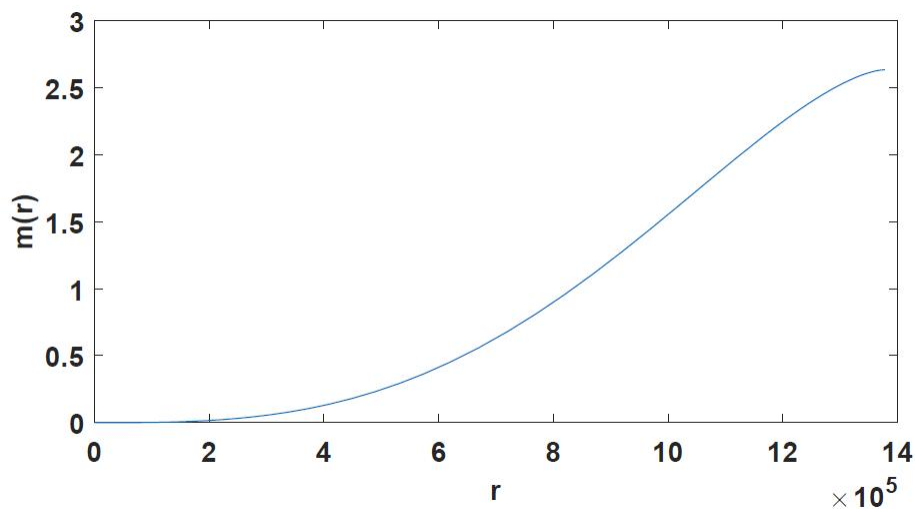


Abbildung 1: Totale Masse eines Neutronsterns mit $m(r) = \frac{\text{Masse Neutronstern}}{M_{\odot}}$

Abbildung 1 bildet die totale Massenfunktion eines Neutronsterns ab. Die Masse ist auf die Sonnenmasse M_{\odot} normiert. Die Massenfunktion $m(r)$ steigt mit zunehmendem Radius r an, bis sie sich ab $r \approx 13 \text{ km}$ abflacht. Dabei wird sich an die Oberfläche des Neutronensterns genähert. Ab diesem Wert besitzt ein Neutronenstern keinen festen Zustand mehr. Dadurch nimmt der Neutronenstern eine maximal zu erreichende Masse von $m_{\text{max}} = 2,6 M_{\odot}$ an.

Wird Abbildung 1 mit 2 und 3 verglichen, ist auffällig, dass die drei Abbildungen jeweils nur bis zum Radius von $r_{\text{max}} = 13,8 \text{ km}$ verlaufen. Da das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung ab den Werten $r > 13,8 \text{ km}$ keine Lösungen mehr aus den

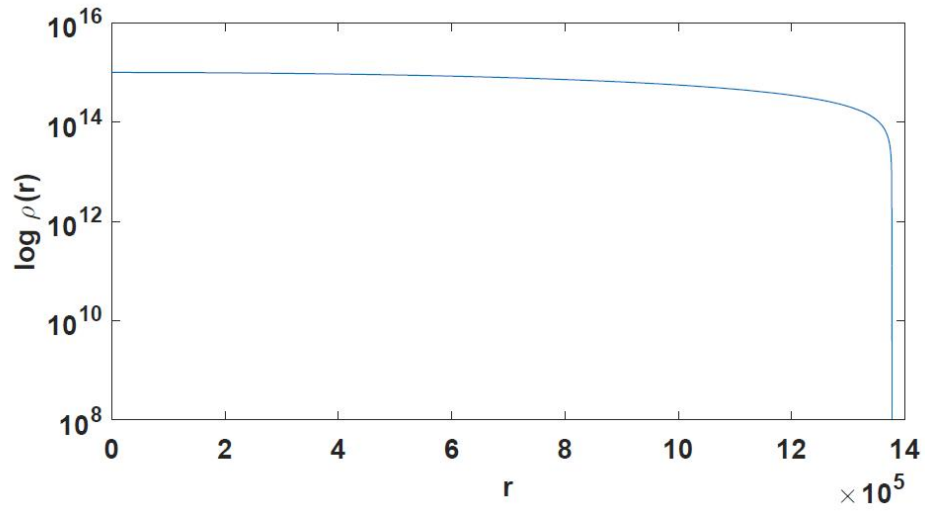


Abbildung 2: Energiedichte eines Neutronsterns

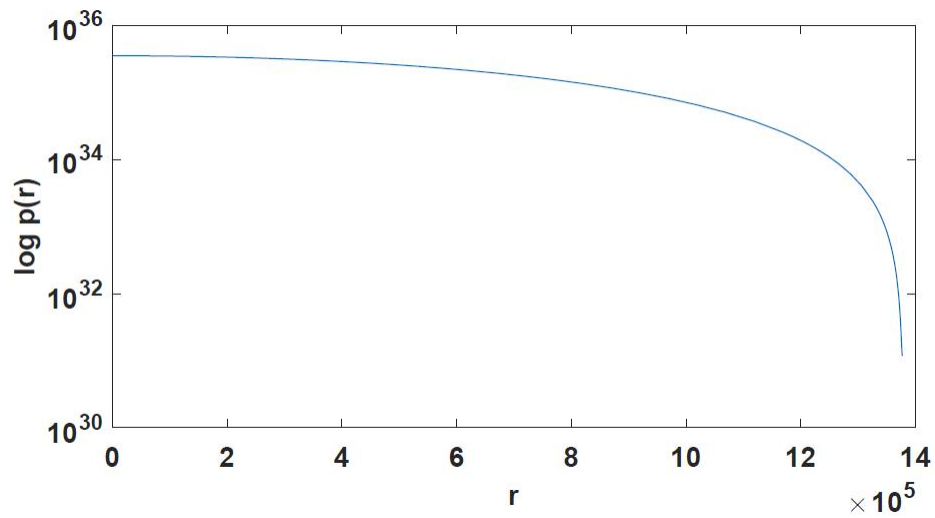


Abbildung 3: Druckverteilung eines Neutronsterns

TOV-Gleichungen liefern kann, konvergieren die TOV-Gleichungen gegen die Grenzwerte - bei maximalem Radius - eines Neutronenstern. Bestärkt wird die Interpretation durch die Abbildungen 2 und 3, da sowohl die Dichte $\rho(r)$ als auch der Druck $p(r)$, nach dem Erreichen des maximalen Radius, kontinuierlich abfallen. Es lässt sich aus den numerischen Ansatz schließen, dass ein stabiler Neutronenstern einen maximalen Radius von 13,8 km haben darf, um im Gleichgewicht zu bleiben.

Ferner lässt sich noch das Verhältnis von Dichte zur Masse auftragen:

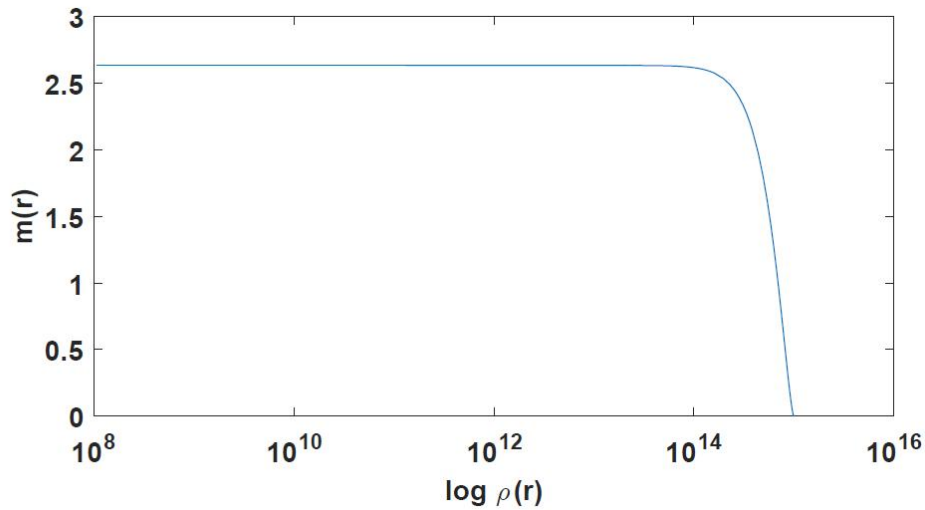


Abbildung 4: Dichte-Masse-Verhältnis

Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass die Dichte beim Erreichen von m_{\max} verschwindet.

Weitergehend ist das Dichte-Druck-Verhältnis von Interesse. Es wird ein linearer Zusammenhang der beiden Größen erwartet:

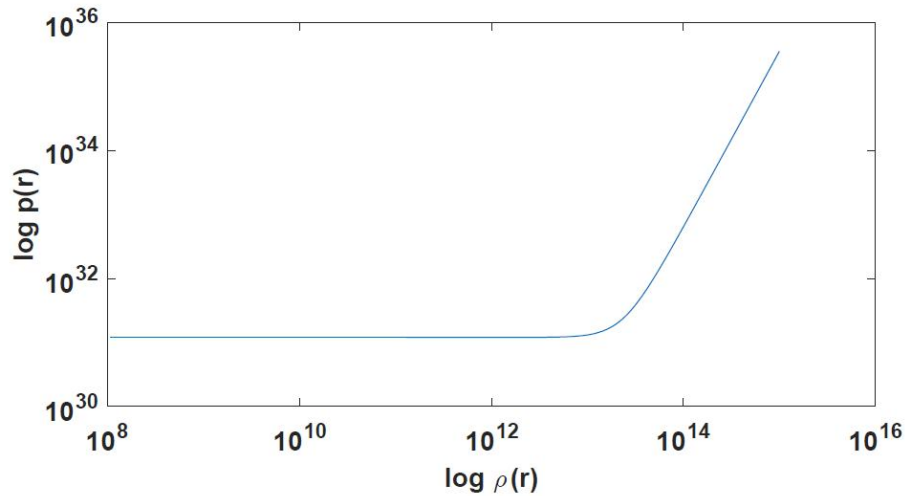


Abbildung 5: Dichte-Druck-Verhältnis

Der Druck und die Dichte weisen innerhalb des Neutronensterns ein lineares Verhalten zueinander auf (rechter Teil des Graphen). Erst nach Überschreiten des Grenzwerts von r_{\max} kommt es zu einem konstanten Verhalten (linker Teil). Das konstante Verhalten des Graphen entsteht durch das Lösen der Gleichungen mithilfe RK4, da die Auflösung dabei divergiert und keine exakten Ergebnisse mehr liefern kann. Es wurde schon in den Abbildungen (2) und (3) festgestellt, dass nach dem Erreichen des maximalen Radius der Druck und die Dichte sehr schnell abfallen. Daraus lässt sich ebenfalls auf eine Instabilität des Neutronensterns schließen.

Wird nun die Zustandsgleichung ohne logarithmische Achsen betrachtet, ergibt sich

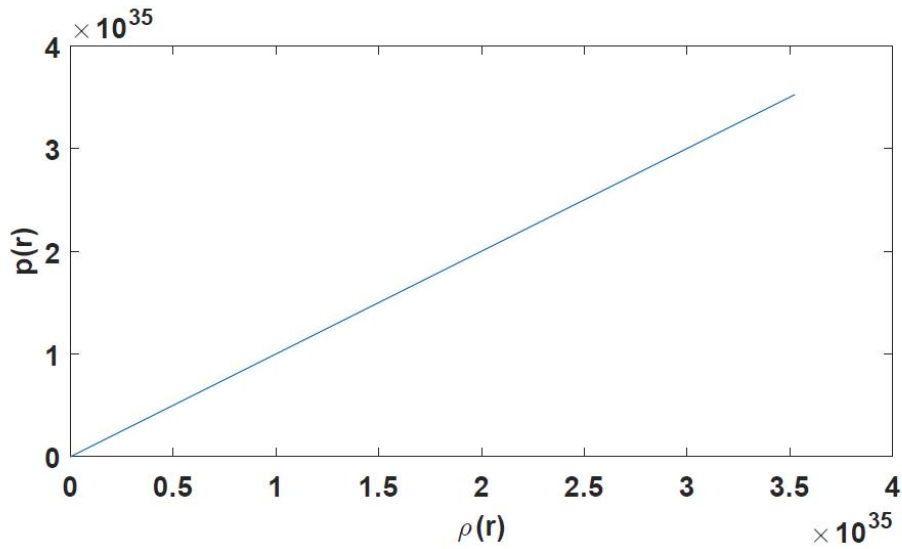


Abbildung 6: Dichte-Druck-Verhältnis ohne logarithmische Achsen

Aus dieser Abbildung (6) bekräftigt sich der lineare Zusammenhang, der aus der Zustandsgleichung (218) erwarten worden ist. Der Vergleich mit Abbildung (5) zeigt, dass die Linearität nur innerhalb des Neutronensterns gewährleistet wird.

4.3 Vergleich der numerischen und analytischen Ergebnisse

Aus den TOV-Gleichungen konnte der maximale Radius $r_{\max} = 13,8 \text{ km}$ und die maximale Masse $m_{\max} = 2,6 M_{\odot}$ für einen Neutronenstern mit mittlerer Dichte $\rho_c = 10^{15} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ gefunden werden.

Die Ergebnisse werden mit denen aus dem analytischen Teil verglichen. Dabei wird zunächst die Masse-Formel für eine Kugel aufgestellt mit

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c. \quad (219)$$

Diese wird in Gleichung (209) eingesetzt und wird nach R umgestellt, sodass

$$R_{\max} = \frac{c}{\sqrt{3G^3\pi\rho_c}} \quad (220)$$

ist. Daraus folgt für M :

$$M_{\max} = \frac{4}{9} \frac{c^3}{\sqrt{3G^3\pi\rho_c}}. \quad (221)$$

Es finden sich aus dem analytischen Lösungsansatz die Maximalwerte $R_{\max} = 11,95 \text{ km}$ und $M_{\max} = 3,59 M_{\odot}$, für einen Neutronenstern, der sich noch im Gleichgewicht befindet. Die Ergebnisse weichen leicht von den numerischen Ergebnissen ab - der Radius r um ca. 8% und die Masse m um ca. 38%.

Die analytische Lösung setzt im Gegensatz zu der numerischen Lösung einen Idealfall voraus, sodass der Unterschied in den Ergebnissen erklärt werden kann. Trotz der kleinen Abweichung der gefundenen Ergebnissen, besitzen diese die selbe Größenordnung. Damit lässt sich mithilfe des analytischen Ansatzes eine gute Näherung für die Stabilität durch das Masse-Radius-Verhältnis eines Neutronensterns bestimmen.

5 Zusammenfassung

Mithilfe der Schwarzschild-Metrik ist es möglich, die Bedingungen, die nötig für ein Gleichgewicht von Sternen sind, aufzustellen. Der analytische Ansatz setzt einen Idealfall voraus, dass zunächst der Himmelskörper die Form einer Kugel annehmen muss. Durch einige Umformungen der Feldgleichungen (75) können weiterhin Stetigkeiten für Masse, Druck und Dichte gefordert werden. Die daraus resultierenden Bedingungen für die Stabilität von Sternen ist durch Gleichung (208) und (209) gegeben.

Weiterhin kann die Gleichgewichtsbedingung durch einen numerischen Ansatz von Sternen bestimmt werden. Die notwendigen Bedingungen werden durch die TOV-Gleichungen repräsentiert. Diese entstehen aus den Überlegungen, die innerhalb der Schwarzschild-Metrik getroffen worden sind. Da die TOV-Gleichungen einen Satz von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen bilden, sind diese nur mithilfe eines numerischen Lösungsverfahrens lösbar.

In dieser Arbeit wurde zunächst die Schwarzschild-Metrik aus einer kurz zusammengefassten Theorie hergeleitet. Daraufhin wurden die TOV-Gleichungen bestimmt und durch das Runge-Kutte-Verfahren vierter Ordnung gelöst. Im Anschluss wurde ein Vergleich der analytischen Lösung mit der numerischen Lösung durchgeführt. Dabei wurden folgende Ergebnisse für einen Neutronenstern gefunden:

analytisches Ergebnis:	numerisches Ergebnis:	Abweichung
$R_{\max} = 11,95 \text{ km}$	$r_{\max} = 13,8 \text{ km}$	8 %
$M_{\max} = 3,59 M_{\odot}$	$m_{\max} = 2,6 M_{\odot}$	38%

Bis auf kleinere Abweichungen weisen die Ergebnisse die gleiche Größenordnung auf. Die Ergebnisse aus dem analytischen Ansatz liefern eine sehr gute Approximation im Vergleich zu den numerischen Werten. Damit sind die Ergebnisse, trotz der sehr großen Zahlen, sehr zufriedenstellend.

Ausgehend von den numerischen Ergebnissen lässt sich deuten, dass ein Neutronenstern einen maximalen Radius von $r_{\max} = 13,8 \text{ km}$ und eine maximale Masse von $m_{\max} = 2,6 M_{\odot}$ haben kann, um noch im Gleichgewicht zu bleiben. Vergleiche mit anderen Quellen zeigen, dass die maximale Masse eines Neutronensterns bei einer mittlerer Dichte von $\rho_c = 10^{15} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ für den analytischen Ansatz folgende Werte annimmt:

maximale Masse in $[M_{\odot}]$	Quelle
3,96	[Ste77]
3,6	[Ber10]

Bei dem numerischen Ansatz findet sich nach Quelle [Ber10] für eine mittlere Dichte von $\rho_c = 2,85 \cdot 10^{15} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ die maximale Masse $m_{\max} = 2,047 M_{\odot}$.

Die in dieser Arbeit gefundenen Ergebnissen stimmen gut mit den Werten aus den Quellen für einen Neutronenstern überein, womit die Richtigkeit der Ergebnisse untermauert wird.

6 Anhang

MATLAB-Code zum Aufrufen des integrierten Runge-Kutte-Verfahrens zum Erstellen der numerischen Lösungen:

```
1 close all; clear all;
2
3 %% numerical options
4 % y1 = m, y2 = p, y3 = rho
5
6 options = odeset('RelTol',1e-04);
7
8 %% constants (cgs)
9 c = 2.99792458e10; G = 6.6742e-08;
10 gamma = 2.75; % neutron star
11
12 K = 1.98183e-06;
13
14 r0 = 10e02;
15 R0 = 20e05;
16
17 rhoc = 1e15; % neutron star
18
19 %% initial conditions at r = r0
20 m0 = 4/3*pi*r0^3*rhoc;
21 rho0 = rhoc;
22 p0 = K*rhoc^(gamma);
23
24 %% Runge-Kutta-Call
25 [T,Y] = ode45('TOVrhs',[r0 R0],[m0 p0 rho0],options);
26
27 %% (cgs)
28 M = Y(:,1)/(1.9891e33);
29 P = Y(:,2);
30 RHO = Y(:,3);
31 RHO_2= K*(Y(:,3)).^(gamma);
```

Weiterer Code zum Implementieren der TOV-Gleichungen:

```
1 function rhs = TOVrhs(r,x)
2
3 % x1 = m, x2 = p, x3 = rho
4
5 %% constants (cgs)
6 c = 2.99792458e10; G = 6.6742e-08;
7 gamma = 2.75; % neutron star
8
9 K = 1.98183e-06;
10
11 rhs = zeros(3,1);
12
13 %% TOV right hand side
14 rhs(1) = 4*pi*r^2*x(3);
15 rhs(2) = -(c^2*x(3) + x(2))*(G*x(1) + 4*pi*G*r^3*x(2)*c^-2)*(c^2*r^2 -
16         2*G*x(1)*r)^-1;
17 rhs(3) = rhs(2)*(gamma*K*x(3)^(gamma-1))^-1;
18 end
```

Literatur

- [Bar10] RADIM BARTA:
Solution of the TOV Equations describing Stars
Physics 201, Department of Physics and Astronomy, University of British Columbia, Vancouver, BC, Canada, 2012.
- [Ste77] H. STEPHANI:
Allgemeine Relativitätstheorie
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1977.
- [Reb13] E. REBHAN:
Relativitätstheorie und Kosmologie; 19. Auflage
Spektrum Akademischer Verlag, Düsseldorf, 2013.
- [Fli12] T. FLIESSBACH:
Allgemeine Relativitätstheorie; 6. Auflage
Springer Spektrum, Siegen, 2012.
- [Wei08] S. WEINBERG:
Gravitation and Cosmology
Oxford University Press, 2008.
- [Dir96] P. A. M. DIRAC:
General Theory of Relativity
Princeton University Press, 1996.
- [Mot13] PROF. DR. U. MOTSCHMANN:
Allgemeine Relativitätstheorie; Skriptum zur Vorlesung WS 12/13
Braunschweig, 2013.
- [Ott13] CHRISTIAN D. OTT:
Static Spherically-Symmetric Stellar Structure in General Relativity
California Institute of Technology, 2013.
- [IAU15] INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION:
<http://www.iau.org/public/themes/measuring/> 05.09.2015
- [Ber10] MIKE GEORG BERNHARDT:
Relativistische Sterne
München, 2010.

Folgende Programme wurden für die Erstellung von Grafiken und für Rechnungen verwendet:

- MATLAB: Vers. R2015a

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Münster, den