
Versteckte Symmetrien und der Laplace-Runge-Lenz-Vektor

Bachelorarbeit im Fach Physik

MAXIMILIAN AMMER
Matrikelnr.: 394307

Eingereicht am: 19. August 2015

Erstgutachter:
PD.DR. JOCHEN HEITGER
Zweitgutachter:
PROF.DR. GERNOT MÜNSTER

*Institut für theoretische Physik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster*



Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel *Versteckte Symmetrien und der Laplace-Runge-Lenz-Vektor* selbständig verfasst habe, und dass ich keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

(Datum, Unterschrift)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Historisches	1
2	Das Kepler-Problem	5
2.1	Lösung des Zweikörperproblems	5
2.2	Symmetrien	6
2.2.1	Die $SO(4)$ -Symmetrie	6
2.2.2	Die $SU(3)$ -Symmetrie	7
2.3	Hodographie	9
2.4	Kanonische Transformationen	13
2.4.1	Der LRL-Vektor als Generator	13
2.4.2	Symmetrietransformationen	14
2.5	Reparametrisierung der Zeit	16
3	Das Wasserstoffatom	19
3.1	Der Laplace-Runge-Lenz-Pauli-Operator	19
3.2	Kanonische Transformationen 2	21
3.3	Die globale Methode	22
3.4	Supersymmetrie	25
4	Der magnetische LRL-Vektor	29

1. Einleitung und Historisches

Von den fünf Körpern *Platons*, deren unterschiedliche Symmetrieeigenschaften das Wesen der Elemente bestimmten, über die kreisförmigen Planetenbahnen des *Kopernikus*, die aufgrund ihrer größtmöglichen Symmetrie dem Göttlichen am nächsten kamen, bis hin zu den abstrakten Symmetrien der modernen Teilchenphysik durchzieht die Idee der Symmetrie die Geschichte der Naturphilosophie und -forschung. Die Suche nach und das Ausnutzen von Symmetrien physikalischer Problemstellungen macht diese in vielen Fällen überhaupt (oder zumindest mit den Methoden der Epoche) erst lösbar.

Nach der Erfindung der Differentialrechnung und ihrer Anwendung auf die Physik durch *Newton*, *Leibniz* und ihre Nachfolger (*Laplace*, *Jacobi*, *Hamilton* uvm.) gesellte sich der Begriff einer Erhaltungsgröße zu dem der Symmetrie. Da nun die explizite zeitliche Dynamik eines Systems aus den Newtonschen Differentialgleichungen ableitbar war, fielen solche Funktionen von Ort und Geschwindigkeit auf, deren Wert sich im Laufe der zeitlichen Evolution nicht ändert. Man fand nun, dass die Bedingung der Konstanz solcher Erhaltungsgrößen wie Energie, Impuls und Drehimpuls, die Lösung der Probleme entschieden vereinfachen konnte. Solche Überlegungen führten zu den Formalismen der analytischen Mechanik von *Lagrange*, *Hamilton* u.a., die im Grunde Symmetrien und Erhaltungsgrößen systematisch benutzen um die Differentialgleichungen in Komplexität und Dimension zu verringern. Die untrennbare Verbindung von Symmetrien und Erhaltungsgrößen wurde 1918 von *Emmy Noether* mathematisch besiegelt, indem sie zeigte, dass sich die Existenzen von bestimmten Symmetrien und Erhaltungsgrößen gegenseitig bedingen.

Mit der theoretischen Ausarbeitung der

Quantenmechanik seit Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts wurde das Tupel Symmetrie-Erhaltungsgröße um einen weiteren Begriff, nämlich den der Entartung, erweitert. Als entartet oder degeneriert bezeichnet man ein System, bei dem z.B. mehrere verschiedene Energieeigenzustände zum selben Energieeigenwert führen (siehe auch Kap. 3 zum Wasserstoffatom). Eine Entartung geht auch immer mit einer Symmetrie einher und Brechung der Symmetrie (z.B. Einbringen eines Atoms in äußere Felder) führt zur Aufhebung der Entartung (Aufspaltung der Energieniveaus).

In dieser Arbeit wird der *Laplace-Runge-Lenz-Vektor* behandelt, eine weniger bekannte Erhaltungsgröße in Systemen, die von einem Zentralkraftfeld mit inverser Abhängigkeit vom Quadrat des Abstands ($F \sim 1/r^2$) bestimmt werden. Die zwei prominentesten Vertreter solcher Systeme, das Keplerproblem (Gravitationspotential) und das Wasserstoffatom (quantenmechanisches *Coulomb*potential), werden ausführlich besprochen. Im Keplerproblem führt die Konstanz des Laplace-Runge-Lenz-Vektors zur Stabilität der elliptischen Planetenbahnen. In anderen Potentialen, die vom $1/r^2$ -Gesetz abweichen, ist eine Präzession der Bahn um den Fokus möglich.

Zumeist wird der konstante Vektor einfach *Runge-Lenz*-, *Runge*- oder *Lenz*scher Vektor genannt, was nicht auf seine(n) Entdecker, sondern auf die Personen hinweist, die ihn zu einem gewissen Zeitpunkt in den damals aktuellen physikalischen Diskurs einführten. *Carl Runge* benutzte den Vektor 1919 ohne Quellenangabe in seinem klassischen Lehrbuch zur Vektoranalysis [27], in dem er die heute übliche vektorielle Darstellung der klassischen Physik zusammenfasst, die im Jahrhundert zuvor von *Gibbs*, *Graßmann* u.a. entwickelt worden war. *Wilhelm Lenz* griff dann 1924 [16]

darauf zurück um Störungen der *Bohrschen* Bahnen des Elektrons im Atom zu berechnen. In neuerer Zeit wird *Laplace* als Entdecker der drei Erhaltungsgrößen des Zweikörperproblems, die den drei Komponenten des Vektors entsprechen, miterwähnt. Aber auch das entspricht nicht den historischen Tatsachen. Schon 1710 veröffentlichte *Jakob Hermann* (manchmal auch *Ermanno* genannt) eine Behandlung des Keplerproblems mit den damals neuen Methoden der Differential- und Integralrechnung von *Leibniz*. Sie gehört zu einer der ersten Abhandlungen, in der ausgehend von der invers-quadratischen Gravitationskraft die Form der Planetenbahnen bestimmt wird, denn davor, zur Zeit *Newtons*, versuchte man noch primär, die Form des Gravitationspotentials aus den *Keplerschen* Gesetzen abzuleiten. Bei *Hermann* taucht die Länge des Laplace-Runge-Lenz-Vektors als eine Integrationskonstante auf, die er korrekt mit der Exzentrizität der Planetenbahn in Verbindung bringt. Seine Vorgehensweise soll kurz entsprechend der aufgearbeiteten Version von *Otto Volk* [30] dargestellt werden:

Hermanns Rechnung: *Zunächst leitet er aus geometrischen Beziehungen die Identität*

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$$

und durch Integration

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c = \text{const.}$$

her und daraus die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{x} = -\kappa \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\kappa \frac{y}{r^3},$$

wobei κ die physikalischen Konstanten des Potentials enthalte. Nun fährt er fort, indem er zeigt, dass gilt¹⁾:

$$c\ddot{x} = -\kappa \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{r} \right), \quad c\ddot{y} = +\kappa \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{r} \right)$$

und durch Intergration die zwei Konstanten a und b erhält:

$$c\dot{x} = -\kappa \frac{y}{r} + a, \quad c\dot{y} = +\kappa \frac{x}{r} + b.$$

Damit ergibt sich

$$c^2 = cx\dot{y} - cy\dot{x} = \kappa r + bx - ay.$$

¹⁾Dazu rechne z.B.: $c\ddot{x} = -\kappa(x\dot{y} - y\dot{x})\frac{x}{r^3} = -\kappa(x^2\dot{y} - yx\dot{x})/r^3 = -\kappa((x^2 + y^2)\dot{y} - y^2\dot{y} - yx\dot{x})/r^3$ das mit $\dot{r} = (x\dot{x} + y\dot{y})/r$ zu $-\kappa(r\dot{y} - y\dot{r})/r^2$ wird.

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts mit numerischer Exzentrizität

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\kappa}.$$

In moderner vektorieller Schreibweise entspricht dieses Vorgehen der Berechnung von

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} &= \kappa \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} \\ \xrightarrow{\text{Int.}} \dot{\vec{r}} \times \vec{L} &= \kappa \frac{\vec{r}}{r} + \vec{A} \\ \implies \vec{A} &= \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \kappa \frac{\vec{r}}{r} = \text{const.} \end{aligned}$$

mit dem Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ und dem Laplace-Runge-Lenz-Vektor \vec{A} , dessen Betrag die Exzentrizität bestimmt: $|\vec{A}| = \kappa\varepsilon$.

Sein Lehrer, *Johann Bernoulli*, leitete daraufhin in Korrespondenz mit *Hermann* auch die Richtung des Vektors her. Eine historisch korrektere Bezeichnung wäre also *Hermann-Bernoulli-* oder *Hermann-Bernoulli-Laplace-Vektor*, wie es *Herbert Goldstein* vorgeschlagen hat [10]. In der neueren (klassischen) mathematischen Physik werden bei der Generalisierung des Laplace-Runge-Lenz-Vektors für andere Systeme als das Keplerproblem dementsprechend sogenannte *Ermanno-Bernoulli-Konstanten* verwendet (siehe z.B. [26],[7]).

Pierre Simon Laplace entdeckte dann 1799 unabhängig davon die drei Komponenten des Vektors im ersten Band seines „*Traité de mécanique celeste*“ [15]:

Nachdem er in den ersten zwei Kapiteln u.a. die Grund- und Bewegungsgleichungen für die relativen Bewegungen von Systemen von Körpern hergeleitet hat, beginnt Laplace im dritten Kapitel „*Première approximation des mouvements célestes, ou théorie du mouvement elliptique*“ mit der „ersten Näherung der Bewegungen der Himmelskörper oder der Theorie der elliptischen Bewegung“. Im Laufe des Werkes möchte er von der ersten Näherung zu einer zweiten und dritten übergehen „und in dieser Weise fortfahrend werden wir die Bewegung der Himmelskörper mit aller Präzision, die die Beobachtung verlangt,²⁾“ bestimmen. Mit der

²⁾[15] S.170: „[...] en continuant ainsi, nous déterminerons les mouvements célestes avec toute la précision que les observations comportent.“

ersten Näherung meint er das reduzierte Zweikörperproblem, also die ungestörte Bahn eines Planeten im Gravitationspotential der ruhenden Sonne.

Laplaces sieben Integrale: (siehe auch die Zusammenfassung in [9].) Von den allgemeinen über die speziellen Bewegungsgleichungen leitet Laplace sieben Integrale der Bewegung (d.h. Erhaltungsgrößen) eines Körpers, der sich auf einer kegelschnittförmigen Bahn befindet, her:

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = c [= L_z]$$

$$\frac{xdz - zdx}{dt} = c' [= L_y]$$

$$\frac{ydz - zdy}{dt} = c'' [= L_x]$$

$$x \left\{ \left(\frac{dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) - \frac{\mu}{r} \right\} - \frac{ydydx + zdzdx}{dt^2} = f$$

$$y \left\{ \left(\frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} \right) - \frac{\mu}{r} \right\} - \frac{xdxdy + zdzdy}{dt^2} = f'$$

$$z \left\{ \left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} \right) - \frac{\mu}{r} \right\} - \frac{xdxdz + ydydz}{dt^2} = f''$$

$$0 = \frac{\mu}{a} - \frac{2\mu}{r} + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

($f [= A_x]$, $f' [= A_y]$, $f'' [= A_z]$),

wobei die ersten sechs den Komponenten von Drehimpuls- und Laplace-Runge-Lenz-Vektor entsprechen. Die letzte Gleichung ist die Energiegleichung ausgedrückt über die große Halbachse a , wie sich später herausstellen wird. Laplace bemerkt nun, dass zwei der Konstanten in den anderen enthalten sein müssen und macht sich daran sie auf fünf unabhängige zu reduzieren. Dabei kommt er auf die zwei Bedingungen

$$f c'' - f' c' + f'' c = 0$$

und (in moderner Schreibweise)

$$\frac{\mu^2 - A^2}{L^2} = 0.$$

Obwohl sie nicht ausreichen um x, y und z als Funktionen der Zeit zu bestimmen, da sie t nicht explizit enthalten, fährt er nun fort die Form des Orbits aus den ersten fünf Integralen zu bestimmen. Aus den ersten drei erhält er die Bewegungsebene $cz - c'y + c''x = 0$, die vom Drehimpuls festgelegt ist, aus einer Rechnung, die im Grunde der Berechnung des Skalarprodukts $\vec{r} \cdot \vec{A}$ entspricht, schließt er auf eine elliptische Bahn mit der Sonne in einem der Foki und aus f und f' auf die Position des Perihels. Damit ist die Form der Bahn eindeutig bestimmt.

Ob Newton, Wegbereiter für Laplaces Ausbau der Himmelsmechanik und Vorbild aller großen Physiker des 18. Jahrhunderts, bereits von der Existenz dieser drei Konstanten wusste ist fraglich, da weder in seinen Schriften noch in denen seiner Nachfolger ein Hinweis darauf zu finden ist (laut [9]). Oft hingegen wird Hamiltons Herleitung von 1845 zitiert. Darin stieß er bei der Behandlung der Himmelsmechanik mit den neu gefundenen Quaternionen auf die Erhaltungsgröße und nannte sie *Exzentrizitätsvektor*. Kurz darauf stellte er die Methode des *Hodographen* (siehe Abschnitt 2.3) vor und benutzte den Exzentrizitätsvektor für eine sehr kurze und elegante Herleitung des kreisförmigen Hodographen der Keplerbahn.

Hamiltons Hodograph: (Ebenfalls aus [10]). Aus dem Kreuzprodukt des Drehimpulses mit dem Exzentrizitätsvektor $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \mu \kappa \vec{r} / r$ folgt:

$$\vec{p} = \frac{1}{L^2} \left(\vec{A} \times \vec{L} - \frac{\mu \kappa}{r} \vec{r} \times \vec{L} \right)$$

und mit der x -Achse entlang der großen Hauptachse (und damit parallel zu \vec{A}) die Kreisgleichung des Hodographen:

$$p_x^2 + \left(p_y - \frac{A}{L} \right)^2 = \left(\frac{\mu \kappa}{L} \right)^2.$$

Nach Hamilton wurde der Vektor in vielen Abhandlungen und Lehrbüchern (z.B. von Jacobi [13], Maxwell u.v.a.) behandelt und seine Entdeckung entweder Laplace oder Hamilton zugeschrieben.

Nach der Wiedereinführung von Lenz, zur Berechnung von Störungen der Bohrschen Elektronbahnen, kam der Laplace-Runge-Lenz-Vektor 1926 durch Wolfgang Pauli zu Prominenz. Er überführte ihn in die Operatorschreibweise der gerade von Heisenberg, Pauli u.v.a. entwickelten Matrizen-Quantenmechanik und berechnete mit seiner Hilfe die Energieniveaus des Wasserstoffatoms auf rein algebraischem Wege ohne die Schrödinger- oder andere Differentialgleichungen lösen zu müssen. Neun Jahre später zeigte Vladimir Fock, dass die Impulswellenfunktionen des Wasserstoffatoms äquivalent zu den vierdimensionalen Kugelflächenfunktionen sind und somit invariant unter vierdimensionalen Drehungen. Bargmann zeigte

daraufhin, dass schon die Komponenten des von Pauli eingeführten Operators die $SO(4)$ -Lie-Gruppe generieren. Damit war die zum Laplace-Runge-Lenz-Vektor gehörende Symmetrie gefunden, was sich auch mit ähnlichen Überlegungen am klassischen Fall bestätigen lässt.

Diese Arbeit behandelt mit dem Keplerproblem und dem Wasserstoffatom zwei der wichtigsten physikalischen Fragestellungen der Geschichte. Die Frage nach Ordnung und Gesetzmäßigkeit der Himmelskörper beschäftigt die Menschheit seit den Anfängen der Zivilisation. Der Paradigmenwechsel vom geo- zum heliozentrischen Weltbild leitete den Beginn des Zeitalters der Wissenschaft ein und kein anderes Problem brachte die Methoden der Physik seitdem derart voran. Noch heute ist das Zweikörperproblem in der (mathematischen) Physik von großem Interesse (Stichworte sind u.a. symplektische Geometrie und dynamische Systeme), wo man sich z.B. Fortschritte zur Lösung des Dreikörperproblems erhofft.

Der nächste große Umbruch in der Geschichte der Physik zum Beginn der Moderne betraf nicht die kosmische Ordnung sondern die der kleinsten Teile der Materie. Die Entwicklung der Atommodelle von *Thomson* bis *Schrödinger* und *Pauli* illustriert den schrittweisen Übergang von der klassischen zur Quantenmechanik. Das Wasserstoffatom diente in ihrer Entstehung oft als Prüfstein der Methoden der Quantenmechanik und die korrekte Berechnung der experimentell bekannten Spektren, verhalfen den neuen physikalischen Ideen von Indeterminiertheit, Unschärfe usw. der mikroskopischen Vorgänge zu allgemeiner Akzeptanz.

In Kapitel 2 wird das Keplerproblem in Bezug auf den Laplace-Runge-Lenz-Vektor und versteckte Symmetrien ausführlich behandelt. Nach dem ersten Abschnitt zur Herleitung der Planetenbahnen, angelehnt an [4], folgt eine Untersuchung der Symmetriegruppen $SO(4)$, wie sie in vielen Lehrbüchern zu finden ist, und $SU(3)$, wie sie von *Dulock/McIntosh* veröffentlicht wurde [29]. In Abschnitt 2.3 werden wir uns mit geometrischen Überlegungen zu den

Planetenbahnen und ihren Hodographen beschäftigen. Die Vorgehensweise und die Graphiken sind [5] nachempfunden. Danach werden die vom Laplace-Runge-Lenz-Vektor generierten kanonischen Transformationen betrachtet, wie sie von *Mostowski* hergeleitet wurden [21], und die Symmetrietransformationen der $SO(4)$ von *Rogers* [12]. Schließlich wird eine weitere Methode von *Görranson* [11] vorgestellt, die die vierdimensionale Rotations-symmetrie mit Hilfe der geschickten Parametrisierung der Keplerbahnen in der Raumzeit herleitet.

Im dritten Kapitel wenden wir uns dem Wasserstoffatom zu. Nach der einführenden algebraischen Herleitung der Balmerformel wird der Weg über die kanonischen Transformationen von *Bargmann* [3] zur globalen Methode von *Fock* gezeigt, die daraufhin [17] und [8] folgend dargestellt wird. Abschließend werden wir sehen, dass eine supersymmetrische Behandlung des Wasserstoffatoms direkt auf den Laplace-Runge-Lenz-Operator führt, was von *Lyman* und *Aravind* zuerst 1992 gezeigt wurde [14].

Im letzten Kapitel wird noch kurz eine analoge Konstruktion zum Laplace-Runge-Lenz-Vektor für die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem Magnetfeld von *Velasco-Martinez et al.* [6] vorgestellt.

Die Arbeit soll einen Überblick über die verschiedenen Herangehensweisen an die vorgestellten physikalischen Fragestellungen in Bezug zum Laplace-Runge-Lenz-Vektor und den damit einhergehenden versteckten Symmetrien geben. Dabei werden viele wichtige Methoden der theoretischen Physik (z.B. *Hamilton-* und *Hamilton-Jacobi-Formalismus* aus der klassischen Mechanik, Eigenschaften des quantenmechanischen Drehimpulses, *Wigner-D-Funktionen* u.a.) aus dem Programm des Bachelorstudiums wiederholt und gebraucht, während auch einige neue, auf der Basis des Grundstudiums aufbauend jedoch leicht verständliche Konzepte eingeführt werden (z.B. *Wirkungs-* und *Winkelvariablen*, *Quaternionen* und *supersymmetrische Quantenmechanik*).

2. Das Kepler-Problem

2.1 Lösung des Zweikörperproblems

Das einfachste Modellsystem zur Berechnung von Planetenbahnen ist das Zweikörpersystem bestehend aus zwei punktförmigen Massen M und m , so wie es auch Laplace in seiner ersten Näherung betrachtet. Vereinfacht nehmen wir an, dass eine der Massen (die Sonne) im Ursprung ruhe und die andere sich mit der reduzierten Masse $\mu = \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)^{-1}$ im Zentralpotential

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}$$

bewege, wobei $\kappa = \gamma\mu(M + m)$ mit der Gravitationskonstante γ . Betrachten wir nun den Laplace-Runge-Lenz-Vektor (im folgenden oft mit LRL-Vektor abgekürzt) definiert als:

$$\vec{A} = \frac{1}{\mu}\vec{p} \times \vec{L} - \kappa\frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1)$$

(mit dem Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$).

Er ist in kugelsymmetrischen $1/r$ -Potentialen zeitlich konstant

$$\dot{\vec{A}} = 0. \quad (2.2)$$

Beweis: Wir rechnen mit $\dot{\vec{L}} = 0$, $\vec{p} \cdot \vec{r} = pr = \mu\dot{r}r$ und der Identität: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}} &= \frac{1}{\mu} \left(\dot{\vec{p}} \times \vec{L} + \vec{p} \times \dot{\vec{L}} \right) - \kappa \left(\frac{r\dot{\vec{r}} - \dot{r}\vec{r}}{r^2} \right) \\ &= \frac{1}{\mu} \left(\dot{\vec{p}} \times (\vec{r} \times \vec{p}) \right) - \frac{\kappa\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\kappa\dot{r}\vec{r}}{r^2} \\ &= \frac{1}{\mu} \left((\dot{\vec{p}} \cdot \vec{p})\vec{r} - (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{p} \right) - \frac{\kappa\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\kappa(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{\mu r^3} \end{aligned}$$

und setzen die Newtonsche Bewegungsgleichung $\dot{\vec{p}} = -\kappa\frac{\vec{r}}{r^3}$ ein:

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\kappa}{\mu} \left(-\frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})\vec{r}}{r^3} + \frac{\dot{\vec{p}}}{r} \right) - \frac{\kappa\dot{\vec{r}}}{\mu r} + \frac{\kappa(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{\mu r^3} = 0.$$

Da auch der Drehimpuls in einem solchen Potential eine Erhaltungsgröße ist, findet die Bewegung in der Ebene senkrecht zu ihm statt. Wir wählen zylinderförmige Koordinaten (r, φ, z) so, dass diese Ebene mit der (x, y) -Ebene zusammenfällt und können Drehimpuls und LRL-Vektor als

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \mu r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \\ \vec{A} &= (\mu r^3 \dot{\varphi}^2 - \kappa) \vec{e}_r - \mu r^2 \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

schreiben.

Beweis: Mit $\vec{p} = \mu(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)$ folgt:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{\mu}\vec{p} \times \vec{L} - \kappa\vec{e}_r \\ &= \mu r^2 \dot{\varphi} \dot{r} (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) + \mu r^3 \dot{\varphi}^2 (\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z) - \kappa\vec{e}_r \\ &= \mu r^2 \dot{\varphi} \dot{r} \vec{e}_\varphi + \mu r^3 \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r - \kappa\vec{e}_r \end{aligned}$$

Der LRL-Vektor liegt also in der Bewegungsebene und wir wählen den Winkel φ so, dass \vec{A} antiparallel zur x -Achse zeigt. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} -\vec{r} \cdot \vec{A} &= -r \vec{e}_r \cdot \vec{A} = -r(\mu r^3 \dot{\varphi}^2 - \kappa) \\ &= -\frac{L^2}{\mu} + r\kappa = Ar \cos(\varphi), \end{aligned}$$

so erhalten wir durch Umstellen

$$\vec{r}(\varphi) = \frac{L^2}{\mu\kappa \left(1 - \frac{A}{\kappa} \cos(\varphi)\right)} \vec{e}_r. \quad (2.3)$$

Dies entspricht der Kegelschnittgleichung in Polarkoordinaten mit der numerischen Exzentrizität ε :

$$\vec{r}(\varphi) = \frac{\xi}{1 - \varepsilon \cos(\varphi)} \vec{e}_r.$$

Für $\varepsilon < 1$ beschreibt dies eine Ellipse mit Ursprung im linken Fokus, also die geschlossenen Bahnen des Zweikörperproblems (Gesamtenergie $E < 0$), mit folgenden Eigenschaften:

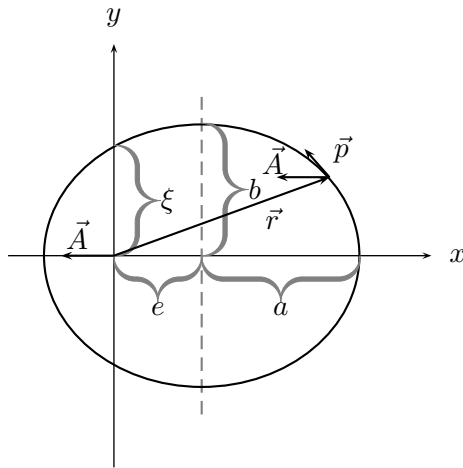


Abbildung 2.1: Elliptische Planetenbahn

Große Halbachse:	a
Kleine Halbachse:	b
Lineare Exzentrizität:	$e = \sqrt{a^2 - b^2}$
Numerische Exzentrizität:	$\varepsilon = \frac{e}{a}$
Semi-Latus Rectum:	$\xi = \frac{b^2}{a}$

Aus Gleichung (2.3) lassen sich sofort numerische Exzentrizität und Semi-Latus Rectum ablesen, die zusammen die Form der Ellipse festlegen:

$$\varepsilon = \frac{A}{\kappa}, \quad \xi = \frac{L^2}{\mu\kappa}$$

Der LRL-Vektor zeigt also entlang der großen Hauptachse zum Perihel¹⁾ und seine Norm ist eng mit der Exzentrizität verknüpft.

¹⁾Perihel: Punkt der Planetenbahn mit geringstem Abstand zur Sonne (im Gegensatz zum Aphel: Punkt mit größtem Abstand).

2.2 Symmetrien

Das Noethersche Theorem lässt sich folgendermaßen formulieren:

Das Noethersche Theorem:

Zu jeder Erhaltungsgröße korrespondiert eine Symmetrie des Systems.

D.h. genauer: Aus jeder Erhaltungsgröße (z.B. Energie, Impuls, Drehimpuls etc.) resultiert die Existenz einer kontinuierlichen Einparameterfamilie von kanonischen Transformationen, unter deren Gruppenwirkung das System (besser: das Wirkungsfunktional) invariant ist (zeitliche und räumliche Translation, Rotationen usw.) und umgekehrt.

Damit muss es eine weitere Symmetrie des Keplersystems geben, die zum LRL-Vektor gehört. Kontinuierliche Gruppen werden durch die Theorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren beschrieben. Nach dem Noetherschen Theorem ist der Drehimpuls \vec{L} mit der dreidimensionalen Rotationssymmetriegruppe $SO(3)$ verknüpft. Dies äußert sich dahingehend, dass die Komponenten L_1, L_2, L_3 die gleichen Poissonklammerrelationen erfüllen, wie die Basiselemente der $so(3)$ -Lie-Algebra:

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$$

mit $i, j, k = 1, 2, 3$, der *Einsteinschen* Summenkonvention und dem *Levi-Cevita*-Tensor ε_{ijk} .

2.2.1 Die $SO(4)$ -Symmetrie

Um nun die versteckte²⁾ Symmetrie des LRL-Vektors zu finden, betrachten wir die Poissonklammern seiner Komponenten und kommen nach seitenlangen Rechnungen auf:

$$\{A_i, A_j\} = \frac{-2E}{\mu} \varepsilon_{ijk} L_k$$

Die Komponenten von \vec{A} sind mit denen des Drehimpulses und der Energie gekoppelt. Wir

²⁾Versteckt, weil nicht offensichtlich wie die 3-dim.-Rotationssymmetrie.

beschränken uns auf geschlossene Bahnen ($E < 0$), definieren

$$\vec{A}' := \sqrt{\frac{\mu}{-2E}} \vec{A}$$

und bestimmen die Poissonklammerbeziehungen aller sechs Komponenten von \vec{L} und \vec{A}' :

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k \quad (2.4a)$$

$$\{A'_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} A'_k \quad (2.4b)$$

$$\{A'_i, A'_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k. \quad (2.4c)$$

Dies ist die Lie-Algebra der *Speziellen Orthogonalen Gruppe* $SO(4)$ bestehend aus Rotationen in vier Dimensionen. Die vom Drehimpuls generierte $SO(3)$ ist also nur eine Untergruppe der eigentlich vierdimensionalen Rotationsgruppe. Die Gruppe $SO(4)$ lässt sich auch als das cartesische Produkt $SO(4) = SO(3) \times SO(3)$ schreiben.

Das sieht man, indem man die Gleichungen (2.4) durch die Definition von

$$M = \frac{1}{2} (\vec{L} + \vec{A}'), \quad N = \frac{1}{2} (\vec{L} - \vec{A}')$$

entkoppelt:

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk} M_k \\ \{N_i, N_j\} &= \varepsilon_{ijk} N_k \end{aligned}$$

(siehe quantenmechanische Behandlung in 3.1)

Schließlich kann man feststellen, dass

$$\frac{1}{2} (L^2 + A'^2)$$

eine Invariante bzgl. der so generierten Gruppe ist und sich die Hamiltonfunktion damit durch

$$H = -\frac{\mu}{2} \frac{\kappa^2}{A'^2 + L^2} \quad (2.5)$$

darstellen lässt. Somit ist gezeigt, dass das Zweikörpersystem tatsächlich vierdimensionale Rotationssymmetrie besitzt. In Abschnitt 2.3 werden wir uns etwas ausführlicher mit der geometrischen Deutung der Symmetrie und der generierten Gruppe beschäftigen. Zunächst wollen wir auf eine weitere Symmetrie eingehen.

2.2.2 Die $SU(3)$ -Symmetrie

Dulock und *McIntosh* zeigen in [29], dass sich auch die Spezielle Unitäre Gruppe in drei Dimensionen, $SU(3)$, als Symmetriegruppe des Keplerproblems finden lässt. Sie bemerken, dass eine $SU(n)$ -Symmetrie immer dann auftaucht, wenn es eine Entartung bzgl. der Energie gibt, d.h. im quantenmechanischen Analogon des Keplerproblems (dem Wasserstoffatom) die n^2 -fache Entartung des n -ten Energieniveaus bzgl. der Drehimpulsquantenzahl³⁾. Außerdem ist $SU(n)$ die Symmetriegruppe des n -dimensionalen harmonischen Oszillators, der, da er in n eindimensionale Oszillatoren separierbar ist, als Paradebeispiel eines entarteten Systems gelten kann. Somit sollten alle Systeme mit Energieentartung im Rahmen des *Hamilton-Jacobi-Formalismus* durch geeignete Separation der Variablen in den n -dimensionalen Oszillator überführbar sein und damit auch $SU(n)$ als Symmetrie aufweisen. Das Vorgehen aus [29] soll hier nur kurz skizziert werden, da es viele langwierige Rechnungen und Integrale enthält. Begonnen wird mit der Hamiltonfunktion in Kugelkoordinaten

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \right) - \frac{\kappa}{r} \quad (2.6)$$

und aus der *Hamilton-Jacobi-Gleichung* folgt:

$$p_\varphi = L_z = \text{const.} \quad (2.7a)$$

$$p_\vartheta = \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2(\vartheta)}} \quad (2.7b)$$

$$p_r = \sqrt{2E + \frac{2}{r} - \frac{L^2}{r^2}} \quad (2.7c)$$

Beweis: Zunächst setzen wir \dot{x}, \dot{y} und \dot{z} in Kugelkoordinaten in die Hamiltonfunktion ein und erhalten:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mu}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\kappa}{r} \\ &= \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2) - \frac{\kappa}{r}. \end{aligned}$$

³⁾Auch im klassischen Fall lässt sich u.U. die Hamiltonfunktion als Operator auf Funktionen des Phasenraums auffassen.

Aus der Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = T - V = H + 2\kappa/r$ folgen die generalisierten Impulse

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \\ p_\vartheta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \mu r^2 \dot{\vartheta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Ziel des Hamilton-Jacobi-Formalismus ist es, eine Erzeugendenfunktion $S(q_i, p'_i)$ zu finden, die eine Koordinatentransformation erzeugt, die die Koordinaten und Impulse $(q_i, p_i) \mapsto (q'_i, p'_i)$, so abbildet, dass die neuen generalisierten Impulse p'_i alle konstant sind. Man sucht im Prinzip den Raum, in dem das System als kräftefreie Bewegung beschrieben wird. Die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung lautet dann:

$$\begin{aligned} H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) &= E \quad \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2\mu} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \right) - \frac{\kappa}{r} &= E, \end{aligned}$$

wobei S der Hamiltonschen Wirkungsfunktion entspricht. Nach dem allgemeinen Lösungsverfahren (vgl. z.B. [24], S. 170 ff.), setzt man die bei der Lösung gewonnenen Integrationskonstanten α_i den neuen Impulsen p'_i gleich. Wir wollen aber zur besseren Interpretierbarkeit der Ergebnisse an den Impulsen in Kugelkoordinaten festhalten und drücken diese durch die α_i aus:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \alpha_\varphi \\ p_\vartheta &= \sqrt{\alpha_\vartheta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2(\vartheta)}} \\ p_r &= \sqrt{2E + \frac{2}{r} - \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2}} \end{aligned}$$

und durch den Vergleich mit dem Drehimpuls in Kugelkoordinaten

$$\vec{L} = \mu \begin{pmatrix} -r^2(\sin(\varphi)\dot{\vartheta} + \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\dot{\varphi}) \\ r^2(\cos(\varphi)\dot{\vartheta} + \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\dot{\varphi}) \\ r^2 \sin^2(\vartheta)\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$L^2 = \mu^2 r^4 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\vartheta)) = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\vartheta)}$$

folgt (2.7).

Fortgefahren wird nun mit der Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen, die bei periodischen Bewegungen Erleichterung verschafft: Anstelle der α_i können auch beliebige Funktionen von ihnen als neue generalisierte Impulse benutzt werden z.B. die Wirkungsvariablen

$$J_i = \oint_{\text{Eine Periode}} p_i dq_i.$$

Sie entsprechen jeweils dem Betrag, um den die Wirkung bzgl. der Koordinate i während einer Periode zunimmt⁴⁾. Nun lassen sich die dazu konjugierten Winkelvariablen berechnen:

$$\omega_i = \frac{\partial S}{\partial J_i}$$

berechnen. Das Praktische hieran ist, dass die zeitliche Änderung $\nu_i := \dot{\omega}_i$, die nach den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\nu_i = \dot{\omega}_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \tilde{H}(J_i)$$

beträgt, der Frequenz entspricht, die zur periodischen Bewegung der Koordinate q_i gehört. Dabei ist $\tilde{H}(J_i)$ die Hamiltonfunktion ausgedrückt durch die Wirkungsvariablen. Für eine ausführliche Berechnung der Wirkungsvariablen im Falle des Keplerproblems sei auf [24] (S. 194 ff.) und für eine weniger ausführliche Herleitung der Winkelvariablen auf [29] verwiesen. Die Ergebnisse sind zum Einen:

$$\begin{aligned} J_\varphi &= 2\pi\alpha_\varphi = 2\pi L_z \\ J_\vartheta &= 2\pi(\alpha_\vartheta - \alpha_\varphi) = 2\pi(L - L_z) \\ J_r &= -(J_\vartheta + J_\varphi) + \pi\kappa\sqrt{\frac{2\mu}{-E}} \\ &= -2\pi L + \pi\kappa\sqrt{\frac{2\mu}{-E}}, \end{aligned}$$

zum Anderen sind die Winkelvariablen bzgl. folgender charakteristischer Winkel der Keplerbahn angegeben: An einem Knoten⁵⁾ schließt die Bewegungsebene mit der (x, y) -Ebene den Diederwinkel $\beta \in [0, \pi/2]$ ein. Für ihn gilt:

$$\cos(\beta) = \frac{L_z}{L} = \frac{\alpha_\varphi}{\alpha_\vartheta}.$$

⁴⁾Erinnerung: die Wirkung A zwischen den Punkten \vec{q}_0 und \vec{q}_1 ist definiert als: $A = \int_{\vec{q}_0}^{\vec{q}_1} \sum_{i=1}^d p_i dq_i$.

⁵⁾In der Astronomie werden so die Punkte bezeichnet, in denen die Planetenbahn eine gegebene Ebene durchstößt.

Der Azimutalwinkel am Knoten sei φ_0 . Schließlich lässt sich in der Bewegungsebene ein zweidimensionales Koordinatensystem $\tilde{x} = r \cos(\psi - \psi_0)$, $\tilde{y} = r \sin(\psi - \psi_0)$ einführen, wobei ψ_0 wiederum der Winkel am Knoten sein soll. Die Winkelvariablen sind dann:

$$\begin{aligned}\omega_r &= \frac{1}{2\pi} [\zeta - \varepsilon \sin(\zeta)] \\ \omega_\vartheta &= \frac{1}{2\pi} [\zeta - \varepsilon \sin(\zeta) + \psi_0] \\ \omega_\varphi &= \frac{1}{2\pi} [\zeta - \varepsilon \sin(\zeta) + \psi_0 + \varphi_0]\end{aligned}$$

mit der elliptischen Anomalie ζ (siehe Abschnitt 2.4.1). Nun lassen sich die drei Größen

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \sqrt{\frac{J_r}{2\pi}} e^{2\pi i \omega_r}, & \mathbf{b} &= \sqrt{\frac{J_\vartheta}{2\pi}} e^{2\pi i \omega_\vartheta} \\ \mathbf{c} &= \sqrt{\frac{J_\varphi}{2\pi}} e^{2\pi i \omega_\varphi}\end{aligned}$$

definieren und zu den neun Erhaltungsgrößen

$$\mathbf{aa}^*, \mathbf{ab}^*, \mathbf{ac}^*, \mathbf{ba}^*, \mathbf{bb}^*, \mathbf{bc}^*, \mathbf{ca}^*, \mathbf{cb}^*, \mathbf{cc}^*$$

kombinieren, die die $SU(3)$ generieren.

Z.B. gilt:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{bc}^*, \mathbf{ab}^*\} &= \\ \left\{ \frac{\sqrt{J_\vartheta J_\varphi}}{2\pi} e^{2\pi i(\omega_\vartheta - \omega_\varphi)}, \frac{\sqrt{J_r J_\vartheta}}{2\pi} e^{2\pi i(\omega_r - \omega_\vartheta)} \right\} &= \\ = \frac{\partial \mathbf{bc}^*}{\partial \omega_\vartheta} \frac{\partial \mathbf{ab}^*}{\partial J_\vartheta} - \frac{\partial \mathbf{bc}^*}{\partial J_\vartheta} \frac{\partial \mathbf{ab}^*}{\partial \omega_\vartheta} &= \\ = i \frac{\sqrt{J_r J_\varphi}}{2\pi} e^{2\pi i(\omega_r - \omega_\varphi)} = i \mathbf{ac}^* = i f^{123} \mathbf{ac}^* &\end{aligned}$$

mit der Strukturkonstanten $f^{123} = 1$ der $SU(3)$ -Lie-Algebra.

Die konstanten Winkel β , φ_0 und ψ_0 lassen sich nun noch durch die Erhaltungsgrößen, um ein anschaulicheres Bild zu erhalten.

$$\begin{aligned}\cos(\beta) &= \frac{\mathbf{cc}^*}{\mathbf{bb}^* + \mathbf{cc}^*} \\ \sin(\psi_0) &= \frac{i(\mathbf{ab}^* - \mathbf{ba}^*)}{2\sqrt{\mathbf{aa}^* \mathbf{bb}^*}}, \quad \cos(\psi_0) = \frac{(\mathbf{ab}^* + \mathbf{ba}^*)}{2\sqrt{\mathbf{aa}^* \mathbf{bb}^*}} \\ \sin(\varphi_0) &= \frac{i(\mathbf{bc}^* - \mathbf{cb}^*)}{2\sqrt{\mathbf{bb}^* \mathbf{cc}^*}}, \quad \cos(\varphi_0) = \frac{(\mathbf{bc}^* + \mathbf{cb}^*)}{2\sqrt{\mathbf{bb}^* \mathbf{cc}^*}}\end{aligned}$$

Die Autoren von [29] zeigen außerdem ähnliche Rechnungen für das zweidimensionale Keplerproblem, wobei sie entsprechend auf eine $SU(2)$ -Symmetrie stoßen. Dabei ergeben sich die Komponenten des LRL-Vektors und des Drehimpulses mehr oder weniger direkt, je nachdem ob in Polar- oder parabolische Koordinaten gerechnet wird. Die Symmetriegruppe, die man findet hängt also stark von den Koordinaten ab, in die das Problem separiert wurde. Hier wurde die $SU(3)$ gefunden zusammen mit zusätzlichen Erhaltungsgrößen, die über die Winkel β , φ_0 und ψ_0 die Planetenbahn ebenso eindeutig festlegen, wie LRL- und Drehimpulsvektor. Damit wurde außerdem gezeigt, dass das Keplerproblem in den harmonischen Oszillator überführt werden kann⁶⁾.

2.3 Hodographie

Als *Hodograph* bezeichnet man die Bahn der Geschwindigkeitsvektoren bzw. die Trajektorie im Impulsraum. Die Methode, aus der Form des Hodographen, anstelle der tatsächlichen Teilchenbahn, auf Eigenschaften eines physikalischen Systems zu schließen, wurde erstmals von *R. W. Hamilton* verwandt. Im Falle des Keplerproblems handelt es sich um kreisförmige Hodographen, die leichter geometrisch zu behandeln sind als die elliptischen Planetenbahnen. Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit den Eigenschaften von Hodographen gleicher Energie beschäftigen und vor allem die Grundlage zum geometrischen Verständnis der kanonischen Transformationen des nächsten Abschnitts legen.

Wir beginnen zunächst mit der Betrachtung des Spezialfalles einer kreisförmigen Planetenbahn mit Radius R in der (x, y) -Ebene. Der Planet bewegt sich dabei mit gleichförmiger Geschwindigkeit v . Die Impulsvektoren bilden während eines Umlaufs einen Kreis im (p_x, p_y) -Impulsraum mit Radius $\mu v = L/R$ (s. Abbildung 2.3).

⁶⁾Das ist für eine kreisförmige Bahn durch die Parametrisierung $\vec{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t))$ offensichtlich, aber nicht für die Bewegung auf einer elliptischen Bahn mit ungleichförmiger Geschwindigkeit.

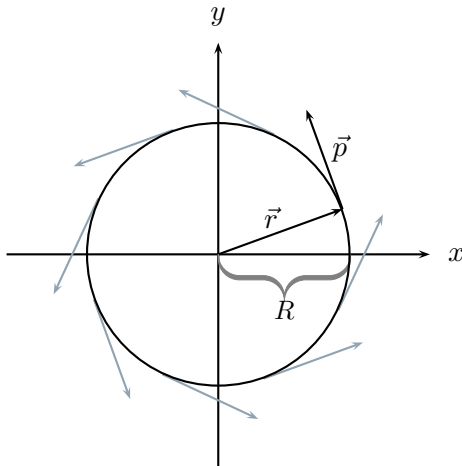


Abbildung 2.2: Kreisförmige Planetenbahn

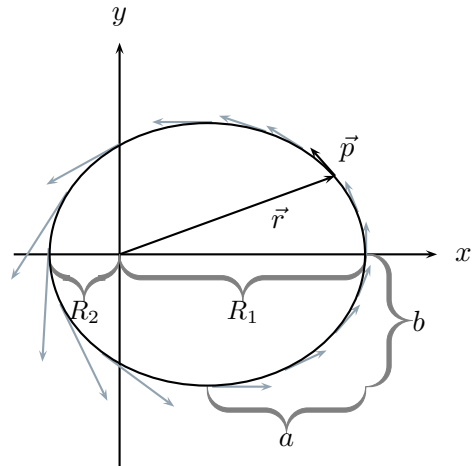


Abbildung 2.4: Elliptische Planetenbahn

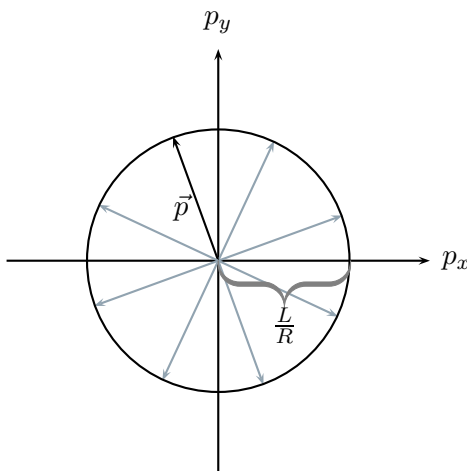


Abbildung 2.3: Hodograph der kreisförmigen Planetenbahn

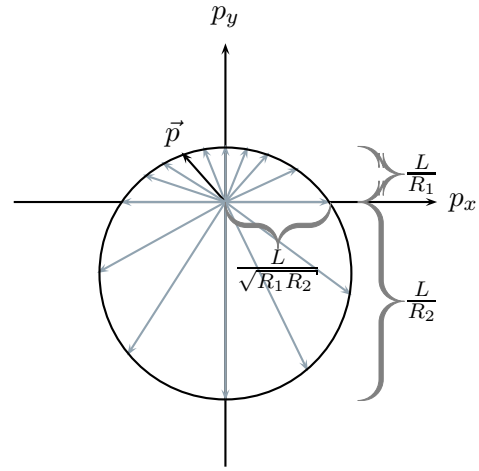


Abbildung 2.5: Hodograph der elliptischen Planetenbahn

Gehen wir nun zu einer elliptischen Bahn mit dem Ursprung im linken Fokus, großer Hauptachse $a = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$, kleiner Hauptachse $b = \sqrt{R_1 R_2}$, numerischer Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a = (R_2 - R_1)/(R_1 + R_2)$ und Latus Rectum $\xi = 2R_1 R_2/(R_1 + R_2)$ über, so liegen die Impulsvektoren wieder auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt jedoch nicht der Ursprung der (p_x, p_y) -Ebene ist (s. Abbildung 2.5). Genaue gilt:

$$\vec{p}(\varphi) = \frac{L}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \end{pmatrix} + \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right]. \quad (2.8)$$

Der Mittelpunkt ist also um $\frac{L|R_1 - R_2|}{2R_1 R_2}$ auf der p_y -Achse nach unten verschoben und der Radius beträgt $\frac{L(R_1 + R_2)}{2R_1 R_2} = \frac{\kappa}{L}$.

Beweis von Gleichung (2.8): Ausgehend von der Ellipsengleichung in Polarkoordinaten mit linkem Fokus im Ursprung⁷⁾

$$\vec{r}(\varphi) = \frac{\xi}{1 - \varepsilon \cos(\varphi)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

liefert die Zeitableitung mit $\vec{p}(\varphi) = \mu \dot{\vec{r}}(\varphi)$ und $\dot{\varphi} = L/(\mu r^2)$:

$$\begin{aligned} \vec{p}(\varphi) &= \mu \dot{\varphi} \left[\frac{-\xi \varepsilon \sin(\varphi)}{(1 - \varepsilon \cos(\varphi))^2} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \frac{\xi}{1 - \varepsilon \cos(\varphi)} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right] \\ &= L \left[\frac{-\varepsilon \sin(\varphi)}{\xi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \frac{1 - \varepsilon \cos(\varphi)}{\xi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

⁷⁾Setze positives Vorzeichen vor ε für Ursprung im rechten Fokus.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{L}{\xi} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{L}{2} \left[\frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{(R_2 - R_1)}{(R_1 + R_2)} \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{L}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \end{pmatrix} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right].
 \end{aligned}$$

Die Energie des Systems beträgt:

$$E = \frac{-L^2}{2\mu R_1 R_2} = \frac{-L^2}{2\mu b^2} = \frac{-\kappa}{2a} \quad (2.9)$$

Beweis: Aus Abbildung (2.5) lässt sich der Impuls am Ap- und Perihel direkt ablesen. Somit:

$$\begin{aligned}
 E(\varphi = 0) &= \frac{1}{2\mu} \frac{L^2}{R_1^2} - \frac{\kappa}{R_1} \\
 \Leftrightarrow R_1 E &= \frac{1}{2\mu} \frac{L^2}{R_1} - \kappa \quad (2.10a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(\varphi = \pi) &= \frac{1}{2\mu} \frac{L^2}{R_2^2} - \frac{\kappa}{R_2} \\
 \Leftrightarrow R_2 E &= \frac{1}{2\mu} \frac{L^2}{R_2} - \kappa \quad (2.10b)
 \end{aligned}$$

Durch Differenzbildung der zwei Gleichungen (2.10a)–(2.10b) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 (R_1 - R_2)E &= \frac{L^2}{2\mu} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\
 \Leftrightarrow E &= \frac{-L^2}{2\mu R_1 R_2}
 \end{aligned}$$

Aus Abbildung (2.5) wird auch sofort ersichtlich, dass der Impuls an den Stellen, an denen sich der Planet parallel zur x -Achse bewegt, nur von der Energie abhängt, denn dort gilt:

$$p = \frac{L}{\sqrt{R_1 R_2}} = \sqrt{-2\mu E}. \quad (2.11)$$

Der Abstand zur Sonne (=Ursprung) dieser Punkte beträgt a . Das bedeutet, alle möglichen Ellipsenbahnen besitzen die gleiche Energie, deren Geschwindigkeiten (die Masse des Planeten sei immer gleich) im Abstand a von der Sonne parallel zur x -Achse zeigen und den gleichen Betrag haben.

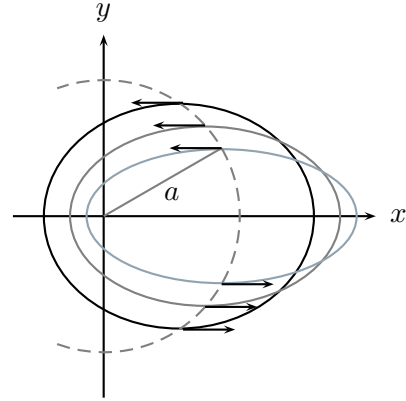


Abbildung 2.6: Elliptische Planetenbahnen gleicher Energie

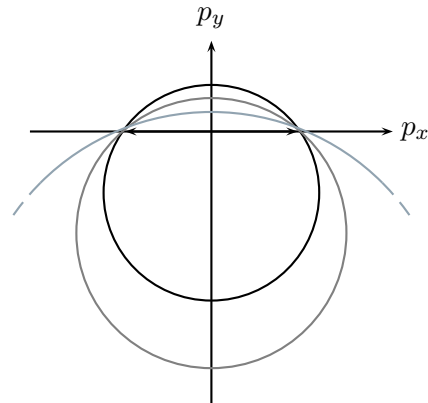


Abbildung 2.7: Hodographen gleicher Energie

Wir können also, indem wir diese Impulsvektoren auf einem Kreis mit Radius a um die Sonne verschieben, neue Bahnen mit gleicher Energie erhalten, wobei die große Halbachse a erhalten bleibt, sich aber b und somit die Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ ändert. Die dazu korrespondierenden Hodographen schneiden sich alle auf der p_x -Achse in den Punkten $p_x = \pm\sqrt{-2\mu E} =: \pm p_0$ (s. Abbildung 2.7).

Die gleiche Schar von Kreisen erhalten wir jedoch auch durch stereographische Projektion von Großkreisen einer 2-Sphäre mit Radius $p_0/2$, die tangential am Ursprung anliegt: Stereographische Projektion z.B. bzgl. des Nordpols N , bedeutet, dass ein Punkt P der Sphäre auf den Schnittpunkt der Geraden, die durch N und P geht, mit der (p_x, p_y) -Ebene abgebildet wird. Projizieren wir zunächst den Äquator (s. Abbildung 2.8), erhalten wir den Hodographen korrespondierend zur kreisförmigen Bahn aus Abbildung 2.3. Durch

Kippen des Großkreises zur p_y -Achse hin oder weg, können wir nun alle anderen Kreise gleicher Energie aus Abbildung 2.7 erzeugen.

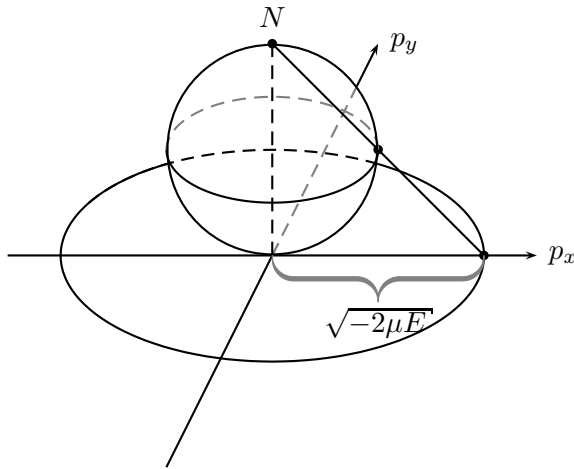


Abbildung 2.8: Stereographische Projektion des Äquators auf die (p_x, p_y) -Ebene.

Da wir bisher nur die Bahnen in einer Ebene betrachtet haben, nehmen wir jetzt noch alle dreidimensionalen Rotationen dieser Bahnen um den Ursprung hinzu (die aufgrund der Rotationssymmetrie des Potentials natürlich auch die Energie erhalten) und können nun alle möglichen geschlossenen Planetenbahnen zur Energie $E < 0$ durch stereographische Projektion aller Großkreise auf der dreidimensionalen Sphäre S^3 (dreidimensionaler Rand der vierdimensionalen Einheitskugel) auf den dreidimensionalen Impulsraum konstruieren.

Explizit wollen wir die Stereographische Projektion als eine Abbildung $S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieren und lassen sie einen Punkt der S^3

$$u = (\chi, \varrho, \sigma, \tau)^\top =: (\chi, \vec{u})^\top$$

mit $\sqrt{\chi^2 + |\vec{u}|^2} = 1$ auf den Schnittpunkt \vec{p} der Geraden G mit der $\{\chi = 0\}$ -Hyperebene abbilden:

$$\begin{aligned} G &= \{N + \lambda(u - N) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ N &= (p_0, 0, 0, 0)^\top \\ \Rightarrow \vec{p} &= \frac{\sqrt{-2\mu E}}{1 - \chi} \vec{u}. \end{aligned}$$

Um zu verstehen, wie sich die Drehung eines Großkreises auf der S^3 auf die Form des Orbits auswirkt, betrachten wir zunächst wieder

das Urbild des Hodographen der kreisförmigen Bahn. Ein Punkt auf diesem Großkreis kann als

$$u = (0, \cos(\vartheta), \sin(\vartheta), 0)^\top$$

geschrieben werden. Die Rotation um einen Winkel α führen wir z.B. in der (χ, ϱ) -Ebene aus, die sich als

$$R_{\chi, \varrho}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

darstellen lässt und erhalten

$$\begin{aligned} u' &= R_{\chi, \varrho}(\alpha)u \\ &= (\sin(\alpha) \cos(\vartheta), \cos(\alpha) \cos(\vartheta), \sin(\vartheta), 0)^\top. \end{aligned}$$

Nach Projektion haben wir also folgende Transformation im Impulsraum ausgeführt:

$$\begin{aligned} \vec{p}(\vartheta) &= p_0 \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \\ \vec{p}'(\vartheta) &= \frac{p_0}{1 - \sin(\alpha) \cos(\vartheta)} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= p_0 \left(\begin{pmatrix} -\tan(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\cos(\alpha)} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta') \\ \sin(\vartheta') \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Aus einem Vergleich mit Gleichung (2.8) folgt somit der Drehimpuls der neuen Bahn:

$$L' = \frac{\kappa}{\sqrt{-2\mu E}} \cos(\alpha) = L_o \cos(\alpha) \quad (2.12)$$

(mit dem Drehimpuls der kreisförmigen Bahn L_o .) Im folgenden Abschnitt, werden wir sehen, dass diese Art der Transformationen genau die infinitesimalen kanonischen Transformationen sind, die vom Laplace-Runge-Lenz-Vektor generiert werden.

2.4 Kanonische Transformationen der Kepler Bahnen

Eine kanonische Transformation, ist eine Abbildung, die einen Satz kanonischer Variablen und Impulse (\vec{q}, \vec{p}) , mit denen ein System beschrieben wird, auf einen anderen Satz (\vec{Q}, \vec{P}) abbildet und dabei die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und alle Poissonklammerbeziehungen erhält. Eine kanonische Transformation kann von einer beliebigen Funktion⁸⁾ $F(\vec{q}, \vec{Q})$ erzeugt werden [28]. Sei $(\vec{Q}(\lambda), \vec{P}(\lambda))$ eine Einparameterfamilie kanonischer Transformationen, die für $\lambda = 0$ die Identität ist, also $(\vec{Q}(0), \vec{P}(0)) = (\vec{q}, \vec{p})$, und differenzierbar in λ . Das heißt, die Koordinaten q_i lassen sich stetig in $q_i(\lambda)$ überführen und sind für alle λ kanonisch. Wie sich eine beliebige Funktion $F(\vec{Q}(\lambda), \vec{P}(\lambda))$ in Abhängigkeit von λ ändert, lässt sich über die Poissonklammer mit dem Generator berechnen [12]:

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \{F(\lambda), G\}. \quad (2.13)$$

Dies kann unter Umständen auf elementar nicht lösbare Differentialgleichungen führen, deswegen werden häufig nur infinitesimale Transformationen betrachtet und die Funktion F für kleine λ bis zur ersten Ordnung entwickelt:

$$F(\lambda) \approx F(0) + \lambda\{F(\lambda), G\}. \quad (2.14)$$

Wenn man für F z.B. eine Koordinate einsetzt und eine Erhaltungsgröße als Generator benutzt, erhält man Symmetrietransformationen des Systems, die über das Noethersche Theorem mit dieser Erhaltungsgröße verknüpft sind. Die Hamiltonfunktion generiert beispielsweise die Zeitentwicklung des Systems, dargestellt als passive Transformation der Koordinaten, der Drehimpuls generiert dreidimensionale Rotationen [21]. Deshalb ist der Drehimpuls der infinitesimale Generator der $SO(3)$ -Symmetriegruppe bezogen auf räumliche Rotationen des Keplerproblems.

Zunächst wollen wir die vom Laplace-Runge-Lenz-Vektor generierten infinitesimalen kanonischen Transformationen untersuchen und uns

dann der zusammen mit dem Drehimpuls generierten Symmetriegruppe $SO(4)$ zuwenden.

2.4.1 Der LRL-Vektor als Generator

Um die Wirkung der vom LRL-Vektor generierten Transformationen zu verstehen, betrachten wir ([21] folgend) die zweidimensionale Parametrisierung der Planetenbahn über die *exzentrische Anomalie* ζ (anstelle der *wahren Anomalie* φ wie bisher), die über die Keplergleichung $\zeta - \varepsilon \sin(\zeta) = \omega t$ ($t=0$ am Aphel) mit der *mittleren Anomalie*, also der gleichmäßigen Bewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω auf dem Umkreis der Ellipse, zusammenhängt. Die Koordinaten mit dem Ursprung weiterhin im linken Fokus sind dann:

$$x = a \cos(\zeta) + e = a(\cos(\zeta) + \varepsilon) \quad (2.15a)$$

$$y = b \sin(\zeta) = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin(\zeta) \quad (2.15b)$$

und mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\zeta - \varepsilon \sin(\zeta)) &= (1 - \varepsilon \cos(\zeta))\dot{\zeta} = \omega \\ \Rightarrow \dot{\zeta} &= \frac{\omega}{1 - \varepsilon \cos(\zeta)} \end{aligned}$$

sind die Impulse:

$$p_x = \frac{-a\omega \sin(\zeta)}{1 - \varepsilon \cos(\zeta)} \quad (2.16a)$$

$$p_y = a\omega \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\cos(\zeta)}{1 - \varepsilon \cos(\zeta)} \quad (2.16b)$$

Verwenden wir nun die y -Komponente des LRL-Vektors

$$A_y = \frac{1}{\mu} (p_z(y p_z - z p_y) - p_x(x p_y - y p_x)) - \frac{\kappa y}{r}$$

um gemäß Gleichung (2.14) infinitesimale Transformationen der Koordinaten x und y zu generieren, erhalten wir:

$$x'(\lambda) = x + \lambda a^2 \omega \sqrt{1 - \varepsilon^2} \left(1 + \frac{\sin^2(\zeta)}{1 - \varepsilon \cos(\zeta)} \right) \quad (2.17a)$$

$$y'(\lambda) = y - \lambda a^2 \omega \frac{\cos(\zeta) - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos(\zeta)} \sin(\zeta) \quad (2.17b)$$

⁸⁾Strenggenommen gibt es vier Arten von Erzeugendenfunktionen, die durch Legendre-Transformation auseinander hervorgehen.

Wie wirkt sich diese Transformation nun auf die Form der Bahn aus? Um diese Frage zu beantworten, vergleichen wir sie mit einer Änderung der numerischen Exzentrizität um eine infinitesimale Zahl η zu $\varepsilon + \eta$ und entwickeln bis zur ersten Ordnung in η . Das Ergebnis stimmt nur dann mit (2.17) überein, wenn $\varepsilon =: \sin(\tau)$ gesetzt und eine infinitesimale Änderung δ des Winkels τ betrachtet wird.

Beweis Ausgehend von (2.14) ergibt sich:

$$\begin{aligned} x'(\lambda) &= x + \lambda \left(-\frac{\partial A_y}{\partial p_x} \right) = x + \frac{\lambda}{\mu} (xp_y - 2yp_x) \\ y'(\lambda) &= y + \lambda \left(-\frac{\partial A_y}{\partial p_y} \right) = y + \frac{\lambda}{\mu} (xp_x + zp_z) \end{aligned}$$

und mit (2.15), (2.16) eingesetzt auch (2.17). Mit $\varepsilon = \sin(\tau)$ wird $\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \cos(\tau)$ und für infinitesimales δ entwickeln wir bis zur ersten Ordnung:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\delta) &= a(\cos(\zeta) + \sin(\tau + \delta)) \approx x + \delta \frac{dx}{d\tau} \\ &= x + \delta a \left(\cos(\tau) - \sin(\zeta) \frac{d\zeta}{d\tau} \right) \\ \tilde{y}(\delta) &= a \cos(\tau + \delta) \sin(\zeta) \approx y + \delta \frac{dy}{d\tau} \\ &= y + \delta a \left(\cos(\tau) \cos(\zeta) \frac{d\zeta}{d\tau} - \sin(\tau) \sin(\zeta) \right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (\zeta - \sin(\tau) \sin(\zeta)) &= \frac{d}{d\tau} \omega t \\ \Rightarrow \frac{d\zeta}{d\tau} &= \frac{\cos(\tau) \sin(\zeta)}{1 - \sin(\tau) \cos(\zeta)} \end{aligned}$$

und wieder ε für $\sin(\tau)$ eingesetzt folgt schließlich:

$$\tilde{x}(\delta) \approx x + \delta a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \left(1 - \frac{\sin^2(\zeta)}{1 - \varepsilon \cos(\zeta)} \right) \quad (2.18a)$$

$$\tilde{y}(\delta) \approx y + \delta a \frac{\cos(\zeta) - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos(\zeta)} \sin(\zeta). \quad (2.18b)$$

Die zwei Transformationen sind also gleich, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\delta) &= x'(\delta a \omega) \\ \tilde{y}(\delta) &= y'(\delta a \omega). \end{aligned}$$

Die vom LRL-Vektor generierten Transformationen⁹⁾ ändern also die Exzentrizität der Planetenbahn, jedoch parametrisiert über den Winkel τ . Betrachten wir die damit einhergehende Änderung des Drehimpulses $L = \frac{\mu a}{2} \sqrt{\zeta} = \frac{\kappa \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\sqrt{-2\mu E}}$ zu¹⁰⁾

$$\begin{aligned} L' &= \frac{\kappa}{\sqrt{-2\mu E}} \sqrt{1 - \sin^2(\tau + \delta)} \\ &= \frac{\kappa}{\sqrt{-2\mu E}} \cos(\tau + \delta) \\ &= \frac{\kappa}{\sqrt{-2\mu E}} [\cos(\tau) \cos(\delta) - \sin(\tau) \sin(\delta)] \\ &= L \cos(\delta) - \frac{\kappa \varepsilon}{\sqrt{-2\mu E}} \sin(\delta), \end{aligned} \quad (2.19)$$

finden wir, ausgehend von einer kreisförmigen Bahn ($\varepsilon = 0$), Formel (2.12) wieder. Die vom LRL-Vektor generierte Änderung der Exzentrizität erfolgt also in einer Weise, die der Rotation eines Großkreises auf der S^3 entspricht, wie in 2.3 beschrieben wurde.

Wie wir wissen, generiert der LRL-Vektor die Symmetriegruppe $SO(4)$ jedoch nicht allein: die Vertauschungsrelationen von \vec{A}' sind mit dem Drehimpuls gekoppelt. Somit lassen sich die vom LRL-Vektor generierten Transformationen nicht einfach als Untergruppe der $SO(4)$ interpretieren. Um die $SO(4)$ -Symmetrietransformationen zu untersuchen müssen wir also einen Generator wählen, der alle Komponenten von \vec{A}' und \vec{L} enthält.

2.4.2 Symmetrietransformationen

Wir haben bereits festgestellt, dass sich durch Differenz- und Summenbildung von LRL-Vektor und Drehimpuls

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{L} + \vec{A}'), \quad \vec{N} = \frac{1}{2} (\vec{L} - \vec{A}')$$

die Generatoren der $SO(4) = SO(3) \times SO(3)$ entkoppeln lassen. Um nun Gleichung (2.14)

⁹⁾Die von den beiden anderen Komponenten A_x und A_z generierten Transformationen lassen sich durch Rotationen aus den von A_y generierten herstellen und bewirken keine zusätzlichen Veränderungen der Bahnform [21].

¹⁰⁾Hier muss δ nicht mehr infinitesimal klein sein.

für Koordinaten und Impulse und für endliche λ , also

$$\frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} = \{\vec{r}(\lambda), G\}, \quad \frac{d\vec{p}(\lambda)}{d\lambda} = \{\vec{p}(\lambda), G\},$$

zu lösen, benutzen wir den Generator

$$G = \vec{Y} \cdot \vec{M} + \vec{Z} \cdot \vec{N},$$

wobei \vec{Y} und \vec{Z} die Gruppe parametrisieren. In den normalen Orts- und Impulskoordinaten ausgedrückt, führt G auf höchst nichtlineare Differentialgleichungen. Um dies zu umgehen führen wir, mit Wissen um die vierdimensionale Rotationssymmetrie im Hinterkopf, jeweils Projektionen auf vierdimensionale Sphären aus: Für die Impulse benutzen wir das Inverse der stereographischen Projektion aus 2.3:

$$\vec{p} \mapsto u = (\vec{u}, u_4) = \left(\frac{2p_0\vec{p}}{p_0^2 + p^2}, \frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2} \right)$$

mit $p_0 = \sqrt{-2\mu E}$. Die elliptischen Bahnen im Ortsraum lassen sich auf ähnliche Weise durch Parallelprojektion auf Großkreise der S^3 abbilden:

$$\vec{r} \mapsto v = (\vec{v}, v_4) = \left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\kappa\mu} \vec{p}, \frac{p_0 \vec{r} \cdot \vec{p}}{\kappa\mu} \right).$$

Die neuen Koordinaten liegen alle auf der Einheitssphäre, $v^2 + v_4^2 = 1$, $\vec{u}^2 + u_4^2 = 1$ und Ortsvektoren und Impulse stehen senkrecht zueinander: $\vec{v} \cdot \vec{u} + v_4 u_4 = 0$. Eine weitere Vereinfachung wird möglich, wenn wir die neuen Koordinaten als Quaternionen beschreiben. Da sie besonders geeignet sind (in ihrer Matrixdarstellung z.B.) Transformationen der $SO(4)$ darzustellen, werden sie hier auf sehr einfach interpretierbare Ergebnisse führen.

Quaternionen $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ können z.B. als

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= q^\mu \mathbf{e}_\mu = q^1 \mathbf{e}_1 + q^2 \mathbf{e}_2 + q^3 \mathbf{e}_3 + q^4 \mathbf{e}_4 \\ &=: \vec{q} \cdot \vec{\mathbf{e}} + q^4 \mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

geschrieben werden, wobei für die Basiselemente \mathbf{e}_μ folgende Multiplikation definiert ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_4^2 &= \mathbf{e}_4, & \mathbf{e}_4 \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i^2 &= -\mathbf{e}_4, & \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k. \end{aligned}$$

Quaternionen mit $q^4 = 0$ heißen vektorielle, solche mit $\vec{q} = 0$ skalare Quaternionen. Es existiert sowohl das Produkt der Quaternionenmultiplikation

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} :$$

$$\mathbf{ab} = (a^4 b^4 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbf{e}_4 + (a^4 \vec{b} + b^4 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\mathbf{e}},$$

das distributiv, assoziativ, aber nicht kommutativ ist und die Quaternionen zu einem Schiefkörper macht, als auch ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} : \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{ab}^* + \mathbf{ba}^*)$$

mit der konjugierten Quaternion $\mathbf{a}^* = a^4 \mathbf{e}_4 - \vec{a} \cdot \vec{\mathbf{e}}$, über die auch die Norm $\|\mathbf{a}\| = \mathbf{aa}^*$ definiert ist. Die quaternionische Exponentialfunktion ist:

$$e^{\mathbf{q}} = e^{q^4} \left(\cos(|\vec{q}|) \mathbf{e}_4 + \sin(|\vec{q}|) \frac{\vec{q} \cdot \vec{\mathbf{e}}}{|\vec{q}|} \right).$$

Wir schreiben also $\mathbf{U} = \vec{u} \cdot \vec{\mathbf{e}} + u_4 \mathbf{e}_4$ und $\mathbf{V} = \vec{v} \cdot \vec{\mathbf{e}} + v_4 \mathbf{e}_4$ und führen die vektoriellen Quaternionen $\mathbf{M} = \frac{p_0}{2} (\vec{L} + \vec{A}') \cdot \vec{\mathbf{e}}$, $\mathbf{N} = \frac{p_0}{2} (\vec{L} - \vec{A}') \cdot \vec{\mathbf{e}}$, $\mathbf{Y} = \vec{Y} \cdot \vec{\mathbf{e}}$ und $\mathbf{Z} = \vec{Z} \cdot \vec{\mathbf{e}}$ ein. Der Generator wird zu

$$G = \frac{1}{p_0} \left(\langle \mathbf{Y}, \mathbf{M} \rangle + \langle \mathbf{Z}, \mathbf{N} \rangle \right)$$

und die Differentialgleichungen ausgedrückt in Quaternionen sind nun:

$$\frac{d\mathbf{V}(\lambda)}{d\lambda} = \tag{2.20a}$$

$$\left(\mathbf{Z} + \frac{dV_4}{d\lambda} \mathbf{e}_4 \mathbf{N} \right) \mathbf{V} - \mathbf{V} \left(\mathbf{Y} + \frac{dV_4}{d\lambda} \mathbf{e}_4 \mathbf{M} \right)$$

$$\frac{d\mathbf{U}(\lambda)}{d\lambda} = \tag{2.20b}$$

$$\left(\mathbf{Z} + \frac{dV_4}{d\lambda} \mathbf{e}_4 \mathbf{N} \right) \mathbf{U} - \mathbf{U} \left(\mathbf{Y} + \frac{dV_4}{d\lambda} \mathbf{e}_4 \mathbf{M} \right).$$

Dafür sind sehr langwierige, aber „straight forward“ Rechnungen nötig, die ggf. durch das Darstellen von Quaternionen in Matrixschreibweise vereinfacht werden können, d.h. schreibe $\mathbf{q} \in M_2(\mathbb{C})$ als

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q^4 + iq^1 & q^2 + iq^3 \\ -q^2 + iq^3 & q^4 - iq^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix}$$

mit $w, z \in \mathbb{C}$. Außerdem wurden die ebenfalls sehr schreibaufwändig zu zeigenden Relationen

$$\mathbf{V} = \mathbf{UM} = -\mathbf{NU} \tag{2.21a}$$

$$\mathbf{U} = -\mathbf{VM} = \mathbf{NV} \tag{2.21b}$$

benutzt.

Die Gleichungen (2.20) werden gelöst durch

$$\mathbf{V}(\lambda) = e^{\lambda \mathbf{Z}} \left(e^{\vartheta(\lambda) \mathbf{N}(0)} \mathbf{V}(0) e^{-\vartheta(\lambda) \mathbf{M}(0)} \right) e^{-\lambda \mathbf{Y}} \quad (2.22a)$$

$$\mathbf{U}(\lambda) = e^{\lambda \mathbf{Z}} \left(e^{\vartheta(\lambda) \mathbf{N}(0)} \mathbf{U}(0) e^{-\vartheta(\lambda) \mathbf{M}(0)} \right) e^{-\lambda \mathbf{Y}} \quad (2.22b)$$

mit der skalaren Quaternion $\vartheta(\lambda) = V_4(\lambda) - V_4(0)$. Die Lösungen sind noch implizit, da $V_4(\lambda)$ auf der rechten Seite steht. Dies ließe sich durch Invertieren der Gleichung für die vierte Komponente von \mathbf{V} auflösen, jedoch ist die implizite Form besser geeignet, um die Transformationen geometrisch zu deuten. Der Parameter λ kann nun zu Eins gewählt werden, sodass die Gruppenwirkungen von \mathbf{Y} und \mathbf{Z} parametrisiert werden und wir wollen im Folgenden nur noch die Ortsvariablen $\mathbf{V}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ betrachten, da $\mathbf{U}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ genau gleich transformiert wird. Die Transformation aus (2.22) lässt sich in zwei Teile zerlegen: Zunächst wird der Punkt $\mathbf{V}(0)$ auf einen Punkt der selben Trajektorie $\tilde{\mathbf{V}}$ abgebildet

$$\tilde{\mathbf{V}} = e^{\vartheta(\lambda) \mathbf{N}(0)} \mathbf{V}(0) e^{-\vartheta(\lambda) \mathbf{M}(0)}.$$

Beweis: Für die Erhaltungsgrößen \mathbf{M} und \mathbf{N} gilt laut (2.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \mathbf{V}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \\ &= e^{\mathbf{Y}} \left(e^{\vartheta(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \mathbf{M}(0)} \mathbf{U}^{-1}(0) e^{-\vartheta(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \mathbf{N}(0)} \right) e^{-\mathbf{Z}} \\ &\quad \cdot e^{\mathbf{Z}} \left(e^{\vartheta(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \mathbf{N}(0)} \mathbf{V}(0) e^{-\vartheta(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \mathbf{M}(0)} \right) e^{-\mathbf{Y}} \\ &= e^{\mathbf{Y}} \left(e^{\vartheta(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \mathbf{M}(0)} \underbrace{\mathbf{U}^{-1}(0) \mathbf{V}(0)}_{\mathbf{M}(0)} e^{-\vartheta(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \mathbf{M}(0)} \right) e^{-\mathbf{Y}} \\ &= e^{\mathbf{Y}} \mathbf{M}(0) e^{-\mathbf{Y}} \end{aligned}$$

und analog:

$$\mathbf{N}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = e^{\mathbf{Z}} \mathbf{N}(0) e^{-\mathbf{Z}}$$

Das heißt \mathbf{M} und \mathbf{N} (und damit auch \vec{L} und \vec{A}) sind invariant unter Transformationen, bei denen $\mathbf{Y} \sim \mathbf{M}(0)$ und $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}(0)$ (da dann die Exponentialfunktionen mit $\mathbf{M}(0)$ und $\mathbf{N}(0)$ vertauschen). D.h. in diesem Fall ist die Transformation ein Automorphismus der Trajektorie auf sich selbst, also muss $\tilde{\mathbf{V}}$ auf dem gleichen Orbit wie $\mathbf{V}(0)$ liegen.

Schließlich wird $\tilde{\mathbf{V}}$ auf einen Punkt einer anderen Trajektorie abgebildet (Rotation des Großkreises):

$$\mathbf{V}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = e^{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{V}} e^{-\mathbf{Y}}.$$

Die Trajektorien im Orts- als auch im Impulsraum lassen sich also auf Großkreise der S^3 projizieren und verhalten sich dann gleich unter den $SO(4)$ -Symmetrietransformationen. Letztere lassen sich als zwei aufeinander folgende Rotationen beschreiben: Zuerst eine Verschiebung entlang der gleichen Trajektorie (entlang des gleichen Kreises) und dann eine Rotation des Kreises, die Bewegungsebene und Ellipsenform gleichzeitig ändert.

2.5 Reparametrisierung der Zeit

In den vorangehenden Ausführungen wurde die vierdimensionale Symmetrie des Keplerproblems aufgezeigt und benutzt aber es wurde bisher dieser zusätzlichen mathematischen Dimension keine physikalische Dimension zugeordnet. Auch wenn es sich hier um reine Newtonsche, also nichtrelativistische, Mechanik handelt, kann mit Hilfe der vierdimensionalen Raumzeit der Ursprung der vierdimensionalen Symmetrie des Keplerproblems besser verstanden werden. Um die Trajektorien, die wie zu erwarten Kreise auf einer Raumzeit-Sphäre sein werden, zu beschreiben, wird ein neuer Parameter s benötigt. Nach *J. Görranson* [11] ist es von Vorteil, diesen nicht beliebig und explizit zu wählen, sondern über das Vergehen der Zeit gegenüber diesem:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{r}{\sqrt{-2E/\mu}}.$$

Diese Art der „Reparametrisierung der Zeit“ geht mindestens auf *Jürgen Moser* [20] zurück und bedeutet, dass die Abstandsabhängigkeit der Geschwindigkeit des Planeten kompensiert wird und somit die Geschwindigkeit auf Trajektorien, die bzgl. s parametrisiert sind, konstant ist. Die Hamiltonfunktion für eine feste Energie $E < 0$ wird damit zu:

$$E = \frac{\mu}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \right)^2 - \frac{\kappa}{\sqrt{-2E/\mu} \frac{dt}{ds}}. \quad (2.23)$$

Wir schreiben ' für Ableitungen nach s und t und dann:
rechnen weiter:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -\frac{2E}{\mu} (t')^2 - \frac{2\kappa}{\sqrt{-2\mu E}} (t') + (\vec{r}')^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2E}{\mu} \left((t')^2 + \frac{\kappa\mu}{E\sqrt{-2\mu E}} (t') \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\kappa\mu}{2E\sqrt{-2\mu E}} \right)^2 \right) - \left(\frac{\kappa}{2E} \right)^2 + (\vec{r}')^2 = 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2E}{\mu} \left((t') + \frac{\kappa\mu}{2E\sqrt{-2\mu E}} \right)^2 + (\vec{r}')^2 &= \\ \left(\sqrt{\frac{-2E}{\mu}} (t') + \frac{\kappa}{2E} \right)^2 + (\vec{r}')^2 &= \left(\frac{\kappa}{2E} \right)^2. \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung definiert eine euklidische Metrik auf der Raumzeit; nämlich (für $x = (x_t, \vec{x})$):

$$\|x\| = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{-2E}{\mu}} x_t \right)^2 + |\vec{x}|^2}.$$

Die Bewegungsgleichung bzgl. s lautet:

$$\vec{r}'' = \frac{\kappa}{2E} \frac{\vec{r}}{r} + \frac{r' \vec{r}'}{r}. \quad (2.24)$$

Beweis: Ausgehend von der Newtonschen Bewegungsgleichung ($\dot{}$ für die normale Zeitableitung):

$$\begin{aligned} \mu \ddot{\vec{r}} &= -\kappa \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \Leftrightarrow \mu \frac{d}{dt} (\vec{r}' \dot{s}) &= -\kappa \frac{\vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

folgt mit $\dot{s} = t'/(t')^3$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mu \left(\frac{t' \vec{r}'' + t'' \vec{r}'}{(t')^3} \right) &= -\kappa \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \Leftrightarrow (-2E) \frac{r \vec{r}'' - r' \vec{r}'}{r^3} &= -\kappa \frac{\vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

schließlich (2.24).

Als radiale Bewegungsgleichung ergibt sich:

$$r'' = -r - \frac{\kappa}{2E},$$

was equivalent ist zu:

$$t''' = t' - \frac{\kappa}{2E\sqrt{-2E/\mu}}.$$

Beweis: Zunächst die erste Ableitung:

$$r' = \frac{d}{ds} \sqrt{\vec{r}'^2} = \frac{1}{2} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}'' + \vec{r}'' \cdot \vec{r}'}{r} = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}''}{r}$$

$$\begin{aligned} r'' &= \frac{1}{r^2} \left((\vec{r}'' \cdot \vec{r}' + (\vec{r}')^2) r - r' \vec{r}' \cdot \vec{r}' \right) \\ &\stackrel{(2.24)}{=} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\kappa}{2E} \vec{r}'^2 + r' \vec{r}' \cdot \vec{r}' + \vec{r}'^2 - r' \vec{r}' \cdot \vec{r}' \right) \\ &= \frac{\kappa}{2E} + \frac{\vec{r}'^2}{r} \\ &\stackrel{(2.23)}{=} \frac{\kappa}{2E} + \left(\frac{\kappa}{2E} \right) \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \left(r + \frac{\kappa}{2E} \right)^2 \\ &= -r - \frac{\kappa}{2E}. \end{aligned}$$

Durch weiteres Ableiten der Bewegungsgleichung folgt nun:

$$\begin{aligned} \vec{r}''' &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\kappa}{2E} (\vec{r}' r - r' \vec{r}) + r r'' \vec{r}' + r r' \vec{r}'' - r'^2 \vec{r}' \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\kappa}{2E} (\vec{r}' r - r' \vec{r}) - r r'' \left(r + \frac{\kappa}{2E} \right) \right. \\ &\quad \left. + r r' \left(\frac{\kappa}{2E} \frac{\vec{r}}{r} + \frac{r' \vec{r}'}{r} \right) - (r')^2 \vec{r}' \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}''' = -\vec{r}'. \quad (2.25)$$

Jetzt können wir die Vierergeschwindigkeit bzgl. s definieren:

$$v = \left(\left(t' + \frac{\kappa}{2E\sqrt{-2E/\mu}} \right), \vec{r}' \right)$$

und die Energie- und Bewegungsgleichungen vereinfachen sich zu:

$$\begin{aligned} \|v\| &= \frac{-\kappa}{2E} \\ v'' &= -v. \end{aligned}$$

Die vierdimensionale Rotationssymmetrie ist hier sofort offensichtlich und $v'' = -v$ ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators. Das bedeutet, v bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\|v'\| = -\kappa/2E$ auf Großkreisen einer S^3 und Raumkomponenten liefern ellipsenförmige Trajektorien für die Geschwindigkeit \vec{r}' . Der LRL-Vektor kann aus der Integration von Gleichung (2.25) bestimmt werden [2],[11]:

$$\vec{r}'' = -\vec{r} - \frac{\mu}{2E} \vec{A}.$$

Der Vektor \vec{r}'' beschreibt die gleiche Ellipse wie \vec{r}' (da $\|v'\| = \|v\|$) und somit zeigt \vec{r} von einem der Foki auf eine elliptische Planetenbahn, deren Exzentrizität vom LRL-Vektor gegeben ist. Da die korrekte Parametrisierung der planetaren Bahnen bzgl. der Zeit ohnehin nur indirekt über die Keplergleichung möglich ist, bietet sich diese Methode, einen anderen Parameter zur Darstellung der Trajektorien im vierdimensionalen Raum zu verwenden, an, um auf sehr einfachem und elegantem Wege die Form der Orbits zu bestimmen. Zusätzlich liefert sie nebenbei die Äquivalenz zum harmonischen Os-

zillator, wofür wir in 2.2.2 erheblichen Aufwand zur entsprechenden Transformation der Ortsvariablen betreiben mussten.

Mit dieser sehr kurzen und schönen, aber auch andersartigen Behandlung wollen wir das Keplerproblem abschließen und uns dem quantenmechanischen Zweikörperproblem, dem Wasserstoffatom, zuwenden. Dort verspricht das ebenfalls von $1/r$ abhängige *Coulombpotential* interessante Erkenntnisse bei der Betrachtung des zum Laplace-Runge-Lenz-Vektor analogen quantenmechanischen Operators.

3. Das Wasserstoffatom

3.1 Der Laplace-Runge-Lenz-Pauli-Operator

1926 berechnete *Erwin Schrödinger* im Rahmen seines neu gefundenen Wellenfunktionsformalismus der Quantenmechanik die Energieeigenwerte und -funktionen $\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi)$ des Wasserstoffatoms mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{P^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} =: \frac{P^2}{2m_e} - \frac{\kappa}{|\vec{X}|},$$

indem er sie in einen Radial- und einen Winkelanteil faktorisierte:

$$\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_n(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

Als Lösungen der rein winkelabhängigen *Schrödinger*-Gleichung stellten sich die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} heraus. Zu jedem Energieniveau E_n gibt es n^2 verschiedene orthogonale Funktionen mit Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 0, 1, \dots, n-1$ und magnetischer Quantenzahl $m = -l, -l+1, \dots, l$. Letztere Entartung bzgl. m , also der Richtung des Drehimpulses, lässt sich aus der Invarianz unter den von den Komponenten des Drehimpulsoperators generierten $SO(3)$ -Gruppenwirkungen herleiten. Die Entartung bzgl. l lässt sich jedoch nicht in diesem Formalismus erklären, deswegen wurde sie auch zunächst „accidental degeneracy“ oder „zufällige Entartung“ genannt. Am klassischen analogen System haben wir gesehen, dass der LRL-Vektor Richtung und Betrag der Ellipsen-Exzentrizität festlegt und Transformationen generiert die diese bei gleichbleibender Gesamtenergie, verändern. Dies ging auch mit einer Änderung des Betrags des Drehimpulses einher. Auch im klassischen Fall kann man von einer Entartung sprechen: Eine Bahn mit fester Energie E kann in einer beliebig im Raum orientierten Ebene liegen (Drehimpulsrichtung) und beliebige

Exzentrizität zwischen 0 und 1 besitzen (Drehimpuls und LRL-Vektor). Somit überrascht es nicht, dass die Betrachtung der quantenmechanischen Version des LRL-Vektors diese mysteriöse Entartung erklären kann. Die Übertragung vollzog *Wolfgang Pauli* 1926 in [25] und lieferte damit gleichzeitig zu Schrödingers analytischer Behandlung eine algebraische Methode zur Herleitung der *Balmer*-Formel für die Energieniveaus wasserstoffähnlicher Atome.

Der Übergang in die quantenmechanische Operatorschreibweise erfolgt gemäß des Korrespondenzprinzips, indem Orts- und Impulsvariablen durch die entsprechenden Operatoren ersetzt werden. Da aufgrund der Nichtkommutativität von P_i und X_i gilt

$$\vec{P} \times \vec{L} \neq -\vec{L} \times \vec{P},$$

muss das Kreuzprodukt symmetrisiert werden.

$$\vec{A} = \frac{1}{2\mu} \left(\vec{P} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{P} \right) - \kappa \frac{\vec{X}}{|\vec{X}|}.$$

Der Laplace-Runge-Lenz-*Pauli*-Operator besitzt folgende Eigenschaften, die ihn zu einem „guten“ quantenmechanischen Operator machen:

- \vec{A} ist ein hermitescher Operator.
- \vec{A} ist simultan mit H diagonalisierbar: $[\vec{A}, H] = 0$.
- Orthogonalität zum Drehimpuls: $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$.
- \vec{A} ist eine Erhaltungsgröße: $A^2 = \frac{2H}{\mu} (L^2 + \hbar^2) + \kappa^2$.

Ganz analog zum klassischen Fall lässt sich die Algebra (jetzt mit dem Kommutator als Lie-

Klammer) berechnen:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \quad (3.1)$$

$$[A_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}A_k \quad (3.2)$$

$$[A_i, A_j] = \frac{-2i\hbar}{\mu}H\varepsilon_{ijk}L_k. \quad (3.3)$$

Durch die Beschränkung auf einen Unterhilbertraum mit Energie $E < 0$ lässt sich die Kopplung an H entfernen und mit

$$\vec{A}' = \sqrt{-\frac{\mu}{2E}}\vec{A}$$

ergeben sich die Vertauschungsrelationen

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$$

$$[A'_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}A'_k$$

$$[A'_i, A'_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k,$$

die sich, wie bereits gesehen, mit

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{L} + \vec{A}')$$

$$\vec{N} = \frac{1}{2}(\vec{L} - \vec{A}')$$

entkoppeln lassen:

$$[M_i, M_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}M_k$$

$$[N_i, N_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}N_k$$

$$[M_i, N_j] = 0.$$

Die Eigenwerte von Operatoren, die den $SO(3)$ Kommutatorregeln unterliegen, sind jedoch (z.B. vom Drehimpuls) bekannt: Sie sind halbzahlig und es gilt:

$$\text{Eigenwerte von } M^2 : \quad \hbar^2 j_M(j_M + 1)$$

$$\text{Eigenwerte von } N^2 : \quad \hbar^2 j_N(j_N + 1)$$

$$\text{Eigenwerte von } M_3 : \quad \hbar m_M$$

$$\text{Eigenwerte von } N_3 : \quad \hbar m_N,$$

wobei für $I = M, N$:

$$j_I = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$m_I = -j_I, -j_I + 1, \dots, j_I.$$

Nun stellt sich heraus, dass die *Casimir*-Operatoren M^2 und N^2 gleich sind

$$M^2 = \frac{1}{4}(\vec{L}^2 + \vec{A}'^2) = N^2 \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow j_M = j_N, \quad (3.5)$$

da $\vec{L} \cdot \vec{A}' = \vec{A}' \cdot \vec{L} = 0$. Durch Wiedereinsetzen von \vec{A}' und Umstellen nach E bzw. H lässt sich der Hamiltonoperator schreiben als

$$H = -\frac{\mu\kappa^2}{8M^2 + 2\hbar^2}$$

und die Energieeigenwerte lassen sich aus denen von M^2 ablesen:

$$E_n = -\frac{\mu\kappa^2}{8\hbar^2 j_M(j_M + 1) + \hbar^2} = -\frac{\mu\kappa^2}{2\hbar^2 \underbrace{(2j_M + 1)}_{=:n}}^2.$$

Als Entartung ergibt sich: Für jeden der Eigenwerte j_M von $M^2 = N^2$ existieren je $2j_M + 1$ Eigenwerte von M_3 und N_3 ($m_M = -j_M, \dots, j_M$, $m_N = -j_M, \dots, j_M$) und somit insgesamt eine Entartung von $(2j_M + 1)^2 = n^2$. Außerdem lässt sich die Ungleichung $l \leq n - 1$ einfach mit Gleichung (3.4) zeigen:

$$L^2 = 4M^2 + \frac{\mu}{2E}A^2$$

$$\xrightarrow{E < 0} l(l + 1) \leq 4j_M(j_M + 1) = n^2 - 1. \quad (3.6)$$

Angenommen $l > n - 1$ dann folgt $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) < n(n + 1) \leq l(l + 1)$, was im Widerspruch zu (3.6) steht. Dabei muss l wegen

$$L_3 = M_3 + N_3 \Rightarrow m = m_M + m_N = -l, \dots, l \quad (3.7)$$

ganzzahlig sein.

3.2 Kanonische Transformationen 2

Um eine Darstellung der Eigenfunktionen, die auch die $SO(4)$ -Invarianz inkorporiert, zu erhalten, ist eine Variablentransformation in einen vierdimensionalen Raum nötig. Vladimir Fock benutzte dafür 1935 als erster die stereographische Projektion auf die S^3 [8], die wir schon im Kapitel über das Keplerproblem kennen gelernt haben, was im nächsten Abschnitt ausführlich beschrieben werden soll. Bargmann zeigte dann kurz darauf, dass der LRL-Operator von Pauli des letzten Abschnitts als Generator infinitesimaler Transformationen direkt auf die stereographische Projektion führt [3]. Diesen Weg wollen wir im Folgenden nachvollziehen.

Wir definieren zwei Operatoren $\Pi_{\mu\nu}$ und $\Delta_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, \dots, 4$, die auf Funktionen des Impulsraumes $\psi(\vec{p})$ wirken sollen (dort ist der Ortsoperator ein Differentialoperator $X_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i}$):

Für $(\mu, \nu) = (m, n)$, $n, m = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\Delta_{mn}\psi &= \Pi_{mn}\psi = -\Delta_{nm}\psi = -\Pi_{nm}\psi \\ &= \frac{i}{\hbar}L_{mn} = p_m \frac{\partial\psi}{\partial p_n} - p_n \frac{\partial\psi}{\partial p_m}\end{aligned}$$

mit der Drehimpulskomponente

$$L_{mn} = P_m X_n - P_n X_m.$$

Für $\mu = 4$ oder $\nu = 4$:

$$\begin{aligned}\Delta_{4n}\psi &= -\Delta_{n4}\psi \\ &= \left(\frac{p_0^2 - p^2}{2p_0}\right) \frac{\partial\psi}{\partial p_n} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{p_n p_k}{p_0}\right) \frac{\partial\psi}{\partial p_k} \\ \Pi_{4n}\psi &= -\Pi_{n4}\psi \\ &= \Delta_{4n}\psi + \frac{2p_n}{p_0}\psi = -\frac{i}{\hbar}A'_n\psi.\end{aligned}$$

Es zeigt sich nun, dass die Transformation, der eine Funktion ψ durch $\Pi_{\mu\nu}$ unterworfen wird, einer infinitesimalen Transformation der Koordinaten entspricht, die von $\Delta_{\mu\nu}$ erzeugt wird.

Beweis Zunächst folgt mit der Produktregel:

$$\Pi_{\mu\nu}(fg) = g(\Delta_{\mu\nu}f) + f(\Pi_{\mu\nu}g)$$

und falls gilt $\Pi_{\mu\nu}g = 0$, so ist:

$$\Pi_{\mu\nu}f = g\Delta_{\mu\nu}(f/g).$$

Um $\Pi_{\mu\nu}g = 0$ zu lösen, stellen wir die zwei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\Pi_{mn}g &= p_m \frac{\partial g}{\partial p_n} - p_n \frac{\partial g}{\partial p_m} = 0, \\ \Pi_{4n}g &= \left(\frac{p_0^2 - p^2}{2p_0}\right) \frac{\partial g}{\partial p_n} \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{p_n p_k}{p_0}\right) \frac{\partial g}{\partial p_k} + \frac{2p_n}{p_0}g = 0\end{aligned}$$

auf und setzen die erste in die zweite ein:

$$\begin{aligned}\Rightarrow &\left(\sum_{k=1}^3 \frac{p_k^2}{p_0} + \frac{p_0^2 - p^2}{2p_0}\right) \frac{\partial g}{\partial p_n} + \frac{2p_n}{p_0}g = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{\partial g}{\partial p_n} = \frac{-4p_n}{p_0^2 + p^2}g \\ \Rightarrow &g = \frac{C}{(p_0^2 + p^2)^2}, \quad C = \text{const.}\end{aligned}$$

Damit ist

$$\Pi_{\mu\nu}\psi = \frac{C}{(p_0^2 + p^2)^2} \cdot \Delta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{c}(p_0^2 + p^2)^2\psi\right),$$

die Änderung von ψ unter der infinitesimalen Koordinatentransformation $\Delta_{\mu\nu}$. Allgemein gilt nämlich für eine infinitesimale Transformation T , die die Koordinaten x_i durch

$$T(x_i) = x_i + \varepsilon\delta_i(x)$$

transformiert, dass sie die Funktion f entsprechend

$$T(f) = f(x) + \varepsilon \sum_i \delta_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ändert. Der Vergleich zeigt, dass $\Delta_{\mu\nu}$ eine solche Koordinatentransformation ist, die der Wirkung der Drehimpuls- und LRL-Pauli-Operatoren (nichts anderes sind ja die $\Pi_{\mu\nu}$) auf Funktionen des Impulsraums entspricht.

Nun bleibt nur noch dementsprechende Koordinaten zu finden, die unter $\Delta_{\mu\nu}$ eine infinitesimale vierdimensionale Drehung ausführen. D.h. Koordinaten u_μ , $\mu = 1, \dots, 4$, sodass für alle Funktionen $\Psi = \frac{1}{c}(p_0^2 + p^2)^2\psi$ gilt:

$$\Delta_{\mu\nu}\Psi = u_\mu \frac{\partial\Psi}{\partial u_\nu} - u_\nu \frac{\partial\Psi}{\partial u_\mu} \quad (3.8)$$

(denn dies ist die Form einer infinitesimalen Drehung). Aus (3.8) lassen sich mit Hilfe von

$$\frac{\partial\Psi}{\partial u_\mu} = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial\Psi}{\partial u_\nu} \frac{\partial u_\nu}{\partial p_\mu}$$

Differentialgleichungen für die u_μ ableiten, deren Lösungen $u = (\vec{u}, u_4)$ mit

$$\vec{u} = \frac{2p_0\vec{p}}{p_0^2 + p^2}, \quad u_4 = \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2 + p^2} \quad (3.9)$$

die bekannten Koordinaten auf der S^3 nach stereographischer Projektion sind. Damit haben wir die Brücke geschlagen von der algebraischen Methode zur globalen Behandlung von Fock [8], die im nächsten Abschnitt dargestellt werden soll.

3.3 Die globale Methode

Wie der klassische Fall und die Form der infinitesimalen Drehungen aus dem letzten Teil nahe legen, ist es auch hier hilfreich, die Impulskoordinaten stereographisch auf die S^3 zu projizieren. Die Schrödingergleichung im Impulsraum lautet:

$$(p^2 + p_0^2) \tilde{\psi}(\vec{p}) = \frac{\kappa\mu}{\pi^2\hbar} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{\psi}(\vec{p}')}{|\vec{p}' - \vec{p}|} d^3p'$$

mit der Impulswellenfunktion

$$\tilde{\psi}(\vec{p}) = \mathcal{F}(\psi(\vec{x})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x.$$

Beweis: Wir wenden die Fouriertransformation auf die Schrödingergleichung im Ortsraum

$$\left(\frac{(i\hbar\nabla)^2}{2\mu} - \frac{\kappa}{r} \right) \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$$

an und erhalten:

$$\left(\frac{p^2}{2\mu} - E \right) \tilde{\psi}(\vec{p}) = \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi(\vec{x})}{r} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x.$$

Mit dem Faltungstheorem

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \sqrt{2\pi\hbar}^{-3} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$$

wird die rechte Seite zu:

$$= \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\psi}(\vec{p}') \cdot \left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{r}\right) \right) (\vec{p} - \vec{p}') d^3p'.$$

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}\left(\frac{1}{r}\right)$ darin konvergiert aber nicht. Deshalb betrachten wir das

Coulomb-Potential als Grenzfall des Yukawa-Potentials für massebehaftete Austauschteilchen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \lim_{m_\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{r} e^{-m_\gamma r} \\ \Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{1}{r}\right) &= \lim_{m_\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x} - m_\gamma r} d^3x \\ &= \lim_{m_\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \frac{4\pi}{m_\gamma^2 + \frac{p^2}{\hbar^2}} \\ &= \frac{4\pi\hbar^2}{\sqrt{2\pi\hbar^3} p^2} \end{aligned}$$

Dabei müssen, um Limes und Integral miteinander vertauschen zu können, beide Grenzwertprozesse gleichmäßig sein. Oben eingesetzt und mit $p_0 = \sqrt{-2\mu E}$ folgt die Schrödingergleichung in Impulsdarstellung.

Nun führen wir die stereographische Projektion (3.9) aus und berechnen den Abstand zweier Punkte

$$|u - u'| = \frac{2p_0^2}{(p^2 + p_0^2)(p'^2 + p_0^2)} |\vec{p} - \vec{p}'|$$

und das Hyperflächenelement $d\Omega$ auf der S^3 :

$$\begin{aligned} d^3p &= p^2 \sin(\vartheta) dp d\vartheta d\varphi = \left(\frac{p_0^2 + p^2}{2p_0} \right)^3 d\Omega \\ &= \left(\frac{p_0^2 + p^2}{2p_0} \right)^3 \sin^2(\alpha) \sin(\vartheta) d\alpha d\vartheta d\varphi, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin(\alpha) \sin(\vartheta) \cos(\varphi), & u_3 &= \sin(\alpha) \cos(\vartheta), \\ u_2 &= \sin(\alpha) \sin(\vartheta) \sin(\varphi), & u_4 &= \cos(\alpha) \end{aligned}$$

die Kugelkoordinaten auf der Sphäre sind. Damit und mit der Wellenfunktion

$$\Psi(u) = \frac{(p_0^2 + p^2)^2}{(2p_0)^2 \sqrt{p_0}} \tilde{\psi}(\vec{p})$$

ergibt sich die Integralgleichung auf der Sphäre

$$\Psi(u) = \frac{\kappa\mu}{2\pi^2\hbar p_0} \int_{S^3} \frac{\Psi(u')}{|u - u'|} d\Omega'. \quad (3.10)$$

Um sie zu lösen, wollen wir sie mit der Integralgleichung

$$Y_\lambda(u) = \frac{\lambda + 1}{2\pi^2} \int_{S^3} \frac{Y_\lambda(u')}{|u - u'|} d\Omega' \quad (3.11)$$

für die vierdimensionalen Kugelflächenfunktionen Y_λ vergleichen, die als die Eigenfunktionen des Winkelanteils des Laplace-Operators

$\Delta^{(4)} = \Delta^{(3)} + \frac{\partial^2}{\partial u_4^2} = \Delta_r + \Delta_{\alpha, \vartheta, \varphi}$ definiert sind:

$$\Delta_{\alpha, \vartheta, \varphi} Y_\lambda = -\lambda(\lambda + 2)Y_\lambda.$$

Beide Integralgleichungen stimmen bis auf Vorfaktoren überein, deren Vergleich wiederum die Balmerformel liefert.

Beweis: Die Greenfunktion des Laplace-Operators ist $g = |u - v|^{-2}$ für $v \in \mathbb{R}^4$, d.h. es gilt:

$$\Delta_u^{(4)} |u - v|^{-2} = -4\pi^2 \delta^{(4)}(u - v).$$

Wir definieren

$$\mathcal{Y}_\lambda(v) := |v|^\lambda Y_\lambda\left(\frac{v}{|v|}\right)$$

und stellen fest, dass $\mathcal{Y}_\lambda(v)$ eine homogene Funktion vom Grad λ ist¹⁾ und dass gilt:

$$\begin{aligned} \Delta^{(4)} \mathcal{Y}_\lambda(v) &= (\Delta_r + \Delta_{\alpha, \vartheta, \varphi}) \mathcal{Y}_\lambda(v) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \Delta_{\alpha, \vartheta, \varphi} \right) r^\lambda Y_\lambda(\alpha, \vartheta, \varphi) \\ &= (\lambda(\lambda - 1)r^{\lambda-2} + 3\lambda r^{\lambda-2}) Y_\lambda(\alpha, \vartheta, \varphi) \\ &\quad - \lambda(\lambda + 2)r^{\lambda-2} Y_\lambda(\alpha, \vartheta, \varphi) = 0. \end{aligned}$$

$|u - v|^{-2}$ und $\mathcal{Y}_\lambda(v)$ sind also harmonische Funktionen²⁾ außer im Punkt $v = u$. Deshalb wählen wir als Integrationsfläche die Menge

$$S_\varepsilon = \{v \in \mathbb{R}^4 : v^2 = 1, |v - u|^2 \geq \varepsilon\} \cup \{v \in \mathbb{R}^4 : v^2 \leq 1, |v - u|^2 = \varepsilon\}.$$

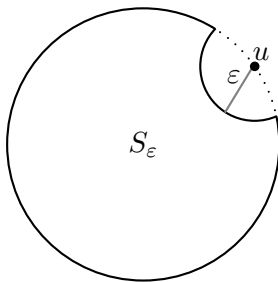


Abbildung 3.1: Integrationsfläche S_ε

Wir ersetzen also eine kleine Umgebung von u auf der Sphäre durch eine nach Innen

gewölbte Hemisphäre mit Radius ε . Nun folgt aus der zweiten Greenschen Identität³⁾

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_\varepsilon} \left(\mathcal{Y}_\lambda \Delta^{(4)} \frac{1}{|v - u|^2} - \frac{\Delta^{(4)} \mathcal{Y}_\lambda}{|v - u|^2} \right) d^4 v \\ &= \int_{S_\varepsilon} \mathcal{Y}_\lambda(v) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|v - u|^2} - \frac{1}{|v - u|^2} \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{Y}_\lambda(v) d\Omega_v. \end{aligned}$$

(B_ε sei das von S_ε berandete Volumen). Auf der Sphäre ($u^2 = v^2 = 1$) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|v - u|^2} &= \left(\nabla_v \frac{1}{|v - u|^2} \right) \cdot v \\ &= -\frac{2(u - v) \cdot v}{|v - u|^4} = -\frac{2}{|v - u|^2} (1 - \cos(\beta)) \end{aligned}$$

mit dem Winkel β zwischen u und v . Wähle $u = (0, 0, 0, 1)$ und $\beta = \alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned} |v - u|^2 &= \sin^2(\alpha) \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + \sin^2(\alpha) \cos^2(\vartheta) \\ &\quad + \sin^2(\alpha) \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + (\cos(\alpha) - 1)^2 \\ &= 2(1 - \cos(\alpha)) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|v - u|^2} \Big|_{v^2=u^2=1} &= -\frac{1}{|v - u|^2} \end{aligned}$$

und aufgrund der Homogenität von $\mathcal{Y}_\lambda(v)$

$$\frac{\partial}{\partial n} \mathcal{Y}_\lambda(v) \Big|_{v^2=1} = \lambda \mathcal{Y}_\lambda(v) = \lambda Y_\lambda(v).$$

Auf der kleinen Teilsphäre um u gilt hingegen:

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|v - u|^2} \Big|_{|v-u|=\varepsilon} = \frac{-4(v - u)}{|v - u|^3} \cdot \frac{(u - v)}{|v - u|} = \frac{4}{|v - u|^2}.$$

Damit lassen sich nun beide Teile des Integrals

¹⁾D.h. $\mathcal{Y}_\lambda(\gamma v) = \gamma^\lambda \mathcal{Y}_\lambda(v)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

²⁾ f heißt harmonisch falls $\Delta f = 0$

³⁾2. Greensche Identität: Sind f und g auf dem von ∂G berandeten Gebiet G zweimal stetig differenzierbar, so gilt: $\int_G (f \Delta g - g \Delta f) dG = \int_{\partial G} (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) d\sigma$ mit der Ableitung in Richtung der äußeren Normale $\frac{\partial f}{\partial n} = (\nabla f) \cdot n$.

lösen:

$$\begin{aligned}
 (i) \int_{S_\varepsilon} \mathcal{Y}_\lambda(v) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|v-u|^2} d\Omega_v &= \\
 \int_{\omega_4 - \omega_\varepsilon} \frac{-\mathcal{Y}_\lambda(v)}{|v-u|^2} d\Omega_v + \underbrace{\int_{\omega'(\varepsilon)} \frac{4\mathcal{Y}_\lambda(v)}{|v-u|^2} \varepsilon^3 d\Omega'_v}_{\xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ |v-u|=\varepsilon}]{}} & \\
 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega_4} \frac{-\mathcal{Y}_\lambda(v)}{|v-u|^2} d\Omega_v & \\
 (ii) \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{|v-u|^2} \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{Y}_\lambda(v) d\Omega_v &= \\
 \int_{\omega_4 - \omega_\varepsilon} \frac{\lambda \mathcal{Y}_\lambda(v)}{|v-u|^2} d\Omega_v + \int_{\omega'(\varepsilon)} \frac{(\nabla \mathcal{Y}_\lambda(v)) \cdot (u-v)}{|v-u|^3} \varepsilon^3 d\Omega'_v & \\
 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega_4} \frac{\lambda \mathcal{Y}_\lambda(v)}{|v-u|^2} d\Omega_v - \omega_4 \mathcal{Y}_\lambda(u) &
 \end{aligned}$$

mit der Fläche der S^{n-1} : $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, der Fläche der S^3 mit fehlender Umgebung von u : $\omega_4 - \omega_\varepsilon$ und der Fläche der Teilsphäre mit Radius ε : $\omega'(\varepsilon)$ für die gilt: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega'(\varepsilon) = \omega_4/2$. Insgesamt ergibt sich die Integralgleichung (3.11):

$$Y_\lambda(u) = \frac{\lambda+1}{\omega_4} \int_{S^3} \frac{Y_\lambda(v)}{|v-u|^2} d\Omega_v.$$

Der Vergleich der Vorfaktoren mit der Schrödingergleichung (3.10) liefert:

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda+1}{2\pi^2} &= \frac{\kappa\mu}{2\pi^2\hbar\sqrt{-2\mu E}} \\
 \Leftrightarrow E &= \frac{-\kappa^2\mu}{2\hbar^2(\lambda+1)^2} = \frac{-Z^2|e|^2\mu}{8\pi^2\hbar^2\varepsilon_0^2 n^2},
 \end{aligned}$$

sodass $\lambda+1$ der Hauptquantenzahl n entspricht. Da das homogene Polynom (vom Grad λ) \mathcal{Y}_λ in vier Variablen von $\binom{\lambda+3}{\lambda}$ Konstanten abhängt und $\Delta^{(4)} \mathcal{Y}_\lambda = 0$ weitere $\binom{\lambda+3-2}{\lambda-2}$ Bedingungen liefert, gibt es $\binom{\lambda+3}{\lambda} - \binom{\lambda+1}{\lambda-2} = (\lambda+1)^2 = n^2$ orthogonale Flächenfunktionen zu jedem Wert von λ . Wir haben somit eine weitere Art gefunden zu zeigen, wie die Entartung der Energieniveaus von der vierdimensionalen Rotations-symmetrie abstammt.

Die vierdimensionalen Kugelflächenfunktionen lassen sich explizit z.B. als

$$Y_{nlm}^{(4)}(\alpha, \vartheta, \varphi) = P_{nl}(\alpha) Y_{lm}^{(3)}(\vartheta, \varphi)$$

mit den Kugelflächenfunktionen in drei Dimensionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ (die Entartung bzgl. der

magnetischen Quantenzahl m stammt aus der dreidimensionalen Rotationssymmetrie) und den normierten Lösungen von

$$P_{nl}(\alpha) = \frac{\sin^l(\alpha)}{\sqrt{n^2(n-1)^2 \dots (n-l)^2}} \frac{\partial^{l+1} \cos(n\alpha)}{\partial \cos^{l+1}(\alpha)}$$

angeben (vgl. V. Fock [8]). Eine andere Methode (siehe [17]) bringt sie mit den Elementen der Wignerschen Matrix $\mathcal{D}_{m,m'}^j$ in Verbindung. Dabei werden die gruppentheoretischen Ergebnisse ausgenutzt, dass zum einen die S^3 homöomorph ist zum Raum der Parameter der Gruppe $SU(2)$ (dargestellt durch unitäre, komplexe 2×2 -Matrizen mit Determinante 1) und dass zum anderen die $\mathcal{D}_{m,m'}^j$ dort einen kompletten Satz an Funktionen bilden, wobei es zu jedem j (Drehimpuls) $(2j+1)^2$ Funktionen gibt. Auf diese Weise lassen sie sich mit den Kugelflächenfunktionen mit $\lambda = 2j$ identifizieren:

$$Y_{2j,m,m'}^{(4)}(u) = \sqrt{\frac{2j+1}{2\pi^2}} \mathcal{D}_{m,m'}^j(u_4 + i\vec{u} \cdot \vec{\sigma}). \quad (3.12)$$

Beweis: Ein allgemeines Element der $SU(2)$ ist eine Matrix (-darstellung einer Quaternion, siehe Abschnitt 2.4.2):

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = u_4 \mathbb{1} + i\vec{u} \cdot \vec{\sigma}, \quad u \in S^3 \subset \mathbb{R}^4, \\
 |a|^2 + |b|^2 &= 1, \quad a = u_4 + iu_3, \quad b = u_2 + iu_1
 \end{aligned}$$

mit den Pauli-Matrizen σ_i , $i = 1, 2, 3$. Damit besteht eine Eins-zu-Eins Beziehung zwischen S^3 und $SU(2)$. Die Wigner-D-Funktionen mit einer 2×2 -Matrix $B = (b_{ij})_{ij}$ als Argument lassen sich definieren als:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{m,m'}^j(B) &= \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!} \\
 &\cdot \sum_{n_i > 0} \frac{b_{11}^{n_1} b_{12}^{n_2} b_{21}^{n_3} b_{22}^{n_4}}{n_1! n_2! n_3! n_4!} \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 n_1 + n_2 &= j + m, & n_3 + n_4 &= j - m \\
 n_1 + n_3 &= j + m', & n_2 + n_4 &= j - m'.
 \end{aligned}$$

Man erhält nun die Matricelemente $\mathcal{D}_{m,m'}^j$ der irreduziblen Darstellungen der $SU(2)$ bezogen auf den Drehimpuls j , indem man A in (3.13) einsetzt [17]. Wenn wir die Multiplikation von A mit einer positiven reellen Zahl s erlauben, was einer Erweiterung der Gruppe zu $SU(2) \times (\mathbb{R}_+, \cdot)$ entspricht, stellen wir fest, dass die

$$\mathcal{D}_{m,m'}^j(sA) = s^{2j} \mathcal{D}_{m,m'}^j(A)$$

offensichtlich, aufgrund der Bedingungen an die n_i , homogen vom Grad $2j$ sind. Außerdem rechnen wir nach, dass sie harmonische Funktionen sind. Dazu bemerken wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= 4 \frac{\partial}{\partial(x+iy)} \frac{\partial}{\partial(x-iy)} \\ \Rightarrow \Delta_u^{(4)} &= 4 \left(\frac{\partial}{\partial(u_4+iu_3)} \frac{\partial}{\partial(u_4-iu_3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial(u_2+iu_1)} \frac{\partial}{\partial(u_2-iu_1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \Delta_u^{(4)} \mathcal{D}_{m,m'}^j(sA) \\ &= 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial(sa)\partial(s\bar{a})} + \frac{\partial^2}{\partial(sb)\partial(s\bar{b})} \right) \mathcal{D}_{m,m'}^j(sA) \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung des Wurzel-Vorfaktors ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \Delta_u^{(4)} \sum_{n_i > 0} \frac{(sa)^{n_1} (sb)^{n_2} (-s\bar{b})^{n_3} (s\bar{a})^{n_4}}{n_1! n_2! n_3! n_4!} \\ &= \sum_{n_i > 0} \frac{n_1 n_4 (sa)^{n_1-1} (sb)^{n_2} (-s\bar{b})^{n_3} (s\bar{a})^{n_4-1}}{n_1! n_2! n_3! n_4!} \\ &\quad - \sum_{n_i > 0} \frac{n_2 n_3 (sa)^{n_1} (sb)^{n_2-1} (-s\bar{b})^{n_3-1} (s\bar{a})^{n_4}}{n_1! n_2! n_3! n_4!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(j+m-1)! \dots}} \left(\mathcal{D}_{m,m'}^{j-1}(sA) - \mathcal{D}_{m,m'}^{j-1}(sA) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

denn sowohl aus

$$\begin{aligned} (n_1 - 1) + n_2 &= j + m - 1, \\ n_3 + (n_4 - 1) &= j - m - 1, \end{aligned}$$

als auch aus

$$\begin{aligned} n_1 + (n_2 - 1) &= j + m - 1, \\ (n_3 - 1) + n_4 &= j - m - 1 \end{aligned}$$

folgt, dass die Summe nach der Ableitung zur Wignerfunktion mit $j-1$ gehört.

Die Funktionen sind sowohl bzgl. verschiedener j als auch verschiedener m und m' orthogonal. D.h.:

$$\int_{S^3} \overline{\mathcal{D}_{m_1,m_1'}^{j_1}} \mathcal{D}_{m_2,m_2'}^{j_2} d^4\Omega_u = N \delta_{j_2 j_1} \delta_{m_1 m_2} \delta_{m_1' m_2'}$$

für eine Normalisierungskonstante N . Es gilt außerdem:

$$\sum_{\nu=-j}^j \overline{\mathcal{D}_{m_1,\nu}^j} \mathcal{D}_{m_2,\nu}^j = \delta_{m_1 m_2}$$

damit folgt nun:

$$\begin{aligned} \delta_{m_1 m_2} 2\pi &= \int_{S^3} \sum_{\nu=-j}^j \overline{\mathcal{D}_{m_1,\nu}^j} \mathcal{D}_{m_2,\nu}^j d^4\Omega_u \\ &= (2j+1) \int_{S^3} \overline{\mathcal{D}_{m_1,m'}^j} \mathcal{D}_{m_2,m'}^j d^4\Omega_u \\ &= (2j+1) N \delta_{m_1 m_2} \\ \Rightarrow N &= \frac{2\pi}{(2j+1)}. \end{aligned}$$

Somit sind die vollständigen Darstellungen der Kugelflächenfunktionen aus (3.12) gefunden.

3.4 Supersymmetrie

Die Idee der *Supersymmetrie* findet vor allem in modernen Quantenfeldtheorien Anwendung, die über das Standardmodell hinausgehen, und bedeutet dort, dass eine Symmetrie zwischen *fermionischen* (Materie-) Teilchen und *bosonischen* (Austausch-) Teilchen besteht. D.h. es muss z.B. zu jedem Elementarteilchen ein korrespondierendes Kraftteilchen geben und entsprechende Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren transformieren zwischen fermionischen und bosonischen Zuständen.

Lyman und Aravind zeigten 1992 in [14], wie die supersymmetrische Behandlung des Wasserstoffatoms direkt auf die Komponenten des LRL-Vektors führt. Dazu benötigen wir folgende Grundlagen der supersymmetrischen Quantenmechanik.

Für ein Teilchen im eindimensionalen Potential $V(X)$ setzen wir die Energie des Grundzustands ψ_0 zu Null. Dann lässt sich das Potential durch die Wellenfunktion $\psi_0(x)$ und deren zweite Ableitung darstellen:

$$\begin{aligned} H\psi_0(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_0''(x) + V(x)\psi_0(x) = 0 \\ \Rightarrow V(x) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} \\ \Rightarrow H &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} \right). \end{aligned}$$

Nun definieren wir zwei Operatoren

$$A^\pm = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\pm \frac{d}{dx} + \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \right),$$

sodass $H = A^+ A^-$. Der Operator $H_S = A^- A^+$ heißt dann der *supersymmetrische Partner* von

H . Er besitzt Eigenzustände ψ_{is} mit gleicher Energie wie H , wobei jedoch das Pendant zum Grundzustand fehlt. Die Operatoren A^\pm transformieren zwischen ihnen:

$$A^- \psi_i = \psi_{is}, \quad A^+ \psi_{is} = \psi_i$$

Die Struktur der Entartung beim Wasserstoffatom erinnert nun an die Spektren von H und H_S : zu einem Energieniveau n gibt es Zustände mit Drehimpulsquantenzahl

$$l = 0, 1, 2, \dots, n - 1,$$

d.h. zu einem bestimmten Wert von l gibt es Zustände mit Hauptquantenzahl

$$n = l + 1, l + 2, \dots,$$

während es für $l + 1$ erst beim Zustand mit $n = l + 2$ beginnt. Das legt nahe, dass die effektiven Potentiale, die zu l und $l + 1$ gehören, supersymmetrische Partner sind.

Wir separieren die Wellenfunktion des zweidimensionalen H-Atoms in Radial- und Winkelanteil:

$$\psi_{nl}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} u_{nl}(r) e^{il\varphi}$$

Die radiale Schrödingergleichung, die $u(r)$ bestimmt, lautet:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{l^2 + \frac{1}{4}}{r^2} - \frac{\kappa}{r} \right)}_{=: V_l(r)} \right) u(r) = E_n u(r)$$

mit dem effektiven Potential $V_l(r)$ bestehend aus Coulomb- und Zentrifugalteil.

Beweis: Beginnend mit der zweidimensionalen Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta^{(2)} - \frac{\kappa}{r} \right) \psi(r, \varphi) = E_n \psi(r, \varphi)$$

liefert Einsetzen der Wellenfunktion

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{1}{\sqrt{r}} u(r) e^{il\varphi} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{3}{4} \frac{u(r)}{\sqrt{r^5}} - \frac{1}{2\sqrt{r^3}} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2\sqrt{r^3}} \frac{\partial u}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{\sqrt{r^5}} u(r) + \frac{1}{\sqrt{r^3}} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{l^2}{\sqrt{r^5}} \right) e^{il\varphi} \\ &= \left(E_n + \frac{\kappa}{r} \right) \frac{1}{\sqrt{r}} u(r) e^{il\varphi} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(\frac{1}{4} - l^2)}{r^2} u(r) \right] = \left(E + \frac{\kappa}{r} \right) u(r). \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass V_{l+1} tatsächlich der supersymmetrische Partner von V_l ist, benötigen wir den Grundzustand

$$u_{(l+1)l}(r) = r^{(l+\frac{1}{2})} e^{-\mu\kappa r/\hbar^2(l+\frac{1}{2})}$$

(nicht normiert). Dann ist

$$V_{l+1} = -V_l + \frac{\hbar^2}{\mu} \left(\frac{u'_{(l+1)l}}{u_{(l+1)l}} \right)^2.$$

Nun definieren wir die Operatoren, die zwischen den Radialfunktionen mit benachbarten Drehimpulsquantenzahlen transformieren:

$$A^\pm = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(\pm \frac{\partial}{\partial r} + \frac{(l + \frac{1}{2})}{r} - \frac{a}{\hbar^2 (l + \frac{1}{2})} \right)$$

mit

$$\begin{aligned} A^- u_{nl}(r) &= u_{n(l+1)}(r), \\ A^+ u_{n(l+1)}(r) &= u_{nl}(r). \end{aligned}$$

Wir wollen diese Operatoren nun so modifizieren, dass sie die gesamten Wellenfunktionen $\psi_{nl}(r, \varphi)$ transformieren:

- (i) Ersetze $(l + \frac{1}{2})$ mit $(l+1)$. Dies führt dazu, dass der ganze Radialanteil $R = u(r)/\sqrt{r}$ transformiert wird.
- (ii) Multipliziere mit $(2l + 1)$ und $\hbar/\sqrt{2\mu}$.
- (iii) Ersetze l in A^- und $(l + 1)$ in A^+ durch $-i \frac{\partial}{\partial \varphi}$ und multipliziere mit $e^{\mp i\varphi}$.

$$\Rightarrow A^\pm = -e^{i\varphi} \kappa +$$

$$\frac{e^{\mp i\varphi} \hbar^2}{2\mu} \left(\mp 2i \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \pm \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Dem Standardverfahren im supersymmetrischen Formalismus folgend (vgl. z.B. [23],[1]), lassen sich nun hermitesche Operatoren aus der Summe und der Differenz der Transformationsoperatoren konstruieren. Diese stimmen in unserem Fall mit den ersten zwei Komponenten des LRL-Vektoroperators überein:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{2} (A^- + A^+) \\ A_y &= -\frac{i}{2} (A^- - A^+). \end{aligned}$$

Beweis: Wir rechnen beispielsweise

$$A^- - A^+ = \frac{i\hbar^2}{\mu} \left(\cos(\varphi) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \sin(\varphi) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right) + 2i \sin(\varphi) \kappa.$$

Mit

$$P_r = i\hbar \frac{\partial}{\partial r}, \quad P_\varphi = i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

und

$$\begin{aligned} P_x &= \cos(\varphi) P_r - \sin(\varphi) P_\varphi \\ P_y &= \sin(\varphi) P_r + \cos(\varphi) P_\varphi \end{aligned}$$

lautet A_y andererseits:

$$\begin{aligned} A_y &= \frac{1}{2\mu} \left(\cancel{P_z (Y P_z - Z P_y)} - P_x (X P_y - Y P_x) \right. \\ &\quad \left. - (X P_y - Y P_x) P_x + \cancel{(Y P_z - Z P_y) P_z} \right) - \frac{y\kappa}{r} \\ &= \frac{1}{2\mu} \left(-(\cos(\varphi) P_r - \sin(\varphi) P_\varphi) r P_\varphi \right. \\ &\quad \left. - r P_\varphi (\cos(\varphi) P_r - \sin(\varphi) P_\varphi) \right) - \frac{y\kappa}{r} \\ &= \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(2 \cos(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2 \sin(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right. \\ &\quad \left. - \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= -\frac{i}{2} (A^- - A^+). \end{aligned}$$

Die Supersymmetrie und die $O(4)$ -Symmetrie des Wasserstoffatoms sind also eng miteinander verwandt, beide erklären die „zufällige“ Entartung und, wie wir gesehen haben, liefern die supersymmetrischen Transformationsoperatoren die Komponenten des LRLP-Operators.

4. Der magnetische LRL-Vektor

Die nichtrelativistische Bewegung eines geladenen Teilchens in einer Ebene senkrecht zu einem gleichförmigen Magnetfeld ist ein weiteres klassisches Problem, das zwar nicht von einem Zentralpotential bestimmt wird, aber auch auf geschlossene, kreisförmige Bahnen führt. *Velasco-Martinez et. al.* haben in [6] die Erhaltungsgrößen dieses Systems untersucht und dabei ein Pendant zum LRL-Vektor des Keplerproblems gefunden.

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit Masse m und Ladung q in einem solchen Feld lautet:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}.$$

Mit der magnetischen Flussdichte $\vec{B} = B\vec{e}_z$ und der Anfangsbedingung $\dot{z}(t=0) = 0$, findet die Bewegung bekanntermaßen in der (x, y) -Ebene senkrecht zu \vec{B} statt.

Den kanonischen Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

(\vec{p} kanonischer Impuls) erhält man z.B. indem man die Bewegungsgleichung von links mit \vec{r} im Kreuzprodukt multipliziert:

$$\begin{aligned} m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) &= q\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \\ \Leftrightarrow m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) &= q \left(\underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{B})}_{=0} - \underbrace{\vec{B} \cdot (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}_{=\frac{B}{2} \frac{dr^2}{dt}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \frac{q}{2} r^2 \vec{B} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist der Drehimpuls

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} + \frac{q}{2} r^2 \vec{B}$$

eine Erhaltungsgröße. Er besteht aus dem mechanischen Anteil $m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ und dem magnetischen Anteil, der vom magnetischen Drehmoment $\tau = q\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$ stammt. Auf diese Weise ist er der Generator von Rotationen um die

z -Achse.

Nimmt man nun das Kreuzprodukt der Bewegungsgleichung mit \vec{L} von rechts, so erhält man eine weitere Erhaltungsgröße \vec{A} :

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} &= q(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \times \vec{L} \\ \Leftrightarrow m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) &= q \left(\vec{B} \cdot \underbrace{(\vec{L} \cdot \dot{\vec{r}})}_{=0} - \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{L} \cdot \vec{B}) \right) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(m(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) + qBL\vec{r} \right) & \\ \Rightarrow \vec{A} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{L} + qBL\vec{r}, & \end{aligned}$$

die von *Velasco-Martinez et. al.* in Analogie zum Keplerproblem als der *magnetische Laplace-Runge-Lenz Vektor* bezeichnet wird. Er liegt, wie sein Namenspate, in der Bewegungsebene ($\vec{L} \cdot \vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A} = 0$) und die Bahngleichung lässt sich, ohne eine Differentialgleichung lösen zu müssen, mit seiner Hilfe einfach aus dem Skalarprodukt

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = m\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) + qBLr^2 \quad (4.1)$$

berechnen. Sie beschreibt einen Kreis um den Punkt

$$\vec{c} = \frac{1}{qBL} \vec{A}$$

mit Radius

$$\varrho = \frac{\sqrt{A^2 - 2qBL^3}}{qBL}.$$

Beweis: (4.1) liefert aufgrund von

$$\begin{aligned} m\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) &= m \det(\vec{r} \dot{\vec{r}} \vec{L}) \\ &= (-1)^2 m \det(\vec{L} \dot{\vec{r}} \vec{r}) = \vec{L} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= \vec{L} \cdot \left(\vec{L} - \frac{1}{2} q r^2 \vec{B} \right): \end{aligned}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = L^2 + \frac{1}{2}qLBr^2 =: rA \cos(\beta)$$

$$\Leftrightarrow r^2 - \frac{2A \cos(\beta)}{qLB}r + \frac{2L}{qB} = 0.$$

Für einen Kreis mit Mittelpunkt

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} r_c \cos(\varphi_c) \\ r_c \sin(\varphi_c) \end{pmatrix}$$

und Radius ϱ gilt andererseits:

$$\varrho^2 = r_c^2 + r^2 - 2rr_c \cos(\varphi - \varphi_c)$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 2rr_c \cos(\varphi - \varphi_c) + r_c^2 - \varrho^2 = 0.$$

Aus dem Vergleich folgt:

$$\Rightarrow r_c = \frac{A}{qBL} \quad \Rightarrow \vec{r}_c = \frac{\vec{A}}{qBL}$$

$$\Rightarrow r_c^2 - \varrho^2 = \frac{2L}{qB} \quad \Leftrightarrow \varrho^2 = \frac{A^2 - 2qBL^3}{q^2B^2L^2}$$

Obwohl es sich nicht um ein Zentralpotential handelt und keine elliptischen Orbits existieren, erlaubt das Problem eines zweidimensionalen Teilchens im konstanten Magnetfeld die Definition eines Analogons des LRL-Vektors, der zum Zentrum der kreisförmigen Bahn zeigt.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Valance, T.J. Morgan, H. Bergeron. Eigensolution of the Coulomb Hamiltonian via supersymmetry. *American Journal of Physics*, 58:487–491, 1990.
- [2] John Baez. Mysteries of the gravitational 2-body system. <http://math.ucr.edu/home/baez/gravitational.html>, Stand: 18.08.2015.
- [3] V. Bargmann. Zur Theorie des Wasserstoffatoms. Bemerkungen zur gleichnamigen Arbeit von V. Fock. *Zeitschrift für Physik*, 98:576, 1936.
- [4] Peter Collas. Algebraic solution of the Kepler problem using the Runge-Lenz vector. *American Journal of Physics*, 38(2), 1970.
- [5] Greg Egan. The ellipse and the atom. <http://gregegan.customer.netspace.net.au/SCIENCE/Ellipse/Ellipse.html>, Stand: 17.08.2015.
- [6] D. Velasco-Martinez et al. Constants of motion for the planar orbit of a charged particle in a static uniform magnetic field: the magnetic Runge-Lenz vector.
- [7] H. White F.I. Arunaye. On the Ermanno-Bernoulli and quasi-Ermanno-Bernoulli constants of linearizing dynamical systems. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 7(3), 2008.
- [8] V. Fock. Zur Theorie des Wasserstoffatoms. *Zeitschrift für Physik*, 1935.
- [9] Herbert Goldstein. Prehistory of the Runge-Lenz vector. *American Journal of Physics*, 43(8), 1975.
- [10] Herbert Goldstein. More on the prehistory of the Runge-Lenz vector. *American Journal of Physics*, 44, 1976.
- [11] Jesper Göransson. Symmetries of the Kepler problem. 2015.
- [12] Harold H. Rogers. Symmetry transformations of the classical Kepler problem. *Journal of Mathematical Physics*, 14(1125), 1973.
- [13] C.G. Jacobi. De motu puncti singularis. *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 24:20–22, 1842.
- [14] John M. Lyman, P.K. Aravind. Deducing the Lenz vector of the hydrogen atom from supersymmetry. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26(13), 1993.
- [15] Laplace. *Œvre Completes de Laplace*, volume Band 1, Buch 2. Gauthier-Villars, Paris, 1878.
- [16] Wilhelm Lenz. Über den Bewegungsverlauf und die Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung. *Zeitschrift für Physik A*, 24:197–207, 1924.
- [17] M. Bander, C. Itzykson. Group theory and the hydrogen atom (I). *Reviews of Modern Physics*, 38(2), 1968.

- [18] John Milnor. On the geometry of the Kepler problem. *American Mathematical Society Notices*, 90:353–365, 1983.
- [19] Jim Morehead. Visualizing the extra symmetry of the Kepler problem. *American Journal of Physics*, 73(234), 2005.
- [20] Jürgen Moser. Regularization of Kepler’s problem and the averaging method on a manifold. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 23:609–636, 1970.
- [21] Jan Mostowski. Canonical transformations of Kepler trajectories. *European Journal of Physics*, 31:1187–1194, 2010.
- [22] Gerardo Munoz. Second constant of motion for two-dimensional positronium in a magnetic field. *Physical Review A*, 67, 2003.
- [23] Hermann Nicolai. Supersymmetrische Quantenmechanik. *Physikalische Blätter*, 47(5):387–392, 1991.
- [24] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 2*. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 8. Auflage, 2011.
- [25] Wolfgang Pauli. Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, pages 336–363, 1926.
- [26] P.G.L. Leach, G.P. Flessas. Generalisations of the Laplace-Runge-Lenz vector. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 10(3), 2003.
- [27] Carl Runge. *Vektoranalysis Band 1: Die Vektoranalysis des dreidimensionalen Raumes*. S. Hirzel, Leipzig, 1919.
- [28] Florian Scheck. *Theoretische Physik 1*. Springer, 2007.
- [29] Harold V. McIntosh Victor A. Dulock. On the degeneracy of the Kepler problem. *Pacific Journal of Mathematics*, 19(1), 1966.
- [30] Otto Volk. Miscellanea from the history of celestial mechanics. *Celestial Mechanics*, 14:365–382, 1976.