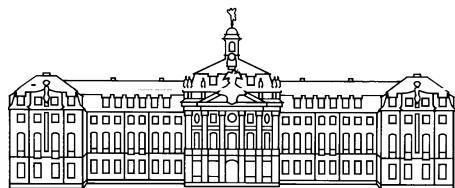


Synchronisation eines hierarchischen Ensembles global gekoppelter selbsterregter Oszillatoren

als Diplomarbeit vorgelegt von

Cornelia Petrović



Westfälische Wilhelms-Universität
Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1 Einführung - der selbsterregte Oszillator	1
2 Synchronisation eines periodischen Oszillators durch eine äußere Kraft	10
2.1 Schwach getriebener quasilinearer Oszillator	10
2.1.1 Phase- und frequency-locking	13
2.1.2 Übergang zu Synchronisation	17
2.1.3 Synchronisation in höherer Ordnung	18
2.2 Phasendynamik	20
2.2.1 Phasengleichung	20
2.2.2 Langsame Phasendynamik	21
3 Gegenseitige Synchronisation zweier wechselwirkender Oszillatoren	26
3.1 Phasendynamik	26
3.1.1 Herleitung der Phasengleichungen	26
3.1.2 Gemittelte Gleichungen für die Phase	27
3.2 Relaxationsoszillatoren	30
4 Populationen global gekoppelter Oszillatoren	33
4.1 Das Kuramoto-Modell	33
4.2 Integrate-and-fire-Oszillatoren	39
5 Das Modell	42
5.1 Das Grundmodell - ein einzelner Oszillator	44
5.1.1 Vorüberlegungen	44
5.1.2 Die beschreibenden Gleichungen	46
5.2 Das Ensemble von N gekoppelten Oszillatoren	48
5.3 Übergang zum Kontinuum	49
6 Dynamisches Verhalten eines einzelnen Oszillators	50
6.1 Qualitative Untersuchung des Langzeitverhaltens	50
6.2 Quantitative Untersuchung des Langzeitverhaltens	53

Inhaltsverzeichnis

7 Numerische Simulationen	55
7.1 Einzelner Oszillator	55
7.2 N gekoppelte Oszillatoren	60
7.2.1 $N=10$ gekoppelte Oszillatoren	60
7.2.2 $N = 100$ gekoppelte Oszillatoren	78
8 Zusammenfassung	84
Abbildungsverzeichnis	87
Literaturverzeichnis	89

Einleitung

Zeitgleich aufblinkende Glühwürmchen, künstliche Herzschrittmacher, Funkuhren, ein spontan sich auf einen gemeinsamen Rhythmus einklatschendes Theaterpublikum oder die Wechselwirkung von Herzschlag und Atemfrequenz... Ein jeder kennt mehr oder weniger spektakuläre Beispiele für

Synchronisation,

das Angleichen der Rhythmen verschiedener oszillierender Objekte. Sie findet auf jeglichen Skalen statt: zwischen den Schrittmacherzellen unseres Herzens bis hin zu den Planeten unseres Sonnensystems.

Im wissenschaftlichen Kontext der Physik lässt sich das Gebiet der Synchronisationsforschung der Nichtlinearen Dynamik zuordnen. Sie gilt durch die Beobachtungen und anschließenden Experimente von Huygens im Jahr 1665 sogar als der erste wissenschaftlich genau untersuchte nichtlineare dynamische Effekt [Huy67]. Er war darauf aufmerksam geworden, dass die von ihm entwickelten hochseetauglichen Pendeluhrn oft über sehr lange Zeit hinweg synchrone Pendelbewegungen durchführten, sofern sie an einem gemeinsamen Holzbalken angebracht waren. In anschließenden Untersuchungen und gezielten Experimenten fand Huygens heraus, dass diese synchronen Bewegungen auf sehr kleine, nahezu unmerkliche Schwingungen des gemeinsamen Balkens zurückzuführen sind. Einen echten Schub erhielt die Synchronisationsforschung jedoch erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts durch die Arbeiten von Appleton und van der Pol, die die Synchronisation nichtlinearer elektrischer Schwingungen von Röhrengeneratorn untersuchten und auch die erste mathematische Beschreibung des Problems lieferten [AP22, Pol26].

Obwohl die Beispiele für Synchronisation aus so unterschiedlichen Bereichen wie Physik, Ingenieurwissenschaften, Biologie, Chemie, Medizin oder auch Soziologie stammen, lassen sie sich universell über das Konzept gekoppelter selbsterregter Oszillatoren beschreiben [AVK37]. Bei diesen selbsterregten Oszillatoren ist, anders als beim wohlbekannten ungedämpften harmonischen Oszillator, die Energie keine Erhaltungsgröße. Ihre Schwingungen konvergieren gegen bestimmte, von den Anfangsbedingungen unabhängige Formen, die durch den Ausgleich von Dissipation und Energiezufluss bestimmt sind.

In den letzten Jahrzehnten hat sich die Forschung, nachdem zunächst Beispiele der unbelebten Natur untersucht wurden, zunehmend dem Bereich der belebten Natur zugewandt. Insbesondere das Gebiet der Neurowissenschaften ist dabei in den Fokus gerückt.

Synchronisation scheint hier z.B. ein zentraler Mechanismus sowohl für den Informationsfluss innerhalb eines Hirnareals als auch für die Kommunikation zwischen mehreren Hirnarealen zu sein (siehe [GKES89, SG95, Sin99]). Auch für einige Gehirnerkrankungen wie die Parkinsonsche Krankheit oder Epilepsie wird kohärente neuronale Aktivität verantwortlich gemacht. Die Schwingungen der hier zum Tragen kommenden Oszillatoren, mit denen die feuernden Neuronen modelliert werden, unterscheiden sich stark von den Sinusschwingungen eines linearen Oszillators. Es wechseln sich vielmehr lange Ruhezeiten mit Phasen heftiger Aktivität ab. Oszillatoren, deren Dynamik durch aufeinander folgende Phasen schneller und langsamer Bewegung gekennzeichnet ist, bezeichnet man allgemein als Relaxationsoszillatoren. Ein bekanntes Modell ist hierbei der sogenannte integrate-and-fire-Oszillator [MS90, Win80].

Die Entwicklung und Analyse von Modellen für Relaxationsoszillatoren ist deshalb von großem Interesse, und auch die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit diesem Themenkomplex. Die Motivation für die Modellierung stammt hier aus dem Bereich der chemischen Oszillationen, die im Zusammenhang mit der CO-Oxidation an Palladium-beladenen Trägerkatalysatoren auftreten. Misst man bei dieser Reaktion die CO- Konzentration im Versuchsreaktor, so stellt man fest, dass es immer wieder zu mehr oder weniger heftigen Einbrüchen der Umsatzrate kommt, die sich in selbstaffinen Strukturen in den Zeitreihen niederschlagen (siehe [BP00]).

Die Oxidation von CO an Palladium-Katalysatoren ist neben der Umwandlung von Stickoxiden und Kohlenwasserstoffen einer der wichtigsten Mechanismen in der Wirkweise von Fahrzeugkatalysatoren: Giftiges Kohlenmonoxid im Abgasstrom wird in CO_2 umgewandelt. Durch die angesprochenen Einbrüche in der Umsatzrate, die möglicherweise durch Synchronisationseffekte des Katalysators zustande kommen, wird der Wirkungsgrad des Katalysators empfindlich herabgesetzt. Dieses kann unter Umständen nur durch einen erhöhten Materialaufwand und damit, durch das kostenintensive Material, nur durch einen hohen finanziellen Mehraufwand kompensiert werden. Es ist demnach von großer Relevanz, eine Steuerung bzw. Optimierung dieser katalytischen Reaktion zu entwickeln. Dies setzt aber ein tiefergehendes Verständnis der zugrundeliegenden Mechanismen voraus und dabei insbesondere die Untersuchung, inwiefern Synchronisationseffekte zum Tragen kommen. Die Komplexität des Phänomens der Synchronisation macht dabei die Entwicklung von einfachen Modellen notwendig.

Die vorliegende Arbeit wird deshalb zunächst in einigen Kapiteln die wesentlichen Eigenschaften von Synchronisation erläutern, bevor ein grundlegendes Modell für die CO-Oxidation an einem Palladium-Katalysator vorgestellt wird. Das Ziel ist dabei die Entwicklung eines Modells, das qualitativ die gleiche zeitliche Entwicklung zeigt wie ein experimentell untersuchtes System [BP00], sich aber mit möglichst wenigen Parametern beschreiben lässt. Durch einen möglichst allgemeinen Ansatz kann das betrachtete System auch in Bezug auf andere heterogen-katalysierte Oxidationen wertvolle Einsichten liefern.

Die Struktur der Arbeit ist die folgende:

Kapitel 1 stellt das Konzept des selbsterregten Oszillators vor und führt die erforderlichen Begriffe ein, um in Kapitel 2 den Mechanismus der Synchronisation eines selbsterregten Oszillators durch eine äußere Kraft zu verstehen. Diese Art von Synchronisation kann als Vereinfachung des Falls zweier wechselwirkender Oszillatoren aufgefasst werden, die nur in einer Richtung gekoppelt sind. Der Fall der gegenseitigen Synchronisation zweier wechselwirkender periodischer Oszillatoren wird in Kapitel 3 behandelt. Dabei wird als Beispiel für Relaxationsoszillatoren insbesondere der Fall zweier gekoppelter integrate-and-fire-Oszillatoren analysiert.

Kapitel 4 setzt sich schließlich mit der Frage auseinander, was passiert, wenn man viele solcher selbsterregten Oszillatoren miteinander wechselwirken lässt. Dabei wird das sogenannte Kuramoto-Modell [Kur84, Str00] vorgestellt, das das Einsetzen von Synchronisation innerhalb eines Ensembles global gekoppelter Oszillatoren in Form eines Phasenüberganges beschreibt. Anschließend wird das Beispiel zweier gekoppelter integrate-and-fire-Oszillatoren aus Kapitel 3 auf den Fall einer großen Population übertragen [MS90].

In Kapitel 5 wird die genaue Motivation für diese Arbeit erläutert und darauf aufbauend das Modell für einen einzelnen Oszillator entwickelt, das anschließend auf den Fall N gekoppelter Oszillatoren erweitert wird. Die Dynamik des Systems wird in Kapitel 6 mit Hilfe analytischer Methoden und in Kapitel 7 anhand numerischer Simulationen untersucht. Anschließend werden die erzielten Ergebnisse zusammengefasst.

For reasons I wish I understood, the spectacle of sync strikes a chord in us, somewhere deep in our souls. It's a wonderful and terrifying thing. Unlike many other phenomena, the witnessing of it touches people at a primal level. Maybe we instinctively realize that if we ever find the source of spontaneous order, we will have discovered the secret of the universe.

Steven Strogatz, *Sync. The Emerging Science of Spontaneous Order.*

1 Einführung - der selbsterregte Oszillator

In diesem ersten Kapitel geht es darum, die im weiteren Text verwendeten Begriffe und Bezeichnungen zu klären, und somit auch dem mit der Problematik weniger vertrauten Leser einen Zugang zum Thema zu eröffnen. Bei aufkeimendem Interesse sei an dieser Stelle auf das im Jahr 2001 erschienene Buch von Pikovsky, Rosenblum und Kurths [PRK01] verwiesen, an dem ich mich in den ersten Kapiteln orientiere. In diesem Werk wird versucht, sowohl die moderne Synchronisationsforschung als auch die der letzten Jahrzehnte in einem einheitlichen Konzept zu präsentieren.

Alle Systeme, die im Vorwort erwähnt werden, oder, besser gesagt, ihre einzelnen Bestandteile, haben etwas gemeinsam: Isoliert man sie, so oszillieren sie weiter in ihrem eigenen Rhythmus. Dieser Rhythmus ist nicht von außen bestimmt, sondern „kommt aus ihnen selbst“, d.h. er wird durch systemeigene innere Parameter festgelegt. Die Oszillationen werden durch einen inneren Nachschub an Energie aufrechterhalten, der die Dissipation ausgleicht. Physikalisch gesprochen lassen sie sich über das Konzept des selbsterregten Oszillators beschreiben. Im Folgenden werden die Hauptmerkmale eines solchen Oszillators vorgestellt.

Der Begriff des Grenzzyklus

Geometrisch lassen sich selbsterregte Oszillatoren über die Existenz eines Grenzzyklus definieren. Als *Grenzzyklus* bezeichnet man eine isolierte, geschlossene Kurve im Phasenraum. Unter dem Begriff „isoliert“ versteht man hier, dass alle benachbarten Trajektorien *nicht* geschlossen sind, d.h. sie spiralen entweder auf den Grenzzyklus zu oder von ihm weg. Laufen alle Trajektorien in seiner Nachbarschaft auf den Grenzzyklus, bezeichnet man ihn als *stabil*, entfernen sie sich hingegen von ihm, nennt man ihn *instabil*. Außerdem existiert noch die Möglichkeit eines sogenannten *halbstabilen* Grenzzyklus, siehe Abbildung 1.1.

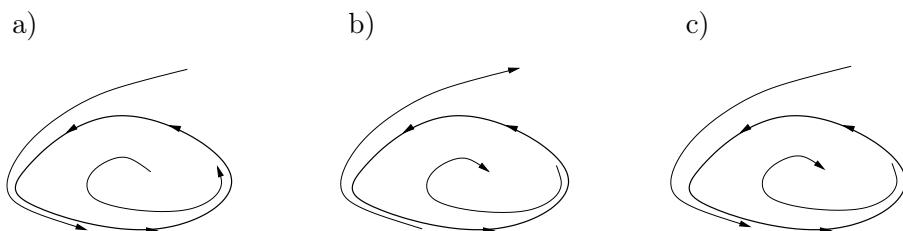


Abbildung 1.1: Verschiedene Typen von Grenzzyklen, stabil (a), instabil (b), halbstabil (c)

Ein selbsterregter Oszillator wird durch einen stabilen Grenzzyklus, sprich einen periodischen *Attraktor*, modelliert.

Die Eigenschaft der Isoliertheit unterscheidet den Grenzzyklus deutlich von anderen geschlossenen Kurven, wie sie beispielsweise bei konservativen, linearen Systemen vorkommen. Dieses soll kurz erläutert werden:

Hat man ein lineares System $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ und besitzt dieses eine periodische Lösung \mathbf{x}_0 , so ist auch $c\mathbf{x}_0$ eine periodische Lösung für jedes $c \in \mathbb{R}$, d.h. \mathbf{x}_0 ist umgeben von einer ganzen Familie von geschlossenen Orbits (siehe Abbildung 1.2).

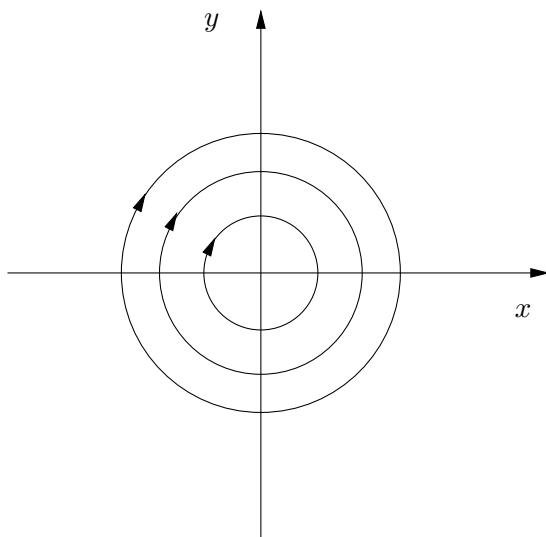


Abbildung 1.2: Besitzt ein konservatives System *eine* periodische Lösung, dann auch gleich eine ganze Familie von periodischen Lösungen.

Stabilität, Dissipation und Nichtlinearität

Im Fall eines konservativen Oszillators gibt es also keinen Grenzzyklus, sondern eine ganze Familie geschlossener Kurven (*wenn* es geschlossene Kurven gibt). Da es in diesen Systemen weder Dissipation noch einen Nachschub an Energie gibt, wird der Zustand des Systems und damit die Amplitude der linearen Oszillation vollständig festgelegt durch die Anfangsbedingungen. Wird ein solches System gestört und damit gegebenenfalls auch die Amplitude der Oszillation, bleibt diese Störung für immer erhalten. Die (feste) Amplitude eines selbsterregten Oszillators hingegen ist stabil, Störungen klingen ab (siehe Abbildung 1.1).

Notwendig für das Auftreten stabiler, selbsterregter Oszillationen ist Nichtlinearität: Wie soeben erläutert, kann es bei linearen, konservativen Systemen zwar periodische Lösungen geben, aber keine Grenzzyklen. Lineare Systeme mit Dissipation oder einer Energiequelle besitzen ebenfalls keine Grenzzyklen als Lösungen: Im dissipativen Fall re-

laxiert das lineare System gegen seine Ruhelage, im Fall einer vorliegenden Energiequelle wächst die Lösung unendlich an (siehe Abbildung 1.3).

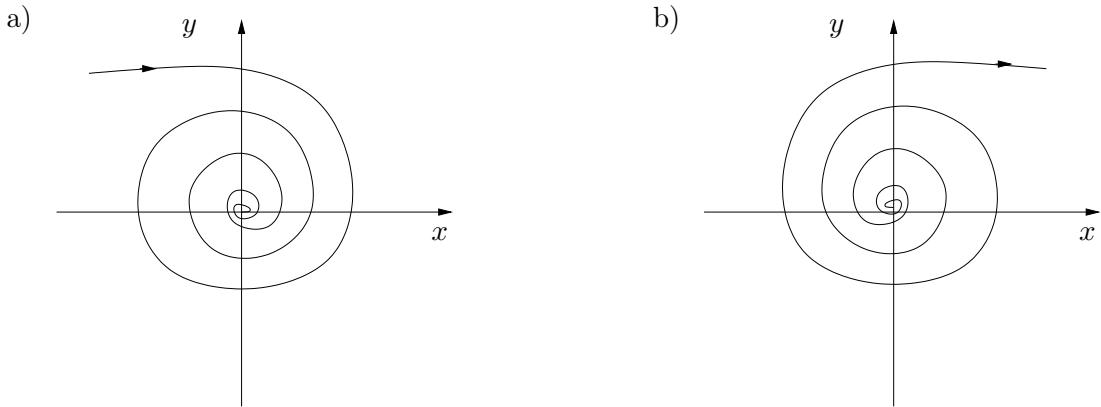


Abbildung 1.3: Lineare Systeme mit a) Dissipation bzw. b) Energiequelle können nur abfallende oder unendlich anwachsende Lösungen besitzen.

Amplitude, Phase und Frequenz

Der Begriff der Phase ist einer der wichtigsten im Zusammenhang mit selbsterregten Oszillatoren und dem Auftreten von Synchronisation. Er wird hier am Beispiel des Grenzzyklus eines quasilinearen Oszillators eingeführt und dann auf beliebige Grenzzyklen erweitert. Schließlich wird der Begriff der Isochrone eingeführt und die Phase damit vom Grenzzyklus auf ganze Bereiche in seiner Umgebung verallgemeinert.

Phase und Amplitude eines quasilinearen Oszillators

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Beispiel eines quasilinearen Oszillators, der durch die Gleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = n(x, \dot{x}) \quad (1.1)$$

bestimmt wird. Dies entspricht der Gleichung des harmonischen Oszillators, die durch einen nichtlinearen Term $n(x, \dot{x})$ ergänzt wird. Dieser nichtlineare Term $n(x, \dot{x})$ sei dabei im Vergleich zu den anderen Termen klein. Die oszillierende Lösung ist dann nahezu harmonisch und der resultierende Grenzzyklus einem Kreis sehr ähnlich. Die Bewegung auf dem Grenzzyklus kann beschrieben werden über eine Sinusfunktion

$$x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \phi_0). \quad (1.2)$$

Dabei ist $A(t)$ die *Amplitude* und $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ die *Frequenz*, T sei die Periode der Oszillation. (Korrekt gesprochen, bezeichnet man ω_0 als sogenannte *Kreisfrequenz* oder *Winkelfrequenz*, um sie von der zyklischen Frequenz $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ der Schwingung zu

unterscheiden. Wenn aber im Folgenden von der Frequenz die Rede ist, ist ω_0 gemeint.) Die Größe

$$\phi(t) := \omega_0 t + \phi_0 \quad (1.3)$$

nennt man die *Phase*. $\phi(t)$ ist dabei im Allgemeinen unbeschränkt. Da aber $\sin(\phi) = \sin(2\pi + \phi)$ gilt, gehören zwei Phasen, die sich um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden, somit zum gleichen physikalischen Zustand. Daher nimmt man häufig ϕ als Größe zwischen 0 und 2π an.

ϕ_0 ist die „Anfangsphase“, die Phase hängt also - anders als die Amplitude, die sich nach einem Einschwingzustand einstellt - vom Anfangszustand ab, dazu später mehr.

Betrachtet man die Bewegung des Phasenpunktes des Oszillators auf seinem Grenzzyklus, so entspricht die Amplitude der Radialkomponente und die Phase der Winkelkoordinate in Polarkoordinaten. Der Phasenpunkt rotiert dabei mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 auf dem Grenzzyklus (siehe Abbildung 1.4 a).

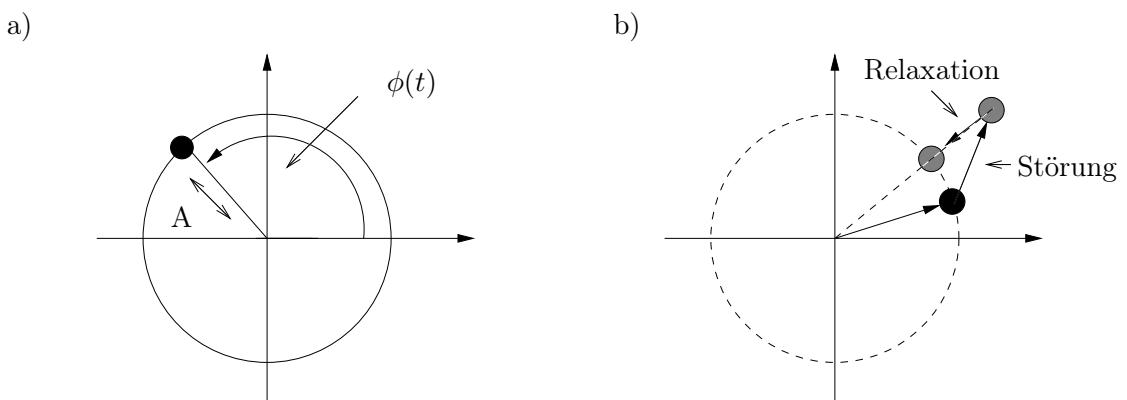


Abbildung 1.4: a) Eine stationäre selbsterregte Oszillation wird beschrieben durch die Bewegung des Phasenpunktes auf dem Grenzzyklus. Die Polarkoordinaten dieses Punktes entsprechen der Amplitude und der Phase des selbsterregten Oszillators. b) Störungen der Amplitude klingen ab, Störungen der Phase bleiben bestehen. Auf die Beschriftung der Achsen wird - wie auch im Folgenden - verzichtet

Was passiert, wenn wir diese Bewegung stören? (Siehe Abbildung 1.4 b.)

Wie bereits erwähnt, klingt die Störung der Amplitude ab; die Störung der Phase jedoch bleibt bestehen, weder wächst sie an noch nimmt sie ab (der Beweis hierfür folgt im Abschnitt über die Isochronen). Es gibt keinen bevorzugten Wert für die Phase, die Anfangsphasen sind rein zufällig verteilt oder hängen vielmehr nur von den Anfangsbedingungen ab. Es ist wichtig anzumerken, dass sehr kleine äußere Kräfte ausreichen, um die Phase zu stören. Dieses ist ein Hauptgrund dafür, dass selbsterregte Oszillatoren synchronisieren können.

Phase eines beliebigen Grenzzyklus

Wir betrachten nun den Grenzzyklus eines beliebigen selbsterregten Oszillators mit der Periode T , der i.A. stark von einem Kreis abweichen kann (siehe Abbildung 1.5). Wählt man als (beliebigen) Startpunkt den Zeitpunkt $t = t_0$, so definieren wir die Phase des Oszillators über

$$\phi(t) := \phi_0 + 2\pi \frac{t - t_0}{T}, \quad \phi_0 = \phi(t = t_0). \quad (1.4)$$

Damit ist die Phase eine Größe, die entlang der Trajektorie monoton anwächst,

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0, \quad (1.5)$$

und zwar über eine Periode genau um 2π . Obwohl die Phase also gleichförmig wächst, kann die Bewegung des Phasenpunktes auf dem Grenzzyklus völlig ungleichmäßig sein, und Intervalle sehr schneller Bewegungen können sich mit Bereichen sehr langsamer Bewegungen abwechseln. Oszillatoren mit solchen Grenzzyklen bezeichnet man auch als *Relaxationsoszillatoren*, auf ihnen liegt in dieser Arbeit besonderes Augenmerk.

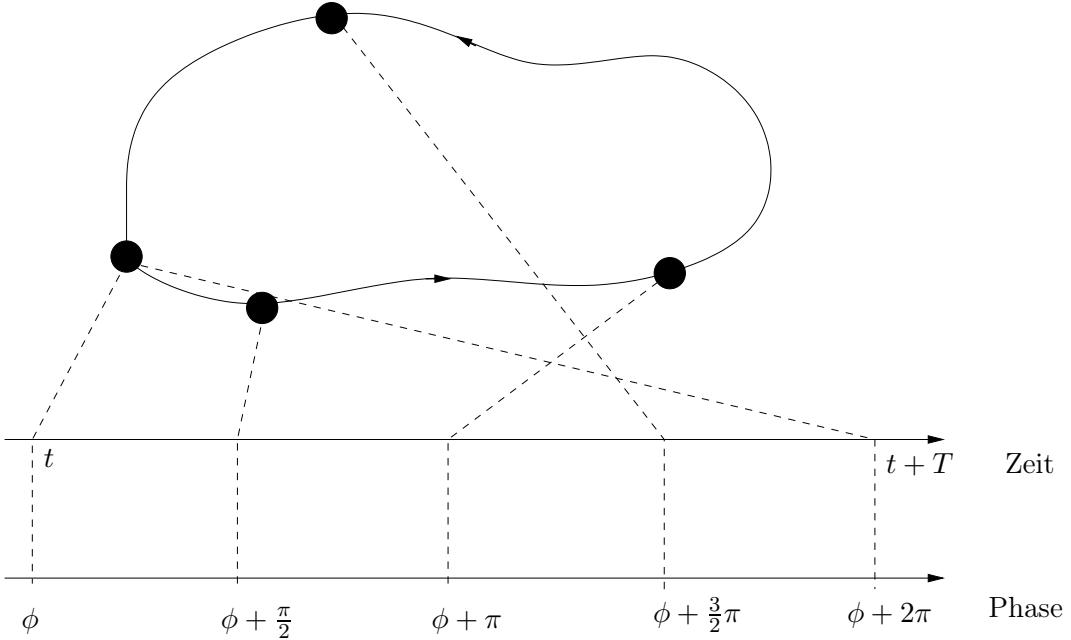


Abbildung 1.5: Phase eines beliebigen Grenzzyklus.

Für die Stabilität der Amplitude, die im Allgemeinen als transversale Abweichung vom Kreis aufgefasst werden kann, gilt das Gleiche wie für den schwach nichtlinearen Oszillator: In transversaler Richtung ist der Grenzzyklus stabil, Störungen der Amplitude klingen ab. Störungen der Phase, d.h. Störungen in tangentialer Richtung, nehmen weder zu noch ab - in tangentialer Richtung ist der Grenzzyklus weder stabil noch instabil,

sondern neutral. Um dieses besser charakterisieren zu können, betrachten wir das Verhalten benachbarter Trajektorien. Eine Charakterisierung dieses Verhaltens erfolgt über die Lyapunov-Exponenten: ein negativer Lyapunov-Exponent entspricht der Konvergenz benachbarter Trajektorien im Phasenraum entlang einer bestimmten Richtung, umgekehrt ein positiver Lyapunov-Exponent der Divergenz benachbarter Trajektorien entlang einer Richtung. Der Betrag der Exponenten gibt die Konvergenz- bzw. Divergenz-Rate an. Findet weder Konvergenz noch Divergenz statt, so charakterisiert man dieses durch einen Lyapunov-Exponenten mit dem Wert Null. Wir haben also hier einen negativen Lyapunov-Exponenten in transversaler Richtung (entspricht der Amplitude) und einen verschwindenden Lyapunov-Exponenten in tangentialer Richtung (entspricht der Phase) vorliegen. In Abbildung 1.6 ist schematisch das Verhalten anfänglich benachbarter Trajektorien in der Nähe des Grenzzyklus dargestellt. Wir gehen dabei von einer Menge von Anfangsbedingungen aus, die in einem kreisförmigen Gebiet rund um einen Punkt auf dem Grenzzyklus liegen. Im Laufe der Zeit nimmt dieses Phasenraum-Volumen in transversaler Richtung ab, so dass man eine elliptische Form erhält.

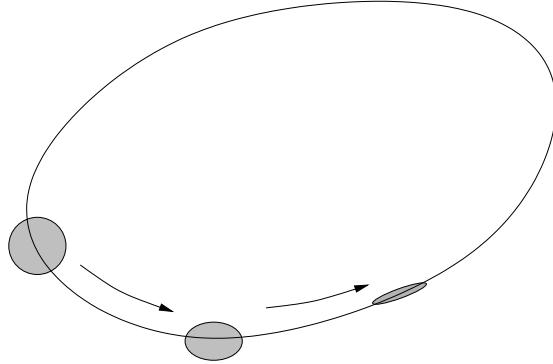


Abbildung 1.6: Entwicklung anfänglich benachbarter Trajektorien - Abnahme des Phasenraum-Volumens in transversaler Richtung.

Isochrone

Wie wir bisher gesehen haben, ist die Amplitude eines selbsterregten Oszillators stabil, die Phase kann jedoch sehr leicht beeinflusst werden. Aus diesem Grund konzentrieren sich viele Überlegungen in Bezug auf die Synchronisation selbsterregter Oszillatoren allein auf die Phasendynamik. Obwohl jedoch die Amplitude äußerst stabil ist und die Abweichungen sehr klein sind, findet die Dynamik nicht *nur* auf dem Grenzzyklus statt, sondern auch in seiner näheren Umgebung. Wir müssen also die Phase des Grenzzyklus auf seine nähere Umgebung erweitern. Die im Folgenden vorgeschlagene Methode folgt dabei den Überlegungen von [Guc75, Win80]. Die Grundidee hier ist, eine Phasenvariable so einzuführen, dass Gleichung (1.5) $\frac{d\phi}{dt} = \omega_0$ nicht nur auf dem Grenzzyklus gilt, sondern auch in der näheren Umgebung; dazu führen wir spezielle Kurven ein, die sogenannten *Isochronen*.

Wir betrachten ein allgemeines N -dimensionales dissipatives autonomes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N). \quad (1.6)$$

Dieses System besitze eine stabile periodische Lösung $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(t + T_0)$ oder besser gesagt, einen Grenzzyklus. Man beobachte das System stroboskopisch jeweils nach der Zeit T_0 . Dann erhält man eine Abbildung

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t + T_0) =: \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (1.7)$$

Diese Abbildung besitzt alle Punkte des Grenzzyklus als Fixpunkte und alle Punkte in der näheren Umgebung werden auf diesen Attraktor gezogen. Man betrachte nun einen Punkt \mathbf{x}_1 auf dem Grenzzyklus und suche dazu alle Punkte, die unter der Abbildung \mathbf{F} (soll heißen, unter Iterationen von \mathbf{F}) auf \mathbf{x}_1 abgebildet werden. Dann formen diese Punkte eine $(N - 1)$ -Hyperfläche I , genannt Isochrone, die den Grenzzyklus bei \mathbf{x}_1 schneidet. Für jeden Punkt auf dem Grenzzyklus kann man eine solche Hyperfläche konstruieren. Jedem Punkt auf dem Grenzzyklus ist aber eindeutig eine Phase zugeordnet; man kann also die Isochronen über die Phase als $I(\phi)$ parametrisieren. Wir erweitern nun die Definition der Phase, indem wir fordern, dass alle Punkte auf einer Isochrone $I(\phi)$ dieselbe Phase ϕ besitzen sollen. Diese verallgemeinerte Phase erfüllt Gleichung (1.5), da die Isochronen mit der gleichen Geschwindigkeit rotieren wie ein Punkt auf dem Grenzzyklus (siehe Abbildung 1.7).

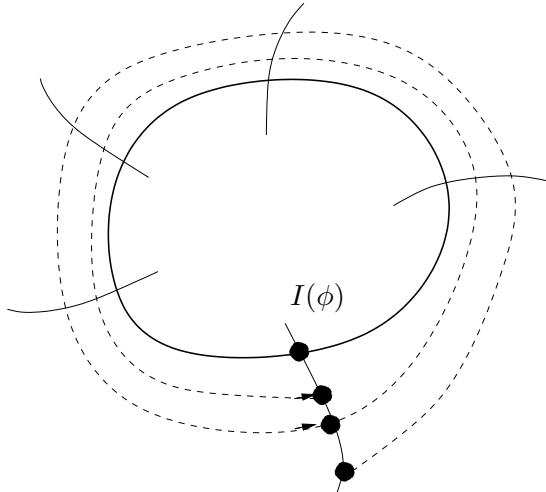


Abbildung 1.7: Isochrone in der Nähe des Grenzzyklus. Konstruktion der Isochronen durch die stroboskopische Abbildung F .

Aus Gleichung (1.5) folgt jedoch die bereits angesprochene, sehr wichtige Eigenschaft der Phase: sie ist neutral stabil. Eine Störung der Phase bleibt konstant: weder nimmt

sie im Laufe der Zeit zu, noch ab. Man könnte auch sagen, die Phase ist Lyapunov-stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

Beispiel: der Van-der-Pol-Oszillator

Wesentliche Impulse zur Entwicklung der Theorie komplexer Systeme kamen in den zwanziger Jahren des letzten Jahrhunderts aus dem Bereich der Elektrotechnik. Auf den niederländischen Ingenieur der Elektrotechnik Balthasar van der Pol beispielsweise geht die berühmte van der Pol-Gleichung zurück:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \mu \geq 0. \quad (1.8)$$

Er stieß auf sie bei dem Versuch, die nichtlineare Dynamik der von ihm untersuchten Röhrengeneratoren theoretisch zu erklären [AP22].

Gleichung (1.8) entspricht der eines einfachen linearen Oszillators, aber mit einem nicht-linearen Dämpfungsterm. Für $|x| > 1$ wirkt dieser Term wie gewöhnliche positive Reibung, für $|x| < 1$ jedoch wie *negative* Dämpfung. Mit anderen Worten: der Dämpfungsterm sorgt dafür, dass große Oszillationen abfallen (dem System wird Energie entzogen), kleine Oszillationen jedoch anwachsen (dem System wird Energie zugeführt). Entlang des entstehenden Grenzyklus gleichen sich die dissipierte und die zugeführte Energie gerade aus. Man kann zeigen, dass der van-der-Pol-Oszillator für alle $\mu \geq 0$ einen eindeutigen, stabilen Grenzyklus besitzt. Der Beweis ist jedoch nicht trivial, siehe dazu [GH86, JK91].

Im folgenden sind numerisch berechnete Zeitreihen und Grenzyklen des van-der-Pol-Oszillators für verschiedene μ -Werte gezeigt (Abbildungen 1.9 und 1.8). Für kleine μ -Werte ist die Oszillation quasilinear, für wachsende Parameter-Werte jedoch zunehmend von relaxierendem Charakter.

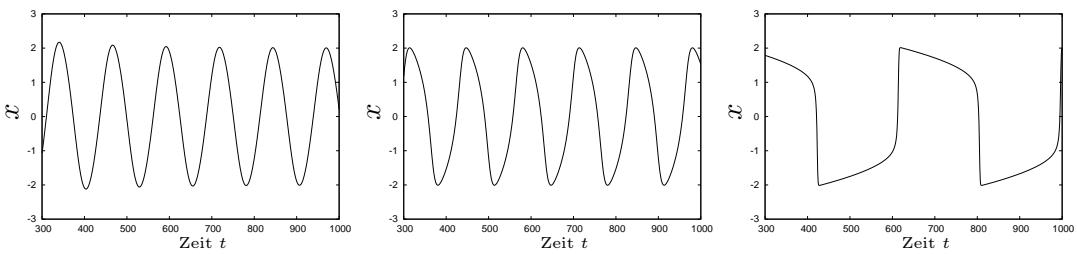


Abbildung 1.8: Zeitreihen des Van-der-Pol-Oszillators für $\mu = 0.1$, $\mu = 1.0$ und $\mu = 10.0$.

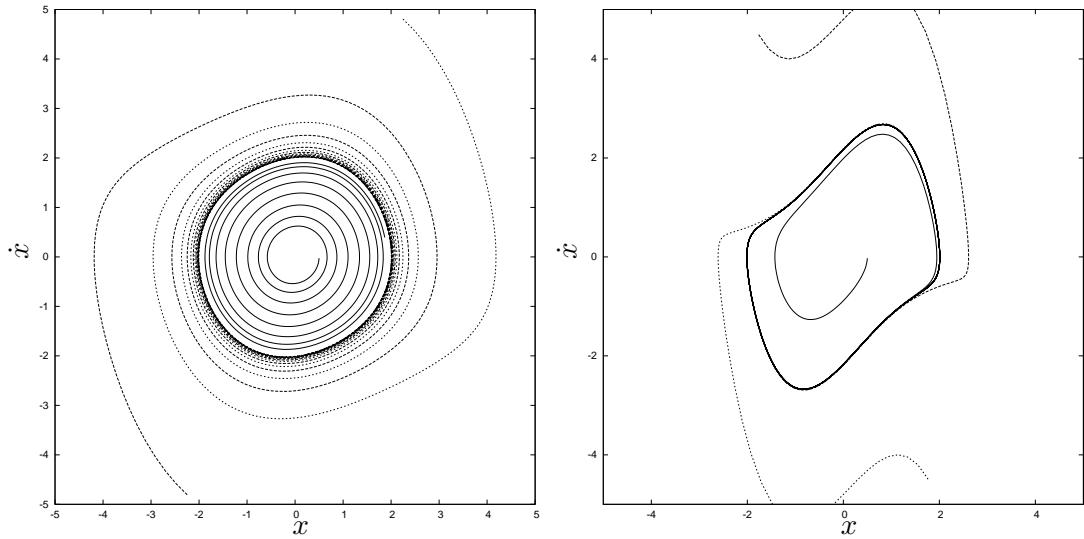


Abbildung 1.9: Grenzzyklen des Van-der-Pol-Oszillators für $\mu = 0.1$ bzw. $\mu = 1.0$.

2 Synchronisation eines periodischen Oszillators durch eine äußere Kraft

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem einfachsten Fall von Synchronisation, dem Mitführen eines selbsterregten Oszillators durch eine äußere Kraft. Man kann dieses Phänomen auch als Synchronisation zweier Oszillatoren verstehen, die nur in einer Richtung gekoppelt sind. Das macht nicht nur die Behandlung zunächst einfacher, sondern trifft auch auf etliche Beispiele zu, man denke dabei an radiokontrollierte Funkuhren oder auch die 24-Stunden-Rhythmen der meisten Lebewesen auf der Erde, die durch periodische Einflüsse infolge der Rotation der Erde um ihre eigene Achse sowie um die Sonne entstehen.

Der Aufbau dieses Kapitels ist so konzipiert, dass der geneigte Leser sich zunächst qualitativ mit dem auftretenden Verhalten vertraut machen kann, um danach mit allgemein verwendeten analytischen Techniken konfrontiert zu werden.

2.1 Schwach getriebener quasilinearer Oszillator

Zu Beginn steht das Beispiel eines quasilinearen Oszillators, der durch die Gleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = n(x, \dot{x}) \quad (2.1)$$

gegeben ist (siehe Kapitel 1). Die Bewegung auf dem Grenzzyklus kann beschrieben werden über eine Sinusfunktion

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0). \quad (2.2)$$

mit Frequenz ω_0 und Amplitude A . Dieser Oszillator wird nun einer harmonischen Kraft

$$f(t) = \varepsilon \cos(\omega t + \phi_0^e) \quad (2.3)$$

ausgesetzt:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = n(x, \dot{x}) + f(t). \quad (2.4)$$

Dabei ist $\phi_e = \omega t + \phi_0^e$ die Phase der Kraft und ε ihre Amplitude. Die Frequenz ω ist im Allgemeinen verschieden von der Frequenz ω_0 des autonomen Oszillators, die in Zukunft als die *natürliche Frequenz* bezeichnet werden wird; die Differenz der beiden Frequenzen $\omega - \omega_0$ nennt man *Verstimmung (detuning)*. Was wird nun passieren?

Im vorangegangenen Kapitel hat man gesehen, dass die Amplitude asymptotisch stabil ist, die Phase des Oszillators dagegen neutral stabil; man kann sich also allein auf die Phasendynamik des betrachteten Systems konzentrieren.

Dazu führen wir zunächst ein geeignetes Koordinatensystem ein. Der Grenzzyklus des quasilinearen Oszillators ist ein Kreis, auf dem der Phasenpunkt mit der Frequenz ω_0 rotiert. Diese Bewegung betrachten wir nun in einem Bezugssystem, dass mit der Frequenz ω in die gleiche Richtung rotiert (z.B. gegen den Uhrzeigersinn). Für die Bewegung des Phasenpunktes in diesem Bezugssystem (dies entspricht der Wirkung einer Kraft mit $\varepsilon = 0$) unterscheiden wir nun drei verschiedene Fälle:

- $\omega_0 > \omega$: Der Punkt rotiert weiter gegen den Uhrzeigersinn.
- $\omega_0 = \omega$: Der Punkt ruht.
- $\omega_0 < \omega$: Der Punkt rotiert mit dem Uhrzeigersinn.

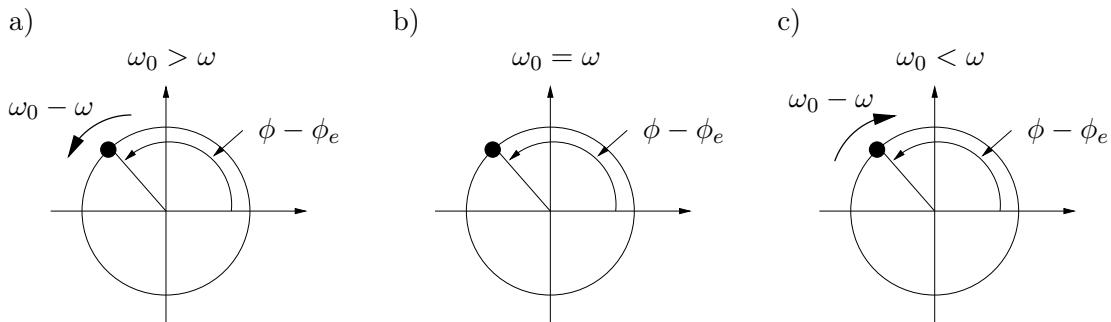


Abbildung 2.1: Im rotierenden Bezugssystem wird der Phasenpunkt durch einen rotierenden (a und c) oder ruhenden Punkt (b) dargestellt, abhängig von der Verstimmung $\omega - \omega_0$.

Die Frequenz der Rotation hierbei ist jeweils $\omega_0 - \omega$ (siehe Abbildung 2.1).

In Bezug auf die Phasendifferenz $\phi - \phi_e$ kann man diese Fälle wie folgt charakterisieren:

- $\omega_0 > \omega$: Die Phasendifferenz wächst.
- $\omega_0 = \omega$: Die Phasendifferenz bleibt konstant.
- $\omega_0 < \omega$: Die Phasendifferenz nimmt ab.

Jetzt schalten wir die Kraft ein: Im rotierenden Bezugssystem wird die Kraft durch einen Vektor der Länge ε repräsentiert, der in einem Winkel ϕ^a angreift. Dieser Winkel hängt ab von ϕ_0^e und der Art der Kopplung, hier gilt der Zusammenhang $\phi^a = \phi_0^e + \frac{\pi}{2}$. Die Wirkung der Kraft hängt von der Phasendifferenz $\phi - \phi_e$ ab, siehe dazu Abbildung 2.2.

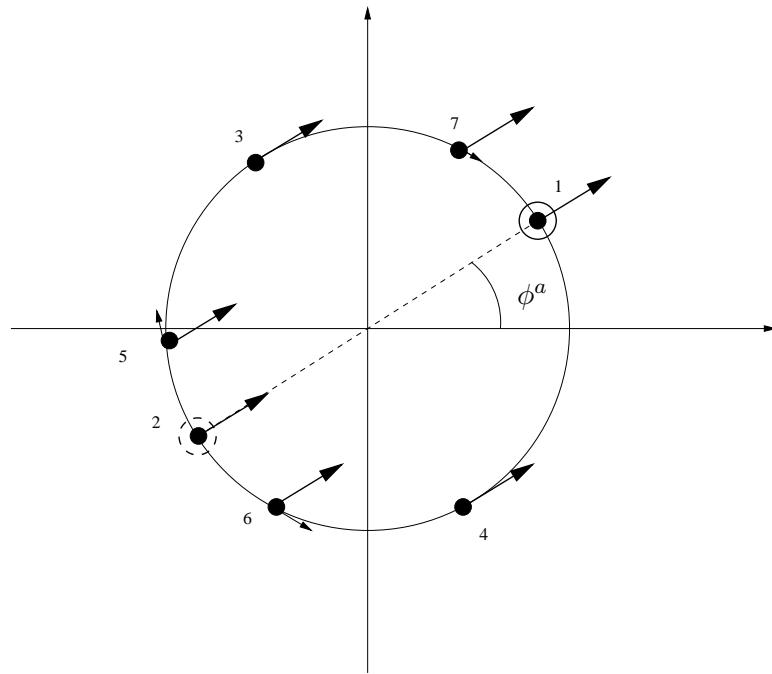


Abbildung 2.2: Eine schwache externe Kraft kann zwar die Amplitude des Grenzzyklus nicht verändern, aber die Phase des Oszillators beeinflussen. Wie stark der Einfluss ist, hängt ab von der Phasendifferenz $\phi - \phi_e$.

In den Punkten 1 und 2 greift die Kraft senkrecht zur Trajektorie an und kann den Phasenpunkt deshalb nicht bewegen; es ist leicht zu sehen, dass Punkt 1 einem stabilen und Punkt 2 einem instabilen Gleichgewicht entspricht. In den Punkten 3 und 4 ist die angreifende Kraft maximal und in den restlichen Punkten nimmt sie entsprechend einen Wert dazwischen an. Mit anderen Worten: in allen anderen Punkten, außer den Gleichgewichtslagen, wird der Phasenpunkt von der Kraft in Richtung des stabilen Gleichgewichts getrieben.

Wir betrachten nun die Einflüsse der beiden Faktoren - Verstimmung und Kraft - um zu sehen, wann genau die äußere Kraft den Oszillator synchronisieren kann.

2.1.1 Phase- und frequency-locking

Es sei zunächst $\omega = \omega_0$, die Verstimmung sei also Null. In Abbildung 2.2 sieht man, was in diesem Fall passiert: unabhängig von der anfänglichen Phasendifferenz wird der Phasenpunkt in das stabile Gleichgewicht gezogen, bis schließlich $\phi = \phi_e - \phi^a$ ist, die Phase des Oszillators wird also durch die Kraft fest gehalten (*phase locking*). Was passiert nun, wenn wir die Verstimmung erhöhen? (Ohne Einschränkung sei im Folgenden $\omega_0 > \omega$). Es existieren zwei konkurrierende Mechanismen: die Verstimmung (entspricht der Rotation) lässt die Phasendifferenz wachsen, die Kraft hingegen versucht, die Phase des Oszillators dem Wert $\phi_e - \phi^a$ anzunähern. Abhängig von dem Verhältnis Verstimmung-Kraft ($\omega_0 - \omega$ vs. ε) gewinnt einer der beiden Mechanismen. Im Folgenden sei ε fest, die Verstimmung werde variiert.

Kleine Verstimmung

Die Verstimmung sei klein, der Phasenpunkt rotiere langsam. Wie wir gesehen haben, hängt der Einfluss der Kraft von der Phasendifferenz ab, d.h. an manchen Punkten wird die Rotation beschleunigt, an anderen verlangsamt (siehe Abbildung 2.3). An gewissen Punkten gleichen sich die Einflüsse von Rotation und Kraft gerade aus, so dass der Phasenpunkt abgestoppt wird. In Bezug auf die Frequenz heißt das, dass die Frequenz des getriebenen Oszillators Ω (die sich im Allgemeinen von der natürlichen Frequenz des autonomen Oszillators ω_0 unterscheidet) gleich der Frequenz der Kraft ist, d.h. $\Omega = \omega$. Die Phasendifferenz zeichnet sich durch eine konstante Phasenverschiebung aus:

$$\phi - \phi_e = \phi^a + \Delta\phi. \quad (2.5)$$

Diese Bewegung nennen wir *synchron*.

In einer anschaulichen Teilchen-Potential-Analogie entspricht dies der überdämpften Bewegung in einem schrägen Potential mit Minima, von denen das Teilchen in einem gefangen ist (siehe Abbildung 2.4). Die lokalen Maxima entsprechen dabei dem zweiten Punkt auf dem Kreis, wo Kraft und Rotation sich ausgleichen (Punkt 4 in Abbildung 2.3), aber diese Gleichgewichtslage ist nicht stabil.

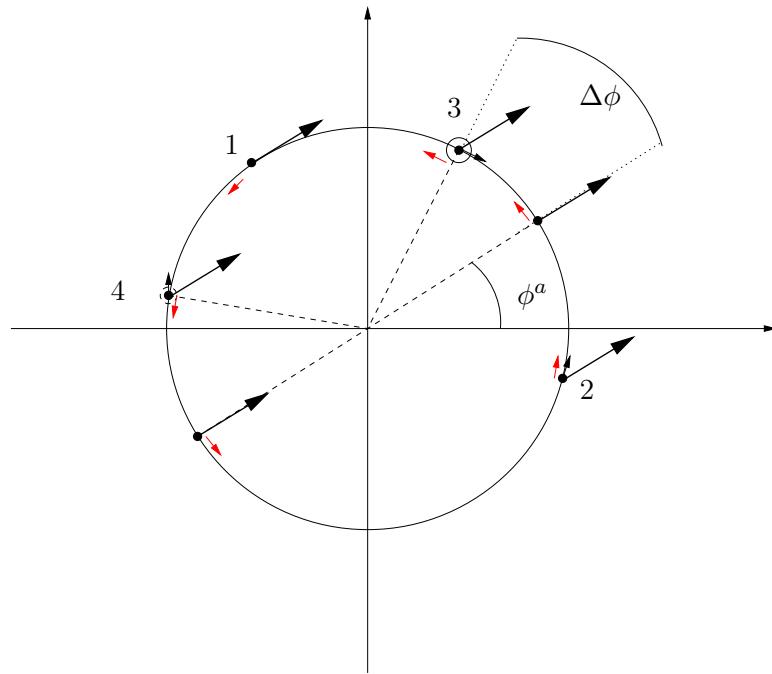


Abbildung 2.3: Kraft (schwarze Pfeile) und Rotation (rote Pfeile) durch Verstimmung wirken in Konkurrenz; an Punkt 2 wird die Rotation durch die Kraft beschleunigt, an Punkt 1 abgebremst. An den Punkten 3 und 4 gleichen sich die beiden Faktoren aus.

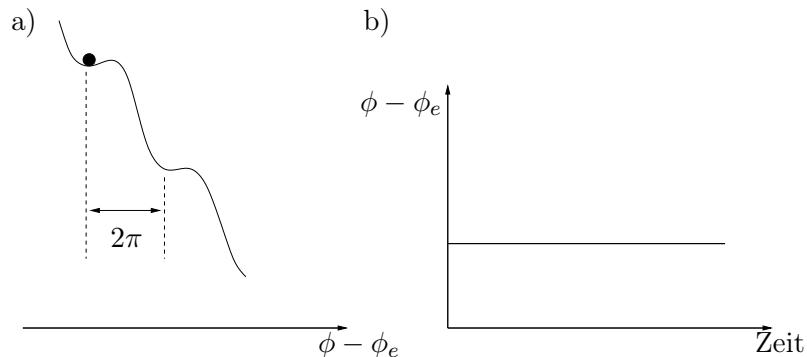


Abbildung 2.4: Kleine Verstimmung. Die Kraft erzeugt Minima im schrägen Potential; in einem von ihnen kommt das Teilchen zu liegen (Multistabilität). Dies entspricht einer konstanten Phasendifferenz.

Große Verstimmung

Übersteigt die Verstimmung einen kritischen Wert, wird der Einfluss der Kraft zu schwach, um den Phasenpunkt gegen die Rotation festzuhalten. Das System durchläuft eine Bifurkation und die Multistabilität wird aufgehoben. Die stabile und die instabile Gleichgewichtslage bewegen sich aufeinander zu, kollidieren und verschwinden; der Phasenpunkt beginnt mit der sogenannten *Beat-Frequenz* Ω_b zu rotieren. In der Teilchen-Potential-Analogie krümmt die Kraft zwar das schräge Potential, kann aber keine Minima erzeugen, und das Teilchen rutscht nicht gleichförmig herunter, analog wächst die Phasendifferenz nicht linear mit der Zeit (siehe Abbildung 2.5).

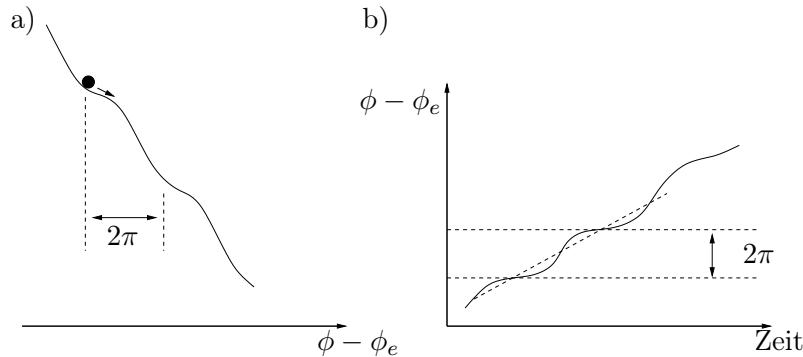


Abbildung 2.5: Große Verstimmung. Die Kraft krümmt das Potential, kann aber keine Minima mehr erzeugen. Das durchschnittliche Wachstum der Phasendifferenz wird bestimmt durch die Beat-Frequenz Ω_b .

Da das Teilchen in den Bereichen geringer Steigung nahezu gestoppt wird, wird die Bewegung im Durchschnitt abgebremst, d.h.

$$\Omega_b < \omega_0 - \omega \quad (2.6)$$

($\omega_0 - \omega$ ist die Geschwindigkeit des Phasenpunktes des autonomen Oszillators im rotierenden System). Im ursprünglichen Bezugssystem hat der Oszillatör die Frequenz $\omega + \Omega_b > \omega_0$, das Wachstum der Phase ist bestimmt durch die Beat-Frequenz Ω_b . Die Bewegung im Ganzen kann also durch zwei Frequenzen charakterisiert werden: $\omega + \Omega_b$ und Ω_b . Sind diese beiden Frequenzen $\omega + \Omega_b$ und Ω_b inkommensurabel, d.h., ist das Verhältnis $(\omega + \Omega_b)/\Omega_b$ irrational, liegt eine *quasiperiodische* Bewegung vor.

Frequency-locking

Wir haben gesehen, dass für einen festen Wert für ε die Frequenz des Oszillators durch die treibende Kraft beeinflusst wird. Abhängig davon, wie stark die Verstimmung ist, gibt es dabei Bereiche, in denen der Oszillatör mit der Frequenz der treibenden Kraft schwingt (siehe Abbildung 2.6 a). Ist die Verstimmung klein, reicht eine schwache Kraft

aus, um den Oszillator zu synchronisieren; je größer die Verstimmung ist, desto größer muss die Kraft sein, um Synchronisation zu erzwingen (siehe Abbildung 2.6 b). Die Identität der Frequenzen von Oszillator und äußerer Kraft innerhalb eines gewissen Intervalls der Verstimmung bezeichnet man als *frequency-locking*.

Zeichnet man von Abbildung 2.6 b) nur die (ω, ε) -Ebene, erhält man einen Bereich, in dem Synchronisation stattfindet, diesen Bereich bezeichnet man als sogenannte *Arnold-Zunge* (siehe Abbildung 2.6 c). Es ist dabei wichtig, dass diese „Zunge“ die ω -Achse berührt, denn das heißt, dass man für verschwindende Verstimmung den Oszillator über eine verschwindend kleine Kraft synchronisieren kann. Diesen Effekt macht man sich bei vielen technischen Anwendungen zunutze; so z.B. bei den schon erwähnten radiokontrollierten Funkuhren, die über ein schwaches, aber sehr präzises Signal synchronisiert werden.

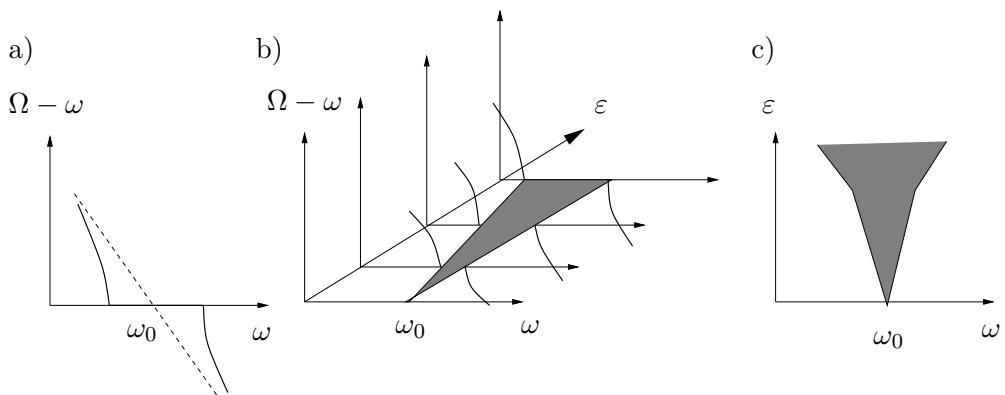


Abbildung 2.6: a) Frequency-Locking. b) Zunahme der zur Synchronisation nötigen Kraft mit zunehmender Verstimmung. c) Arnold-Zunge (Synchronisations-Bereich). ω_0 ist die natürliche Frequenz und Ω die Frequenz des getriebenen Oszillators. ω bezeichnet die Frequenz der Kraft und ε ihre Amplitude.

Phase-locking

Oft wird im Zusammenhang mit Synchronisation auch der Begriff des *phase-locking* benutzt: Wie wir gesehen haben, ist im asynchronen Fall die Phasendifferenz unbeschränkt, im synchronen Fall jedoch beschränkt bzw. hier sogar konstant:

$$\phi(t) - \phi_e(t) = \text{konstant} = \phi^a + \Delta\phi. \quad (2.7)$$

Die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ hängt von der anfänglichen Verstimmung ab: Bei festem ε (d.h. entlang einer horizontalen Linie in Abbildung 2.6) variiert die Phasenverschiebung um π ; in der Mitte des Synchronisationsbereiches, d.h. bei verschwindender Verstimmung, ist sie gleich Null (siehe Abbildung 2.7). ϕ^a hängt von der ursprünglichen Phase der Kraft ab und von der Art der Kopplung.

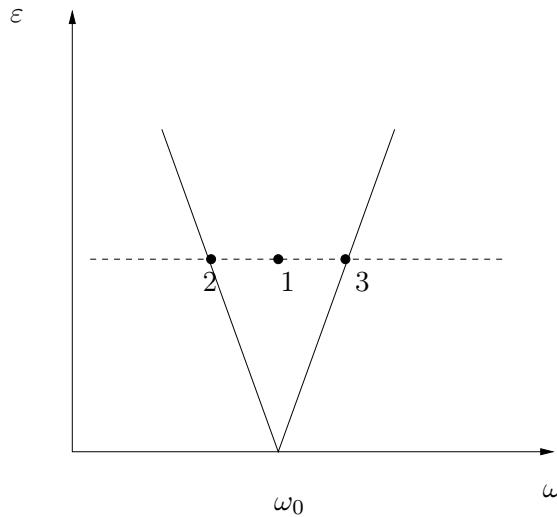


Abbildung 2.7: Phasenverschiebung innerhalb der Arnoldzunge; im Punkt 1 ist die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ gleich 0, im Punkt 2 gleich $-\frac{\pi}{2}$ und im Punkt 3 gleich $+\frac{\pi}{2}$.

2.1.2 Übergang zu Synchronisation

Was passiert, wenn wir obige horizontale Linie mit $\varepsilon = \text{konstant}$ weiter über die Grenze des Synchronisationsbereiches hinaus gehen?

Man betrachte dazu die folgende Abbildung 2.8 (ohne Einschränkung sei nun $\phi^a = 0$). In Punkt 1 haben wir eine verschwindende Verstimmung und damit konstant verschwindende Phasendifferenz (siehe Abbildung 2.8 b, Kurve 1). Im Punkt 2 befinden wir uns immer noch im Synchronisationsbereich; die Phasendifferenz ist noch konstant, aber von Null verschieden (siehe Abbildung 2.8 b, Kurve 2). Überquert man die Grenze der Arnoldzunge (Punkt bzw. Kurve 3), verliert man die Synchronisation und die Phasendifferenz wächst ins Unendliche, allerdings nicht gleichförmig: lange Phasen fast konstanter Phasendifferenz wechseln sich mit schnellen, abrupten Sprüngen ab, wo die Phasendifferenz um 2π springt. Solche abrupten Sprünge bezeichnet man als *phase-slips*. Während der Zeiträume nahezu konstanter Phasendifferenz ist der Oszillatator fast synchron mit der äußeren Kraft, wohingegen er während der phase-slips einen zusätzlichen Umlauf auf dem Grenzzyklus vollführt (oder einen weniger - die Situation ist symmetrisch in Bezug auf die Verstimmung, ein wachsendes ω gehört zu negativen phase-slips, siehe Abbildung 2.8 b, Kurve 6).

Mit wachsender Verstimmung werden die Bereiche nahezu synchronen Verhaltens immer kleiner, bis schließlich das Wachstum der Phasendifferenz fast gleichförmig geschieht (siehe Abbildung 2.8 b, Kurve 5).

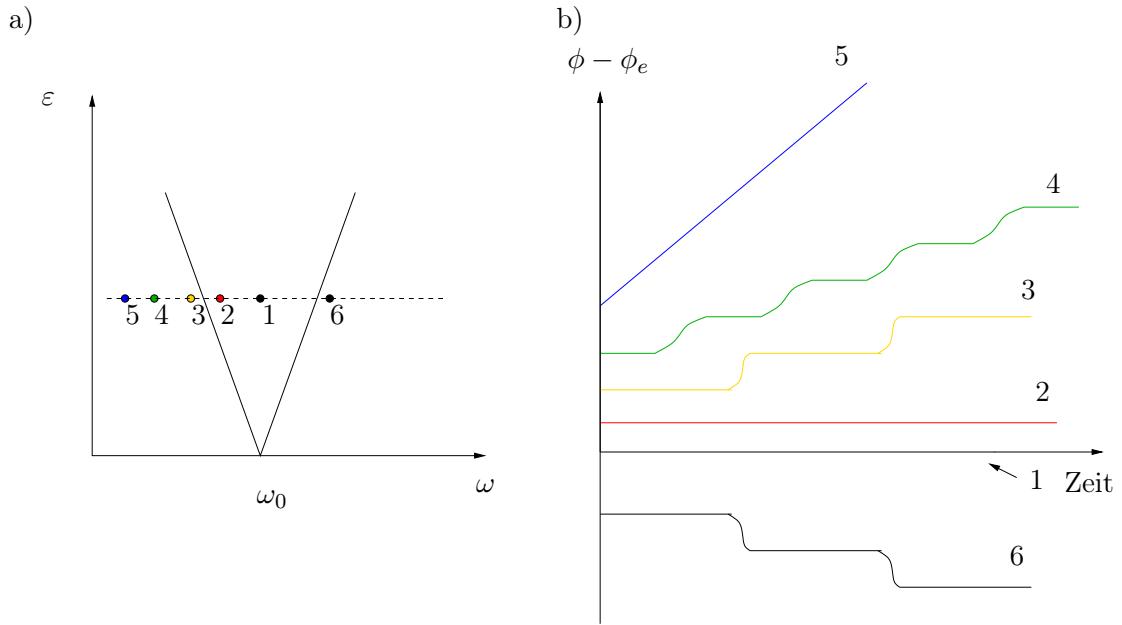


Abbildung 2.8: Verlust von Synchronisation beim Verlassen der Arnold-Zunge.

2.1.3 Synchronisation in höherer Ordnung

Wir haben bisher angenommen, dass die Frequenzen des Oszillators und der ihn antreibenden Kraft ähnlich waren, und dass sich Synchronisation in einer Gleichheit der Frequenzen manifestiert. Untersucht man aber spezielle Beispiele genauer, z.B. die Synchronisation durch Pulsfrequenzen (siehe dazu z.B. [ZCS⁺90]), stellt man fest, dass es auch komplizierte Erscheinungen gibt, z.B. das Einschwingen des Systems auf einen Zustand, in dem die Frequenz des Oszillators doppelt so hoch ist, wie die der antreibenden Kraft (2 Pulse pro Oszillatorkreislauf). Das heißt, es gilt:

$$2\omega = \Omega. \quad (2.8)$$

Wir wollen auch dies als Synchronisation bezeichnen, und zwar als Synchronisation der Ordnung 2 : 1. Generell kann man Synchronisation sämtlicher Ordnungen $n : m$ beobachten, auch wenn man ausgehend von der gleichen ursprünglichen Verstimmung höhere Amplituden der Kraft braucht, um höhere Ordnungen zu beobachten. Zeichnet man erneut die (ω, ε) -Ebene auf, so erhält man eine ganze Familie von Synchronisationsbereichen. Diese werden weiterhin als Arnold-Zungen bezeichnet (siehe Abbildung 2.9). Für großes m und n werden diese Zungen sehr schmal (deswegen ist auch so schwierig, Synchronisation hoher Ordnungen experimentell zu beobachten).

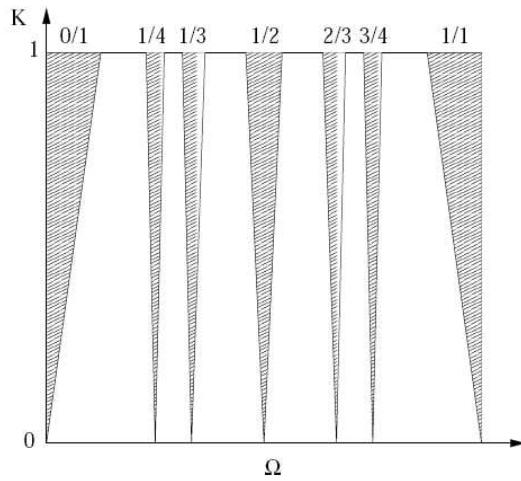


Abbildung 2.9: Haupt-Arnoldzungen. In unserer Notation ist $K = \varepsilon$ und $\Omega = \omega/\Omega$. (Aus: [McS07])

Zeichnet man für ein festes ε das Verhältnis Ω/ω gegen ω auf, erhält man eine Funktion, die im Allgemeinen als *devil's staircase* bezeichnet wird und im Zusammenhang mit Fraktalen von großem Interesse ist (siehe [JBB83, Ott92, AFH95]). In Abbildung 2.10 sind zunächst nur die großen Plateaus rationaler Verhältnisse gezeichnet, nicht das Verhalten zwischen ihnen.

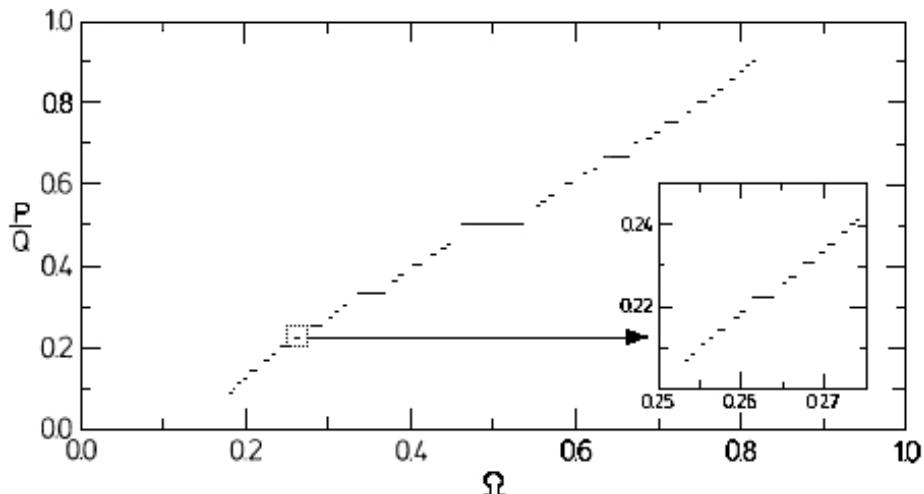


Abbildung 2.10: Complete devil's staircase für $\varepsilon = 1$. In unserer Notation ist $\Omega = \omega/\Omega$ und $\frac{P}{Q} = \frac{m}{n}$. (Aus: [JBB83])

Von frequency-locking spricht man im Falle von Synchronisation der Ordnung $n : m$,

wenn für die Frequenzen gilt

$$n\omega = m\Omega. \quad (2.9)$$

Wie kann der Begriff des phase-locking verallgemeinert werden? Wir haben oben gesehen, dass im Falle von (1 : 1)-Synchronisation gilt:

$$|\phi_e(t) - \phi(t)| < \text{constant}, \quad (2.10)$$

die Phasendifferenz ist also beschränkt. Im Falle des schwach-nichtlinearen Oszillators ist sie sogar konstant, aber das ist bei (1 : 1)-Synchronisation nicht allgemein der Fall. Man kann demnach die Bedingung für phase-locking im allgemeinen Fall formulieren als:

$$|n\phi_e(t) - m\phi(t)| < \text{constant}. \quad (2.11)$$

2.2 Phasendynamik

Nach der bisherigen qualitativen Einführung sollen in den nächsten Abschnitten einige ausgesuchte analytische Zugangsmöglichkeiten vorgestellt werden. Dabei konzentrieren wir uns auf die Dynamik der Phase. Da die Bewegung eines Oszillators im hochdimensionalen Phasenraum im Allgemeinen sehr komplex ausfallen kann, ist die Reduzierung der Beschreibung des physikalischen Problems über die Phase eine elegante und effiziente Methode.

2.2.1 Phasengleichung

Wir betrachten im Folgenden ein allgemeines N -dimensionales dissipatives, autonomes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_N), \quad (2.12)$$

und dieses System besitze eine stabile periodische Lösung $x_0(t) = x_0(t + T_0)$, also einen Grenzzyklus. Wir haben gesehen, dass wir den Begriff der Phase so verallgemeinern können, dass auf dem Grenzzyklus und in seiner Nähe gilt

$$\frac{d\phi(x)}{dt} = \omega_0. \quad (2.13)$$

Die Phase ist eine glatte Funktion in x , man kann also die Zeitableitung umschreiben auf

$$\frac{d\phi(x)}{dt} = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}. \quad (2.14)$$

Zusammen mit Gleichung (2.12) erhält man

$$\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} f_i(x) = \omega_0. \quad (2.15)$$

Wir betrachten nun das gestörte System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t). \quad (2.16)$$

Setzt man man die letzte Gleichung in (2.14) ein, erhält man

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} (f_i(\mathbf{x}) + \varepsilon p_i(\mathbf{x}, t)) = \omega_0 + \varepsilon \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} p_i(\mathbf{x}, t). \quad (2.17)$$

Da die Abweichungen $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ klein sind, können wir in erster Näherung diese Abweichungen vernachlässigen und die rechte Seite *auf* dem Grenzzyklus ausrechnen:

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \sum_i \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} p_i(\mathbf{x}_0, t). \quad (2.18)$$

Zwischen den Punkten auf dem Grenzzyklus und der Phase gibt es aber eine eineindeutige Abbildung; man erhält eine geschlossene Gleichung für die Phase:

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t). \quad (2.19)$$

Dabei ist

$$Q(\phi, t) = \sum_i \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0(\phi))}{\partial x_i} p_i(\mathbf{x}_0(\phi), t) \quad (2.20)$$

eine 2π -periodische Funktion in ϕ und T -periodisch in t . Man kann demzufolge auch die Dynamik des *gestörten* N -dimensionalen Systems (2.12) reduzieren auf eine eindimensionale Differential-Gleichung für die Phase.

2.2.2 Langsame Phasendynamik

Wir gehen in diesem Abschnitt davon aus, dass die Kopplungsstärke ε klein ist. Dieses werden wir dazu benutzen, um Gleichung (2.19) zu mitteln, und so allein den langsamsten Anteil der Phasendynamik zu untersuchen.

In nullter Ordnung, d.h. für $\varepsilon = 0$, besitzt Gleichung (2.19) die einfache Lösung

$$\phi = \omega_0 t + \phi_0. \quad (2.21)$$

Wir wollen dies in die Funktion Q einsetzen. Da Q eine 2π -periodische Funktion in ϕ und T -periodisch in t ist, kann man sie als doppelte Fourier-Reihe schreiben:

$$Q(\phi, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\phi + il\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.22)$$

Einsetzen von Gleichung (2.21) ergibt:

$$Q(\phi, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\phi_0} e^{i(k\omega_0 + l\omega)t}. \quad (2.23)$$

Verglichen mit der Zeitskala $1/\varepsilon$ enthält die Funktion Q also abhängig von $k\omega_0 + l\omega$ sowohl schnell oszillierende Terme als auch langsam veränderliche, die der Resonanzbedingung

$$k\omega_0 + l\omega \approx 0 \quad (2.24)$$

genügen. Setzt man nun Q in Gleichung (2.19) ein, so sieht man, dass die schnell oszillierenden Terme nur zu Veränderungen der Ordnung $O(\varepsilon)$ führen können, die resonanten jedoch zu großen - wenn aufgrund des kleinen ε langsamen - Variationen der Phase. Es sind also die resonanten Terme, die die Phasendynamik dominieren - es reicht demnach, eine gemittelte Kraft einzuführen, in der nur noch die resonanten Terme vorhanden sind.

Es sei zunächst $\omega \approx \omega_0$, dann sind gerade die Terme mit $k = -l$ resonant, und wir erhalten als gemittelte Kraft

$$\sum_{l=-k} a_{l,k} e^{ik\phi + il\omega t} = \sum_k a_{-k,k} e^{ik(\phi - \omega t)} =: \bar{Q}(\phi - \omega t). \quad (2.25)$$

\bar{Q} ist dabei eine 2π -periodische Funktion in $\phi - \omega t$. Einsetzen in Gleichung (2.19) ergibt

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \bar{Q}(\phi - \omega t). \quad (2.26)$$

Wir führen nun als neue Variable die Differenz zwischen der Phase des Oszillators und der der äußeren Kraft ein:

$$\Phi := \phi - \omega t. \quad (2.27)$$

Zusammen mit der Verstimmung

$$\nu := \omega - \omega_0 \quad (2.28)$$

erhält man

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\nu + \varepsilon \bar{Q}(\Phi). \quad (2.29)$$

Wir kehren zurück erneut zurück zur Gleichung (2.23). Geht man an dieser Stelle allgemeiner davon aus, dass zwischen den Frequenzen ω und ω_0 der Zusammenhang

$$\omega \approx \frac{m}{n} \omega_0 \quad (2.30)$$

mit ganzahligen teilerfremden Zahlen m und n besteht, ergibt sich die gemittelte Kraft durch Aufsummation der resonanten Terme zu

$$\sum_{l=-nj, k=mj} a_{l,k} e^{i(k\phi + \omega t)} = \sum_j a_{-nj, mj} e^{ij(m\phi - n\omega t)} =: \hat{Q}(m\phi - n\omega t). \quad (2.31)$$

Einsetzen in Gleichung (2.19) ergibt

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \hat{Q}(m\phi - n\omega t). \quad (2.32)$$

Definiert man

$$\hat{\Phi} := m\phi - n\omega t \quad (2.33)$$

und

$$\hat{\nu} = n\omega - m\omega_0, \quad (2.34)$$

so geht Gleichung (2.32) über in

$$\frac{d\hat{\Phi}}{dt} = -\hat{\nu} + \varepsilon \hat{Q}(\hat{\Phi}), \quad (2.35)$$

was von der gleichen Form ist wie Gleichung (2.29). Die einfachste 2π -periodische Funktion ist der Sinus, die einfachste Form der Gleichung (2.29) ist also

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\nu + \varepsilon \sin(\Phi). \quad (2.36)$$

Diese letzte Gleichung ist in der Literatur auch unter dem Namen *Adler-Gleichung* bekannt, siehe [Adl46], deren Analyse auf das nächste Kapitel verschoben wird.

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit Lösungen der Grundgleichung (2.29).

Dazu machen wir uns zunächst die Bedeutung der einzelnen Terme bzw. Parameter klar: ε ist die Amplitude, ν bezeichnet die Verstimmung. In die Funktion $\bar{Q}(\Phi)$ gehen sowohl Eigenschaften des autonomen Systems als auch Eigenschaften der äußeren Kraft ein. \bar{Q} ist 2π -periodisch in Φ , besitzt also auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ (mindestens) ein Minimum Q_{\min} und ein Maximum Q_{\max} (typischerweise sind diese Extrema nicht degeneriert). Liegt also die Verstimmung ν im Intervall $(\varepsilon Q_{\min}, \varepsilon Q_{\max})$, d.h.

$$\varepsilon Q_{\min} < \nu < \varepsilon Q_{\max}, \quad (2.37)$$

so besitzt die Gleichung (2.29) mindestens ein Paar von Fixpunkten. Von diesen ist der eine (asymptotisch) stabil und der andere instabil (siehe Abbildung 2.11). Besitzt die Funktion \bar{Q} mehr als zwei Extrema, existieren entsprechend mehr solche Paare von Fixpunkten. Das System läuft nun in einen solchen stabilen Fixpunkt, so dass gilt

$$\Phi = \Phi_s = \text{const.} \quad (2.38)$$

Für die ursprüngliche Phase ϕ bedeutet das

$$\phi = \omega t + \Phi_s, \quad (2.39)$$

was einer Rotation mit der Frequenz der äußeren Kraft entspricht. Die Phase des Oszillators ist durch die Phase der Kraft festgelegt, wir haben also ein Beispiel für phase-locking. Der Zustand des Systems $\mathbf{x}(t)$ ist periodisch mit der Periode T der äußeren Kraft.

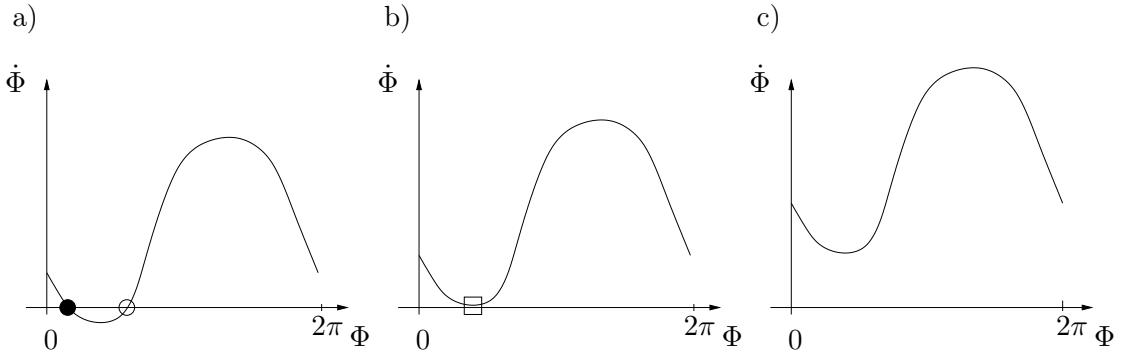


Abbildung 2.11: Aufgetragen ist die rechte Seite der Gleichung (2.29), und das a) innerhalb, b) am Rand und c) außerhalb des Synchronisationsbereiches.

Anders sieht die Situation aus, wenn die Verstimmung außerhalb des Intervalls (2.37) liegt, d.h. wenn wir uns außerhalb des Synchronisations-Bereiches befinden. In diesem Fall ist $\dot{\Phi}$ immer größer oder kleiner Null, und die Frequenz des Oszillators ist von der äußeren Kraft verschieden. Die Lösung von Gleichung (2.29) kann formal geschrieben werden als

$$\int^{\Phi} \frac{d\Phi}{\varepsilon Q(\phi) - \nu} = t. \quad (2.40)$$

Diese Gleichung bestimmt die langsame Phase als Funktion der Zeit t , $\Phi = \Phi(t)$ mit der Periode T_{Φ} :

$$T_{\Phi} = \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{\varepsilon Q(\Phi) - \nu} \right|. \quad (2.41)$$

Die ursprüngliche Phase Φ rotiert nun nicht mehr gleichförmig:

$$\phi = \omega t + \Phi(t). \quad (2.42)$$

Führt man die durchschnittliche Rotationsfrequenz Ω_{Φ} der langsamen Phase Φ ein - oft auch als sogenannte *Beat-Frequenz* bezeichnet (siehe oben)

$$\Omega_{\Phi} = \frac{2\pi}{T_{\Phi}} = 2\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{\varepsilon Q(\Phi) - \nu} \right)^{-1}, \quad (2.43)$$

so erhält man für die *beobachtete Frequenz* Ω der ursprünglichen Phase ϕ

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \Omega = \omega + \Omega_{\Phi}. \quad (2.44)$$

Die gewinkelten Klammern stehen für eine Mittelung über die Zeit. Im Allgemeinen sind die Frequenzen ω und Ω_{Φ} inkommensurabel und der Zustand des Systems $\mathbf{x}(t)$ quasiperiodisch mit den Perioden T und T_{Φ} .

Die Beat-Frequenz hängt monoton von der Verstimmung ν ab, und in der Nähe des Synchronisations-Bereiches können wir diese Abhängigkeit auch analytisch bestimmen.

Das Auftreten bzw. der Verlust von Synchronisation findet gerade bei den Werten $\nu = \varepsilon Q_{\min,\max}$ statt, wo der instabile und der stabile Fixpunkt des Fixpunktpaars (siehe Abbildung 2.11) kollidieren und in einer Sattel-Knoten-Bifurkation verschwinden. Betrachten wir nun den Übergang bei $\nu_{\max} = \varepsilon Q_{\max}$. Ist $|\nu - \nu_{\max}|$ klein, so ist $|\varepsilon \bar{Q}(\Phi) - \nu|$ in der Nähe von Φ_{\max} sehr klein, womit gerade dieser Bereich den Hauptbeitrag zum Integral in (2.43) liefert. Entwickelt man nun $\bar{Q}(\Phi)$ um Φ_{\max} in eine Taylor-Reihe und erweitert den Integrationsbereich, erhält man

$$\begin{aligned} |\Omega_{\Phi}| &\approx 2\pi \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Phi}{\frac{\varepsilon}{2} \bar{Q}''(\Phi_{\max}) \Phi^2 - (\nu - \nu_{\max})} \right|^{-1} \\ &= 2\pi \sqrt{\varepsilon |\bar{Q}''(\Phi_{\max})| \cdot (\nu - \nu_{\max})} \propto \sqrt{(\nu - \nu_{\max})}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Im Bereich des Überganges zu Synchronisation wächst demnach die Beat-Frequenz wie eine Quadratwurzel.

3 Gegenseitige Synchronisation zweier wechselwirkender periodischer Oszillatoren

Dieses Kapitel befasst sich mit der Synchronisation zweier gekoppelter Oszillatoren, und steht damit nicht nur in diesem Dokument zwischen der Situation im vorangegangenen Kapitel (Synchronisation eines Oszillators durch eine äußere Kraft) und der im folgenden (viele gekoppelte Oszillatoren). Im ersten Teil dieses Kapitels geht es dabei analog zu Kapitel 2 um einen approximativen Zugang über die Phasendynamik im Falle kleiner Kopplung; danach wird das Beispiel zweier Relaxationsoszillatoren behandelt.

3.1 Phasendynamik

3.1.1 Herleitung der Phasengleichungen

Ist die Kopplung zwischen zwei Oszillatoren klein, so kann man geschlossene Gleichungen für ihre Phasen aufstellen (siehe [Mal56, Kur84]). Das Grundmodell ist zunächst das folgende:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \varepsilon \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2) + \varepsilon \mathbf{p}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1).\end{aligned}\quad (3.1)$$

Dabei wird nur angenommen, dass die autonome Dynamik (geg. durch die \mathbf{f}_i) von der Wechselwirkung getrennt werden kann (beschrieben durch die \mathbf{p}_i), d.h. wir haben eigentlich zwei eigenständige Oszillatoren, die aber miteinander wechselwirken können. Ungekoppelt laufen beide Systeme auf zwei stabile Grenzzyklen mit den Frequenzen $\omega_{1,2}$. Auf diesen bzw. in ihrer Nähe können zwei Phasen $\phi_{1,2}$ mit

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1, \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2\end{aligned}\quad (3.2)$$

definiert werden. Im Allgemeinen stehen diese beiden Frequenzen in keinem Verhältnis zueinander stehen und die ungekoppelte Bewegung der beiden Oszillatoren ist demzufolge quasiperiodisch.

In erster Näherung lassen sich die Phasengleichungen folgendermaßen notieren:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1(\mathbf{x}_1)}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon \sum_i \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1,i}} p_{1,i}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ \frac{d\phi_2(\mathbf{x}_2)}{dt} &= \omega_2 + \varepsilon \sum_i \frac{\partial \phi_2}{\partial x_{2,i}} p_{2,i}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1).\end{aligned}\quad (3.3)$$

Unter der Annahme, dass die Störungen der Amplituden klein sind (siehe Kapitel 2), kann man auf der rechten Seite die Werte der Variablen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ auf den jeweiligen Grenzyklen einsetzen. Dort sind aber die Variablen Funktionen, die allein von den Phasen abhängen. Man erhält also geschlossene Gleichungen für die beiden Phasen:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon Q_1(\phi_1, \phi_2), \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2 + \varepsilon Q_2(\phi_2, \phi_1).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Die Funktionen Q_i sind dabei 2π -periodisch in beiden Argumenten.

Die Möglichkeit, das System über geschlossene Gleichungen für die Phasen beschreiben zu können, bedeutet, dass im hochdimensionalen Phasenraum, der über die Variablen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ gegeben ist, eine zweidimensionale invariante Fläche existiert, genauer gesagt ein Torus. Es geht also nun darum, die Dynamik auf diesem invarianten Torus zu beschreiben. Im Folgenden wird dazu als Methode die Mittelung der Gleichung (3.4) vorgestellt.

3.1.2 Gemittelte Gleichungen für die Phase

In diesem Abschnitt geht es darum, die Kopplungsstärke ε als klein anzunehmen und Gleichung (3.4) zu mitteln.

Wir schreiben dazu die (doppelt-) 2π -periodischen Funktionen Q_i , $i = 1, 2$, als

$$\begin{aligned}Q_1(\phi_1, \phi_2) &= \sum_{k,l} a_1^{k,l} e^{ik\phi_1 + il\phi_2}, \\ Q_2(\phi_1, \phi_2) &= \sum_{k,l} a_2^{k,l} e^{ik\phi_2 + il\phi_1}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

In nullter Näherung besitzt das Gleichungssystem (3.4) die Lösung

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \omega_1 t, \\ \phi_2 &= \omega_2 t,\end{aligned}\quad (3.6)$$

die Phasen rotieren mit den natürlichen Frequenzen der Oszillatoren. In den Funktionen $Q_{1,2}$ gehören alle Terme zu schnellen Rotationen, abgesehen von denen, die der Resonanz-Bedingung

$$k\omega_1 + l\omega_2 \approx 0 \quad (3.7)$$

genügen (siehe Kapitel 2). Es seien nun die beiden Frequenzen ω_1 und ω_2 nahezu in Resonanz, d.h. es gelte

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \approx \frac{m}{n}. \quad (3.8)$$

Dann sind die resonanten Terme gerade diejenigen mit $k = nj$, $l = -mj$ und nur diese tragen zu den gemittelten Gleichungen bei. Führen wir nun als Summe allein der resonanten Terme die Funktionen $\bar{Q}_{1,2}$ ein, d.h.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1(n\phi_1 - m\phi_2) &= \sum_j a_1^{nj, -mj} e^{ij(n\phi_1 - m\phi_2)}, \\ \bar{Q}_2(m\phi_2 - n\phi_1) &= \sum_j a_2^{mj, -nj} e^{ij(m\phi_2 - n\phi_1)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

erhalten wir als gemittelte Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon \bar{Q}_1(n\phi_1 - m\phi_2), \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2 + \varepsilon \bar{Q}_2(m\phi_2 - n\phi_1). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Für die Phasendifferenz der beiden Oszillatoren

$$\Phi := n\phi_1 - m\phi_2 \quad (3.11)$$

ergibt sich nun der Zusammenhang

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\nu + \varepsilon \bar{Q}(\Phi), \quad (3.12)$$

wobei

$$\nu = m\omega_2 - n\omega_1, \quad \bar{Q}(\Phi) = n\bar{Q}_1(\Phi) - m\bar{Q}_2(\Phi). \quad (3.13)$$

Gleichung (3.12) ist nun exakt von der gleichen Form wie (2.29), die wir schon analysiert haben. Im Falle von Synchronisation besitzt Gleichung (3.12) eine stabile Fixpunktlösung Φ_s . Für die beobachteten Frequenzen der beiden Oszillatoren gilt

$$\Omega_{1,2} = \langle \dot{\phi}_{1,2} \rangle = \omega_{1,2} + \varepsilon \bar{Q}_{1,2}(\pm \Phi_s). \quad (3.14)$$

Innerhalb des Synchronisationsbereiches ist das Verhältnis der beobachteten Frequenzen konstant, genauer gesagt gilt:

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{m}{n}. \quad (3.15)$$

Wir betrachten nun den Fall $m \approx n$, d.h. $\omega_1 \approx \omega_2$. Weiterhin sei die Kopplung nun symmetrisch, d.h. es gelte

$$\bar{Q}_1(\Phi) = \bar{Q}_2(\Phi). \quad (3.16)$$

Dann ist die Funktion \bar{Q} antisymmetrisch, d.h. es gilt

$$\bar{Q}(\Phi) = -\bar{Q}(-\Phi). \quad (3.17)$$

Die einfachste 2π -periodische antisymmetrische Funktion ist der Sinus, und wir kommen, wie in Kapitel 2 versprochen, erneut auf die Adler-Gleichung:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\nu + \varepsilon \sin(\Phi). \quad (3.18)$$

Abhängig vom Vorzeichen der Kopplung ε existieren im Falle von Synchronisation zwei grundsätzlich verschiedene Lösungen:

- Ist $\varepsilon > 0$, so liegt der stabile Fixpunkt der Phasendifferenz im Intervall $\pi/2 < \Phi < 3\pi/2$.
- Ist hingegen $\varepsilon < 0$, so liegt der mögliche Wert für Φ im Intervall $-\pi/2 < \Phi < \pi/2$.

Im Falle von verschwindender Verstimmung ($\omega = \omega_0$) gehen diese beiden Fälle über in

- $\Phi_s = \pi$ (*repulsiver Fall, anti-phase*) und
- $\Phi_s = 0$ (*attraktiver Fall, in-phase*).

Man sollte allerdings an dieser Stelle anmerken, dass Attraktion bzw. Repulsion der Phasen nichts aussagt über Attraktion bzw. Repulsion der ursprünglichen Variablen (siehe dazu z.B. [HKK95, HKK97]).

3.2 Relaxationsoszillatoren

Es gibt viele Muster für Oszillationen, die sich fernab jeglicher Sinusoidalität bewegen, sondern vielmehr durch den Wechsel langer „Ruhephasen“ und abrupter Aktivität charakterisiert sind. Viele Beispiele dafür sind im Bereich der Biologie und Neurowissenschaften zu finden, z.B. die Kontraktionen des Herzens oder auch das Feuern von Neuronen. Man bezeichnet solche Oszillatoren als *Relaxationsoszillatoren*. Für Relaxationsoszillatoren gibt es kein allgemeines Modell, allerdings ein sehr bekanntes Beispiel, den sogenannten *integrate-and-fire-Oszillator*, der im Folgenden vorgestellt wird. Die angeführten Beispiele machen deutlich, dass es von großem Interesse ist, die Synchronisation solcher Oszillatoren zu untersuchen, um beispielsweise Aktivitäten des menschlichen Gehirns oder auch das Zusammenspiel von ersten und zweiten Schrittmachern des Herzens besser zu verstehen.

Der integrate-and-fire-Oszillator wird charakterisiert über eine Variable x , von der angenommen wird, dass sie bis zu einem Grenzwert $x = 1$ monoton ansteigt, woraufhin der Oszillator feuert, x instantan auf 0 fällt und das Ganze von vorn beginnt. Der Anstieg („integrate“) kann dabei über eine gewöhnliche Differentialgleichung oder einfach über eine zeitabhängige Funktion beschrieben werden. Vorgestellt wird im Folgenden der Zugang von Mirollo und Strogatz [MS90]. Hier ist die Dynamik des Anstieges gegeben durch $x = f(\phi)$, wobei $f : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, monoton wachsende und konkave Funktion ist, d.h. $f' > 0$, $f'' < 0$. Dabei ist ϕ die Phase mit $\dot{\phi} = \omega_0$.

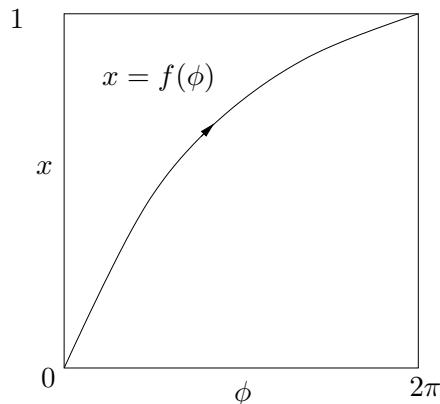


Abbildung 3.1: Graph einer typischen Funktion f . Der Anstieg der Variable x wird beschrieben durch $x = f(\phi)$.

Die Wechselwirkung zweier solcher Oszillatoren soll nun nur während des Feuer-Vorgangs geschehen. Erreicht einer der beiden Oszillatoren den Grenzwert $x_1 = 1$, zieht er x_2 um den Wert ε mit. Ist nun $x_2 + \varepsilon > 1$, feuert auch der zweite Oszillator, es gibt allerdings *keine* Rückwirkung auf den ersten Oszillator, ein feuernder Oszillator wird als unemp-

findlich gegenüber dem anderen angenommen. Mit anderen Worten, der Zustand $x = 0$ direkt nach dem Feuern ist unempfindlich gegenüber dem Einfluss des anderen. Motivation für diese Modellierung kann beispielsweise bei Neuronen die Existenz einer Pause, der sogenannten Refraktärphase, sein, die die Zelle braucht, um das Membranpotential wieder aufzubauen. Während dieser Pausen kann kein neues Aktionspotential ausgelöst werden (zum genaueren Mechanismus siehe [STL00]).

Wenn die Phasen zweier Oszillatoren also nah beieinander sind, zieht das Feuern des ersten Oszillators das Feuern des zweiten Oszillators nach sich, so dass sie gemeinsam feuern. Danach sind die Phasen der beiden Oszillatoren identisch. Wenn nun die natürlichen Frequenzen ω_1 und ω_2 ähnlich sind, feuern sie auch weiterhin gleichzeitig, und perfekte Synchronisation tritt ein. Die Periode der Dynamik ist hierbei die Periode des schnelleren der beiden Oszillatoren.

Im Folgenden seien nun der Einfachheit halber beide Oszillatoren als identisch angenommen. Das Ziel ist es, zu zeigen, dass sie immer synchronisieren. Dazu gehen wir vom Fluss auf einem zweidimensionalen Torus (gegeben durch die beiden Phasen) über zu einer eindimensionalen Poincaré-Abbildung F . Als Schnitt wählen wir hierbei $\phi_1 = 0$, d.h. wir betrachten das System direkt nachdem der erste Oszillator gefeuert hat.

Wir starten am Punkt 0 mit den Koordinaten $\phi_1 = 0, \phi_2 = \phi_2^{(0)}$. Am Punkt 1 erreiche der Oszillator 2 den Grenzwert, d.h.

$$\phi_2^{(1)} = 2\pi, \quad \phi_1^{(1)} = 2\pi - \phi_2^{(0)}. \quad (3.19)$$

Für die zugehörigen Zustandsvariablen gilt:

$$x_2^{(1)} = 1, \quad x_1^{(1)} = f(2\pi - \phi_2^{(0)}). \quad (3.20)$$

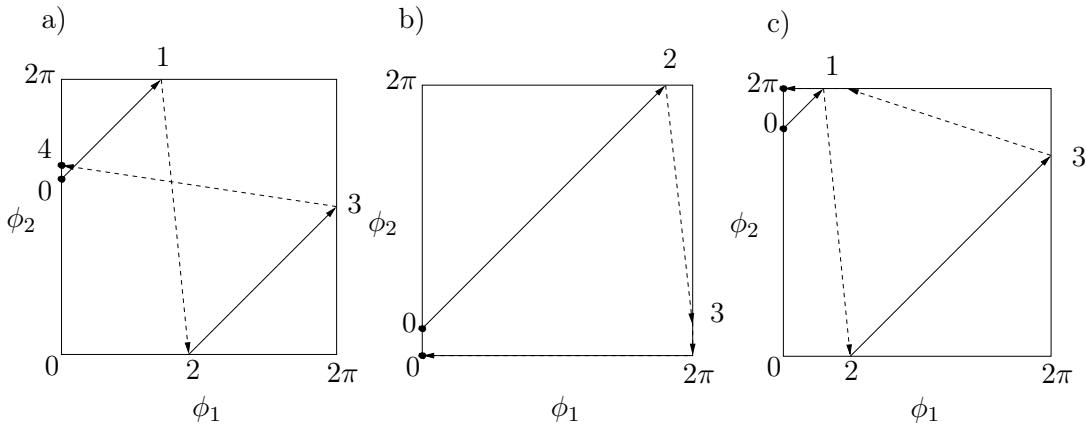


Abbildung 3.2: Konstruktion der Poincaré-Abbildung. Durchgezogene Linien entsprechen langsamem Bewegen, gestrichelte den schnellen Sprüngen. Es gibt drei verschiedene Fälle: a) die beiden Oszillatoren feuern nicht gleichzeitig, b) das Feuern von Oszillator 2 bringt den Oszillator 1 zum Feuern, c) das Feuern von Oszillator 1 bringt den Oszillator 2 zum Feuern.

In diesem Moment feuert der zweite Oszillator und der erste Oszillator springt auf

$$\varepsilon + x_1^{(1)} = \varepsilon + f(2\pi - \phi_2^{(0)}). \quad (3.21)$$

Die zugehörige Phase ist gegeben durch

$$\phi_1^{(2)} = f^{-1}(\varepsilon + f(2\pi - \phi_2^{(0)})), \quad (3.22)$$

wobei f^{-1} die Umkehrabbildung von f bezeichne. Ist $\phi_1^{(2)} \geq 2\pi$, feuert auch der erste Oszillator, und beide Phasen springen auf 0, d.h. $F(\phi_2^{(0)}) = 0$ (siehe Abbildung 3.2 b). Da die natürlichen Frequenzen beider Oszillatoren als gleich vorausgesetzt werden, feuern sie auch weiterhin gemeinsam, perfekte Synchronisation tritt ein, und die Behauptung wäre gezeigt.

Es sei also $\phi_1^{(2)} < 2\pi$. Dann wächst ϕ_1 weiter an bis zum Punkt 3,

$$\phi_1^{(3)} = 2\pi, \quad \phi_2^{(3)} = 2\pi - \phi_1^{(2)}, \quad (3.23)$$

und der Oszillator 1 feuert, wodurch sich auch die Phase ϕ_2 zu $\phi_2^{(4)}$ ändert. Entweder feuert nun auch der zweite Oszillator (siehe Abbildung 3.2 c) oder $\phi_2^{(4)}$ ist gegeben durch

$$\phi_2^{(4)} = f^{-1}(\varepsilon + f(\phi_2^{(3)})) = F(\phi_2^{(0)}) \quad (3.24)$$

(Siehe Abbildung 3.2 a.)

Man sieht also, dass sich die Poincaré-Abbildung F schreiben lässt als zweifache Iteration einer Abbildung h :

$$F(\phi) = h(h(\phi)), \quad h(\phi) = f^{-1}(\varepsilon + f(2\pi - \phi)). \quad (3.25)$$

Die Abbildung h wird auch als „Feuer-Abbildung“ (*firing map*) bezeichnet. Diese Bezeichnung wird verständlich, wenn man sich noch einmal vor Augen führt, was nach genau einem Feuern passiert: das System geht über von einem Anfangszustand $(\phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)}) = (0, \phi)$ über in den Zustand $(h(\phi), 0)$. Mit anderen Worten, das System ist im Wesentlichen im gleichen Zustand wie zu Beginn, aber mit ϕ ersetzt durch $h(\phi)$ und vertauschten Rollen der Oszillatoren.

Die entstehende Poincaré-Abbildung besitzt zwei Plateaus, wo $F(\phi) = 0$ oder $F(\phi) = 2\pi$ ist und einen stetigen Bereich zwischen ihnen. Mirollo und Strogatz haben gezeigt, dass F in diesem stetigen Teil genau ein Fixpunkt besitzt und dass dieser ein Repellor ist (der Hauptgedanke hierbei ist, dass $F' > 1$ ist). Das heißt, für jede Anfangsphase (abgesehen von dem Fixpunkt) wird das System auf $\phi = 0$ oder $\phi = 2\pi$ getrieben, d.h. das System läuft immer in den Zustand perfekter Synchronisation, in dem beide Oszillatoren gleichzeitig feuern.

4 Populationen global gekoppelter Oszillatoren

Der Fall zweier gekoppelter Oszillatoren (siehe Kapitel 3) kann auf kompliziertere Situationen mit vielen gekoppelten Oszillatoren hin verallgemeinert werden. Dabei ist die Art der gegenseitigen Wechselwirkung von großer Bedeutung. Eine Möglichkeit dabei ist es, in Gittern oder auch nur in Ketten räumlich angeordnete Oszillatoren zu untersuchen, die jeweils nur mit ihren nächsten Nachbarn wechselwirken. Oft jedoch treten Situationen auf, in denen die Oszillatoren weder in regulären Gittern angeordnet sind, noch nur mit ihren nächsten Nachbarn wechselwirken, sondern mit allen anderen vorkommenden Oszillatoren („all-to-all-coupling“). Dieser allgemeine Fall kann dadurch vereinfacht werden, indem die Kopplung für alle gekoppelten Paare als gleich angenommen wird. Außerdem kann man sowohl im thermodynamischen Limes (d.h. für große Zahlen wechselwirkender Oszillatoren) als auch in dem Fall, dass die Oszillatoren sehr weit von einander entfernt sind, ihre räumliche Anordnung vernachlässigen. Eine solche Menge von räumlich nicht geordneten Oszillatoren bezeichnet man auch als *Population* oder *Ensemble*.

4.1 Das Kuramoto-Modell

Das Kuramoto-Modell [Kur84, Str00] beschreibt eine große Population selbsterregter gekoppelter Oszillatoren, deren natürliche Frequenzen einer vorgegebenen Verteilung folgen. Wenn die Kopplungsstärke einen gewissen Schwellenwert ε_c überschreitet, durchläuft das System einen Phasenübergang: Einige der Oszillatoren synchronisieren und andere bleiben inkohärent. Zur quantitativen Beschreibung benötigt man somit ein Maß für die globale Synchronizität des Systems. Dieses Maß lässt sich über wenige makroskopische Größen oder Ordungsparameter charakterisieren. Der Ausgangspunkt der Herleitung ist eine mikroskopische Beschreibung in Form eines gekoppelten Gleichungssystems für die Phasen:

$$\dot{\phi}_k = \omega_k + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_k - \phi_j), \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

Dabei handelt es sich bei den ω_i um die natürlichen Frequenzen der Oszillatoren und bei ε um die Kopplungsstärke. Der Faktor $\frac{1}{N}$ sorgt dafür, dass man im thermodynamischen Limes, d.h. für $N \rightarrow \infty$, von N unabhängige Ergebnisse erhält. Die Frequenzen ω_i sind nach einer Wahrscheinlichkeitsdichte $g(\omega)$ verteilt, die der Einfachheit halber als unimodal und symmetrisch bezüglich einer Frequenz $\bar{\omega}$ angenommen wird, d.h.

$g(\bar{\omega} + \omega) = g(\bar{\omega} - \omega)$ für alle ω (man denke beispielsweise an eine Normalverteilung). Dank der Rotationssymmetrie im Modell kann man ohne Einschränkung die mittlere Frequenz zu $\bar{\omega} = 0$ setzen und die ϕ_i durch $\phi_i + \bar{\omega}t$, was dem Übergang zu einem mit der Frequenz $\bar{\omega}$ rotierenden Bezugssystem entspricht. Dieser Übergang lässt die Gleichungen

$$\dot{\phi}_k = \omega_k + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_k - \phi_j), \quad k = 1, \dots, N,$$

unverändert, aber verschiebt die Mitte der Verteilungsfunktion $g(\omega)$ zu 0. Das heißt, man geht davon aus, dass gilt:

$$g(\omega) = g(-\omega) \quad (\text{Symmetrie}) \quad (4.2)$$

und

$$g(\omega) \geq g(\nu) \text{ für } \omega \leq \nu, \quad \omega \in [0, \infty) \quad (\text{Unimodalität}). \quad (4.3)$$

Um das System besser untersuchen zu können, führt man ein komplexes mittleres Feld (*mean field*) ein über

$$Z = X + iY = Ke^{i\Theta} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j}, \quad (4.4)$$

mit der Amplitude K und der Phase Θ :

$$K \cos \Theta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \phi_j, \quad K \sin \Theta = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin \phi_j. \quad (4.5)$$

Bei dem mittleren Feld handelt es sich um eine makroskopische Größe, die als kollektiver Rhythmus, den die ganze Population erzeugt, verstanden werden kann. Es misst das Einsetzen von Kohärenz infolge von Synchronisation. Synchronisieren keine der Oszillatoren, d.h., sind alle Frequenzen unterschiedlich, so sind die ϕ_k gleichförmig auf $[0, 2\pi)$ verteilt und das mittlere Feld verschwindet ($K = 0$). Andersherum, wenn einige der Oszillatoren mit der gleichen Frequenz schwingen, summieren ihre Phasen kohärent und das mittlere Feld ist ungleich Null. Zieht man den Vergleich mit dem ferromagnetischen Phasenübergang, wo infolge von Korrelationen der Richtungen der Elementarmagneten ein nichtverschwindendes magnetisches Feld entsteht, sieht man, dass die Amplitude K des mittleren Feldes als ein natürlicher Ordnungsparameter des Überganges zu Synchronisation aufgefasst werden kann.

Man kann nun Gleichung (4.1) in Termen des Ordnungsparameters schreiben: Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (4.4) mit $e^{-i\phi_k}$, erhält man

$$Ke^{i(\Theta - \phi_k)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\phi_j - \phi_k)}. \quad (4.6)$$

Gleichsetzen der beiden Imaginärteile ergibt:

$$K \sin(\Theta - \phi_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k). \quad (4.7)$$

Gleichung (4.1) geht also über in

$$\dot{\phi}_k = \omega_k + \varepsilon K \sin(\Theta - \phi_k). \quad (4.8)$$

Man kann also den Einfluss des mittleren Feldes als eine äußere Kraft verstehen, die auf jeden der Oszillatoren wirkt (siehe Kapitel 2). Ein verschwindendes mittleres Feld bedeutet eine verschwindende äußere Kraft; der nichtkohärente Zustand ist also immer eine Lösung des Systems (4.1). Der Fall eines nichtverschwindenden mittleren Feldes ist nicht trivial. Wenn es beispielsweise periodisch ist, d.h. $K = \text{konstant}$, $\Theta = \omega t$, liegt das Problem des periodisch getriebenen Oszillators vor.

Der Fall eines nichtverschwindenden mittleren Feldes kann jedoch mit Überlegungen zur Selbstkonsistenz gelöst werden:

Ein nichtverschwindendes mittleres Feld synchronisiert mindestens ein paar der Oszillatoren, so dass ihre Phasen kohärent summieren, und diese kohärente Gruppe erzeugt einen nichtverschwindenden Beitrag zum mittleren Feld.

Es liegt nun nahe, anzunehmen, dass Lösungen existieren für ein mittleres Feld, das mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{\omega}$ schwingt (was man aber auch über Selbstkonsistenzüberlegungen erhält). Wir setzen also:

$$\Theta = \bar{\omega}t, \quad K = \text{konstant}. \quad (4.9)$$

Begibt man sich wiederum in das mit der Geschwindigkeit $\bar{\omega}$ rotierende Bezugssystem, kann man ohne Einschränkung $\Theta \equiv 0$ setzen und man kommt zu der Gleichung:

$$\dot{\phi}_k = \omega_k - \varepsilon K \sin \phi_k. \quad (4.10)$$

Die Strategie ist nun, diese Bewegungsgleichungen für alle Oszillatoren zu lösen (die von K als Parameter abhängen). Man wird also Bedingungen für K und Θ erhalten, die mit den ursprünglich angenommenen Werten übereinstimmen müssen (Selbstkonsistenz).

Die Gleichung (4.10) hat nun zwei verschiedene Typen von Langzeitlösungen: synchrone und asynchrone, abhängig vom Verhältnis von $|\omega_k|$ und εK (von Kuramoto auch als „locked“ und „drifting“ bezeichnet):

- Die Oszillatoren mit $|\omega_k| \leq \varepsilon K$ werden von dem mittleren Feld mitgerissen und laufen in einen stabilen Fixpunkt, der gegeben ist durch:

$$\omega_k = \varepsilon K \sin \phi_k, \quad (4.11)$$

mit $|\phi_k| < \frac{\pi}{2}$ (siehe Abbildung 4.1).

- Die Phasenpunkte der anderen Oszillatoren mit $|\omega_k| > \varepsilon K$ bewegen sich auf dem Kreis, und das in einer nicht gleichförmigen Weise. Außerdem sind die Phasen dieser Oszillatoren nicht gleichverteilt; sie gehören zu den Schwänzen der Verteilung, wohingegen die Phasen der synchronen Oszillatoren wie erwartet zum Zentrum der Verteilung $g(\omega)$ gehören.

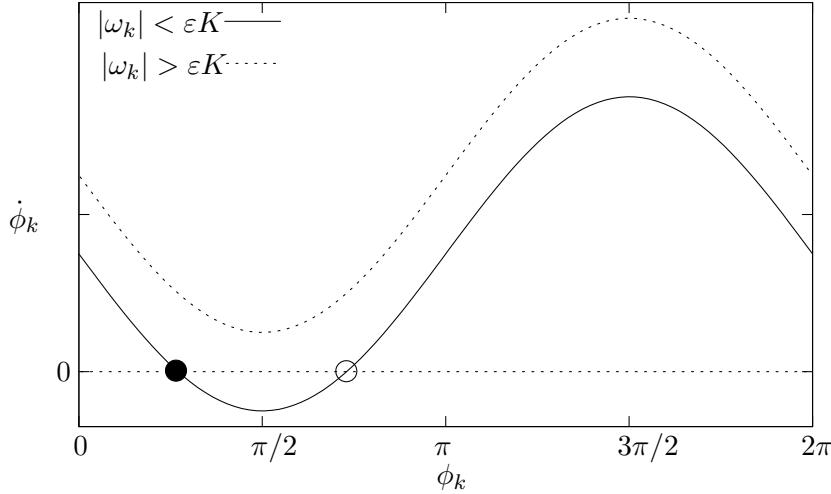


Abbildung 4.1: Aufgetragen ist die rechte Seite der Gleichung (4.10) für die Fälle $|\omega_k| \leq \varepsilon K$ und $|\omega_k| > \varepsilon K$. Im Fall $|\omega_k| \leq \varepsilon K$ laufen die Oszillatoren in einen stabilen Fixpunkt.

Als Nächstes muss man die Beiträge der synchronen und der asynchronen Oszillatoren zum mittleren Feld bestimmen, bzw. die Verteilung der jeweiligen Phasen $n(\phi)$. Da es zwei Lösungstypen gibt, teilen wir diese Verteilung in einen synchronen und einen asynchronen Teil auf, $n_s(\phi)$ und $n_a(\phi)$. Für die synchronisierten Oszillatoren hängen die Phasen nicht von der Zeit ab, und die Verteilung berechnet sich über Gleichung (4.11) und eine Variablentransformation zu

$$n_s(\phi) = g(\omega) \left| \frac{d\omega}{d\phi} \right| = \varepsilon K g(\varepsilon K \sin \phi) \cos \phi \quad (4.12)$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Phase ϕ zu beobachten, ist umgekehrt proportional zur Rotationsgeschwindigkeit an diesem Punkt:

$$P(\phi, \omega) = \frac{C}{|\dot{\phi}|} = \frac{C}{|\omega - \varepsilon K \sin \phi|}. \quad (4.13)$$

Die Konstante C ergibt sich aus der Normierung $\int_0^{2\pi} d\phi P(\phi, \omega) = 1$ für jedes ω zu

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (\varepsilon K)^2}. \quad (4.14)$$

Nun muss man diese Wahrscheinlichkeit über $g(\omega)$ mitteln um die Verteilung der Phasen der asynchronen Oszillatoren zu erhalten:

$$\begin{aligned} n_a(\phi) &= \int_{|\omega|>\varepsilon K} g(\omega) P(\phi, \omega) d\omega \\ &= \int_{+\varepsilon K}^{+\infty} \frac{g(\omega) \sqrt{\omega^2 - (\varepsilon K)^2}}{2\pi(\omega - \varepsilon K \sin \phi)} d\omega + \int_{-\infty}^{-\varepsilon K} \frac{g(\omega) \sqrt{\omega^2 - (\varepsilon K)^2}}{2\pi(-\omega + \varepsilon K \sin \phi)} d\omega. \end{aligned}$$

Benutzt man die Symmetrie der Frequenzverteilung $g(\omega) = g(-\omega)$, kann man die letzte Gleichung in einer kompakteren Form schreiben:

$$n_a(\phi) = \int_{+\varepsilon K}^{+\infty} \frac{g(\omega) \omega \sqrt{\omega^2 - (\varepsilon K)^2}}{\pi(\omega^2 - \varepsilon^2 K^2 \sin^2 \phi)} d\omega \quad (4.15)$$

Als Selbstkonsistenzgleichung erhält man nun

$$K = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\phi} [n_s(\phi) + n_a(\phi)] d\phi. \quad (4.16)$$

Der asynchrone Teil $n_a(\phi)$ besitzt wegen des \sin^2 -Terms die Periode π in ϕ , trägt also nichts zum letzten Integral bei. Schreibt man die letzte Gleichung getrennt nach Real- und Imaginärteil hin, erhält man die beiden Gleichungen:

$$K = \varepsilon K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi \cdot g(\varepsilon K \sin \phi) d\phi, \quad (4.17)$$

$$0 = \varepsilon K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin \phi \cdot g(\varepsilon K \sin \phi) d\phi. \quad (4.18)$$

Gleichung (4.18) ist erfüllt über die Symmetrie der Verteilung, Gleichung (4.17) legt die Amplitude des mittleren Feldes fest. Man sieht sofort, dass immer die triviale Lösung $K = 0$ existiert, unabhängig von ε . Dieses entspricht einem komplett inkohärenten Zustand. Ein zweiter Zweig von Lösungen ist gegeben durch

$$1 = \varepsilon \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi \cdot g(\varepsilon K \sin \phi) d\phi. \quad (4.19)$$

Eine geschlossene analytische Lösung für K kann nur für einige spezielle Verteilungen $g(\omega)$ gefunden werden.

Für das Beispiel einer Lorentzverteilung mit

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\omega^2 + \gamma^2)} \quad (4.20)$$

erhält man als Amplitude für die kohärente Lösung

$$K = \sqrt{1 - \frac{2\gamma}{\varepsilon}}. \quad (4.21)$$

Man hat also ein nichtverschwindendes mittleres Feld, wenn die Kopplungsstärke einen kritischen Wert $\varepsilon_c = 2\gamma$ überschreitet (siehe Abbildung 4.2).

Der Zusammenhang $K \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{1/2}$ gilt auch für beliebige andere unimodale Verteilungen $g(\omega)$: Entwickelt man für kleine K $g(\varepsilon K \sin \phi)$ in eine Taylor-Reihe um 0

$$g(\varepsilon K \sin \phi) \approx g(0) + \frac{g''(0)}{2} \varepsilon^2 K^2 \sin^2 \phi, \quad (4.22)$$

erhält man nach Einsetzen in (4.19)

$$\varepsilon_c = \frac{2}{\pi g(0)}, \quad K^2 \approx \frac{8g(0)}{|g''(0)|\varepsilon^3} (\varepsilon - \varepsilon_c). \quad (4.23)$$

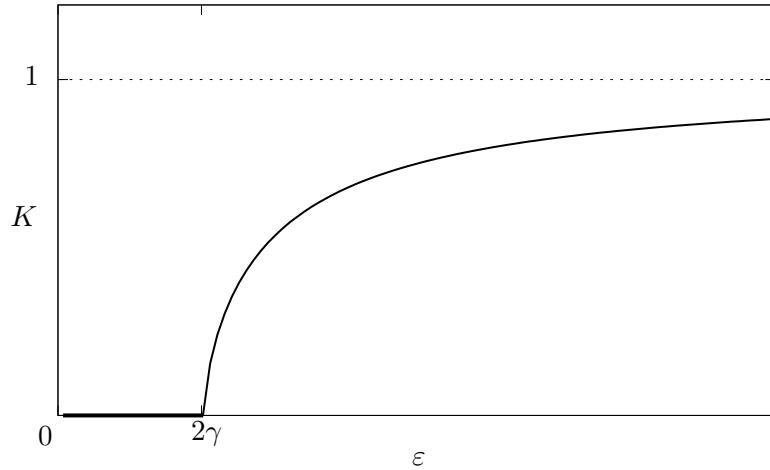


Abbildung 4.2: Der Ordnungsparameter K in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke ε für den Fall einer Lorentzverteilung. Oberhalb eines kritischen Wertes $\varepsilon_c = 2\gamma$ nimmt K einen von Null verschiedenen Wert an.

4.2 Integrate-and-fire-Oszillatoren

Das in Kapitel 3 vorgestellte Beispiel von Mirollo und Strogatz [MS90] kann auf den allgemeinen Fall von N gekoppelten (identischen) Relaxationsoszillatoren verallgemeinert werden. Erreicht hierbei der Oszillator i den Grenzwert $x_i = 1$, feuert er, d.h. x_i wird auf 0 gesetzt und alle anderen Zustandsvariablen x_j , $i \neq j$ werden um den Wert ε/N erhöht. Auch hier muss die Kopplung durch die Populationsgröße normiert werden, damit man im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$ physikalisch sinnvolle Werte erhält. Es wird wiederum vorausgesetzt, dass der Zustand $x = 0$ direkt nach dem Feuern unempfindlich gegenüber dem Einfluss der anderen ist (der Zustand $x = 0$ ist absorbierend). Gerade diese letzte Eigenschaft eröffnet die Möglichkeit von perfekter Synchronisation oder besser Synchronität.

Wie diese Synchronität entsteht, ist intuitiv recht leicht nachvollziehbar: Im Laufe der Zeit entstehen Gruppen von Oszillatoren, die zur gleichen Zeit feuern. Wenn eine solche Gruppe wächst, erzeugt sie einen stärkeren gemeinsamen Puls, und kann dadurch mehr andere Oszillatoren über die Grenzschwelle mitziehen, die dadurch Teil der Gruppe werden. Eine große Gruppe ist also in der Lage, andere Oszillatoren zu „absorbieren“. Solche Absorptionen reduzieren nach und nach die Anzahl existierender Gruppen, bis nur noch eine große Gruppe übrigbleibt - alle Oszillatoren sind synchron.

Auch wenn letztere Überlegungen recht einleuchtend erscheinen, ist a priori überhaupt nicht klar, ob nicht auch stabile, nichtsynchrone Lösungen existieren. Mirollo und Strogatz jedoch haben gezeigt, dass die Menge der Anfangsbedingungen, die zu solchen dekohärenten Zuständen führen, vom Maß Null ist. Ihr Beweis besteht dabei aus zwei großen Teilen:

Sie zeigen zunächst, dass für fast alle Anfangsbedingungen eine Absorption wie oben beschrieben in endlicher Zeit geschieht. Im zweiten Teil untersuchen sie die Möglichkeit der Existenz von Anfangsbedingungen, für die, nach einer Reihe von Absorptionen, in endlicher Zeit keine weiteren Absorptionen erfolgen. Diese weiteren Absorptionen würden aber schließlich zu Synchronität führen. Als Resultat erhalten sie, dass die Menge solcher Anfangsbedingungen vom Maß Null ist.

Mit Wahrscheinlichkeit Eins läuft also das betrachtete System in den Zustand perfekter Synchronisation, in dem alle N Oszillatoren gleichzeitig periodisch feuern. Dieser Beweis gilt für alle $N \geq 2$.

In den nächsten beiden Abbildungen werden einige Resultate numerischer Rechnungen aus der oben zitierten Veröffentlichung gezeigt. Die das Wachstum bestimmende Dynamik ist gegeben als

$$\dot{x}_i = S_0 - \gamma x_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.24)$$

Dies entspricht einer Funktion $f(\phi)$

$$f(\phi) = C \left(1 - e^{-\gamma\phi} \right) \quad \text{mit} \quad C = 1 - e^{-\gamma}, \quad (4.25)$$

ähnlich der in Abbildung 3.1 gezeigten. Die einzelnen Parameter sind gewählt als:

$$\begin{aligned} N &= 100, & S_0 &= 2, \\ \gamma &= 1, & \varepsilon &= 0.3. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Die Anfangswerte der x_i werden zufällig gleichverteilt aus dem Intervall $[0, 1]$ gewählt; anschließend werden die x_i so umbenannt, dass sie der Größe nach absteigend geordnet sind.

Abbildung 4.3 zeigt die Anzahl der feuерnden Oszillatoren als Funktion der Zeit. Man sieht, dass zunächst keine Kohärenz zwischen den Oszillatoren besteht, und sich zunehmende Synchronität nur langsam einstellt. Sobald aber ein gewisser Anteil von Oszillatoren gleichzeitig feuert, wird der Aufbau der Synchronität immer mehr beschleunigt: je größer die Gruppe der synchron feuernden Oszillatoren ist, desto leichter können andere Oszillatoren von ihr absorbiert werden.

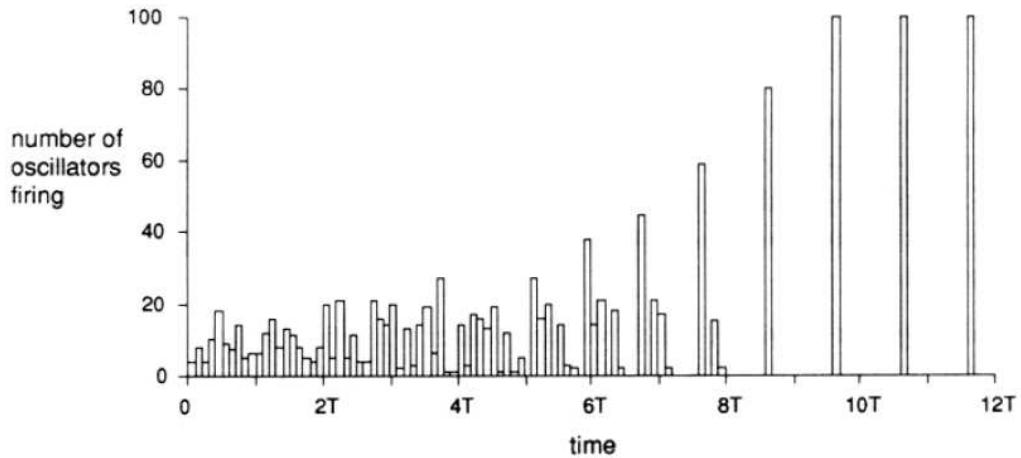


Abbildung 4.3: Anzahl der feuernden Oszillatoren als Funktion der Zeit. Die Zeit ist dabei in Einheiten der natürlichen Periode T der Oszillatoren aufgetragen. Jede Periode ist in 10 gleich große Intervalle aufgeteilt. (Aus: [MS90])

Abbildung 4.4 zeigt die Entwicklung des Systems im Phasenraum, wobei der Zustand jeweils direkt nach dem Feuern des ersten Oszillators (d.h. $i = 1$) aufgezeichnet wurde. Plateaus kennzeichnen dabei Gruppen von Oszillatoren, die gleichzeitig feuern. Man sieht, dass sich nach wenigen Iterationen eine dominante Gruppe herausgebildet hat.

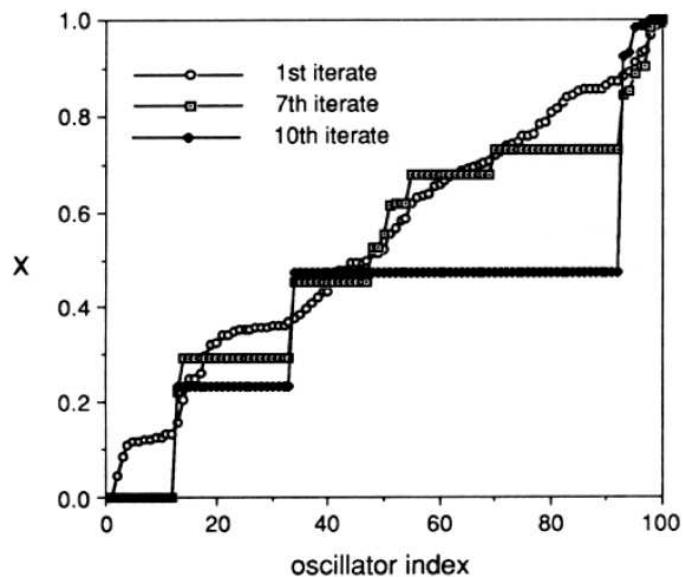


Abbildung 4.4: Gleiche Simulation wie in Abbildung 4.3. Aufgetragen ist der Zustand des Systems nach der ersten, der siebten und der zehnten Iterierten der Poincaré-Abbildung.
(Aus: [MS90])

5 Das Modell

Im Folgenden soll das entwickelte Modell global gekoppelter Relaxationsoszillatoren erläutert und analysiert werden. Dabei wird zunächst kurz die Motivation für diese Arbeit vorgestellt.

Ausgangspunkt dieser Diplomarbeit war eine Veröffentlichung aus der Gruppe von Herrn Prof. Dr. Plath aus Bremen ([BP00]), in der die Dynamik der CO-Oxidation an Pd-Trägerkatalysatoren als ein Beispiel heterogen-katalysierter Reaktionen untersucht wurde. Man beobachtet dabei selbstaffine Muster in den Zeitreihen, die durch Einbrüche der CO-Umsatzrate gekennzeichnet sind, mit kleinen Einbrüchen über wenige Sekunden bis hin zu großen Einbrüchen über eine halbe Minute. Diese Einbrüche kann man als Ausfall des Katalysators verstehen, wobei die kleinen Einbrüche auf den Ausfall eines Teils des Katalysators hindeuten und die großen Einbrüche durch den Ausfall des gesamten Katalysators erklärt werden können. Die genaue Gestalt der Muster hängt stark ab von der Durchflussrate im Reaktor: das Experiment wurde in einem kontinuierlich betriebenen Durchflussreaktor durchgeführt. Erhöhen der Durchflussrate hatte

- ein Anwachsen der Frequenz der großen Einbrüche,
- die Zunahme der Amplitude von kleinen Einbrüchen,
- ein Anwachsen der Komplexität der beobachteten Muster, sowie
- die Abnahme der maximalen CO-Umsatzrate

zufolge, wie man in der folgenden Abbildung 5.1 nachvollziehen kann. Aufgetragen ist die CO-Konzentration im Reaktor für verschiedene Durchflussraten gegen die Zeit .

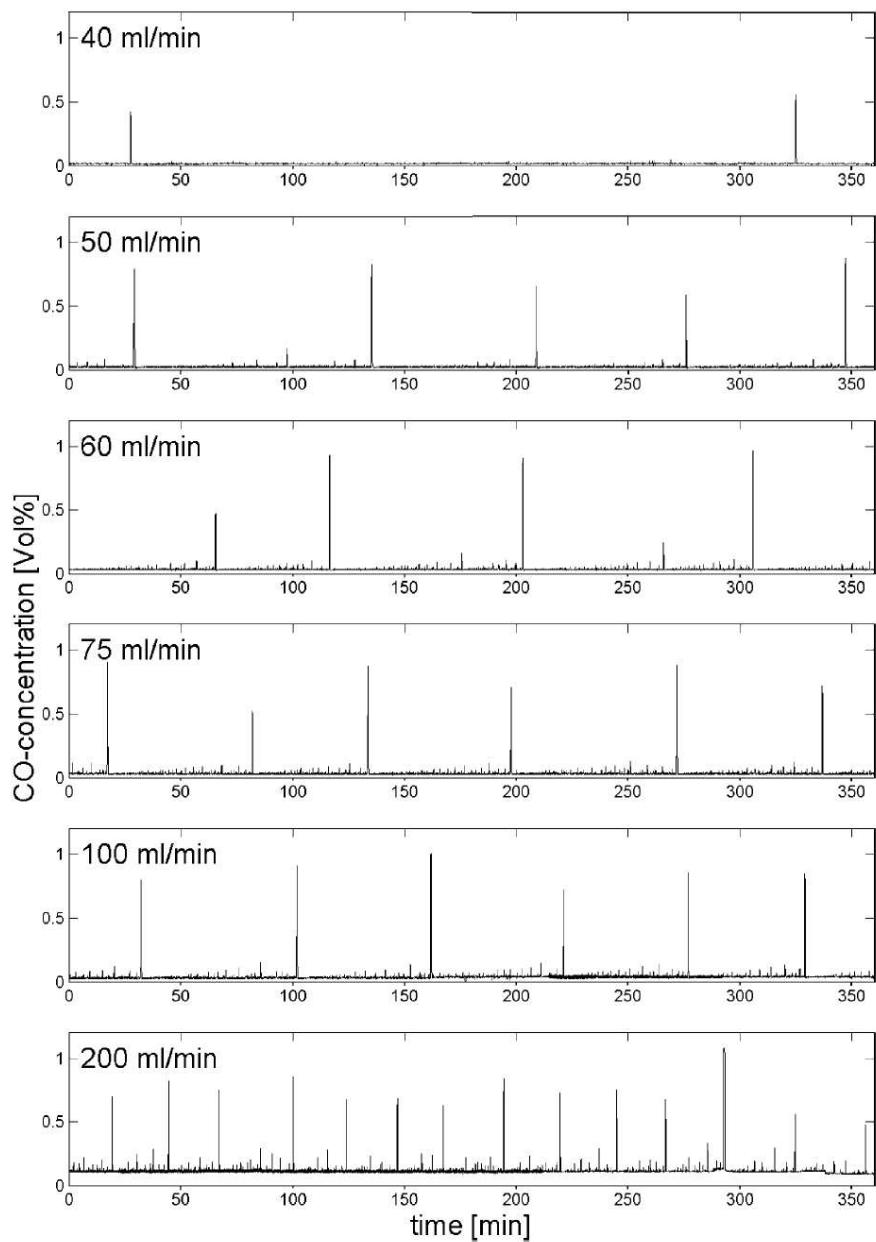
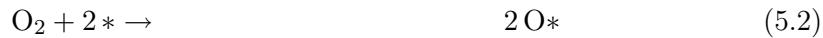


Abbildung 5.1: Experimentell beobachtete Zeitreihen für die CO-Konzentration im Reaktor für wachsende Durchflussraten. Aus: [BP00].

5.1 Das Grundmodell - ein einzelner Oszillator

5.1.1 Vorüberlegungen

Der Katalysator liegt im obigen Experiment in Form von Palladium-Teilchen vor, die einen Durchmesser von etwa 4 nm besitzen (TEM-Aufnahmen). Die Reaktion findet nach dem sogenannten *Langmuir-Hinschelwood-Mechanismus* statt [CEK78]:



* steht dabei für Adsorptionsplätze auf dem Palladium. Die Grundidee ist nun, die Oszillationen des Systems auf eine periodische Oxidation und Reduktion der einzelnen Palladium-Teilchen zurückzuführen (siehe [LPJ96, BP00]) und anschließend das Auftreten von Synchronisation zu untersuchen.

Die „Grundzutat“ des Modells ist also ein einzelner Oszillator, entsprechend einem einzelnen Palladium-Teilchen. Dieser Oszillator befindet sich in einem von zwei Zuständen: einem reduzierten, katalytisch aktiven oder einem oxidierten, katalytisch passiven Zustand.

In Abbildung 5.2 ist die CO-Konzentration im Reaktor gegen den Oxidationsgrad des Palladium-Teilchens aufgetragen. Dieser Phasenraum wird von einer Kurve in zwei Bereiche geteilt: einen aktiven und einen passiven. Ist das Teilchen reduziert, ist es katalytisch aktiv und kann das vorhandene CO zu CO_2 oxidieren (siehe Abbildung 5.2, Punkt A). Dabei ist die Bedeckung des Palladiums mit Sauerstoff bevorzugt. Der Sauerstoff dringt in die Oberfläche des Pd-Teilchens ein und das Palladium wird zunehmend oxidiert. Ist ein gewisser maximaler Oxidationsgrad erreicht, erfolgt der Übergang in den oxidierten, inaktiven Bereich (siehe Abbildung 5.2, Punkt B). Da nichts mehr umgesetzt wird, steigt die CO-Konzentration im Reaktor sprungartig an. Im oxidierten Zustand ist die Bedeckung des Katalysators mit CO bevorzugt, von dem das Pd schnell wieder reduziert wird. Wird ein gewisser minimaler Oxidationsgrad und erneut die Phasengrenze erreicht (siehe Abbildung 5.2, Punkt D), wechselt das Teilchen wieder in den aktiven Zustand, die CO-Konzentration im Reaktor sinkt, und das Spiel beginnt von Neuem.

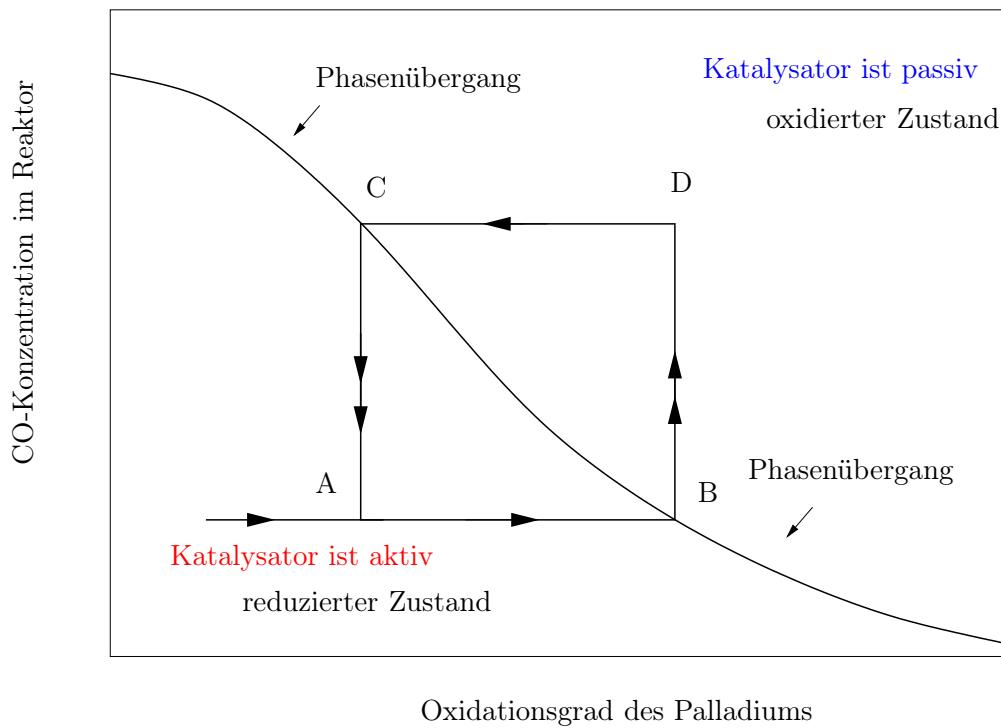


Abbildung 5.2: Das Grundmodell - ein einzelner Oszillator, entsprechend einem einzelnen Palladium-Teilchen.

Übersicht:

- A → B: Das Palladium-Teilchen ist katalytisch aktiv und kann das angebotene CO oxidieren.
- B → C: Das Palladium-Teilchen wechselt in den katalytisch inaktiven Bereich, die CO-Konzentration im Reaktor steigt sprungartig an.
- C → D: Das Palladium-Teilchen ist katalytisch inaktiv und wird reduziert.
- D → A: Das Palladium-Teilchen wechselt in den katalytisch aktiven Bereich, die CO-Konzentration im Reaktor fällt sprungartig ab.

5.1.2 Die beschreibenden Gleichungen

Im Folgenden bezeichne x den Oxidationsgrad des Pd-Teilchens und y die CO-Konzentration im Reaktor. Wir nehmen an, dass der x - y -Phasenraum durch eine Grenzlinie in zwei Bereiche geteilt wird: einen aktiven und einen passiven mit unterschiedlichem dynamischen Verhalten. Die Grenze sei gegeben durch eine Funktion

$$y = f(x, Q), \quad (5.4)$$

wobei Q die Gestalt der Kurve bestimme. Im Folgenden ist die Funktion gewählt als

$$f(x, Q) = \exp\left(\frac{-x^2}{Q}\right). \quad (5.5)$$

Im aktiven Bereich relaxiere x gegen den Wert $x = 1$, wohingegen y gegen $y = \alpha y_0$ laufe:

$$\dot{x} = \bar{\beta}(1 - x) \quad (5.6)$$

$$\dot{y} = -y + \alpha y_0. \quad (5.7)$$

$y_0 \leq 1$ sei die CO-Konzentration des einströmenden Gases und konstant und α der sogenannte Austauschfaktor, der die Flussrate F durch den Reaktor wiederspiegelt:

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad \lim_{F \rightarrow \infty} \alpha = 1. \quad (5.8)$$

Ich werde im Folgenden α selbst als Flussrate bezeichnen.

Im passiven Bereich sei die Dynamik eine vollkommen andere: x nehme hier ab und y relaxiere gegen den Wert $y = y_0$:

$$\dot{x} = -\beta_0 x \quad (5.9)$$

$$\dot{y} = \alpha(y_0 - y). \quad (5.10)$$

Führt man die Funktion

$$\Theta(x, y, Q) := \Theta_0\left(\exp\left(\frac{-x^2}{Q}\right) - y\right) = \begin{cases} 1 & \text{im aktiven Bereich} \\ 0 & \text{im passiven Bereich} \end{cases} \quad (5.11)$$

mit der üblichen Heavyside'schen Sprungfunktion Θ_0 ein, kann man die obigen Gleichungen zusammenfassen zu:

$$\dot{x} = [\Theta(x, y, Q) - x] \cdot \beta \quad (5.12)$$

$$\dot{y} = \underbrace{-\Theta(x, y, Q)y}_{\text{Reaktion}} + \underbrace{\alpha y_0}_{\text{einström. Gas}} - \underbrace{\alpha[1 - \Theta(x, y, Q)] \cdot y}_{\text{ausström. Gas}} \quad (5.13)$$

Die Frequenz β ist gegeben durch

$$\beta = \Theta(x, y, Q) \cdot \bar{\beta} + (1 - \Theta(x, y, Q)) \cdot \beta_0. \quad (5.14)$$

Dabei ist $\beta_0 \gg \bar{\beta}$, d.h. die Reduktionsgeschwindigkeit ist sehr viel größer als die Oxidationsgeschwindigkeit. Damit versuchen wir der Tatsache Rechnung zu tragen, dass die Zeit während der Einbrüche sehr viel kleiner ist als die Zeit zwischen zwei großen Einbrüchen (siehe Abbildung 5.1). Es gibt also in diesem System *zwei verschiedene Zeitskalen* bzw. auf dem Grenzzyklus schnelle und langsame Bewegungen, bei dem vorgestellten Oszillatator handelt es sich demzufolge um einen Relaxationsoszillatator (siehe Abbildung 5.3).

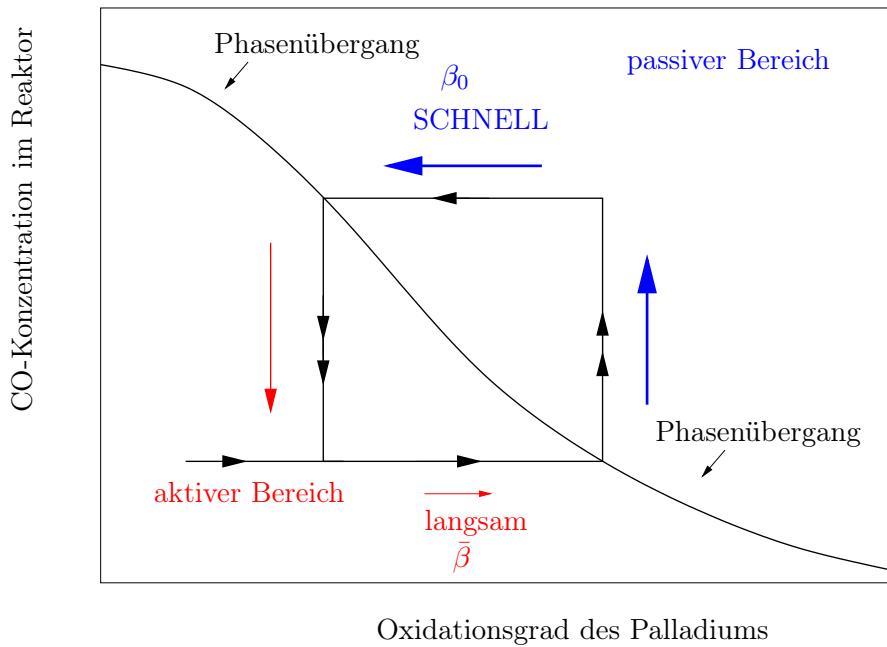


Abbildung 5.3: Grundmodell - Reaktionsgeschwindigkeiten

Die rechte Seite der Gleichung (5.13) für y setzt sich zusammen aus drei Termen, davon trägt der erste der Reaktion zu CO_2 Rechnung, der zweite dem kontinuierlich nachströmenden Gas und der dritte dem Umstand, dass - ebenfalls kontinuierlich - Gas wieder aus dem Reaktor herausgeführt wird. Der entscheidende Parameter des Systems ist die Flussrate α .

Die Frequenz $\bar{\beta}$ wird als eine Funktion des Austauschsfaktor bzw. der Flussrate angesetzt, d.h.

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}(\alpha), \quad (5.15)$$

wobei $\bar{\beta}(\alpha)$ eine monoton wachsende Funktion sei, d.h. die Oxidationsgeschwindigkeit nehme aufgrund des höheren Angebotes an Gasmolekülen mit wachsender Flussrate zu.

5.2 Das Ensemble von N gekoppelten Oszillatoren

Das erweiterte Modell umfasst nun N solcher Relaxationsoszillatoren, die miteinander gekoppelt werden. Dabei gibt es mehrere, experimentell gestützte Annahmen:

- Die Konzentration der Gase im Reaktor ist überall gleich; ändert sich irgendwo durch die Reaktion an einem Palladium-Teilchen die CO-Konzentration, so ändert sie sich instantan im gesamten Reaktor.
- Der Anteil des Palladiums im Katalysator-Trägermaterial ist sehr gering; die einzelnen Palladium-Teilchen sind sehr weit voneinander entfernt.
- Die Palladium-Teilchen sind zwar alle ähnlich groß, aber nicht exakt gleich. Ihre Größen folgen vielmehr einer gewissen Größenverteilung.

In Bezug auf die Kopplung und Beschaffenheit der Oszillatoren kommen wir deshalb zu den folgenden Annahmen:

- Es bestehen *keine* Nachbarschaftsrelationen zwischen den einzelnen Oszillatoren; die Kopplung erfolgt *global* über die Gasphase.
- Die Oszillatoren sind nicht identisch, sondern besitzen verschiedene Frequenzen. Diese Frequenzen sind hierarchisch geordnet, analog der hierarchischen Größenverteilung der zugehörigen Palladium-Teilchen: kleinere Teilchen besitzen eine kleinere Oberfläche und durchlaufen demzufolge schneller den Kreislauf aus Oxidation und Reduktion.

Das dynamische System wird nun beschrieben durch:

$$\dot{x}_i = [\Theta(x_i, y, Q) - x_i] \cdot \beta_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.16)$$

$$\dot{y} = \underbrace{-Iy}_{\text{Reaktion}} + \underbrace{\alpha y_0}_{\text{einström. Gas}} - \underbrace{\alpha[1 - I] \cdot y}_{\text{ausström. Gas}}. \quad (5.17)$$

Dabei ist

$$I := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta(x_i, y, Q) \quad (5.18)$$

die durchschnittliche Umsatzrate bzw. der Anteil der aktiven Teilchen. Die Frequenzen β_i sind gegeben durch

$$\beta_i = \Theta(x_i, y, Q) \cdot \bar{\beta}_i + (1 - \Theta(x_i, y, Q)) \cdot \beta_0. \quad (5.19)$$

Im passiven Bereich besitzen also alle Oszillatoren die Frequenz β_0 , die Reduktionsgeschwindigkeit wird für alle Oszillatoren als gleich angesehen. Die Frequenzen $\bar{\beta}_i$ sind hierarchisch nach einer Funktion $H(i, \alpha)$ geordnet. $i = 1, 2, \dots, N$ sei hierbei der Teilchenindex, angefangen bei dem kleinsten Teilchen. Die Funktion $H(i, \alpha)$ ist monoton fallend in i , der Teilchengröße: kleinere Teilchen besitzen höhere Frequenzen als größere.

Weiterhin sind $H(i, \alpha)$ sowie ihre Ableitung $\frac{\partial H}{\partial i}(i, \alpha)$ monoton wachsend in α : für kleine Flussraten besitzen die Oszillatoren sowohl kleinere als auch ähnlichere Frequenzen, für eine wachsende Flussrate α wachsen nicht nur die Frequenzen sondern auch die relativen Unterschiede zwischen den Oszillator-Frequenzen.

Im Folgenden wird sowohl in i als auch in α ein linearer Zusammenhang angenommen (siehe Abbildung 5.4).

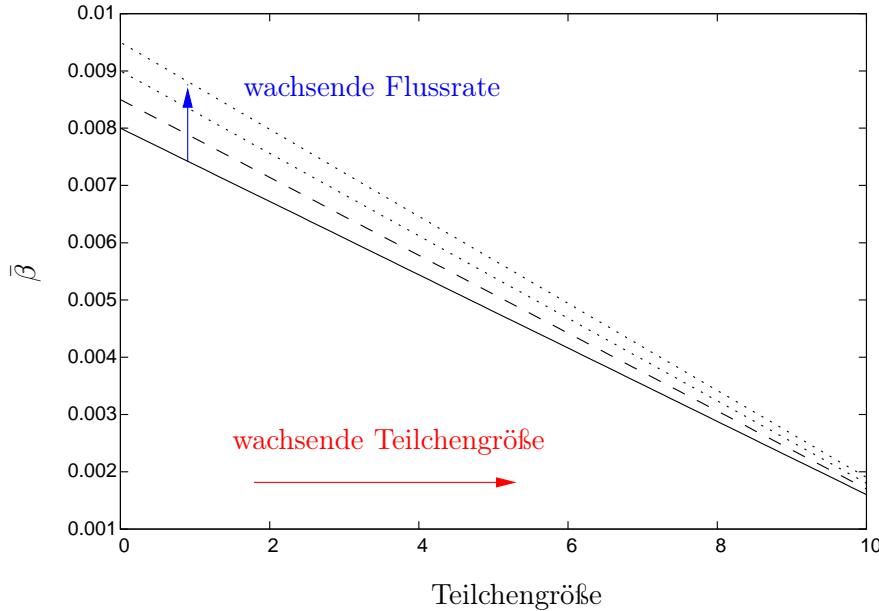


Abbildung 5.4: Frequenzen $\bar{\beta}$ als Funktion der Teilchengröße für wachsende Flussrate α .

5.3 Übergang zum Kontinuum

Durch die Normierung mit dem Faktor $1/N$ in Gleichung (5.18) erhält man im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$ physikalisch sinnvolle Ergebnisse. Das System geht dabei über in

$$\dot{X}(\xi, t) = [\Theta(X(\xi, t), y(t), Q) - X(\xi, t)] \cdot \beta(X(\xi, t), y(t)), \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= - \int d\xi \Theta(X(\xi, t), y(t), Q) \cdot y(t) \\ &\quad + \alpha \left[y_0 + \left(1 - \int d\xi \Theta(X(\xi, t), y(t), Q) \right) \cdot y(t) \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

wobei der diskrete Index i durch die Variable ξ und der Vektor $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ durch das Feld $X(\xi, t)$ ersetzt wird. Eine Analyse dieser Gleichungen ist jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit.

6 Dynamisches Verhalten eines einzelnen Oszillators

Im Folgenden wird das dynamische Verhalten eines einzelnen Oszillators untersucht.

6.1 Qualitative Untersuchung des Langzeitverhaltens

Möchte man das Langzeitverhalten eines dynamischen Systems untersuchen, bietet sich als qualitatives Werkzeug an, zunächst die Nullklinen auszurechnen, d.h. die Trajektorien, entlang derer sich eine der beiden Variablen nicht ändert ($\dot{x} = 0$ oder $\dot{y} = 0$). Sie teilen die Phasen-Ebene ein in Gebiete mit gegensätzlichen „Flussmustern“; auf der einen Seite einer Nullkline mit $\dot{x} = 0$ ist $\dot{x} < 0$, auf der anderen Seite ist $\dot{x} > 0$. Die Schnittpunkte zweier Nullklinen liefern die Fixpunkte des Systems.

In unserem Modell existieren zwei verschiedene Bereiche, die einzeln untersucht werden müssen.

Im aktiven Bereich lassen sich die Nullklinen berechnen über:

$$\dot{x} \stackrel{!}{=} 0 = (1 - x) \cdot \bar{\beta} \quad (6.1)$$

$$\Rightarrow x = 1. \quad (6.2)$$

$$\dot{y} \stackrel{!}{=} 0 = -y + \alpha y_0 \quad (6.3)$$

$$\Rightarrow y = \alpha y_0. \quad (6.4)$$

Im passiven Bereich ergeben sich die Nullklinen zu:

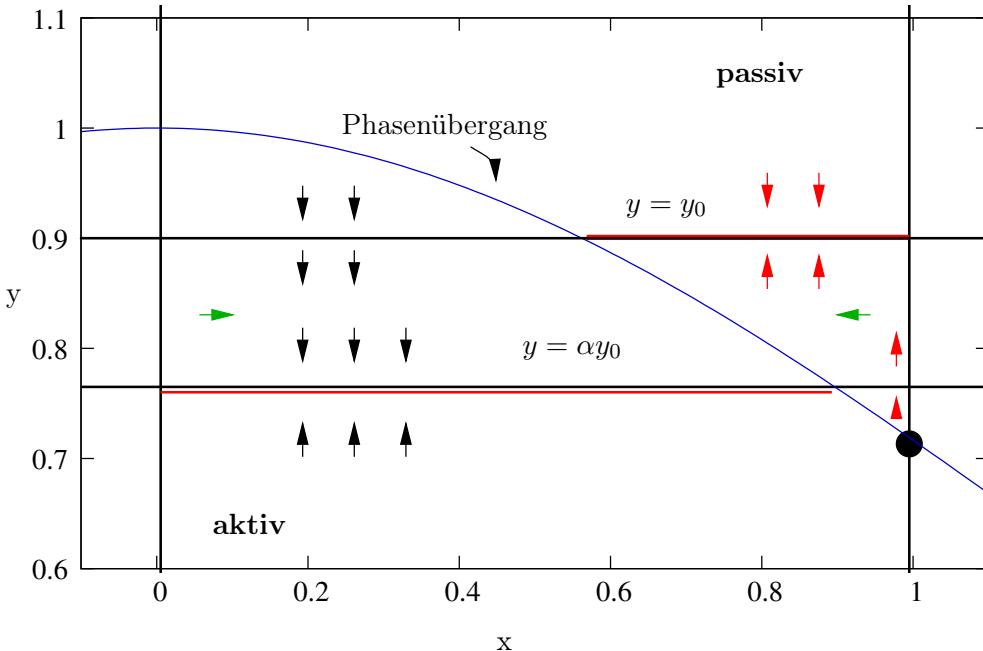
$$\dot{x} \stackrel{!}{=} 0 = -x \cdot \beta_0 \quad (6.5)$$

$$\Rightarrow x = 0. \quad (6.6)$$

$$\dot{y} \stackrel{!}{=} 0 = \alpha (y_0 - y) \quad (6.7)$$

$$\Rightarrow y = y_0. \quad (6.8)$$

In Abbildung 6.1 sind die y -Nullklinen für die beiden Bereiche eingezeichnet (rote Linien), der Fluss in y -Richtung in beiden Bereichen (schwarze bzw. rote Pfeile) sowie der Fluss jeweils in x -Richtung.


 Abbildung 6.1: y -Nullklinen und der Fluss in x - und y -Richtung

Es stellt sich die Frage nach der Existenz von Fixpunkten. Mögliche Fixpunkte wären der Punkt $\mathbf{x}_1^s = (0, y_0)$ im passiven Bereich, sowie der Punkt $\mathbf{x}_2^s = (1, \alpha y_0)$ im aktiven Bereich. Man sieht sofort, dass der Punkt $\mathbf{x}_1^s = (0, y_0)$ *niemals* im passiven Bereich liegt ($y_0 \leq 1$) und insofern als Fixpunkt nicht in Frage kommt. Der Punkt $\mathbf{x}_2^s = (1, \alpha y_0)$ liegt genau dann im aktiven Bereich, wenn die Nullkline $y = \alpha y_0$ unterhalb des in Abbildung 6.1 mit dem schwarzen Kreis markierten Punktes zu liegen kommt. Das ist aber genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\alpha y_0 < \exp\left(\frac{-1^2}{Q}\right) \quad (6.9)$$

$$\Leftrightarrow \alpha < \exp\left(-\frac{1}{Q}\right) \frac{1}{y_0} =: \alpha_c. \quad (6.10)$$

Das bedeutet, für $\alpha < \alpha_c$ besitzt das System einen Fixpunkt. Eine lineare Stabilitätsanalyse, die im Anschluss aufgeführt ist, zeigt, dass es sich bei diesem um einen stabilen Fixpunkt handelt. Für Flussraten $\alpha > \alpha_c$ verschwindet der Fixpunkt und ein stabiler Grenzzyklus taucht auf. Mit anderen Worten: bei einem Parameter-Wert $\alpha = \alpha_c$ ändert sich das Langzeitverhalten und man kann von einer *Bifurkation* sprechen. Der Existenzbeweis für den Grenzzyklus erfolgt mit Hilfe des Poincaré-Bendixson-Theorems und wird ebenfalls im Anschluss diskutiert.

Lineare Stabilitätsanalyse für den Punkt \mathbf{x}_2^s

Wir schreiben das Gleichungssystem (5.7) und (5.7) für den aktiven Bereich um zu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (6.11)$$

mit

$$\mathbf{x} := (x, y) \quad (6.12)$$

$$\text{und } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := ((1-x) \cdot \bar{\beta}, -y + \alpha y_0) \quad (6.13)$$

Dann ergibt sich die Jacobi-Matrix von \mathbf{F} im Punkt \mathbf{x}_2^s zu

$$\left. \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_2^s} = \begin{pmatrix} -\bar{\beta} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

mit den Eigenwerten $-\bar{\beta} < 0$ und $-1 < 0$; der Punkt \mathbf{x}_2^s ist also ein stabiler Fixpunkt.

Existenzbeweis mit Hilfe des Poincaré-Bendixson-Theorems

Das Poincaré-Bendixson-Theorem in einer handlichen Formulierung lautet (siehe [Str94]):

1. R sei eine kompakte Untermenge der Ebene,
2. $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sei ein fast überall stetig differenzierbares Vektor-Feld auf einer offenen Menge, die R enthalte,
3. R enthalte keine Fixpunkte, und
4. es gebe eine „gefangene“ Trajektorie C , die in R starte und für alle Zeiten in R bleibe.

Dann ist entweder die Trajektorie C ein geschlossener Orbit oder sie spiralt gegen einen geschlossenen Orbit für $t \rightarrow \infty$. In jedem Fall enthält R einen geschlossenen Orbit.

Man wähle nun $R = [0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \times [\alpha y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ mit $\varepsilon > 0$, dann sind die ersten drei Punkte leicht zu befriedigen, schwierig ist die letzte Bedingung. Die Idee dabei ist es, dass R gerade so gewählt ist, dass es zusammenhängend ist und dass das Vektorfeld überall auf der Grenze von R „nach innen“ zeigt. Dann sind nämlich *alle* Trajektorien in R „gefangen“.

Das Poincaré-Bendixson-Theorem ist eines der wichtigsten theoretischen Ergebnisse im Bereich der Nichtlinearen Dynamik, denn es sagt aus, dass das mögliche dynamische Verhalten in der Phasen-Ebene allgemein sehr beschränkt ist: Hat man eine Trajektorie, die in einem abgeschlossenen, beschränkten Bereich gefangen ist, der keine Fixpunkte enthält, so läuft diese Trajektorie zwangsläufig irgendwann auf einen geschlossenen Orbit. Mit anderen Worten heißt das: in zwei Dimensionen gibt es kein Chaos!

6.2 Quantitative Untersuchung des Langzeitverhaltens

Nach einer qualitativen Diskussion des Langzeitverhaltens des Systems soll nun eine quantitative Berechnung des Grenzzyklus erfolgen. Um die Trajektorien analytisch zu bestimmen, müssen dabei der aktive respektive der passive Bereich getrennt voneinander betrachtet werden.

Im passiven Bereich ($y > \exp\left(\frac{-x^2}{Q}\right)$) wird das dynamische System beschrieben durch das Gleichungssystem

$$\dot{x} = -x \cdot \beta_0, \quad (6.15)$$

$$\dot{y} = \alpha [y_0 - y] \quad (6.16)$$

mit den Lösungen

$$x(t) = x(t_0) e^{-\beta_0(t-t_0)}, \quad (6.17)$$

$$y(t) = y_0 + [y(t_0) - y_0] e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (6.18)$$

Durch Elimination der Zeit t kann die Trajektorie bestimmt werden zu:

$$y = y_0 + [y(t_0) - y_0] \left(\frac{x}{x(t_0)} \right)^{\frac{\alpha}{\beta_0}}. \quad (6.19)$$

Wenn wir auf der Grenzlinie starten, d.h. bei (X_0, Y_0) mit $Y_0 = e^{-X_0^2/Q}$, dann ergibt sich für den nächsten „Durchstoßpunkt“ der Grenzlinie (X_1, Y_1) mit $Y_1 = e^{-X_1^2/Q}$ die Bestimmungsgleichung

$$e^{-X_1^2/Q} = y_0 + \left[e^{-X_0^2/Q} - y_0 \right] \left(\frac{X_1}{X_0} \right)^{\frac{\alpha}{\beta_0}}, \quad (6.20)$$

wobei sich die Funktion

$$X_1 = F(X_0) \quad (6.21)$$

nicht allgemein analytisch bestimmen lässt.

Im aktiven Bereich ($y < \exp\left(\frac{-x^2}{Q}\right)$) wird das dynamische System beschrieben durch

$$\dot{x} = [1 - x] \bar{\beta}, \quad (6.22)$$

$$\dot{y} = \alpha y_0 - y \quad (6.23)$$

mit der Lösung

$$x(t) = 1 + [x(t_1) - 1] e^{-\bar{\beta}(t-t_1)}, \quad (6.24)$$

$$y(t) = \alpha y_0 + [y(t_1) - \alpha y_0] e^{-(t-t_1)}. \quad (6.25)$$

Eliminiert man wiederum die Zeit, so ergibt sich für die Trajektorie:

$$y = \alpha y_0 + [y(t_1) - \alpha y_0] \left(\frac{x-1}{x(t_1)-1} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (6.26)$$

Beginnt man bei $x(t_1) = X_1$, $y(t_1) = e^{-X_1^2/Q}$ so ergibt sich für den nächsten Durchstoßpunkt (X_2, Y_2) mit $Y_2 = e^{-X_2^2/Q}$ die Bestimmungsgleichung:

$$e^{-X_2^2/Q} = \alpha y_0 + \left[e^{-X_1^2/Q} - \alpha y_0 \right] \left(\frac{X_2-1}{X_1-1} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (6.27)$$

Befinden wir uns nun auf dem Grenzzyklus, so ist $X_0 = X_2$ und die letzte Gleichung geht über in

$$e^{-X_0^2/Q} = \alpha y_0 + \left[e^{-X_1^2/Q} - \alpha y_0 \right] \left(\frac{X_0-1}{X_1-1} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (6.28)$$

7 Numerische Simulationen

Integration der Differentialgleichungen erfolgte in sämtlichen Programmen mittels Runge-Kutta 4. Ordnung mit der Schrittweite 0.005.

7.1 Einzelter Oszillator

Für die numerischen Rechnungen, deren Resultate in diesem Abschnitt vorgestellt werden sollen, wurden folgende Werte angenommen:

$$Q = 3 \tag{7.1}$$

$$y_0 = 0.9 \tag{7.2}$$

$$\bar{\beta} = 0.0098 \cdot \alpha, \quad \beta_0 = 0.09 \tag{7.3}$$

Damit ergibt sich die kritische Durchflussrate zu $\alpha_c = \exp\left(-\frac{1}{Q}\right) \frac{1}{y_0} \approx 0.796$. Für $\alpha < \alpha_c$ existiert ein stabiler Fixpunkt, wohingegen für $\alpha > \alpha_c$ das System auf einen Grenzzyklus läuft.

In Abbildung 7.1 ist das Verhalten verschiedener Trajektorien für $\alpha = 0.78$ aufgetragen; wie man sieht, laufen alle Trajektorien unabhängig von ihren Anfangspunkten in den Fixpunkt hinein.

In der darauf folgenden Abbildung 7.2 ist das Verhalten der Trajektorien gezeigt, die in den gleichen Punkten starten wie in Abbildung 7.1, diesmal wurde jedoch $\alpha = 0.83 > \alpha_c$ gewählt. Der Fixpunkt ist verschwunden, sämtliche Trajektorien laufen auf einen stabilen Grenzzyklus.

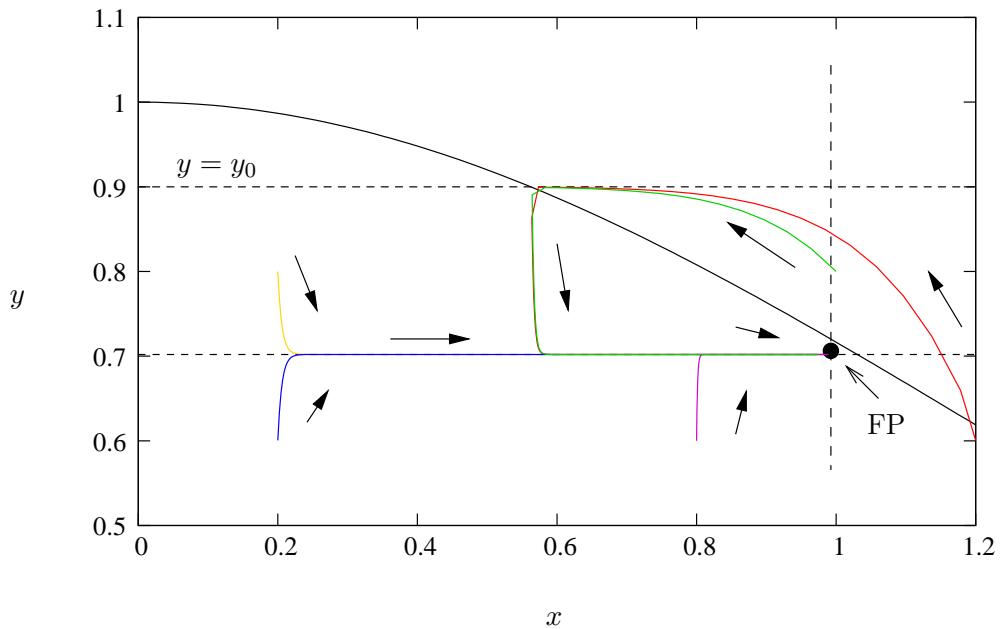


Abbildung 7.1: Verhalten verschiedener Trajektorien für $\alpha = 0.78$, Existenz eines stabilen Fixpunktes.

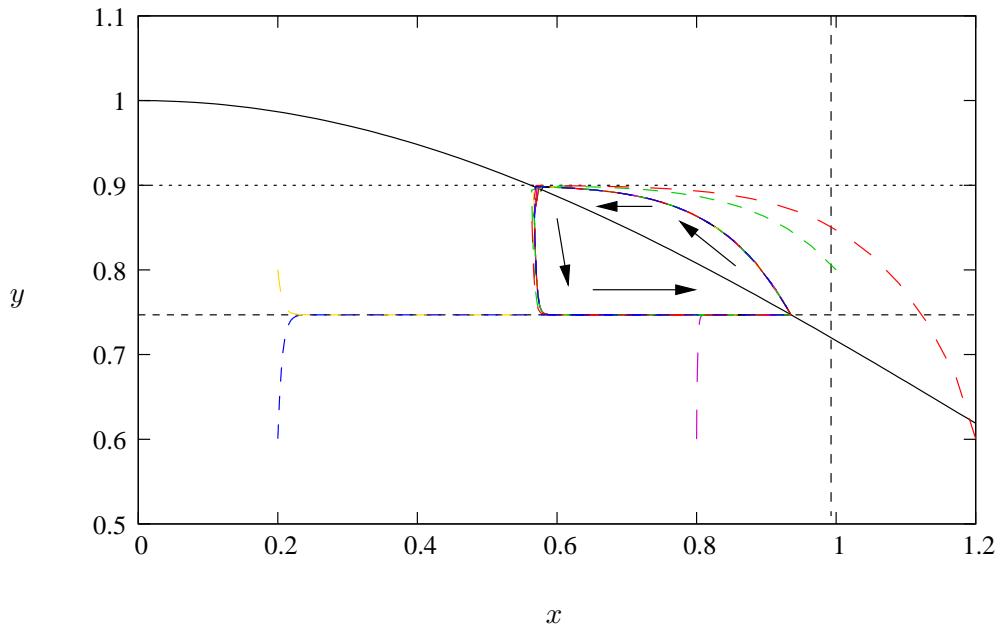


Abbildung 7.2: Verhalten verschiedener Trajektorien für $\alpha = 0.83$, Existenz eines stabilen Grenzzyklus.

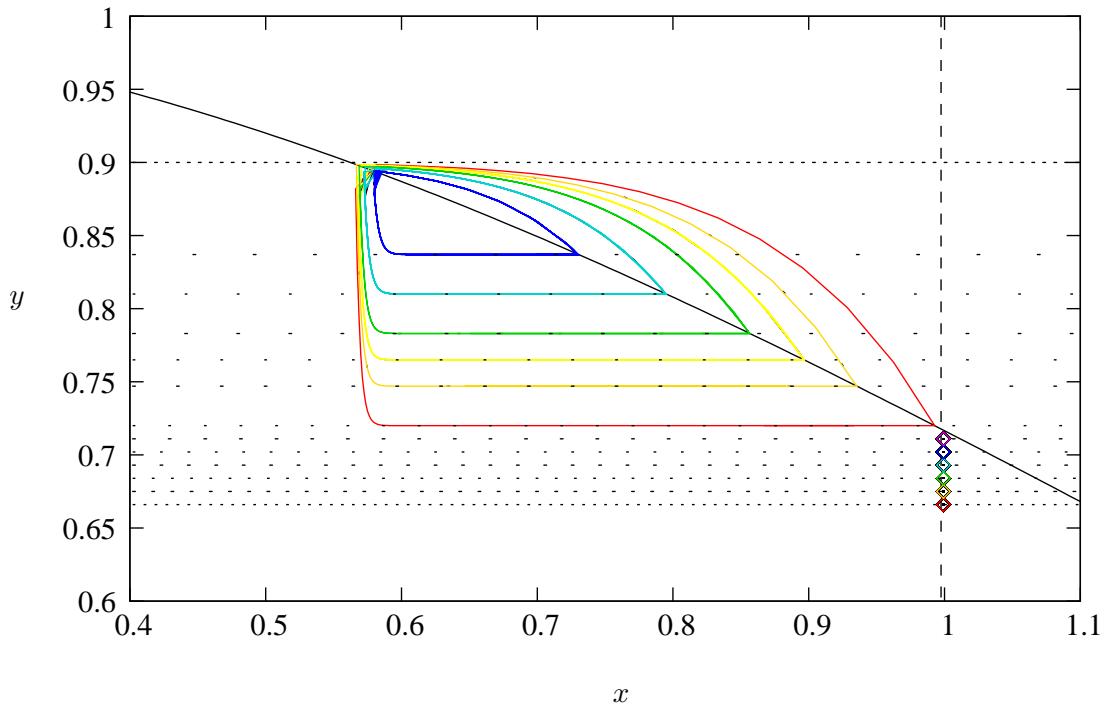


Abbildung 7.3: Langzeitverhalten für verschiedene α -Werte:
Fixpunkte für $\alpha = 0.74, 0.75, \dots, 0.79$, Grenzzyklen für $\alpha = 0.80, 0.83, 0.85, 0.87, 0.90, 0.93$.

In Abbildung 7.3 ist das Langzeitverhalten für verschiedene α -Werte gezeigt; man sieht, wie die Nulllinien und damit die Grenzzyklen mit wachsendem α nach oben wandern. Auf der folgenden Seite sind die den obigen Grenzzyklen zugehörigen Zeitreihen für y aufgetragen (Abbildung 7.4). Dabei sind - wie auch bei allen folgenden Abbildungen - die Transienten großzügig abgeschnitten, es wird also nur das Verhalten auf dem Grenzzyklus wiedergegeben. In regelmäßigen Abständen wächst die CO-Konzentration schnell und heftig an, um ähnlich schnell wieder abzufallen. Man bemerke die wachsende Frequenz dieser Ausreißer sowie die Abnahme der maximalen CO-Umsatzrate, was sich in der nach oben wandernden Grundlinie manifestiert. Diese Grundlinie wird durch die untere y -Nullkline $y = \alpha y_0$ bestimmt, die mit wachsendem α immer weiter nach oben wandert (siehe Abbildung 7.3). Die Maximalhöhe der Ausreißer ändert sich nicht, sie ist gegeben durch die obere y -Nullkline $y = y_0 = \text{konstant}$. Der Abstand der Ausreißer wird durch die Frequenz $\bar{\beta}(\alpha) = \tilde{\beta} \cdot \alpha$ festgelegt. Die Frequenz β_0 bestimmt die Breite der Ausreißer.

Abbildung 7.5 zeigt die zugehörigen Zeitreihen für den Oxidationsgrad des Palladium-Teilchens. Deutlich zu erkennen ist der relaxierende Charakter der Oszillation, der durch die zwei unterschiedlichen Zeitskalen des Systems, die den An- und Abstieg charakterisiert, zustande kommt. Der Anstieg wird bestimmt durch die Frequenz $\bar{\beta}(\alpha)$, der Abstieg durch die Frequenz β_0 . Der maximale Oxidationsgrad nimmt mit wachsendem

α ab. Das liegt daran, dass der Schnittpunkt der Grenzlinie mit der unteren y -Nullkline immer weiter nach links wandert. In diesem Schnittpunkt erfolgt aber der Übergang in den passiven Bereich, wo die x -Koordinate, d.h. der Oxidationsgrad, abnimmt.

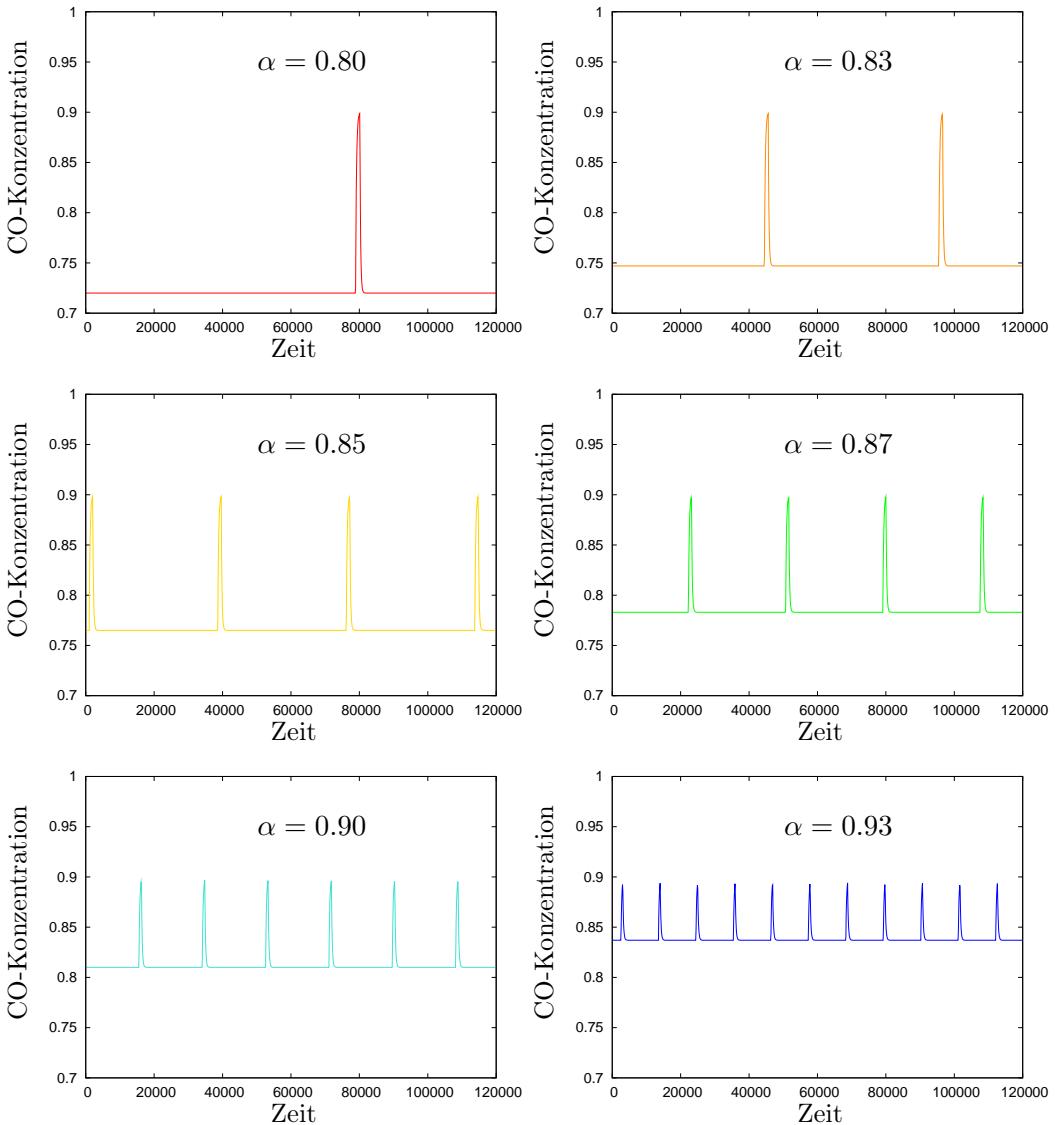


Abbildung 7.4: Zeitreihen der CO-Konzentration für einen einzelnen Oszillator für verschiedene Flussraten α .

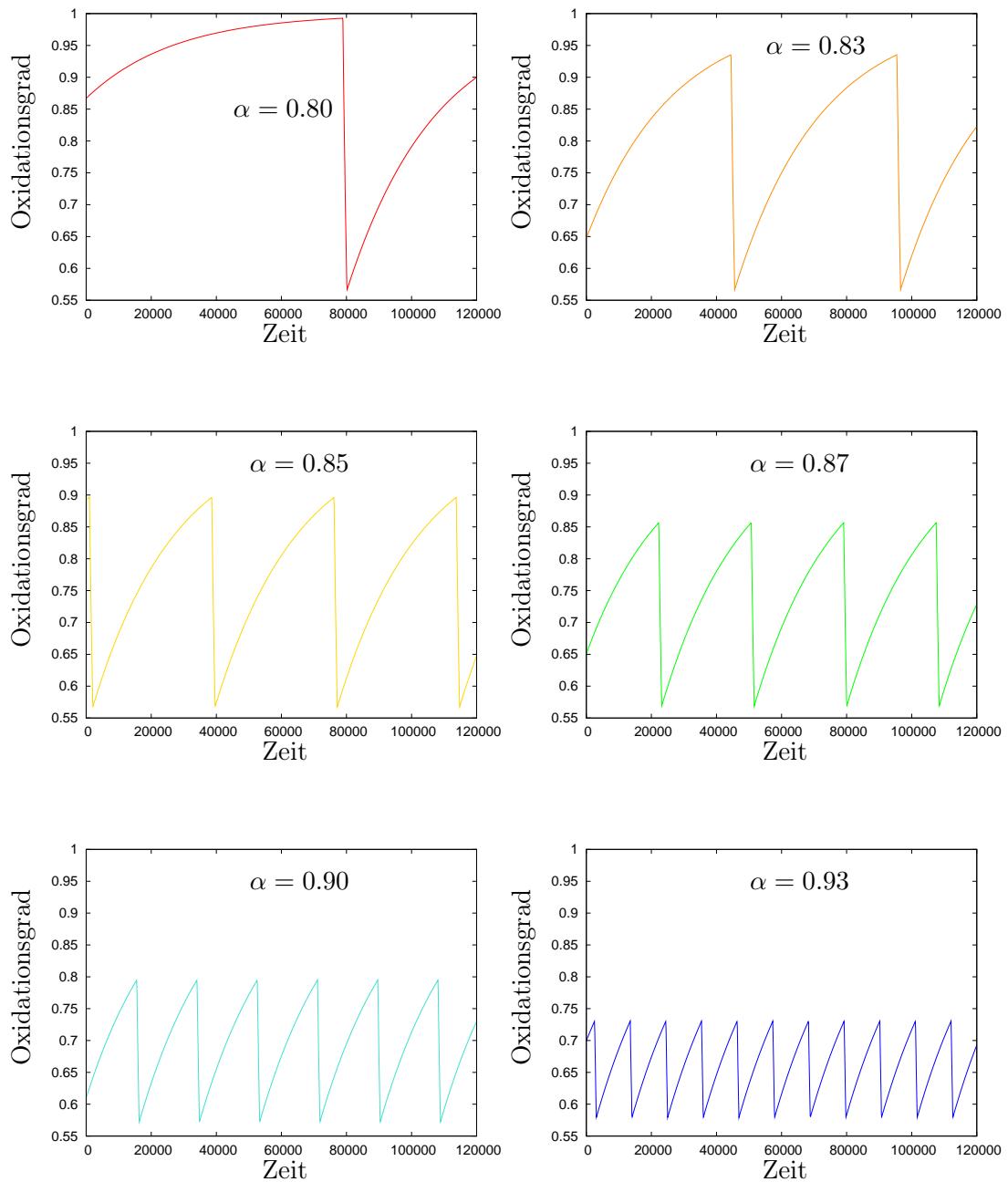


Abbildung 7.5: Zeitreihen des Oxidationsgrades für einen einzelnen Oszillatör für verschiedene α .

7.2 N gekoppelte Oszillatoren

7.2.1 $N=10$ gekoppelte Oszillatoren

Im Folgenden werden $N = 10$ gekoppelte Oszillatoren betrachtet, da bei dieser Zahl sowohl alle qualitativ wichtigen Merkmale beobachtbar sind, als auch die Dynamik im Einzelnen noch halbwegs überblickbar ist. Man kann jeden dieser Oszillatoren jedoch als Vertreter einer Gruppe von Oszillatoren auffassen, die alle dieselbe Frequenz besitzen. Dabei wären diese Gruppen gleichmächtig, d.h. die vorkommenden Frequenzen wären gleichverteilt. Für die gewählten Parameter gilt:

$$Q = 3$$

$$y_0 = 0.9$$

$$\bar{\beta}_i = 0.01 \left[1 - \frac{(N-2)}{N^2} \cdot i \right] \cdot \alpha, \quad \beta_0 = 0.09$$

Diese Frequenzverteilung entspricht der in Abbildung 5.4 gezeigten.

Für die CO-Konzentration im Reaktor ergeben sich die folgenden Zeitreihen (siehe Abbildung 7.7). Wie im Fall des einzelnen Oszillators treten große Ausreißer auf, deren Frequenz mit wachsender Flussrate α wächst. Zusätzlich tauchen jedoch als „Vorboten“ kleinere Ausreißer auf, die sich für kleine Flussraten als kleine Fluktuationen in der Nähe der Grundlinie ankündigen, und mit wachsender Flussrate immer ausgeprägter werden. Die Komplexität der betrachteten Muster nimmt dabei zu, diesen kleinen Ausreißern gehen noch kleinere voran (siehe Abbildung 7.6).

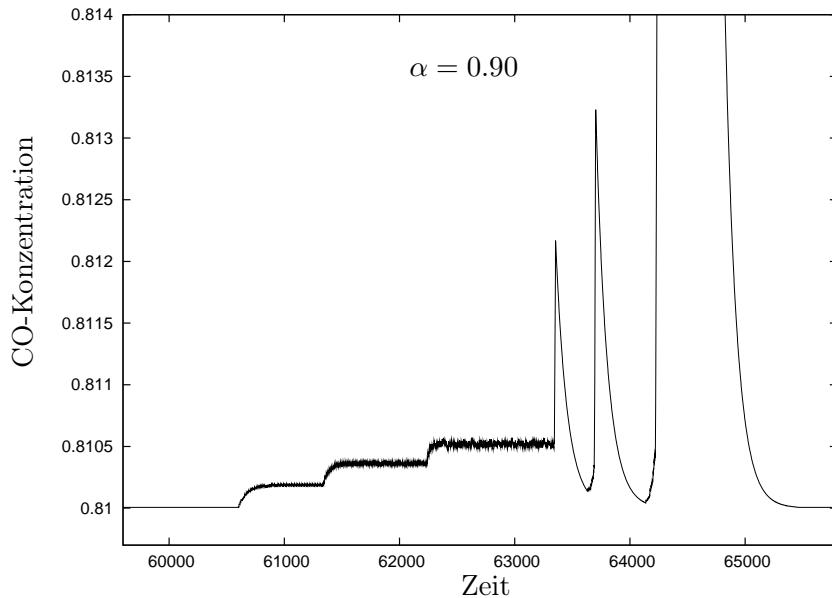


Abbildung 7.6: Einem der großen Ausreißer vorangehende kleine Ausreißer für $\alpha = 0.90$.

Wie im Fall eines einzelnen Oszillators wandert die Grundlinie mit wachsender Flussrate α nach oben, die maximale CO-Umsatzrate im Reaktor nimmt also ab.

Blättert man zurück und vergleicht die numerisch berechneten Zeitreihen mit den experimentell ermittelten (siehe Abbildung 5.1), so stellt man fest, dass diese vier Charakteristika für wachsende Flussrate α , sprich

- die Zunahme der Frequenz der großen Einbrüche,
- das Auftauchen von kleinen Ausreißern, deren Amplitude wächst,
- die Zunahme der Komplexität der beobachteten Muster, sowie
- die Abnahme der maximalen CO-Umsatzrate,

exakt die Merkmale sind, die auch im Experiment beobachtet wurden. Mit anderen Worten, unsere Rechnungen mit nur $N = 10$ Oszillatoren, von denen jeder für eine von gleichmächtige Gruppen von Oszillatoren mit gleicher Frequenz stehen kann, zeigen qualitativ dieselbe Ergebnisse, wie im Experiment bestimmt.

Woher jedoch kommen die zusätzlichen Ausreißer? Warum nimmt ihre Amplitude mit wachsendem α zu? Was passiert genau, wenn man die Oszillatoren koppelt?

Um diese Fragen beantworten zu können, betrachten wir die auftretenden Grenzzyklen und Zeitreihen für den Oxidationsgrad der Oszillatoren des gekoppelten Systems und vergleichen diese mit denjenigen des ungekoppelten Systems.

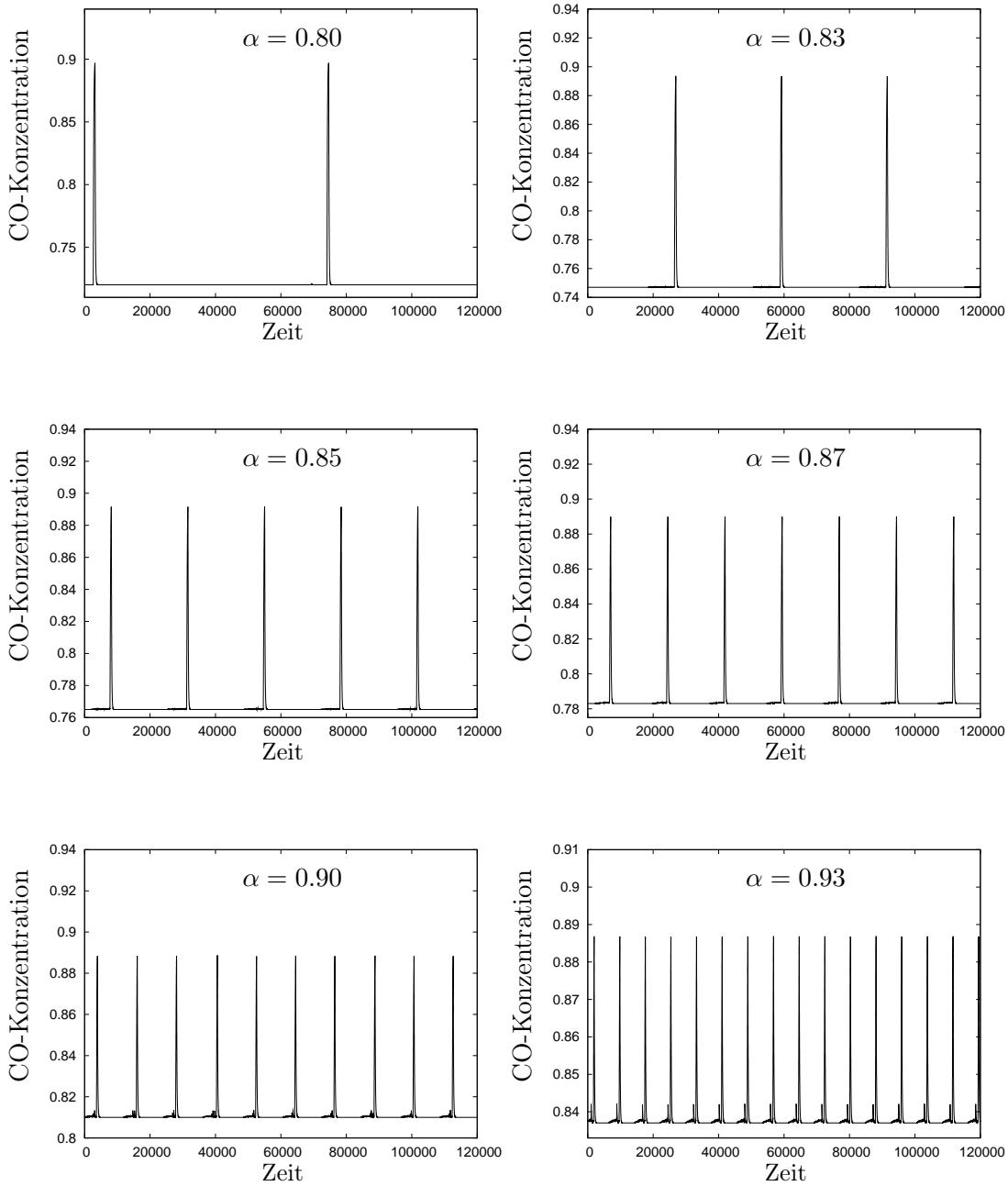


Abbildung 7.7: CO-Zeitreihen des gekoppelten Systems für $N = 10$ und für verschiedene Flussraten α .

Grenzzyklen des ungekoppelten Systems

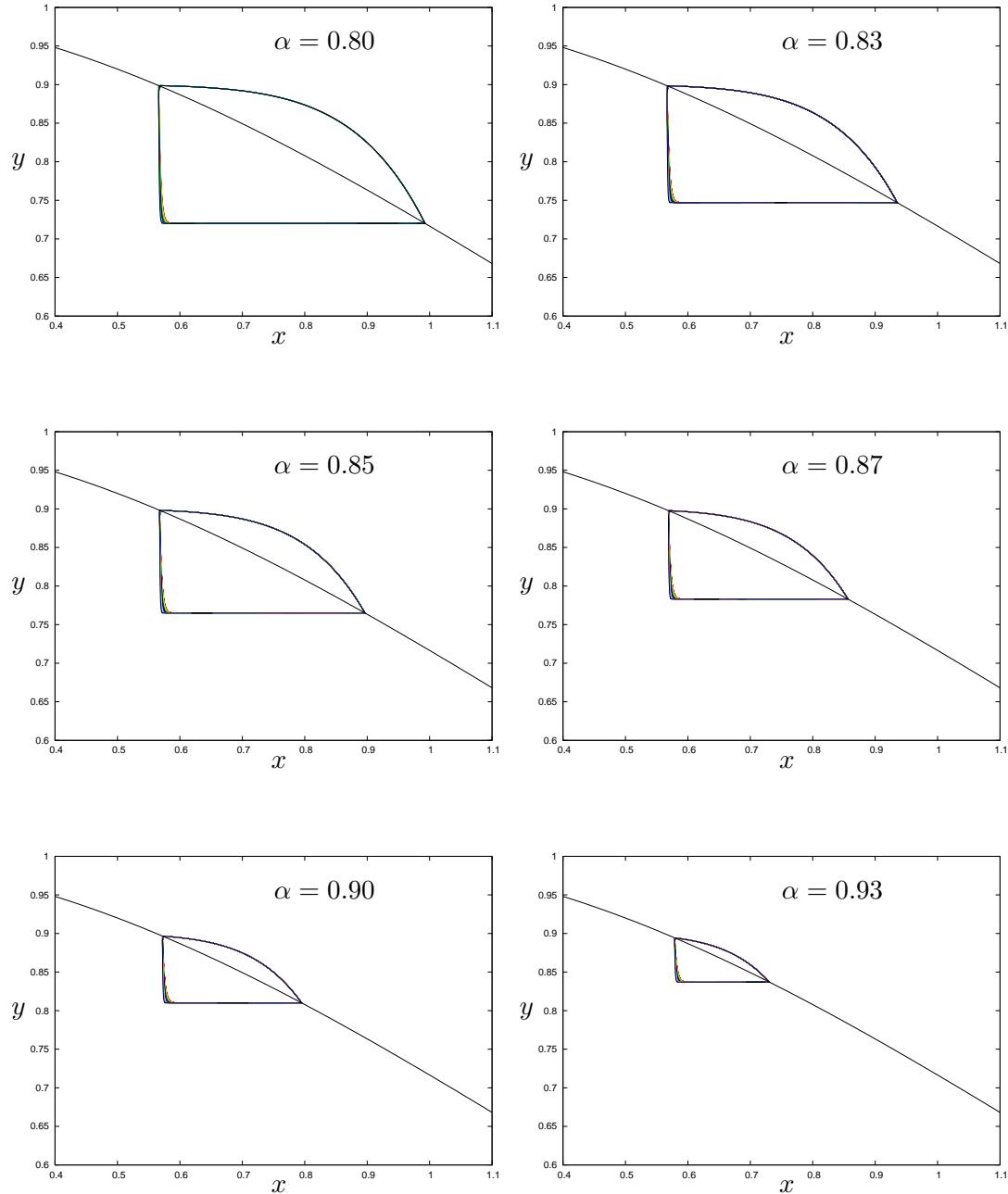


Abbildung 7.8: Grenzzyklen des ungekoppelten Systems für verschiedene Flussraten α .

Abbildung 7.8 zeigt die Grenzzyklen von $N = 10$ Oszillatoren für verschiedene Flussraten α . Sie besitzen die gleichen Frequenzen $\bar{\beta}_i$ wie oben angegeben, sind jedoch nicht über y gekoppelt, d.h. jeder der Oszillatoren bestimmt die Dynamik einer eigenen y -Komponente. Wie man erkennen kann, stimmen die Grenzzyklen für alle $N = 10$ Oszillatoren für alle α bis auf einen kleinen Bereich unten links überein, hier fächern die Trajektorien aufgrund der unterschiedlichen Frequenzen $\bar{\beta}_i$ in x -Richtung auf (siehe Abbildung 7.9), denn die Dynamik in x -Richtung ist hier gegeben über

$$\dot{x}_i = (1 - x) \cdot \bar{\beta}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.4)$$

Außerdem werden die Grenzzyklen aufgrund der unterschiedlichen Frequenzen $\bar{\beta}_i$ natürlich unterschiedlich schnell durchlaufen, und dass aufgrund der fehlenden Kopplung völlig unabhängig voneinander - in der Abbildung des Grenzzyklus gehen die Informationen über die zeitliche Entwicklung verloren.

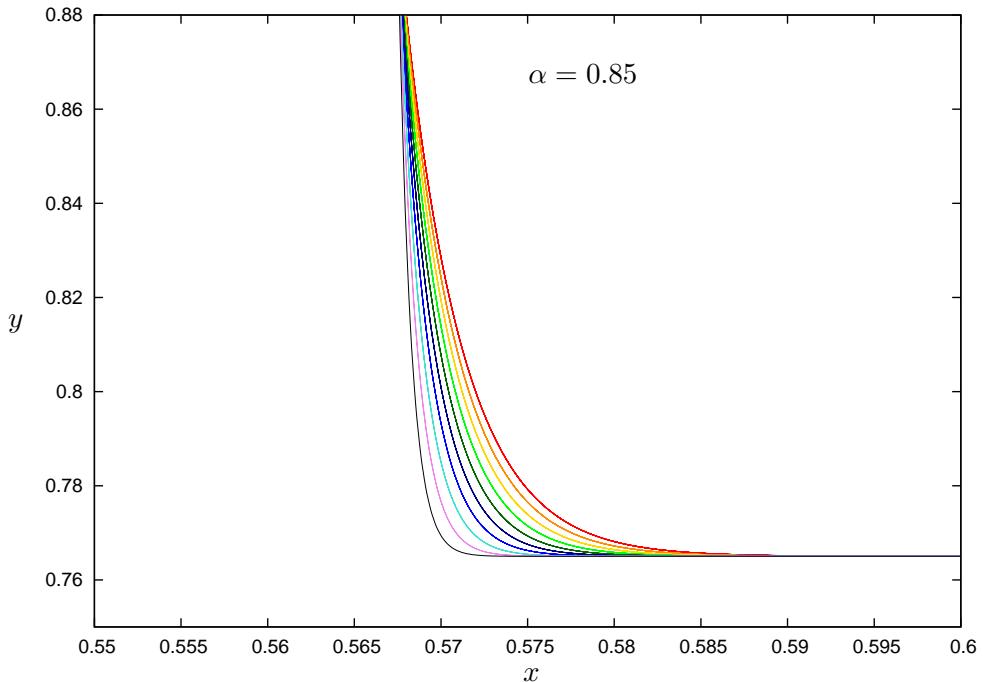


Abbildung 7.9: Grenzzyklen des ungekoppelten Systems: Auffächern der Trajektorien für $\alpha = 0.85$. Der Grenzzyklus des schnellsten Oszillators ist dabei durch die Farbe rot gekennzeichnet, der zweitschnellste durch die Farbe orange usw. Der langsamste Oszillator ist an der Farbe schwarz erkennbar. Das hier verwendete Farbschema setzt sich im gesamten Kapitel fort.

In Abbildung 7.10 sind für die gleichen Werte des Parameters α wie im ungekoppelten Fall jeweils die Grenzzyklen für $N = 10$ gekoppelte Oszillatoren aufgezeichnet. Hierbei handelt es sich um die Grenzzyklen, die zu den y -Zeitreihen in Abbildung 7.7 gehören.

Grenzzyklen des gekoppelten Systems

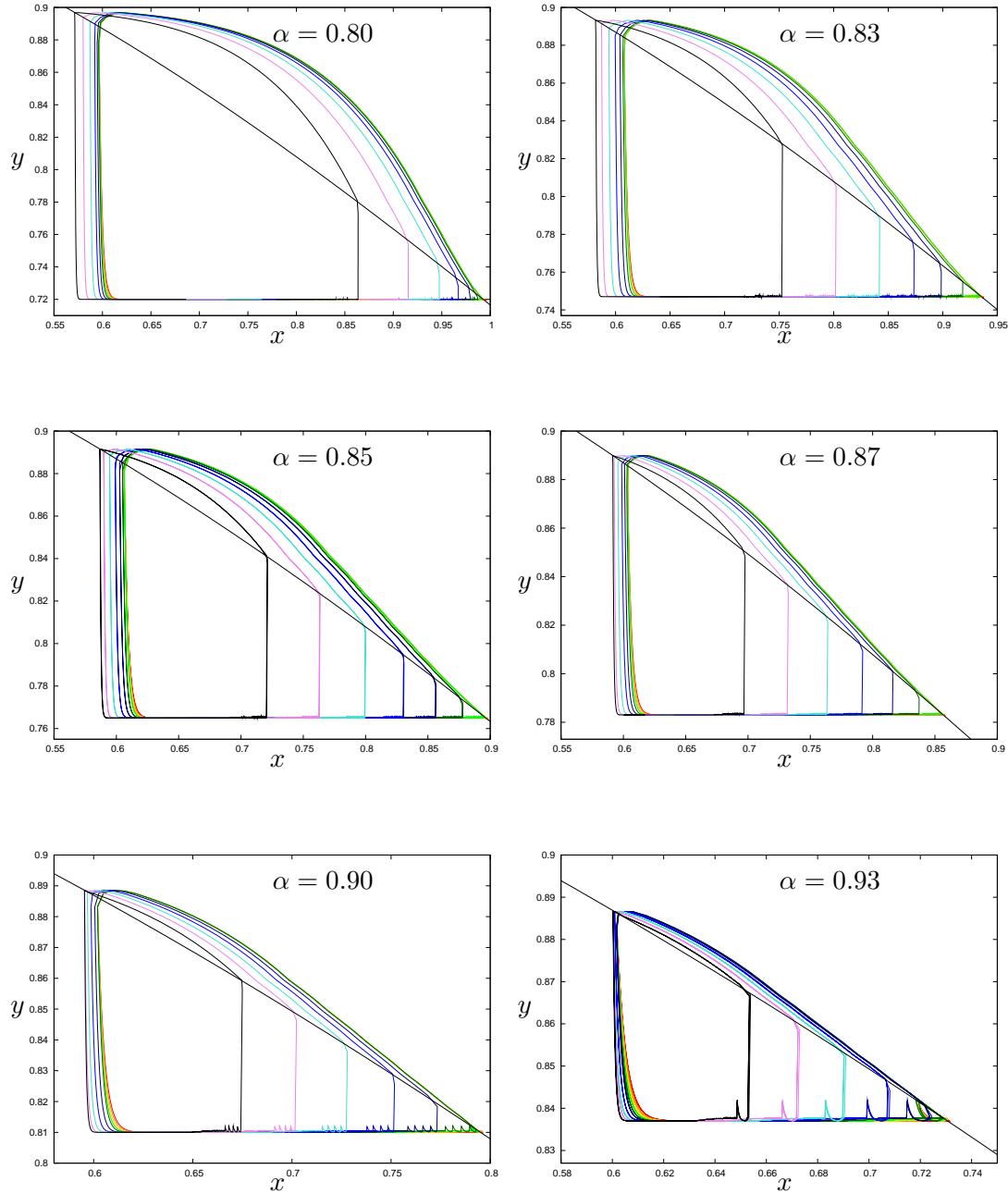


Abbildung 7.10: Grenzzyklen des gekoppelten Systems für verschiedene Flussraten α .

Dem ersten Eindruck nach scheinen die Grenzzyklen der schnellen Oszillatoren relativ wenig berührt durch die Kopplung, wohingegen die langsameren Oszillatoren stark beeinflusst werden und von der Dynamik des ungekoppelten Systems heftig abweichen. Wie das mit ersten Eindrücken so oft der Fall ist, ist er nicht völlig falsch, jedoch auch nicht völlig richtig. Wir greifen zur genaueren Betrachtung den Fall $\alpha = 0.90$ heraus (siehe Abbildung 7.11).

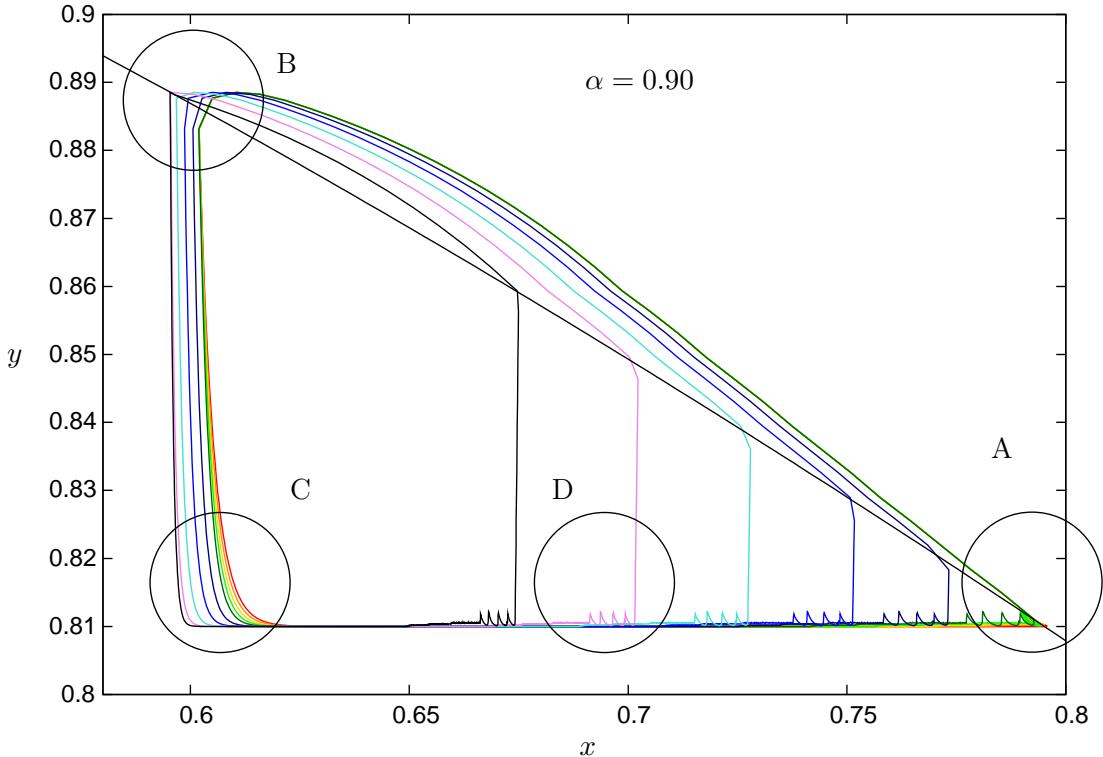


Abbildung 7.11: Grenzzyklen des gekoppelten Systems für $\alpha = 0.90$.

Versucht man die Dynamik des Systems zu charakterisieren, so kann man vier unterschiedliche Bereiche A, B, C und D herausgreifen.:

- Bereich A: In diesem Bereich wechseln die schnelleren Oszillatoren in den passiven Zustand, scheinbar recht unbeeinflusst von den restlichen Oszillatoren.
- Bereich B: Alle Oszillatoren wechseln hier vom passiven in den aktiven Zustand, wobei sich allerdings der Verlauf der Trajektorien deutlich von dem im ungekoppelten Fall unterscheidet, die schnelleren Oszillatoren wechseln vorzeitig in den aktiven Bereich.
- Bereich C: Diese Dynamik kennen wir bereits vom ungekoppelten System: infolge der unterschiedlichen Frequenzen $\bar{\beta}_i$ fächern die Grenzzyklen auf. Es ist allerdings

anzumerken, dass die Trajektorien schon direkt nach dem Eintreten in den aktiven Bereich stärker aufgefächert sind, als dies beim ungekoppelten System der Fall war.

- Bereich D: Die langsameren der Oszillatoren durchlaufen nicht ihre vollständigen Grenzzyklen des ungekoppelten Systems, sondern werden vorzeitig in den passiven Bereich hinübergerissen.

Ich werde nun der Reihe nach die Dynamik in den vier Bereichen diskutieren. Dabei beginne ich mit dem Bereich A.

Dynamik im Bereich A

Der Parameter α sei nun als $\alpha = 0.80$ gewählt. Betrachtet man die Zeitreihe für die CO-Konzentration für diesen Parameter-Wert, so deutet alles auf ein sehr reguläres, einfaches Verhalten hin (siehe Abbildung 7.7). Vergrößert man für $\alpha = 0.80$ den Ausschnitt A des zugehörigen Grenzzyklen-Diagramms (siehe Abbildung 7.10), erhält man die folgende Abbildung 7.12.

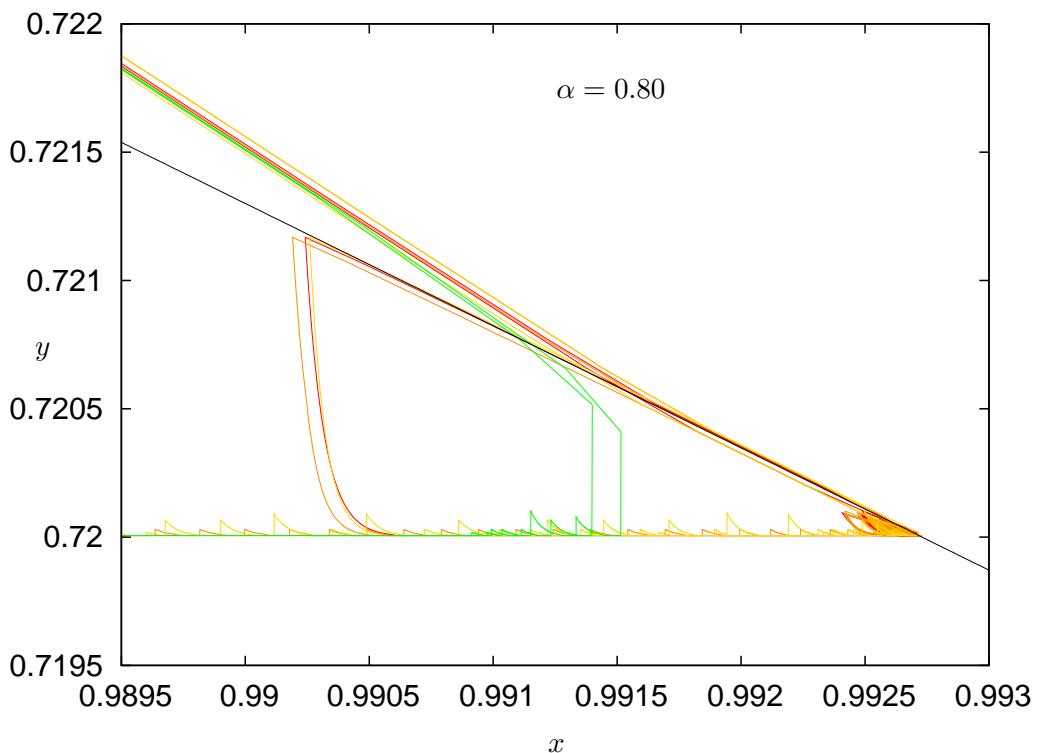


Abbildung 7.12: Vergrößerung des Ausschnittes A für $\alpha = 0.80$.

Entgegen des ersten Eindruckes, dass die Grenzzyklen der schnelleren Oszillatoren von der Kopplung kaum beeinflusst werden, zeigt sich also selbst im Bereich einer niedrigen Flussrate α ein komplexes Verhalten: man kann unter Anderem zusätzliche Durchschwinger der ersten drei Teilchen beobachten, sowie viele kleine Schwinger in der Nähe der Grundlinie.

Um diese Dynamik genauer verstehen zu können, betrachten wir die berechneten Zeitreihen für den Oxidationsgrad der einzelnen Teilchen, d.h. der x -Koordinate der Oszillatoren (siehe Abbildung 7.13).

Dabei lassen sich mehrere Beobachtungen machen:

- Es gibt eine gewisse Grundfrequenz, die jeweils die großen Zusammenbrüche in den Zeitreihen kennzeichnet, d.h. den *gemeinsamen* Wechsel in den passiven Bereich, man kann also von *Synchronisation* der Oszillatoren sprechen.
- Diese Grundfrequenz ist *nicht* durch die natürliche Frequenz β_1 des ersten, d.h. des schnellsten Teilchens gegeben, wie sich aus dem Vergleich mit Zeitreihen des ungekoppelten Systems ergibt. Es scheint vielmehr so zu sein, dass insbesondere das erste Teilchen sich übermäßig lange in der Nähe eines x -Wertes aufhält, bis es endlich in den passiven Bereich wechselt. Dieses manifestiert sich im Auftreten gewisser Plateaus.

Wir werden nun untersuchen, wodurch die gemeinsame Grundfrequenz zustande kommt bzw. wie die beobachtbaren Plateaus entstehen.

Vergrößert man in Abbildung 7.13 jeweils den Bereich eines Plateaus, gelangt man zur Abbildung 7.14.

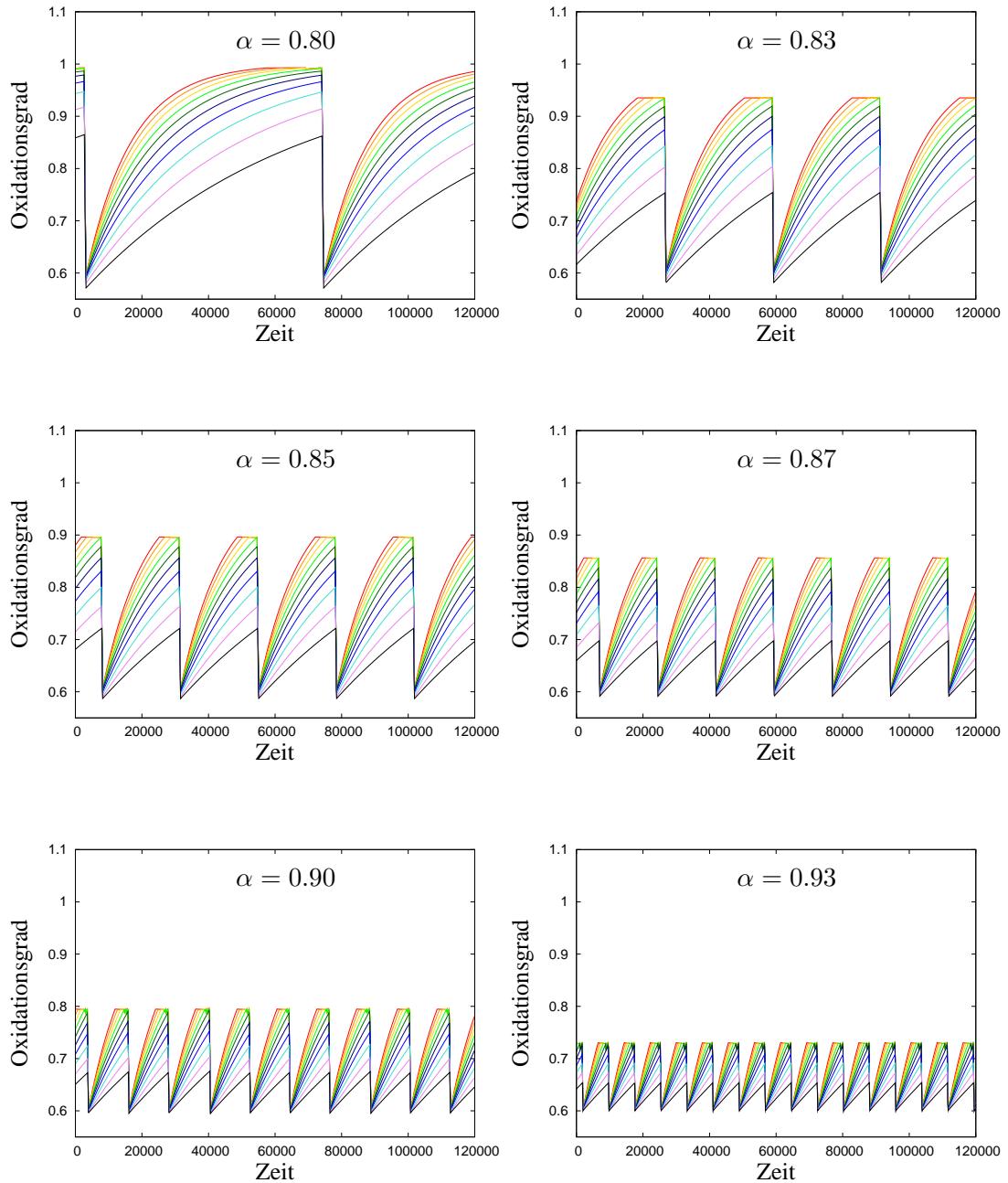


Abbildung 7.13: Zeitreihen für den Oxidationsgrad der Teilchen für verschiedene Flussraten.

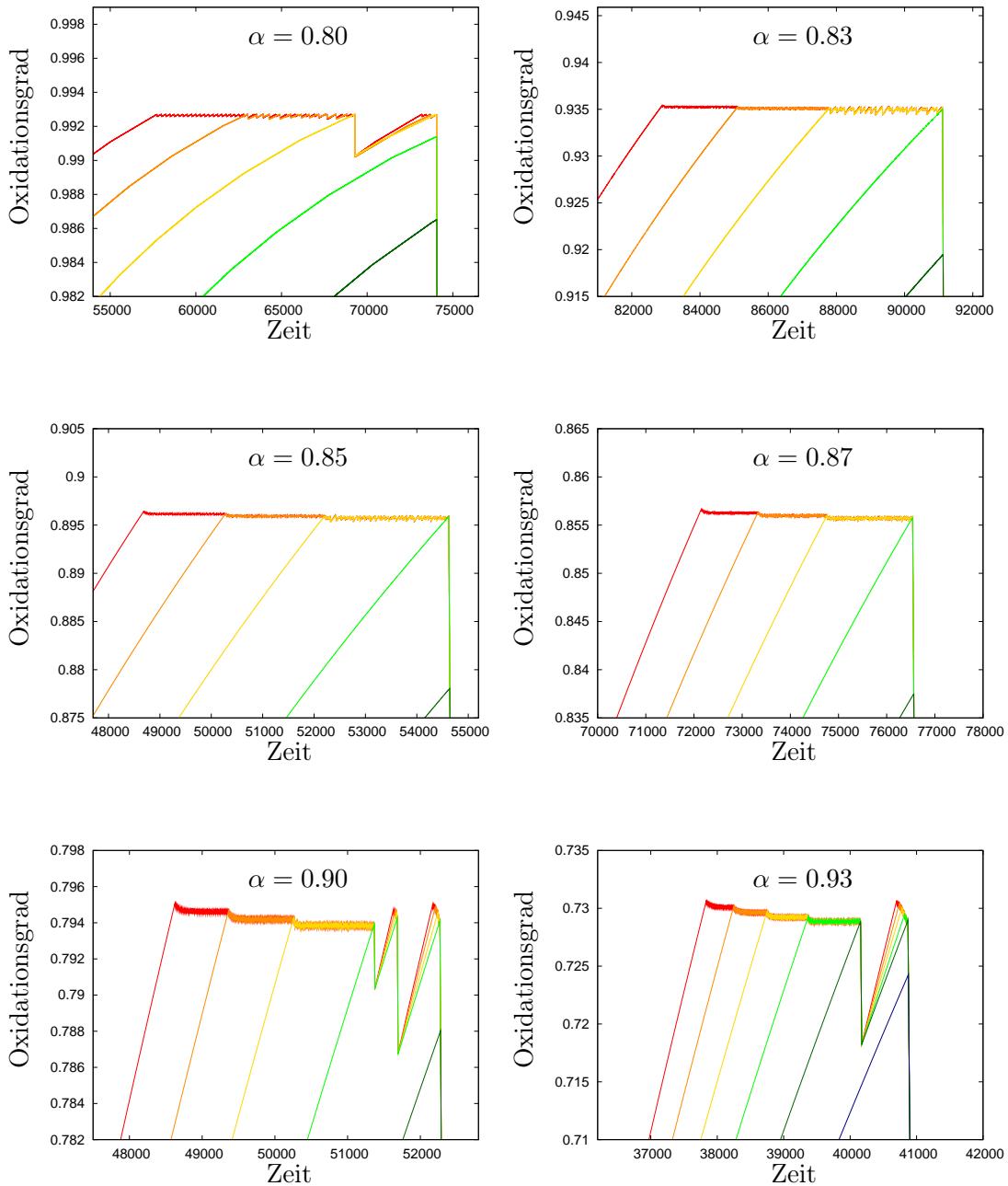


Abbildung 7.14: Zeitreihen für den Oxidationsgrad der Teilchen für verschiedene Flussraten α (Vergrößerung je eines Plateaus).

Greifen wir uns wiederum den Wert $\alpha = 0.80$ heraus.

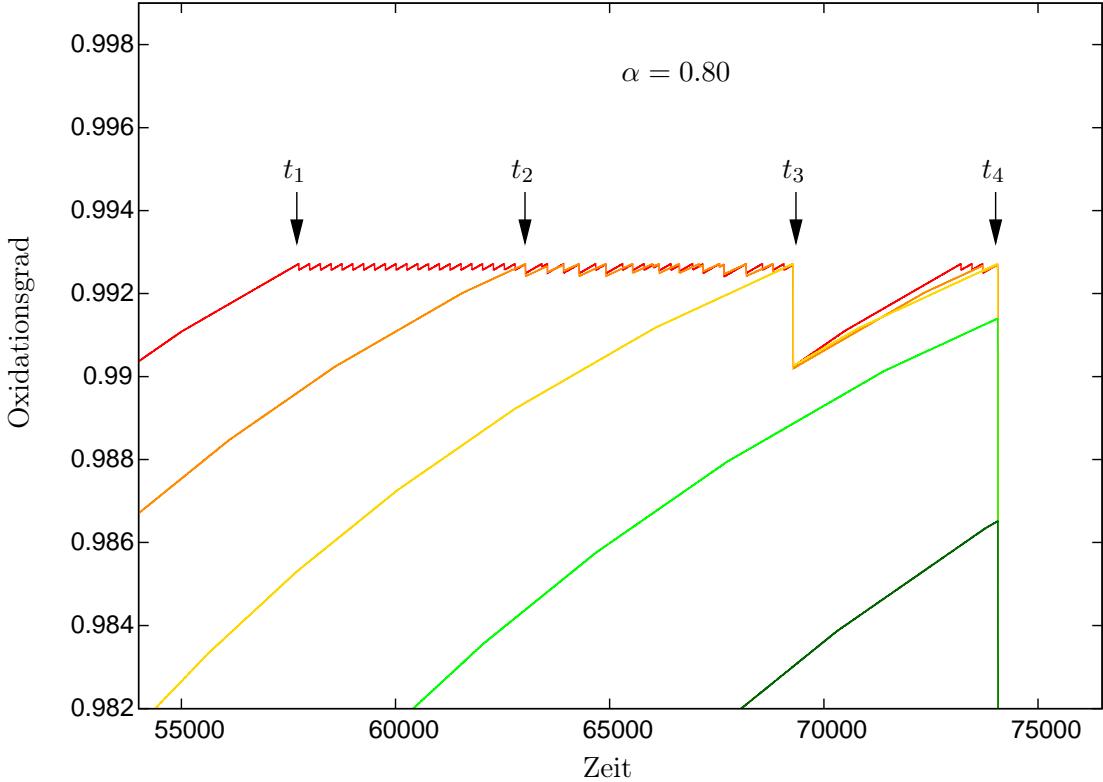


Abbildung 7.15: Zusammenbruchskaskade für $\alpha = 0.80$

Zu einem Zeitpunkt t_1 , der durch die natürliche Frequenz $\bar{\beta}_1$ gegeben ist, gelangt das erste Teilchen an die Phasengrenze, die den aktiven und den passiven Bereich voneinander trennt:

$$e^{-(x_1(t_1))^2/Q} = y(t_1). \quad (7.5)$$

Es wechselt in den passiven Zustand, dadurch steigt y an. Gleichzeitig jedoch befinden sich noch $N - 1$ Teilchen im aktiven Bereich, die dafür sorgen, dass y wieder sinkt (bis minimal auf den Wert αy_0). Dadurch wird das erste Teilchen „gegen seinen Willen“ wieder zurück in den aktiven Bereich gezogen. x_1 wächst erneut an, bis das erste Teilchen wieder an die Phasengrenze gelangt. Es wechselt erneut in den passiven Bereich, y steigt an. Es befinden sich aber immer noch $N - 1$ Teilchen im aktiven Bereich, die dafür sorgen, dass y wieder sinkt. Das erste Teilchen wird wiederum zurück in den aktiven Bereich gezogen, und das Spiel beginnt von Neuem.

Dieser schnelle, periodische Wechsel zwischen aktivem und passivem Bereich währt so lange, bis das zweite Teilchen zu einem Zeitpunkt t_2 , der durch die natürliche Frequenz

$\bar{\beta}_2$ des zweiten Teilchens bestimmt ist, ebenfalls an die Phasengrenze gelangt,

$$e^{-(x_2(t_2))^2/Q} = y(t_2), \quad (7.6)$$

und sich am Vorgang beteiligt. Auch das zweite Teilchen läuft bis zur Phasengrenze, wechselt in den passiven Bereich, wodurch wiederum y anwächst. Noch immer jedoch befinden sich mindestens $N - 2$ Teilchen im aktiven Bereich, wodurch y wieder sinkt, und Teilchen 2 in den aktiven Bereich zurückgezogen wird.

Es existieren demnach im Ganzen zwei miteinander konkurrierende Mechanismen, die die Dynamik von y bestimmen:

- Teilchen i , $i = 1, \dots, N$ befindet sich im aktiven Zustand: y sinkt.
- Teilchen j , $j = 1, \dots, N$ befindet sich im passiven Zustand: y wächst.

Wenn nun sowohl Teilchen 1 als auch Teilchen 2 *gleichzeitig* im passiven Bereich sind, haben sie gemeinsam ein höheres Gewicht, und y wächst stärker an als zuvor. Dadurch dauert es länger, bis die anderen $N - 2$ Teilchen y wieder so weit abgebaut haben, dass Teilchen 1 und Teilchen 2 in den aktiven Bereich zurückgezogen werden. In der Abbildung 7.15 äußert sich dieser Umstand darin, dass die zwei Teilchen (die ähnliche Frequenzen besitzen) im Durchschnitt tiefer fallen können als ein einzelnes Teilchen. Allerdings ist das Gewicht der $N - 2$ restlichen Teilchen immer noch zu hoch, als dass die zwei Teilchen genug Zeit hätten, einen kompletten Grenzyklus-Durchschwinger vollziehen zu können.

Nach einer Zeit t_3 , die durch die natürliche Frequenz $\bar{\beta}_3$ des dritten Teilchens gegeben ist, erreicht auch das dritte Teilchen die Phasengrenze, und wechselt in den passiven Bereich:

$$e^{-(x_3(t_3))^2/Q} = y(t_3). \quad (7.7)$$

Wir sehen in Abbildung 7.15, dass die drei Teilchen im Schnitt deutlich tiefer fallen und sogar einen etwas größeren Durchschwinger vollziehen, aber noch nicht genug Gewicht besitzen, um y so stark anwachsen zu lassen, dass auch die restlichen $N - 3$ Teilchen in den aktiven Bereich gezogen werden.

Letzteres schafft erst das vierte Teilchen, das nach einer Zeit t_4 , die durch die natürliche Frequenz $\bar{\beta}_4$ bestimmt ist die Phasengrenze erreicht:

$$e^{-(x_4(t_4))^2/Q} = y(t_4). \quad (7.8)$$

Genauer gesagt, erreicht das vierte Teilchen diese Grenze bei einem kleineren x -Wert, als es das im ungekoppelten Fall täte, weil durch die Dynamik der ersten drei Teilchen y im Durchschnitt etwas höher ist als αy_0 . Dieses gilt natürlich auch für Teilchen 2 und 3; auch diese erreichen die Phasengrenze minimal eher, als sie es im ungekoppelten Fall täten. Im Falle höherer Flussraten α erkennt man deutlicher, dass das Plateau aus mehreren Stufen besteht. Wechselt nun das vierte Teilchen zusammen mit den ersten drei

in den passiven Bereich, haben sie gemeinsam ein so hohes Gewicht, dass sie y so stark erhöhen können, dass in einer rapiden *Zusammenbruchskaskade* alle restlichen Teilchen mit in den passiven Bereich hinübergerissen werden.

Die angesprochene Grundfrequenz, der großen Zusammenbrüche in den x -Zeitreihen ist also bestimmt durch die Frequenz $\bar{\beta}_i$ des Teilchens, das die Zusammenbruchskaskade endgültig auslöst.

Untersucht man diese Kaskade für andere Parameterwerte α , so stellt man fest, dass für wachsendes α immer mehr Teilchen dazu kommen müssen, um die endgültige Zusammenbruchskaskade in Gang zu setzen (siehe Abbildung 7.14). In Abbildung 7.16 ist die Größe des Teilchens, das den endgültigen Zusammenbruch bringt, gegen die Flussrate α aufgetragen.

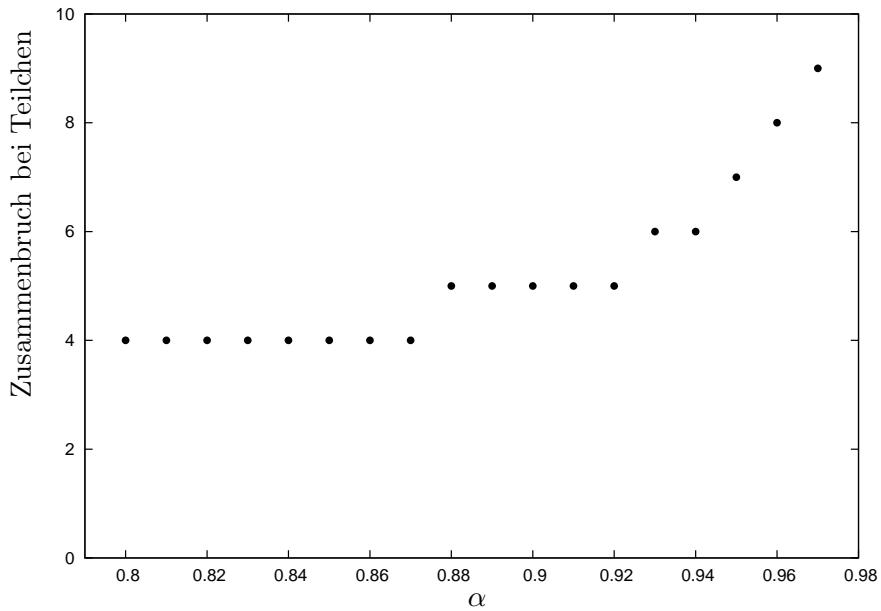


Abbildung 7.16: Abhängigkeit der Form der Zusammenbruchskaskade von α .

Es stellt sich natürlich die Frage, wodurch festgelegt ist, welches Teilchen den Zusammenbruch bringen kann.

Betrachten wir dazu erneut die Dynamik für y :

$$\dot{y} = -Iy + \alpha y_0 + \alpha(1 - I)y = f(y; I, \alpha) \quad (7.9)$$

$0 \leq I \leq 1$ ist dabei der Anteil der Teilchen im aktiven Bereich, $1 - I$ wäre also der Anteil der Teilchen im passiven Bereich.

Wechselt ein Teilchen in den passiven Bereich, so ist die Funktion f zunächst bis zu einem Wert \tilde{y} größer als Null, d.h. y nimmt zu (siehe Abbildung 7.17). Diese Nullstelle

\tilde{y} berechnet sich zu:

$$\dot{y}|_{y=\tilde{y}} = 0 \quad (7.10)$$

$$\Leftrightarrow -I\tilde{y} + \alpha y_0 + \alpha(1-I)\tilde{y} = 0 \quad (7.11)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{y} = \frac{\alpha y_0}{I + \alpha(1-I)} \quad (7.12)$$

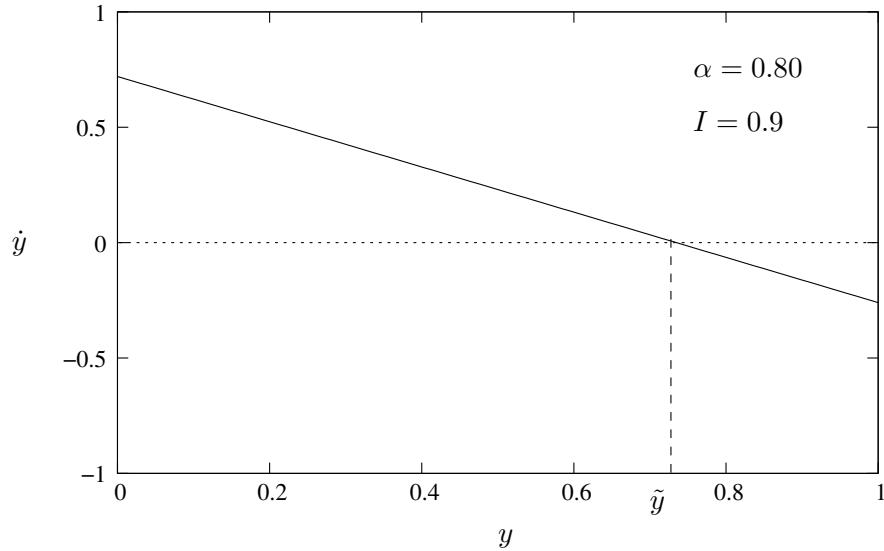


Abbildung 7.17: \dot{y} in Abhängigkeit von y für festes I und festes α .

\tilde{y} ist der Wert, bis zu dem y für festes α und festes I ansteigen kann. Damit die restlichen Teilchen direkt mit in den passiven Bereich gerissen werden können, muss I derart gewählt sein, dass \tilde{y} so groß ist, dass für alle Teilchen zu diesem Zeitpunkt gilt

$$e^{-x_i^2/Q} < \tilde{y}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.13)$$

und sie in den passiven Bereich hinuberwechseln.

Berechnet man jeweils für festes I den Wert \tilde{y} in Abhängigkeit von α , so stellt man fest, dass für eine wachsende Flussrate α die gleiche Anzahl von Teilchen im passiven Bereich einen höheren Wert \tilde{y} erreichen kann (siehe Abbildung 7.18). Oder anders ausgedrückt: je größer α ist, desto weniger Teilchen müssen in den passiven Bereich wechseln, um y auf den gleichen Wert \tilde{y} erhöhen zu können. Warum zeigen die numerischen Rechnungen dann, dass immer *mehr* Teilchen in den passiven Bereich wechseln müssen, damit die Zusammenbruchskaskade erfolgt?

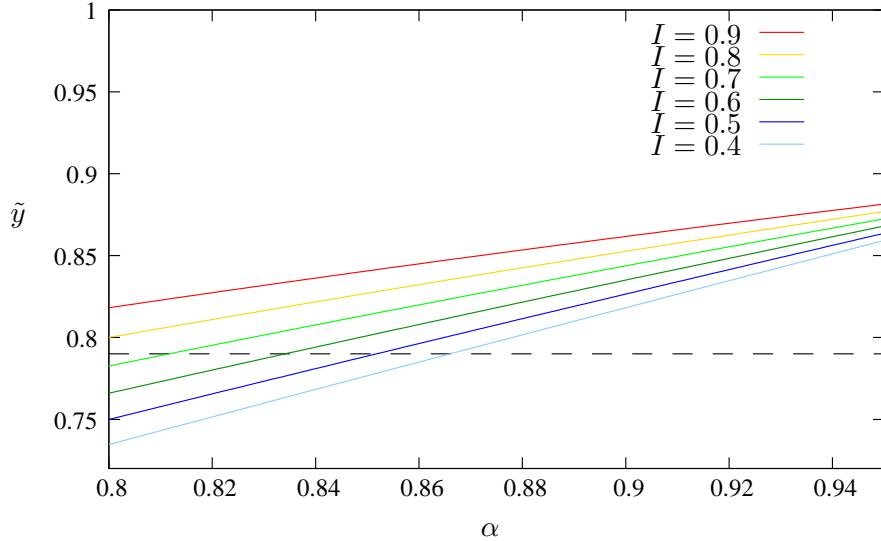


Abbildung 7.18: Maximaler Wert \tilde{y} für festes I in Abhängigkeit von α .

Der Grund hierfür, liegt darin, dass es noch einen zweite wichtige Größe gibt, die von der Flussrate α abhängt: die Frequenzen $\bar{\beta}_i$. Diese bestimmen die Geschwindigkeit der aktiven Oszillatoren in x -Richtung. Die Verteilung der Frequenzen $\bar{\beta}_i$ erfolgt gemäß einer Funktion $H(i, \alpha)$. Sowohl die Funktion $H(i, \alpha)$ also auch ihre Ableitung $\frac{\partial H}{\partial i}(i, \alpha)$ sind monoton wachsend in α . Das heißt, nicht nur die Frequenzen $\bar{\beta}_i$ nehmen mit wachsendem α zu, sondern insbesondere auch die *relativen Unterschiede* zwischen ihnen. Mit anderen Worten ausgedrückt: die langsamen Teilchen werden im Vergleich zu den schnellen immer langsamer. Für die Bewegung auf dem Grenzzyklus bedeutet das, dass, wenn die schnellsten Oszillatoren in den Bereich gelangen, wo sie in den passiven Zustand wechseln, die langsamsten Oszillatoren noch bei sehr kleinen x -Werten sind. Bei kleinen x -Werten liegt jedoch die Grenzkurve höher, d.h. y muss auf einen höheren Wert anwachsen, damit das langsamste Teilchen mit in den passiven Bereich hinübergezogen werden kann.

Obwohl demnach für größere Flussraten α weniger Teilchen in den passiven Bereich wechseln müssen, um y auf denselben Wert zu erhöhen, müssen im Ganzen gesehen effektiv mehr Teilchen in den passiven Bereich wechseln: es reicht nicht mehr, *denselben* y -Wert zu erreichen. Je mehr α anwächst, desto stärker dominieren die relativen Unterschiede zwischen den Frequenzen $\bar{\beta}_i$, und desto mehr Teilchen müssen folglich in den passiven Bereich wechseln, damit die Zusammenbruchskaskade erfolgt.

Dynamik im Bereich B

Wenden wir uns nun dem Bereich B zu (siehe Abbildung 7.11). Es handelt sich um das Gebiet, in dem die Teilchen erneut an die Phasengrenze gelangen, um vom passiven Bereich in den aktiven Bereich zu wechseln. In diesem Fall ist es das langsamste Teilchen, das zuerst in den aktiven Bereich wechselt. Dadurch sinkt y und das nächstschnellere Teilchen wird vorzeitig in den passiven Bereich gezogen, y nimmt weiter ab, und ein Teilchen nach dem anderen folgt. Der ganze Vorgang erfolgt innerhalb weniger Zeitschritte. Die Dynamik dieser gewissermaßen „inversen Zusammenbruchskaskade“ ist soviel einfacher als die beschriebene Zusammenbruchskaskade im Bereich C, weil die Oxidationsgrade der Teilchen (d.h. die x -Komponenten) hier sehr viel ähnlicher sind. Aus diesem Grund ist das langsamste Teilchen imstande, direkt das zweitlangsamste mitzuziehen, dies wiederum das nächstschnellere und so weiter (siehe Abbildung 7.19). Die „Knicke“ der Kurven kommen durch die Unstetigkeit der Ableitung an der Grenzlinie zustande: jedes Mal, wenn wieder ein Teilchen in den aktiven Bereich wechselt, macht \dot{y} einen Sprung.

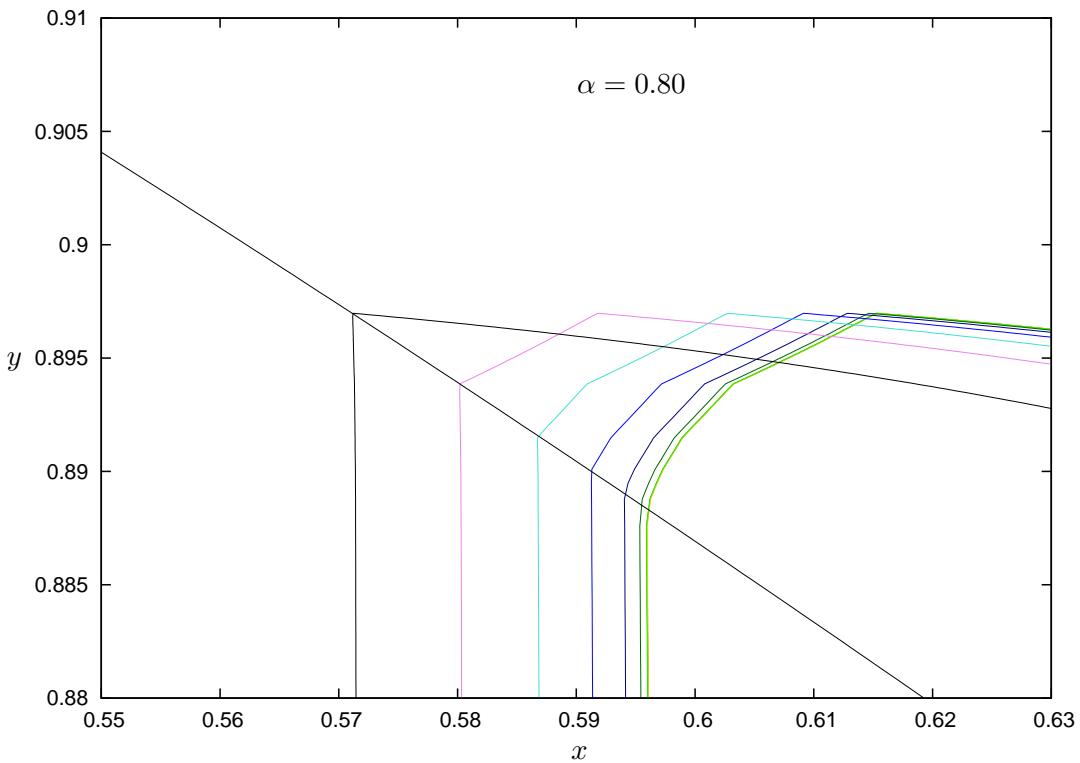


Abbildung 7.19: Vergrößerung des Ausschnittes D für $\alpha = 0.80$.

Dynamik im Bereich C

Nachdem die Dynamik im Bereich B verstanden ist, ist offensichtlich, warum die Trajektorien schon beim Eintreten in den aktiven Bereich stärker aufgefächert sind als es im Fall ungekoppelter Oszillatoren. Die Auffächerung wird im Bereich C durch die unterschiedlichen Geschwindigkeiten der Teilchen in x -Richtung verstärkt. Diese Geschwindigkeiten werden bestimmt durch die Frequenzen $\bar{\beta}_i$. Mit wachsender Flussrate nehmen die relativen Unterschiede zwischen den Frequenzen zu und die Auffächerung verstärkt sich.

Dynamik im Bereich D

Wie in Bereich A ausführlich untersucht, durchlaufen die langsamten Oszillatoren nicht ihre vollständigen Grenzzyklen wie im ungekoppelten System, sondern werden in einer Zusammenbruchskaskade vorzeitig mit in den passiven Bereich gerissen. Auf den Grenzzyklen entspricht das den Punkten, in denen die Phasenpunkte von der Nähe der Grundlinie senkrecht nach oben in den passiven Bereich springen. Die kleineren, ihnen vorangehenden Peaks kommen durch die Durchschwinger zustande, die die schnellen Oszillatoren durchführen, bevor der endgültige Zusammenbruch erfolgt. In Bezug auf die langsamten Oszillatoren haben diese Durchschwinger nur ein Anwachsen von y zu folge, die Dynamik in x -Richtung bleibt unbeeinflusst.

7.2.2 $N = 100$ gekoppelte Oszillatoren

Im Folgenden zeige ich Ergebnisse numerischer Rechnungen für $N = 100$ gekoppelter Oszillatoren. Die Parameter Q und y_0 sowie die Frequenzen waren gewählt als:

$$Q = 3$$

$$y_0 = 0.9$$

$$\bar{\beta}_i = 0.01 \left[1 - \frac{(N-2)}{N^2} \cdot i \right] \cdot \alpha, \quad \beta_0 = 0.09$$

Die Abbildungen 7.20 und 7.21 zeigen die CO-Konzentration als Funktion der Zeit für verschiedene Flussraten α .

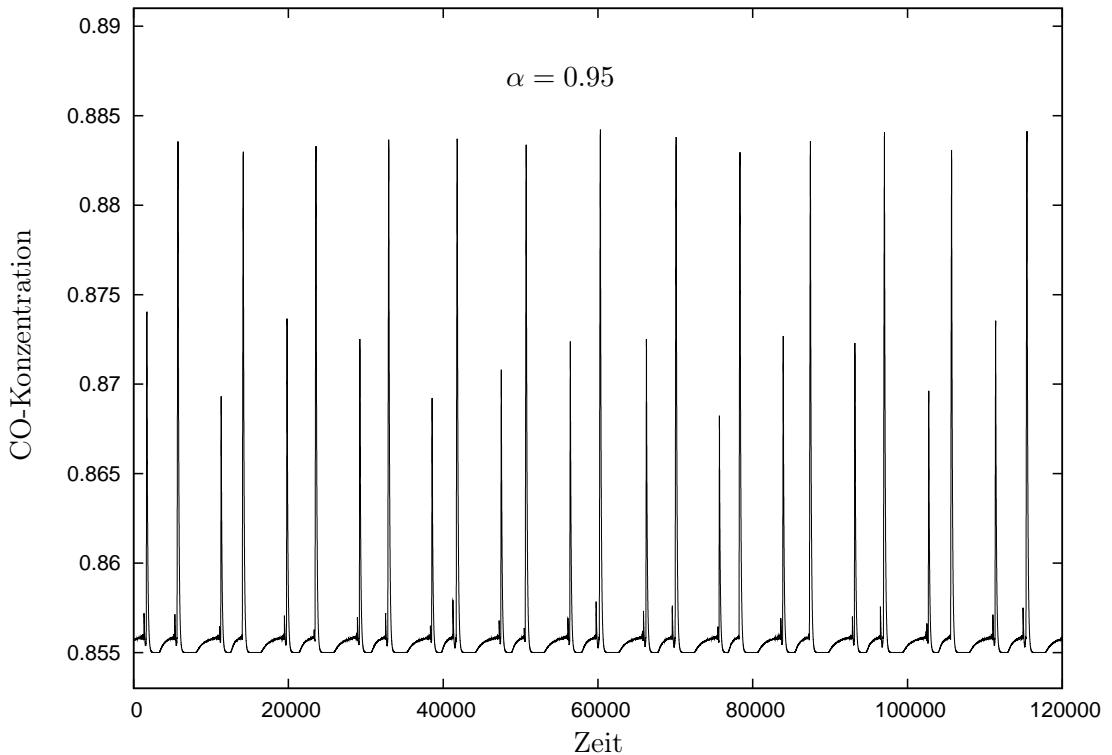


Abbildung 7.20: CO-Zeitreihen des gekoppelten Systems für $N = 100$ und $\alpha = 0.95$.

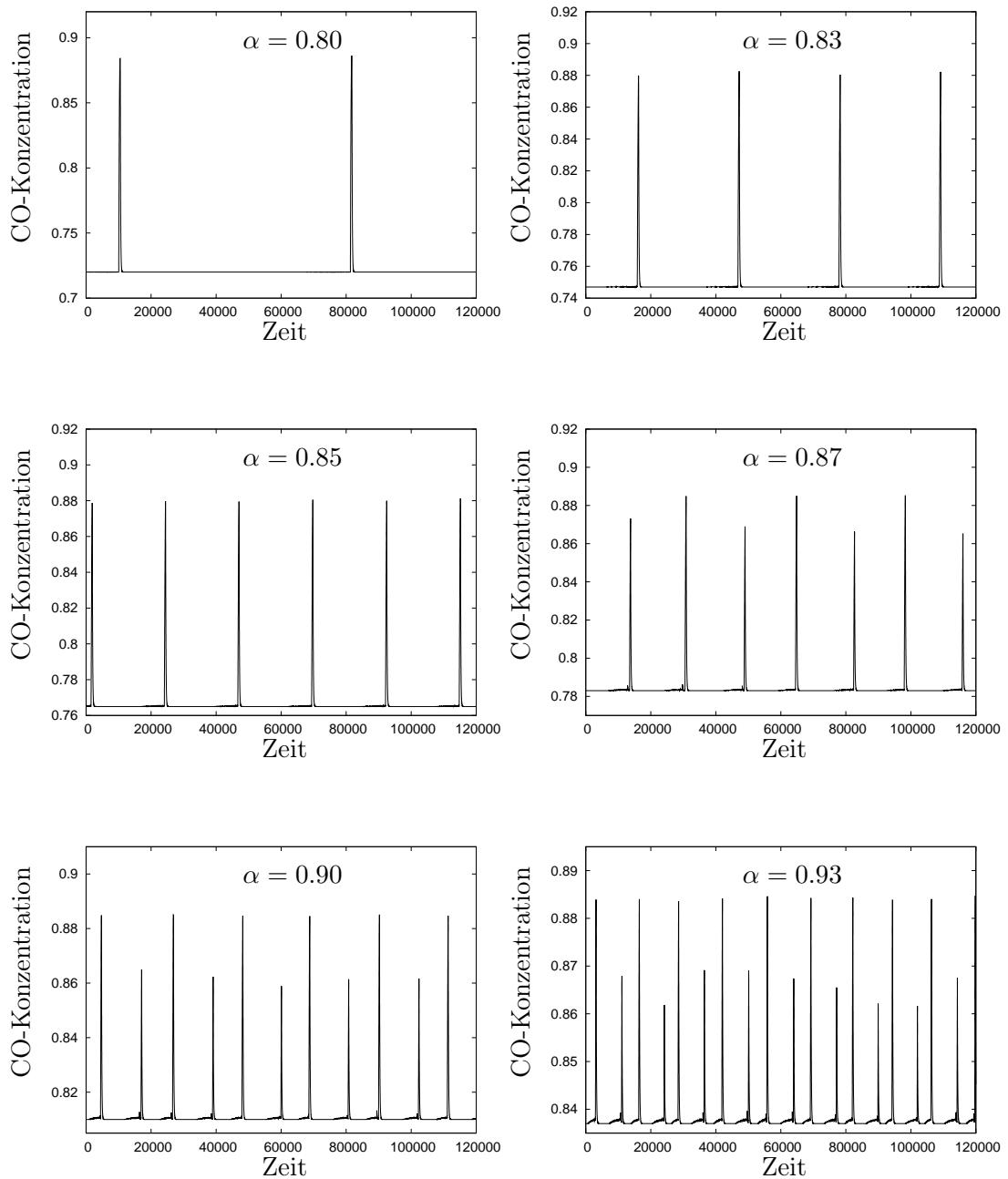


Abbildung 7.21: CO-Zeitreihen des gekoppelten Systems für $N = 100$ und für verschiedene Flussraten α .

Betrachtet man die y -Zeitreihen für $N = 100$ gekoppelte Oszillatoren für wachsende Flussraten α , so stellt man fest, dass die vier Charakteristika, die wir im Fall für $N = 10$ Teilchen beobachten konnten, auch hier gelten:

- Die Frequenz der großen Ausreißer nimmt zu.
- Es treten kleine Ausreißer als „Vorboten“ der großen Ausreißer auf, deren Amplitude mit steigendem α wächst.
- Die Komplexität der beobachteten Muster nimmt zu.
- Die Grundlinie wandert nach oben, d.h. die maximale CO-Umsatzrate nimmt ab.

Ein Umstand, der sich jedoch gegenüber dem Fall von $N = 10$ gekoppelten Oszillatoren deutlich verändert hat, ist das Auftreten „mittelgroßer“ Ausreißer für große α . Diese tauchen nicht zusätzlich auf, sondern treten vielmehr an die Stelle jedes zweiten großen Ausreißers. Untersucht man die Zeitreihen in Bezug auf den Anteil der Teilchen im aktiven bzw. im passiven Bereich, sieht man, dass diese mittelgroßen Ausreißer dadurch zustande kommen, dass etwa siebzig bis achtzig der hundert Teilchen in den passiven Bereich gewechselt sind.

Für $N = 100$ sind demnach anders als im Fall von zehn gekoppelten Oszillatoren Durchschwinger möglich, die auf einer deutlich wahrnehmbaren Skala stattfinden, sich aber dennoch merklich von den Einbrüchen des gesamten Ensembles unterscheiden. Dieses Phänomen kommt exakt durch die zwei Mechanismen zustande, die im vorangehenden Abschnitt für den Fall von $N = 10$ Oszillatoren erklärt worden sind:

Der erste die Dynamik prägende Mechanismus ist das Anwachsen von y , sobald ein Teilchen in den passiven Bereich wechselt. Dieses Anwachsen geschieht bis zu einem Wert \tilde{y} , der abhängt von I , d.h. dem Anteil der Teilchen im aktiven bzw. passiven Bereich, sowie der Flussrate α . Wir haben beobachtet, dass für festes I und wachsende Flussraten α der Wert \tilde{y} immer größer wird (siehe Abbildung 7.18).

Diesem ersten Mechanismus steht die Abhängigkeit der Frequenzen $\bar{\beta}_i$ von der Flussrate α gegenüber. Für wachsendes α nehmen nicht nur die Frequenzen, sondern auch die relativen Unterschiede zwischen ihnen zu, wie man in Abbildung 7.22 erkennen kann:

$$\bar{\beta}_i = 0.001 [1 - 0.0098 \cdot i] \alpha. \quad (7.14)$$

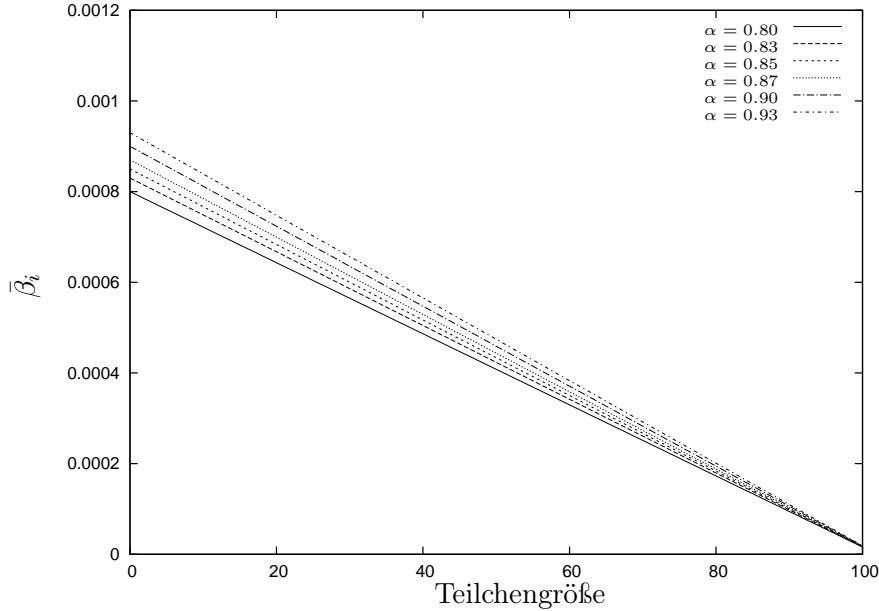


Abbildung 7.22: Verteilung der $\bar{\beta}_i$ in Abhängigkeit von der Teilchengröße i für feste Flussraten α und $N = 100$.

Abbildung 7.22 zeigt die Verteilung der $\bar{\beta}_i$ in Abhängigkeit von der Teilchengröße i für feste Flussraten α . Vergleicht man diese Abbildung mit Abbildung 5.4, wird erkennbar, wo die Unterschiede gegenüber der Frequenzverteilung im Fall $N = 10$ liegen: Wir haben nicht nur die Abstufungen der Frequenzen $\bar{\beta}_i$ verfeinert, sondern lassen auch langsamere Frequenzen zu als zuvor. Es sind diese langsamen Oszillatoren, die für große α , wenn die relativen Unterschiede zwischen den Frequenzen anwachsen, die mittelgroßen Ausreißer verursachen. Im Vergleich zu den schnellen Oszillatoren sind sie für große α so langsam, dass die zugehörigen x -Werte nur bei jedem zweiten Durchlauf der schnellen Oszillatoren hinreichend groß sind, so dass auch sie durch den ansteigenden y -Wert in den passiven Bereich mitgerissen werden können.

Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 7.23 ein Ausschnitt der x -Zeitreihen für das erste und das 91. Teilchen aufgetragen. Beim ersten Teilchen handelt es sich um das schnellste Teilchen des Ensembles, bei dem 91. um eines der langsamsten. Es ist deutlich erkennbar, dass das langsame Teilchen nur an jedem zweiten der großen Einbrüche beteiligt ist.

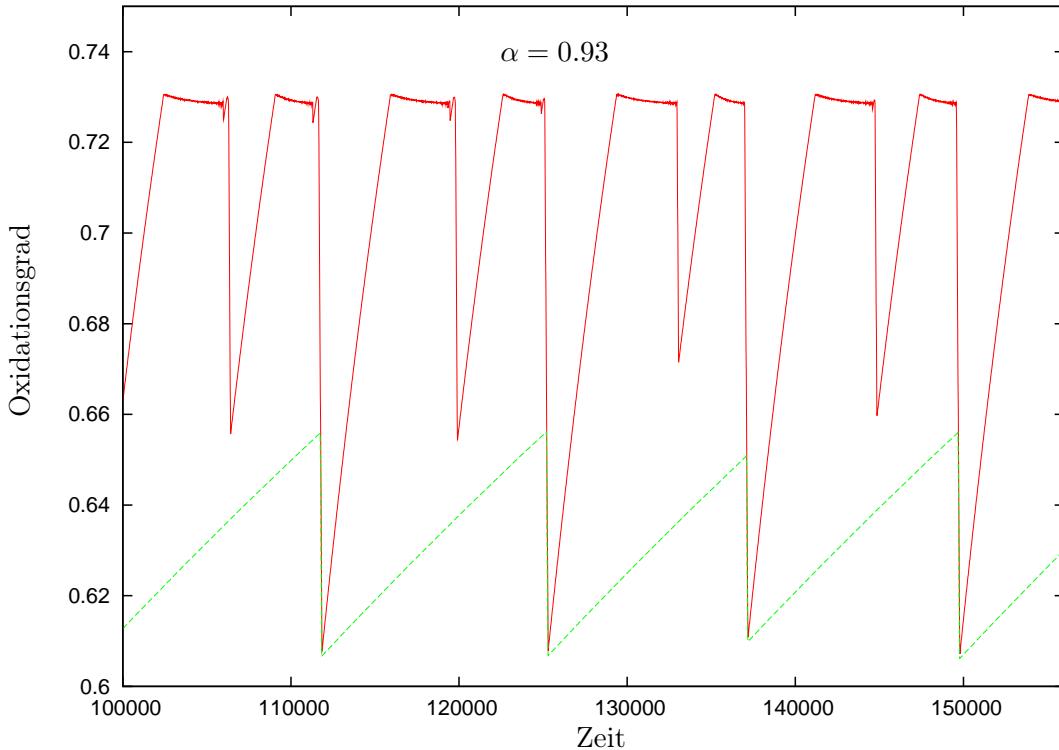


Abbildung 7.23: x -Zeitreihen für das erste und das 91. Teilchen für $\alpha = 0.93$.

Wir haben also verstanden, wie man über die Frequenzverteilung die Form der Ausreißer bestimmt. Erhöht man weiter N , oder allgemeiner gesprochen, die relativen Unterschiede zwischen den Frequenzen, wird es beispielsweise Oszillatoren geben, die im Vergleich zu den schnellen so langsam sind, dass sie nur jeden dritten der großen Durchläufe mitmachen. Wird der Zusammenhang zwischen den Frequenzen $\tilde{\beta}_i$ und der Teilchengröße i dabei weiterhin linear gewählt, gibt es aber bei hinreichend feiner Abstufung der Frequenzen ebenfalls Oszillatoren, die nur bei jedem zweiten Durchlauf mitgerissen werden. Dieses Verhältnis $1 : 2 : 3$ muss sich in Form von Quasiperiodizität in den Zeitreihen für y wiederspiegeln.

Um Verhältnisse ausschließlich der Form $1 : M$, $M > 2$, ohne Zwischenstufen $1 : L$, $L < M$, produzieren zu können, muss man die linearere Abhängigkeit der Funktion $H(i, \alpha = \text{konstant})$ von der Teilchengröße i aufgeben, was gewissermaßen einer unterschiedlichen Gewichtung der einzelnen Frequenzen gleichkommt:

Ist $\frac{\partial H}{\partial i}(i, \alpha = \text{konstant}) \neq \text{konstant}$, so gibt es Intervalle der Teilchengröße, in der die Frequenzen relativ zu einander ähnlicher sind als in anderen. Ist obige Ableitung in einem Interval $[j, k]$, $j, k \in \{1, \dots, N\}$ beispielsweise betragsmäßig sehr klein, d.h. $H(i, \alpha = \text{konstant}) \approx \tilde{\beta} = \text{konstant}$, so gibt es unter den N Oszillatoren $k - j + 1$ Oszillatoren, die alle die Frequenz $\tilde{\beta}$ besitzen (siehe Abbildung 7.24).

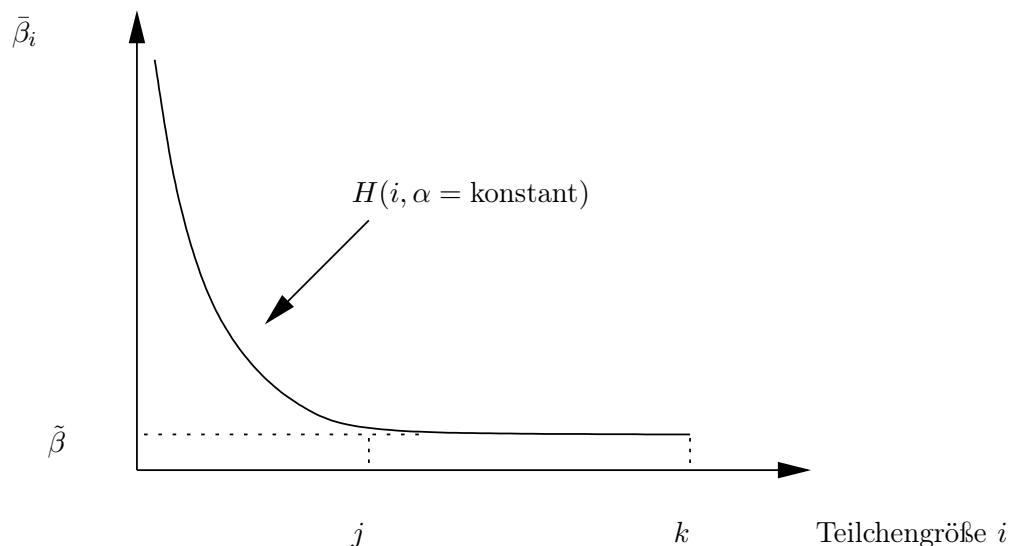


Abbildung 7.24: Auswirkung einer nichtlinearen Funktion $H(i, \alpha)$: $k - j + 1$ Oszillatoren besitzen dieselbe Frequenz $\tilde{\beta}$.

8 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Ensemble global gekoppelter Relaxationsoszillatoren modelliert und im Hinblick auf auftretende Synchronisation untersucht.

Die Motivation für die Modellierung ist dabei die Dynamik der CO-Oxidation an Pd-Trägerkatalysatoren [BP00]. Bei dieser Reaktion beobachtet man selbstaffine Muster in den Zeitreihen, die durch Einbrüche der CO-Umsatzrate gekennzeichnet sind. Diese Einbrüche können als Ausfälle des Katalysators verstanden werden, wobei kleine Einbrüche auf den Ausfall eines Teils des Katalysators hindeuten und große Einbrüche durch den Ausfall des gesamten Katalysators erklärt werden können; im Experiment liegt dieser Katalysator in Form nanometergroßer Palladium-Teilchen vor.

Fundament des Modells ist ein einzelner Oszillator, entsprechend einem einzelnen Katalysator -Teilchen, das zwischen einer katalytisch aktiven und einer katalytisch inaktiven Phase hin und her wechselt. Der zugehörige Phasenraum des Oszillators, der durch den Oxidationsgrad des Teilchens und die CO-Konzentration im Reaktor gegeben ist, wird durch eine Grenzlinie in zwei Bereiche unterschiedlichen dynamischen Verhaltens geteilt. Diese zwei Bereiche entsprechen dem aktiven respektive dem passiven Zustand. Die Zeitskalen, auf denen die Dynamik sich abspielt, sind in den beiden Bereichen sehr unterschiedlich, und die Bewegung des Phasenpunktes auf dem resultierenden Grenzzyklus ist durch den Wechsel aufeinander folgender langsamer und schneller Bewegungen gekennzeichnet. Der entscheidende Parameter des Systems ist die Flussrate α , die die verschiedenen auftretenden Geschwindigkeiten regelt.

Die Kopplung N solcher Oszillatoren erfolgt global über die Gasphase, d.h. die CO-Konzentration; es werden keine Nachbarschaftsrelationen angenommen. Die Frequenzen der betrachteten Oszillatoren sind nicht identisch, sondern folgen im aktiven Bereich einer hierarchischen Verteilung, entsprechend der hierarchischen Größenverteilung der modellierten Katalysator-Teilchen. Die genaue Form der Hierarchie hängt von dem Parameter α ab. Jeder einzelne Oszillator kann dabei als Vertreter einer Klasse von Oszillatoren aufgefasst werden, die alle dieselbe Frequenzen besitzen. Im passiven Bereich, in dem die schnelle Dynamik stattfindet, werden die Frequenzen aller Oszillatoren als gleich vorausgesetzt.

Numerische Rechnungen ergeben, dass bereits im Fall von $N = 10$ gekoppelten Oszillatoren das Modell im Stande ist, die Charakteristika der im Experiment beobachteten Einbrüche qualitativ wiederzugeben. Die großen Einbrüche entstehen dabei eindeutig durch Synchronisationseffekte, die sich im gemeinsamen Wechsel aller Oszillatoren in den

passiven Bereich niederschlagen. Anders als in älteren Veröffentlichungen [BP00, LPJ96] wird dabei in dieser Arbeit erstmals die Dynamik der Zusammenbruchskaskade, die zu den Einbrüchen führt, explizit untersucht, wobei mehrere miteinander konkurrierende Mechanismen aufgezeigt und erklärt werden. Dieses wird durch die anfängliche Beschränkung auf wenige Oszillatoren und wenige Parameter ermöglicht. Rechnungen mit größeren Zahlen von Oszillatoren führen schließlich zu einem tiefergehenden Verständnis, wie über die Verteilung der Frequenzen der Oszillatoren die genaue Form der Einbrüche gesteuert werden kann.

Obwohl durch ein spezielles Beispiel inspiriert, ist das resultierende Modell in seiner Einfachheit auf einen großen Kreis von Problemstellungen anwendbar; die Werte der einzelnen Parameter können jeweils mit Blick auf die zugrunde liegende Problematik angeglichen werden.

In Bezug auf den im Zusammenhang mit Relaxationsoszillationen äußerst populären integrate-and-fire-Oszillator [MS90] existieren zwei wesentliche konzeptionelle Unterschiede:

Der erste Unterschied liegt im Verhältnis der beiden Zeitskalen: Im hier entwickelten Modell ist dieses Verhältnis zwar groß, aber endlich. Die vereinfachte Modellierung des integrate-and-fire-Oszillators, die die Dynamik auf langsame Anstiege plus instantane Sprünge reduziert, ist streng genommen nur korrekt, wenn dieses Verhältnis als unendlich groß angenommen wird. Der zweite wesentliche Unterschied liegt in der Art der Kopplung: Im Falle der integrate-and-fire-Oszillatoren erfolgt die Kopplung über feste Pulse, in unserem Modell hingegen über eine zusätzliche Variable, die sowohl vom Zustand aller Oszillatoren abhängt als auch diesen wiederum selbst beeinflusst. Gewichtiger ist jedoch der Umstand, dass es bei der Kopplung der integrate-and-fire-Oszillatoren „Totzeiten“ gibt, in denen keine Wechselwirkung stattfindet. In unserem Modell erweist sich jedoch gerade die Wechselwirkung im Übergang zwischen aktivem und passivem Zustand, der in dem anderen Modell dem Zeitpunkt des Feuerns entspricht, als der die Dynamik prägende Bereich. Sind durch die vorliegende Problemstellung sowohl ein endliches Verhältnis der Zeitskalen als auch eine ununterbrochene Kopplung der Oszillatoren vorgegeben, so ist unser Modell dem integrate-and-fire-Ansatz vorzuziehen.

Beschränkungen des Modells liegen insbesondere in der Vernachlässigung räumlicher Beziehungen; allerdings liegt in dieser Vereinfachung auch eine seiner Stärken. Des Weiteren macht die Unstetigkeit der Ableitungen an der Grenzlinie eine weitergehende Analyse der in Kapitel 6 hergeleiteten analytischen Gleichungen für den Grenzyklus schwierig. Auch die Einführung von Phasen wird dadurch sehr unhandlich und wenig nützlich. Dies erschwert den Vergleich mit bereits vorhandenen Modellen, die sich allein mit der Phasendynamik befassen, wie dem Kuramoto-Modell [Kur84, Str00].

Unabhängig von diesen Gesichtspunkten liefert das Modell fundamentale Einblicke in die Mechanismen, die der CO-Oxidation an Palladium-Katalystoren zugrunde liegen.

8 Zusammenfassung

Ein Ansatzpunkt für weitere Untersuchungen wären numerische Simulationen mit weiteren Frequenzverteilungen, mit deren Hilfe unterschiedliche Größenverteilungen der Katalysator-Teilchen modelliert werden könnten. Sehr interessant wäre desweiteren die Untersuchung des Systems in Hinblick auf die Störanfälligkeit durch Rauschterme. Reale Systeme sind nie ganz von ihrer Umwelt isoliert und immer thermischen Fluktuationen ausgesetzt; das Einführen von Rauschtermen würde diesem Umstand besser gerecht werden und den Geltungsbereich des Modells erweitern.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Grenzzyklus	1
1.2	Periodische Lösungen bei linearen konservativen Systemen	2
1.3	Lineare Systeme mit Dissipation bzw. Energiequelle.	3
1.4	Phase und Amplitude des quasilinearen Oszillators.	4
1.5	Phase eines beliebigen Grenzzyklus.	5
1.6	Lyapunov-Exponenten	6
1.7	Einführung von Isochronen.	7
1.8	Zeitreihen des Van-der-Pol-Oszillators.	8
1.9	Grenzyklen des Van-der-Pol-Oszillators.	9
2.1	Der Phasenpunkt im rotierenden Bezugssystem	11
2.2	Externe Kraft im rotierenden Bezugssystem	12
2.3	Kleine Verstimmung	14
2.4	Kleine Verstimmung. Potential.	14
2.5	Große Verstimmung. Potential.	15
2.6	Frequency-Locking. Arnold-Zunge.	16
2.7	Phasenverschiebung innerhalb der Arnoldzunge	17
2.8	Verlust von Synchronisation beim Verlassen der Arnoldzunge	18
2.9	Arnold-Zungen	19
2.10	Devil's staircase.	19
2.11	Verlust von Synchronisation	24
3.1	Integrate-and-fire-Oszillator. Typisches f	30
3.2	Konstruktion der Poincaré-Abbildung.	31
4.1	Langzeitlösungen beim Kuramoto-Modell	36
4.2	Ordnungsparameter K in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke	38
4.3	Gekoppelte Relaxationsoszillatoren: Anzahl der feuernden Oszillatoren .	40
4.4	Gekoppelte Relaxationsoszillatoren: Entwicklung im Phasenraum	41
5.1	Experimentell beobachtete Zeitreihen	43
5.2	Grundmodell	45
5.3	Grundmodell - Reaktionsgeschwindigkeiten	47
5.4	Frequenzen	49

6.1 Nullklinen	51
7.1 Fixpunkt	56
7.2 Grenzzyklus	56
7.3 Langzeitverhalten	57
7.4 CO-Zeitreihen für einen Oszillator	58
7.5 Oxidationsgrad-Zeitreihen für einen Oszillator	59
7.6 Kleine Ausreißer für $\alpha = 0.90$	60
7.7 CO-Zeitreihen des gekoppelten Systems ($N = 10$)	62
7.8 Grenzzyklen des ungekoppelten Systems	63
7.9 Grenzzyklen des ungekoppelten Systems: Auffächern der Trajektorien	64
7.10 Grenzzyklen des gekoppelten Systems	65
7.11 Grenzzyklen des gekoppelten Systems (II)	66
7.12 Grenzzyklen des gekoppelten Systems (III)	67
7.13 Zeitreihen für den Oxidationsgrad	69
7.14 Zeitreihen für den Oxidationsgrad - Ausschnitt.	70
7.15 Zusammenbruchskaskade für $\alpha = 0.80$	71
7.16 Abhängigkeit der Zusammenbruchskaskade	73
7.17 \dot{y} in Abhängigkeit von y für festes I und festes α	74
7.18 \tilde{y} für festes I in Abhängigkeit von α	75
7.19 Grenzzyklen des gekoppelten Systems (III)	76
7.20 CO-Zeitreihen des gekoppelten Systems (II) ($N = 100$)	78
7.21 CO-Zeitreihen des gekoppelten Systems ($N = 100$)	79
7.22 Verteilung der $\bar{\beta}_i$ für $N = 100$	81
7.23 x -Zeitreihen $\alpha = 0.93$	82
7.24 Auswirkung einer nichtlinearen Funktion $H(i, \alpha)$	83

Literaturverzeichnis

- [Adl46] ADLER, R.: A study of locking phenomena in oscillators. In: *Proceedings of the IRE* 34 (1946)
- [AFH95] ARGYRIS, J. ; FAUST, G. ; HAASE, M.: *Die Erforschung des Chaos*. Vieweg, 1995
- [AP22] APPLETON, E.V. ; VAN DER POL, B.: *On a type of oscillation-hyteresis in a simple triode generator*. Bd. 43. 1922
- [AVK37] ANDRONOV, A.A. ; VITT, S.E. ; KHAYKIN, S.E.: *Theory of Oscillators*. Gostekhizdat, Moscow, 1937
- [BP00] BALLANDIS, C. ; PLATH, P.J.: A New Discrete Model for the Non-Isothermic Dynamics of the Exothermic CO-Oxidation on Palladium Supported Catalyst. In: *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics* 25 (2000)
- [CEK78] CONRAD, H. ; ERTL, G. ; KUPPERS, J.: Interactions between oxygen and carbon monoxide on a Pd(111) surface. In: *Surf. Sci.* 76 (1978)
- [GH86] GUCKENHEIMER, J. ; HOLMES, P.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 1986
- [GKES89] GRAY, C.M. ; KÖNIG, P. ; ENGEL, A.K. ; SINGER, W.: Oscillatory responses in cat virtual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties. In: *Nature* 338 (1989)
- [Guc75] GUCKENHEIMER, J.: Isochrons and phaseless sets. In: *Journal of Mathematical Biology* 1 (1975)
- [HKK95] HAN, S.K. ; KURRER, C. ; KURAMOTO, Y.: Dephasing and bursting in couple neural oscillators. In: *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995)
- [HKK97] HAN, S.K. ; KURRER, C. ; KURAMOTO, Y.: Dephasing and bursting in couple neural oscillators. In: *Int.J.Bifurc. Chaos* 7(4) (1997)
- [Huy67] HUYGENS, Ch.: In: *OEvres Complètes* volume 15 (1667)
- [JBB83] JENSEN, M. H. ; BAK, Per ; BOHR, Tomas: Complete Devil's Staircase, Fractal Dimension, and Universality of Mode- Locking Structure in the Circle Map. In: *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983), Nr. 21

- [JK91] J.K, Hale ; KOÇAK, H.: *Dynamics and Bifurcations*. Springer, New York, 1991
- [Kur84] KURAMOTO, Y.: Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. In: *Springer, Berlin* (1984)
- [LPJ96] LIAUW, M.A. ; PLATH, P.J. ; JÄGER, N.I.: Complex oscillations and global coupling during the catalytic oxidation of CO. In: *Journal of Chemical Physics* 104(2) (1996)
- [Mal56] MALKIN, I.G.: Some Problems in Nonlinear Oscillation Theory. In: *Gostechizdat, Moscow* (1956)
- [McS07] MCSHARRY, P.E.: Nonlinear dynamics and chaos. In: *Lecture notes, University of Oxford* (2007)
- [MS90] MIROLLO, R. ; STROGATZ, S.H.: Synchronisation of pulse-coupled biological oscillators. In: *SIAM Journal of Applied Mathematics* 50 (1990)
- [Ott92] OTT, E.: *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [Pol26] VAN DER POL, B.: On relaxation oscillation. In: *Phil. Mag.* 2 (1926)
- [PRK01] PIKOVSKY, A. ; ROSENBLUM, M. ; KURTHS, J.: *Synchronization - a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series (12), Cambridge University Press, 2001
- [SG95] SINGER, W. ; GRAY, C.M: Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis. In: *Annu. Rev. Neurosci.* 18 (1995)
- [Sin99] SINGER, W.: Striving for coherence. In: *Nature* 397 (4) (1999)
- [STL00] SCHMIDT, R.F. ; THEWS, G. ; LANG, F.: *Physiologie des Menschen*. Springer, Berlin, 2000
- [Str94] STROGATZ, S.H.: *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Addison-Weasley, Reading, MA, 1994
- [Str00] STROGATZ, S.H.: From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronisation in populations of coupled oscillators. In: *Physica D* 143 (1-4) (2000)
- [Win80] WINFREE, A.T.: The Geometry of Biological Time. In: *Springer, New York* (1980)

- [ZCS⁺90] ZENG, W.-Z. ; COURTEMANCHE, M. ; SEHN, L. ; SHRIER, A. ; GLASS, L.: Theoretical computation of phase locking in embryonic atrial heart cell aggregates. In: *Journal of Theoretical Biology* 145 (1990)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich zunächst bei Herrn Prof. Dr. Rudolf Friedrich für die interessante Problemstellung und freundliche Betreuung bedanken.

Michael Wilczek danke ich für die angenehme und produktive Atmosphäre in unserem gemeinsamen Büro.

Desweiteren danke ich allen, die bei dieser Arbeit Korrektur gelesen haben, für ihre konstruktiven Vorschläge, wobei ich speziell Andreas Wilmer herausheben möchte.

Besonders danke ich meinen Eltern und meiner Schwester, die mich bei allem, was ich tue, rückhaltlos unterstützen.

Erklärung zur Diplomarbeit:

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im Juni 2007