

Modellierung und gyrokinetische Simulation des Dimits Shifts

als Diplomarbeit vorgelegt von

Julian Hüser

im Januar 2010



Westfälische Wilhelms-Universität
Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1 Fusionsforschung	1
1.1 Fusionsenergie	1
1.2 Magnetischer Einschluss	2
1.3 Lawson-Kriterium	3
2 Theoretische Grundlagen	5
2.1 Mikroskopische Beschreibung eines Plasmas	5
2.2 Statistische Beschreibung eines Plasmas	6
2.3 Makroskopische Beschreibung eines Plasmas	8
2.4 Magnetohydrodynamische Gleichungen (MHD)	10
2.5 Anwendung der idealen MHD: Die Grad-Shafranov-Gleichung . .	13
2.6 Einteilchenbewegungen	18
2.7 Mikroskopische Instabilitäten	23
2.8 Der Dimits Shift	26
2.9 Die Hasegawa-Mima-Gleichung	27
3 Modelle zur Untersuchung von Instabilitäten	30
3.1 Gyro-Fluid-Modell	30
3.2 Vier-Moden-Modell	36
3.3 Fazit	44
4 Modell zur Bestimmung der oberen Dimits Shift Begrenzung	46
4.1 Herleitung und Mechanismen	46
4.2 Zeitliche Entwicklung	49
4.3 Stationäre Lösungen	57
4.4 Lineare Stabilitäts-Analysen	59
4.5 Fazit	72
5 Der Dimits Shift in gyrokinetischen Simulationen	73
5.1 Der GENE-Code	73
5.2 Abhängigkeit des Dimits Shifts von q_0 und \hat{s}	76
5.3 Fazit	82
6 Zusammenfassung und Ausblick	83

A	Numerik	85
A.1	Diskrete Fourier Transformation (DFT)	86
A.2	Fourier-Galerkin-Methode	87
A.3	Pseudo-Spektral-Verfahren	88
A.4	Fast Fourier Transformation (FFT)	89
A.5	Aliasing	90
A.6	Runge-Kutta-Verfahren	94
A.7	Courant-Friedrichs-Lewy Bedingung (CFL)	96
B	Swift-Hohenberg-Gleichung	98
B.1	Strukturbildende Mechanismen	98
B.2	Numerische Ergebnisse	99
C	Zusatzmaterialien	103
	Literaturverzeichnis	104

Einleitung

Der weltweite Bedarf an Primärenergie hat sich seit den letzten 50 Jahren mehr als vervierfacht. Gründe dafür sind zum einen die stark anwachsende Weltbevölkerung, zum anderen aber auch die Schwellenländer, die seit dem Beginn ihrer Industrialisierung ebenfalls einen größeren Bedarf an Energie haben. Dabei wird 85% des derzeitigen Energiebedarfs durch fossile Brennstoffe gedeckt. Das bringt zwei Probleme mit sich. Das erste Problem beginnt schon bei der Nutzung dieser Energieträger, da durch die Verbrennung fossiler Brennstoffe das Treibhausgas CO_2 in die Atmosphäre gelangt, das einen großen Anteil an der globalen Erderwärmung hat. Ein weiteres Problem ist, dass die Förderung der fossilen Brennstoffe in den nächsten Jahrzehnten unwirtschaftlich wird. Die Tatsache, dass nur mit der Hilfe von neuen Energiequellen der weltweite Energiebedarf in den nächsten Jahrzehnten gedeckt werden kann, stellt eine große Herausforderung für die Forschung dar.

Eine aussichtsreiche Möglichkeit, elektrische Energie zu gewinnen, ist die Kernfusion. Dieser Prozess, der in der Sonne permanent abläuft, kann einen großen Anteil an der Lösung des weltweiten Energieproblems haben. Eine mögliche Kernfusionsreaktion ist die der Wasserstoffisotopen Deuterium und Tritium (Herstellung durch Lithium), die auf der Erde fast unbegrenzt vorhanden sind. Dabei entstehen kaum CO_2 -Emissionen und es wird im Gegensatz zu Atomkraftwerken kein langlebiges radioaktives Material gebildet. Bei der Kernfusion wird ein Gas so stark erhitzt, dass es ionisiert wird. In diesem sogenannten Plasmazustand sind die Atome des Gases in der Lage zu verschmelzen, wobei Energie frei wird. Die Temperaturen, die für diese Reaktion notwendig sind, liegen in der Größenordnung von 100 Millionen Grad Celsius.

Das größte Problem der Fusionsforschung ist, dieses Plasma einzuschließen. Da das Plasma aufgrund der freien Ladungsträger auf elektrische und magnetische Felder reagiert, wird sein Einschluss seit den 1950er Jahren mit Hilfe von Magnetfeldern versucht. Dabei erwiesen sich toroidale Konfigurationen als vorteilhaft. Wissenschaftler der ehemaligen Sowjetunion haben mit dem Tokamak (auf deutsch in etwa: toroidale Kammer mit magnetischem Einschluss) eine aussichtsreiche Realisierung eines Fusionsreaktors geschaffen. Der dauerhafte Einschluss gelang aber trotzdem nicht. Die Gründe für die fehlgeschlagenen Versuche wurden zu dieser Zeit noch nicht erkannt. Aus heutiger Sicht ist bekannt, dass Mikroturbulenzen im Plasma zum radialen Transport von Teilchen führen, sodass der resultierende Energieverlust eine selbsterhaltende Fusion unmöglich macht. Anfang der 1980er Jahre haben Forscher am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik bei München mit dem Tokamak Asdex einen Zustand von hohem Einschluss entdeckt, bei dem die turbulenten Plasmaströmungen im Tokamak plötzlich eine Transportbarriere am Rand des Gefäßes aufbauten.

Dieser Zustand wird auch mit dem Dimits Shift in Verbindung gebracht, mit dessen Hilfe man dem Ziel des dauerhaften Einschlusses schon sehr nahe gekommen ist. Allerdings ist die Physik hinter diesem Phänomen noch weitgehend ungeklärt. Aus Sicht der nichtlinearen Physik ist der Dimits Shift ein Beispiel der Strukturbildung und der Selbstorganisation in komplexen Systemen.

Die vorliegende Arbeit versucht neue Erkenntnisse über den Dimits Shift zu gewinnen, der einen großen Anteil für die Verwirklichung des dauerhaften Plasmaeinschlusses haben könnte. Dabei werden analytische wie auch numerische Ansätze verfolgt. Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Kapitel 1 wird unter anderem das Funktionsprinzip des Tokamaks und die Bedingungen erklärt, die für die Erzeugung von Energie mit Hilfe dieser Klasse von Kernfusionsreaktoren erfüllt werden müssen. Eine große Hilfe bei der Erfüllung dieser Bedingungen könnte der Dimits Shift sein. Für das weitere Verständnis der Arbeit wird in Kapitel 2 auf die notwendigen theoretischen Grundlagen eingegangen, die die Basis weiterer Untersuchungen sind. In Kapitel 3 werden zwei Plasma Modelle vorgestellt, die mögliche Mechanismen modellieren, die die Entstehung und Begrenzung des Dimits Shifts zu erklären versuchen. Mit Hilfe des ersten Modells wird in Kapitel 4 ein neues Plasma Modell vorgestellt, das einen strukturbildenden Mechanismus enthält, mit dem die obere Begrenzung des Dimits Shifts im Rahmen dieses Modells bestimmt werden kann. In Kapitel 5 werden mit Hilfe von gyrokinetischen Simulationen direkte Abhängigkeiten des Dimits Shifts von zwei verschiedenen Plasmaparametern bestimmt, die Aufschluss über verbesserte Magnetfeldgeometrien liefern. In Kapitel 6 werden alle wichtigen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick für die Zukunft gegeben. Die drei Anhangskapitel dienen des weiteren Verständnisses der Arbeit. So werden im Kapitel A alle verwendeten Algorithmen erklärt, mit denen die Gleichung des Plasma Modells aus Kapitel 4 numerisch gelöst werden kann. Das Kapitel B dient zum weiteren Verständnis der strukturbildenden Gleichung aus Kapitel 4 und das Kapitel C liefert Informationen über die beiliegende DVD, auf der alle numerischen Daten des Kapitels 4 und 5 zur Reproduzierbarkeit der Ergebnisse gespeichert sind.

1 Fusionsforschung

In diesem Kapitel wird auf die Energiegewinnung durch die kontrollierte Kernfusion eingegangen. Es werden zwei Realisierungen von Fusionskraftwerken vorgestellt, der Tokamak und der Stellarator. Anschließend wird auf das Lawson-Kriterium eingegangen, das die Bedingung für eine selbsterhaltende Kernfusion darstellt und zur Zeit noch nicht erfüllt wird. Die Probleme aber auch mögliche Lösungen werden diskutiert.

1.1 Fusionsenergie

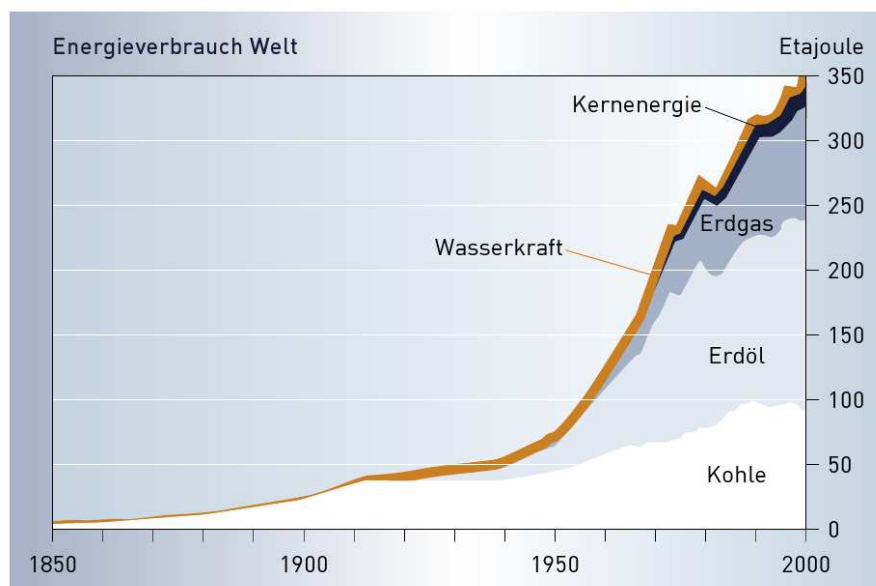


Abbildung 1.1: Zeitliche Entwicklung des weltweiten Primärenergiebedarfs.
Quelle: Novatlantis, Leichter Leben, 2005.

Wie in der Einleitung beschrieben wird, wächst der weltweite Bedarf an Primärenergie aufgrund der stetig wachsenden Weltbevölkerung und der Industrialisierung von Schwellenländern, allen voran China und Indien, rapide an. Seit den letzten 50 Jahren hat sich der Verbrauch schon mehr als vervierfacht (siehe Abbildung 1.1), bis 2030 sagen Prognosen einen Anstieg um 50% des heutigen Verbrauchs voraus. Dabei werden heutzutage ungefähr 85% des Energiebedarfs mit fossilen Brennstoffen gedeckt.

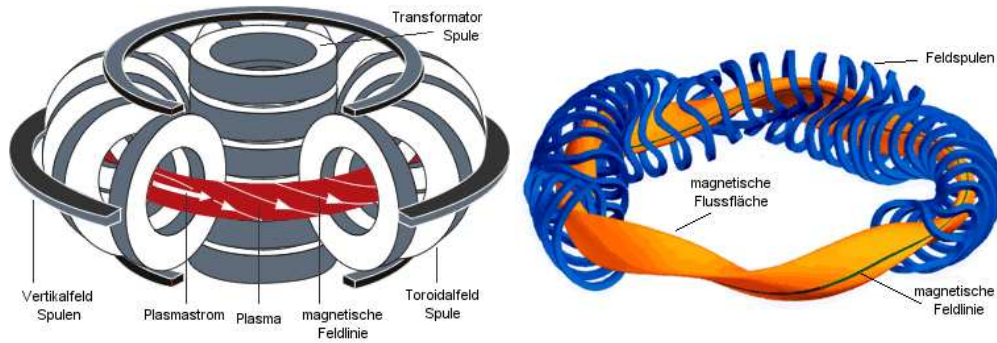
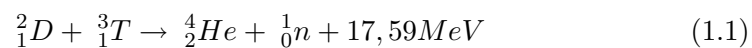


Abbildung 1.2: Fusionsreaktoren nach dem Tokamak- (links) und Stellarator-Konzept (rechts). Quelle: IPP

Da ihr Verbrauch durch CO_2 -Emissionen unter anderem verantwortlich für die globale Erderwärmung ist, ihre Ressourcen aber in absehbarer Zeit auch zur Neige gehen, ist die Suche nach neuen Energiequellen unvermeidlich. Regenerative Energiequellen und die Kernenergie scheinen mögliche Lösungen zu sein, die allerdings auch Nachteile haben. So sind regenerative Energiequellen abhängig von Wettereinflüssen und die Speicherung ist aufgrund der zeitlich stark schwankenden Energieausbeute derzeit noch ein Problem. Bei der Kernenergie stellt sich die Frage, wie mit dem nuklearen Abfall verfahren werden soll. Die Fusionsenergie könnte einen Beitrag leisten, den Energiebedarf zu decken. Nach dem Vorbild der Sonne werden Gase so stark erhitzt, bis die Atome in dem Gas zur Fusion gebracht werden. Dabei sind zwei einzelne Atome schwerer als der fusionierte Kern. Dieser Massendefekt ist über Einsteins berühmter Formel $E = mc^2$ direkt mit der Energie gekoppelt. Die Kernfusion ist also eine Möglichkeit Energie zu gewinnen. Die auf der Erde am einfachsten zu realisierende Fusionsreaktion ist die D - T -Reaktion:



Die beiden Wasserstoffisotope Deuterium und Tritium werden zur Fusion gebracht, dabei werden die „Abfallprodukte“ Helium und ein Neutron frei, sowie eine Energie von $17,59\text{MeV}$. Allerdings tritt diese Reaktion erst bei Temperaturen in der Größenordnung von 100 Millionen Grad Celsius auf.

1.2 Magnetischer Einschluss

Die Frage ist, wie man dieses heiße Gas einschließen kann. Die Sonne bedient sich dabei der Schwerkraft. Das ist für Fusionsreaktoren auf der Erde natürlich nicht möglich. Allerdings sind bei den hohen Temperaturen des Wasserstoffgases alle Atome vollständig ionisiert. Ein Gas, das teilweise oder auch vollständig ionisiert ist, wird als Plasma bezeichnet. Diese Definition geht auf Irving Langmuir zurück, der diesen Begriff 1928 einführte [1]. Der Plasmazustand wird auch als vierter Aggregatzustand bezeichnet.

Da das Fusionsplasma vollständig ionisiert ist, besteht es aus freien Ladungsträgern, die nach den Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik auf elektrische und magnetische Felder reagieren. Daher wird versucht, das Plasma in Fusionsreaktoren magnetisch einzuschließen. Toroidale Konfigurationen haben gegenüber linearen dabei den Vorteil, dass keine Teilchenverluste an den Enden auftreten. Erste Versuche wurden Anfang der 1950er Jahre von amerikanischen und sowjetischen Wissenschaftlern unternommen. Dabei setzten die Amerikaner auf die sogenannten Stellaratoren (Abbildung 1.2 rechts), die das Plasma ausschließlich durch äußere Magnetfelder einschließen. Diese Magnetfelder werden von um das Torusgefäß laufende Spulen erzeugt. Da die komplizierte Magnetfeldkonfiguration für die Wissenschaftler ein unüberwindbares Hindernis darstellte, wurde bald das Konzept des Tokamaks favorisiert (Abbildung 1.2 links). Bei dieser toroidalen Anordnung wird das toroidale Magnetfeld, das von poloidal verlaufenden Spulen erzeugt wird, mit einem poloidalen Magnetfeld überlagert. Dieses poloidale Magnetfeld wird durch einen im Plasma induzierten Strom erzeugt. Dieses Transformatorprinzip ist der grundlegende Unterschied zum Stellarator. Die Feldlinien des gesamten Magnetfelds werden durch die Überlagerung von poloidalem und toroidalem Magnetfeld verdrillt. Die Notwendigkeit dieser Verdrillung wird im nächsten Kapitel erklärt, der magnetische Einschluss wird so gegenüber einem rein toroidalen Magnetfeld allerdings verbessert. Seit 2009 wird in Cadarache (Südfrankreich) der Testreaktor ITER nach dem Tokamak Konzept erbaut, der voraussichtlich 2018 in Betrieb genommen wird. ITER ist ein internationales Projekt und soll den Beweis liefern, dass die Energiegewinnung durch Fusion möglich ist. Es wird aber auch wieder verstärkt an den Stellaratoren geforscht. Durch moderne Computersimulationen ist es möglich, die Magnetfeldgeometrie sowie die erforderliche Spulenordnung zu bestimmen, was vor 50 Jahren noch nicht möglich war. So wird am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Greifswald derzeit der Wendelstein 7-X erbaut, ein Testreaktor nach dem Stellarator Prinzip.

1.3 Lawson-Kriterium

Für eine dauerhafte selbsterhaltende Kernfusion muss nach Lawson [2] folgende Bedingung erfüllt sein:

$$nT\tau_E > 3 \cdot 10^{21} \frac{\text{keVs}}{m^3} \quad (1.2)$$

Das ist das sogenannte Lawson-Kriterium für ein Deuterium-Tritium-Gemisch [3]. Durch die Normierung $k_B T \rightarrow T$ werden Temperaturen in Energieeinheiten gemessen. Die Zündbedingung (1.2) besagt, dass das sogenannte Tripelprodukt $nT\tau_E$ aus Dichte n , Temperatur T und Energieeinschlusszeit τ_E einen gewissen Wert erreichen muss, damit die Kernfusion selbsterhaltend ist. Abbildung 1.3 zeigt das Tripelprodukt verschiedener Kernfusionsreaktoren in Abhängigkeit der Temperatur. Bisher konnte noch kein Reaktor das Lawson-Kriterium erfüllen. Das hat die folgenden Gründe. Makroskopische Instabilitäten (siehe Kapitel 2) setzen der Teilchendichte eine obere Grenze.

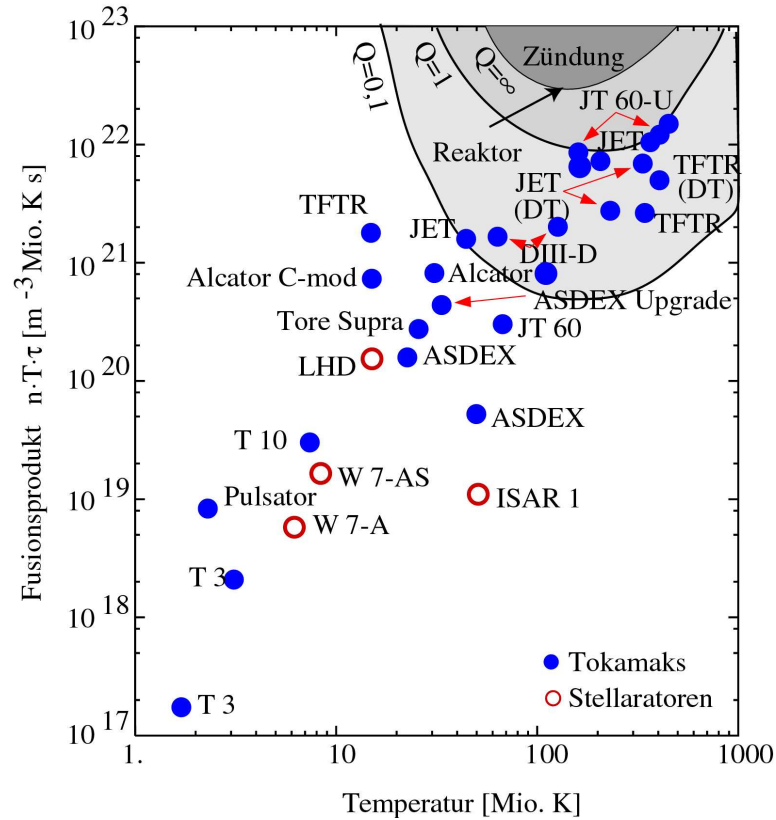


Abbildung 1.3: Zündbedingung für eine Kernfusion: Tripelprodukt in Abhängigkeit der Temperatur. Quelle: DPG

Da die Temperaturen in Tokamaks von innen nach außen abnehmen, resultieren größere Temperaturen im Inneren auch zu größeren Temperatur-Gradienten. Diese setzen der inneren Temperatur aufgrund mikroskopischer Turbulenzen allerdings auch eine obere Grenze (siehe Kapitel 2). Die Verwendung größerer Fusionsreaktoren hat daher einen Vorteil. Ein besseres Verständnis dieser Turbulenzen könnte bei der Vergrößerung der Energieeinschlusszeit behilflich sein. So wurde festgestellt, dass in der sogenannten H-Mode (high confinement) in Tokamaks die turbulenten Plasmaströmungen Transportbarrieren aufbauen, die den radialen Wärmetransport unterdrücken und somit die Energieeinschlusszeit vergrößern. Dieser Zustand von hohem Einschluss wird mit dem Dimits Shift [4] in Verbindung gebracht. Bei diesem nichtlinearen Phänomen wird der kritische Temperatur-Gradient, bei dem der radiale Transport einsetzt, nach oben verschoben. Das wird dadurch erklärt, dass die Plasmaströmungen in einer Art Selbstorganisation poloidale Strukturen entwickeln, die den Transport unterdrücken. Daher ist es von besonderem Interesse dieses Phänomen zu verstehen und nutzen zu können.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel wird auf die theoretischen Grundlagen eingegangen, die dieser Arbeit zugrunde liegen. Aufbauend auf der mikroskopischen Behandlung des Plasmas wird die Vlasov-Gleichung hergeleitet, die in der statistischen Beschreibung eine zentrale Rolle spielt. Diese Gleichung wird beispielsweise auch im GENE-Code gelöst, auf den im Kapitel 5 Bezug genommen wird.

Durch Momenten-Bildung dieser Gleichung werden die idealen magnetohydrodynamischen Gleichungen hergeleitet (ideale MHD). Eine wichtige Anwendung der MHD ist die Grad-Shafranov-Gleichung, dessen Lösung die Flussflächen-geometrie des Tokamaks ergibt. Die daraus resultierenden charakteristischen Größen dieses Magnetfelds spielen im Kapitel 5 eine wichtige Rolle. Mit Hilfe der Einteilchenbewegungen wird dann der Mechanismus der Ionen-Temperatur-Gradient (ITG)-Mode erklärt, die mitverantwortlich für den radialen Transport in Tokamaks ist. Ein nichtlineares Phänomen bilden in diesem Zusammenhang die Zonal Flows, die die ITG-Mode unterdrücken können und zum Dimits Shift führen, der Gegenstand dieser Arbeit ist. Sie spielen außerdem im Kapitel 4 eine große Rolle. Zum Schluß dieses Kapitels wird die Hasegawa-Mima-Gleichung vorgestellt, die ein einfaches Modell zur Beschreibung von mikroskopischen Instabilitäten darstellt. Auf dieses Modell wird im Kapitel 3 zurückgegriffen.

2.1 Mikroskopische Beschreibung eines Plasmas

Nach [5] erfährt eine Punktladung der Masse m und Ladung q bei Bewegung in der Gegenwart eines elektrischen Feldes \mathbf{E} und magnetischen Feldes \mathbf{B} die Lorentzkraft \mathbf{F}_L :

$$\mathbf{F}_L = m\ddot{\mathbf{x}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

Die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} stammen jeweils von dem elektrostatischen Potential ϕ und dem Vektorpotential \mathbf{A} und sind über folgende Relationen verknüpft:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.2)$$

Durch die zweite Relation wird automatisch die Quellenfreiheit des Magnetfelds garantiert. Die Hamilton-Funktion des Teilchens ergibt sich dann über den generalisierten Ort und Impuls \mathbf{q} und \mathbf{p} zu:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m}[\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)]^2 + q\phi(\mathbf{q}, t) \quad (2.3)$$

Da ein Plasma gewöhnlich aus sehr vielen Teilchen besteht, gilt für die Hamilton-Funktion des Gesamtsystems:

$$H(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, t) = \sum_{i=1}^N H_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t) \quad (2.4)$$

N stellt hierbei die Gesamtzahl der Teilchen inklusive Ionen und Elektronen dar. H_i , \mathbf{q}_i und \mathbf{p}_i sind jeweils die Hamilton-Funktion und die generalisierten Koordinaten des i -ten Teilchens. Die additive Form der Hamilton-Funktion erweckt den Eindruck, als würden die Teilchen untereinander nicht wechselwirken. Dies ist jedoch ein Trugschluss, da die Potentiale in den Hamilton-Funktionen der einzelnen Teilchen durch externe und selbst-konsistente Felder erzeugt werden. Die selbst-konsistenten Felder entstehen durch die Ladungen und Bewegungen aller übrigen Teilchen. Deswegen hängt jede Hamilton-Funktion nicht-additiv von allen Phasenraum-Koordinaten ab. Die hamiltonschen Bewegungsgleichungen erhält man über die bekannten Relationen:

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \nabla_{\mathbf{p}_i} H \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\nabla_{\mathbf{q}_i} H \quad (2.5)$$

$\nabla_{\mathbf{p}_i}$ und $\nabla_{\mathbf{q}_i}$ sind jeweils die Nabla-Operatoren, die auf den Impuls bzw. Ort des i -ten Teilchens wirken. Das Lösen dieser $6N$ -gekoppelten Differentialgleichungen ist praktisch gesehen natürlich unmöglich. Aber die genaue Kenntnis der Trajektorien jedes einzelnen Teilchens ist für praktische Anwendungen meist nicht von Bedeutung.

2.2 Statistische Beschreibung eines Plasmas

Da es sich bei einem Plasma um eine große Anzahl N von Teilchen handelt, kann man statt der Teilchen Ensembles von N -Teilchen-Systemen betrachten. Das System wird in diesem Falle durch die Wahrscheinlichkeitsdichte F_N beschrieben (siehe dazu [6] und [7]):

$$F_N = F_N(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, t) \quad (2.6)$$

Die Wahrscheinlichkeit, das System im Phasenraum-Volumen $d\Gamma = d^3q_1 d^3p_1 \cdots d^3q_N d^3p_N$ um den Ort $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N)$ zur Zeit t zu finden, ist also gegeben durch:

$$F_N(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, t) d\Gamma \quad (2.7)$$

Für die zeitliche Entwicklung von F_N gilt die Liouville-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} F_N(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, t) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \nabla_{\mathbf{q}_i} + \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \nabla_{\mathbf{p}_i} \quad (2.8)$$

Die Gleichung besagt anschaulich, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte entlang einer Trajektorie im Phasenraum konstant ist.

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich das System also exakt beschreiben. Da die Funktion F_N allerdings von allen Orts- und Impulskoordinaten abhängt, ist sie für praktische Berechnungen nicht sehr nützlich. Durch Integration über das Phasenraum-Volumen $d\Gamma_{s+1} \cdots d\Gamma_N$ mit $d\Gamma_i = d^3q_i d^3p_i$ erhält man die reduzierte Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion f_s :

$$f_s(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_s, \mathbf{p}_s, t) = \frac{N!}{(N-s)!} \int F_N(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, t) d\Gamma_{s+1} \cdots d\Gamma_N \quad (2.9)$$

Der Vorfaktor rührt daher, dass durch f_s die Wahrscheinlichkeit gegeben ist, irgendwelche s der N ununterscheidbaren Teilchen zur Zeit t am Ort $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_s, \mathbf{p}_s)$ zu finden. Die zeitliche Entwicklung der reduzierten Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion ergibt sich durch Integration der Liouville-Gleichung über $d\Gamma_{s+1} \cdots d\Gamma_N$ zu:

$$\frac{d}{dt} f_s(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_s, \mathbf{p}_s, t) + \int \sum_{i=1}^s \dot{\mathbf{p}}_{i,s+1} \cdot \nabla_{\mathbf{p}_i} f_{s+1} d^3q_{s+1} d^3p_{s+1} = 0 \quad (2.10)$$

Der Term $\dot{\mathbf{p}}_{i,s+1}$ beschreibt die interne generalisierte Kraft, d.h. die Kraft, die das Teilchen $(s+1)$ durch die Coulombwechselwirkung und Wechselwirkung mit dem Magnetfeld des Teilchens i erfährt. Gleichung (2.10) besagt, dass die Zeitentwicklung von f_s von der Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion f_{s+1} abhängt. Dadurch entsteht eine ganze Hierarchie von Gleichungen, auch bekannt als BBGKY-Hierarchie nach den Autoren **B**orn, **B**ogoljubov, **G**reen, **K**irkwood und **Y**von (siehe dazu [8], [9], [10], [11] und [12]). Man kann diese Hierarchie durchbrechen, indem man die Annahme macht, dass es keine Stöße unter den Teilchen gibt (siehe dazu [13] und [14]). Diese Annahme lässt sich leicht rechtfertigen, wenn man es mit sehr dünnen Plasmen zu tun hat. Die Konsequenz ist, dass die Orte und Impulse der Teilchen unkorreliert sind, man f_2 also schreiben kann als:

$$f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, t) = f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, t) \quad (2.11)$$

Für die Einteilchen-Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion gilt nach (2.10):

$$\frac{d}{dt} f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t) + \nabla_{\mathbf{p}_1} f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t) \cdot \int \dot{\mathbf{p}}_{1,2} f_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, t) d^3q_2 d^3p_2 = 0 \quad (2.12)$$

Das Integral in (2.12) entspricht der im Mittel wirkenden Kräfte $\langle \mathbf{F} \rangle$ des Teilchens 2 auf das Teilchen 1. Die Kraft $\dot{\mathbf{p}}_1$ ist im Einteilchen-Fall nur die externe Kraft \mathbf{F}_{ex} . Im Folgenden wird auf den Index verzichtet ($f_1 = f$), da nur noch die Einteilchen-Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion betrachtet wird:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f + (\mathbf{F}_{ex} + \langle \mathbf{F} \rangle) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0 \quad (2.13)$$

Gleichung (2.13) ist die Vlasov-Gleichung. Diese wird aufgrund des fehlenden Stoßterms auch als stoßfreie Boltzmann-Gleichung bezeichnet.

Transformation der Vlasov-Gleichung in den physikalischen Orts- und Geschwindigkeitsraum (\mathbf{x}, \mathbf{v}) führt (2.13) über in:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0 \quad (2.14)$$

$f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ beschreibt hier die mittlere Teilchenzahl am Ort \mathbf{x} mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} . Diese Form der Vlasov-Gleichung wird im Folgenden stets verwendet.

2.3 Makroskopische Beschreibung eines Plasmas

Die Vlasov-Gleichung liefert die exakte statistische Beschreibung für ein stoß-freies Plasma. Um messbare, also makroskopische Größen zu berechnen, bildet man geeignete Momente der Vlasov-Gleichung (Herleitungen nach [15]). Dazu multipliziert man die Gleichung mit \mathbf{v}^k , $k \in \mathbb{N}$ und integriert über den Geschwindigkeitsraum, man bestimmt also eine Differentialgleichung für das k -te Moment. So erhält man eine ganze Reihe von Differentialgleichungen, die allerdings nicht abgeschlossen sind, da durch den zweiten Term in der Vlasov-Gleichung immer ein höheres Moment auftaucht, das bisher noch nicht behandelt wurde. Man kann diese Hierarchie von Gleichungen aber wieder durch zusätzliche Annahmen über das Plasma durchbrechen. Die ersten Momente sind direkt mit physikalischen Größen verknüpft:

$$\text{Dichte:} \quad n(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.15a)$$

$$\text{Geschwindigkeit:} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \int \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.15b)$$

$$\text{Temperatur:} \quad T(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{3n(\mathbf{x}, t)} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.15c)$$

$$\text{Drucktensor:} \quad P_{i,j}(\mathbf{x}, t) = m \int (v_i - u_i)(v_j - u_j) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.15d)$$

Zeitliche Entwicklung der Momente

Integriert man die Vlasov-Gleichung direkt über den Geschwindigkeitsraum, erhält man die Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f \right) d^3v = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \int f d^3v + \nabla \cdot \int \mathbf{v} f d^3v + \sum_{i=1}^3 \int \frac{\partial}{\partial v_i} ((E_i + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i) f) d^3v = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Das letzte Integral verschwindet, da $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i$ nicht von v_i abhängt und $f \rightarrow 0$ für $v_i \rightarrow \infty$.

Multipliziert man die Vlasov-Gleichung mit \mathbf{v} und integriert dann über den Geschwindigkeitsraum, so erhält man die Bewegungsgleichung:

$$\int \left(\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \nabla f + \mathbf{v} \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f \right) d^3v = 0$$

Die Summanden werden einzeln berechnet:

$$\int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} (n\mathbf{u}) = \mathbf{u} \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \stackrel{(2.16)}{=} -\mathbf{u} \nabla \cdot (n\mathbf{u}) + n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} \int \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \nabla f d^3v &= \sum_{i,j=1}^3 \int \mathbf{e}_i v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} d^3v = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \int v_i v_j f d^3v \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \int ((v_i - u_i)(v_j - u_j) + v_i u_j + v_j u_i - u_i u_j) f d^3v \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{P_{i,j}}{m} + n u_i u_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{P_{i,j}}{m} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (n u_j) + n u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right) \\ &= \frac{1}{m} \nabla \cdot P_{i,j} + \mathbf{u} \nabla \cdot (n\mathbf{u}) + n (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.17b)$$

In der dritten Zeile wird mit (2.15d) der Drucktensor eingebaut, dessen Symmetrie in der letzten Zeile benutzt wird.

$$\begin{aligned} \int \mathbf{v} \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f d^3v &= \frac{q}{m} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i \int v_i \left(E_j + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_j \right) \frac{\partial f}{\partial v_j} d^3v \\ &= \frac{q}{m} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i \int v_i \frac{\partial}{\partial v_j} \left((E_j + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_j) f \right) d^3v \\ &= \frac{q}{m} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i \int \left[\frac{\partial}{\partial v_j} \left(v_i (E_j + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_j) f \right) - \delta_{i,j} (E_j + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_j) f \right] d^3v \\ &= -\frac{q}{m} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i \delta_{i,j} \int (E_j + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_j) f d^3v \\ &= -\frac{q}{m} \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j \left(n E_j + n (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_j \right) \\ &= -n \frac{q}{m} (\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})) \end{aligned} \quad (2.17c)$$

Der erste Summand in der dritten Zeile verschwindet beim Integrieren, da $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i$ nicht von v_i abhängt und $f \rightarrow 0$ für $v_i \rightarrow \infty$. Für den Fall $i = j$ verschwindet das Integral aufgrund der Normierbarkeit von f ebenfalls. Durch Addition der Gleichungen (2.17a) bis (2.17c) erhält man schließlich die Bewegungsgleichung:

$$0 = -\mathbf{u} \nabla \cdot (n\mathbf{u}) + n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{m} \nabla \cdot P_{i,j} + \mathbf{u} \nabla \cdot (n\mathbf{u}) + n (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - nq (\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}))$$

$$\Leftrightarrow mn \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \cdot P_{i,j} + nq (\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})) \quad (2.18)$$

Wird jetzt noch die Annahme gemacht, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion isotrop bezüglich der Geschwindigkeit ist, so kann man den ansonsten richtungsabhängigen Drucktensor als Skalar behandeln:

$$mn \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + nq (\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})) \quad (2.19)$$

Bis auf die Lorentzkraft stimmt diese Gleichung mit der aus der Flüssigkeitslehre bekannten Euler-Gleichung überein. Der erste Term beschreibt die totale zeitliche Änderung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung aufgrund der direkten Änderung des Systems und der Konvektion. Der zweite Term beschreibt Kräfte, die durch Druckunterschiede entstehen und der letzte Term die Lorentzkraft.

2.4 Magnetohydrodynamische Gleichungen (MHD)

In der Theorie der Magnetohydrodynamik, abgekürzt MHD, werden Plasmen als elektrisch leitende Flüssigkeiten beschrieben (siehe dazu [7]). Es handelt sich also um eine makroskopische Behandlung des Plasmas. Diese Theorie spielt in der Fusionsforschung eine sehr wichtige Rolle, da mit ihrer Hilfe zumindest die makroskopische Stabilität der Plasmen durch geeignete Magnetfeldgeometrien bestimmt werden kann. Den Ausgangspunkt für die mathematische Beschreibung liefern die beiden Gleichungen (2.16) und (2.18) und das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz kombiniert mit den Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik. Im Folgenden werden Gleichungen für ein vollständig ionisiertes Wasserstoff-Plasma hergeleitet ($q = \pm e$). Da das Plasma aus Elektronen und Ionen besteht, muss es als Zwei-Flüssigkeits-Modell behandelt werden. Dabei bezeichnet der Index „e“ die Elektronen und „i“ die Ionen. Durch folgende Näherungen kann es aber trotzdem als Ein-Flüssigkeits-Modell betrachtet werden:

$$1. \quad m_e \ll m_i \quad (2.20a)$$

Die Masse eines Ions ist um den Faktor ~ 1800 größer als die eines Elektrons. Diese Bedingung wird also immer erfüllt.

$$2. \quad n_e \approx n \approx n_i \quad (2.20b)$$

(2.20b) ist die sogenannte Quasineutralitätsbedingung. Das Plasma ist global gesehen aufgrund der Ladungserhaltung elektrisch neutral, die Quasineutralitätsbedingung gilt aber sogar lokal. Sie kann dadurch begründet werden, dass nur geringe Änderungen in der Ladungsdichte zu elektrischen Feldern führen, die durch die Elektronen aufgrund ihrer geringen Masse sofort kompensiert werden. Ebenso muss man fordern, dass die durch externe elektrische Potentiale hervorgerufene potentielle Energie der Teilchen klein gegenüber der kinetischen Energie der Teilchen ist. Diese Bedingung ist auf genügend großen Skalen (in Fusionsplasmen $\sim 0.1 - 1mm$) erfüllt. Da die MHD eine makroskopische Theorie ist, wird diese Bedingung dort ebenfalls erfüllt. Mit Hilfe dieser Näherungen erhält man für das Ein-Flüssigkeits-Modell folgende Größen:

$$\rho = n_i m_i + n_e m_e \approx n m_i \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{u} = \frac{n_i m_i \mathbf{u}_i + n_e m_e \mathbf{u}_e}{\rho} \quad (2.21b)$$

$$\mathbf{j} = n_i e \mathbf{u}_i - n_e e \mathbf{u}_e \approx n e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (2.21c)$$

Im Folgenden wird aufgrund (2.20b) immer $n_e = n = n_i$ gesetzt. Die Kontinuitätsgleichungen der Elektronen und Ionen lauten:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{u}_e) = 0 \quad (2.22a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{u}_i) = 0 \quad (2.22b)$$

Addition dieser beiden Gleichungen nach Multiplikation mit m_e bzw. m_i liefert die Kontinuitätsgleichung des Ein-Flüssigkeits-Modells:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.23)$$

Die Bewegungsgleichungen der Elektronen und Ionen lauten nach (2.18):

$$m_e n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_e = -\nabla P_{r,s}^{(e)} - n e (\mathbf{E} + (\mathbf{u}_e \times \mathbf{B})) \quad (2.24a)$$

$$m_i n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_i = -\nabla P_{r,s}^{(i)} + n e (\mathbf{E} + (\mathbf{u}_i \times \mathbf{B})) \quad (2.24b)$$

$P_{r,s}^{(k)}$ mit $k = (e, i)$ ist hierbei der Drucktensor mit den Indizes (r, s) , um Verwechslungen mit den Teilchenbezeichnungen auszuschließen. Addition der beiden Gleichungen liefert:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + n m_e \mathbf{u}_e \cdot \nabla \mathbf{u}_e + n m_i \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i + \nabla P_{r,s}^{(e)} + \nabla P_{r,s}^{(i)} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.25)$$

Da sich die beiden Drucktensoren jeweils auf die Geschwindigkeiten des Zwei-Flüssigkeits-Modells beziehen, muss man sie auf die Gesamtgeschwindigkeit des Ein-Flüssigkeits-Modells umformen:

$$\begin{aligned}
 P_{r,s}^{(0,k)} &= m_k \int (v_{k,r} - u_r) (v_{k,s} - u_r) f d^3v \\
 &= m_k \int (v_{k,r} - u_{k,r} + (u_{k,r} - u_r)) (v_{k,s} - u_{k,s} + (u_{k,s} - u_s)) f d^3v \\
 &= m_k \int (v_{k,r} - u_{k,r}) (v_{k,s} - u_{k,s}) f d^3v + m_k \int (u_{k,r} - u_r) (u_{k,s} - u_s) f d^3v \\
 &= P_{r,s}^{(k)} + nm_k (u_{k,r} - u_r) (u_{k,s} - u_s) \\
 &= P_{r,s}^{(k)} + M_{r,s}^{(k)} \quad \text{mit} \quad M_{r,s}^{(k)} = nm_k (u_{k,r} - u_r) (u_{k,s} - u_s) \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

$P_{r,s}^{(0,k)}$ bezeichnet hier den Drucktensor der Flüssigkeit k bezogen auf die Gesamtgeschwindigkeit des Ein-Flüssigkeits-Modells. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \nabla M_{r,s}^{(k)} &= nm_k [(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \nabla \cdot (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \cdot \nabla (\mathbf{u}_k - \mathbf{u})] \\
 &\quad + m_k \nabla n \cdot (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Damit folgt für (2.25):

$$\begin{aligned}
 &\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + nm_e \mathbf{u}_e \cdot \nabla \mathbf{u}_e + nm_i \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i + \nabla P_{r,s}^{(e)} + \nabla P_{r,s}^{(i)} \\
 &= \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + nm_e \mathbf{u}_e \cdot \nabla \mathbf{u}_e + nm_i \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i + \nabla (P_{r,s}^{(0,e)} - M_{r,s}^{(e)}) + \nabla (P_{r,s}^{(0,i)} - M_{r,s}^{(i)}) \\
 &= \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla P_{r,s}^{(0)} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad \text{mit} \quad P_{r,s}^{(0)} = P_{r,s}^{(0,e)} + P_{r,s}^{(0,i)} \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

Bei Annahme einer isotropen Geschwindigkeitsverteilung, kann man den Drucktensor wieder als Skalar behandeln:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.29)$$

Die MHD-Gleichungen lauten wie folgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.30a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.30b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.30c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.30d)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.30e)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (2.30f)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.30g)$$

μ_0 ist die magnetische Feldkonstante und σ die elektrische Leitfähigkeit. (2.30a) und (2.30b) sind die oben hergeleiteten Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung, (2.30c) bis (2.30f) die Maxwellgleichungen und (2.30g) das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz. Da wegen der Quasineutralitätsbedingung die Ladungsdichte des Plasmas verschwindet, ist die RHS von (2.30d) gleich null. In (2.30e) wurde der Verschiebungsstrom vernachlässigt. Bei einer unendlich hohen Leitfähigkeit des Plasmas geht (2.30g) über in:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (2.30h)$$

Man spricht hier auch von der idealen MHD. Fusionsplasmen haben aufgrund ihrer vollständigen Ionisation eine sehr gute Leitfähigkeit, sodass sie auf makroskopischen Skalen guten Gewissens mit der idealen MHD beschrieben werden können.

2.5 Anwendung der idealen MHD: Die Grad-Shafranov-Gleichung

Die Grad-Shafranov-Gleichung ist eine, auf der Grundlage der idealen MHD basierende, partielle Differentialgleichung zur Beschreibung von statischen axial-symmetrischen Gleichgewichtszuständen in Plasmen (siehe dazu [15] und [16]). Eine Lösung dieser Differentialgleichung ergibt die Flussflächengeometrie in einem Tokamak. Charakteristische Größen dieses Magnetfelds sind der Sicherheitsfaktor q , der das Verhältnis von toroidalen zu poloidalen Umläufen von Magnetfeldlinien angibt und die magnetische Verscherung \hat{s} , die die Variation von q in radialer Richtung beschreibt. Diese Größen spielen im Kapitel 5 eine sehr wichtige Rolle. Ausgangspunkt sind die folgenden drei MHD Gleichungen:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (2.31a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.31b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.31c)$$

Bei (2.31a) wird schon $\mathbf{u} = 0$ gesetzt, da statische Gleichgewichte behandelt werden sollen. Aufgrund der Axialsymmetrie, bietet sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten (r, φ, z) an (siehe Abbildung 2.1). Dabei sind alle Größen invariant bei Änderung des Winkels φ . Diese Eigenschaft wird im Folgenden stets vorausgesetzt. Für (2.31b) folgt durch Verwendung des Vektorpotentials \mathbf{A} aus (2.2):

$$B_r \mathbf{e}_r + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi + B_z \mathbf{e}_z = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \mathbf{e}_z \quad (2.32)$$

Man sieht, dass die Komponenten von \mathbf{B} alleine durch $B_\varphi(r, z)$ und $A_\varphi(r, z)$ bestimmt werden, also auch die Komponenten von \mathbf{j} . Diese Beziehung wird später noch ausgenutzt.

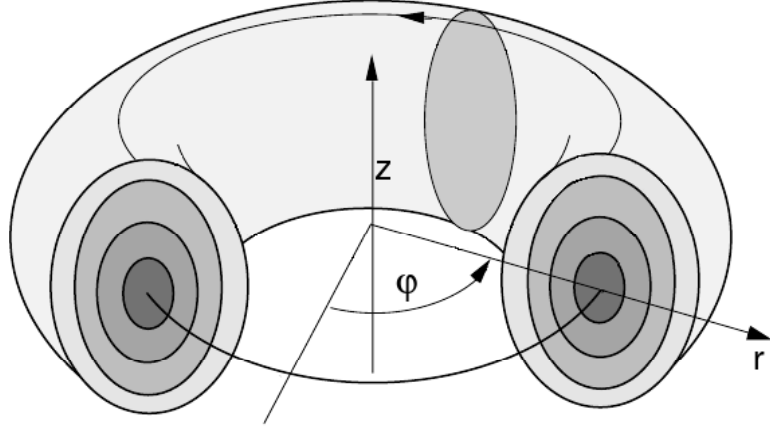


Abbildung 2.1: Zylinderkoordinaten zur Beschreibung toroidaler axialsymmetrischer Gleichgewichtszustände. Dabei ist φ der toroidale Winkel. Quelle: [17].

Als nächstes wird die Flussfunktion Ψ und die Stromfunktion I definiert:

$$\Psi(r, z) = \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \int_F (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{f} = \oint_{\partial F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r A_\varphi \quad (2.33)$$

$$I(r, z) = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \frac{1}{\mu_0} \int_F (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial F} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{2\pi r}{\mu_0} B_\varphi \quad (2.34)$$

Dabei bezeichnet F die Kreisfläche um die z -Achse bei z mit Radius r , ∂F den Rand der Kreisfläche. Bei der letzten Umformung wird der Satz von Stokes benutzt. Durch die Parametrisierung des Randes gibt jeweils nur die φ -Komponente von \mathbf{A} und \mathbf{B} einen Beitrag zum Integral. Umformen von (2.33) und (2.34) liefert:

$$A_\varphi = \frac{\Psi}{2\pi r} \quad (2.35)$$

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2.36)$$

Für \mathbf{B} folgt aus (2.32), (2.35) und (2.36):

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \mathbf{e}_z \quad (2.37)$$

Für \mathbf{j} folgt damit aus (2.31c):

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial z} \mathbf{e}_r - \frac{1}{2\pi r \mu_0} \hat{D} \Psi \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial r} \mathbf{e}_z \quad \text{mit} \quad \hat{D} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (2.38)$$

Einsetzen von (2.37) und (2.38) in (2.31a) ergibt:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi^2 r^2} \left(\frac{1}{\mu_0} \hat{D}\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \mu_0 I \frac{\partial I}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r - \frac{1}{4\pi^2 r^2} \left(\mu_0 I \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{1}{\mu_0} \hat{D}\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z \\
 & \Leftrightarrow \hat{D}\Psi \hat{Z}\Psi + \mu_0^2 I \hat{Z}I = -4\pi^2 r^2 \mu_0 \hat{Z}p \quad \text{mit} \quad \hat{Z} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

Da $\nabla \Psi \times \nabla p = 0$ und $\nabla \Psi \times \nabla I = 0$, lässt sich der Druck p und die Stromfunktion I als Funktionen von Ψ auffassen. Daraus folgt mit der Beziehung

$$\hat{Z}p(\Psi) = \frac{\partial p}{\partial \Psi} \hat{Z}\Psi \quad \text{und} \quad \hat{Z}I(\Psi) = \frac{\partial I}{\partial \Psi} \hat{Z}\Psi \quad (2.40)$$

die Grad-Shafranov-Gleichung:

$$\hat{D}\Psi + \mu_0^2 I \frac{\partial I}{\partial \Psi} = -4\pi^2 r^2 \mu_0 \frac{\partial p}{\partial \Psi} \quad (2.41)$$

Sind also die Verteilungen des Stroms I und des Drucks p auf den Flussflächen gegeben, so lässt sich mit Hilfe dieser Gleichung die Flussflächen-Geometrie berechnen. Im Allgemeinen ist diese Gleichung nichtlinear, kann also nur numerisch gelöst werden. Bei geeigneter Wahl von I und p lassen sich aber auch analytische Lösungen finden.

Das Solovev-Gleichgewicht

Eine analytische Lösung der Grad-Shafranov-Gleichung ist nach Solovev möglich, wenn man I und p folgendermaßen wählt:

$$I = 0 \quad \text{und} \quad p = a\Psi + b \quad \text{mit} \quad a, b = \text{const} \quad (2.42)$$

Einsetzen in (2.41) ergibt:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) \Psi = cr^2 \quad \text{mit} \quad c = -4\pi^2 \mu_0 a \\
 & \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = cr^2 \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

Durch diese Wahl von I und p erhält man eine lineare partielle Differentialgleichung. Folgendes Polynom löst diese Gleichung:

$$\Psi = c_1 r^4 + c_2 r^2 + c_3 r^2 z^2 \quad \text{mit} \quad 8c_1 + 2c_3 = c \quad (2.44)$$

Wählt man für die Konstanten

$$c_1 = -\frac{\Psi_0}{R^4}, \quad c_2 = \frac{2\Psi_0}{R^2}, \quad c_3 = -\frac{\alpha\Psi_0}{R^4} \quad (2.45)$$

so folgt für (2.44):

$$\Psi = \Psi_0 \frac{r^2}{R^4} (2R^2 - r^2 - \alpha z^2) \quad (2.46)$$

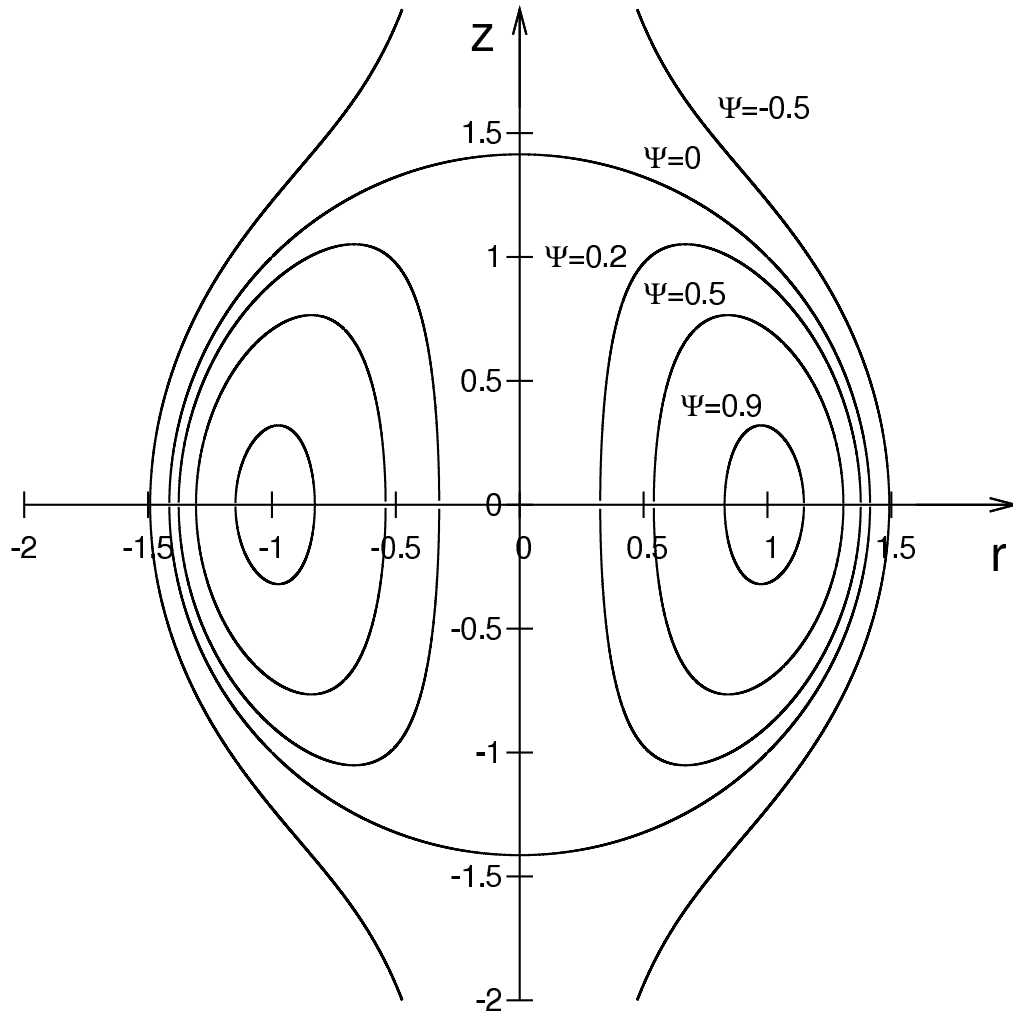


Abbildung 2.2: Lösung der Grad Shafranov-Gleichung nach Solovév: Die Abbildung zeigt einen poloidalen Schnitt der Flussflächen für $\Psi_0 = R = \alpha = 1$. Die Flussflächen um $r = 1$ sind annähernd Kreise. Je weiter man sich von der magnetischen Achse entfernt, desto mehr verformen sie sich. Es hat daher Vorteile, wenn man statt kreisrunder Tori etwa trianguläre geometrische Gebilde verwendet.

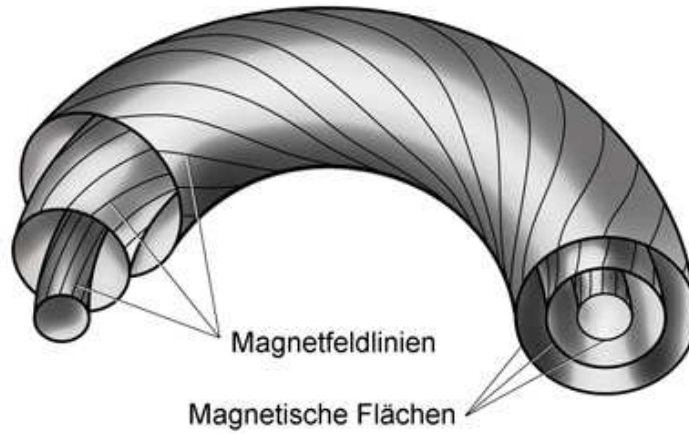


Abbildung 2.3: Flussflächen eines Tokamaks. Da die Magnetfeldlinien auf den Flussflächen liegen, sind diese ineinander geschachtelt. Quelle: [18]

Für $r = 1$ und $z = 0$, ist $\Psi = 1$ maximal. Die Flussfläche ist dort zu einer Linie entartet, man nennt sie daher auch magnetische Achse (siehe Abbildung 2.2). Angemerkt sei, dass die magnetische Achse nicht mit der Seele des Torus zusammenfällt. Die radiale Differenz ist die sogenannte Shafranov-Verschiebung. Innerhalb von $\Psi = 0$, das ist die Seperatrix, sind alle Flussflächen geschlossen. Die durch (2.46) bestimmten Flussflächen sehen denen in Tokamaks sehr ähnlich. Bei der analytischen Lösung nach Solovev wird die Stromfunktion I einfachheitshalber Null gesetzt. Bei Nichtverschwinden dieses Stromes würde eine zusätzliche toroidale Komponente des Magnetfelds entstehen, die entscheidenden Anteil an der Stabilität des Gleichgewichts hat.

MHD-Stabilität

Ein stabiles Gleichgewicht liegt nur dann vor, wenn das Magnetfeld eine poloidale und toroidale Komponente besitzt. Die toroidale Komponente dient der Versicherung des Magnetfelds, die eine makroskopische Instabilität durch Driften verhindert. Nur so kann der Einschluss des Plasmas ermöglicht werden. Die Feldlinien entstehen also durch Überlagerung eines poloidalen und toroidalen Feldes. Sie bilden helikale Kurven und winden sich um den Torus herum (siehe Abbildung 2.3). Man kann jeder Magnetfeldlinie einen Sicherheitsfaktor q zuordnen. Dabei ist dieser Faktor wie folgt definiert:

$$q = \frac{\text{Toroidale Umläufe}}{\text{Poloidale Umläufe}} \quad (2.47)$$

Hat die Magnetfeldlinie beispielsweise einen Sicherheitsfaktor von $q = 2$, so schließt sie sich erst nach zwei toroidalen Umläufen. Ist der Wert des Sicherheitsfaktors irrational, so schließt sie sich erst nach unendlich vielen Umläufen, spannt also ergodisch eine Flussfläche auf.

Man nennt diese auch irrationale Flussflächen. Da sich Feldlinien nicht schneiden dürfen, kann man jeder Flussfläche genau ein q zuordnen. Dabei kann sich dieser Faktor normal zu den Flussflächen ändern. Diese Änderung bezeichnet man auch als magnetische Verscherung und ist wie folgt definiert:

$$\hat{s} = \frac{r}{q} \frac{\partial q}{\partial r} \quad (2.48)$$

r ist hierbei der kleine Radius des Torus, gemessen von der magnetischen Achse. Um makroskopische Instabilitäten zu verhindern, sollte der Sicherheitsfaktor einen Wert von eins nicht unterschreiten. Durch eine Normalmodenanalyse der linearisierten MHD-Gleichungen kann man zeigen, dass Instabilitäten auch bei ganzzahligen Werten von q auftreten. Die zugehörigen Flussflächen nennt man in dem Fall resonant. Um diese Instabilitäten zu vermeiden, ist es erforderlich, dass das Magnetfeld eine endliche magnetische Verscherung aufweist.

2.6 Einteilchenbewegungen

Bisher werden nur Theorien diskutiert, die sich auf eine Vielzahl von Teilchen beziehen. Dabei gehen Informationen der Trajektorien einzelner Teilchen verloren. In diesem Abschnitt sollen speziell Trajektorien einzelner Teilchen bestimmt werden, die im großen Teilchen-Ensemble für praktische Anwendungen zwar nicht von Bedeutung sind, jedoch Aufschluss über die Reaktion des gesamten Plasmas auf bestimmte Magnetfeld-Geometrien geben (siehe dazu [7]). Wichtige Ergebnisse sind die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift und die ∇B -Drift. Sie sind für die mikroskopischen Instabilitäten mitverantwortlich. Im Folgenden wird die Trajektorie eines Teilchens in einem stationären, homogenen Magnetfeld berechnet. Dabei steht der Index „ \parallel “ für die Richtung des Magnetfelds und „ \perp “ für die Richtung senkrecht zum Magnetfeld.

Bewegung im homogenen Magnetfeld

Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung eines Teilchens:

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.49)$$

Multiplikation mit \mathbf{v} und anschließender Integration liefert:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \text{const.} \quad (2.50)$$

Bei der Bewegung des Teilchens in einem Magnetfeld ist die kinetische Energie also eine Erhaltungsgröße. Das Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ zeige o.B.d.A. in die z -Richtung. Dann folgt für die Komponenten aus (2.49):

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

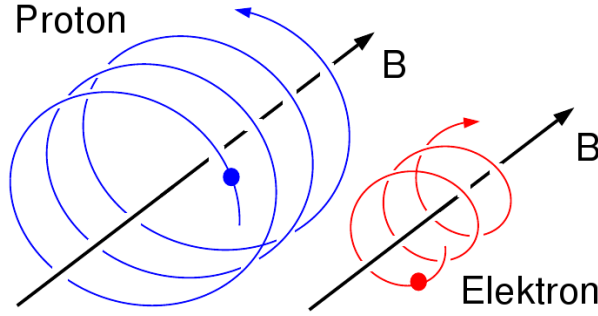


Abbildung 2.4: Elektron- und Proton-Bewegungen im homogenen stationären Magnetfeld. Bei gleicher Geschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld hat das Proton aufgrund der größeren Masse einen größeren Larmor-Radius als das Elektron. Quelle: [18].

Die Lösung dieser gekoppelten Differentialgleichung lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\perp}/\Omega \sin(\Omega t + \delta) + x_0 \\ v_{\perp}/\Omega \cos(\Omega t + \delta) + y_0 \\ v_{\parallel} t + z_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Omega = \frac{qB}{m} \quad (2.52)$$

In z -Richtung wird das Teilchen nicht beschleunigt, vollführt also eine gleichförmige Bewegung. In der x - y -Ebene bewegt es sich auf einer Kreisbahn. Das Teilchen bewegt sich also insgesamt auf einer Spiralbahn in Richtung des Magnetfelds. Diese Bewegung wird auch als Gyration bezeichnet, dabei ist Ω die Gyrationfrequenz. Das Vorzeichen der Ladung bestimmt nur den Drehsinn, Abbildung 2.4 verdeutlicht die Bewegungen von Elektron und Proton. Der Gyrationradius, der auch bekannt ist als Larmor-Radius, beträgt:

$$\rho = \frac{v_{\perp}}{\Omega} \quad (2.53)$$

Guiding-Centre-Ansatz

Da die Gyrationbewegung auf viel kleineren Zeit- und Längen-Skalen stattfindet, als physikalisch relevantere Bewegungen, betrachtet man nicht das Teilchen selbst, sondern seinen Gyrationmittelpunkt oder auch Guiding-Centre. Durch diese Vereinfachung kann man die 6-dimensionale Vlasov-Gleichung um eine Dimension reduzieren, was den Rechenaufwand enorm erleichtert. Die Gesamtbewegung wird in eine Guiding-Centre-Bewegung $\mathbf{r}_c(t)$ und eine Gyrationbewegung $\mathbf{r}_g(t)$ zerlegt (siehe Abbildung 2.5). Über die Gyrationbewegung wird gemittelt, um die Kräfte zu bestimmen, die das Teilchen bei der Gyration erfährt.

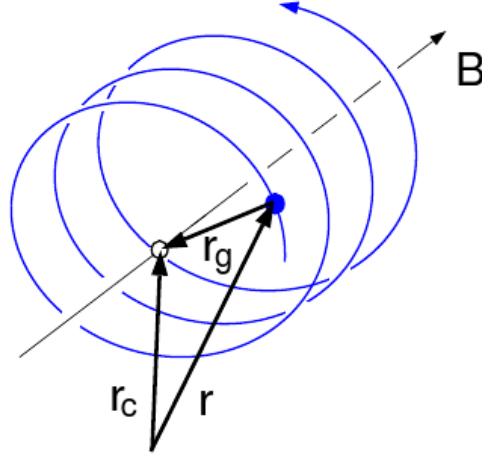


Abbildung 2.5: Der Guiding-Centre-Ansatz. Quelle: [18].

Bewegung im homogenen E- und B-Feld

Addiert man zu dem Magnetfeld noch ein homogenes elektrisches Feld, so driftet das Teilchen in eine Richtung senkrecht zu beiden Feldern. Das \mathbf{E} -Feld sei o.B.d.A gegeben durch: $\mathbf{E} = E_{\perp} \mathbf{e}_y + E_{\parallel} \mathbf{e}_z$. Dann lautet die Bewegungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} + E_{\perp}/B \\ E_{\parallel}/B \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\perp}/\Omega \sin(\Omega t + \delta) + E_{\perp}/B t + x_0 \\ v_{\perp}/\Omega \cos(\Omega t + \delta) + y_0 \\ E_{\parallel}/(2B) t^2 + v_{\parallel} t + z_0 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Die parallele Komponente von \mathbf{E} beschleunigt das Teilchen in die z -Richtung und zusätzlich zu der Kreisbewegung in der x - y -Ebene bewegt es sich mit der Geschwindigkeit E_{\perp}/B in Richtung x -Achse. Da diese Geschwindigkeit senkrecht zum \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld steht, kann man sie auch allgemein formulieren als:

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.56)$$

Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_E wird daher auch als $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift bezeichnet. Es sei darauf verwiesen, dass sie weder von der Ladung noch von der Masse des Teilchens abhängt. Daher driften Elektronen und Ionen mit derselben Geschwindigkeit. Physikalisch kann man diese Drift dadurch erklären, dass die Teilchen bei ihrer Gyration durch E_{\perp} auf der einen Seite beschleunigt und auf der anderen verzögert werden. Da der Gyrationradius bei größerer senkrechter Geschwindigkeit zunimmt (2.53), driften die Teilchen senkrecht zum \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld (siehe Abbildung 2.6).

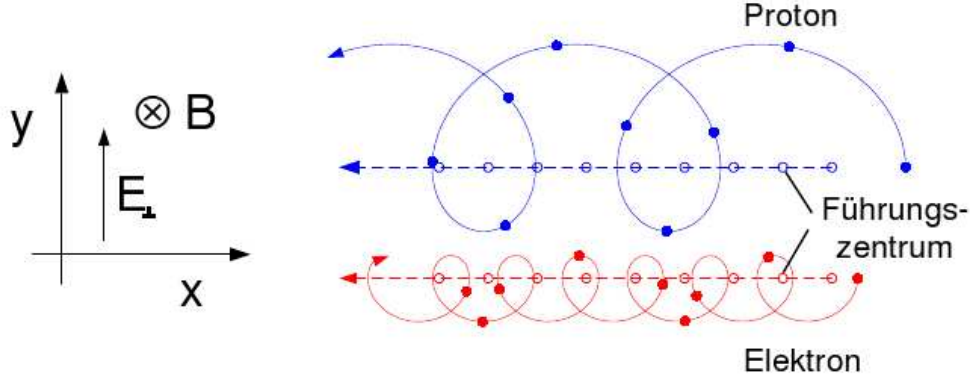


Abbildung 2.6: Driftbewegung des Elektrons und Protons im homogenen \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld. Da der Drehsinn bei Elektronen und Protonen aufgrund des Ladungsvorzeichens entgegengesetzt ist, driften sie in dieselbe Richtung. Quelle: [18].

Bewegung im inhomogenen Magnetfeld

Die Bewegung eines Teilchens im inhomogenen Magnetfeld ist etwas komplizierter. Man betrachte dazu ein in y -Richtung variierendes Magnetfeld $\mathbf{B} = B(y)\mathbf{e}_z$. Variation in z -Richtung würde gegen die Forderung der Quellenfreiheit verstoßen. Da sich die Magnetfelder in Tokamaks auf viel größeren Längenskalen L_∇ ändern als der Larmor-Radius ρ des Teilchens, gilt:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{L_\nabla} = \frac{\rho}{B/|\nabla B|} \ll 1 \quad (2.57)$$

Man kann das Magnetfeld also nach dem Kleinheitsparameter ε entwickeln. Dabei werden Terme größer als Ordnung eins in ε vernachlässigt:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.58)$$

Zerlegt man die Geschwindigkeit \mathbf{v} des Teilchens in eine Komponente \mathbf{v}_\parallel parallel zum Magnetfeld, eine Komponente \mathbf{v}_\perp senkrecht zum Magnetfeld und eine senkrecht zum Magnetfeld gerichtete Driftgeschwindigkeit \mathbf{v}_D , die aufgrund der langsamen Änderung von \mathbf{B} klein gegenüber der Gesamtgeschwindigkeit des Teilchens ist, so folgt mit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_D \quad \text{mit} \quad \frac{v_D}{v} \approx \varepsilon \quad (2.59)$$

die Bewegungsgleichung des Teilchens:

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_D) \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \Leftrightarrow m \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} + m \frac{d\mathbf{v}_D}{dt} &= q\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}_0 + q\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}_0 + q\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}_0 \\ &\quad + q\mathbf{v}_D \times \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Der erste Term auf der LHS und der erste Term auf der RHS entsprechen einander, da sie die ungestörte Gyrationbewegung beschreiben. Der letzte Term auf der rechten Seite wird vernachlässigt, da er von der Ordnung zwei in ε ist. So erhält man die Bewegungsgleichung für die Driftgeschwindigkeit:

$$m \frac{d\mathbf{v}_D}{dt} = q\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}_0 + q\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.61)$$

Man sucht nach zeitlich konstanten Driftgeschwindigkeiten, daher wird die LHS Null:

$$0 = \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.62)$$

Vektorielle Multiplikation der Gleichung mit \mathbf{B}_0 ergibt:

$$0 = \mathbf{B}_0 \times (\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}_0) + \mathbf{v}_D B_0^2 - \mathbf{B}_0 \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{B}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.63)$$

Hier wird der Graßmannsche Entwicklungssatz verwendet. Der letzte Term in der Gleichung fällt heraus, da \mathbf{v}_D nach Voraussetzung senkrecht auf \mathbf{B}_0 steht. Auflösen nach \mathbf{v}_D ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D &= -\frac{1}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \times (\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= -\frac{1}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \times \left(\mathbf{v}_\perp \times y \frac{\partial}{\partial y} B(y) \mathbf{e}_z \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Da v_\perp die Geschwindigkeit der Gyrationbewegung beschreibt und y angenähert die y -Komponente des Ortes der Gyration ist, kann man diese Größen durch (2.52) und dessen zeitliche Ableitung ersetzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D &= -\frac{v_\perp^2}{B_0^2 \Omega} \mathbf{B}_0 \times \left[\begin{pmatrix} \cos(\Omega t + \delta) \\ -\sin(\Omega t + \delta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\Omega t + \delta) \frac{\partial}{\partial y} B(y) \end{pmatrix} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{v_\perp^2}{B_0^2 \Omega} \mathbf{B}_0 \times \begin{pmatrix} \sin(\Omega t + \delta) \cos(\Omega t + \delta) \frac{\partial}{\partial y} B(y) \\ \cos^2(\Omega t + \delta) \frac{\partial}{\partial y} B(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Mittelung über eine Gyration liefert:

$$\langle \mathbf{v}_D \rangle = \frac{mv_\perp^2}{2qB_0^3} \mathbf{B}_0 \times \frac{\partial}{\partial y} B(y) \mathbf{e}_y + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.66)$$

Dabei verschwindet die x -Komponente wegen der ungeraden Funktion. Mittelung über \cos^2 liefert den Faktor $1/2$. Allgemein kann man dieses Ergebnis auch formulieren als:

$$\langle \mathbf{v}_D \rangle = \frac{mv_\perp^2}{2qB_0^3} \mathbf{B} \times \nabla B + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.67)$$

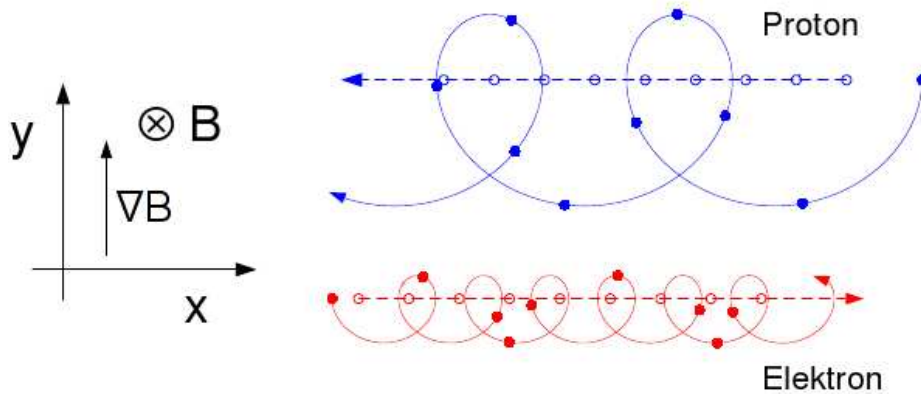


Abbildung 2.7: Driftbewegung des Elektrons und Protons im inhomogenen Magnetfeld. Da die Richtung des Gradienten nicht von der Ladung der Teilchen abhängt, driften Elektron und Proton aufgrund ihres Drehsinns in entgegengesetzte Richtungen. Quelle: [18].

Diese Geschwindigkeit wird auch als ∇B -Drift bezeichnet. Man sieht, dass die Driftgeschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld und zur Änderung des Magnetfelds steht. Insbesondere hängt sie von der Masse und der Ladung der Teilchen ab. Diese Eigenschaften spielen eine wichtige Rolle im nächsten Abschnitt. Physikalisch ist diese Driftbewegung ähnlich zu erklären wie die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift. Bei der Gyration durchläuft das Teilchen aufgrund des Magnetfeldgradienten Abschnitte größerer und kleinerer Magnetfeldstärke. Da bei größerem Magnetfeld der Larmor-Radius kleiner wird (2.53), driftet das Teilchen senkrecht zum Gradienten und zur Richtung des Magnetfelds (siehe Abbildung 2.7).

2.7 Mikroskopische Instabilitäten

Trotz der im Abschnitt 2.5 berechneten stabilen Magnetfeldgeometrie, ist der dauerhafte magnetische Einschluss noch nicht gewährleistet. Kleine Änderungen von makroskopischen Größen verlaufen aufgrund der Stabilität des Magnetfelds wieder in den Gleichgewichtszustand. Dieses wird allerdings auf der Basis der idealen MHD berechnet. Dabei wird das mikroskopische Verhalten der Plasmateilchen vollkommen vernachlässigt bzw. darüber gemittelt. Im Folgenden wird ein Mechanismus vorgestellt, der zu mikroskopischen Instabilitäten führt (siehe dazu [19]). Die Strukturen dieser nach [20] bezeichneten primären Instabilität werden Driftwellen oder Streamer genannt und sind verantwortlich für den anomalen Transport, der den dauerhaften Einschluß des Plasmas zur Zeit noch unmöglich macht. Durch eine nichtlineare Sättigung werden diese Driftwellen aber selbst instabil. Es setzen nach [20] sekundäre Instabilitäten ein, die Zonal Flows genannt werden. Diese poloidalen Scherströmungen sind in der Lage, die Driftwellen zu dämpfen und führen zum nichtlinearen Phänomen des Dimits Shifts [4] (siehe Abschnitt 2.8).

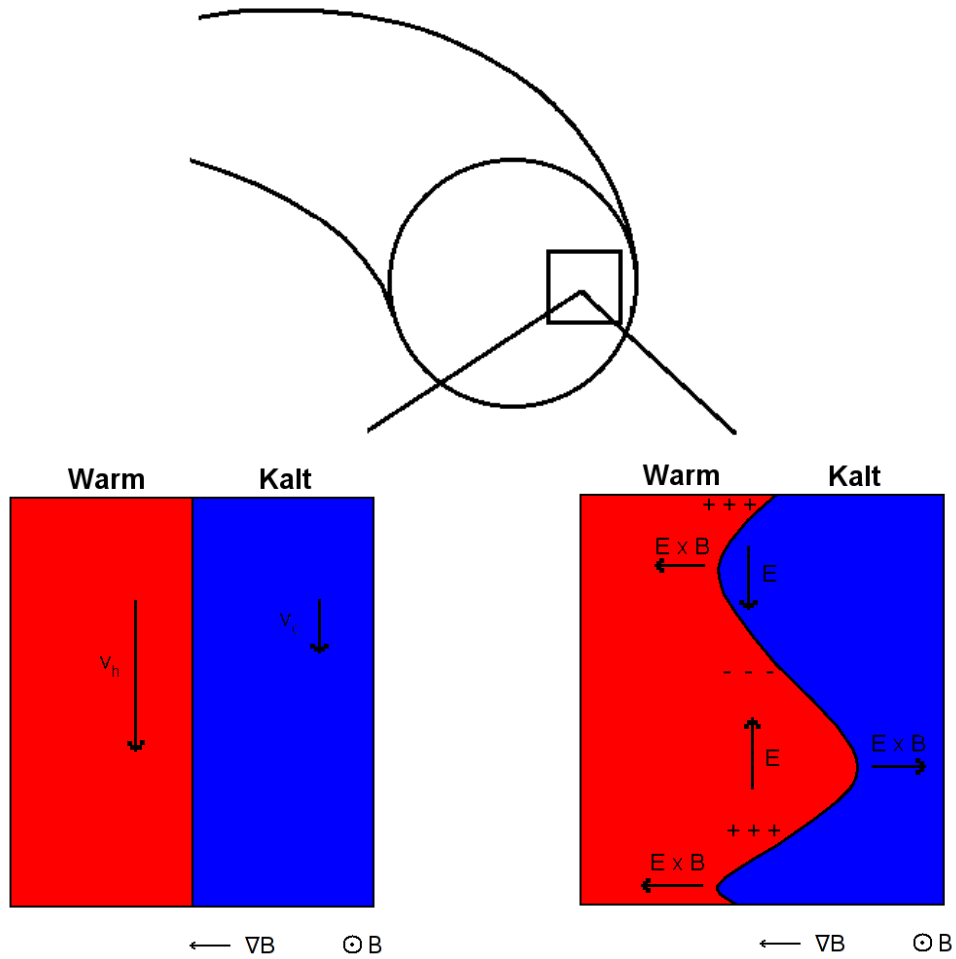


Abbildung 2.8: Entstehung einer Driftwelle bei einem radialen Temperatur- und Magnetfeld-Gradienten.

Die Ionen-Temperatur-Gradient-Mode

Ein Mechanismus, der zur Instabilität führt, ist die sogenannte Ionen-Temperatur-Gradient-Mode, kurz: ITG-Mode (siehe Abbildung 2.8). Aufgrund des Temperatur-Gradienten bewegen sich die Plasma-Teilchen auf der linken Seite schneller als die auf der rechten. Ist jetzt eine kleine Störung gegeben, so verursacht die ∇B -Drift eine Ladungstrennung und das daraus resultierende \mathbf{E} -Feld führt zu einer $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift, die die Störung verstärkt. So entsteht eine Instabilität, getrieben vom Temperatur-Gradienten, die den Plasmaeinschluss verhindert. Diese radialen Strukturen werden auch Driftwellen oder Streamer genannt. Diese turbulenten Strömungen treten nur auf der Außenseite des Torus auf. Auf der Innenseite führen kleine Störungen aufgrund des entgegengesetzten Temperaturgradienten wieder in den Gleichgewichtszustand. Daher bezeichnet man die Torus-Außenseite auch als „bad-curvature-region“ und die Innenseite als „good-curvature-region“.

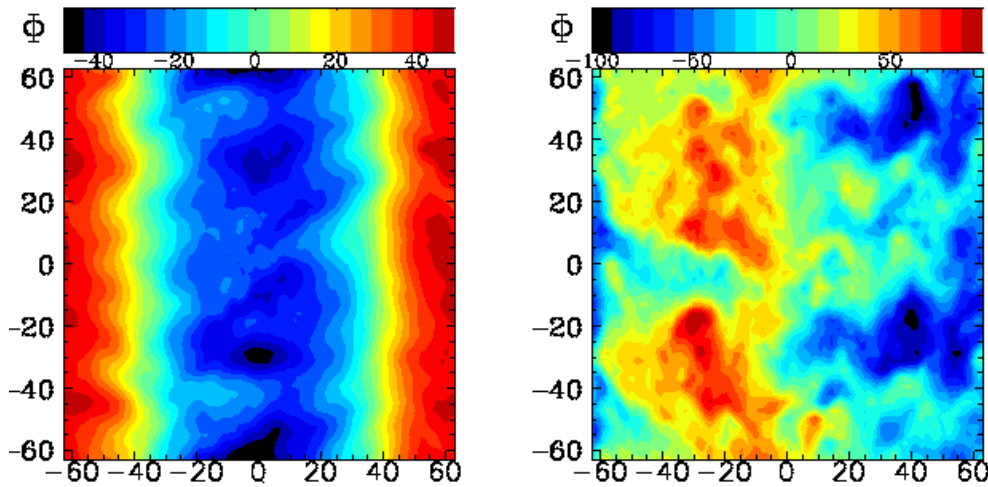


Abbildung 2.9: Contour Plot eines Zonal Flows (links) und einer tertiären Instabilität (rechts): Farblich kodiert ist hier das elektrostatische Potential. Die Strömung hat eine Wellenlänge von ungefähr 120 Larmorradien. Die Grafik wurde mit GENE (Kapitel 5) erstellt.

Man kann diesen Mechanismus auch mit der Rayleigh-Taylor-Instabilität vergleichen. Liegt eine dichtere Flüssigkeit über einer weniger dichten, so wird jede Störung durch die Schwerkraft verstärkt. Im anderen Fall würde eine Störung wieder in den Gleichgewichtszustand führen. Die Rolle der Schwerkraft übernimmt im Tokamak der Magnetfeld-Gradient. Nach [20] handelt es sich bei den Driftwellen um eine primäre Instabilität.

Zonal Flows

Bei steigendem Temperatur-Gradienten wächst die ITG Mode immer weiter an, bis sie selbst instabil wird. Das Einsetzen dieser Instabilität kann mit einer Kelvin-Helmholtz-Instabilität verglichen werden, da sich entgegengesetzte Strömungen verwirbeln. Es setzen dort poloidale Scherströmungen mit $k_y = k_z = 0$ ein, die die Driftwellen dämpfen (siehe Abbildung 2.9 links). Nach [20] können diese Scherströmungen als sekundäre Instabilitäten identifiziert werden. Diese Scherströmungen werden auch als Zonal Flows bezeichnet. Sie werden von der ITG-Mode getrieben, dämpfen diese aber wiederum. Diese Zonal Flows sind von besonderem Interesse, da sie in der Lage sind, den radialen Transport, verursacht durch die ITG-Mode, signifikant zu unterdrücken. Erhöht man den Temperatur-Gradienten noch weiter, werden die Zonal Flows auch instabil. [20] identifiziert dieses Phänomen auch als tertiäre Instabilitäten (siehe Abbildung 2.9 rechts). Warum die Zonal Flows instabil werden und welche Mechanismen dafür verantwortlich sind, ist noch nicht vollständig geklärt und ein wichtiger Gegenstand der Fusionsforschung, insbesondere dieser Arbeit.

2.8 Der Dimits Shift

Wie im vorigen Abschnitt erwähnt wird, sind Zonal Flows in der Lage den radialen Transport zu unterdrücken. Das führt zu einer nichtlinearen Verschiebung des Transportes (siehe Abbildung 2.10). Diese Verschiebung wird nach [4] auch Dimits Shift genannt. Betrachtet man nur lineare Vorgänge im Plasma (numerisch einfach zu lösen, indem man die nichtlinearen Terme gleich Null setzt), so stellt man fest, dass ab einem kritischen Temperatur-Gradienten (hier mit ITG_P gekennzeichnet) eine Störung positive Wachstumsraten besitzt, also eine Instabilität einsetzt. An dieser Stelle entstehen die Driftwellen. Schaltet man die nichtlinearen Terme wieder dazu, stellt man fest, dass die Driftwellen ab einer gewissen Amplitude von Zonal Flows unterdrückt werden. Sie verschieben also den kritischen Temperatur-Gradienten. Da die Zonal Flows bei höheren Temperaturgradienten auch instabil werden (hier mit ITG_T gekennzeichnet), und der radiale Transport anwächst, kann man die Verschiebung, also den Dimits Shift DS , durch die Differenz der nichtlinearen und linearen Schwelle definieren:

$$DS = ITG_T - ITG_P \quad (2.68)$$

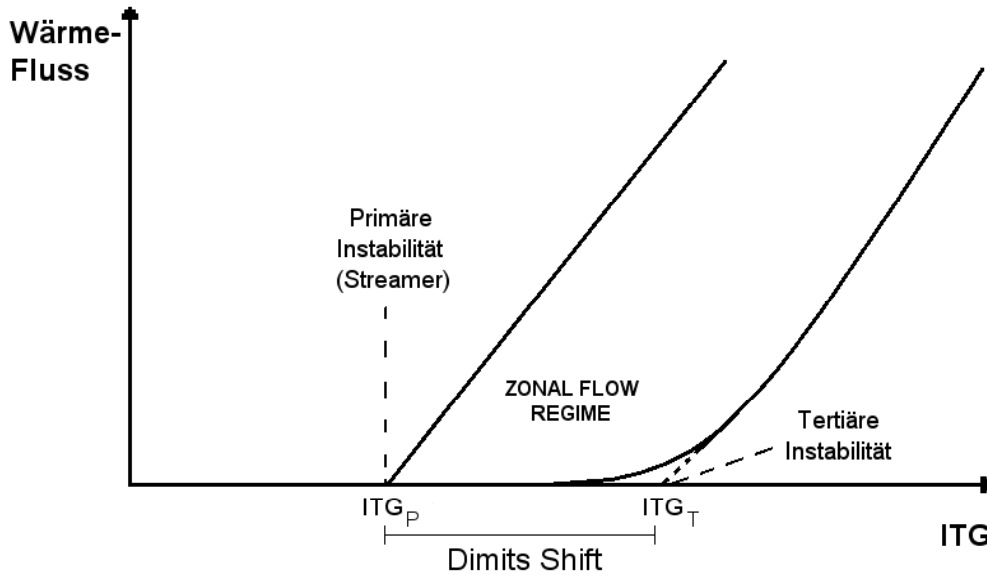


Abbildung 2.10: Die Nichtlineare Verschiebung bedingt durch Zonal Flows führt zum Dimits Shift.

Dieser Bereich wird also von poloidalen Scherströmungen dominiert, die den Transport unterdrücken. Wie im Abschnitt 2.7 erwähnt wird, ist noch nicht geklärt, warum die Zonal Flows instabil werden und somit auch nicht die Frage, warum der Dimits Shift endlich ist. Daher ist es von besonderem Interesse diesen Bereich genauer zu erforschen, das heißt zu bestimmen, wie er von verschiedenen Plasma-Parametern abhängt. Im Kapitel 4 wird ein Sättigungsmechanismus für die Zonal Flows vorgestellt, mit dessen Hilfe ein Versuch unternommen wird, die Endlichkeit des Dimits Shifts zu erklären.

2.9 Die Hasegawa-Mima-Gleichung

Ein einfaches Modell zur Beschreibung von Driftwellen Turbulenz ist die von den Physikern A. Hasegawa und K. Mima 1977 entwickelte Hasegawa-Mima-Gleichung (siehe dazu [21] und [22]). Es handelt sich dabei um eine zweidimensionale nichtlineare partielle Differentialgleichung, die die zeitliche Entwicklung des elektrostatischen Potentials bestimmt. Dabei wird das Plasma wie eine Flüssigkeit nach den Gleichungen aus Abschnitt 2.2 beschrieben (Herleitung nach [23]). Es werden zusätzliche Annahmen bei diesem Modell gemacht:

- Bewegung der Ionen in der xy -Ebene
- Homogenes Hintergrundmagnetfeld: $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$
- Inhomogenes Plasma: $n_i = n_i(x)$ und $\nabla n_i = -n_i/L_n \mathbf{e}_x$
- Kalte Ionen: $T_i \ll T_e$
- Adiabatische Elektronen: $n_e/n_{e0} = e\phi T_e$
- Quasineutralitätsbedingung: $\tilde{n}_i = \tilde{n}_e$
- Starkes Magnetfeld \rightarrow Kleinheitsparameter $\varepsilon = 1/\Omega_i d/dt$ mit $\Omega_i = eB/m_i$

Die Bewegungsgleichung für die Ionenflüssigkeit (2.24b) lautet:

$$m_i n_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + n_i e (\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})) \quad (2.69)$$

Da kalte Ionen vorausgesetzt werden, kann der Druckterm vernachlässigt werden. Mit $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ und $\Omega_i = eB/m_i$ geht (2.69) über in:

$$\frac{1}{\Omega_i} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{\Omega_i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\frac{1}{B} \nabla\phi + \frac{1}{B} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (2.70)$$

Mit Hilfe des Kleinheitsparameters lässt sich die Geschwindigkeit \mathbf{u} nach Ordnungen in ε entwickeln:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.71)$$

Einsetzen in (2.70) liefert:

$$\frac{1}{\Omega_i} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) = -\frac{1}{B} \nabla\phi + \frac{1}{B} (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) \times \mathbf{B} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.72)$$

In nullter Ordnung ergibt sich die Gleichung:

$$0 = -\frac{1}{B} \nabla\phi + \frac{1}{B} \mathbf{u}_0 \times \mathbf{B} \quad (2.73)$$

Vektormultiplikation mit \mathbf{B} liefert unter Ausnutzung des Graßmannschen Entwicklungssatzes und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = 0$:

$$\mathbf{u}_0 = \frac{-\nabla\phi \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.74)$$

Das ist die aus Abschnitt 2.6 bekannte $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift (siehe (2.56)).

In erster Ordnung ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{1}{\Omega_i} \frac{d\mathbf{u}_0}{dt} = \frac{1}{\Omega_i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_0 = \frac{1}{B} \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B} \quad (2.75)$$

Nach Vektormultiplikation mit \mathbf{B} folgt für \mathbf{u}_1 :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\Omega_i B} \mathbf{B} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_0 \quad (2.76)$$

Das ist die sogenannte Polarisationsdrift. Sie ist nach Definition eine Ordnung kleiner als die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift, spielt aber trotzdem eine wichtige Rolle, da sie im Gegensatz zur $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift eine endliche Divergenz aufweist, sofern das Magnetfeld homogen und stationär ist:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \right) = \frac{\mathbf{B}}{B^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\mathbf{B}}{B^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.77)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = -\frac{1}{\Omega_i B} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \right) \nabla^2 \phi \quad (2.78)$$

An dieser Stelle wird die Kontinuitätsgleichung für die Ionenflüssigkeit (2.22b) verwendet:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}) = \frac{\partial n_i}{\partial t} + n_i \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla n_i) = 0 \quad (2.79)$$

Wird für \mathbf{u} wieder der Ansatz (2.71) gemacht, die Relation (2.77) ausgenutzt und die Dichte $n_i = n_0 + \tilde{n}$ in einen stationären und einen zeitabhängigen Anteil zerlegt, so folgt für (2.79):

$$\frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} + (n_0 + \tilde{n}_i) \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) \cdot (\nabla (n_0 + \tilde{n}_i)) = 0 \quad (2.80)$$

Der Term $\tilde{n}_i \nabla \cdot \mathbf{u}_1$ kann vernachlässigt werden, da $\tilde{n} \ll n_0$. Es wird außerdem $\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_0$ gesetzt, da \mathbf{u}_1 eine Ordnung kleiner als \mathbf{u}_0 ist. Mit diesen Vereinfachungen gilt:

$$\frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0 \cdot (\nabla (n_0 + \tilde{n}_i)) = 0 \quad (2.81)$$

Mit der Elektronen-Adiabatzität folgt für die Quasineutralitätsbedingung:

$$\tilde{n}_i = \tilde{n}_e = \frac{e\phi}{T_e} n_{e0} = \frac{e\phi}{T_e} n_0 \quad (2.82)$$

Einsetzen von (2.82), (2.78) und $\nabla n_0 = -(n_0/L_n) \nabla x$ in (2.81) liefert schließlich die Hasegawa-Mima-Gleichung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \right) \left[\left(\frac{e\phi}{T_e} \right) - \rho_s^2 \nabla^2 \left(\frac{e\phi}{T_e} \right) - \left(\frac{x}{L_n} \right) \right] = 0 \quad (2.83)$$

$$\text{mit } \rho_s = \frac{c_s}{\Omega_i} \quad \text{und} \quad c_s^2 = \frac{T_e}{m_i} \quad (2.84)$$

Folgende Normierungen bringen die Hasegawa-Mima-Gleichung auf eine dimensionslose Form:

$$\frac{e\phi}{T_e} \frac{L_n}{\rho_s} \rightarrow \phi \quad (2.85a)$$

$$\frac{x}{\rho_s} \rightarrow x \quad (2.85b)$$

$$\frac{y}{\rho_s} \rightarrow y \quad (2.85c)$$

$$\frac{c_s t}{L_n} \rightarrow t \quad (2.85d)$$

Die Hasegawa-Mima-Gleichung lautet dann:

$$\frac{d}{dt} (\phi - \nabla^2 \phi - x) = 0 \quad (2.86)$$

mit $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - (\nabla \phi \times \mathbf{e}_z) \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$

Eine Anwendung der Hasegawa-Mima-Gleichung wird in Kapitel 3 ausführlich diskutiert.

3 Modelle zur Untersuchung von Instabilitäten

In diesem Kapitel wird auf zwei verschiedene Plasma Modelle eingegangen, die zum Verständnis des Dimits Shifts beitragen. Im ersten Abschnitt wird das sehr vereinfachte Gyro-Fluid-Modell aus [20] vorgestellt. Es wird ausführlich auf der Basis von [19] hergeleitet, da auch das Plasma Modell in Kapitel 4 auf diesem basiert. Mit dem Modell ist es möglich, die Wachstumsraten von tertiären Instabilitäten zu bestimmen, die für die nichtlineare Schwelle des Dimits Shifts verantwortlich sind. Man findet dort heraus, dass nicht nur das zonale Potential, sondern auch die zonale Temperatur Einfluss auf diese Instabilitäten haben. Im zweiten Abschnitt wird das, auf der Basis der Hasegawa-Mima-Gleichung aufgebaute, Vier-Moden-Modell aus [24] vorgestellt. Es ist dazu in der Lage, die nichtlinearen Wachstumsraten von Zonal Flows zu bestimmen, die verantwortlich für die Sättigung der Driftwellen und somit auch verantwortlich für den Dimits Shift sind.

3.1 Gyro-Fluid-Modell

Ein Gyro-Fluid-Modell ist ein Modell, das das Plasma als Fluid beschreibt und Guiding-Centre-Koordinaten (siehe Abschnitt 2.6) verwendet, um über die Gyration zu mitteln. Ein sehr stark vereinfachtes Gyrofluid-Modell wird durch Gleichung (1) aus [20] beschrieben. Sie lautet:

$$\frac{dn}{dt} + \frac{1}{2} \{ \tau \nabla_{\perp}^2 \psi, T_{\perp} \} = 0 \quad (3.1a)$$

$$\frac{dT_{\perp}}{dt} = 0 \quad (3.1b)$$

$$\text{mit } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \{ \psi, \cdot \} \quad (3.1c)$$

$$\text{und } n = \psi - \langle \psi \rangle - \nabla_{\perp}^2 \left((1 + \tau) \psi - \tau \langle \psi \rangle + \tau \frac{T_{\perp}}{2} \right) \quad (3.1d)$$

n ist die Teilchendichte, ψ das gyro-gemittelte Potential, die geschweiften Klammern $\{ \dots \}$ sind Poisson-Klammern und die eckigen Klammern $\langle \dots \rangle$ bedeuten eine Flussflächenmittelung, die angenähert eine Mittelung über y ist. Die Dynamik des Systems wird in diesem Modell komplett vernachlässigt, da sich die weitere Untersuchung nur auf Bereiche bezieht, in denen die Zonal Flows schon gesättigt sind. Darauf wird im Anschluss eingegangen.

Die Herleitung

Da auch das Plasma Modell aus Kapitel 4 auf diesem Modell basiert, wird es im Folgenden auf der Grundlage von [19] hergeleitet. Alle Gleichungen, die dieser Referenz entstammen, werden daher mit dem Index „B“ gekennzeichnet. Ausgangspunkt ist die Gleichung $(2.97)_B$, die Quasineutralitätsbedingung:

$$n_e = \frac{n}{1 + b/2} - \frac{bT_\perp}{2(1 + b/2)^2} + (\Gamma_0 - 1)\phi \quad \text{mit} \quad b = k_\perp^2 \rho_i^2 \quad (3.2)$$

Die RHS ist identisch mit der Ionen-Dichte. Die ersten beiden Terme auf der RHS beschreiben die Dichte der Ionen-Gyro-Zentren. Da diese aber nicht mit der Teilchen-Dichte übereinstimmt, wird die sogenannte Polarisationsdichte der Ionen addiert. Dabei gilt nach $(2.20)_B$:

$$\Gamma_0 = \langle J_0 \rangle^2 \quad (3.3)$$

J_0 ist ein linearer Operator, der die Gyromittelung vornimmt. Im Fourier-Raum ist dies die Besselfunktion. Mit Hilfe der Padé -Näherung ([19] S.37) kann man Γ_0 annähern durch:

$$\Gamma_0 = (1 + b/2)^{-2} \quad (3.4)$$

So stellt Gleichung (3.2) insgesamt die Quasineutralitätsbedingung dar. Mit der Annahme adiabatischer Elektronen $(2.98)_B$ unter Ausnutzung von (3.4) folgt:

$$\tau(\phi - \langle \phi \rangle) = \frac{n}{1 + b/2} - \frac{bT_\perp}{2(1 + b/2)^2} + \left((1 + b/2)^{-2} - 1 \right) \phi \quad (3.5)$$

Da sich das Potential ϕ auf die Ionen und nicht deren Gyrozentren bezieht, wird durch Verwendung des Operators J_0 das gyro-gemittelte Potential ψ bestimmt ([19] S.37):

$$\psi = \langle J_0 \rangle \phi = \sqrt{\Gamma_0} \phi = (1 + b/2)^{-1} \phi \quad (3.6)$$

Daraus folgt:

$$\tau \left(\frac{b}{2} + 1 \right) (\psi - \langle \psi \rangle) = \frac{n}{1 + b/2} - \frac{bT_\perp}{2(1 + b/2)^2} + \left((1 + b/2)^{-2} - 1 \right) \left(\frac{b}{2} + 1 \right) \psi \quad (3.7)$$

Da die Instabilitäten im Plasma kleine k_\perp besitzen, kann man obige Gleichung um $b = 0$ entwickeln und Terme zweiter Ordnung in b vernachlässigen. Auflösen nach n liefert dann:

$$n = \tau(\psi - \langle \psi \rangle) + b \left((1 + \tau)\psi - \tau\langle \psi \rangle + \frac{T_\perp}{2} \right) + \mathcal{O}(b^2) \quad (3.8)$$

Die Normierungen aus [20] unterscheiden sich etwas von denen aus [19]. Daher wird mit den folgenden Transformationen die Form der Gleichung aus [20] hergestellt:

$$\psi \rightarrow \frac{\psi}{\tau} \quad (3.9a)$$

$$b \rightarrow \tau b \quad (3.9b)$$

Damit Folgt für die Gleichung (3.8):

$$n = \psi - \langle \psi \rangle - \nabla_{\perp}^2 \left((1 + \tau) \psi - \tau \langle \psi \rangle + \tau \frac{T_{\perp}}{2} \right) + \mathcal{O}(b^2) \quad (3.10)$$

Dabei wird b durch $-\nabla_{\perp}^2$ ersetzt, da die Annahme gemacht wird, dass ψ nur aus einer Wellenzahl besteht. Gleichung (3.10) stimmt mit der Gleichung (3.1d) überein. Die zeitliche Entwicklung der Dichte ist durch Gleichung (2.91)_B gegeben:

$$\frac{dn}{dt} + \left(\frac{1}{2} \hat{\nabla}_{\perp}^2 \mathbf{v}_{\psi} \right) \cdot \nabla_{\perp} T_{\perp} = 0 \quad (3.11)$$

$$\text{mit } \mathbf{v}_{\psi} = \mathbf{b} \times \nabla_{\perp} \psi, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{\psi} \cdot \nabla_{\perp}$$

An dieser Stelle werden die Näherungen $k_{\parallel} = \omega_{*} = \omega_d = 0$ gemacht. (2.26)_B definiert den Operator $\hat{\nabla}_{\perp}^2$:

$$\frac{1}{2} \hat{\nabla}_{\perp}^2 \psi = b \frac{\partial \sqrt{\Gamma_0}}{\partial b} \phi \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} &= b \frac{\partial \Gamma_0}{\partial b} \frac{1}{2\sqrt{\Gamma_0}} \phi = b \frac{\partial \Gamma_0}{\partial b} \frac{1}{2\Gamma_0} \psi = \frac{-b}{b+2} \psi = \left(-\frac{b}{2} + \mathcal{O}(b^2) \right) \psi \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \hat{\nabla}_{\perp}^2 \psi = \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 \psi + \mathcal{O}(b^2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Bei der zweiten Umformung wird (3.6) benutzt, bei der dritten Umformung (3.4). Erneute Entwicklung von b und Ersetzung durch den Laplace-Operator liefert schließlich (3.13). Damit folgt:

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{\perp}^2 \mathbf{v}_{\psi} \cdot \nabla_{\perp} T_{\perp} &= \nabla_{\perp}^2 \mathbf{v}_{\psi} \cdot \nabla_{\perp} T_{\perp} + \mathcal{O}(b^2) = \mathbf{b} \times \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 \psi) \cdot \nabla_{\perp} T_{\perp} + \mathcal{O}(b^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla_{\perp}^2 \psi) \frac{\partial T_{\perp}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\nabla_{\perp}^2 \psi) \frac{\partial T_{\perp}}{\partial x} + \mathcal{O}(b^2) \\ &\rightarrow \hat{\nabla}_{\perp}^2 \mathbf{v}_{\psi} \cdot \nabla_{\perp} T_{\perp} = \{ \nabla_{\perp}^2 \psi, T_{\perp} \} + \mathcal{O}(b^2) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Analog kann man die totale Ableitung auf folgende Form bringen:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \{ \psi, \cdot \} + \mathcal{O}(b^2) \quad (3.15)$$

Das ist die totale Ableitung wie in (3.1c). Transformation von ψ durch (3.9a) liefert die Normierung wie in [20]. Daraus folgt mit (3.14) für Gleichung (3.11):

$$\frac{dn}{dt} + \frac{1}{2} \{ \tau \nabla_{\perp}^2 \psi, T_{\perp} \} + \mathcal{O}(b^2) = 0 \quad (3.16)$$

Gleichung (3.16) stimmt mit der Gleichung (3.1a) überein. Bleibt nur noch die Relation (3.1b) zu zeigen. Dazu geht man von Gleichung (2.94)_B aus:

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} + \frac{1}{2} \hat{\nabla}_{\perp}^2 \mathbf{v}_{\psi} \cdot \nabla_{\perp} p_{\perp} + \hat{\nabla}_{\perp}^2 \mathbf{v}_{\psi} \cdot \nabla_{\perp} T_{\perp} = 0 \quad (3.17)$$

An dieser Stelle werden die Näherungen $k_{\parallel} = \omega_{*} = \omega_d = v_{\parallel} = 0$ gemacht. (2.27)_B definiert den Operator $\hat{\nabla}_{\perp}^2$:

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{\perp}^2 \psi &= b \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left(b \sqrt{\Gamma_0} \right) \phi \\ &= \frac{b}{\sqrt{\Gamma_0}} \left(\frac{b}{2} \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial b^2} - \frac{1}{4\Gamma_0} \left(\frac{\partial \Gamma_0}{\partial b} \right)^2 - \frac{\partial \Gamma_0}{\partial b} \right) \phi \\ &= \frac{b}{\Gamma_0} \left(\frac{b}{2} \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial b^2} - \frac{1}{4\Gamma_0} \left(\frac{\partial \Gamma_0}{\partial b} \right)^2 - \frac{\partial \Gamma_0}{\partial b} \right) \psi \\ &= \frac{-4b}{(b+2)^2} \psi = (-b + \mathcal{O}(b^2)) \psi \\ &\rightarrow \hat{\nabla}_{\perp}^2 \psi = \nabla_{\perp}^2 \psi + \mathcal{O}(b^2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Bei der zweiten Umformung wird (3.6) benutzt, bei der dritten Umformung wieder (3.4). Erneute Entwicklung von b und Ersetzung durch den Laplace-Operator liefert schließlich (3.19). Transformation von ψ durch (3.9a) liefert wieder die Normierung wie in [20]. Damit folgt unter Verwendung von (3.14) für (3.17):

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\perp}}{dt} + \frac{1}{2} \hat{\nabla}_{\perp}^2 \mathbf{v}_{\psi} \cdot \nabla_{\perp} p_{\perp} + \hat{\nabla}_{\perp}^2 \mathbf{v}_{\psi} \cdot \nabla_{\perp} T_{\perp} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dp_{\perp}}{dt} + \frac{1}{2} \{ \nabla_{\perp}^2 \psi, p_{\perp} \} + \{ \nabla_{\perp}^2 \psi, T_{\perp} \} + \mathcal{O}(b^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Der Druck hängt über folgende Relation mit der Dichte und Temperatur zusammen:

$$p_{\perp} = n T_{\perp} \quad (3.21)$$

Entwicklung um $(n, T_\perp) = (n_0, T_{0\perp})$ liefert:

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_\perp &= \tilde{n}T_{0\perp} + n_0\tilde{T}_\perp \\
 &\Leftrightarrow \frac{\tilde{p}_\perp}{p_{0\perp}} = \frac{\tilde{n}}{n_0} + \frac{\tilde{T}_\perp}{T_{0\perp}} \\
 \text{mit } \frac{\tilde{p}_\perp}{p_{0\perp}} &\rightarrow p_\perp, \quad \frac{\tilde{n}}{n_0} \rightarrow n, \quad \frac{\tilde{T}_\perp}{T_{0\perp}} \rightarrow T_\perp \quad \text{folgt} \\
 p_\perp &= n + T_\perp
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Damit folgt für (3.20):

$$\begin{aligned}
 \frac{dn}{dt} + \frac{dT_\perp}{dt} + \frac{1}{2}\{\tau \nabla_\perp^2 \psi, n\} + \frac{1}{2}\{\tau \nabla_\perp^2 \psi, T_\perp\} + \{\tau \nabla_\perp^2 \psi, T_\perp\} + \mathcal{O}(b^2) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{dT_\perp}{dt} + \{\tau \nabla_\perp^2 \psi, \frac{n}{2} + T_\perp\} + \mathcal{O}(b^2) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Bei der Umformung wird (3.16) benutzt. Vernachlässigung der Poisson-Klammer liefert schließlich die gesuchte Relation (3.1b):

$$\frac{dT_\perp}{dt} + \mathcal{O}(b^2) = 0 \tag{3.24}$$

Wachstumsrate der tertiären Instabilität

Mit Hilfe des Gyro-Fluid-Modells wird die Wachstumsrate einer tertiären Instabilität bestimmt, die Aufschluss darüber gibt, wie die Zonal Flows instabil werden und daher den Dimits Shift begrenzen. Zuerst werden jedoch numerische Ergebnisse aus [20] präsentiert, die bei den analytischen Rechnungen mit dem Gyro-Fluid-Modell miteinfließen. Mit Hilfe von gyrokinetischen Simulationen können die Wachstumsraten γ einer kleinen k_y -Störung bestimmt werden, die dem aus der Simulation stammenden Zonal Flow ($k_x \simeq 0.25, k_y = 0$ in ψ und T) überlagert werden. Das Neue an dieser Untersuchung ist, dass die durchschnittliche Verscherungsrate γ_E künstlich variiert wird, indem alle Fourier-Koeffizienten des Potentials und der Temperatur mit einem konstanten Faktor reskaliert werden. Dabei ist γ_E wie folgt definiert:

$$\gamma_E = \left. \frac{d(\mathbf{v}_E)_y}{dx} \right|_{\text{RMS}} \propto \left. \frac{d^2\psi}{dx^2} \right|_{\text{RMS}} \tag{3.25}$$

\mathbf{v}_E ist die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Geschwindigkeit. Der Index RMS (root mean square) bedeutet Effektivwert der Verscherung, der bis auf einen Faktor mit dem Effektivwert der zweiten Ableitung nach x vom Potential ψ übereinstimmt. Abbildung 3.1a zeigt die Wachstumsraten kleiner k_y -Störungen in Abhängigkeit der Verscherungsrate, wobei über alle k_y maximiert wird. Der Temperaturgradient beträgt dort $R/L_T = 4.75$. Für $\gamma_E = 0$, also ohne jegliche Verscherung, hat man es mit einer ITG-Mode zu tun, die mit $\gamma \simeq 0.07$ auch in linearen Untersuchungen auftritt.

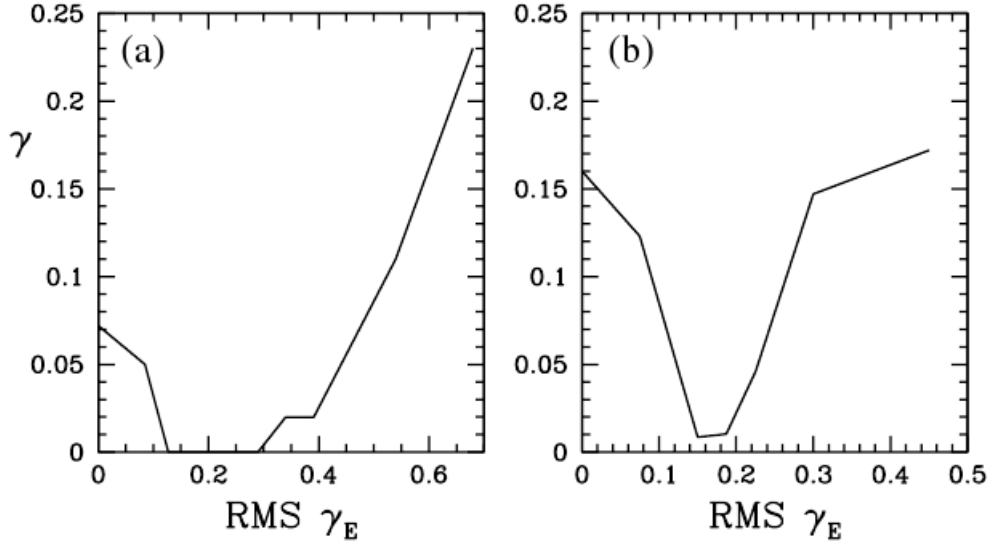


Abbildung 3.1: Wachstumsraten γ kleiner k_y -Störungen in Abhängigkeit der effektiven Verscherung γ_E für (a) $R/L_T = 4.75$ und (b) $R/L_T = 5.75$. Quelle: [20]

Wird γ_E erhöht, so wird diese Mode durch die Scherströmungen soweit gedämpft, bis sie bei $\gamma_E \simeq 0.13$ stabil wird. Der nicht reskalierte Wert von γ_E fällt in dieses Regime. Erhöht man die Verscherungsrate weiter, so tritt bei $\gamma_E \simeq 0.3$ eine neue Instabilität auf, dessen Wachstumsrate monoton mit γ_E steigt und nach [20] auch tertiäre Instabilität genannt wird. Sie ist räumlich an den Stellen lokalisiert, wo die Verscherungsrate minimal ist. Abbildung 3.1b zeigt das gleiche Szenario, hier jedoch bei einem Temperaturgradienten von $R/L_T = 5.75$. Bei diesem Wert ist es nicht möglich die ITG-Mode zu stabilisieren, da die Zonal Flows instabil werden, ehe sie ihre stabilisierende Wirkung zeigen können. Mit Hilfe dieser Ergebnisse wird das Gyro-Fluid-Modell (3.1) zur analytischen Bestimmung der tertiären Wachstumsrate verwendet. Die Zonal Flows (elektrostatisches Potential und Temperatur) können mit folgendem Ansatz repräsentiert werden:

$$\psi = \psi_0(x) + \tilde{\psi}(x)e^{\gamma t + i k_y y} \quad (3.26a)$$

$$T_\perp = T_0(x) + \tilde{T}_\perp(x)e^{\gamma t + i k_y y} \quad (3.26b)$$

$$\psi_0(x) = \frac{\psi'_0 \sin(k_l x)}{k_l} \quad (3.26c)$$

$$T_0(x) = \frac{T'_0 \sin(k_l x + \delta)}{k_l} \quad (3.26d)$$

Dabei stellen ψ_0 und T_0 die statischen Zonal Flows dar, $\tilde{\psi}$ und \tilde{T}_\perp sind kleine Störungen.

Wird dieser Ansatz in die Gleichungen (3.1) eingesetzt und in $\tilde{\psi}$ und \tilde{T}_\perp linearisiert, so erhält man folgende Dispersionsrelation:

$$\left[(1 + (1 + \gamma) k_y^2) \bar{\gamma} + i k_y \left(k_y^2 \tau \frac{dT_0}{dx} - \tau \frac{d^3 \psi_0}{dx^3} \right) \right] \tilde{\psi} = \frac{d}{dx} \left[(\tau \gamma + \bar{\gamma}_T) \bar{\gamma} \frac{d}{dx} \left(\frac{\tilde{\psi}}{\bar{\gamma}} \right) \right] \quad (3.27)$$

$$\text{mit } \bar{\gamma} = \gamma + i k_y \frac{d\psi_0}{dx} \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}_T = \gamma + i k_y \left[(1 + \tau) \frac{d\psi_0}{dx} + \tau \frac{dT_0}{dx} \right]$$

Aus den Simulationen geht hervor, dass die Instabilität dort lokalisiert ist, wo die Verscherungs-Rate verschwindet. Die Ableitungen von ψ und T_0 sind dort extremal, da auch die zonale Temperatur eine Wellenzahl von $k_x \simeq 0.25$ hat, aber um $\delta = \pi$ phasenverschoben mit ψ ist. Daher wird (3.27) um $x = x_0$ entwickelt, mit $\partial_x^2 \psi|_{x_0} = \partial_x^2 T|_{x_0} = 0$. Da die Zonal Flows kleine $k_x \simeq 0.25$ besitzen, wird die Gleichung zusätzlich um $k_x = 0$ entwickelt und über die k_x maximiert. Diese Näherungen führen zu einer maximalen Wachstumsrate:

$$\gamma \simeq 0.55 k_y \sqrt{\left. \frac{\tau}{2} \frac{dT_0}{dx} \right|_{x=x_0} \left. \frac{d^3 \psi_0}{dx^3} \right|_{x=x_0}} \quad (3.28)$$

Die Wachstumsrate der tertiären Instabilität hängt also von der Änderung der zonalen Temperatur in x -Richtung und der dritten Ableitung des zonalen Potentials nach x ab. Je größer also die Verscherungsrate der Zonal Flows ist, desto größer ist auch die Wachstumsrate der tertiären Instabilität.

3.2 Vier-Moden-Modell

In diesem Abschnitt wird ein Modell vorgestellt, dass das Wechselspiel zwischen Driftwellen und Zonal Flows beschreiben soll [24]. Es basiert auf dem Hasegawa-Mima-Modell (Abschnitt 2.9), ist aber auf nur vier Moden reduziert. Sie bestehen aus einer Driftwelle, einem Zonal Flow und zwei Seitenbändern zur Kopplung dieser beiden Strukturen. Als erstes wird mit dem Modell die Wachstumsrate eines Zonal Flows ermittelt, um anschließend, mit einer kleinen Modifizierung des Modells, einen stationäreren Zustand zu untersuchen und die Sättigung der Driftwellen durch die Zonal Flows zu beschreiben. Da die Zonal Flows die Driftwellen dämpfen, kommt es zum nichtlinearen Phänomen des Dimits Shifts. Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt wird hier ein Mechanismus vorgestellt, der für die Entstehung dieser Verschiebung verantwortlich ist.

Wachstumsraten der Zonal Flows

Ausgangspunkt ist die generalisierte Hasegawa-Mima-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} (\phi - \langle \phi \rangle - \nabla^2 \phi - x) = 0 \quad (3.29)$$

mit $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$

Diese Gleichung stimmt bis auf den Term $\langle \phi \rangle$ mit der Hasegawa-Mima-Gleichung aus Abschnitt 2.9 überein, die mit dieser Modifizierung realistischer ist. Die Zeit t , die räumlichen Variablen x und y und das elektrostatische Potential $\phi = \phi(x, y, t)$ sind geeignet normiert. Die eckigen Klammern bedeuten eine Flussflächenmittelung, in diesem Fall eine räumliche Mittelung über die y -Richtung. Betrachtet man eine endliche und doppelperiodische Box in $\mathbf{r} = (x, y)$, so kann man das Potential in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (3.30)$$

Die Fourierkoeffizienten müssen wegen des reellwertigen Potentials folgendende Bedingung erfüllen:

$$\phi_{-\mathbf{k}} = \phi_{\mathbf{k}}^* \quad (3.31)$$

Setzt man (3.30) in (3.29) ein und projiziert auf \mathbf{k} , so erhält man die Amplitudengleichung:

$$(\delta_1 + k^2) \dot{\phi}_{\mathbf{k}} + ik_y \phi_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} [(k_{1x} k_{2y} - k_{1y} k_{2x}) (\delta_2 + k_2^2)] \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \quad (3.32)$$

mit $\delta_1 = \begin{cases} 0 & \text{falls } k_y = 0 \\ 1 & \text{falls } k_y \neq 0 \end{cases}$ und $\delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{falls } k_{2y} = 0 \\ 1 & \text{falls } k_{2y} \neq 0 \end{cases}$

Der Punkt bezeichnet die partielle Ableitung nach der Zeit. Die δ rühren daher, dass $\langle \phi \rangle$ nur für $k_y = 0$ einen Beitrag liefert. Um ein einfaches dynamisches System zu erlangen, reduziert man Gleichung (3.32) auf 4 Moden:

$$\text{Driftwelle: } \phi_q \text{ mit } \mathbf{k} = (0, q) \quad (3.33a)$$

$$\text{Zonal Flow: } \phi_0 \text{ mit } \mathbf{k} = (p, 0) \quad (3.33b)$$

$$\text{Seitenband 1: } \phi_+ \text{ mit } \mathbf{k} = (p, q) \quad (3.33c)$$

$$\text{Seitenband 2: } \phi_- \text{ mit } \mathbf{k} = (p, -q) \quad (3.33d)$$

Einsetzen in (3.32) liefert:

$$\dot{\phi}_0 = -qp(\phi_q\phi_- - \phi_q^*\phi_+) \quad (3.34a)$$

$$\dot{\phi}_+ + i\Omega_+\phi_+ = \frac{qp(1+q^2-p^2)}{1+q^2+p^2}\phi_q\phi_0 \quad (3.34b)$$

$$\dot{\phi}_- + i\Omega_-\phi_- = -\frac{qp(1+q^2-p^2)}{1+q^2+p^2}\phi_q^*\phi_0 \quad (3.34c)$$

$$\dot{\phi}_q + i\Omega_q\phi_q = qp(\phi_0\phi_-^* - \phi_+\phi_0^*) \quad (3.34d)$$

$$\text{mit } \Omega_+ = -\Omega_- = \frac{q}{1+q^2+p^2} \quad \text{und} \quad \Omega_q = \frac{q}{1+q^2}$$

Bei der Herleitung dieser Gleichungen wird (3.31) benutzt. Nimmt man an, dass die Amplitude der Driftwelle ϕ_q viel größer als die anderen drei Amplituden ist, so kann man die RHS von (3.34d) vernachlässigen. Daraus folgt:

$$\dot{\phi}_q = -i\Omega_q\phi_q \quad \rightarrow \quad \ddot{\phi}_q = -\Omega_q^2\phi_q \quad (3.35)$$

$$\dot{\phi}_q^* = i\Omega_q\phi_q^* \quad \rightarrow \quad \ddot{\phi}_q^* = -\Omega_q^2\phi_q^* \quad (3.36)$$

Zweimaliges Ableiten von (3.34a) nach der Zeit liefert:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_0 &= -qp(\ddot{\phi}_q\phi_- + \phi_q\ddot{\phi}_- + 2\dot{\phi}_q\dot{\phi}_- - (\ddot{\phi}_q^*\phi_+ + \phi_q^*\ddot{\phi}_+ + 2\dot{\phi}_q^*\dot{\phi}_+)) \\ &= qp\Omega_q^2(\phi_q\phi_- - \phi_q^*\phi_+) - qp(\phi_q\ddot{\phi}_- - \phi_q^*\ddot{\phi}_+) + 2qpi\Omega_q(\phi_q\dot{\phi}_- + \phi_q^*\dot{\phi}_+) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Bei der Umformung werden die Relationen (3.35) und (3.36) benutzt. Die Summanden aus (1.37) werden einzeln ausgewertet. Für den ersten folgt mit (3.34a):

$$qp\Omega_q^2(\phi_q\phi_- - \phi_q^*\phi_+) = -\Omega_q^2\dot{\phi}_0 \quad (3.38)$$

Der zweite Summand lautet:

$$\begin{aligned} &-qp(\phi_q\ddot{\phi}_- - \phi_q^*\ddot{\phi}_+) \\ &= -qp\left[\phi_q(-\Omega(\dot{\phi}_q^*\phi_0 + \phi_q^*\dot{\phi}_0) + i\Omega_+\dot{\phi}_-) - \phi_q^*(\Omega(\dot{\phi}_q\phi_0 + \phi_q\dot{\phi}_0) - i\Omega_+\dot{\phi}_+)\right] \\ &= qp\phi_q\Omega(i\Omega_q\phi_q^*\phi_0 + \phi_q^*\dot{\phi}_0) + qp\phi_q^*\Omega(-i\Omega_q\phi_q\phi_0 + \phi_q\dot{\phi}_0) - qpi\Omega_+(\phi_q\dot{\phi}_- + \phi_q^*\dot{\phi}_+) \\ &= 2qp\Omega|\phi_q|^2\dot{\phi}_0 - qpi\Omega_+(\phi_q\dot{\phi}_- + \phi_q^*\dot{\phi}_+) \quad \text{mit} \quad \Omega = \frac{qp(1+q^2-p^2)}{1+q^2+p^2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Bei der ersten Umformung wird die Relation $\Omega_+ = -\Omega_-$ und die Gleichungen (3.34b) und (3.34c) benutzt, bei der zweiten wieder (3.35) und (3.36).

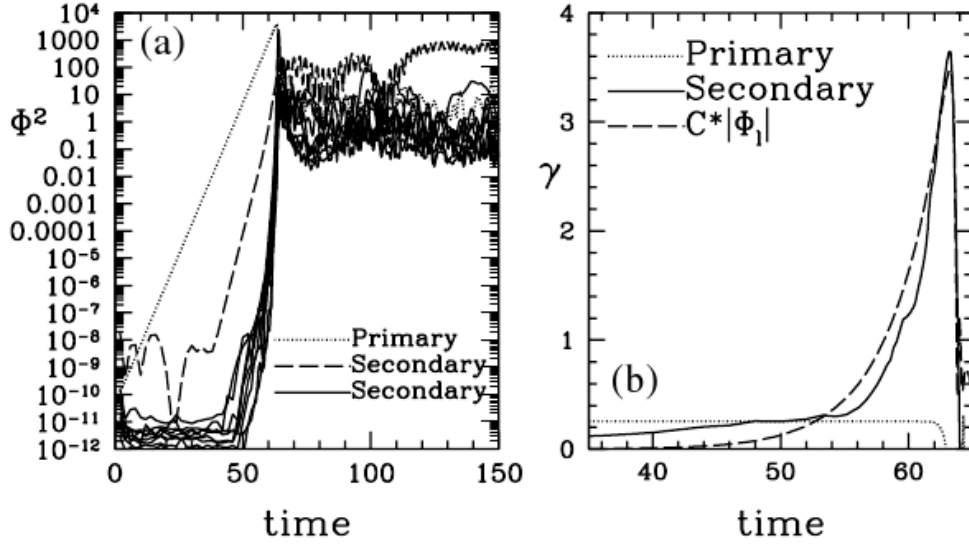


Abbildung 3.2: Amplituden (a) und Wachstumsraten (b) aufgetragen gegen die Zeit. Dabei stellen die gepunkteten Graphen die Driftwellen und die durchgezogenen Graphen die Zonal Flows dar. Der gestrichelte Graph in (b) stellt einen exponentiellen Fit an die Zonal Flow-Wachstumsrate dar. Quelle: [20]

Der zweite und dritte Summand aus (3.37) ergeben somit:

$$\begin{aligned}
 & 2qp\Omega|\phi_q|^2\dot{\phi}_0 + qpi(2\Omega_q - \Omega_+) \left(\phi_q\dot{\phi}_- + \phi_q^*\dot{\phi}_+ \right) \\
 &= 2qp\Omega|\phi_q|^2\dot{\phi}_0 + qpi(2\Omega_q - \Omega_+) \left[\phi_q(-\Omega\phi_q^*\phi_0 + i\Omega_+\phi_-) + \phi_q^*(\Omega\phi_q\phi_0 - i\Omega_+\phi_+) \right] \\
 &= 2qp\Omega|\phi_q|^2\dot{\phi}_0 - qp\Omega_+(2\Omega_q - \Omega_+) \left(\phi_q\dot{\phi}_- + \phi_q^*\dot{\phi}_+ \right) \\
 &= 2qp\Omega|\phi_q|^2\dot{\phi}_0 + \Omega_+(2\Omega_q - \Omega_+)\dot{\phi}_0
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Bei der ersten Umformung wird die Relation $\Omega_+ = -\Omega_-$ und die Gleichungen (3.34b) und (3.34c) benutzt, bei der zweiten wieder (3.34a). Addition der Summanden (3.38) und (3.40) liefert folgende Differentialgleichung für ϕ_0 :

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi}_0 &= (2qp\Omega|\phi_q|^2 - \Omega_q^2 + \Omega_+(2\Omega_q - \Omega_+))\dot{\phi}_0 \\
 &= \left(\frac{2q^2p^2(1+q^2-p^2)}{1+q^2+p^2}|\phi_q|^2 - (\Omega_q - \Omega_+)^2 \right) \dot{\phi}_0
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Mit dem Ansatz $\phi_0 \propto e^{\gamma_0 t}$ erhält man die Wachstumsrate:

$$\gamma_0 = \sqrt{\left(\frac{2q^2p^2(1+q^2-p^2)}{1+q^2+p^2}|\phi_q|^2 - (\Omega_q - \Omega_+)^2 \right)} \tag{3.42}$$

γ_0 ist die Wachstumsrate des Zonal Flows, die anfangs linear mit der Amplitude der Driftwelle zunimmt.

Da die Wachstumsrate der Driftwelle anfangs konstant ist, wächst die Amplitude des Zonal Flows mit dem Exponenten des Exponenten $\gamma_0 \propto \phi_q \propto e^{\gamma_q t}$, wobei kurz vor der nichtlinearen Sättigung $\gamma_0 \gg \gamma_q$ gilt. Dieses Ergebnis wird auch in [20] numerisch erzielt (siehe Abbildung 3.2). Interessanterweise ist dieser Mechanismus auch noch in der Hasegawa-Mima-Gleichung enthalten.

Gleichgewicht zwischen Driftwellen und Zonal Flows

Im Folgenden wird das System (3.34) etwas modifiziert, damit im Anschluss ein stationärer Zustand untersucht werden kann. Es werden die für die Oszillation verantwortlichen Terme $i\Omega\phi$ vernachlässigt und Dämpfungsterme für den Zonal Flow und die Seitenbänder $-\nu\phi$ eingeführt. Außerdem wird der zu Beginn exponentielle Anstieg der Driftwelle durch die Einführung einer linearen Wachstumsrate γ_q mitberücksichtigt. Das System (3.34) lautet mit diesen Modifikationen:

$$\dot{\phi}_0 = -\nu_0\phi_0 - qp(\phi_q\phi_- - \phi_q^*\phi_+) \quad (3.43a)$$

$$\dot{\phi}_+ = -\nu_\pm\phi_+ + \frac{qp(1+q^2-p^2)}{1+q^2+p^2}\phi_q\phi_0 \quad (3.43b)$$

$$\dot{\phi}_- = -\nu_\pm\phi_- - \frac{qp(1+q^2-p^2)}{1+q^2+p^2}\phi_q^*\phi_0 \quad (3.43c)$$

$$\dot{\phi}_q = \gamma_q\phi_q + qp(\phi_0\phi_-^* - \phi_+\phi_0^*) \quad (3.43d)$$

Betrachtet man die Grenzwerte $|p|, |q| \gg 1$, kann man die Vorfaktoren um $p, q = 0$ entwickeln und alle Terme mit Ordnungen größer zwei in p, q vernachlässigen. Normiert man die Zeit t auf die lineare Wachstumsrate der Driftwelle γ_q , so lauten die Gleichungen (3.43) mit den Abkürzungen

$$\Gamma_0 = \frac{\nu_0}{\gamma_q} \quad (3.44)$$

$$\Gamma_\pm = \frac{\nu_\pm}{\gamma_q} \quad (3.45)$$

$$(A_0, A_+, A_-, A_q) = \frac{qp}{\gamma_q}(\phi_0, \phi_+, \phi_-, \phi_q) \quad (3.46)$$

wie folgt:

$$\dot{A}_0 = -\Gamma_0 A_0 - A_q A_- + A_q^* A_+ \quad (3.47a)$$

$$\dot{A}_+ = -\Gamma_\pm A_+ + \alpha A_q A_0 \quad (3.47b)$$

$$\dot{A}_- = -\Gamma_\pm A_- - \alpha A_q^* A_0 \quad (3.47c)$$

$$\dot{A}_q = A_q + A_0 A_-^* - A_+ A_0^* \quad (3.47d)$$

$$\text{mit } \alpha = 1 - 2p^2$$

Da jede Lösung dieses Systems reell bleibt, solange man reelle Anfangsbedingungen wählt, kann man mit den Substitutionen

$$A_s = A_+ - A_- \quad (3.48)$$

$$A_t = A_+ + A_- \quad (3.49)$$

das System (3.47) vereinfachen zu:

$$\dot{A}_0 = A_q A_s - \Gamma_0 A_0 \quad (3.50a)$$

$$\dot{A}_s = 2\alpha A_q A_0 - \Gamma_{\pm} A_s \quad (3.50b)$$

$$\dot{A}_q = A_q - A_s A_0 \quad (3.50c)$$

$$\dot{A}_t = -\Gamma_{\pm} A_t \quad (3.50d)$$

Die letzte Gleichung hat die triviale Lösung $A_t \propto e^{-\Gamma_{\pm} t}$ und kann daher vernachlässigt werden. Es gibt einen nicht-trivialen Fixpunkt:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_s \\ A_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{A}_s \\ \hat{A}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Gamma_{\pm}/(2\alpha)} \\ \sqrt{\Gamma_0} \\ \sqrt{\Gamma_0 \Gamma_{\pm}/(2\alpha)} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Setzt man $\Gamma_0 = \Gamma_{\pm} = 1$ und $\alpha = 1/2$, so wird der Fixpunkt zu:

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{A}_s \\ \hat{A}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Stimmen die Amplituden zur Zeit $t = 0$ also mit diesen Werten überein, so verharrt das System für alle Zeiten in diesem Fixpunkt. Wird der Anfangswert der Driftwellen-Amplitude auf $A_q = 0.99$ geändert, so ergibt sich ein vollkommen anderes Bild, wie Abbildung 3.3 zeigt. Dort sind die zeitlichen Verläufe der Amplituden der Driftwelle A_q und des Zonal Flows A_0 aufgetragen. Eine deutliche Zunahme von A_q um 50% ist im Zeitintervall $t \sim [6; 8]$ zu bemerken, bis sie dann bei $t \sim 9$ negativ wird. Es zeigt sich, dass der zeitliche Verlauf von A_0 um $\Delta t \sim 0.5$ zu A_q verzögert ist. Interessant ist, dass man das Verhalten der Driftwellen- und Zonal Flow-Amplitude im Intervall $t \sim [5; 9]$ mit einer gedämpften erzwungenen Schwingung vergleichen kann, wobei die Phase des Erregers im Resonanzfall um $\pi/2$ voreilt. Dieses Resultat unterstreicht den Charakter der Driftwelle als Treiber für die Zonal Flows. Da das System bei kleiner Änderung nicht wieder in den Fixpunkt läuft, ist zu erwarten, dass es sich um einen instabilen Fixpunkt handelt. Zur Bestätigung bietet sich eine lineare Stabilitätsanalyse an. Mit den Definitionen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_s \\ A_q \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{A}_s \\ \hat{A}_q \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}} \quad (3.53)$$

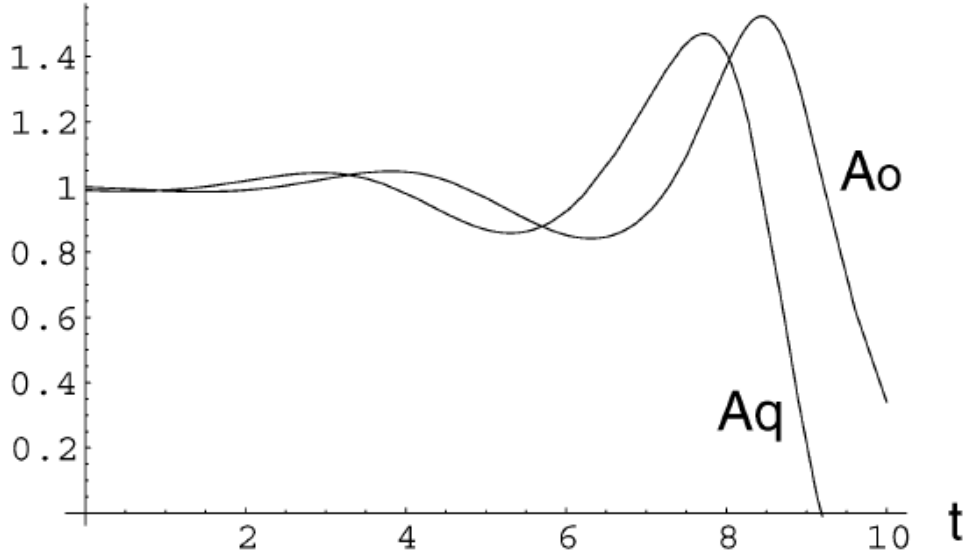


Abbildung 3.3: Zeitlicher Verlauf der Driftwellen- (A_q) und Zonal Flow-Amplitude (A_0), bei kleiner Abweichung vom Fixpunkt. Quelle: [24]

folgt für das um $\hat{\mathbf{A}}$ linearisierte Gleichungs-System (3.50):

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{A}} = M \tilde{\mathbf{A}} \quad (3.54)$$

mit $M = \begin{pmatrix} -\Gamma_0 & \sqrt{\Gamma_{\pm}\Gamma_0/(2\alpha)} & \sqrt{\Gamma_0} \\ \sqrt{2\alpha\Gamma_{\pm}\Gamma_0} & -\Gamma_{\pm} & \sqrt{2\alpha\Gamma_{\pm}} \\ -\sqrt{\Gamma_0} & -\sqrt{\Gamma_{\pm}/(2\alpha)} & 1 \end{pmatrix}$

Da $\det M = -4\Gamma_{\pm}\Gamma_0$, ist das Gleichungs-System lösbar, solange jeweils $\Gamma_{\pm} \neq 0$ und $\Gamma_0 \neq 0$ sind. Die Eigenwerte sind durch die Lösung der kubischen Gleichung gegeben:

$$\lambda^3 + (\Gamma_0 + \Gamma_{\pm} - 1) \lambda^2 + 4\Gamma_{\pm}\Gamma_0 = 0 \quad (3.55)$$

Sie sind demnach unabhängig von α . Setzt man einfachheitshalber $\Gamma_0 = \Gamma_{\pm} = \Gamma$, so lassen sich die Eigenwerte analytisch angeben:

$$\lambda_1 = -2\Gamma \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 8\Gamma} \right) \quad (3.56)$$

Der Fixpunkt $\hat{\mathbf{A}}$ ist stabil, falls die Realteile aller drei Eigenwerte negativ oder null sind, wobei beim letzteren Fall Terme höherer Ordnung die Stabilität bestimmen. Abbildung 3.4 zeigt die Abhängigkeit der Realteile der drei Eigenwerte von Γ . Man erkennt, dass für jedes $\Gamma > 0$ nur der Eigenwert λ_1 negativ ist. Daher ist dieser Fixpunkt für $\Gamma_0 = \Gamma_{\pm}$ immer instabil. Numerische Ergebnisse zeigen, dass auch für $\Gamma_0 \neq \Gamma_{\pm}$ dieser Fixpunkt instabil ist. Deshalb ist dieser stationäre Zustand nicht dazu geeignet, die Sättigung der Driftwellen durch Zonal Flows zu analysieren.

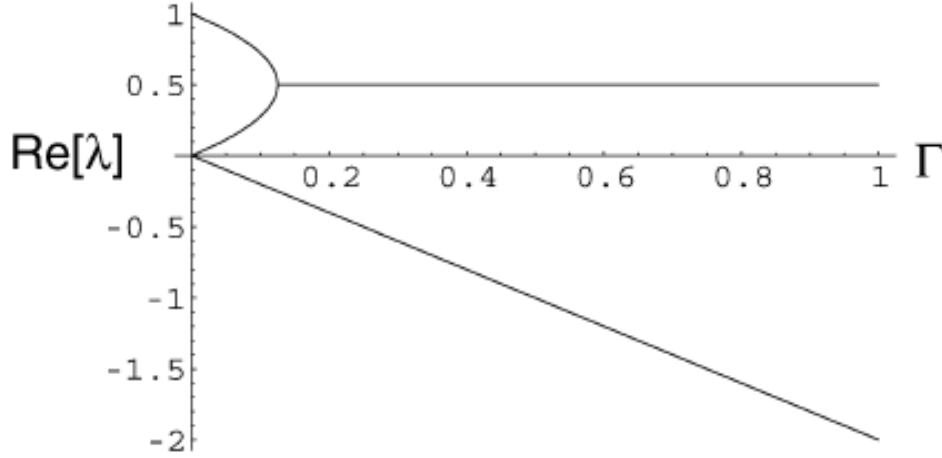


Abbildung 3.4: Realteile der Eigenwerte in Abhängigkeit von Γ . Für $\Gamma > 0$ sind $\lambda_{2,3} > 0$, es handelt sich daher um einen instabilen Fixpunkt. Quelle: [24]

Sättigung der Driftwellen

Man kann allerdings für fortgeschrittene Zeiten das Sättigungsniveau der Driftwelle und dessen Abhängigkeit von bestimmten Parametern bestimmen. Dazu verwendet man das gleiche Modell und bestimmt das Verhalten für große Zeiten. Danach führt man eine der Energie ähnelnde Größe ein, um den Energietransport zwischen Driftwelle und Zonal Flow zu modellieren. Daraus lassen sich dann Aussagen über die Sättigungsamplitude der Driftwelle machen. Setzt man einfachheitshalber $\Gamma_0 = \Gamma_{\pm} = \Gamma$, so gilt im Gleichungs-System (3.50) die Relation:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\Gamma \right) (A_s^2 - 2\alpha A_0^2) = 0 \quad (3.57)$$

Für große Zeiten ($t \gg 1/\Gamma$) wird diese Gleichung nur erfüllt, falls gilt:

$$A_s^2 = 2\alpha A_0^2 \quad (3.58)$$

Mit dieser Relation unter Verwendung der Normierungen $\sqrt{2\alpha}A_0 \rightarrow A_0$ und $\sqrt{2\alpha}A_q \rightarrow A_q$, kann das System (3.50) auf die folgenden beiden Gleichungen reduziert werden:

$$\dot{A}_0 = A_q A_0 - \Gamma A_0 \quad (3.59a)$$

$$\dot{A}_q = A_q - A_0^2 \quad (3.59b)$$

An dieser Stelle kann man eine Art Energie definieren:

$$E = \frac{A_q^2}{2} + \frac{A_0^2}{2} = E_q + E_0 \quad (3.60)$$

Damit lauten die Gleichungen (3.59):

$$\dot{E}_q = 2E_q - A_0^2 A_q \quad (3.61a)$$

$$\dot{E}_0 = A_0^2 A_q - 2\Gamma E_0 \quad (3.61b)$$

$$\dot{E} = 2E_q - 2\Gamma E_0 \quad (3.61c)$$

Dieses System von Gleichungen spiegelt den Energietransport zwischen Driftwellen und Zonal Flows wider. Es wird Energie durch das lineare Anwachsen der Driftwelle in das System befördert und durch die Dämpfung der Zonal Flows herausgezogen (3.61c). Durch den konservativen Kopplungsterm $A_0^2 A_q$ wird Energie von der Driftwelle in den Zonal Flow befördert. Eine Sättigung der Driftwelle wird für $\dot{E} = 0$ erreicht. Mit (3.60) gilt für diesen Sättigungszustand:

$$A_q^{\text{sat}} = \frac{E_q^{\text{sat}}}{E_0^{\text{sat}}} \quad (3.62)$$

Für dieses Modell werden numerisch Sättigungszustände bei $A_q^{\text{sat}} \sim 10$ gefunden, die über eine sehr große Weite von Parameter-Werten und Anfangsbedingungen gelten. Mit diesen Ergebnissen und der Gleichung (3.46) folgt eine wichtige Relation über den Sättigungszustand:

$$\phi_q^{\text{sat}} \propto \frac{\gamma_q}{qp} \quad (3.63)$$

Die Gleichung besagt, dass die Sättigungs-Amplitude der Driftwelle alleine durch die lineare Wachstumsrate γ_q der Driftwelle bestimmt wird. (3.42) besagt in diesem Fall, dass die Wachstumsrate des Zonal Flows γ_0 proportional zur Sättigungs-Amplitude der Driftwelle ist. Mit (3.63) folgt:

$$\gamma_q \propto \gamma_0 \quad (3.64)$$

Diese Relation stellt das Gesamtergebnis dieses Abschnitts dar. Durch den nichtlinearen Kopplungs-Mechanismus von Driftwelle und Zonal Flow wird der Sättigungszustand dadurch charakterisiert, dass die lineare Wachstumsrate der Driftwelle und nichtlineare Wachstumsrate des Zonal Flows proportional zueinander sind. Dieser Zustand wird für große Zeiten erreicht.

3.3 Fazit

Im ersten Abschnitt wird das Gyro-Fluid-Modell aus [20] hergeleitet, das zum einen die Basis für das Plasma Modell in Kapitel 4 darstellt, mit dem zum anderen aber auch im zweiten Abschnitt die Wachstumsrate der tertiären Instabilität bestimmt wird. Diese hängt von der Änderung der zonalen Temperatur in x -Richtung und der dritten Ableitung des zonalen Potentials nach x ab. Je größer die Verscherungsrate der Zonal Flows ist, desto größer ist auch die Wachstumsrate der tertiären Instabilität.

Das ist ein wichtiges Ergebnis, da Zonal Flows mit größerer Verscherrungsrate die ITG-Moden stärker dämpfen, allerdings über der nichtlinearen Schwelle durch die tertiäre Instabilität stärker gestört werden. Da dieses Modell allerdings nicht zur Beschreibung des Übergangs von Zonal Flows zu tertiären Instabilitäten ausreicht, soll in Kapitel 4 daher ein weiteres Modell aufgestellt werden, das diesen Übergang beschreiben kann. Im letzten Abschnitt wird das Vier-Moden-Modell aus [24] betrachtet. Dieses Modell ist in der Lage, die Sättigung der Driftwellen durch Zonal Flows zu erklären. Den Mechanismus, der für die Dämpfung der Driftwellen verantwortlich ist, gibt dieses Modell allerdings nicht her. Trotzdem liefert es einen Einblick in das Wechselspiel zwischen Driftwelle und Zonal Flow, welches die Entstehung des Dimits Shifts verursacht.

4 Modell zur Bestimmung der oberen Dimits Shift Begrenzung

In diesem Kapitel wird auf ein neues Plasma Modell eingegangen, das den Übergang von Zonal Flows zur tertiären Instabilität (siehe [20]) darstellt. Im Kapitel 3 wird die Verscherungsrate von Zonal Flows als ein möglicher Destabilisierungs-Mechanismus erläutert. Da aber auch die ITG-Mode Einfluss auf die tertiäre Instabilität hat, wird in diesem Kapitel mit Hilfe des neuen Plasma Modells ein anderer Mechanismus vorgestellt, der zur Sättigung und Dämpfung der Zonal Flows führt. Dabei wird im ersten Abschnitt die Gleichung, die diesem Modell zu Grunde liegt, auf Basis des Gyro-Fluid-Modells [20] hergeleitet, um dann im zweiten Abschnitt die numerischen Ergebnisse zu präsentieren. Auf der beiliegenden DVD befindet sich zusätzliches Material. Eine ausführliche Beschreibung der verwendeten Algorithmen findet sich im Kapitel „Numerik“ im Anhang. Da die strukturbildende Swift-Hohenberg-Gleichung eine große Rolle in dem Modell spielt, ist ihr im Anhang auch ein Kapitel gewidmet. Abschließend werden analytische Rechnungen vorgestellt, die auf stationäre Zustände und deren Stabilität eingehen, um das qualitative Verhalten des Systems mit Hilfe eines Bifurkations-Diagramms zu bestimmen. Anhand dieses Diagramms ist es möglich, das Ende des Dimits Shifts in diesem Modell zu bestimmen.

4.1 Herleitung und Mechanismen

In diesem Abschnitt wird das neue Plasma Modell auf Basis des Gyro-Fluid-Modells aus [20] hergeleitet. Dazu werden einige Vereinfachungen gemacht und eine modifizierte Swift-Hohenberg-Gleichung ergänzt. Im Anschluß werden die Mechanismen des neuen Modells erklärt, wobei zum besseren Verständnis auf das Kapitel „Swift-Hohenberg-Gleichung“ im Anhang verwiesen wird.

Die Herleitung des Modells

Das Gyrofluid-Modell aus [20] lautet:

$$\frac{dn}{dt} + \frac{1}{2} \{ \tau \nabla_{\perp}^2 \psi, T_{\perp} \} = 0 \quad (4.1a)$$

$$\frac{dT_{\perp}}{dt} = 0 \quad (4.1b)$$

$$\text{mit } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \{ \psi, \cdot \} \quad (4.1c)$$

$$\text{und } n = \psi - \langle \psi \rangle - \nabla_{\perp}^2 \left((1 + \tau) \psi - \tau \langle \psi \rangle + \tau \frac{T_{\perp}}{2} \right) \quad (4.1d)$$

Folgende Vereinfachungen werden vorgenommen:

$$n \rightarrow \psi \quad (4.2a)$$

$$\frac{1}{2}\{\tau \nabla_{\perp}^2 \psi, T_{\perp}\} \rightarrow \beta\{\psi, T_{\perp}\} \quad (4.2b)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \{\psi, \cdot\} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \beta\{\psi, \cdot\} \quad (4.2c)$$

Das vereinfachte Modell lautet somit:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta\{\psi, T_{\perp}\} = 0 \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial T_{\perp}}{\partial t} + \beta\{\psi, T_{\perp}\} = 0 \quad (4.3b)$$

Ein Nachteil des Gyrofluid-Modells ist, dass es keinen Mechanismus für die Wellenlängen-Selektion hat, da die dynamischen Terme aus dem Modell entfernt werden. Außerdem ist jede Anfangsbedingung, die nur von x oder y abhängt, Lösung dieser Gleichungen. Um einen Wellenlängen-Selektions-Mechanismus zu erhalten, wird die RHS von (4.3a) durch die modifizierte Swift-Hohenberg Gleichung ersetzt, die RHS von (4.3b) durch den Laplace-Operator Δ , um so die Wärmeleitungs-Gleichung zu bekommen. Die Poisson-Klammer stellt weiterhin einen Kopplungs-Mechanismus für die Felder ψ und T_{\perp} dar, dabei wird die Konstante β eingeführt, mit der die Stärke der Kopplung eingestellt werden kann. Im Folgenden wird wegen der einfacheren Notation $T_{\perp} = T$ gesetzt. Das neue Modell lautet mit den Modifikationen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta\{\psi, T\} = \frac{ITG}{\epsilon} \left[\epsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(2 - \frac{2}{1 + \langle \psi^2 \rangle} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta^{-1} - (k_c^2 + \Delta)^2 \right] \psi - \psi^3 \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \beta\{\psi, T\} = \Delta T \quad (4.4b)$$

$$\text{mit } \langle \psi^2 \rangle = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi^2 dx dy$$

Für $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ geht (4.4a) über in:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = ITG \left[1 - \frac{k_c^4}{\epsilon} \right] \psi - \psi^3 \quad (4.4c)$$

Da der erste Summand in der RHS von (4.4a) an der Stelle $|\mathbf{k}| = 0$ im Fourier-Raum nicht stetig fortsetzbar ist, wird er ϵ gesetzt. ϵ ist ein Parameter, der von der Swift-Hohenberg Gleichung stammt. Er reguliert die Anzahl der Moden mit positiven linearen Wachstumsraten (siehe Kapitel „Swift-Hohenberg-Gleichung“). k_c bestimmt die kritische Wellenlänge, die die größte lineare Wachstumsrate aufweist.

ITG ist ein Parameter, mit dem die linearen Wachstumsraten von ψ variiert werden können. Die Bezeichnung rührt von der Tatsache, dass durch den Ionen-Temperatur-Gradienten (ITG) in Tokamaks unter anderem die Wachstumsraten von Instabilitäten bestimmt werden. $\langle \psi^2 \rangle$ ist der quadrierte Effektivwert des Potentials ψ in der Simulations-Box mit den Maßen $(0, L_x) \times (0, L_y)$.

Die Mechanismen des Modells

Um einen Einblick in die generellen Mechanismen der Swift-Hohenberg-Gleichung zu bekommen, wird auf das gleichnamige Kapitel im Anhang verwiesen. Die Wahl der Nichtlinearität ψ^3 in der RHS von (4.4a) fungiert nicht nur als Dämpfungsterm, sondern bestimmt auch die Struktur der Lösungen, die in diesem Fall aus Streifen besteht. So kommen für die Lösungen nur streifenförmige Strukturen in Frage, wie man sie auch von Driftwellen und Zonal Flows kennt. Der zweite Summand in der RHS von (4.4a) dient der Wellenlängen-Selektion. Es bildet sich ein Kreisring von Moden im Fourier-Raum aus ($k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$). Der erste Summand bestimmt die Breite des Kreisrings und die Größe der linearen Wachstumsraten, insbesondere die Orientierung der Streifen. Initialisiert man das ψ -Feld mit kleinen Werten, so ist auch $\langle \psi^2 \rangle$ klein, sodass der Vorfaktor von $\partial^2/\partial y^2$ nahezu verschwindet. Daher werden durch den Operator $\partial^2/\partial x^2$ die Moden auf dem Fourier-Ring mit größeren x -Komponenten stärker getrieben, sodass das Streifenmuster in die y -Richtung orientiert ist. Der Operator Δ^{-1} dient zur Normierung, so variiert der erste Summand nur im Intervall $[0; 2\epsilon]$. Das ist sehr wichtig, da so die Breite des Kreisrings beschränkt ist, was sicherstellt, dass nicht noch andere Moden mit größeren Wellenzahlen verstärkt werden. Steigt durch das lineare Treiben der quadrierte Effektivwert des Potentials über $\langle \psi^2 \rangle = 1$, so werden Moden auf dem Kreisring mit größerer y -Komponente stärker getrieben, die Streifen richten sich also in die x -Richtung aus. Mit diesem Mechanismus wird somit der Übergang zwischen Zonal Flows und tertiären Instabilitäten modelliert. Ob $\langle \psi^2 \rangle$ diese Schwelle überhaupt überschreitet, hängt vom Parameter ITG ab, wie noch gezeigt wird.

4.2 Zeitliche Entwicklung

In diesem Abschnitt werden die numerischen Ergebnisse präsentiert, die die zeitliche Entwicklung der Felder ψ und T im Orts- und Fourier-Raum enthalten. Dabei wird der Parameter ITG bei der ersten Simulation so gewählt, dass die tertiäre Instabilität eintritt. In der zweiten Simulation wird diese Schwelle nicht überschritten. Das Spektrum von ψ wird bestimmt und diskutiert. Auf der beiliegenden DVD befinden sich zusätzliche Videos, die die zeitliche Entwicklung sehr gut demonstrieren.

Numerik

Bei numerischen Simulationen von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen müssen Ort und Zeit diskretisiert werden. Die Orts-Diskretisierung wird bei den folgenden Simulationen mit Hilfe des Pseudo-Spektral-Verfahrens durchgeführt, die zeitliche Entwicklung mit einem expliziten Runge-Kutta Zeitschritt-Verfahren vierter Ordnung. Da es bei der Diskretisierung des Orts-Raums zu Fehlinterpretationen kommen kann, falls nichtlineare Terme vorhanden sind (Abtast-Theorem), befindet sich im Programm ein Dealising-Filter nach Orszag. Dieser beugt zumindest Fehlinterpretationen bei quadratischen Nichtlinearitäten vor. Eine detaillierte Beschreibung dieser Verfahren findet sich im Kapitel „Numerik“ im Anhang. Die folgende Übersicht zeigt die numerischen Einstellungen:

Numerische Details:

- Auflösung: $\text{DIM}_x \times \text{DIM}_y = 128 \times 128$
- Box-Größe: $(0, L_x) \times (0, L_y) = (0, 128) \times (0, 128)$
- Zeitschritt: $dt = 10^{-3}$
- Randbedingungen: Periodisch
- Kritische Wellenzahl: $k_c = 20 \cdot 2\pi/128 \simeq 1$
- $\epsilon = 0.3$
- $\beta = 1.5$

Ergebnisse

Für $ITG = 4.5$ wird die zeitliche Entwicklung der Felder ψ und T bestimmt. Die Felder werden im Orts-Raum durch verrauschte Anfangsbedingungen initialisiert. Die Abbildungen 4.1 zeigen den Orts- und Fourier-Raum von ψ zur Zeit $t = 1.0$. Im Orts-Raum bilden sich deutliche Steifen in die y -Richtung aus, was man im Fourier-Raum daran erkennt, dass auf dem Kreisring nur die Moden mit $(k_x, k_y) \approx (k_c, 0)$ deutlich stärker vertreten sind als der Rest. Im Gegensatz zum ψ -Feld bilden sich im T -Feld weder deutliche Strukturen, noch gibt es irgendeine Orientierung derselben.

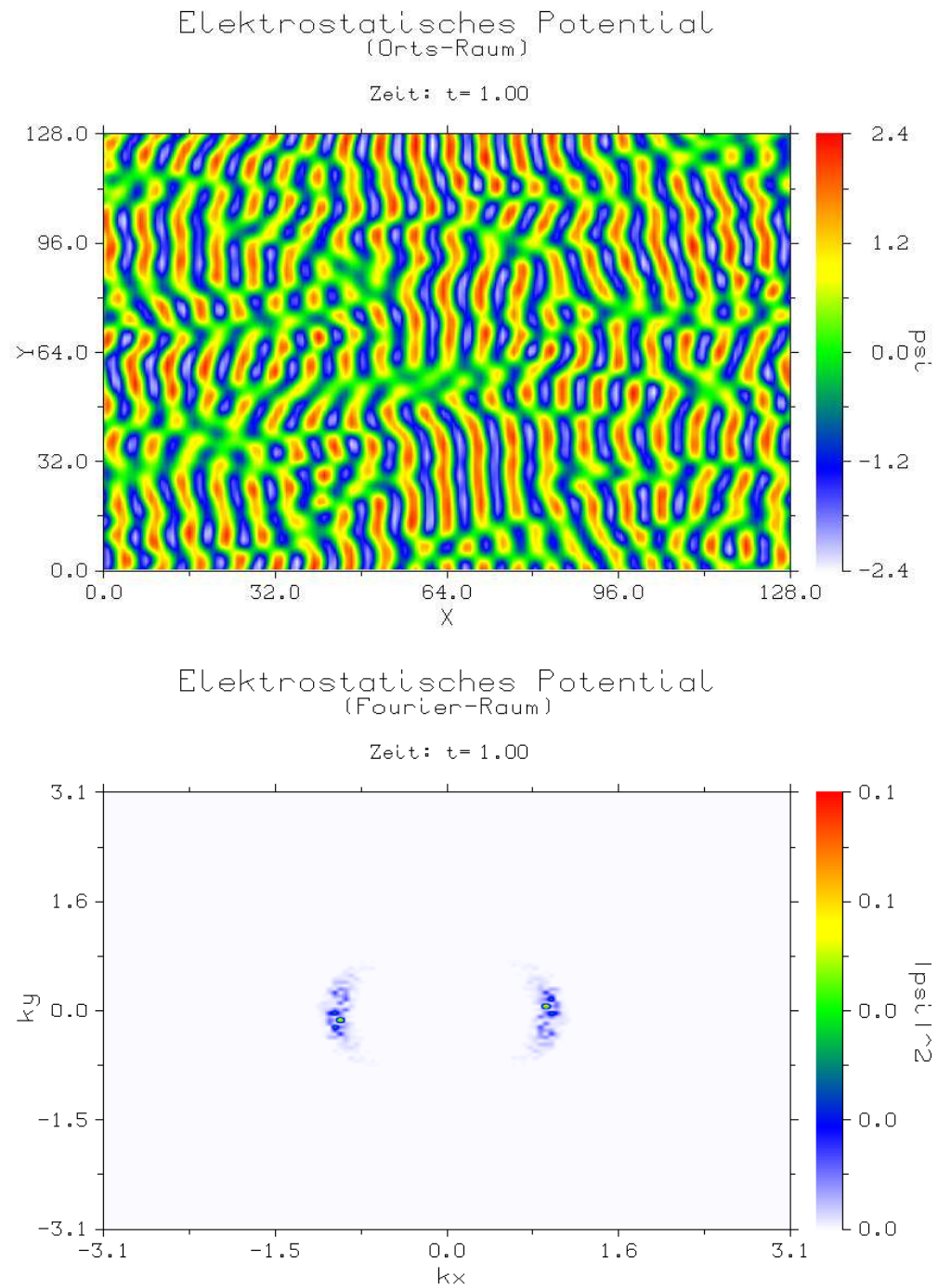


Abbildung 4.1: ψ -Feld bei $ITG = 4.5$

Allerdings hat sich im Fourier-Raum eine Wolke mit einem Radius $\approx k_c$ gebildet. Die größten Amplituden findet man hier bei kleinen Wellenzahlen. Bei einer Zeit von $t = 6.0$ hat sich die Orientierung der Streifen im Orts-Raum von ψ in die x -Richtung gedreht (Abbildung 4.3). Das wird auch sehr deutlich, wenn man sich den Fourier-Raum zu dieser Zeit ansieht. Die Moden mit $(k_x, k_y) \approx (0, k_c)$ heben sich hier stark von den restlichen Moden ab. Im T -Feld findet man zur Zeit $t = 6.0$ die größten Moden bei $k_x \approx k_c$ im Gegensatz zur Zeit $t = 1.0$, bei der kleinere Wellenzahlen dominieren. Im Orts-Raum zeichnen sich daher kleinskalige Strukturen ab, die im Verhältnis zum ψ -Feld eine große Bandbreite von Werten annehmen ($T \in [-19.6; 16.2]$). Interessant ist, dass die beiden Felder für große Zeiten $t \simeq 10^3$ in einen stationären Zustand mit $(k_x, k_y) = (0, k_c)$ im ψ -Feld und $T = 0$ übergehen. Für größere Werte ITG wird dieser Zustand nicht erreicht, zumindest nicht für Zeiten in der Größenordnung $t \simeq 10^3$. Die zweite Simulation wird bei $ITG = 0.9$ durchgeführt. Abbildung 4.5 zeigt das ψ -Feld zur Zeit $t = 17.5$. Hier ist der ITG Wert so klein, dass der quadrierte Effektivwert des ψ -Felds den Wert eins nicht überschreitet (siehe Abschnitt 4.1), sodass kein Wechsel der Streifen-Orientierung auftritt. Für große Zeiten $t \simeq 10^3$ gehen die Felder auch bei diesem ITG -Wert in einen stationären Zustand über, mit $(k_x, k_y) = (k_c, 0)$ im ψ -Feld und $T = 0$. Diese beiden stationären Zustände werden unter anderem im nächsten Abschnitt analytisch untersucht, um Aussagen über die Stabilität und somit Aussagen über den Dimits Shift machen zu können.

Spektren des ψ -Felds

Abbildung 4.6 zeigt die zeitlich gemittelten kumulierten Spektren der ersten Simulation ($ITG = 4.5$) im Intervall $t \in [10; 50]$. Kumuliert heißt hierbei, dass bei festem k_x (k_y) alle dazugehörigen Fourier-Koeffizienten mit $k_y \geq 0$ ($k_x \geq 0$) aufaddiert werden. Es werden nur diese Moden addiert, damit eventuelle Unterschiede zwischen Moden mit betragsgleichen k_x (k_y) nicht verschwinden. Im Bereich $t \in [10; 50]$ sind die Streifen im Orts-Raum des ψ -Felds in y -Richtung orientiert, das heißt, dass hier Moden mit $(k_x, k_y) \simeq (0, k_c)$ dominieren. Im k_y -Spektrum erkennt man deutliche Peaks bei $k_y \pm 1$, im k_x -Spektrum gibt es nur einen Peak bei $k_x \simeq 0$.

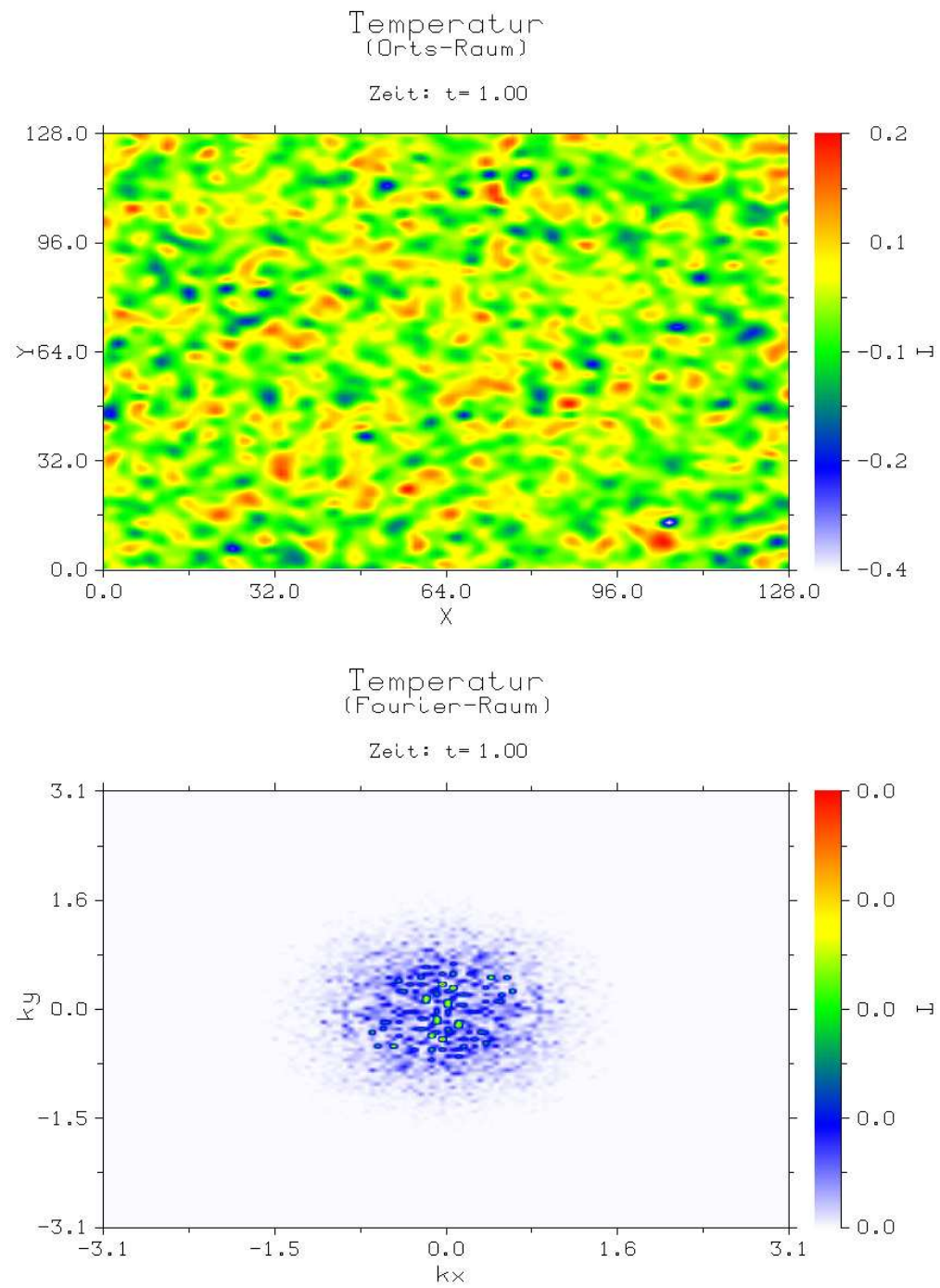


Abbildung 4.2: T -Feld bei $ITG = 4.5$

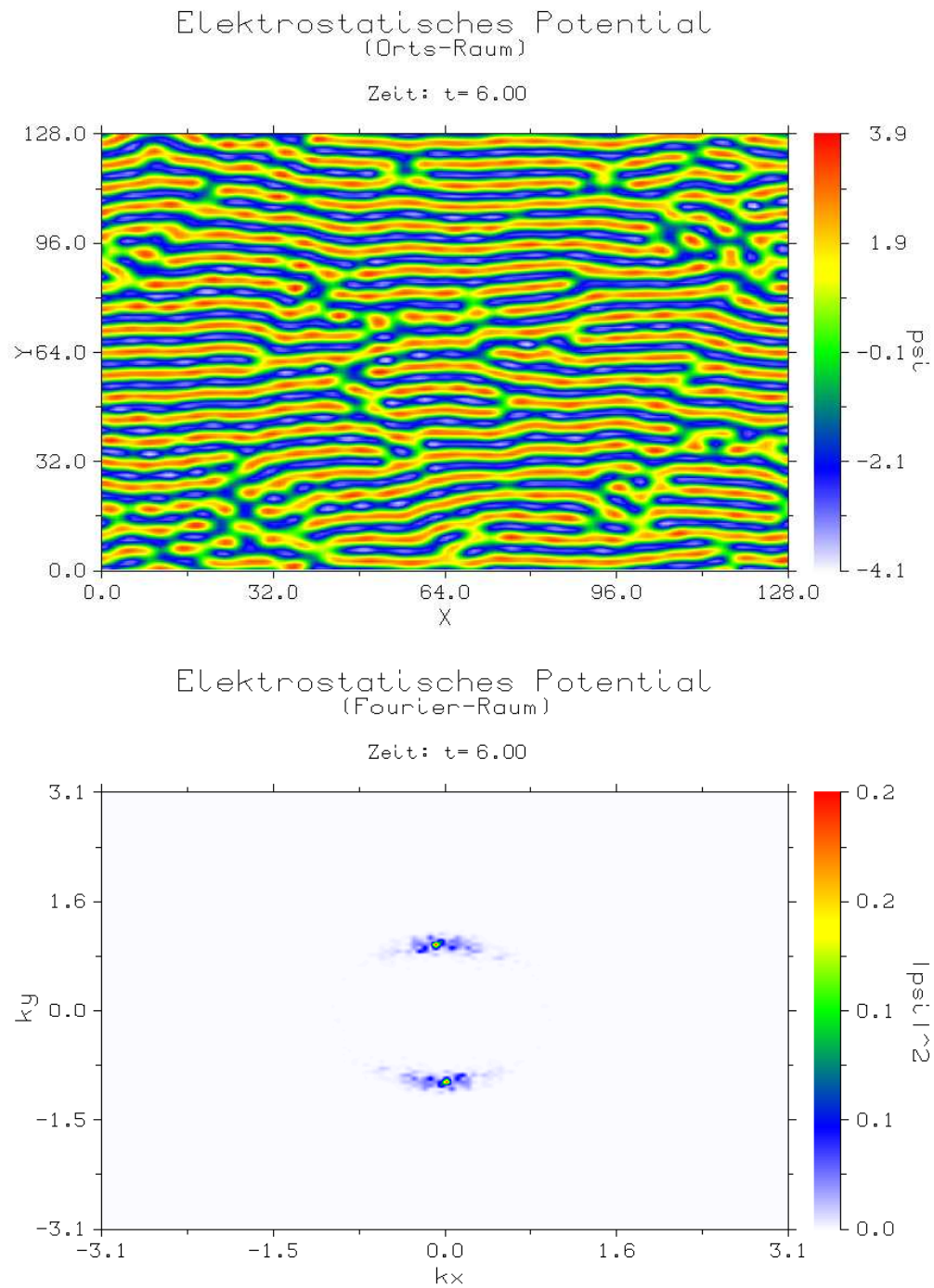


Abbildung 4.3: ψ -Feld bei $ITG = 4.5$

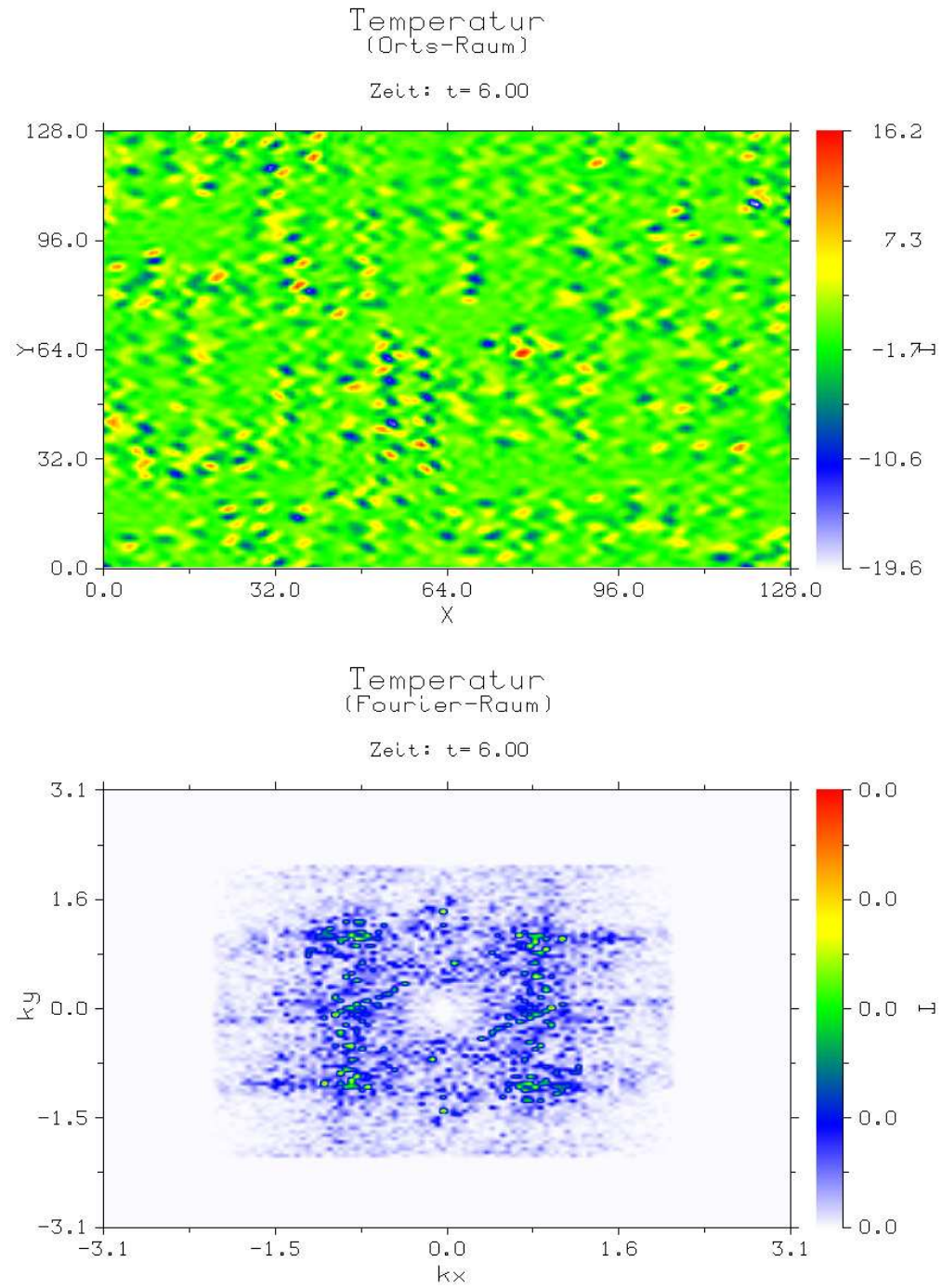


Abbildung 4.4: T -Feld bei $ITG = 4.5$

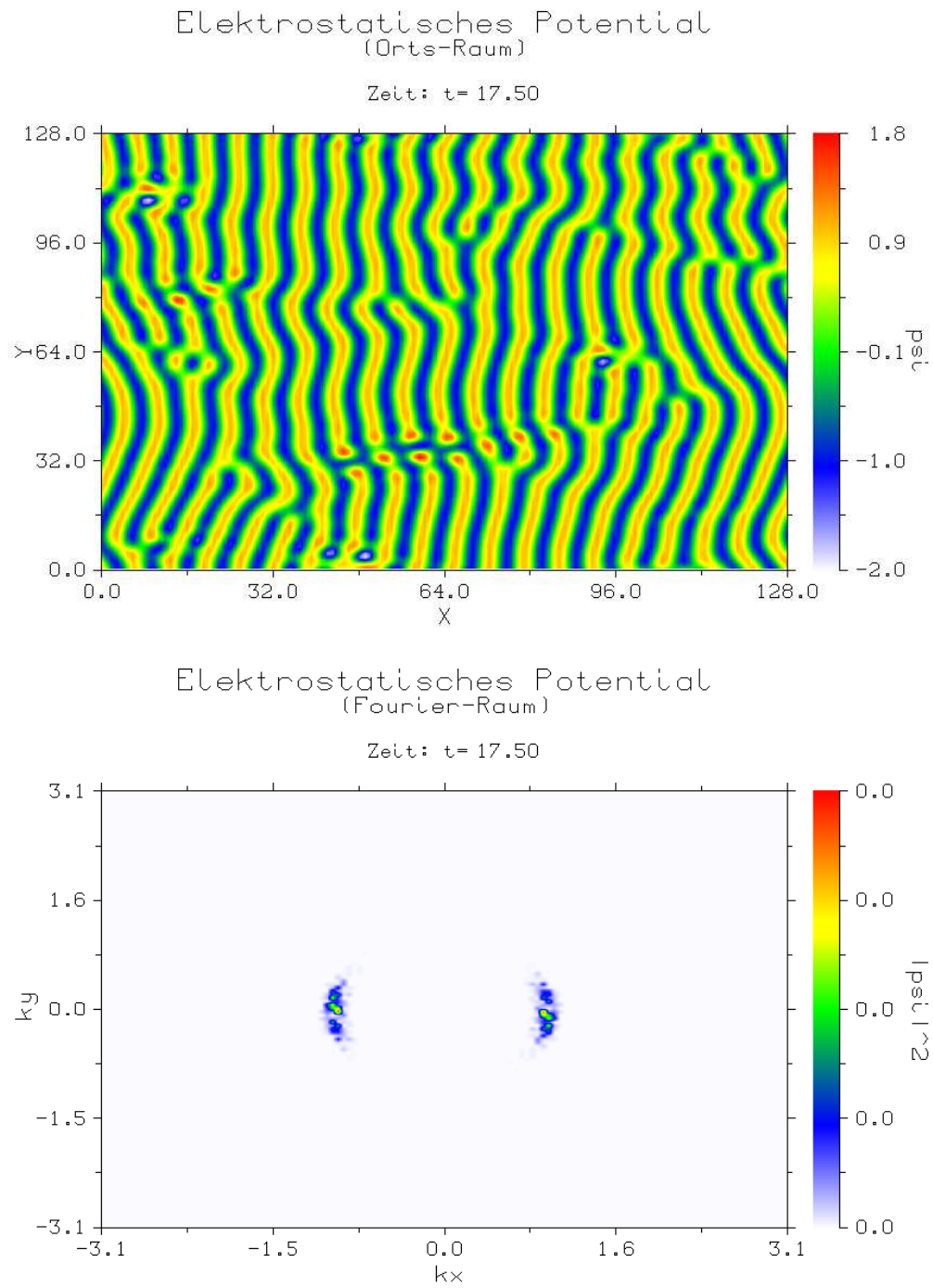


Abbildung 4.5: ψ -Feld bei $ITG = 0.9$

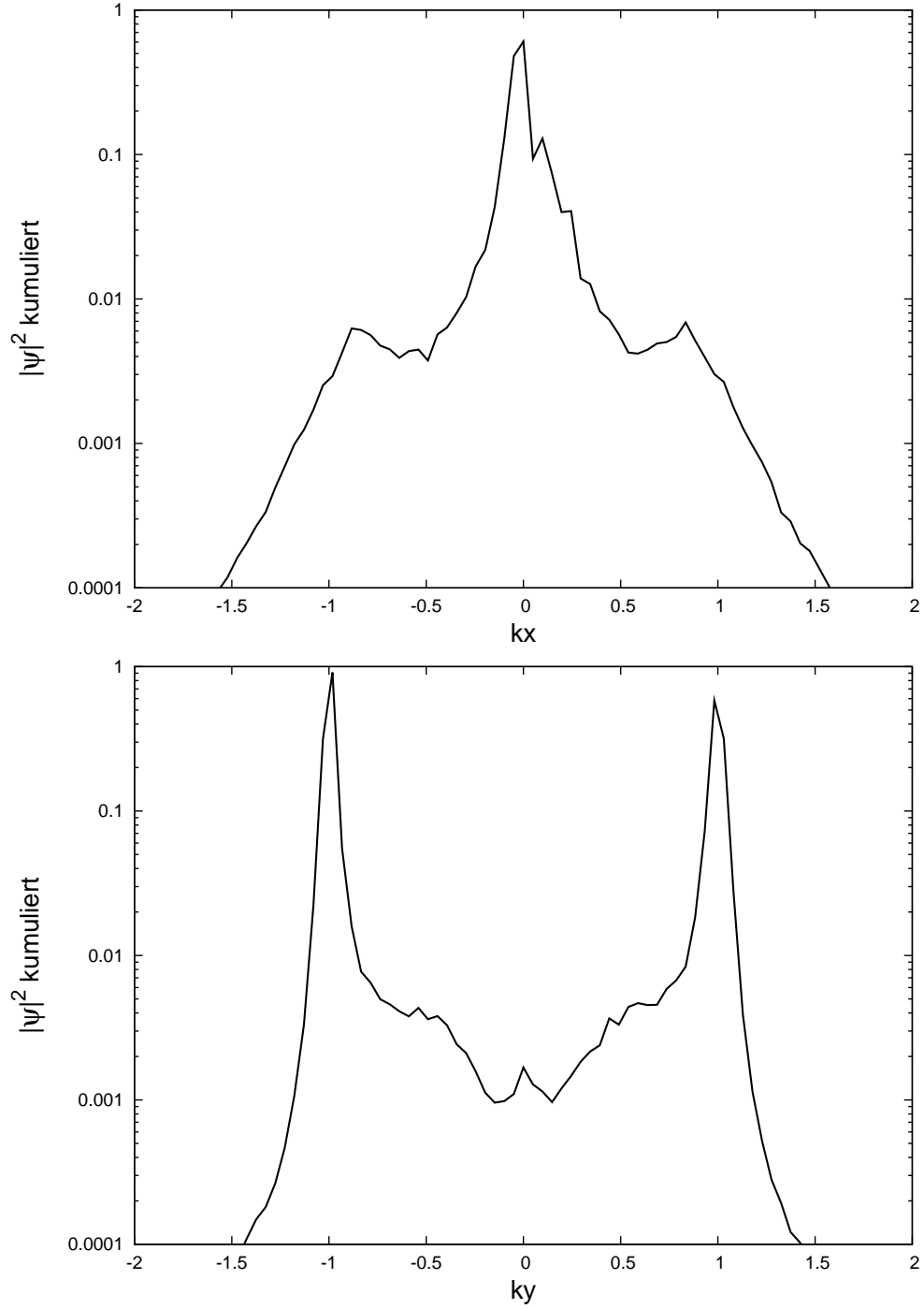


Abbildung 4.6: Zeitlich gemittelte k_x - und k_y -Spektren zwischen $t \in [10 : 50]$ bei $ITG = 4.5$

4.3 Stationäre Lösungen

In diesem Abschnitt werden fünf stationäre Lösungen des Modells bestimmt (Indizes: 0, 1, 2, Z , D), von denen zwei einen Zonal Flow (Z) und eine tertiäre Instabilität D modellieren. Bei der Berechnung der (nicht-trivialen) stationären Lösungen werden einige Näherungen gemacht, die aber numerisch auf ihre Richtigkeit überprüft werden. Die Bestimmung dieser Lösungen ist für die Bestimmung der Dimits Shifts Begrenzung unentbehrlich. Sucht man stationäre Lösungen, muss die zeitliche Ableitung eines dynamischen Systems verschwinden. Die Gleichungen (4.4) lauten in dem Fall:

$$\beta\{\psi, T\} = \frac{ITG}{\epsilon} \left[\epsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(2 - \frac{2}{1 + \langle \psi^2 \rangle} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta^{-1} - (k_c^2 + \Delta)^2 \right] \psi - \psi^3 \quad (4.5a)$$

$$\beta\{\psi, T\} = \Delta T \quad (4.5b)$$

Für $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$:

$$0 = ITG \left[1 - \frac{k_c^4}{\epsilon} \right] \psi - \psi^3 \quad (4.5c)$$

Konstante Lösungen

Eine triviale Lösung ergibt sich bei (4.5b) und (4.5c) für:

$$\psi_0 = 0 \quad (4.6a)$$

$$T_0 = \text{const.} \quad (4.6b)$$

Gleichung (4.5c) besitzt für den Fall $\frac{k_c^4}{\epsilon} < 1$ noch zwei weitere Lösungen:

$$\psi_{1,2} = \pm \sqrt{ITG \left[1 - \frac{k_c^4}{\epsilon} \right]} \quad (4.7a)$$

$$T_{1,2} = \text{const.} \quad (4.7b)$$

Harmonische Lösungen

Komplizierter wird es allerdings, wenn man für ψ einen harmonischen Ansatz wählt:

$$\psi_Z = A_Z \sin(k_c x), \quad A_Z > 0 \quad (4.8a)$$

$$T_Z = \text{const.} \quad (4.8b)$$

Dieser Ansatz modelliert im ψ -Feld einen Zonal Flow. Damit lauten die Gleichungen (4.5):

$$0 = ITG \cdot A_Z \sin(k_c x) - A_Z^3 \sin^3(k_c x) \quad (4.9a)$$

$$0 = 0 \quad (4.9b)$$

Gleichung (4.9b) ist trivialerweise erfüllt. Bei Gleichung (4.9a) stellt sich das Problem, dass die Amplitude ortsabhängig ist, was dem Ansatz (4.8) widerspricht. Um diesem Widerspruch zu entgehen, kann man Gleichung (4.9a) schreiben als:

$$0 = ITG \cdot A_Z \sin(k_c x) - A_Z^3 \left(\frac{3}{4} \sin(k_c x) - \frac{1}{4} \sin(3k_c x) \right) \quad (4.10)$$

Der kubische Term produziert also höhere Harmonische von $\sin(k_c x)$. Vernachlässigt man Terme höherer Ordnung, folgt für (4.10):

$$0 = ITG \cdot A_Z \sin(k_c x) - \frac{3}{4} A_Z^3 \sin(k_c x) \quad (4.11)$$

$$\Leftrightarrow A_Z = \sqrt{\frac{4}{3} ITG} \quad (4.12)$$

Daraus folgt dann für die stationäre Lösung:

$$\psi_Z = \sqrt{\frac{4}{3} ITG} \cdot \sin(k_c x) \quad (4.13a)$$

$$T_Z = \text{const.} \quad (4.13b)$$

Diese Näherung ist sinnvoll, da durch die Wellenlängen-Selektion nur Wellenvektoren von der Größe $|\mathbf{k}| \simeq k_c$ verstärkt werden. Numerisch wird die Richtigkeit dieser Näherung bestätigt, da sich diese Lösungen zeitlich nicht mehr verändern. Den Ansatz (4.8) kann man auch für $\mathbf{k} = (0, k_c)$ verwenden, der tertiäre Instabilitäten modelliert:

$$\psi_D = A_D \sin(k_c y), \quad A_D > 0 \quad (4.14a)$$

$$T_D = \text{const.} \quad (4.14b)$$

Damit lauten die Gleichungen (4.5):

$$0 = ITG \left(2 - \frac{2}{1 + A_D^2/2} \right) A_D \sin(k_c y) - A_D^3 \sin^3(k_c y) \quad (4.15a)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \langle \psi_D^2 \rangle &= \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} (A_D \sin(k_c y))^2 dx dy = \frac{A_D^2}{2} \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.15b)$$

Gleichung (4.15b) wird wieder trivial erfüllt. Erneute Vernachlässigung höherer Harmonischer in (4.15a) liefert:

$$0 = ITG \left(2 - \frac{4}{2 + A_D^2} \right) A_D \sin(k_c y) - \frac{3}{4} A_D^3 \sin(k_c y) \quad (4.16)$$

$$\Leftrightarrow A_D = \sqrt{\frac{8}{3} ITG - 2}, \quad ITG \geq \frac{3}{4} \quad (4.17)$$

Daraus folgt dann für die stationäre Lösung:

$$\psi_D = \sqrt{\frac{8}{3} ITG - 2} \cdot \sin(k_c y), \quad ITG \geq \frac{3}{4} \quad (4.18a)$$

$$T_D = \text{const.} \quad (4.18b)$$

Auch die Richtigkeit dieser Näherung wird numerisch bestätigt.

4.4 Lineare Stabilitäts-Analysen

In diesem Abschnitt wird die Stabilität der fünf gefundenen stationären Lösungen bestimmt. Hierfür bietet sich eine lineare Stabilitäts-Analyse an, die zumindest das Schicksal kleiner Abweichungen $\tilde{\psi}$ und \tilde{T} von der stationären Lösung bestimmen kann. Mit diesen Ergebnissen werden dann Bifurkations-Diagramme erstellt, die viel über das qualitative Verhalten des Systems aussagen. Unter anderem kann damit das Ende des Dimits Shifts bestimmt werden. Um die Stabilität zu bestimmen, werden die Gleichungen (4.4) in ψ und T linearisiert:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \right) = \hat{L} \tilde{\psi} - 3\psi^2 \tilde{\psi} \quad (4.19a)$$

$$\text{mit } \hat{L} = \frac{ITG}{\epsilon} \left[\epsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(2 - \frac{2}{1 + \langle \psi^2 \rangle} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta^{-1} - (k_c^2 + \Delta)^2 \right]$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \right) = \Delta \tilde{T} \quad (4.19b)$$

Für $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = ITG \left[1 - \frac{k_c^4}{\epsilon} \right] \tilde{\psi} - 3\psi^2 \tilde{\psi} \quad (4.19c)$$

\hat{L} ist hier ein quasi-linearer Operator. Linearisierung des quadrierten Effektivwertes liefert:

$$\frac{2}{1 + \langle (\psi + \tilde{\psi})^2 \rangle} \tilde{\psi} = \frac{2}{1 + \langle \psi^2 \rangle} \tilde{\psi} - \frac{4 \langle \psi \tilde{\psi} \rangle \tilde{\psi}}{(1 + \langle \psi^2 \rangle)^2} + \mathcal{O}(\tilde{\psi}^3) \quad (4.20)$$

Der zweite Summand von der RHS ist quadratisch in $\tilde{\psi}$ und wird daher vernachlässigt. Die Linearisierung liefert also:

$$\langle (\psi + \tilde{\psi})^2 \rangle \rightarrow \langle \psi^2 \rangle \quad (4.21)$$

Im Folgenden werden die fünf bestimmten stationären Lösungen in die linearisierten Gleichungen eingesetzt und die Wachstumsraten der dazugehörigen Störungen bestimmt.

Stabilität der konstanten Lösungen

Zuerst wird die Stabilität der trivialen Lösung (4.6) betrachtet. Einsetzen in die linearisierten Gleichungen ergibt:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = ITG \left[1 - \frac{k_c^4}{\epsilon} \right] \tilde{\psi} \quad (4.22a)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = 0 \quad (4.22b)$$

Die Lösung dieser Gleichungen lautet:

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi} e^{\gamma t} \quad (4.23a)$$

$$\text{mit } \gamma = ITG \left[1 - \frac{k_c^4}{\epsilon} \right] \\ \tilde{T} = \text{const.} \quad (4.23b)$$

Es handelt sich hierbei also um eine stationäre Lösung, die für $k_c^4/\epsilon < 1$ instabil wird. Für die beiden Lösungen (ψ_1, T_1) und (ψ_2, T_2) ergeben sich folgende Gleichungen,

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = -2ITG \left[1 - \frac{k_c^4}{\epsilon} \right] \tilde{\psi} \quad (4.24a)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = 0 \quad (4.24b)$$

mit den Lösungen:

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi} e^{\gamma t} \quad (4.25a)$$

$$\text{mit } \gamma = -2ITG \left[1 - \frac{k_c^4}{\epsilon} \right] \\ \tilde{T} = \text{const.} \quad (4.25b)$$

Da diese stationären Lösungen nur für $k_c^4/\epsilon < 1$ auftreten, sind sie stets stabil. Bei $k_c^4/\epsilon = 1$ tritt also eine Bifurkation auf, da die Lösung (ψ_0, T_0) hier instabil wird und zwei neue stabile Lösungen (ψ_1, T_1) und (ψ_2, T_2) auftreten. Das ist ein typisches Beispiel für eine Pitchfork-Bifurkation (siehe Abbildung 4.7).

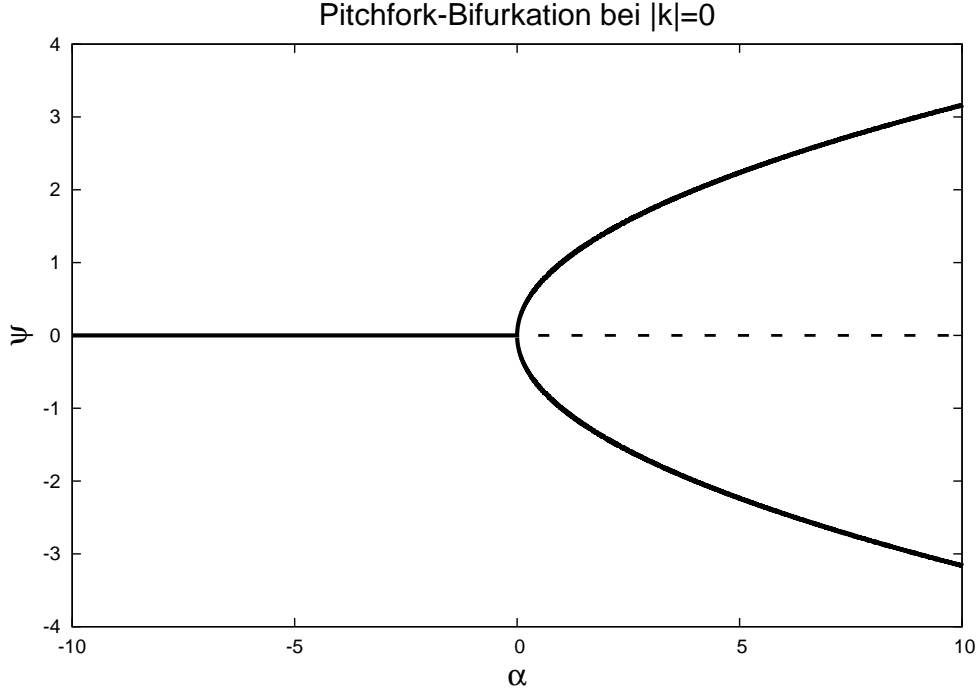


Abbildung 4.7: Bifurkations-Diagramm mit dem Parameter $\alpha = ITG \left[1 - \frac{k_c^4}{\epsilon} \right]$ für Lösungen und Störungen mit $|\mathbf{k}| = 0$. Durchgezogene Graphen stellen stabile Lösungen, gestrichelte instabile Lösungen dar.

Stabilität der harmonischen Lösungen

Um die Stabilität der Zonal Flow modellierenden Lösung (ψ_Z, T_Z) zu bestimmen, setzt man (4.13) in die linearisierten Gleichungen (4.19) ein:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \beta \sqrt{\frac{4}{3} ITG} \cdot k_c \cos(k_c x) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = \hat{L} \tilde{\psi} - 4 ITG \sin^2(k_c x) \tilde{\psi} \quad (4.26a)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \beta \sqrt{\frac{4}{3} ITG} \cdot k_c \cos(k_c x) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = \Delta \tilde{T} \quad (4.26b)$$

Für die Störungen kann man hier einen harmonischen Ansatz machen:

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi} e^{\gamma t} \sin(k_x x + k_y y + \phi), \quad \phi \in [-\pi; \pi] \quad (4.27a)$$

$$\tilde{T} = \tilde{T} e^{\gamma t} \sin(k_x x + k_y y + \phi) \quad (4.27b)$$

Setzt man diesen Ansatz in die linearisierten Gleichungen ein, so treten folgende Terme auf:

$$\begin{aligned} \sin^2(k_c x) \sin(k_x x + k_y y + \phi) &= \frac{1}{2} \sin(k_x x + k_y y + \phi) \\ &- \frac{1}{4} [\sin((k_x + 2k_c)x + k_y y + \phi) + \sin((k_x - 2k_c)x + k_y y + \phi)] \end{aligned} \quad (4.28a)$$

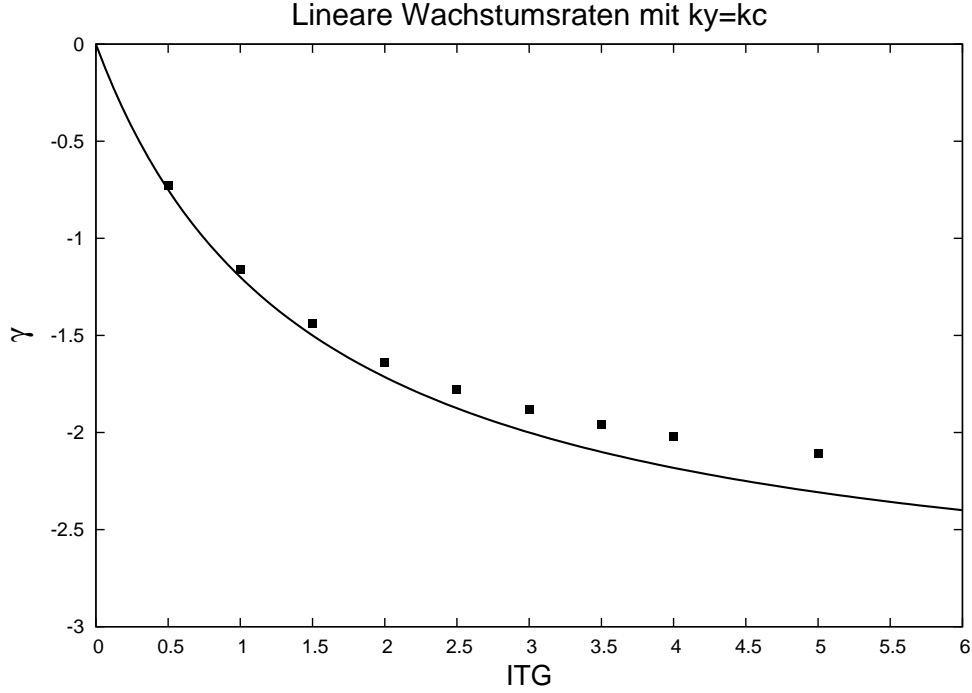


Abbildung 4.8: Lineare Wachstumsraten von Störungen mit $(k_x, k_y) = (0, \pm k_c)$ und beliebiger Phase. Die Punkte sind numerisch bestimmte Wachstumsraten, der Graph ist die analytische Lösung nach (4.35).

$$\begin{aligned} & \cos(k_c x) \cos(k_x x + k_y y + \phi) \\ &= \frac{1}{2} [\cos((k_x + k_c)x + k_y y + \phi) + \cos((k_x - k_c)x + k_y y + \phi)] \quad (4.28b) \end{aligned}$$

Die letzten beiden Summanden in der RHS von (4.28a) produzieren nur Terme mit (k_x, k_y) für $(k_x, k_y) = (\pm k_c, 0)$. In jedem anderen Fall entstehen andere Wellenvektoren, die vernachlässigt werden können. Die beiden Summanden in der RHS von (4.28b) produzieren nur Terme mit (k_x, k_y) für $(k_x, k_y) = (\pm 1/2 k_c, 0)$, die daher auch vernachlässigt werden können. Es ergeben sich dadurch folgende Vereinfachungen:

$$\sin^2(k_c x) \sin(k_x x + k_y y + \phi) \rightarrow \delta \sin(k_x x + k_y y + \phi) \quad (4.29a)$$

$$\text{mit } \delta = \begin{cases} 3/4 & \text{falls } (k_x, k_y) = (\pm k_c, 0) \text{ und } \phi = 0 \\ 1/4 & \text{falls } (k_x, k_y) = (\pm k_c, 0) \text{ und } \phi = \pi/2 \\ 1/2 & \text{falls } (k_x, k_y) \neq (\pm k_c, 0) \end{cases}$$

$$\cos(k_c x) \cos(k_x x + k_y y + \phi) \rightarrow 0 \quad (4.29b)$$

Aufgrund der Linearität der Gleichungen (4.26) reicht es aus, diese Spezialfälle zu betrachten, da jede andere Störung mit gleichen Wellenvektoren eine Linearkombination dieser ist.

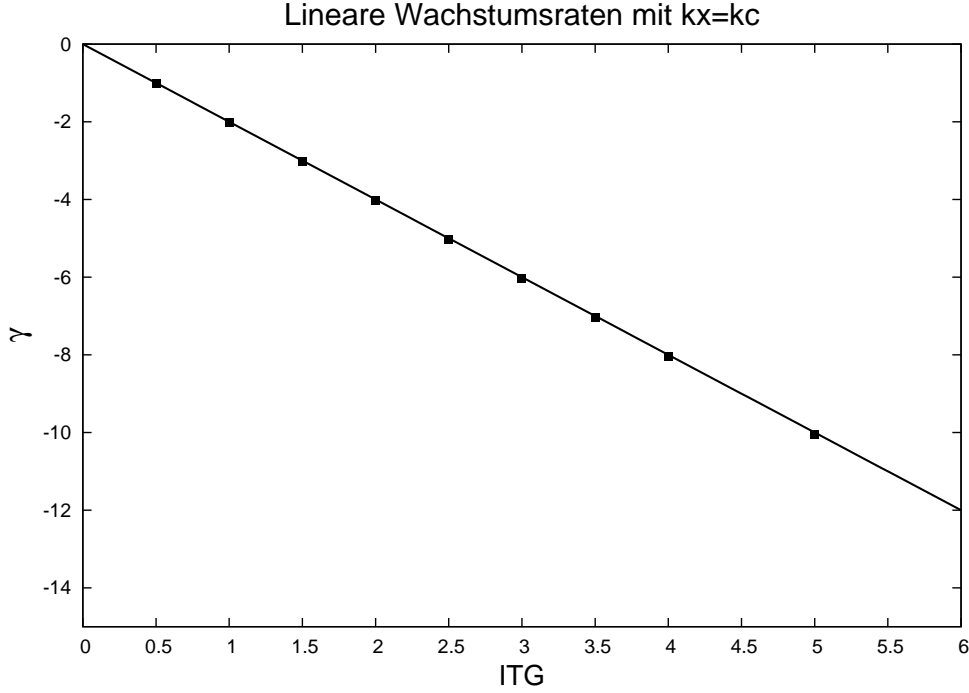


Abbildung 4.9: Lineare Wachstumsraten von gleichphasigen Störungen mit $(k_x, k_y) = (\pm k_c, 0)$. Die Punkte sind numerisch bestimmte Wachstumsraten, der Graph ist die analytische Lösung nach (4.36).

Für (4.26) folgt mit dem Ansatz (4.27) und den obigen Vereinfachungen:

$$\gamma \tilde{\psi} = \hat{L}(\tilde{\psi}) \tilde{\psi} - 4\delta ITG \tilde{\psi} \quad (4.30a)$$

$$\text{mit } \hat{L}(\tilde{\psi}) = \frac{ITG}{\epsilon} \left[\epsilon \frac{k_x^2 + \left(2 - \frac{6}{3+2ITG}\right) k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} - (k_c^2 - (k_x^2 + k_y^2))^2 \right]$$

$$\gamma \tilde{T} = -(k_x^2 + k_y^2) \tilde{T} \quad (4.30b)$$

Es ergibt sich eine entkoppelte Eigenwertgleichung

$$\gamma \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{L}(\tilde{\psi}) - 4\delta ITG & 0 \\ 0 & -k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

mit den Eigenwerten:

$$\gamma_1 = \hat{L}(\tilde{\psi}) - 4\delta ITG \quad (4.32a)$$

$$\gamma_2 = -k_x^2 - k_y^2 < 0 \quad (4.32b)$$

Der zweite Eigenwert γ_2 ist immer negativ, der erste muss noch untersucht werden.

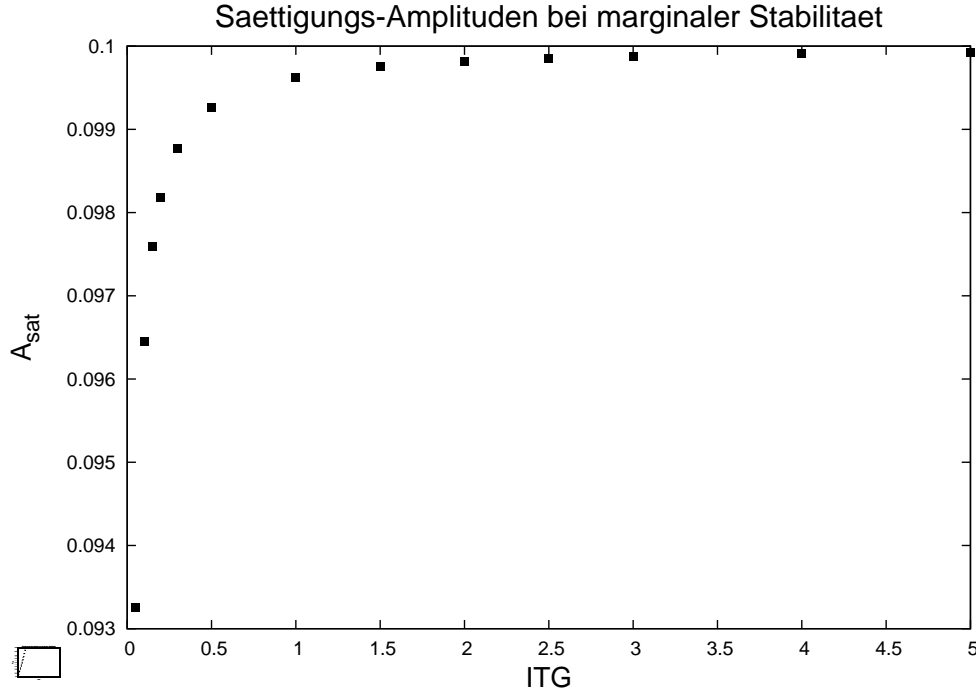


Abbildung 4.10: Numerisch bestimmte Sättigungs-Amplituden von Störungen mit $(k_x, k_y) = (\pm k_c, 0)$, $\tilde{\psi} = \tilde{T} = 0.1$ und einer Phase von $\phi = \pi/2$.

Um sicher zu gehen, dass dieser auch stabil ist, muss man globale Maxima suchen. Nimmt man dafür an, dass die Störung die Wellenzahl k_c besitzt, kann man $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$ setzen. Daraus folgt für γ_1 :

$$\gamma_1 = \frac{ITG}{k_c^2} \left(k_x^2 + \left(2 - \frac{6}{3 + 2ITG} \right) (k_c^2 - k_x^2) \right) - 4\delta ITG \quad (4.33)$$

Ableiten nach k_x liefert:

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial k_x} = \frac{-2k_x ITG (2ITG - 3)}{(2ITG + 3) k_c^2} \quad (4.34)$$

γ_1 ist also extremal für $k_x = 0$. Daraus folgt, dass $\delta = 1/2$. Der Eigenwert lautet hier:

$$\gamma_1 = \frac{9}{2ITG + 3} - 3 < 0 \text{ für } ITG > 0 \quad (4.35)$$

γ_1 ist für diese Wahl der Parameter also stabil. Betrachtet man jetzt noch die Ränder ($|k_x| \rightarrow k_c$), folgt für γ_1 :

$$\gamma_1 = ITG (1 - 4\delta) \leq 0 \quad (4.36)$$

Für $\delta = 3/4$, also für gleichphasige Störungen, ist dieser Eigenwert immer stabil. Für $\delta = 1/4$, also für eine Störung, die um $\phi = \pi/2$ zur stationären Lösung verschoben ist, verschwindet die lineare Wachstumsrate. Daraus folgt, dass höhere Terme in der Entwicklung das Verhalten der Störung bestimmen.

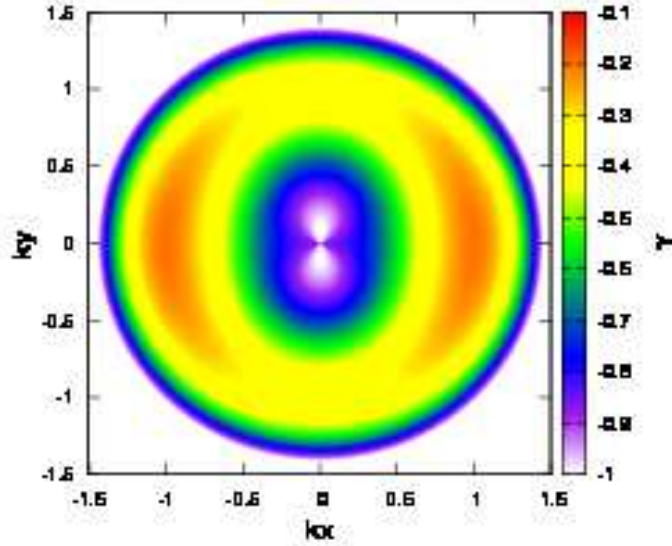


Abbildung 4.11: Dispersionsrelation für $ITG = 0.2$ nach (4.32a).

Es stellt sich heraus, dass die Lösung marginal stabil ist, das heißt, dass kleine Störungen zwar nicht weiter anwachsen, sie aber auch nicht asymptotisch gegen Null streben. Sie sättigen auf unterschiedlichen Niveaus, die abhängig vom Parameter ITG sind. Abbildung 4.10 zeigt die numerisch bestimmten Sättigungsniveaus, dafür wird eine Störung mit der Amplitude $\tilde{\psi} = \tilde{T} = 0.1$ zur stationären Lösung addiert und die sich einstellende Sättigungs-Amplitude bestimmt. Zur Überprüfung der gefundenen Relationen (4.35) und (4.36) werden ebenfalls Störungen mit $\tilde{\psi} = \tilde{T} = 0.01$ zur stationären Lösung addiert und die Wachstumsraten bestimmt. Dabei weisen phasenverschobene Störungen im Fall $(k_x, k_y) = (0, \pm k_c)$ die gleichen Wachstumsraten auf, was auch numerisch bestätigt wird (Abbildung 4.8). Abbildung 4.9 zeigt die analytischen und numerischen Ergebnisse für gleichphasige Störungen mit $(k_x, k_y) = (\pm k_c, 0)$ ($\delta = 3/4$). Für die Werte $ITG = 0.2$ und $ITG = 3.0$ zeigen die Abbildungen 4.11 und 4.12 die dreidimensionalen Dispersionsrelationen nach (4.32a). Hier wird $\delta = 1/2$ gesetzt, daher stimmen die Werte für $(k_x, k_y) = (\pm k_c, 0)$ nicht ganz überein. Man erkennt allerdings, dass sich Fourier-Kreisringe mit dem Radius $|\mathbf{k}| = k_c = 1.0$ ausbilden, in denen die Wachstumsraten maximal werden. Für größere $|\mathbf{k}|$ sinkt γ rapide ab.

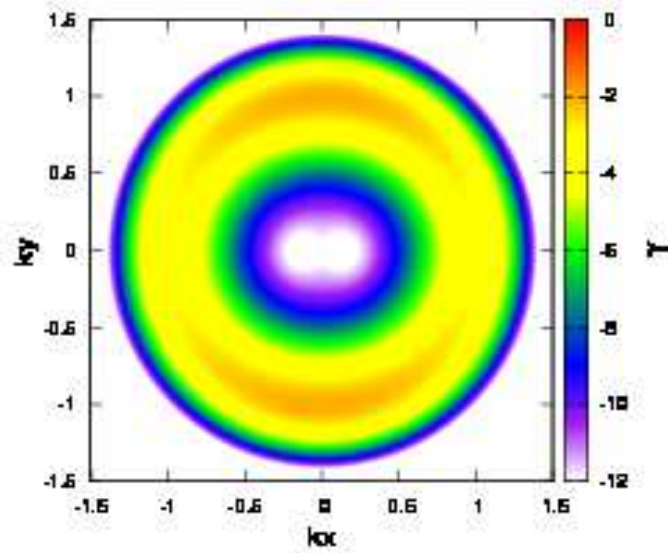


Abbildung 4.12: Dispersionsrelation für $ITG = 3.0$ nach (4.32a).

Für die Stabilität der Lösung (ψ_D, T_D) , die die tertiäre Instabilität modelliert, setzt man die Lösung (4.18) in die linearisierten Gleichungen (4.19) ein:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} - \beta \sqrt{\frac{8}{3} ITG - 2 \cdot k_c \cos(k_c y)} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} = \hat{L} \tilde{\psi} - 2(4ITG - 3) \sin^2(k_c y) \tilde{\psi} \quad (4.37a)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \beta \sqrt{\frac{8}{3} ITG - 2 \cdot k_c \cos(k_c y)} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} = \Delta \tilde{T} \quad (4.37b)$$

Macht man für die Störungen wieder den Ansatz (4.27), so treten bei diesen Gleichungen Terme auf, die bis auf Vertauschung der Koordinaten mit denen aus (4.28) übereinstimmen. Daher kann man analog die gleichen Vereinfachungen machen:

$$\sin^2(k_c y) \sin(k_x x + k_y y + \phi) \rightarrow \delta \sin(k_x x + k_y y + \phi) \quad (4.38a)$$

$$\text{mit } \delta = \begin{cases} 3/4 & \text{falls } (k_x, k_y) = (0, \pm k_c) \text{ und } \phi = 0 \\ 1/4 & \text{falls } (k_x, k_y) = (0, \pm k_c) \text{ und } \phi = \pi/2 \\ 1/2 & \text{falls } (k_x, k_y) \neq (0, \pm k_c) \end{cases}$$

$$\cos(k_c y) \cos(k_x x + k_y y + \phi) \rightarrow 0 \quad (4.38b)$$

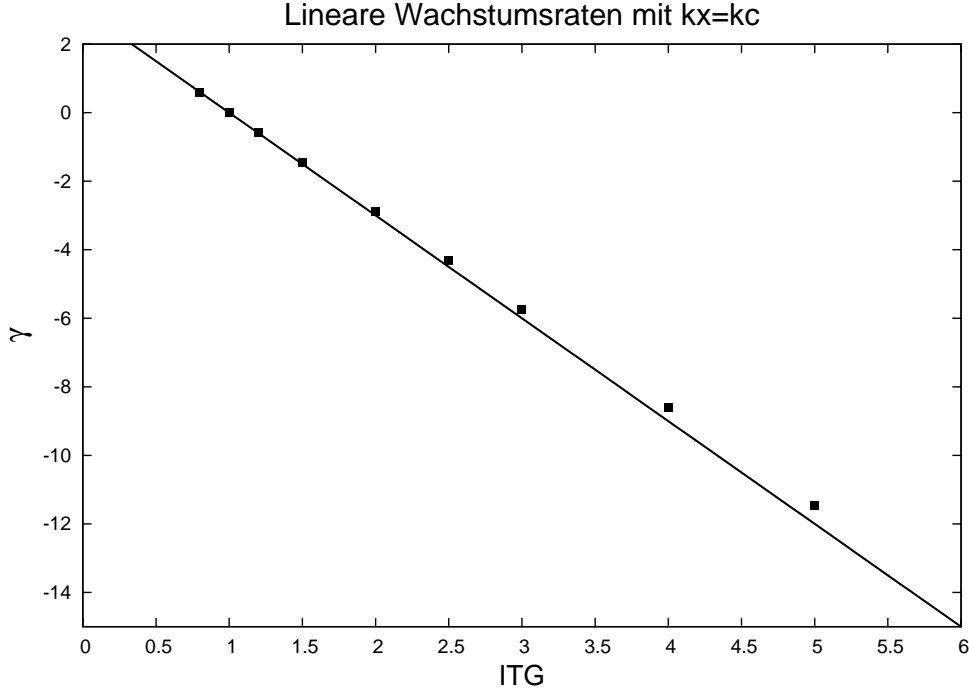


Abbildung 4.13: Lineare Wachstumsraten von Störungen mit $(k_x, k_y) = (\pm k_c, 0)$ und beliebiger Phase. Die Punkte sind numerisch bestimmte Wachstumsraten, der Graph ist die analytische Lösung nach (4.45).

Mit dem Ansatz (4.27) und den Vereinfachungen folgt für (4.37):

$$\gamma \tilde{\psi} = \hat{L}(\tilde{\psi}) \tilde{\psi} - 2\delta(4ITG - 3) \tilde{\psi} \quad (4.39a)$$

$$\text{mit } \hat{L}(\tilde{\psi}) = \frac{ITG}{\epsilon} \left[\epsilon \frac{k_x^2 + (2 - \frac{3}{2ITG}) k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} - (k_c^2 - (k_x^2 + k_y^2))^2 \right]$$

$$\gamma \tilde{T} = -(k_x^2 + k_y^2) \tilde{T} \quad (4.39b)$$

Es ergibt sich also wieder eine entkoppelte Eigenwertgleichung

$$\gamma \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{L}(\tilde{\psi}) - 2\delta(4ITG - 3) & 0 \\ 0 & -k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

mit den Eigenwerten:

$$\gamma_1 = \hat{L}(\tilde{\psi}) - 2\delta(4ITG - 3) \quad (4.41a)$$

$$\gamma_2 = -k_x^2 - k_y^2 < 0 \quad (4.41b)$$

Der zweite Eigenwert γ_2 ist immer negativ, der erste muss noch untersucht werden. Nimmt man wieder an, dass die Störung die Wellenzahl k_c besitzt, kann man $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$ setzen.

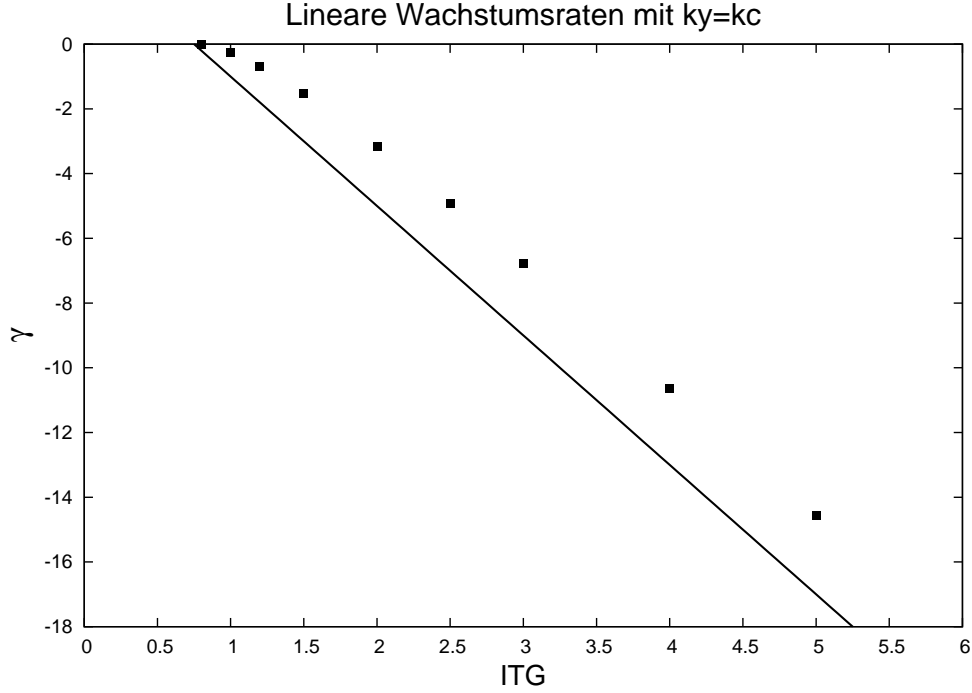


Abbildung 4.14: Lineare Wachstumsraten von gleichphasigen Störungen mit $(k_x, k_y) = (0, \pm k_c)$. Die Punkte sind numerisch bestimmte Wachstumsraten, der Graph ist die analytische Lösung nach (4.44).

Daraus folgt für γ_1 :

$$\gamma_1 = \frac{ITG}{k_c^2} \left(k_x^2 + \left(2 - \frac{3}{2ITG} \right) (k_c^2 - k_x^2) \right) - 2\delta (4ITG - 3) \quad (4.42)$$

Ableiten nach k_x liefert:

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial k_x} = \frac{-k_x (2ITG - 3)}{k_c^2} \quad (4.43)$$

γ_1 ist also extremal für $k_x = 0$. Für den Eigenwert folgt bei diesen Parametern:

$$\gamma_1 = \frac{4ITG - 3}{2} (1 - 4\delta) \leq 0 \text{ für } ITG > \frac{3}{4} \quad (4.44)$$

Da die stationäre Lösung nur unter der Voraussetzung $ITG > 3/4$ besteht, gilt $\gamma_1 \leq 0$. Für den Fall $\delta = 1/4$, also wieder für eine um $\pi/2$ verschobene Störung, verschwindet der Eigenwert. Es stellt sich erneut heraus, dass es sich um eine marginal stabile Lösung handelt (siehe Abbildung 4.15). Betrachtet man jetzt noch die Ränder ($|k_x| \rightarrow k_c$), das heißt, dass $\delta = 1/2$, folgt für γ_1 :

$$\gamma_1 = 3(1 - ITG) < 0 \text{ für } ITG > 1 \quad (4.45)$$

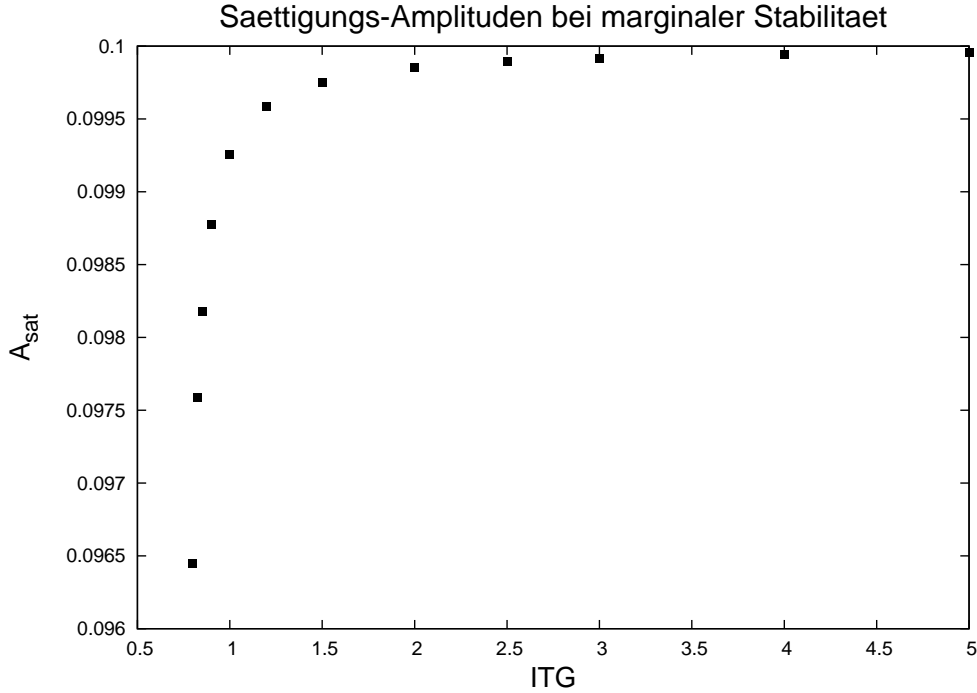


Abbildung 4.15: Numerisch bestimmte Sättigungs-Amplituden von Störungen mit $(k_x, k_y) = (0, \pm k_c)$, $\tilde{\psi} = \tilde{T} = 0.1$ und einer Phase von $\phi = \pi/2$.

Für $(k_x, k_y) = (k_c, 0)$ und $ITG < 1$ wird der Eigenwert also positiv, das heißt, die stationäre Lösung (ψ_D, T_D) ist für diese Parameter-Werte instabil (siehe (4.45)). Zur Überprüfung der gefundenen Relationen (4.44) und (4.45) werden wieder Störungen mit $\tilde{\psi} = \tilde{T} = 0.01$ zur stationären Lösung addiert und die Wachstumsraten bestimmt. Dabei weisen phasenverschobene Störungen im Fall $(k_x, k_y) = (\pm k_c, 0)$ die gleichen Wachstumsraten auf, was auch numerisch bestätigt wird (Abbildung 4.13). Abbildung 4.14 zeigt die analytischen und numerischen Ergebnisse für gleichphasige Störungen mit $(k_x, k_y) = (0, \pm k_c)$ ($\delta = 3/4$). Für die Werte $ITG = 0.8$ und $ITG = 3.0$ zeigen die Abbildungen 4.16 und 4.17 die dreidimensionalen Dispersionsrelationen nach (4.41a). Hier wird wieder $\delta = 1/2$ gesetzt, daher stimmen die Werte für $(k_x, k_y) = (0, \pm k_c)$ nicht ganz überein. Abbildung 4.18 zeigt das resultierende Bifurkations-Diagramm für die harmonischen Lösungen. Aufgetragen sind die Amplituden von ψ_Z und ψ_D in Abhängigkeit des Bifuraktions-Parameters ITG . Bei $ITG = 0.75$ tritt eine Bifurkation auf, weil dort ein neuer Gleichgewichtszustand eintritt, der bei $ITG \in [0.75; 1.0]$ instabil ist. Für $ITG > 1.0$ wird diese Lösung stabil.

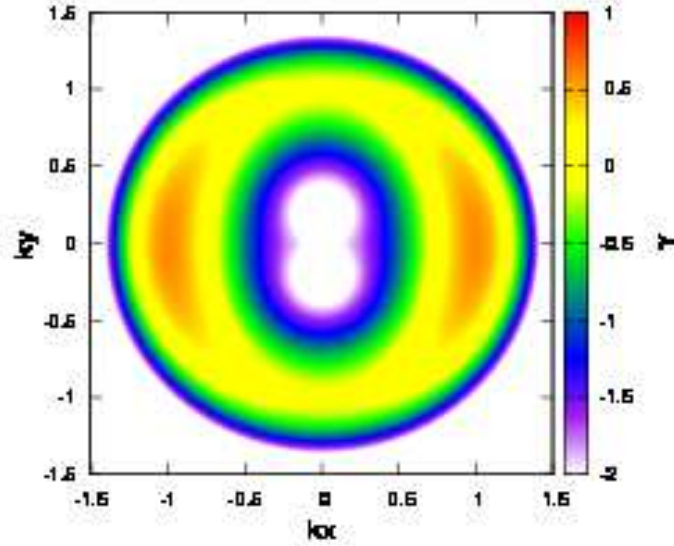


Abbildung 4.16: Dispersionsrelation für $ITG = 0.8$ nach (4.41a)

Betrachtet man noch einmal die Modell-Gleichungen (4.4), so stellt man fest, dass für $\langle \psi^2 \rangle = A^2/2 = 1$ die k_x - und k_y -Moden gleich stark getrieben werden. Die Amplitude von ψ_D hat bei $ITG = 1.0$ einen Wert von $A = \sqrt{6}/3$, also werden dort die k_y -Moden nur halb so stark getrieben wie die k_x -Moden. Entgegen der Erwartung wird diese Lösung an diesem Punkt stabil. Andererseits bleibt die Lösung von ψ_Z bei Werten von $ITG > 1.5$ auch stabil, obwohl dort die k_y -Moden stärker getrieben werden. Interessant ist, dass eine Störung mit $(k_x, k_y) = (k_c, 0)$ im instabilen Bereich der Lösung ψ_D soweit wächst, bis sie in der stabilen stationären Lösung (ψ_Z, T_Z) endet. Abbildung 4.19 zeigt den zeitlichen Verlauf der Amplituden der instabilen Lösung (grün) und einer kleinen Störung (rot). Die Störung wächst anfangs mit einer linearen Wachstumsrate $\gamma \simeq 0.6$, bis sie ab einer Zeit von $t > 7$ durch die nichtlinearen Terme gedämpft wird und dann schließlich bei $t \simeq 12$ in einem Sättigungs-Zustand mit $A_{\text{sat}} \simeq 1.03$ endet. Diese Amplitude ist aber gerade die der stationären Lösung mit $(k_x, k_y) = (k_c, 0)$, nämlich $A_Z = \sqrt{4/3 \cdot 0.8} \simeq 1.03$. Die Amplitude der instabilen Lösung ist bis zu einer Zeit von $t \simeq 6$ nahezu konstant und wird danach mit einer anfänglichen Wachstumsrate von $\gamma \simeq -0.17$ bis auf $A \simeq 0$ gedämpft. Interessanterweise setzt diese Dämpfung erst zu dem Zeitpunkt ein, wo $A_D \simeq \tilde{\psi}$ gilt. Die stationäre Lösung (ψ_Z, T_Z) wirkt also als ein Attraktor auf Störungen der instabilen Lösung.

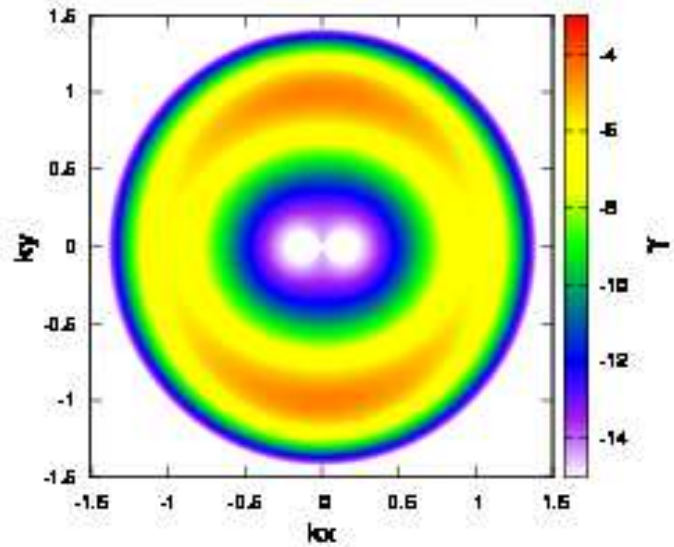


Abbildung 4.17: Dispersionsrelation für $ITG = 3.0$ nach (4.41a)

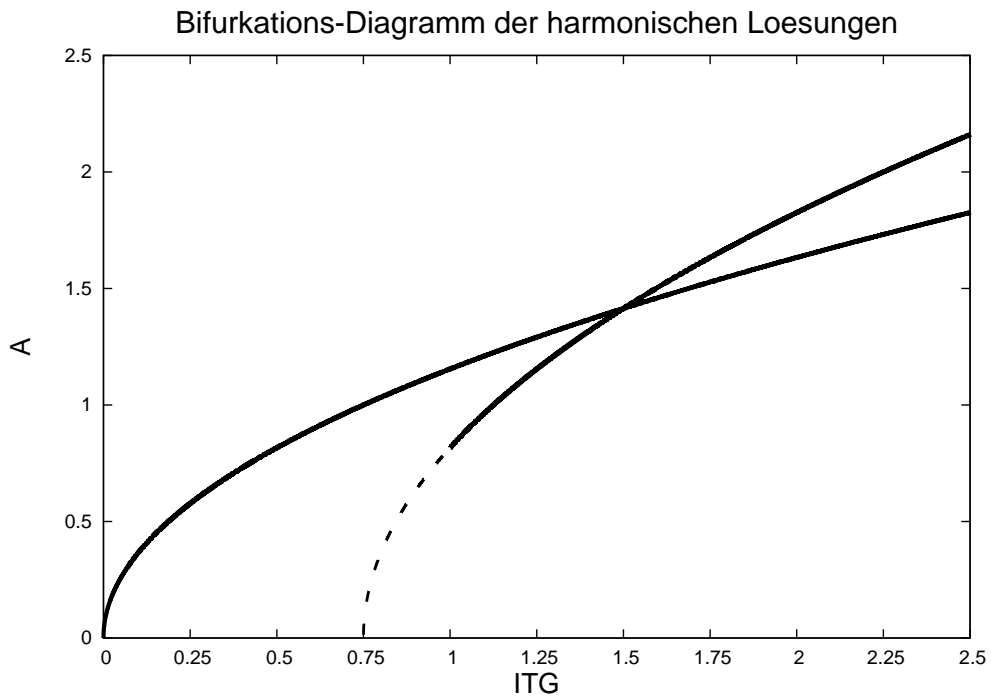


Abbildung 4.18: Bifurkations-Diagramm mit dem Parameter ITG für Lösungen und Störungen mit $|\mathbf{k}| \neq 0$. Durchgezogene Graphen stellen stabile Lösungen, gestrichelte instabile Lösungen dar. Die Zonal Flow Lösung ist immer stabil, die tertiäre Instabilität erst ab $ITG > 1$

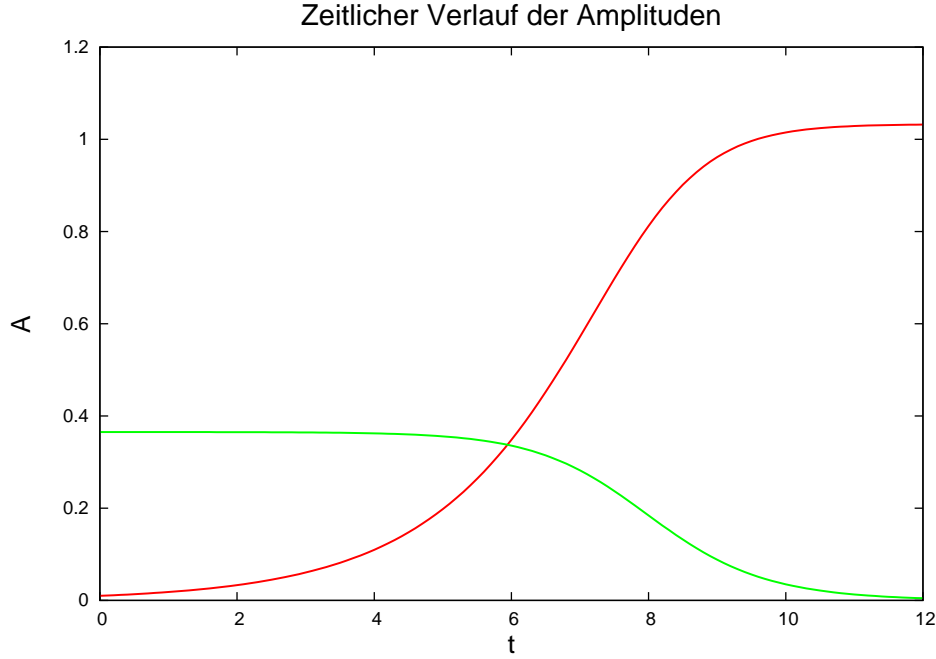


Abbildung 4.19: Die grüne Kurve stellt die Amplitude der instabilen Lösung mit $(k_x, k_y) = (0, k_c)$ dar, die rote Kurve eine Störung $(k_x, k_y) = (k_c, 0)$ mit der anfänglichen Amplitude $\tilde{\psi} = \tilde{T} = 0.01$, bei $ITG = 0.8$.

4.5 Fazit

Die numerischen Ergebnisse bestätigen die Mechanismen des neuen Plasma Modells, das in der Lage ist, den Übergang von Zonal Flows zur tertiären Instabilität zu modellieren. Mit Hilfe des Bifurkations-Diagramms 4.18 kann das Ende des Dimits Shifts wie folgt bestimmt werden. Über einen Bereich von $0 < ITG < 0.75$ existiert nur die Zonal Flow modellierende Lösung, die den Dimits Shift hervorruft. Bei $ITG = 0.75$ tritt eine Bifurkation auf, da hier auch die Lösung existiert, die die tertiäre Instabilität modelliert. Diese ist allerdings im Bereich $0.75 < ITG < 1$ instabil, kleine Störungen führen immer in die stabile Zonal Flow Lösung. Daher lässt sich die Bifurkation nicht mit dem oberen Ende des Dimits Shifts identifizieren. Das wird auch durch die numerischen Ergebnisse bestätigt, da sich das System bei $ITG = 0.9$ in der Umgebung der Zonal Flow Lösung befindet. Das Ende des Dimits Shifts wird aber bei $ITG = 1.0$ realisiert, da hier die Lösung der tertiären Instabilität stabil wird. Die Zonal Flow Lösung ist bei diesem Parameterwert zwar auch stabil, allerdings zeigen numerische Untersuchungen, dass die Lösung der tertiären Instabilität bei $ITG > 1.0$ wie ein Attraktor wirkt, da Abweichungen von der Zonal-Flow Lösung, die nicht im Bereich der linearen Stabilität liegen, in die Lösung der tertiären Instabilität führen. Abschließend ist zu bemerken, dass dieses neue Plasma Modell einen Mechanismus enthält, der den Übergang von Zonal Flows zur tertiären Instabilität erklären kann. Das Ende des Dimits Shifts kann mit Hilfe des Bifurkations-Diagramms zu $ITG = 1.0$ bestimmt werden.

5 Der Dimits Shift in gyrokinetischen Simulationen

In diesem Kapitel wird auf die Ergebnisse eingegangen, die in Zusammenarbeit mit dem Institut für Plasmaphysik in Garching entstanden sind. Mit Hilfe des GENE-Codes können neue Einblicke in das Phänomen des Dimits Shifts erlangt werden. Dieser Mikroturbulenz-Code wird im ersten Abschnitt kurz beschrieben, um dann im nächsten Abschnitt die Ergebnisse zu präsentieren, die auf ihm basieren. Dabei wird die Abhängigkeit des Dimits Shifts vom Sicherheitsfaktor q_0 und der magnetischen Verscherung \hat{s} bestimmt (siehe Abschnitt 2.5). Die gesamten Daten aus den Simulationen und alle weiteren Auswertungen sind auf der beiliegenden DVD enthalten.

5.1 Der GENE-Code

Der GENE-Code (**G**yrokinetic **E**lectromagnetic **N**umerical **E**xperiment) ist ein Plasma Mikroturbulenz-Code, der 2000 von F. Jenko ins Leben gerufen worden ist und in den darauf folgenden Jahren von T. Dannert weiterentwickelt wurde. Zur Zeit arbeitet eine Reihe von Wissenschaftlern an dessen Weiterentwicklung, das GENE development team (<http://www.ipp.mpg.de/~fsj/gene/>). Kern dieses Codes ist ein in Fortran 90/95 geschriebener massiv paralleler Simulations-Code, der numerisch die gyrokinetische Vlasov-Gleichung löst. Das geschieht im Euler-Bild, das heißt, dass alle Größen auf einem festen Gitter diskretisiert werden, um danach die zeitliche Entwicklung der fünf-dimensionalen Verteilungsfunktion zu bestimmen. In diesem Abschnitt werden kurz die wesentlichen Merkmale des Codes erläutert. Da die gyrokinetische Vlasov-Gleichung die zentrale Gleichung im GENE-Code darstellt, wird die Herleitung dieser Gleichung aus der im Abschnitt 2.2 eingeführten Vlasov-Gleichung skizziert. Abschließend werden die grundlegenden Einstellungen zu den numerischen Berechnungen im Abschnitt 5.2 aufgezeigt.

Merkmale von GENE

Da im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht auf alle Details des Codes eingegangen werden kann, soll folgende Übersicht einen kleinen Einblick in die Merkmale des Codes geben:

- Euler Bild: Festes Gitter im Phasenraum (Kein numerisches Rauschen)
- Globale (Ganzer Torus) and lokale (Flussflächen) Simulationen in beliebigen Geometrien
- Zeit-explicit, finite Differenzen- und Pseudo-Spektral-Verfahren
- Massiv parallelisiert
- Komplette gyrokinetische Behandlung der Elektronen und Ionen
- Komplette elektromagnetische Fluktuationen
- Realistische Kollisions-Operatoren
- Anfangs- und Eigenwertlöser (für Untersuchungen von subdominanten Moden) implementiert

Eine ausführliche Beschreibung findet sich in [25],[26],[27],[28] und [29].

Die gyrokinetische Vlasov-Gleichung

Verwendet man den Guiding-Centre Ansatz (Abschnitt 2.6), so kann man mit Hilfe der Lie-Transformation die Vlasov-Gleichung (2.14) in eine neue Verteilungsfunktion transformieren, die als abhängige Koordinaten $(\mathbf{r}_c, v_{\parallel}, \mu)$ nur noch den Ort des Gyro-Zentrums, die parallele Geschwindigkeit und das magnetische Moment $\mu = mv_{\perp}^2 / (2B)$ enthält (siehe [30], [27]):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}_c \cdot \nabla f + \dot{v}_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \quad (5.1)$$

Aus der Vlasov-Gleichung wird so die gyrokinetische Vlasov-Gleichung (5.1), die um eine Dimension reduziert ist. Dabei kann man die RHS optional durch Stoßoperatoren ersetzen, die aber in dieser Arbeit nicht verwendet werden. Das Magnetfeld \mathbf{B} , das Vektorpotential \mathbf{A} , das elektrostatische Potential ϕ und die Verteilungsfunktion f werden noch in einen ungestörten stationären (Index „0“) und gestörten Anteil (Index „1“) zerlegt. Das hat den Vorteil, dass die stationären Anteile mit Hilfe der MHD beschrieben werden können, insbesondere durch die im Abschnitt 2.5 eingeführte Grad-Shafranov-Gleichung. Die statische Verteilungsfunktion f_0 wird durch eine Maxwellverteilung beschrieben, was den rechnerischen Aufwand deutlich reduziert.

Durch Einsetzen der Driftterme aus Abschnitt 2.6 wird die zeitliche Entwicklung der modifizierten Verteilungs-Funktion g einer Teilchensorte bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{B_0}{B_{0\parallel}^*} \mathbf{v}_\chi \cdot \left(\nabla f_0 - \frac{1}{mv_{\parallel}} \mu \nabla B_0 \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \right) + \frac{B_0}{B_{0\parallel}^*} (\mathbf{v}_\chi + \mathbf{v}_{\nabla B} + \mathbf{v}_c) \cdot \nabla G_1 + v_{\parallel} \mathbf{b}_0 \cdot \nabla G_1 \\ - \left(\frac{1}{m} \mathbf{b}_1 + \frac{B_0}{mv_{\parallel} B_{0\parallel}^*} \mathbf{v}_c \right) \cdot \left(q \nabla \bar{\phi}_1 + \frac{q}{c} \mathbf{b}_0 \dot{A}_{1\parallel} + \mu \nabla (B_0 + \bar{B}_{1\parallel}) \right) \frac{\partial f_1}{\partial v_{\parallel}} = 0 \quad (5.2) \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird nach Normierung vom GENE-Code gelöst. Ein Strich über einer Größe bedeutet Gyro-Mittelung. Folgende Größen müssen noch definiert werden:

$$g_1 = f_1 - \frac{q}{mc} \bar{A}_{1\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \quad (\text{modifizierte Verteilungsfunktion}) \quad (5.3a)$$

$$G_1 = g - \frac{q}{mv_{\parallel}} \chi_1 \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \quad (5.3b)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B} \quad (\text{Einheitsvektor in Richtung } \mathbf{B}) \quad (5.3c)$$

$$\mathbf{B}_0^* = \nabla \times \left(\mathbf{A}_0 + \frac{mc}{q} v_{\parallel} \mathbf{b}_0 \right) \quad (5.3d)$$

$$\chi_1 = \bar{\phi}_1 - \frac{v_{\parallel}}{c} \bar{A}_{1\parallel} + \frac{1}{q} \mu \bar{B}_{1\parallel} \quad (\text{modifiziertes Potential}) \quad (5.3e)$$

$$\mathbf{v}_\chi = -\frac{c}{B_0^2} \nabla \chi_1 \times \mathbf{B}_0 \quad (\mathbf{E} \times \mathbf{B}\text{-Drift}) \quad (5.3f)$$

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{\mu}{m\Omega} \mathbf{b}_0 \times \nabla B_0 \quad (\nabla B\text{-Drift}) \quad (5.3g)$$

$$\mathbf{v}_c = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} (\nabla \times \mathbf{b}_0)_{\perp} \quad (\text{Krümmungs-Drift}) \quad (5.3h)$$

Grundlegende Einstellungen

Da es im GENE-Code sehr viele optionale Einstellungen gibt, sollen hier kurz die wesentlichen Vereinfachungen aufgezeigt werden, mit denen die Ergebnisse des nächsten Abschnitts erlangt werden:

1. Lokale Approximation

Seit [29] ist es möglich, den vollen Torus numerisch zu berechnen. Trotzdem wird für die folgenden Rechnungen die Flussflächennäherung verwendet, die den rechnerischen Aufwand enorm reduziert. Die Turbulenz in Tokamaks wird charakterisiert durch große parallele und kleine senkrechte Korrelationslängen. Daher kann man die Flussflächen-Näherung anwenden, mit der das Simulationsgebiet auf einen Bereich um eine Flussfläche reduziert wird. Details hierzu findet man in [19].

2. \hat{s} - α -Geometrie

Eine Möglichkeit ist, die Geometrie der Flussflächen aus analytischen oder numerischen Berechnungen der Grad-Shafranov-Gleichung zu erlangen. Allerdings bietet es sich einfachheitshalber an, eine Modell-Geometrie zu benutzen, die der realen Geometrie sehr ähnlich ist. Dabei ist das Profil des Sicherheitsfaktors linear, die magnetische Verscherung also konstant. α bezeichnet die aus Abschnitt 2.5 bekannte Shafranov-Verschiebung, die mitberücksichtigt wird.

3. Adiabatische Elektronen

Die Näherung adiabatischer Elektronen wird häufig bei ITG getriebener Turbulenz verwendet. Dabei wird die Verteilungs-Funktion der Elektronen nicht berechnet, statt dessen wird die folgende Beziehung der Adiabaticität verwendet:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{-q(\phi - \langle \phi \rangle)}{T} \quad (5.4)$$

Dabei bedeuten die Klammern $\langle \dots \rangle$ eine Flussflächenmittelung.

5.2 Abhängigkeit des Dimits Shifts von q_0 und \hat{s}

Wie im Abschnitt 2.8 beschrieben wird, ist der Dimits Shift die Differenz des nichtlinearen und linearen kritischen Temperatur-Gradienten, also die Verschiebung des Einsatzes radialen Transports. Dieser hängt sensitiv von verschiedenen Plasma-Parametern ab. Im Folgenden werden funktionelle Abhängigkeiten vom Sicherheitsfaktor q_0 und der magnetischen Verscherung \hat{s} bestimmt. Dabei ist q_0 ein in GENE bestimmter Referenzwert für den Sicherheitsfaktor q , der sich aufgrund der magnetischen Verscherung in radialer Richtung stets ändert. Funktionelle Zusammenhänge der linearen Schwell-Werte lauten nach [31]:

$$(R/L_T)_{\text{crit,l}} = \max\left\{(1 + \tau) \left(1.33 + 1.91 \frac{\hat{s}}{q_0}\right) (1 - 1.5\varepsilon), 0.8R/L_N\right\} \quad (5.5)$$

τ bezeichnet hier das Verhältnis von Ionen- zu Elektronen-Temperatur und beträgt aufgrund der Annahme adiabatischer Elektronen $\tau = 1.0$. ε ist das Aspekt-Verhältnis eines Tokamaks und wird in den Simulationen zu $\varepsilon = 0.13$ gesetzt. R/L_N ist der Dichte-Gradient, der wie bei den GENE-Voreinstellungen $R/L_N = 2.2$ beträgt. Zur Bestimmung des kritischen nichtlinearen Temperaturgradienten $(R/L_T)_{\text{crit,n}}$ werden die zeitlich aufgelösten Wärmeflüsse für verschiedene Temperatur-Gradienten bestimmt (siehe Abbildung 5.1). Nach dem Einschwingvorgang wird über quasistationäre Bereiche gemittelt, um so jedem Temperatur-Gradienten einen Wärmefluss zuordnen zu können. Dieses Vorgehen wird für verschiedene Temperatur-Gradienten bei bestimmten festen Werten von q_0 und \hat{s} durchgeführt. Die so bestimmten gemittelten Wärmeflüsse werden dann in einem Diagramm gegen die zugehörigen Temperatur-Gradienten aufgetragen (siehe Abbildung 5.2).

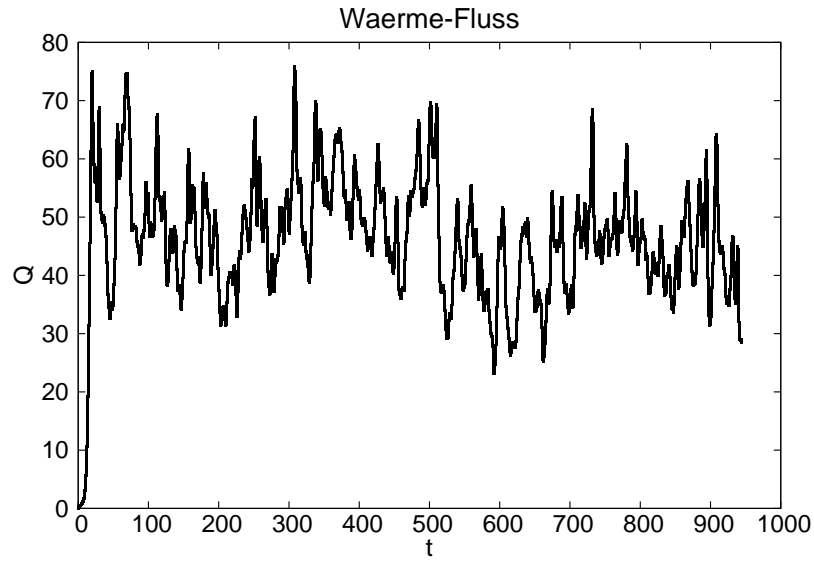


Abbildung 5.1: Beispiel eines zeitlich aufgelösten Wärmeflusses. Hier für die Parameter-Werte: $R/L_T = 9$, $q_0 = 1$

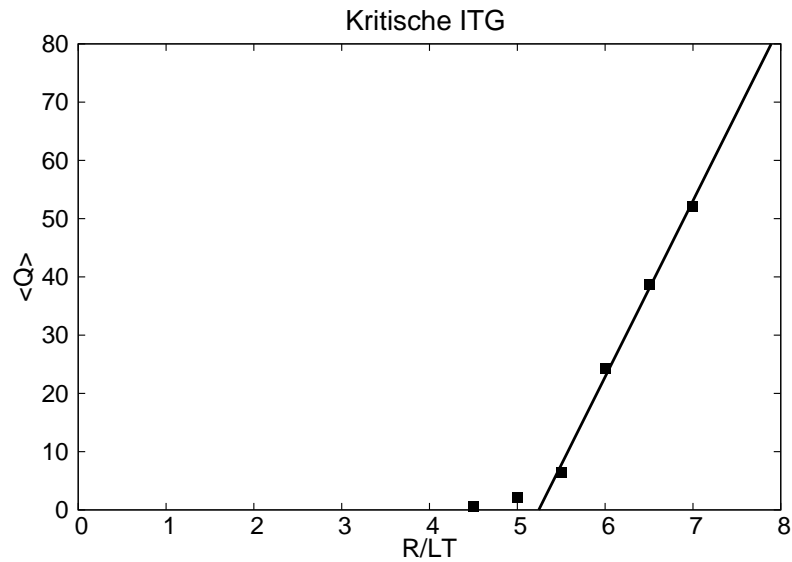


Abbildung 5.2: Parameterscan verschiedener Werte von R/L_T bei festem $q_0 = 1.7$. Die Gerade ist ein linearer Fit an die vier größten gemittelten Wärmeflüsse. Die Nullstelle der Geraden indiziert den kritischen Temperatur-Gradienten.

q_0	$(R/L_T)_{\text{crit,n}}$	\hat{s}	$(R/L_T)_{\text{crit,n}}$
0.5	10.73	0.1	3.91
1.0	7.87	0.2	4.11
1.4	6.18	0.4	5.63
1.7	5.24	0.6	5.75
2.0	4.83	0.8	6.18
2.5	4.03	1.0	6.38
3.0	3.59	1.2	6.73
4.0	3.11	1.4	6.88
		1.6	7.22

Abbildung 5.3: Kritische Temperatur-Gradienten zu verschiedenen q_0 - und \hat{s} -Werten. Der q_0 -Scan wird bei festem $\hat{s} = 0.796$ durchgeführt, der \hat{s} -Scan bei festem $q_0 = 1.4$.

Die Werte größerer Wärmeflüsse werden linear approximiert, der Schnittpunkt der Geraden mit der R/L_T -Achse liefert den kritischen Temperturgradienten $(R/L_T)_{\text{crit,n}}$. Das wird für verschiedene Werte von q_0 und \hat{s} wiederholt, die in obiger Tabelle zusammengefasst sind. In Abbildung 5.4 sind die kritischen Temperaturgradienten gegen die dazugehörigen Sicherheitsfaktoren aufgetragen. Die Differenz der beiden Messreihen ist genau der Dimits Shift in Abhängigkeit vom Sicherheitsfaktor. Da die kritischen nichtlinearen Temperatur-Gradienten ein exponentielles Verhalten von q_0 vermuten lassen, werden die Messwerte nochmal auf einer logarithmischen Skala aufgetragen, nachdem der Offset von 2.8059 abgezogen wird. Die logarithmisch skalierten Messwerte liegen auf einer Geraden mit einer sehr geringen Standardabweichung von $\sigma = 0.027$. Es handelt sich daher tatsächlich um einen exponentiellen Zusammenhang zwischen q_0 und $(R/L_T)_{\text{crit,n}}$, der bestimmt wird zu:

$$(R/L_T)_{\text{crit,n}}(q_0, \hat{s} = 0.796) = 12.533 \cdot e^{-0.9289 \cdot q_0} + 2.8059 \quad (5.6)$$

Daraus resultiert nach Subtraktion von (5.5) der Dimits Shift:

$$DS(q_0, \hat{s} = 0.796) = 12.533 \cdot e^{-0.9289 \cdot q_0} - \frac{2.448}{q_0} + 0.665 \quad (5.7)$$

Abbildung 5.6 zeigt graphisch den absoluten und relativen Dimits Shift in Abhängigkeit vom Sicherheitsfaktor, wobei der relative Dimits Shift der Quotient aus absolutem Dimits Shift und der linearen Schwelle ist. Es tritt beim relativen Plot ein Maximum auf bei $q_0 = 0.912$, bei dem die Schwelle um fast 70% verschoben wird. Der größte absolute Dimits Shift tritt bei sehr kleinen Sicherheitsfaktoren auf, hier bei $q_0 = 0.5$. Man sollte allerdings einen Sicherheitsfaktor von $q_0 = 1$ wegen makroskopischer Instabilitäten nicht unterschreiten (siehe Abschnitt 2.5).

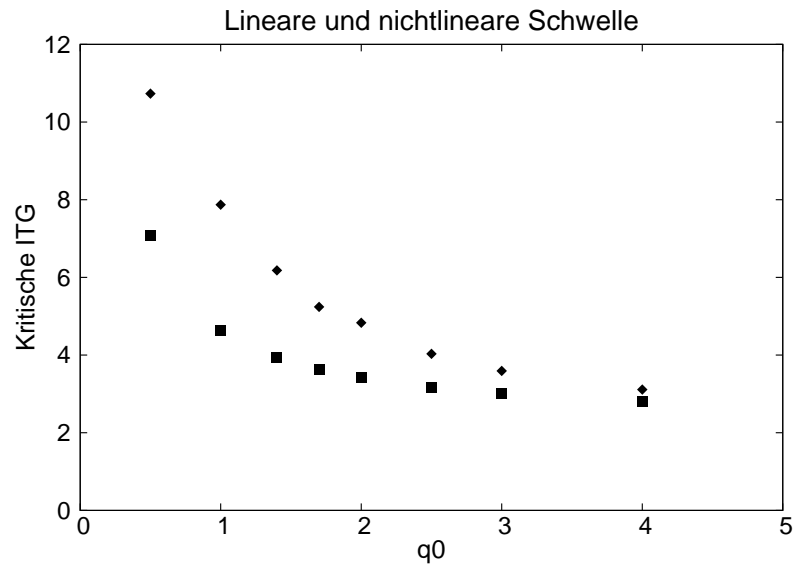


Abbildung 5.4: Kritische Temperatur-Gradienten in Abhängigkeit vom Sicherheitsfaktor q_0 . Die Rauten repräsentieren die nichtlineare Schwelle, die Quadrate die lineare nach Gleichung (5.5).

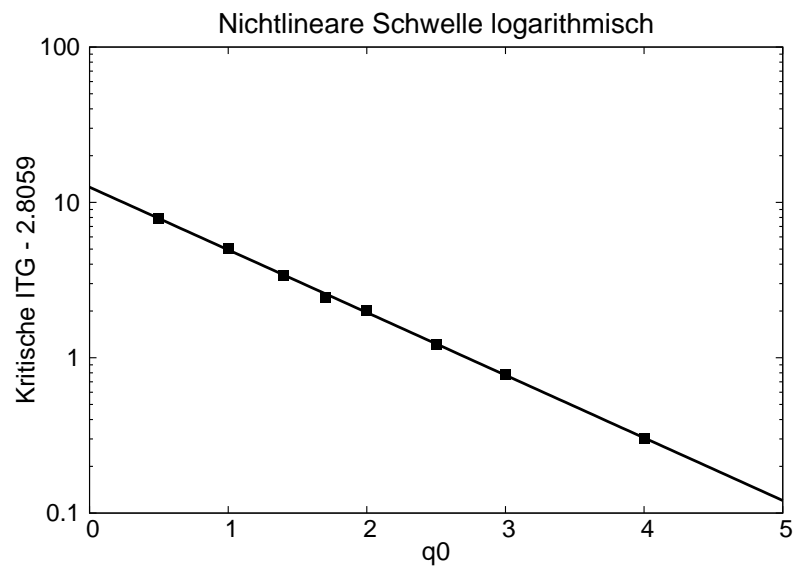


Abbildung 5.5: Nichtlineare kritische Temperaturgradienten logarithmisch geplottet in Abhängigkeit vom Sicherheitsfaktor q_0 . Die Gerade ist ein linearer Fit an die logarithmisch skalierten kritischen Temperatur-Gradienten.

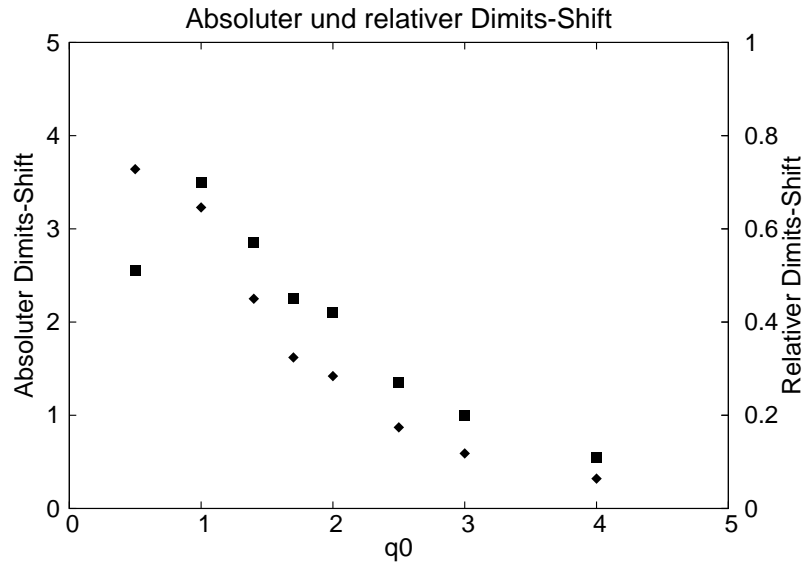


Abbildung 5.6: Absoluter (Rauten) und relativer (Quadrate) Dimits Shift in Abhängigkeit vom Sicherheitsfaktor q_0 . Die linke Achse skaliert den absoluten, die rechte den relativen Dimits Shift.

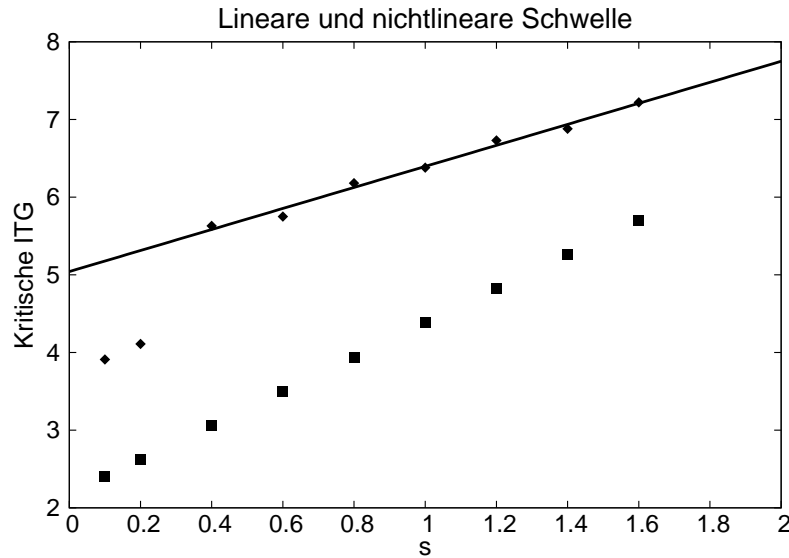


Abbildung 5.7: Kritische Temperatur-Gradienten in Abhängigkeit von der magnetischen Verscherung \hat{s} . Die Rauten repräsentieren die nichtlineare Schwelle, die Quadrate die lineare nach Gleichung (5.5). Die Gerade ist ein linearer Fit an die bestimmten kritischen Temperatur-Gradienten.

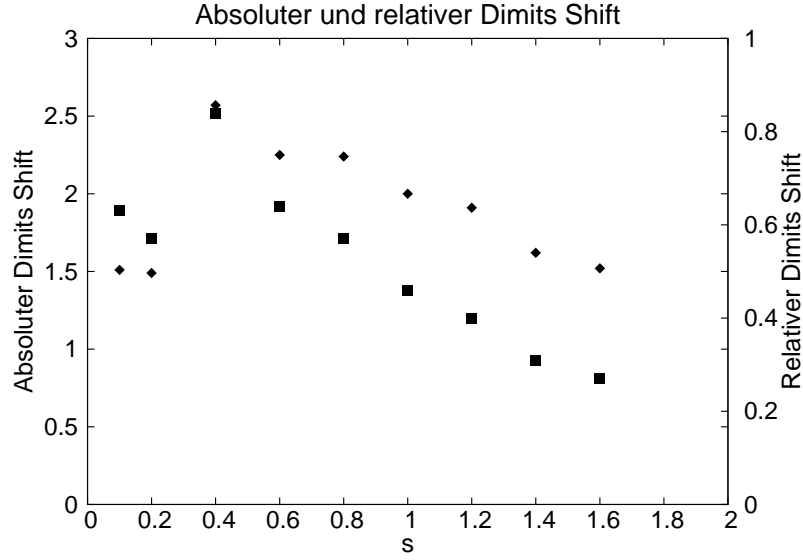


Abbildung 5.8: Absoluter (Rauten) und relativer (Quadrate) Dimits Shift in Abhängigkeit von der magnetischen Verscherung \hat{s} . Die linke Achse skaliert den absoluten, die rechte den relativen Dimits Shift.

Die nichtlinearen Temperatur-Gradienten aufgetragen gegen die magnetische Verscherung können sehr gut durch eine Gerade (die Standardabweichung der Geraden von den Messwerten beträgt nur $\sigma = 0.058$) approximiert werden:

$$(R/L_T)_{\text{crit,n}}(q_0 = 1.4, \hat{s}) = 1.3536 \cdot \hat{s} + 5.0421 \quad (5.8)$$

Daraus resultiert nach Subtraktion von (5.5) wieder der Dimits Shift:

$$DS(q_0 = 1.4, \hat{s}) = -0.8429\hat{s} + 2.9008 \quad (5.9)$$

Dabei werden die nichtlinearen kritischen Temperatur-Gradienten bei $\hat{s} = 0.2$ und $\hat{s} = 0.4$ nicht mitberücksichtigt, da es sich hier vermutlich um numerische Fehler handelt. Den absoluten und relativen Dimits Shift findet man in Abbildung 5.8. Man erhält auch hier für sehr kleine magnetische Verscherungen jeweils den absolut als auch relativ größten Dimits Shift.

Neuere Untersuchungen ergeben, dass auch Kollisionen unter Plasma Teilchen den Wärmefluss reduzieren können, falls mit nichtadiabatischen Elektronen gerechnet wird (siehe [32]). Bis vor kurzem nahm man an, dass Kollisionen unter Plasma Teilchen die Zonal Flows dämpfen und so indirekt den Wärmefluss vergrößern. Das gilt allerdings nur im Fall adiabatischer Elektronen.

5.3 Fazit

In diesem Kapitel wird die Abhängigkeit des Dimits Shifts von dem Sicherheitsfaktor q_0 und der magnetischen Verscherung \hat{s} bestimmt. Die Ergebnisse zeigen, dass der Dimits Shift bei kleineren Sicherheitsfaktoren und magnetischen Verscherungen größer ist. Diese beiden Plasma Parameter können aber nicht beliebig klein gewählt werden, da sonst makroskopische Instabilitäten entstehen würden. Eine Kombination der beiden gefundenen Beziehungen (5.7) und (5.9) gilt nur in einem kleinen Bereich um $(q_0, \hat{s}) = (1.4, 0.796)$, da man, um globale Aussagen machen zu wollen, im Prinzip Parameter-Scans bei jeweils verschiedenen festen Werten von q_0 und \hat{s} durchführen müsste. Das wäre im Rahmen dieser Diplomarbeit allerdings nicht zu bewerkstelligen, da der numerische Aufwand zu hoch ist. Trotzdem geben die beiden Beziehungen einen Trend an, wie sich der Dimits Shift gegenüber diesen beiden Plasma Parametern verhält.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In Kapitel 1 wurde die Relevanz der Fusionsenergie für den ständig steigenden Energiebedarf dargestellt. Derzeit ist es aufgrund von Mikro-Instabilitäten, die zum radialen Transport in Tokamaks führen, allerdings noch unmöglich, den dauerhaften Einschluss des Plasmas zu gewährleisten. Dieser Einschluss ist für die Nutzung und Energiegewinnung durch Fusionsreaktoren aber unentbehrlich. Ein Lichtblick ist, wie in Kapitel 2 dargestellt wurde, der Dimits Shift. Die dadurch motivierte Fragestellung, welche Mechanismen diesem Phänomen zu Grunde liegen und wie diese nichtlineare Verschiebung des kritischen Temperatur-Gradienten vergrößert werden kann, wurde in dieser Arbeit behandelt.

In Zusammenarbeit mit dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching konnten neue Erkenntnisse über den Dimits Shift erlangt werden. Mit Hilfe des GENE-Codes wurden in Kapitel 5 die Abhängigkeit des Dimits Shifts von den Magnetfeldgeometrie charakterisierenden Parametern bestimmt. Diese Parameter sind der Sicherheitsfaktor und die magnetische Verscherung. Diese Größen spielen schon eine große Rolle bei der Vermeidung von makroskopischen Instabilitäten. Sie haben aber auch großen Einfluss auf den Dimits Shift. Es wurden funktionelle Zusammenhänge bestimmt, die zeigen, dass es von Vorteil ist, kleine Sicherheitsfaktoren sowie kleine magnetische Verscherungen zu verwenden, um den Dimits Shift zu maximieren. Diese Parameter dürfen allerdings aufgrund makroskopischer Instabilitäten nicht beliebig klein gewählt werden. Trotzdem wird mit diesen Abhängigkeiten ein Trend gegeben, wie Magnetfeldgeometrien gewählt werden sollten, um den Plasma Einschluss zu verbessern. Dies ist ein wichtiges Resultat dieser Arbeit.

Im Kapitel 3 wurden zwei verschiedene Plasma Modelle vorgestellt, die Instabilitäten modellieren, die für den Dimits Shift verantwortlich sind und deren Mechanismen zum Verständnis dieses Phänomens beitragen konnten. Dabei wurde das Gyro-Fluid-Modell aus [20] hergeleitet, das dazu in der Lage ist, die Wachstumsrate einer tertiären Instabilität in Abhängigkeit der Verscherungsrate und Temperatur von Zonal Flows zu bestimmen. Das Ergebnis war, dass größere Verscherungsraten der Zonal Flows sowie größere zonale Temperaturen zu größeren Wachstumsraten der tertiären Instabilität führen. Das ist ein wichtiges Ergebnis, das die Verscherungsrate als Destabilisierungs-Mechanismus bestätigt. Desweiteren wurde das Vier-Moden-Modell aus [24] vorgestellt, das dazu in der Lage ist, die Sättigung von Driftwellen durch Zonal Flows zu beschreiben. Ein wichtiges Ergebnis war, dass die Sättigungsamplitude der Driftwellen proportional zu ihrer linearen Wachstumsrate ist. Dabei wurde der Sättigungszustand dadurch charakterisiert, dass die lineare Wachstumsrate der Driftwelle proportional zur nichtlinearen Wachstumsrate der Zonal Flows ist.

Dieses Modell hatte einen Sättigungsmechanismus, der allerdings nicht die Dämpfung der Driftwellen durch Zonal Flows beschreiben konnte.

Im Kapitel 3 wurde die Verscherrungsrate der Zonal Flows als ein möglicher Mechanismus zur Destabilisierung der Zonal Flows bestätigt. Da das Modell aber nicht den Übergang von Zonal Flows zu tertiären Instabilitäten beschreiben konnte, wurde im Kapitel 4 ein auf der Basis des Gyro-Fluid-Modells erstelltes Plasma Modell vorgestellt, mit dessen Mechanismus dieser Übergang beschrieben werden konnte. Mit Hilfe dieses Übergangs war es auch möglich, das Ende des Dimits Shifts in diesem Modell zu bestimmen. Dazu wurden analytische Lösungen, die jeweils einen Zonal Flow und eine tertiäre Instabilität modellieren, und deren Stabilität in Abhängigkeit des Plasma Parameters *ITG* bestimmt. Mit Hilfe des resultierenden Bifurkations-Diagramms konnte das Ende des Dimits Shifts in diesem Modell eindeutig bestimmt werden. Die ist ein weiteres wichtiges Ergebnis.

Diese Arbeit hat dazu beigetragen, neues Licht in die Physik des Dimits Shifts zu bringen. Dazu wurden zum einen direkte Abhängigkeiten von Plasma Parametern bestimmt, zum anderen wurde der Übergang von Zonal Flows zu tertiären Instabilitäten modelliert, mit dessen Hilfe das Ende des Dimits Shifts im Rahmen des Modells bestimmt werden konnte.

In Zukunft könnte man sich der weiteren Modellierung dieses Phänomens widmen, sodass die Abhängigkeiten vom Sicherheitsfaktor und der magnetischen Verscherrung verstanden werden können. Gerade der exponentielle Zusammenhang der kritischen Temperatur-Gradienten vom Sicherheitsfaktor lässt einen physikalischen Mechanismus erwarten.

A Numerik

Seit Mitte des 20. Jahrhunderts hat sich die Leistungsfähigkeit von Computern so stark verbessert, dass ihr Einsatz zur Berechnung von physikalischen Vorgängen, wie der Turbulenz, unentbehrlich geworden ist. In dieser Arbeit wird davon auch Gebrauch gemacht, um die gekoppelten nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen des Plasma Modells aus Kapitel 4 zu lösen. Der Computer alleine kann diese Gleichungen noch nicht lösen. Er benötigt ein Programm, das ihm sagt, was zu tun ist. In diesem Kapitel wird auf die numerischen Verfahren eingegangen, die diesem Programm zu Grunde liegen. Es ist ein in C++ geschriebener paralleler Code, dessen graphische Ausgabe mit Hilfe der Bibliothek Dislin erfolgt. Es wird stets Bezug auf [33] genommen. Grundbaustein dieses Codes ist das Pseudo-Spektral-Verfahren. Dabei wird das skalare Feld $\psi(x, y)$ mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation (DFT) in eine Fourierreihe entwickelt und so auf einem Gitter diskretisiert. Danach wird die Fourier-Galerkin-Methode angewendet, um gewöhnliche Differentialgleichungen für die zeitliche Entwicklung jedes einzelnen Fourier-Koeffizienten zu erhalten. Aus einer partiellen Differentialgleichung wird also ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen, die dann mit Hilfe des Runge-Kutta Zeitschrittverfahrens gelöst werden. Ein Problem tritt bei der Behandlung von nichtlinearen Termen auf, da eine Transformation in eine Fourierreihe zu einer Faltung führt, dessen Ausführung aus Sicht der Numerik sehr teuer ist. Daher werden diese Terme zurück in den Orts-Raum transformiert, dort die Multiplikation ausgeführt und wieder in den Fourier-Raum zurücktransformiert. Der Zusatz „Pseudo“ rührt daher, dass man nichtlineare partielle Differentialgleichungen nicht rein spektral behandelt. Da bei jedem Zeitschritt mindestens einmal hin- und zurücktransformiert werden muss, bietet sich ein großer Vorteil bei Verwendung der Fast Fourier Transformation. Diese Bibliothek enthält einen Divide and Conquer Algorithmus, der die Fourier-Reihe in gerade und ungerade Anteile unterteilt. Dadurch skaliert der numerische Aufwand bei Zweierpotenzen von N nur noch mit $\mathcal{O}(N \log N)$ anstatt mit $\mathcal{O}(N^2)$. Ein weiteres Problem bei der Behandlung von nichtlinearen Termen entsteht, falls Fourier-Koeffizienten auftreten, dessen Wellenzahlen oberhalb der Nyquist-Frequenz liegen. Diese Wellenzahlen werden nach Ausführung der Nichtlinearität als kleinere Wellenzahlen fehlinterpretiert und führen so zu numerischen Fehlern. Diese sogenannten Aliasing-Fehler können im schlimmsten Fall sogar die numerische Stabilität beeinflussen. Um dieses zu verhindern, kann man Dealiasing-Filter verwenden, die die Fourier-Koeffizienten dämpfen bzw. herausschneiden, dessen Wellenzahlen oberhalb der Nyquist-Frequenz liegen. Bei diesem Programm wird der Filter von Orszag verwendet, der zumindest in der Lage ist, Fehler durch quadratische Nichtlinearitäten zu verhindern.

Zum Schluß dieses Kapitels wird mit Hilfe der Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung der maximale Zeitschritt bei vorgegebener Differentialgleichung und Gitter-Auflösung bestimmt, der verwendet werden darf, sodass die numerische Stabilität erhalten bleibt.

A.1 Diskrete Fourier Transformation (DFT)

Gegeben sei eine Abbildung $\psi : (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \psi(x, y) \in \mathbb{R}$. Nimmt man periodische Randbedingungen an, so folgt für ψ :

$$\psi(0, y) = \psi(L_x, y) \quad (\text{A.1a})$$

$$\psi(x, 0) = \psi(x, L_y) \quad (\text{A.1b})$$

In diesem Fall lässt sich das Feld $\psi(x, y)$ über die Transformation $\mathcal{F} : \psi \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \{\hat{a}\}_{k,l} \in \mathbb{C}^\infty$ in unendlich viele Fourier-Koeffizienten entwickeln:

$$\mathcal{F} : \hat{a}_{k,l}(t) = \frac{1}{L_x L_y} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \psi(x, y, t) e^{-2\pi i(x/L_x \cdot k + y/L_y \cdot l)} dx dy \quad (\text{A.2a})$$

Durch die Rücktransformation $\mathcal{F}^{-1} : \{\hat{a}\}_{k,l} \in \mathbb{C}^\infty \rightarrow \psi \subseteq \mathbb{R}$ wird ψ in eine unendliche Fourier-Reihe entwickelt:

$$\mathcal{F}^{-1} : \psi(x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{a}_{k,l}(t) e^{2\pi i(x/L_x \cdot k + y/L_y \cdot l)} \quad (\text{A.2b})$$

Da ψ reell ist, gilt außerdem:

$$\hat{a}_{-k,-l} = \hat{a}_{k,l}^* \quad (\text{A.3})$$

Ein Stern bedeutet hier komplexe Konjugation. Die Transformation in eine unendliche Fourierreihe ist keineswegs eine Näherung, sondern vielmehr eine Folge der periodischen Randbedingungen. Eine Näherung macht man erst, wenn man ψ nur an endlich vielen diskreten Stellen $\psi_{x,y}$ auswertet. Die unendliche Reihe bricht dann ab, sie geht in eine endliche Fourier-Reihe über:

$$\psi_{x,y}(t) = \sum_{k=-D_x/2+1}^{D_x/2} \sum_{l=-D_y/2+1}^{D_y/2} \hat{a}_{k,l}(t) e^{2\pi i(xk/D_x + yl/D_y)} \quad (\text{A.4a})$$

Die Rücktransformation lautet:

$$\hat{a}_{k,l}(t) = \frac{1}{D_x D_y} \sum_{x=-D_x/2+1}^{D_x/2} \sum_{y=-D_y/2+1}^{D_y/2} \psi_{x,y}(t) e^{-2\pi i(xk/D_x + yl/D_y)} \quad (\text{A.4b})$$

Diese Transformation wird als diskrete Fourier-Transformation (DFT) bezeichnet. Mit der Bedingung (A.3) folgt, dass nur etwas mehr als die Hälfte der Fourier-Koeffizienten ausreichen um ψ darzustellen.

Um genauer zu sein, sind es

$$\frac{D_x D_y}{2} + \begin{cases} 2 & \text{falls } D_x \text{ und } D_y \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } D_x \text{ oder } D_y \text{ gerade} \\ 1/2 & \text{falls } D_x \text{ und } D_y \text{ ungerade} \end{cases}$$

A.2 Fourier-Galerkin-Methode

Nun sei folgende partielle Differentialgleichung von ψ gegeben:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{L}\psi \quad (\text{A.5})$$

\hat{L} bezeichne hier einen linearen Operator. Jetzt formuliert man (A.5) in der schwachen Form für die Testfunktion $T(x, y)$, man betrachtet also die Variation:

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} | T \right\rangle = \langle \hat{L}\psi | T \rangle \quad (\text{A.6})$$

$$\text{mit } \langle \psi | T \rangle = \frac{1}{L_x L_y} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \psi T^* dx dy$$

Macht man für ψ den Ansatz (A.4a), sind die Basis-Funktionen die trigonometrischen Funktionen. Nach der Galerkin-Methode sind die Basis- und Testfunktionen dieselben. Daher folgt für (A.6):

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} | e^{2\pi i(xk/L_x + yl/L_y)} \right\rangle = \langle \hat{L}\psi | e^{2\pi i(xk/L_x + yl/L_y)} \rangle \quad (\text{A.7})$$

$$\text{mit der Normierung } \left(\frac{L_x}{D_x} x, \frac{L_y}{D_y} y \right) \rightarrow (x, y) \quad (\text{A.8})$$

Mit Hilfe der Orthogonalitäts-Beziehung der trigonometrischen Funktionen erhält man für jeden Fourier-Koeffizienten $\hat{a}_{k,l}$ eine gewöhnliche Differential-Gleichung:

$$\frac{\partial \hat{a}_{k,l}}{\partial t} = \langle \hat{L}\psi | e^{2\pi i(xk/L_x + yl/L_y)} \rangle \quad (\text{A.9})$$

Man kann also mit Hilfe der Fourier-Galerkin-Methode eine partielle Differentialgleichung in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen überführen, das eventuell analytisch, sonst aber z.B. mit dem Runge-Kutta Zeitschritt-Verfahren gelöst werden kann. Die RHS von (A.9) ist bei Kenntnis des linearen Operators leicht zu lösen. Setzt man beispielsweise für $\hat{L} = \partial/\partial x$, so folgt:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_{k,l} e^{2\pi i(xk/L_x + yl/L_y)} | e^{2\pi i(xk/L_x + yl/L_y)} \right\rangle = \frac{2\pi i k}{L_x} \hat{a}_{k,l} \quad (\text{A.10})$$

Aus der Differentiation im Orts-Raum wird im Fourier-Raum also eine Multiplikation mit $2\pi i k/L_x$.

Diese Relation ist exakt, es entstehen keine Diskretisierungsfehler wie z.B. bei der Methode der finiten Differenzen. Diese einfache aber trotzdem exakte Behandlung von Differentiationen stellt einen enormen Vorteil dieses Spektralverfahrens dar. Der einzige Diskretisierungsfehler taucht nur durch den Abbruch der unendlichen Reihe in eine endliche auf (A.4).

A.3 Pseudo-Spektral-Verfahren

Komplizierter wird es, wenn (A.5) durch einen nichtlinearen Operator \hat{N} ergänzt werde:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{L}\psi + \hat{N}\psi \quad (\text{A.11})$$

Die Anwendung der Fourier-Galerkin-Methode führt (A.11) über in:

$$\frac{\partial \hat{a}_{k,l}}{\partial t} = \langle \hat{L}\psi | e^{2\pi i(xk/L_x + yl/L_y)} \rangle \hat{a}_{k,l} + \langle \hat{N}\psi | e^{2\pi i(xk/L_x + yl/L_y)} \rangle \quad (\text{A.12})$$

Der lineare Term kann wie in Abschnitt A.2 behandelt werden, beim nichtlinearen Term geht man anders vor. Würde man nämlich ψ in eine endliche Fourier-Reihe nach (A.4a) entwickeln, bevor die Nichtlinearität wirkt, so führt die Projektion zu einer Faltung, die numerisch sehr aufwändig ist. Im eindimensionalen Fall müssten $\mathcal{O}(N^2)$ komplexe Multiplikationen ausgeführt werden, wenn N die Länge der DFT ist. Einfacher ist es, die Nichtlinearität im Orts-Raum auszuführen, um danach das resultierende Feld nach (A.4a) in eine endliche Reihe zu entwickeln. Naives Ausführen der diskreten Fourier-Transformation würde zwar auch mit $\mathcal{O}(N^2)$ skalieren, die FFT (Fast Fourier Transformation) bietet hier allerdings entscheidende Vorteile, da der Rechenaufwand für zweier-Potenzen von N mit $\mathcal{O}(N \log N)$ skaliert. Daher hat dieses Spektral-Verfahren den Zusatz „Pseudo“, da die nichtlinearen Terme nicht spektral behandelt werden. Die Schritte des Pseudo-Spektral-Verfahrens sind in folgender Übersicht zusammengefasst:

- Lineare Terme werden im Fourier-Raum berechnet
- Nichtlinearitäten werden mittels FFT im Orts-Raum kalkuliert
- Zurücktransformation mittels FFT in den Fourier-Raum
- Addition der linearen und nichtlinearen Terme im Fourier-Raum
- Neuer Zeitschritt wird berechnet

A.4 Fast Fourier Transformation (FFT)

Die Fast Fourier Transformation (<http://www.fftw.org>) ist eine Bibliothek, die einen sogenannten Divide and Conquer Algorithmus enthält, der die diskrete Fourier-Transformation besonders schnell ausführen kann ($\mathcal{O}(N \log N)$). Die Grundlagen wurden bereits 1805 von Gauß erstellt, die formelle Beschreibung folgte jedoch erst 1965 von Cooley und Tukey (siehe dazu [34]). Beim naiven Ausführen der DFT wiederholen sich einige Multiplikationen, die man vorher schon berechnet hat. Das Ziel ist es, einen Algorithmus zu finden, der jede Multiplikation nur einmal ausführt, um so Rechenzeit zu sparen. Die Idee ist, eine endliche Fourierreihe in gerade und ungerade Anteile zu zerlegen. Dabei soll N eine Zweierpotenz sein, also $N = 2^p$.

$$\begin{aligned}
\hat{a}_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i k n / N} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} e^{-2\pi i k 2n / N} + \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} e^{-2\pi i k (2n+1) / N} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} W_N^{2kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} W_N^{2kn}, \quad \text{mit } W_N = e^{-2\pi i / N} \\
&= F_k^{(g)} + W_N^k F_k^{(u)}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Der Index „g“ bezeichne hier gerade, der Index „u“ ungerade Anteile. Aus einer DFT der Länge N werden durch diese Zerlegung zwei DFTs der Länge $N/2$. Diese beiden DFTs kann man wieder halbieren, so dass man vier DFTs der Länge $N/4$ erhält:

$$\hat{a}_k = F_k^{(g)} + W_N^k F_k^{(u)} \tag{A.14}$$

$$= F_k^{(gg)} + W_N^k F_k^{(ug)} + W_N^{2k} F_k^{(gu)} + W_N^{2k} W_N^k F_k^{(uu)} \tag{A.15}$$

Da $N = 2^p$ gilt, bricht diese Zerlegung nach p Schritten ab, dann hat man genau N DFTs der Länge 1. Diese DFTs entsprechen aber genau den jeweiligen Funktionswerten f_n :

$$\hat{a}_k = f^{(g\dots g)} + \dots + W_N^{N/2 \cdot k} f^{(g\dots gu)} + \dots + W_N^{(N-1) \cdot k} f^{(u\dots u)} \tag{A.16}$$

Die Funktionswerte werden durch diese Zerlegung umsortiert. Es gibt daher eine eindeutige bijektive Selbstabbildung $\sigma : f_n \rightarrow f_n$. Stellt man n im Binärsystem dar, so dreht σ genau die Reihenfolge des Binär-Codes um, wenn man „0“ mit „g“ und „1“ mit „u“ identifiziert. Die zugehörige $p \times p$ Permutationsmatrix P_σ hat die Form:

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

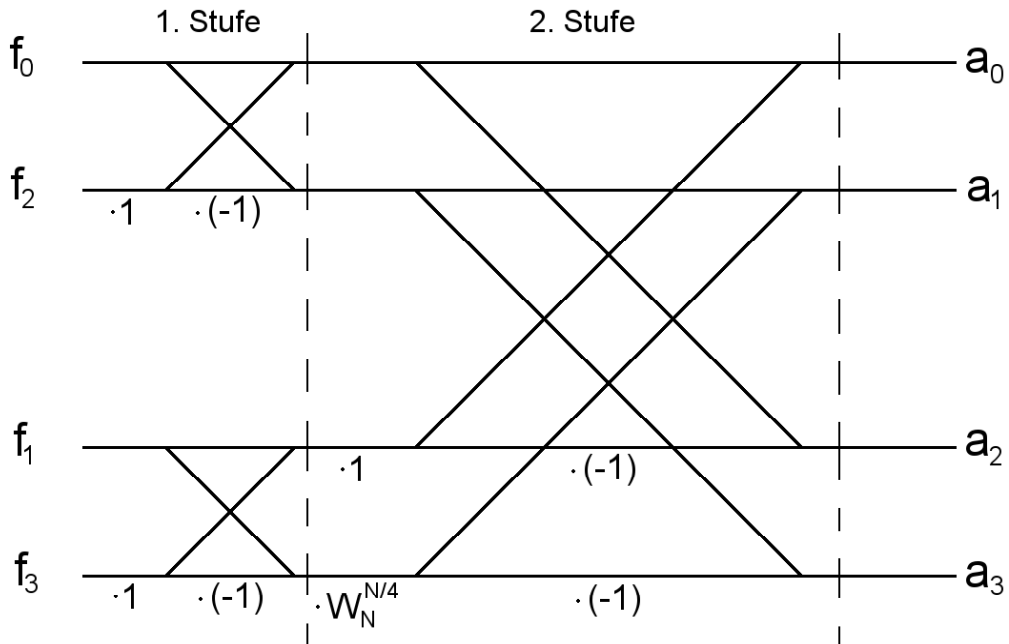


Abbildung A.1: Schmetterlings-Diagramm für DFT der Länge $N = 4$. Eine Gabelung von zwei Geraden bedeutet die Addition der Funktionswerte.

Dieses Umsortieren der Funktionswerte nennt man daher auch Bit Reversal. Jetzt geht man von der Zerlegung in (A.16) aus und bildet in p Schritten wieder eine DFT der Länge N . Das Bit Reversal hat dabei den Vorteil, dass in jedem der p Schritte nur die ungeraden Elemente mit einer Potenz der Einheitswurzel $W_N^{N/2^s \cdot k}$ multipliziert werden müssen. $1 \leq s \leq p$ ist dabei die Schrittweite. Da die Einheitswurzel N -periodisch ist ($W_N^N = 1$), müssen im s -ten Schritt also 2^s Multiplikationen für jedes ungerade Element durchgeführt werden. Da die Anzahl der ungeraden Elemente $N/2^s$ beträgt, werden in jedem Schritt also N Multiplikationen durchgeführt. Da es insgesamt $p = \log N / \log 2$ Schritte gibt, skaliert der Rechenaufwand also mit $\mathcal{O}(N \log N)$. Die einzelnen Schritte der FFT werden in Schmetterlings-Diagrammen veranschaulicht, hier für den Fall $N = 4$ (Abbildung A.1). Mit diesem Algorithmus wird jede Multiplikation nur einmal ausgeführt und der Rechenaufwand so fast um eine Dimension reduziert.

A.5 Aliasing

Aliasing-Fehler treten auf, falls durch nichtlineare Terme Fourier-Koeffizienten entstehen, dessen Wellenzahlen durch das Gitter nicht mehr aufgelöst werden können. Diese Wellenzahlen werden aber als kleinere Wellenzahlen fehlinterpretiert und führen so zu Fehlern, die sogar die Stabilität der numerischen Verfahren gefährden können. Um diese Fehler zu vermeiden, werden Dealiasing-Filter verwendet, die die Fourier-Koeffizienten dieser fehlinterpretierten Wellenzahlen dämpfen. In dem Programm wird die 2/3-Regel von Orszag verwendet, die Fehler durch quadratische Nichtlinearitäten verhindert.

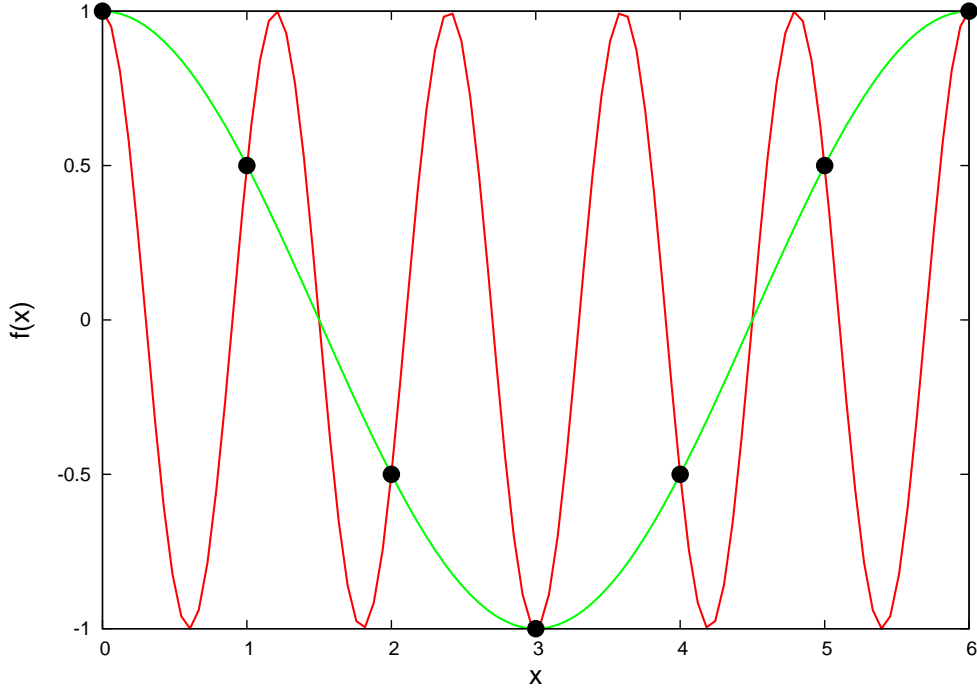


Abbildung A.2: Aliasing-Fehler beim Abtasten eines Graphen (rot) mit $k_5 = 2\pi 5/6$, der als ein Graph (grün) mit der Wellenzahl $k_{-1} = -2\pi/6$ fehlinterpretiert wird. Die schwarzen Punkte markieren das Abtasten durch das Gitter für $N = 6$.

Aliasing

Gegeben sei eine endliche Fourier-Reihe. Im eindimensionalen Fall lautet sie:

$$\psi_x(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{a}_j(t) e^{2\pi i x j / N} \quad (\text{A.18})$$

Da $x \in \mathbb{N}$, gilt mit Hilfe des Satzes von Moivre:

$$\begin{aligned} e^{\pi i x} &= e^{-\pi i x} \\ \Leftrightarrow e^{2\pi i (N/2+1+j)x/N} &= e^{2\pi i (-N/2+1+j)x/N} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Damit kann man (A.18) auch schreiben als:

$$\psi_x(t) = \sum_{j=-N/2+1}^{N/2} \hat{a}_j(t) e^{2\pi i x j / N} \quad (\text{A.20})$$

$$\text{mit } \hat{a}_{N/2+j} = \hat{a}_{-N/2+j} \quad (\text{A.21})$$

Nutzt man die Bedingung (A.3) aus, so genügt es, die Fälle für $j > 0$ zu betrachten.

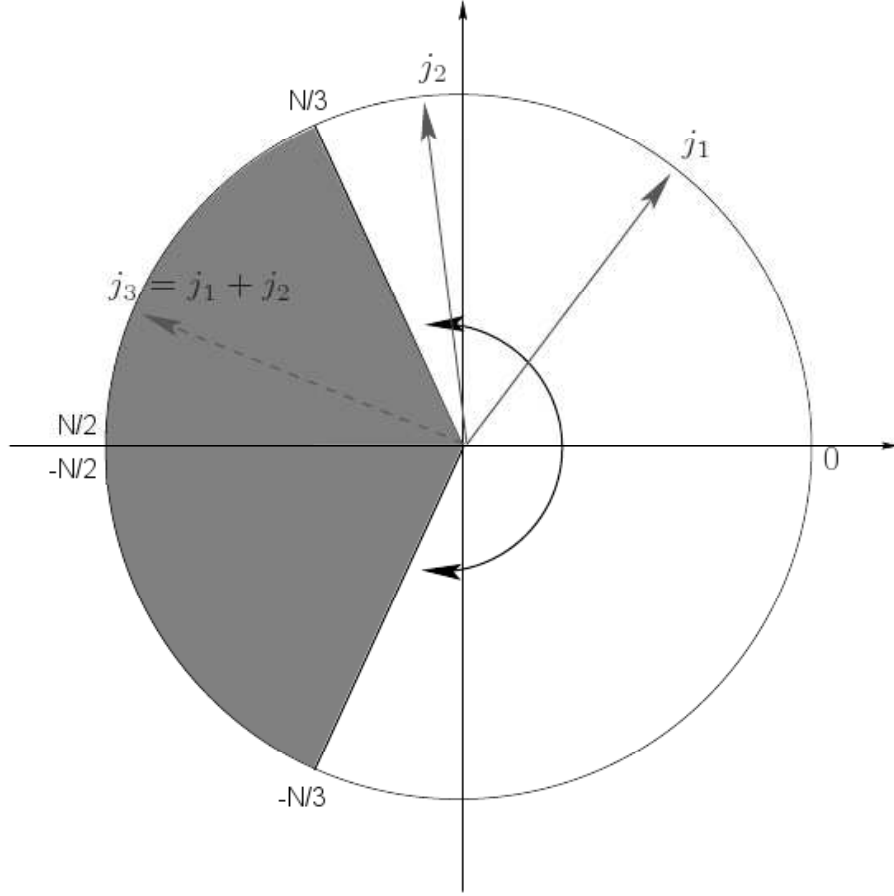


Abbildung A.3: 2/3-Regel von Orszag. Quelle: [35].

Anschaulich besagt diese Umformung, dass Wellenzahlen $k_j = 2\pi j/N$ mit $j > N/2$ als kleinere Wellenzahlen $k_{j-N} = 2\pi(j-N)$ interpretiert werden. $k_{N/2}$ ist also die maximale Wellenzahl, die durch das Gitter gerade noch fehlerfrei abgetastet werden kann. Sie entspricht der Nyquist-Frequenz. Seien nun zwei Funktionen $f(x) = \hat{a}_s e^{2\pi i s x/N}$ und $g(x) = \hat{a}_t e^{2\pi i t x/N}$ gegeben. Durch Multiplikation dieser beiden Funktionen erhält man eine quadratische Nichtlinearität:

$$f(x) \cdot g(x) = \hat{a}_s \hat{a}_t e^{2\pi i (s+t)x/N} \quad (\text{A.22})$$

Die Nichtlinearität produziert also eine Schwingung, dessen Wellenzahl genau die Summe der Wellenzahlen der Funktionen f und g ist. Ist allerdings $s+t > N/2$, so wird diese Wellenzahl nach (A.19) als eine kleinere Wellenzahl fehlinterpretiert (siehe Abbildung A.2).

Dealiasing

Eine Möglichkeit diese Fehler zu verhindern, ist vor und nach der Kalkulation von Nichtlinearitäten alle Fourier-Koeffizienten zu dämpfen, dessen Wellenzahlen größer als die Hälfte der maximalen Wellenzahl $k_{N/2}$ sind. Dieser nach Philips 1959 formulierte „Alles oder Nichts“-Filter stellt sicher, dass durch quadratische Nichtlinearitäten keine Fourier-Koeffizienten mit Wellenzahlen k_j mit $j > N/2$ entstehen. Im Folgenden wird gezeigt, dass es sogar ausreicht, wenn man nur das obere Drittel der Fourier-Koeffizienten dämpft. Abbildung A.3 zeigt einen Einheitskreis, in dem die drei Wellenzahlen j_1, j_2, j_3 eingezeichnet sind. Multipliziert man zwei Schwingungen mit den Wellenzahlen j_1 und j_2 , so entsteht nach (A.22) eine Schwingung mit der Wellenzahl $j_3 = j_1 + j_2$, die zugehörigen Winkel werden im Einheitskreis also addiert. Diese Wellenzahl liegt allerdings in dem grau schraffierten Bereich, dessen Fourier-Koeffizienten gedämpft werden. Aber warum schneidet man genau ein Drittel der Fourier-Koeffizienten heraus? Eine Schwingung mit $k_{N/4}$ kann nach Quadrierung gerade noch durch das Gitter fehlerfrei abgetastet werden. Eine etwas höher frequente Schwingung mit $k_{N/4+j}$ wird nach der Quadrierung schon als eine Schwingung mit $k_{-N/2+2j}$ fehlinterpretiert. Gesucht wird also das maximale j , dessen Fourier-Koeffizient nach der Quadrierung noch gerade gedämpft wird:

$$\begin{aligned}
 j &= \frac{N}{4} - 2j \\
 \Leftrightarrow j &= \frac{1}{3} \frac{N}{4} \\
 \rightarrow k_{N/4+j} &= k_{1/3N}
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

Es reicht somit aus, wenn man ein Drittel der Fourier-Koeffizienten herausausschneidet. Dieses Verfahren wird nach seinem Entdecker als 2/3-Regel von Orszag benannt. Es werden so im Gegensatz zum „Alles oder Nichts“-Filter zunächst auch fehlinterpretierte Schwingungen zugelassen, die nach erneuter Anwendung des Filters allerdings wieder gelöscht werden. Dadurch können gegenüber der Methode von Philips mehr Fourier-Koeffizienten genutzt werden. Ist ein Feld $\psi(x, y, t)$ gegeben, so wird nach der Transformation in den Fourier-Raum (A.4) wie folgt gefiltert:

$$\hat{a}_{k,l}(t) = \begin{cases} \hat{a}_{k,l}(t) & \text{falls } |k| < 1/3D_x \text{ und } |l| < 1/3D_y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.24}$$

Alle Schritte des Pseudo-Spektral-Verfahrens (Abschnitt A.3) inklusive des Dealiasings werden in folgender Übersicht zusammengefasst:

- (Dealiasing des anfänglichen Fourier-Raums)
- Lineare Terme werden im Fourier-Raum berechnet
- Nichtlinearitäten werden mittels FFT im Orts-Raum kalkuliert
- Zurücktransformation mittels FFT in den Fourier-Raum
- Dealiasing des Fourier-Raums
- Addition der linearen und nichtlinearen Terme im Fourier-Raum
- Neuer Zeitschritt wird berechnet

A.6 Runge-Kutta-Verfahren

Ein Verfahren zur zeitlichen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist das klassische Runge-Kutta-Verfahren (siehe dazu [36]). Es handelt sich um ein vierstufiges Zeitschritt-Verfahren, das in der Zeit in vierter Ordnung genau ist ($\mathcal{O}(dt^4)$), das heißt, dass alle auftretenden Fehler von der Ordnung fünf oder höher sind ($\geq \mathcal{O}(dt^5)$).

Gegeben sei eine gewöhnliche autonome Differentialgleichung

$$y'(t) = f(y(t)) \quad (\text{A.25})$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0 \quad (\text{A.26})$$

Ein Strich „ $'$ “ bedeute die totale Ableitung nach der Zeit. Sei dt die Schrittweite, so lässt sich der nächste Zeitschritt y_1 nach dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren wie folgt berechnen:

$$y(t_0 + dt) \approx y_1 = y_0 + \frac{dt}{6} (y'_0 + 2y'_a + 2y'_b + y'_c) \quad (\text{A.27})$$

mit

$$y_a = y_0 + \frac{dt}{2} y'_0 \quad y'_0 = f(y_0) \quad (\text{A.28a})$$

$$y_b = y_0 + \frac{dt}{2} y'_a \quad y'_a = f(y_a) \quad (\text{A.28b})$$

$$y_c = y_0 + dt y'_b \quad y'_b = f(y_b) \quad (\text{A.28c})$$

$$\text{und } y'_c = f(y_c) \quad (\text{A.28d})$$

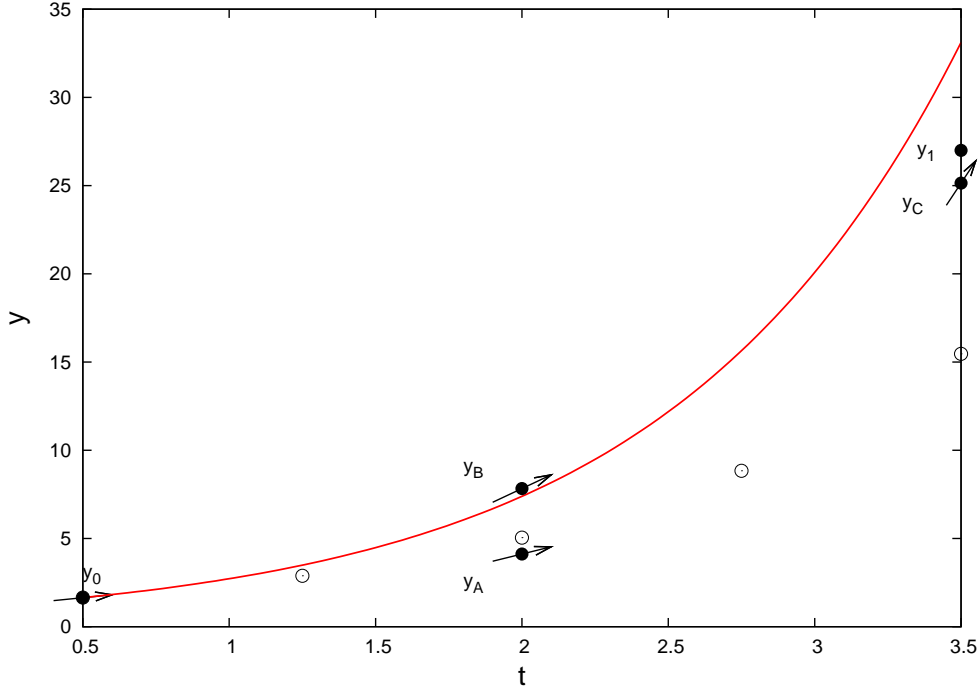


Abbildung A.4: Klassisches Runge-Kutta-Verfahren versus Euler-Verfahren am Beispiel der e -Funktion.

Dass $y(t_0 + dt) = y_1 + \mathcal{O}(t^5)$ gilt, lässt sich mit einer Taylor-Entwicklung von der RHS von (A.27) zeigen:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + \frac{dt}{6} [y'_0 + 2(y_0 + \frac{dt}{2} y'_0)' + 2(y_0 + \frac{dt}{2} (y_0 + \frac{dt}{2} y'_0)')' + \\
 &\quad (y_0 + dt(y_0 + \frac{dt}{2} (y_0 + \frac{dt}{2} y'_0)')')'] \\
 &= y_0 + \frac{dt}{6} [y'_0 + 2y'_0 + dt y''_0 + 2y'_0 + dt y''_0 + \frac{dt^2}{2} y'''_0 + y'_0 + dt y''_0 + \\
 &\quad \frac{dt^2}{2} y'''_0 + \frac{dt^3}{4} y''''_0] \\
 &= y_0 + \frac{dt}{6} [6y'_0 + 3dt y''_0 + dt^2 y'''_0 + \frac{dt^3}{4} y''''_0] \\
 &= y_0 + y'_0 dt + \frac{1}{2} y''_0 dt^2 + \frac{1}{6} y'''_0 dt^3 + \frac{1}{24} y''''_0 dt^4
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

y_1 ist also die Taylor-Entwicklung von $y(t_0 + dt)$ bis zur vierten Ordnung. Angemerkt sei, dass das Runge-Kutta-Verfahren auch für nicht autonome Differentialgleichungen gültig ist, die hier allerdings nicht behandelt werden, da die im Kapitel 4 auftretende Differentialgleichung autonom ist. Abbildung A.4 zeigt das klassische Runge-Kutta-Verfahren am Beispiel der e -Funktion (rot) mit $y' = y$. Die Schrittweite beträgt hier $dt = 3$, die Anfangsbedingung ist $y(0.5) = e^{0.5}$.

Die ausgefüllten Punkte mit dem Steigungspfeil markieren die vier Stützstellen des Runge-Kutta-Verfahrens, sie werden über die vier Stufen berechnet (A.28). Im Vergleich dazu wird das Euler-Verfahren mit einem viertel so großen Zeitschritt vier Mal angewendet (weiße Punkte). Der numerische Aufwand ist so bei beiden Verfahren gleich, da die Funktion (A.25) bei der Berechnung eines Zeitschritts des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens auch vier Mal aufgerufen werden muss. Man erkennt, dass dieses Verfahren deutliche Vorteile gegenüber dem Euler-Verfahren hat.

A.7 Courant-Friedrichs-Lewy Bedingung (CFL)

Im letzten Abschnitt wurde das Runge-Kutta-Verfahren vorgestellt. Im Folgenden soll bestimmt werden, wie groß man den Zeitschritt dt bei vorgegebener Differentialgleichung und Gitter-Auflösung wählen darf, sodass die numerische Stabilität gewährleistet bleibt (siehe dazu [37]). Um diesen Zeitschritt zu bestimmen, kann man einerseits das Programm bei verschiedenen Zeitschritten laufen lassen, um so die Stabilität zu überprüfen, andererseits kann man diesen Zeitschritt mit Hilfe der Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) Bedingung in einigen Fällen auch rechnerisch bestimmen. Als Beispiel soll hier die eindimensionale Advektions-Gleichung dienen:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + v\frac{\partial}{\partial x}u(x, t) = 0 \quad (\text{A.30})$$

Für diese lineare partielle Differentialgleichung lässt sich sofort eine Lösung angeben:

$$u(x, t) = u(x - vt) \quad (\text{A.31})$$

Anschaulich besagt diese Gleichung, dass eine Information „ u “ mit der Geschwindigkeit „ v “ advektiert wird. Diskretisiert man die Gleichung (A.30) in Zeit und Raum, so besagt die CFL-Bedingung, dass sich eine Information pro Zeitschritt nicht mehr als eine Zelle fortpflanzen darf, damit die numerische Stabilität gewährleistet bleibt. Sei der Abstand von zwei Gitterpunkten Δx und der Zeitschritt dt , so müssen diese Größen folgende Bedingung erfüllen:

$$C = \frac{v dt}{\Delta x} \leq 1 \quad (\text{A.32})$$

C ist die CFL-Zahl und sollte den Wert 1 nicht überschreiten. Mit anderen Worten muss sich die physikalische Domäne in der numerischen befinden (siehe Abbildung A.5). Bei der Differentialgleichung aus Kapitel 4 kann diese Bedingung nicht so einfach angewendet werden, da die Advektions-Geschwindigkeit unter anderem auch durch die Poisson-Klammer bestimmt wird, die wiederum von den Funktionswerten abhängt. Im Prinzip müsste für jeden Zeitschritt die Bedingung (A.32) überprüft werden, um die Stabilität zu gewährleisten. Allerdings liefert diese Bedingung auch für diese Differentialgleichung einen klaren Trend, wie der Zeitschritt in Abhängigkeit der Auflösung des Gitters für eine stabile Numerik geändert werden muss.

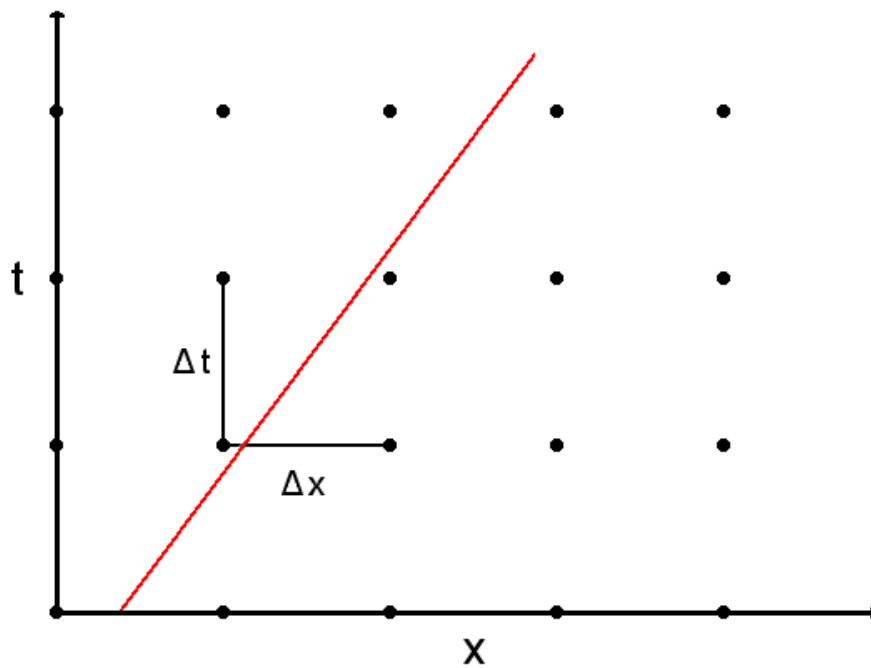


Abbildung A.5: Veranschaulichung der CFL-Bedingung. Die Punkte in x -Richtung markieren die Gitterpunkte, die Punkte in t -Richtung die Zeitdiskretisierung, zusammen bilden sie die numerische Domäne. Die rote Gerade beschreibt die physikalische Ausbreitung einer Information, sie liegt in diesem Fall in der numerischen Domäne, somit wird die CFL-Bedingung erfüllt.

B Swift-Hohenberg-Gleichung

In diesem Kapitel wird auf die strukturbildende Swift-Hohenberg-Gleichung eingegangen. Diese Gleichung ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung, dessen Lösung in Abhängigkeit von zwei Parametern verschiedene Muster im Orts-Raum ausbildet. Eines dieser Muster sind Streifen, weswegen die Gleichung auch im Kapitel 4 für das Plasma Modell verwendet wird. Bei anderer Wahl der Parameter ergeben sich aber auch beispielsweise Hexagone. Auf der beiliegenden DVD sind zwei Videos zu sehen, die Selbstorganisation bei diesem System erkennen lassen. Im Folgenden werden die Mechanismen der Gleichung und ihre Lösungen diskutiert.

Die Gleichung

Die Swift-Hohenberg-Gleichung wurde 1977 von J. Swift und P.C. Hohenberg aufgestellt [38]. Sie dient als strukturbildende Gleichung, die physikalische Vorgänge in der Natur, wie der Rayleigh-Benard-Konvektion, modellieren soll. Allgemein lautet sie:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\epsilon - (k_c^2 + \Delta)^2 \right) \psi + \delta \psi^2 - \psi^3 \quad (\text{B.1})$$

ψ ist ein zweidimensionales, zeitabhängiges Feld, k_c die kritische Wellenzahl und ϵ und δ beliebige Parameter.

B.1 Strukturbildende Mechanismen

Im Folgenden werden die strukturbildenden Mechanismen der Gleichung erläutert. Der lineare Term dient hierbei der Wellenlängenselektion. Transformation dieses Terms in den Fourier-Raum liefert folgende Ungleichung für Wellenzahlen, deren Fourier-Koeffizienten positive lineare Wachstumsraten besitzen:

$$\epsilon - (k_c^2 - k_x^2 - k_y^2)^2 > 0 \quad (\text{B.2})$$

Diese Ungleichung ist nur erfüllt für Wellenzahlen innerhalb eines Kreistrings des Innenradius $k_c - \sqrt{\epsilon}$ und Außenradius $k_c + \sqrt{\epsilon}$. Alle Wellenzahlen außerhalb dieses Rings werden linear gedämpft (siehe Abbildung B.1). Dieser Mechanismus selektiert also Moden der Wellenzahl k_c . Die nichtlinearen Terme in Gleichung (B.1) sind nicht nur für die Sättigung der selektierten Moden zuständig, sondern selektieren zusätzlich noch innerhalb des Kreistrings. So entstehen bei der Wahl der Parameter $(\epsilon, \delta) = (0.3, 0.0)$ Streifen (siehe Abbildung B.2) und bei den Parametern $(\epsilon, \delta) = (0.1, 1.0)$ Hexagone (siehe Abbildung B.3).

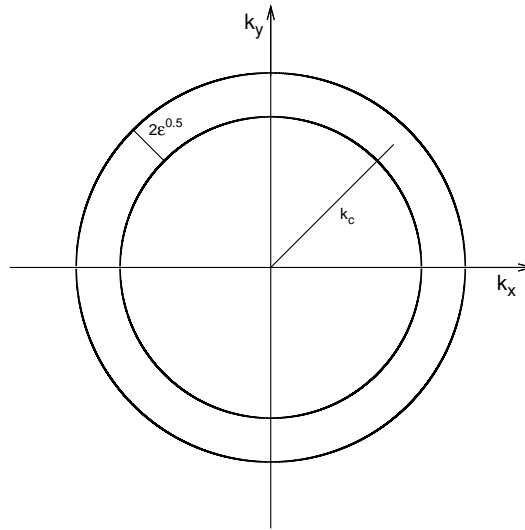


Abbildung B.1: Kreisring im Fourier-Raum der Breite $2\sqrt{\epsilon}$, in dem Moden positive lineare Wachstumsraten besitzen.

Die lokale Ausrichtung der Streifen, beziehungsweise die Sättigungsniveaus sind hier abhängig von der Anfangsbedingung.

B.2 Numerische Ergebnisse

Bei der numerischen Lösung der Swift-Hohenberg-Gleichung werden verrauschte Anfangsbedingungen und die folgenden Parametereinstellungen gewählt:

Numerische Details:

- Auflösung: $\text{DIM}_x \times \text{DIM}_y = 128 \times 128$
- Randbedingungen: Periodisch
- Kritische Wellenzahl: $k_c = 20 \cdot 2\pi/128 \simeq 1$

Für $(\epsilon, \delta) = (0.3, 0.0)$:

- Box-Größe: $(0, L_x) \times (0, L_y) = (0, 128) \times (0, 128)$
- Zeitschritt: $dt = 10^{-2}$

Für $(\epsilon, \delta) = (0.1, 1.0)$:

- Box-Größe: $(0, L_x) \times (0, L_y) = (0, 64) \times (0, 64)$
- Zeitschritt: $dt = 10^{-3}$

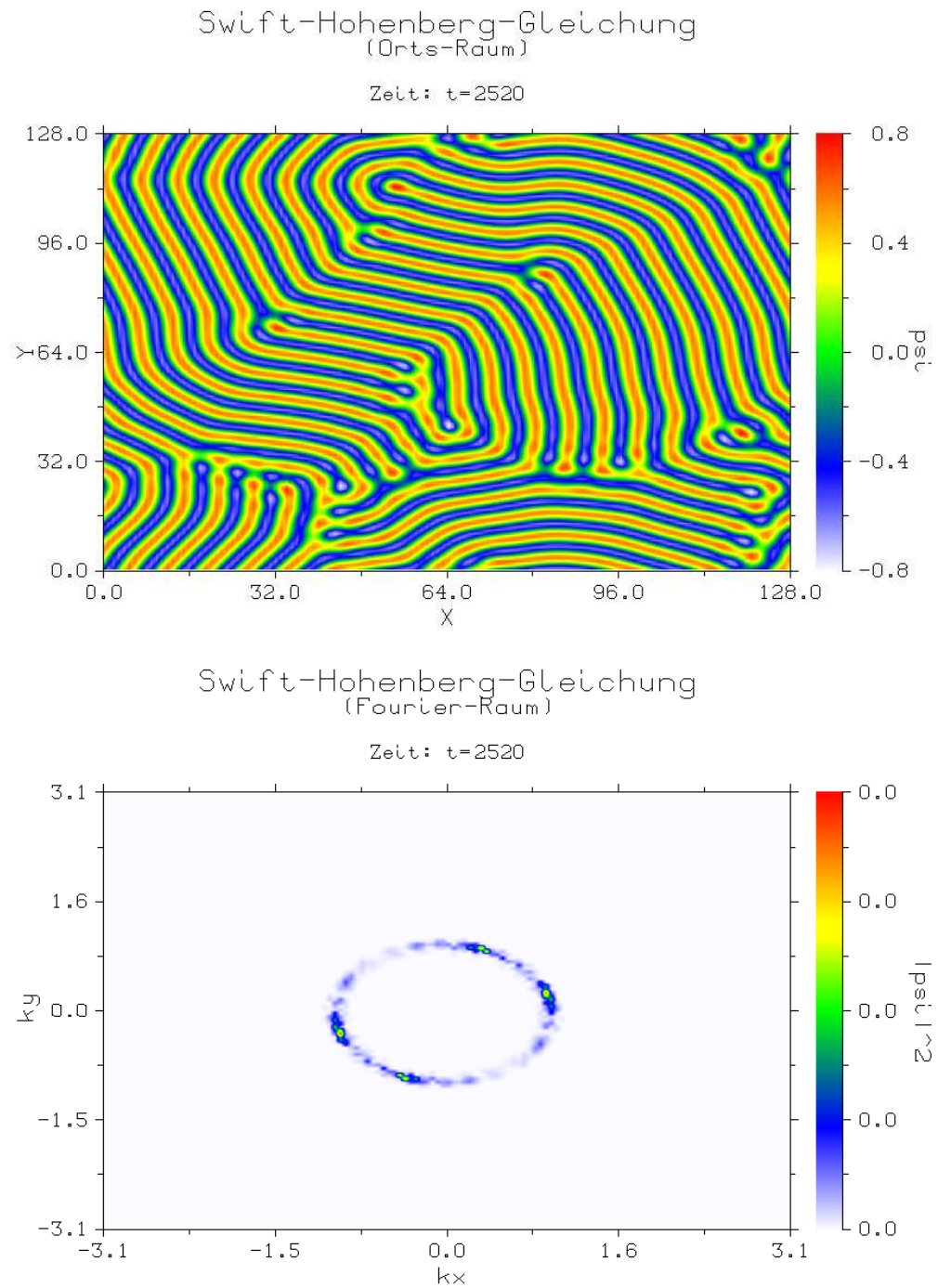


Abbildung B.2: Lösung der Swift-Hohenberg-Gleichung für $(\epsilon, \delta) = (0.3, 0.0)$

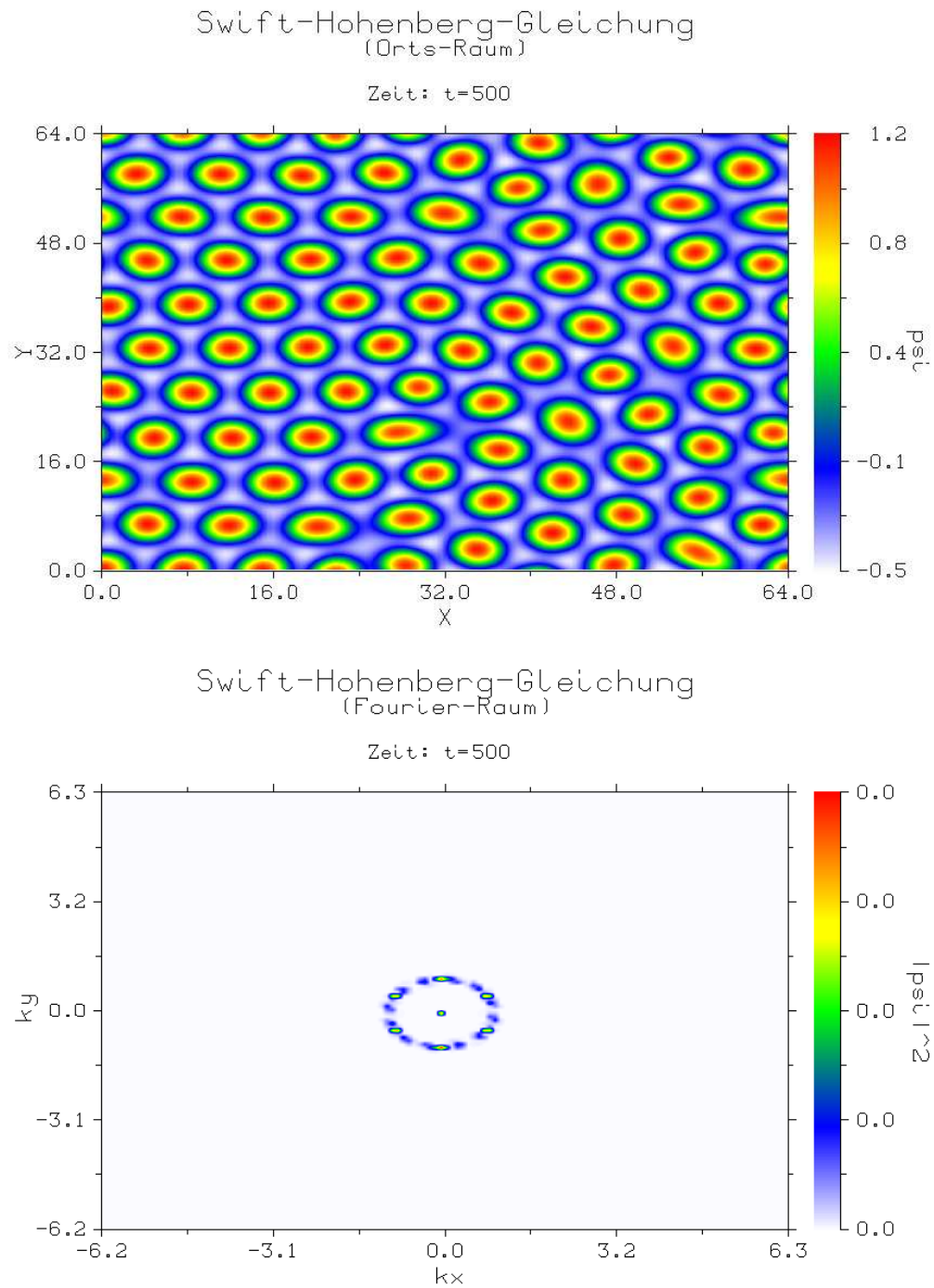


Abbildung B.3: Lösung der Swift-Hohenberg-Gleichung für $(\epsilon, \delta) = (0.1, 1.0)$

Abbildung B.2 zeigt das ψ -Feld zur Zeit $t = 2520$ bei den Parameter-Werten $(\epsilon, \delta) = (0.3, 0.0)$. Im Fourier-Raum haben sich zwei Moden auf dem Kreisring herausgebildet, bei denen jeweils die k_x - und k_y -Komponente dominieren. Das macht sich im Orts-Raum dadurch bemerkbar, dass die Streifen entweder in die x - oder y -Richtung orientiert sind. Interessant sind hier die sogenannten Defekte, bei denen ein Streifen keinen Anschluss hat. In den Simulations-Videos auf der beiliegenden DVD erkennt man, dass die Streifen bei den Defekten wieder aufgebrochen werden, um so einen Anschluss zu bekommen. Das ist ein interessantes Beispiel für Selbstorganisation. Abbildung B.3 zeigt das ψ -Feld zur Zeit $t = 500$ bei den Parameter-Werten $(\epsilon, \delta) = (0.1, 1.0)$. Im Fourier-Raum haben sich hier jeweils drei Moden mit ihren komplex Konjugierten und die Nullmode herausgebildet. Im Orts-Raum spiegelt sich dieser Sachverhalt mit der Ausbildung von Hexagonen wider. Hier gibt es auch Selbstorganisation, denn jede Insel ist dazu bestrebt genau sechs Dreiecke um sich zu haben, die ein Hexagon bilden.

C Zusatzmaterialien

Als Zusatzmaterial wird der vorliegenden Arbeit eine DVD mit allen wichtigen Simulationsdaten zur Reproduzierbarkeit der Ergebnisse beigelegt.

DVD-Verzeichnis-Struktur

```
/1_Diplomarbeit/  
/2_Codes/  
/3_Kapitel4/  
/4_Kapitel5/  
/5_KapitelB/
```

Inhalt

Im Ordner „1_Diplomarbeit“ befindet sich der Latex-Quelltext dieser Arbeit. Der Ordner „2_Codes“ beinhaltet die Programme, die die Modell-Gleichung aus Kapitel 4 sowie die Swift-Hohenberg-Gleichung aus Kapitel B lösen. Die Parameterdatei gilt für beide Programme. Diese werden mit dem Befehl „clink -cpp -r8 Code -lfftw3_threads -lfftw3 -lm“ kompiliert. Dafür müssen unter anderem die fftw- sowie die dislin-Bibliothek installiert sein. Im Ordner „3_Kapitel4“ befinden sich alle numerischen Ergebnisse dieses Kapitels, sowie drei Videos, die den Mechanismus des Modells visualisieren. Dafür wurden die Parameter aus Abschnitt 4.2 übernommen. Im Ordner „4_Kapitel5“ befinden sich alle numerischen Ergebnisse, die mit dem GENE-Code erstellt wurden und der Ordner „5_KapitelB“ enthält zwei Videos zur Swift-Hohenberg-Gleichung. Die Parameter stimmen bis auf die Box-Größe und den Zeitschritt mit denen aus Abschnitt A.2 überein. Die Box-Größe und der Zeitschritt betragen bei den Videos in beiden Fällen $(0, L_x) \times (0, L_y) = (0, 128) \times (0, 128)$ und $dt = 10^{-2}$.

Literaturverzeichnis

- [1] I. Langmuir, Proceedings of the National Academy of Science **14**, 627–637 (1928).
- [2] J. Lawson, A.E.R.E. Report GP/R **1807** (1955).
- [3] J. Wesson, *Tokamaks* (Clarendon Press - Oxford, 1997).
- [4] A. M. Dimits *et al.*, Physics of Plasmas **7**, 969 (2000).
- [5] R. Balescu, *Aspects of Anomalous Transport in Plasmas* (Institute of Physics, 2005).
- [6] H. Kegel, *Plasmaphysik: Eine Einführung* (Springer, 1998).
- [7] R. J. Goldston and P. H. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics* (Institute of Physics, 1995).
- [8] N. N. Bogoliubov, Journal of Physics USSR **10**, 265–274 (1946).
- [9] J. Yvon, Actes scientifique et industrie **203** (1935).
- [10] J. G. Kirkwood, The Journal of Chemical Physics **14**, 180. (1946).
- [11] J. G. Kirkwood, The Journal of Chemical Physics **15**, 72. (1947).
- [12] M. Born and H. S. Green, Proceedings of the Royal Society A **188**, 10–18 (1946).
- [13] N. Krall and A. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (McGraw-Hill, New York, 1973).
- [14] F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* (Plenum Publishing Corporation, 1984).
- [15] K.-D. Harms and A. Stampa, *Einführung in die Plasmaphysik* (Universität - Gesamthochschule Essen, 1997).
- [16] M. Wakatani, *Stellarator and Heliotron Devices* (Oxford University Press, Inc., 1998).
- [17] H. Wobig, *Magnetohydrodynamik* (Max-Planck-Institut für Plasmaphysik).
- [18] R. Dux, *Plasmaphysik und Fusionsforschung, Teil I: Plasmaphysik* (Universität Augsburg, 2001).
- [19] M. A. Beer, *Gyrofluid Models of Turbulent Transport in Tokamaks*, Ph.D. thesis, Princeton University (1995).

- [20] B. Rogers, W. Dorland, and M. Kotschenreuther, *Physical Review Letters* **25**, 5336 (2000).
- [21] A. Hasegawa and K. Mima, *Physics of Fluids* **21**, 87–92 (1978).
- [22] A. Hasegawa and K. Mima, *Physical Review Letters* **39**, 205 (1977).
- [23] F. Jenko, *Plasmaphysik II* (Universität Ulm, 2006).
- [24] F. Jenko, *Physics Letters A* **351**, 417 (2006).
- [25] F. Jenko, W. Dorland, M. Kotschenreuther, and B. N. Rogers, *Physics of Plasmas* **7**, 1904 (2000).
- [26] T. Dannert and F. Jenko, *Physics of Plasmas* **12**, 072309 (2005).
- [27] F. Merz, *Gyrokinetic Simulation of Multimode Plasma Turbulence*, Ph.D. thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (2008).
- [28] M. Kammerer, F. Merz, and F. Jenko, *Physics of Plasmas* **15**, 052102 (2008).
- [29] T. Görler, *Multiscale Effects in Plasma Microturbulence*, Ph.D. thesis, Universität Ulm (2009).
- [30] M. J. Püschel, *Electromagnetic Effects in Gyrokinetic Simulations of Plasma Turbulence*, Ph.D. thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (2009).
- [31] F. Jenko, W. Dorland, and G. W. Hammett, *Physics of Plasmas* **8**, 4096 (2001).
- [32] D. R. Mikkelsen and W. Dorland, *Physical Review Letters* **101**, 135003 (2008).
- [33] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Method: Second Edition (Revised)* (Dover Publications, 2001).
- [34] J. W. Cooley and J. W. Tukey, *Mathematics of Computation* **19**, 297–301 (1965).
- [35] *Numerical Methods for Complex Systems* (Institute for Theoretical Physics, WWU Münster, 2009).
- [36] W. Dahmen and A. Reusken, *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler* (Springer, 2006).
- [37] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, *Mathematische Annalen* **100**, 32 (1928).
- [38] J. Swift and P. C. Hohenberg, *Physical Review A* **15**, 319 (1977).

Danksagung

Ich danke ganz herzlich Herrn Prof. Dr. Rudolf Friedrich für die freundliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe sowie für die Betreuung dieser Arbeit. Durch die interessante Aufgabenstellung konnte ich viel im Bereich des Programmierens lernen, was mir stets Freude bereitet hat.

Als nächstes möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Frank Jenko für die Betreuung dieser Arbeit bedanken. Dank ihm konnte ich mit dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching zusammenarbeiten und hatte Teil an der Fusionsforschung.

Als nächstes bedanke ich mich bei Herrn Dipl.-Phys. Holger Angenent, der schon im ersten Semester des Studiums mein Tutor war. Er half mir sehr bei dem Einstieg in die Plasmaphysik und konnte mir auch stets bei Fragen zu Linux oder C++ weiterhelfen. Über die ganze Diplomarbeitszeit war er immer ein zuverlässiger Betreuer.

Danken möchte ich auch der gesamten Arbeitsgruppe in Garching, mit der die Gastaufenthalte am IPP sehr viel Spaß gemacht haben und die wohl jede Frage zur Plasmaphysik beantworten konnten.

Ganz besonders möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir das Studium erst ermöglicht haben und auf deren Unterstützung ich zu jeder Zeit vertrauen kann.

Zum Schluß möchte ich mich bei meiner Freundin Judith bedanken, mit der ich eine wunderbare Studienzeit verbringen durfte. Sie hat die gesamte Arbeit korrekturgelesen, obwohl sie vermutlich jedes Formelzeichen an bittere Mathe-Unterrichte erinnerte.

Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig angefertigt und außer den angegebenen keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, den 15.01.2010