

Charakterisierung der Teilchenbewegung in turbulenten Feldern durch Nullmoden

als Diplomarbeit vorgelegt von

Judith Vogelsang



Westfälische Wilhelms-Universität
Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1. Die Fokker-Planck-Gleichung	1
1.1. Die allgemeine Langevin-Gleichung für N Variablen	1
1.2. Interpretationsmöglichkeiten stochastischer Integrale	3
1.3. Die Kramers-Moyal-Entwicklung	4
1.4. Die Fokker-Planck-Gleichung als Spezialfall der KM-Entwicklung	5
2. Das Kraichnanmodell	9
2.1. Die Fokker-Planck-Gleichung für das Kraichnanmodell	9
2.2. Modellierung der räumlichen Korrelationsfunktionen	11
2.3. Das Verhalten von Lagrangeschen Trajektorien für verschiedene ξ -Werte . . .	13
3. Eigenschaften von Nullmoden	17
3.1. Die asymptotische Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichten	19
3.2. Die Strukturfunktionen passiver Skalare	20
3.3. Die zeitliche Entwicklung der Form einer Teilchenwolke	21
4. Lösungsverfahren für Differentialgleichungen zweiter Ordnung	23
4.1. Allgemeine Form der Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung .	23
4.2. Die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten	25
5. Ein eindimensionales Modell	29
5.1. Die Bestimmungsgleichung für die Nullmoden	29
5.1.1. Transformation auf Relativkoordinaten	29
5.1.2. Die Gleichung für Nullmoden in Relativkoordinaten	30
5.1.3. Transformation auf Größen- und Form-Koordinaten	31
5.1.4. Vereinfachung der Differentialgleichung für den Formanteil	35
5.2. Die Anschlussbedingungen	35
6. Nullmoden für verschiedene Werte von ξ	39
6.1. Der Fall $\xi = 2$	39
6.2. Der Fall $\xi = 1$	40
6.3. Der Fall $\xi = 0$	53
7. Störungsrechnung zur Bestimmung der Grade der Nullmoden bei $\xi = 1 + \epsilon$	63
8. Zusammenfassung	67
Anhang	68

A. Definition eines Martingals	69
B. Herleitung von $\sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \rightarrow t$	71
C. Die Itôformel	73
D. Das Prinzip großer Abweichungen	75
E. Variation der Konstanten	77
Literaturverzeichnis	79

Einleitung

Turbulenz ist ein seit vielen Jahrhunderten von Menschen beobachtetes, alltägliches Phänomen. Zunächst bezeichnete der Begriff Turbulenz (lat. *turba* Unruhe, Trubel, Menge, Verwirrung) die ungeordnete Bewegung von Menschenmengen, bevor er seine heutige Bedeutung als ungeordnete Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen erlangte. Jeder hat schon einmal die Strömungen beobachtet, die entstehen, wenn Milch im Kaffee verrührt wird oder Zigarettenrauch aufsteigt. Obwohl Turbulenz ein schon für unsere Vorfahren gut sichtbares Phänomen der klassischen Physik gewesen ist, ist bis heute keine vollständige theoretische Beschreibung gelungen. Einen Meilenstein in der Erforschung der Turbulenz setzte Richardson 1922 durch die Beschreibung der Energiekaskade in der dreidimensionalen Turbulenz. Nach dieser befindet sich ein turbulentes System in einem Fließgleichgewicht, bei dem auf großen Skalen Energie zugeführt wird, die zu immer kleineren Skalen transportiert wird, um schließlich auf sehr kleinen Skalen, auf denen Dissipation wirksam wird, zu verschwinden. Richardson lieferte damit wichtige Vorüberlegungen zu der 1941 von Kolmogorow entwickelten, quantitativeren Theorie, die Aussagen über die Universalität der Statistik der Bewegung auf kleinen und mittleren Skalen macht. Allerdings haben sich im Laufe der Zeit systematische Abweichungen von der Theorie Kolmogorows herausgestellt. So kann man beispielsweise aus der Theorie von Kolmogorow folgern, dass die Momente der longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente $\langle (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{0}, t)) * \mathbf{r}/r \rangle^n$ einem Potenzgesetz r^{σ_n} mit $\sigma_n = n/3$ im Fall dreidimensionaler Turbulenz gehorchen, experimentell findet man das jedoch nur für kleine n näherungsweise erfüllt. Ähnliches findet man für eine mit der Flüssigkeit transportierte skalare Größe θ : Auch hier erwartet man für die Strukturfunktionen $S_n(r) = \langle (\theta(\mathbf{r}, t) - \theta(\mathbf{0}, t))^n \rangle$ zunächst eine r -Abhängigkeit über ein Potenzgesetz r^{ζ_n} mit $\zeta_n = n/3$, es stellen sich aber hier sogar noch größere Abweichungen ein als bei den Momenten der Geschwindigkeitsinkremente selber. Kraichnan fand heraus, dass die Strukturfunktionen solcher skalarer Größen sogar dann anomales Verhalten aufweisen können, wenn das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit selber Gaußisch ist. Ein wesentliches Ziel der Turbulenzforschung beinhaltet daher die Erklärung des anomalen Skalenverhaltens. Ein vielversprechendes Konzept ist dabei die Lagrangesche Beschreibung der Flüssigkeit, bei der die Bewegung von masselosen, punktförmigen Teilchen in der Flüssigkeit betrachtet wird, deren Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt gerade der momentanen Geschwindigkeit des Feldes an dem Ort entspricht, an dem sie sich befinden. 1968 entwickelte Kraichnan ein Modell für ein Geschwindigkeitsfeld, das sogenannte Kraichnansche Geschwindigkeitsfeld, ein Gaußsches Geschwindigkeitsfeld mit zeitlicher δ -Korrelation der Geschwindigkeiten. Mithilfe dieses (theoretischen) Modells sind seitdem erhebliche Fortschritte in der Erklärung des anomalen Verhaltens im Inertialbereich gelungen. So konnte das anomale Skalenverhalten passiver skalarer Größen durch statistische Erhaltungsgrößen für die zeitliche Evolution einer n -Teilchenwolke erklärt werden und auf das Verhalten der Geometrie einer n -Teilchenwolke zurückgeführt werden. Die statistischen Erhaltungsgrößen ergeben sich dabei aus der für das Kraichnanmodell explizit bestimmbareren Fokker-Planck-Gleichung für die zeitliche Evolution einer n -Teilchenwolke. Man findet dabei Funktionen

der Koordinaten der n Teilchen, die sogenannten Nullmoden, deren Erwartungswert zeitlich erhalten bleibt. Es hat sich herausgestellt, dass diese Nullmoden gut geeignet sind, Teilchenbewegungen zu charakterisieren und Aussagen über die zeitliche Entwicklung der Form einer Teilchenwolke zu treffen. Ein Beispiel für Nullmoden im Fall der Brownschen Bewegung ist die Funktion $\mathbf{R}_{12}^2 - \mathbf{R}_{13}^2$, deren Erwartungswert zeitlich erhalten bleibt. Dabei beschreibt \mathbf{R}_{ij} den Abstandsvektor zwischen Teilchen i und Teilchen j . Der Mechanismus, der zur zeitlichen Erhaltung des Erwartungswertes dieser Funktion führt, ist folgender: Es gilt für den Erwartungswert des Abstandsquadrates zweier Teilchen $\langle \mathbf{R}^2(t) \rangle = \mathbf{R}^2(0) + Dt$. Dabei ist D die Diffusionskonstante. Durch die Differenzbildung fällt die t -Abhängigkeit also heraus und $\langle \mathbf{R}_{12}^2 - \mathbf{R}_{13}^2 \rangle$ ist zeitlich erhalten.

In dieser Arbeit sollen Nullmoden zunächst allgemein beschrieben werden, bevor sie für ein einfaches Modell analytisch bestimmt werden. Genauer ist die Arbeit wie folgt aufgebaut: In Kapitel 1 wird die Fokker-Planck-Gleichung, eine partielle Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsdichte für eine n -Teilchenwolke, aus der Langevin-Gleichung, einer stochastischen Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung einer Variablen, abgeleitet. Aus der Fokker-Planck-Gleichung werden wir später die Bestimmungsgleichung für die Nullmoden ableiten. Kapitel 2 ist der Einführung des 1968 von Kraichnan entwickelten Kraichnanmodells, in dem alle weiteren Betrachtungen stattfinden werden, gewidmet, wobei auch die Fokker-Planck-Gleichung für das Kraichnanmodell abgeleitet wird. In Kapitel 3 findet sich eine allgemeine Beschreibung von Nullmoden und ihren Eigenschaften, die zur Charakterisierung der Evolution einer n -Teilchenwolke dienen. In Kapitel 4 geht es um ein Lösungsverfahren für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das bei der späteren Berechnung der Nullmoden in einem eindimensionalen Modell behilflich sein soll. Kapitel 5 führt das Modell ein, für das die Nullmoden bestimmt werden sollen und leitet eine allgemeine Gleichung zur Berechnung der Nullmoden in dem eingeführten Modell her. In Kapitel 6 werden für bestimmte Parameterwerte des Kraichnanmodells Nullmoden ausgerechnet und interpretiert. In Kapitel 7 wird für einen dieser Parameterwerte eine Formel für eine näherungsweise Bestimmung der Nullmoden in der Nähe dieses Parameterwertes bestimmt. Im letzten Kapitel 8 folgt eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit. Des Weiteren gibt es diverse Anhänge, die in der Arbeit auftauchende mathematische Definitionen oder Sätze beinhalten. Es sei hier insbesondere auf die Definition eines Martingals in Anhang A hingewiesen, da dieser Begriff eine mathematische Umschreibung der Nullmoden darstellt.

1. Die Fokker-Planck-Gleichung

Die Fokker-Planck-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die zeitliche Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathcal{P}_N(x_1, \dots, x_N, t)$, die als erstes von Fokker und Planck benutzt wurde, um die Brownsche Bewegung von Teilchen in einer Flüssigkeit zu beschreiben. Allgemein lautet sie in einer Variablen

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t) \mathcal{P}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t) \mathcal{P}(x, t) \quad (1.1)$$

und verallgemeinert auf N Variablen

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_N(x_1, \dots, x_N, t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)} \mathcal{P}_N(x_1, \dots, x_N, t) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)} \mathcal{P}_N(x_1, \dots, x_N, t) \quad (1.2)$$

Der Term mit $D^{(1)}$ bzw. $D_i^{(1)}$ beschreibt dabei einen Drift während der Term mit $D^{(2)}$ bzw. $D_{ij}^{(2)}$ einen Diffusionsterm darstellt.

Wir möchten in diesem Kapitel die Fokker-Planck-Gleichung aus der Langevin-Gleichung, einer stochastischen Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung einer Variablen, ableiten.

1.1. Die allgemeine Langevin-Gleichung für N Variablen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst die Position von Lagrangeschen Teilchen in einer Flüssigkeit mithilfe einer stochastischen Differentialgleichung beschreiben.

Unter Lagrangeschen Teilchen versteht man masselose, punktförmige Teilchen, deren Geschwindigkeitsvektor zu jedem Zeitpunkt gerade dem Geschwindigkeitsvektor des Geschwindigkeitsfeldes an der zugehörigen Stelle entspricht.

Wir gehen nun davon aus, dass die Lagrangeschen Teilchen zum einen einem deterministischen Drift unterworfen sind und zum anderen zu jedem Zeitpunkt einen zufälligen Impuls erfahren. Damit wird die Bewegung eines Teilchens durch die sogenannte Langevin-Gleichung

$$v(t) = \dot{x}(t) = h(x, t) + g(x, t)\Gamma(t) \quad (1.3)$$

beschrieben.

$h(x, t)$ ist hierbei der Drift, während $g(x, t)\Gamma(t)$ den zufälligen Impuls darstellt. $\Gamma(t)$ sollen unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 sein.

Eine Verallgemeinerung von (1.3) auf N Variablen x_1, \dots, x_N ergibt

$$\dot{x}_i = h_i(x_1, \dots, x_N, t) + \sum_{j=1}^N g_{ij}(x_1, \dots, x_N, t)\Gamma_j(t) \quad (1.4)$$

wobei $\Gamma_j(t)$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 sein sollen und so gewählt werden, dass für die Korrelationsfunktion

$$\langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t') \rangle = 2\delta_{ij}\delta(t-t') \quad (1.5)$$

gilt.

Ein Problem, das Mathematiker nun mit $\Gamma(t)$ bzw. $\Gamma_j(t)$ haben ist, dass die Annahme der Existenz von $\Gamma(t) \neq 0$ bzw. $\Gamma_j(t) \neq 0$ zu nicht messbaren Ereignissen führt (vgl. [13]): Wenn $\Gamma(t) \neq 0$, dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass $\Gamma(t)$ kleiner als a ist, im Intervall $]0, 1[$ liegt, d.h. $\mathbb{P}(\Gamma(t) \leq a) = p \in]0, 1[$. Damit wäre nach einer Art kontinuierlichem Gesetz der großen Zahlen das Lebesguemaß der Menge $E \cap]d, c[$ mit $E = \{t \in \mathbb{R} \mid \Gamma(t) \leq a\}$ und d, c beliebig gerade $\lambda(E \cap]d, c[) = p(d-c)$. Allerdings sind messbare Mengen, wenn sie nicht gerade Maß null haben, irgendwo beliebig dick, d.h. es gibt für alle $\alpha \in [0, 1[$ ein Intervall $]c_\alpha, d_\alpha[$ mit $\lambda(E \cap]c_\alpha, d_\alpha[) > \alpha(d_\alpha - c_\alpha)$.

Aus diesem Grund betrachten Mathematiker nicht $\Gamma(t)$ sondern $B_t = \int_0^t \Gamma(s)ds$ und nennen B_t Brownsche Bewegung. B_t hat dann folgende Eigenschaften (vgl. [13]):

- Für $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sind die Zufallsvariablen $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ unabhängig.
- Die Zufallsvariablen $B_t - B_s$ sind normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$.
- Die Abbildung $t \rightarrow B_t$ ist fast sicher stetig.

Wir erhalten also für die Kovarianz von B_t und B_s (o.E. $t \geq s$)

$$\langle B_t B_s \rangle - \langle B_t \rangle \langle B_s \rangle = \langle (B_t - B_s + B_s) B_s \rangle = \langle (B_t - B_s) B_s \rangle + \langle B_s^2 \rangle = s \quad (1.6)$$

Die Langevingleichung lautet in dieser Formulierung dann unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention (vgl. [17])

$$x_i(t+\tau) - x_i(t) = \int_t^{t+\tau} h_i(x_1(s), \dots, x_N(s), s) ds + \int_t^{t+\tau} g_{ij}(x_1(s), \dots, x_N(s), s) dB_s^j \quad (1.7)$$

Setzen wir nun für $h_i(\mathbf{x}(s), s)$ und $g_{ij}(\mathbf{x}(s), s)$ die Taylorentwicklungen ($\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$)

$$h_i(\mathbf{x}(s), s) = h_i(\mathbf{x}_0, s) + D_{\mathbf{x}} h_i(\mathbf{x}_0, s)(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0) + \dots \quad (1.8)$$

$$g_{ij}(\mathbf{x}(s), s) = g_{ij}(\mathbf{x}_0, s) + D_{\mathbf{x}} g_{ij}(\mathbf{x}_0, s)(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0) + \dots \quad (1.9)$$

ein und iterieren das Verfahren, erhalten wir ein Integral der Form (vgl. [13] und [17])

$$\int \Phi(B_s, s) dB_s \quad (1.10)$$

Allerdings ist nicht ohne Weiteres klar, wie ein Integral $\int \Phi(B_s, s) dB_s$ überhaupt zu verstehen ist, denn dafür gibt es zunächst einmal mehrere sinnvolle Möglichkeiten, die leider, anders als beim gewöhnlichen Riemannintegral, zu verschiedenen Ergebnissen führen.

1.2. Interpretationsmöglichkeiten stochastischer Integrale

Wir betrachten das Integral

$$\int_0^t \Phi(B_s, s) dB_s \quad (1.11)$$

Analog zum Riemannintegral versuchen wir, dieses Integral auf ein Integral von Treppenfunktionen zurückzuführen. Dazu setzen wir für eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ des Intervalls $[0, t]$ $\Delta = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{t_{i+1} - t_i\}$. Dann ergeben sich folgende sinnvoll erscheinende Definitionen des Integrals:

$$\int_0^t \Phi(B_s, s) dB_s = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(B_{t_j}, t_j) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \quad (1.12)$$

oder

$$\int_0^t \Phi(B_s, s) dB_s = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi\left(\frac{B_{t_{j+1}} + B_{t_j}}{2}, \frac{t_{j+1} + t_j}{2}\right) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \quad (1.13)$$

oder

$$\int_0^t \Phi(B_s, s) dB_s = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(B_{t_{j+1}}, t_{j+1}) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \quad (1.14)$$

Der Unterschied der drei Definitionen liegt darin, dass die Funktion $\Phi(B_s, s)$ in der ersten Definition auf dem Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ durch ihren Wert am linken Rand des Intervalls $[t_j, t_{j+1}]$ genähert wird (Itôinterpretation des stochastischen Integrals), bei der zweiten Definition durch den Funktionswert in der Mitte des Intervalls (Stratonovichinterpretation) und bei der dritten Definition durch den Funktionswert am rechten Rand des Intervalls (Anti-Itôinterpretation). Diese Definitionen fallen beim Riemannintegral zusammen, während hier Unterschiede auftreten werden.

Um diese an einem Beispiel zu sehen, berechnen wir das Integral $\int_0^t B_s dB_s$ in den verschiedenen Interpretationen:

$$B_t^2 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \right)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + 2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{j-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \quad (1.15)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + 2 \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \quad (1.16)$$

Der Grenzwert des zweiten Terms für $n \rightarrow \infty$ entspricht nun gerade der Itôdefinition des stochastischen Integrals $\int_0^t B_s dB_s$, wir erhalten also mit $\sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \rightarrow t$ für $n \rightarrow \infty$ (vgl. Anhang C) in der Itôinterpretation

$${}^{(I)} \int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2} \quad (1.17)$$

Für die Anti-Itôinterpretation teilen wir B_t^2 etwas anders auf:

$$B_t^2 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \right)^2 = 2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) - \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \quad (1.18)$$

$$= 2 \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_{j+1}} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) - \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \quad (1.19)$$

Hier entspricht der Grenzwert des ersten Terms für $n \rightarrow \infty$ gerade der Anti-Itôdefinition des Integrals $\int_0^t B_s dB_s$, wir erhalten also in diesem Fall

$${}_{(AI)} \int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} + \frac{t}{2} \quad (1.20)$$

Die Stratonovichinterpretation ist in diesem Fall gerade eine Kombination der Itô- und der Anti-Itôinterpretation von stochastischen Integralen:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{B_{t_{j+1}} + B_{t_j}}{2} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_{j+1}} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \quad (1.21)$$

Damit folgt

$${}_{(S)} \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} {}_{(AI)} \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} {}_{(I)} \int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} \quad (1.22)$$

Man erhält also die gleiche Formel wie bei klassischen Integralen. Welche der Interpretationen man wählt, hängt von den gewünschten Eigenschaften des Integrals ab. Bei der Stratonovichinterpretation erhält man, wie im obigen Beispiel, auch allgemein die gleichen Integralformeln wie in der klassischen Analysis, während bei der Itôinterpretation Zusatzterme auftreten, die sich aus der Itôformel ergeben (zur Itôformel siehe Anhang C). Allerdings werden durch die Itôinterpretation die stochastischen Integrale zu Martingalen (zur Definition eines Martingals siehe Anhang A).

1.3. Die Kramers-Moyal-Entwicklung

In diesem Abschnitt werden wir die Kramers-Moyal-Entwicklung, eine partielle Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t)$, herleiten. Dazu gehen wir davon aus, dass sich die Wahrscheinlichkeitsdichte zu einer Zeit $t + \tau$ aus der Wahrscheinlichkeitsdichte zur Zeit t und der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{x}', t)$, dass eine Teilchenkonfiguration $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_N)$ in der Zeit τ in die Konfiguration $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ übergeht, ergibt und entwickeln den Integranden in eine Taylorreihe analog zur Herleitung in einer Dimension in [17]. In d Dimensionen ist also $N = dn$, wobei n die Anzahl der Teilchen ist. Des Weiteren wird an dieser Stelle die Markoweigenschaft gefordert, dass die Teilchenkonfiguration zur Zeit $t + \tau$ nur abhängt von der Teilchenkonfiguration zur letzten untersuchten Zeit t und nicht auch von den Teilchenkonfigurationen zu untersuchten Zeitpunkten $t' < t$. Damit ergibt sich

$$\mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t + \tau) = \int \mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{x}', t) \mathcal{P}_N(\mathbf{x}', t) d^N \mathbf{x}' \quad (1.23)$$

Setzen wir $\Delta = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, so erhalten wir für den Integranden

$$\mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{x}', t) \mathcal{P}_N(\mathbf{x}', t) = \mathcal{P}_N(\mathbf{x} + \Delta - \Delta, t + \tau | \mathbf{x} - \Delta, t) \mathcal{P}_N(\mathbf{x} - \Delta, t) \quad (1.24)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \frac{\Delta^\alpha}{\alpha!} (-1)^n \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) \mathcal{P}_N(\mathbf{x} + \Delta, t + \tau | \mathbf{x}, t) \mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t) \quad (1.25)$$

Dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ ein Multiindex mit $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!$ und $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$.

Eine Integration bzgl. Δ liefert

$$\mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t + \tau) - \mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} (-1)^n \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \underbrace{\int \Delta^\alpha \mathcal{P}_N(\mathbf{x} + \Delta, t + \tau | \mathbf{x}, t) d\Delta}_{= \langle (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^\alpha \rangle =: M_\alpha(\mathbf{x}', t, \tau)} \mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t) \quad (1.26)$$

Entwickeln wir nun die Momente M_α in eine Taylorreihe um τ , erhalten wir

$$M_\alpha(\mathbf{x}', t, \tau) = D_\alpha(\mathbf{x}', t) \tau + O(\tau^2) \quad (1.27)$$

denn $M_\alpha(\mathbf{x}', t, 0) = 0$.

Unter Berücksichtigung der linearen Terme erhält man nun die Kramers-Moyal-Entwicklung (KM-Entwicklung) für die Evolution der Wahrscheinlichkeitsdichte einer Teilchenkonfiguration.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \left(-\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) D_\alpha(\mathbf{x}, t) \mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t) \quad (1.28)$$

$$\text{mit} \quad (1.29)$$

$$D_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle (\mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t))^\alpha \rangle \quad (1.30)$$

1.4. Die Fokker-Planck-Gleichung als Spezialfall der KM-Entwicklung

Die Beschreibung von Teilchenbewegungen mithilfe der Langevin-Gleichung unterscheidet sich von der Beschreibung durch die KM-Entwicklung dadurch, dass man bei der Langevin-Gleichung stochastische Differentialgleichungen für die Trajektorien der einzelnen Teilchen hat, während die KM-Entwicklung eine partielle Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte der möglichen Teilchenkonfigurationen darstellt. In diesem Abschnitt werden wir aus der Langevin-Gleichung (1.7) die zugehörige KM-Entwicklung herleiten.

Wir berechnen also die D_α analog zu der Herleitung in einer Dimension in [17].

Da $D_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle (\mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t))^\alpha \rangle$, betrachten wir zunächst $x_i(t + \tau) - x_i(t)$. Die Langevin-Gleichung (1.7) lautete

$$x_i(t + \tau) - x_i(t) = \int_t^{t+\tau} h_i(x_1(s), \dots, x_N(s), s) ds + \sum_{j=1}^N \int_t^{t+\tau} g_{ij}(x_1(s), \dots, x_N(s), s) dB_s^j \quad (1.31)$$

Setzt man für h_i und g_{ij} die entsprechenden Taylorentwicklungen ein, ergibt sich in erster Näherung

$$x_i(t + \tau) - x_i(t) = \int_t^{t+\tau} h_i(x_1(t), \dots, x_N(t), s) ds + \sum_{j=1}^N \int_t^{t+\tau} g_{ij}(x_1(t), \dots, x_N(t), s) dB_s^j \quad (1.32)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es also $\Theta_1, \Theta_2 \in [0, 1]$ mit

$$x_i(t + \tau) - x_i(t) = \tau h_i(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_1 s) + \sum_{j=1}^N (B_{t+\tau}^j - B_t^j) g_{ij}(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_2 s) \quad (1.33)$$

In zweiter Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} x_i(t + \tau) - x_i(t) &= \tau h_i(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_1 s) + \sum_{j=1}^N (B_{t+\tau}^j - B_t^j) g_{ij}(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_2 s) \\ &+ \sum_{k=1}^N \int_t^{t+\tau} \frac{\partial h_i}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_N(t)) (x_k(s) - x_k(t)) ds \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \int_t^{t+\tau} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_N(t), s) (x_k(s) - x_k(t)) dB_s^j \\ &= \tau h_i(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_1 s) + \sum_{j=1}^N (B_{t+\tau}^j - B_t^j) g_{ij}(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_2 s) \\ &+ \sum_{k=1}^N \int_t^{t+\tau} \frac{\partial h_i}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_N(t)) \left(\tau h_k(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_1 s) \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1}^N (B_{t+\tau}^j - B_t^j) g_{kj}(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_2 s) \right) ds \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \int_t^{t+\tau} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_N(t), s) \left(\tau h_k(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_1 s) \right. \\ &+ \left. \sum_{l=1}^N (B_s^l - B_t^l) g_{kl}(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_2 s) \right) dB_s^j \end{aligned}$$

Nun gilt mit $D_i = D_{\alpha_i} (\alpha_i(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))$, wobei die 1 an der i -ten Stelle steht)

$$D_i = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle x_i(t + \tau) - x_i(t) \rangle \quad (1.34)$$

Berücksichtigen wir, dass $\langle B_s \rangle = 0$ und vernachlässigen quadratische Terme in τ , weil diese bei der späteren Grenzwertbildung wegfallen werden, erhalten wir

$$\langle x_i(t + \tau) - x_i(t) \rangle = \tau h_i(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_1 s) \quad (1.35)$$

$$+ \left\langle \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \int_t^{t+\tau} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_N(t), s) \sum_{l=1}^N (B_s^l - B_t^l) g_{kl}(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_2 s) dB_s^j \right\rangle \quad (1.36)$$

Analog zu oben existiert also ein $\Theta \in [0, 1]$ mit

$$\langle x_i(t + \tau) - x_i(t) \rangle = \tau h_i(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_1 s) \quad (1.37)$$

$$+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^N \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_3 s) g_{ij}(x_1(t), \dots, x_N(t), \Theta_3 \Theta_2 s) \left\langle \int_t^{t+\tau} B_s^l dB_s^j \right\rangle \quad (1.38)$$

Das Integral auf der rechten Seite nimmt nun in den verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten stochastischer Integrale verschiedene Werte an.

In der Itôinterpretation ist das Integral 0 und wir erhalten

$$D_i(t) = h_i(x_1(t), \dots, x_N(t), t) \quad (1.39)$$

In der Stratonovichinterpretation hat das Integral gerade den Wert $\frac{\tau}{2} \delta_{jl}$ und wir erhalten

$$D_i(t) = h_i(x_1(t), \dots, x_N(t), t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_N(t), t) g_{ij}(x_1(t), \dots, x_N(t), t) \quad (1.40)$$

In der Anti-Itôinterpretation hat das Integral den Wert $\tau \delta_{jl}$ und wir erhalten

$$D_i(t) = h_i(x_1(t), \dots, x_N(t), t) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_N(t), t) g_{ij}(x_1(t), \dots, x_N(t), t) \quad (1.41)$$

Um nun $D_{ij} = D_{\alpha_{ij}}$ zu bestimmen ($\alpha_{ij} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ bzw. $\alpha_{ii} = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$, wobei die Werte $\neq 0$ an den Stellen i und j stehen), benutzen wir die obige Näherung erster Ordnung (1.32). Berücksichtigen wir nur Terme von maximal erster Ordnung in τ (andere Terme werden bei der Grenzwertbildung später sowieso wegfallen) und außerdem $\langle B_s \rangle = 0$, so erhalten wir

$$\langle (x_i(t + \tau) - x_i(t)) (x_j(t + \tau) - x_j(t)) \rangle \quad (1.42)$$

$$= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N g_{ik}(x_1(t), \dots, x_N(t), t + \Theta_2 \tau) g_{jk}(x_1(t), \dots, x_N(t), t + \Theta_2 \tau) \quad (1.43)$$

$$\underbrace{\left\langle \left(B_{t+\tau}^k - B_t^k \right) \left(B_{t+\tau}^l - B_t^l \right) \right\rangle}_{=\tau \delta_{kl}} \quad (1.44)$$

$$= \tau \sum_{k=1}^N g_{ik}(x_1(t), \dots, x_N(t), t + \Theta_2 \tau) g_{jk}(x_1(t), \dots, x_N(t), t + \Theta_2 \tau) \quad (1.45)$$

Damit folgt

$$D_{ij}(x_1(t), \dots, x_N(t), t) = \sum_{k=1}^N g_{ik}(x_1(t), \dots, x_N(t), t) g_{jk}(x_1(t), \dots, x_N(t), t) \quad (1.46)$$

Alle höheren D_{α} sind 0, denn benutzt man wieder die Näherung erster Ordnung, sieht man, dass in jedem Term entweder τ mindestens quadratisch auftaucht oder $\tau \langle (B_{t+\tau} - B_t)^2 \rangle = \tau^2$ oder $\langle (B_{t+\tau} - B_t)^3 \rangle = 0$ vorkommt. Damit haben wir aus der Langevin-Gleichung für N Variablen die Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_N(x_1, \dots, x_N, t) = \mathcal{M}_N(x_1, \dots, x_N, t) \mathcal{P}_N(x_1, \dots, x_N, t) \quad (1.47)$$

mit

$$\mathcal{M}_N(x_1, \dots, x_N, t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(x_1, \dots, x_N, t) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}(x_1, \dots, x_N, t) \quad (1.48)$$

hergeleitet.

2. Das Kraichnanmodell

Das Kraichnanmodell ist ein von Robert H. Kraichnan entwickeltes und in [12] vorgestelltes Modell für ein Gaußsches Geschwindigkeitsfeld mit Korrelationsfunktion

$$\langle v^i(\mathbf{r}, t) v^j(\mathbf{r}', t') \rangle = 2\delta(t - t') D^{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.1)$$

Charakteristisch hierbei ist die zeitliche δ -Korrelation der Geschwindigkeiten.

Obwohl diese Annahme in der Natur sicherlich nie erfüllt werden kann, stellt das Kraichnanmodell ein gut zu untersuchendes theoretisches Modell dar, zumal man es zum einen als eine Näherung für Felder mit sehr schnellem zeitlichen Abfall der Geschwindigkeitskorrelationsfunktion und zum anderen als Langzeitnäherung für Felder mit endlicher Geschwindigkeitskorrelationsfunktion betrachten kann.

Aus der zeitlichen δ -Korrelation der Geschwindigkeiten ergibt sich außerdem die Markoweigenschaft der Lagrangeschen Trajektorien, d.h. der Trajektorien masseloser Teilchen, deren Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt gerade der Geschwindigkeit des Feldes entspricht. Die Koordinaten eines Teilchens zu einem Zeitpunkt t hängen nämlich nur ab von den Koordinaten des Teilchens zum zuletzt betrachteten Zeitpunkt $t' < t$, nicht von den Koordinaten zu vorher betrachteten Zeitpunkten $t'' < t'$.

2.1. Die Fokker-Planck-Gleichung für das Kraichnanmodell

In [2] und [3] wird die Fokker-Planck-Gleichung für das Kraichnanmodell im Fall inkompressibler Flüssigkeiten mithilfe von Pfadintegralen hergeleitet, eine Verallgemeinerung auf den kompressiblen Fall befindet sich in [11]. Interessant ist, dass sich als Diffusionskoeffizienten gerade die räumlichen Anteile der Geschwindigkeitskorrelationsfunktionen ergeben. Genauer gesagt gilt

$$D_{ij}(\mathbf{x}(t), t) = D^{\tilde{i}, \tilde{j}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.2)$$

Dabei ist $\mathbf{x}(t)$ der Vektor aller N Variablen der Langevin-Gleichung zur Zeit t , also in unserem Fall der Vektor aller Koordinaten aller betrachteten Teilchen zur Zeit t . $\mathbf{x}(t)$ besteht also

aus den einzelnen Vektoren der Teilchenkoordinaten $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_{N-d+1}(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix}$,

wobei d die Anzahl der Raumdimensionen bezeichnet. i und j stehen für die Komponenten von \mathbf{x} , nehmen also Werte $1 \leq i, j \leq N$ an. Demgegenüber bezeichnen \tilde{i} und \tilde{j} die Raumdimensionen, nehmen also Werte $1 \leq i, j \leq d$ an. \mathbf{r} und \mathbf{r}' sind Vektoren aus $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\}$. Die obige Gleichung (2.2) gilt nun in dem Sinne, dass $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{i-\tilde{i}+1}$ und $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_{j-\tilde{j}+1}$.

Die Richtigkeit dieser Beziehung weisen wir nun durch Berechnung des Integrals

$$\int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \langle v_i(\mathbf{x}(t_1), t_1) v_j(\mathbf{x}(t_2), t_2) \rangle dt$$

mithilfe der in (1.1) betrachteten Langevin-Gleichung nach. $\mathbf{x}(t_1)$ und $\mathbf{x}(t_2)$ sind als Anfangsbedingungen zu verstehen und sind gerade so gewählt, dass die Position des Teilchens $i - \tilde{i} + 1$ zur Zeit t_1 gerade \mathbf{r}_1 ist und die des Teilchens $j - \tilde{j} + 1$ zur Zeit t_2 gerade \mathbf{r}_2 .

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \langle v_i(\mathbf{x}(t_1), t_1) v_j(\mathbf{x}(t_2), t_2) \rangle dt \\
&= \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \left\langle \left(h_i(\mathbf{x}(t_1), t_1) + \sum_{k=1}^N g_{ik}(\mathbf{x}(t_1), t_1) \Gamma_k(t_1) \right) \left(h_j(\mathbf{x}(t_2), t_2) + \sum_{l=1}^N g_{jl}(\mathbf{x}(t_2), t_2) \Gamma_l(t_2) \right) \right\rangle dt \\
&= \underbrace{\int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \langle h_i(\mathbf{x}(t_1), t_1) h_j(\mathbf{x}(t_2), t_2) \rangle dt}_{\rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0} \\
&+ \underbrace{\int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \left\langle h_i(\mathbf{x}(t_1), t_1) \sum_{l=1}^N g_{jl}(\mathbf{x}(t_2), t_2) \Gamma_l(t_2) \right\rangle dt}_{= \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} h_i(\mathbf{x}(t_1), t_1) \sum_{l=1}^N g_{jl}(\mathbf{x}(t_2), t_2) \underbrace{\langle \Gamma_l(t_2) \rangle}_{=0} dt = 0} \\
&+ \underbrace{\int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \left\langle h_j(\mathbf{x}(t_2), t_2) \sum_{k=1}^N g_{ik}(\mathbf{x}(t_1), t_1) \Gamma_k(t_1) \right\rangle dt}_{= \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} h_j(\mathbf{x}(t_2), t_2) \sum_{k=1}^N g_{ik}(\mathbf{x}(t_1), t_1) \underbrace{\langle \Gamma_k(t_1) \rangle}_{=0} dt = 0} \\
&+ \underbrace{\int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \left\langle \sum_{k=1}^N g_{ik}(\mathbf{x}(t_1), t_1) \Gamma_k(t_1) \sum_{l=1}^N g_{jl}(\mathbf{x}(t_2), t_2) \Gamma_l(t_2) \right\rangle dt}_{= \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \sum_{k=1}^N g_{ik}(\mathbf{x}(t_1), t_1) \sum_{l=1}^N g_{jl}(\mathbf{x}(t_2), t_2) \underbrace{\langle \Gamma_k(t_1) \Gamma_l(t_2) \rangle}_{= \delta_{kl} \delta(t_1 - t_2)} dt} \\
&= \begin{cases} \sum_{k=1}^N g_{ik}(\mathbf{x}(t_1), t_1) g_{jk}(\mathbf{x}(t_2), t_2) & \text{falls } t_2 \in [t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon] \\ 0 & \text{falls } t_2 \notin [t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon] \end{cases} \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ ergibt sich also für das Integral über die Korrelationsfunktion der Geschwindigkeiten

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \langle v_i(\mathbf{x}(t_1), t_1) v_j(\mathbf{x}(t_2), t_2) \rangle dt \quad (2.4)$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=1}^N g_{ik}(\mathbf{x}(t_1), t_1) g_{jk}(\mathbf{x}(t_1), t_1) & \text{falls } t_1 = t_2 \\ 0 & \text{falls } t_1 \neq t_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit Abschnitt 1.4, sieht man, dass der räumliche Anteil der Geschwindigkeitskorrelationsfunktionen (unter den oben beschriebenen Bezeichnungen) gerade den Diffusionskoeffizienten entspricht.

Um die vollständige Fokker-Planck-Gleichung herzuleiten, müssen wir noch die Driftkoeffizienten h_i bestimmen. Dazu betrachten wir den sich aus der Langevin-Gleichung ergebenden

Geschwindigkeitserwartungswert

$$\begin{aligned} \langle v_i(\mathbf{x}(t), t) \rangle &= \left\langle h_i(\mathbf{x}(t), t) + \sum_{j=1}^N g_{ij}(\mathbf{x}(t), t) \Gamma_j(t) \right\rangle \\ &= h_i(\mathbf{x}(t), t) + \sum_{j=1}^N g_{ij}(\mathbf{x}(t), t) \underbrace{\langle \Gamma_j(t) \rangle}_{=0} = h_i(\mathbf{x}(t), t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Da im Kraichnanmodell der Erwartungswert der Geschwindigkeiten null ist, müssen also die Funktionen h_i in der Langevingleichung 0 sein.

Damit haben wir die Fokker-Planck-Gleichung in der Itôinterpretation bereits gefunden:

Die Driftkoeffizienten D_i sind null, die Diffusionskoeffizienten D_{ij} entsprechen den räumlichen Anteilen in der Geschwindigkeitskorrelationsfunktion.

In der Stratonovichinterpretation sind die Driftkoeffizienten nicht null, weil sich ein zusätzlicher Drift $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_N(t), t) g_{ij}(x_1(t), \dots, x_N(t), t)$ ergibt (vgl. Abschnitt 1.4). Um diesen zu bestimmen, müssen wir die Funktionen g_{ij} aus den D_{ij} herleiten. Dieses ist möglich, wenn die D_{ij} eine positiv definite Matrix D bilden, denn dann gibt es eine eindeutig bestimmte, positiv definite Matrix g mit $g^2 = D$ und die Koeffizienten von g sind die Funktionen g_{ij} . Ein Verfahren um die Wurzel einer Matrix zu bestimmen ist in diesem Fall (vgl. [17]), die Matrix zu diagonalisieren (immer möglich, weil die Matrix D symmetrisch ist), dann die Wurzel aus den Eigenwerten zu ziehen und danach die Transformationen wieder rückgängig zu machen. Praktisch bereitet aber auch dieses Verfahren erhebliche Schwierigkeiten, weil die Diagonalisierung einer $n \times n$ -Matrix die Nullstellenbestimmung eines Polynoms n -ten Grades impliziert. Auch die in einer Dimension mögliche direkte Zurückführung auf D durch $g'(x, t)g(x, t) = \frac{d}{dt}g^2(x, t) = \frac{d}{dt}D(x, t)$ lässt sich leider nicht auf den Fall mehrerer Dimensionen verallgemeinern. Aus diesem Grund kann der Stratonovichfall in dieser Arbeit nicht weiter behandelt werden.

Insgesamt erhalten wir eine relativ einfache mathematische Behandelbarkeit des Kraichnanmodells dadurch, dass wir zumindest in der Itôinterpretation explizit eine Fokker-Planck-Gleichung angeben können. Diese Tatsache hat das Kraichnanmodell trotz seines rein theoretischen Charakters durch in der Natur nicht zu erreichende Annahmen zu einem oft betrachteten Modell für turbulente Strömungen gemacht. Viele Betrachtungen betreffen dabei das Feld der sogenannten Nullmoden, denen wir uns in Kapitel 3 zuwenden werden. Zuvor möchten wir aber die räumlichen Korrelationsfunktionen D^{ij} genauer charakterisieren.

2.2. Modellierung der räumlichen Korrelationsfunktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Modellierung der räumlichen Korrelationsfunktionen der Geschwindigkeiten im Kraichnanmodell D^{ij} , die sich im obigen Abschnitt 2.1 gleichzeitig unter den angegebenen Bezeichnungen als die Diffusionskoeffizienten in der Fokker-Planck-Gleichung herausgestellt haben.

Es ist davon auszugehen, dass die räumlichen Geschwindigkeitskorrelationsfunktionen für kleine Abstände der betrachteten Orte groß sind und mit steigendem Abstand gegen null abfallen. Qualitativ erwartet man also das in Abbildung (2.1) skizzierte Verhalten.

In [6] wird das Verhalten der Korrelationsfunktionen auf den verschiedenen Skalen quantifiziert. Dabei wird zwischen dem Verhalten auf Skalen $r < \eta$, auf denen Dissipation auftritt,

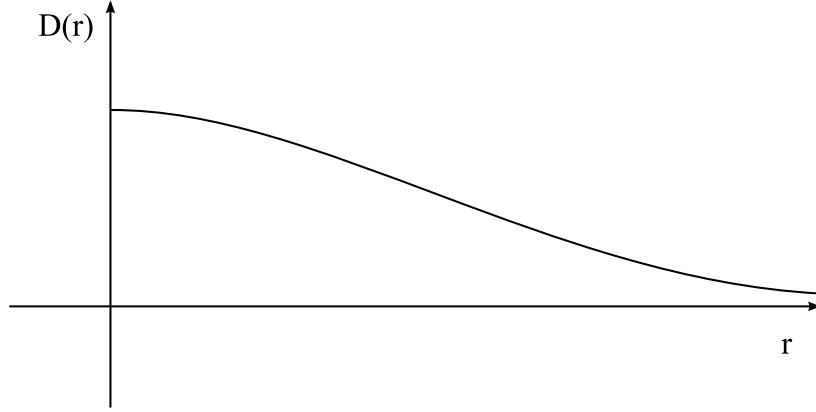


Abbildung 2.1.: Qualitatives Verhalten der räumlichen Korrelationsfunktionen

dem Verhalten auf Skalen größer als die integrale Längenskala L , die die Korrelationslänge des Feldes beschreibt und dem Inertialbereich $\eta < r < L$, in dem weder Dissipation noch einwirkende Kräfte eine Rolle spielen, unterschieden.

D^{ij} soll die Form $D^{ij}(\mathbf{r}) = D_0 \delta_{ij} - \frac{1}{2} d^{ij}(\mathbf{r})$ haben, wobei D_0 eine Konstante ist.

Damit müssen die Funktionen d_{ij} für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ gegen $2D_0 \delta_{ij}$ konvergieren.

Die Korrelationsfunktionen sollen auf sehr kleinen Skalen außerdem glatt sein, d.h. für $r \ll \eta$, sollen sie (vgl. [6]) das Verhalten

$$d^{ij}(\mathbf{r}) \sim r^2 \quad (2.7)$$

aufweisen. Im Inertialbereich $\eta \ll r \ll L$ soll d^{ij} skalieren wie r^ξ mit $\xi \in [0, 2]$, d.h.

$$d^{ij}(\mathbf{r}) \sim r^\xi \quad (2.8)$$

Wie in [6] diskutiert stellt D_0 gerade die effektive Ein-Teilchen-Diffusionskonstante dar und ist von der Ordnung L^ξ . Das bedeutet, dass die Diffusion durch die Geschwindigkeitsfluktuationen auf großen Skalen der Ordnung L bestimmt wird. Demgegenüber beschreibt d^{ij} die Statistik der Geschwindigkeitsdifferenzen.

Im Grenzwert $\eta \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$ hat d^{ij} die Form (vgl. [11])

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} d^{ij}(\mathbf{r}) = D_1 r^\xi \left((d - 1 + \xi - \wp \xi) \delta_{ij} - \xi (\wp \xi - 1) \frac{r^i r^j}{r^2} \right) \quad (2.9)$$

Dabei stellt $\wp = \frac{\langle (\nabla_i v^i)^2 \rangle}{\langle (\nabla_i v^j)^2 \rangle}$ die Kompressibilität der Flüssigkeit dar. Der Quotient liegt bei isotropen Flüssigkeiten immer zwischen 0 und 1 und ist 0 im inkompressiblen Fall. d ist die Dimension und D_1 eine Konstante. Im eindimensionalen Fall ist notwendigerweise $\wp = 1$ und $D_1 \sim \frac{1}{d-1}$, damit sich auch in diesem Fall $d^{ij} \sim r^\xi$ ergibt.

Im Grenzfall der Vernachlässigung von Diffusionsbereich und integraler Längenskala hat man damit auf allen Skalen das Verhalten $d^{ij}(\mathbf{r}) \sim r^\xi$. Für den eindimensionalen Fall ist die Geschwindigkeitskorrelationsfunktion $D^{11}(r) = D(r)$ in Abbildung 2.2 für verschiedene Werte von ξ im Inertialbereich illustriert. Dabei entspricht der rote Graph dem Fall $\xi = 2$, der blaue Graph dem Fall $\xi = 1,5$, der gelbe Graph dem Fall $\xi = 1$, der grüne Graph dem Fall $\xi = 0,5$ und der violette Graph dem Fall $\xi = 0,1$.

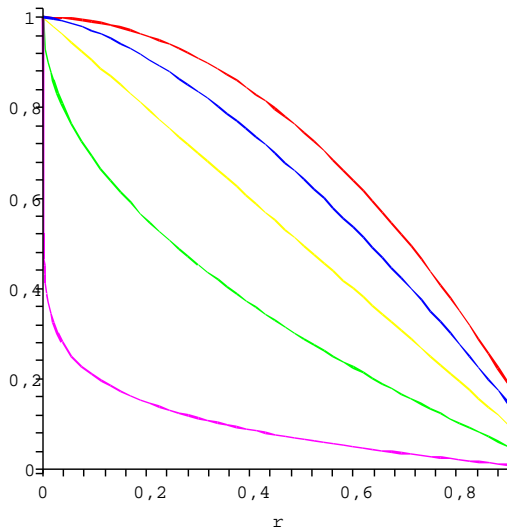


Abbildung 2.2.: Die Funktion $D(r)$ für verschiedene Werte von ξ

Auffällig ist, dass die sich im Grenzfall $\xi = 0$ ergebende Fokker-Planck-Gleichung gerade der Fokker-Planck-Gleichung der Brownschen Bewegung

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N D_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \mathcal{P}_N(\mathbf{x}, t) \quad (2.10)$$

entspricht, bei der der Operator \mathcal{M}_N gerade der Laplaceoperator ist (vgl. [6] und [17]). Damit kann das Kraichnanmodell als eine Verallgemeinerung der Brownschen Bewegung angesehen werden, bei der räumliche Korrelationen des Geschwindigkeitsfeldes auftreten und so nicht-konstante Diffusions-, „Konstanten“ hervorrufen, die vom Abstand der betrachteten Teilchen abhängen.

2.3. Das Verhalten von Lagrangeschen Trajektorien für verschiedene ξ -Werte

In [6] und [7] wird das Verhalten des Abstandes zweier Lagrangescher Teilchen mit der Zeit betrachtet. Dabei stellen sich fundamentale Unterschiede zwischen den verschiedenen Geschwindigkeitsfeld-Modellen heraus, die hier kurz umrissen werden sollen, zumal wir in Kapitel 5 auf diese zurückgreifen möchten. Zum Teil ist diese Betrachtung in [6] und [7] nicht auf das Kraichnanmodell beschränkt, wir werden uns aber im weiteren Verlauf dieser Arbeit auf Betrachtungen im Kraichnanmodell beschränken.

Ein Fall ist zunächst der Fall sogenannter glatter Geschwindigkeiten, d.h. der Fall differenzierbarer Geschwindigkeitsfelder, in denen der Betrag der Differenz der Geschwindigkeiten an den Orten \mathbf{r} und \mathbf{r}' proportional zum Abstand $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ist. Dieses Verhalten des Geschwindigkeitsfeldes ist im Bereich sehr kleiner Skalen $|\mathbf{r}| < \eta$ zu beobachten. Im Kraichnanmodell

entspricht das gerade dem Fall $\xi = 2$, denn dann ist $\langle v_i(\mathbf{r}, t)v_j(\mathbf{r}', t) \rangle \sim r^2$. In [6] wird für diesen Fall mithilfe des Prinzips großer Abweichungen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie (vgl. Anhang D oder [14]) zunächst für den Fall inkompressibler Geschwindigkeitsfelder (d.h. $\varphi = 0$ in Abschnitt 2.2) ein exponentielles Anwachsen des Abstandes zweier Teilchen hergeleitet, das speziell für das Kraichnanmodell (mit $\xi = 2$) folgendem Gesetz gehorcht:

$$\mathcal{P}_N(r, R, t) \sim \exp \left\{ -\frac{(\ln(\frac{R}{r}) - \lambda_1 t)^2}{2tC} \right\} \quad (2.11)$$

Dabei ist $\mathcal{P}_N(r, R, t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand zweier Lagrangescher Teilchen in der Zeit t von r nach R übergeht und $\lambda_1 > 0$ der größte Lyapunovexponent.

Bei einer Betrachtung des Grenzwertes dieser Formel für $r \rightarrow 0$ beobachtet man, dass dieses exponentielle Verhalten dazu führt, dass zwei Teilchen, die zur Zeit 0 am gleichen Ort waren, sich nicht mit der Zeit trennen werden und die Zeit für das Auseinanderlaufen zweier Teilchen im Mittel umso länger wird, je näher sich die beiden Teilchen zu Anfang sind.

Neben den gerade behandelten glatten Geschwindigkeitsfeldern betrachtet man auch nicht glatte Geschwindigkeitsfelder, bei denen die Strukturfunktionen $\langle |\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}', t)|^n \rangle$ proportional zu r^{σ_n} mit $\sigma_n < 1$ sind. Im Kraichnanmodell entspricht das dem Fall $\xi < 2$. Ein solches Verhalten wird im Inertialbereich, d.h. auf mittleren Skalen $\eta < |\mathbf{r}| < L$, beobachtet und wurde schon 1941 von Kolmogorow mit $\sigma_n = \frac{\alpha}{n}$, $\alpha = \frac{1}{3}$ hergeleitet. Allerdings haben sich inzwischen Abweichungen von diesem Verhalten herausgestellt und die von Kolmogorow vorhergesagte lineare Abhängigkeit von σ_n und n ist nur näherungsweise für kleine n erfüllt, so dass sich in Wirklichkeit ein ganzes Spektrum von Exponenten ergibt.

Betrachten wir nun den auch in [6] behandelten Fall $|\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}', t)| \sim |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\alpha$.

Dann erhält man für den Abstand $R = |\mathbf{R}|$ zweier Lagrangescher Teilchen die Differentialgleichung

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) = 2\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R} = 2\mathbf{R} \Delta \mathbf{v}(\mathbf{R}, t) \sim R^{1+\alpha} \quad (2.12)$$

Dabei ist $\Delta \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$ die Differenz der Geschwindigkeiten an den Orten der beiden betrachteten Teilchen zur Zeit t . Die Gleichung wird für $\alpha < 1$ gelöst durch

$$R^{1-\alpha}(t) - R^{1-\alpha}(0) = t \quad (2.13)$$

Damit erhält man eine Verallgemeinerung des von Richardson 1926 gefundenen und später auch experimentell nachgewiesenen Richardsongesetzes $\frac{\partial}{\partial t} \langle R^2(t) \rangle \sim \langle R^2(t) \rangle^{\frac{2}{3}}$ (vgl. [16]):

$$\langle R^\zeta(t) \rangle \sim t^{\frac{\zeta}{1-\alpha}} \quad (2.14)$$

Das bedeutet, dass im Inertialbereich, im Gegensatz zum exponentiellen Verhalten auf sehr kleinen Skalen, der Abstand zweier Teilchen in Abhängigkeit von der Zeit einem Potenzgesetz folgt. Betrachtet man nun den Grenzfall sehr hoher Reynoldszahlen, also den Fall $\eta \rightarrow 0$, ist dieses Verhalten auch noch auf beliebig kleinen Skalen gültig. Das führt zum Zusammenbruch der deterministischen Lagrangeschen Trajektorien, denn es stellt sich auch bei beliebig kleinem Anfangsabstand der Teilchen in endlicher Zeit ein endlicher Abstand ein. Siehe hierzu auch [2]. Es ist dann also nicht mehr möglich, die Trajektorien durch ihre Anfangswerte zu charakterisieren. Nichtsdestotrotz ist weiterhin eine statistische Beschreibung der Trajektorien möglich.

Betrachten wir nun noch den Fall kompressibler Geschwindigkeitsfelder, bei denen die Inkompressibilitätsbedingung $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ verletzt ist. In diesem Fall wird die Tendenz der Teilchen sich voneinander zu entfernen überlagert von der Eigenschaft der Flüssigkeit, Bereiche zu bilden, in denen die Dichte der Flüssigkeit mit der Zeit ansteigt, d.h. Bereiche zu bilden, in die sich die Teilchen verstärkt hineinbewegen.

Das genaue Verhalten der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte hängt nun vom Grad der Kompressibilität ab und wird in [11] für das Kraichnanmodell hergeleitet.

Es ergeben sich zwei unterschiedliche Verhaltensweisen dieser Wahrscheinlichkeitsdichte, von denen die eine im Fall sogenannter starker Kompressibilität auftritt und qualitativ mit dem Verhalten der Dichte in einem inkompressiblen, glatten Geschwindigkeitsfeld übereinstimmt, während die andere im Fall sogenannter schwacher Kompressibilität auftritt und qualitativ mit dem Verhalten der Dichte in einem inkompressiblen, nicht glatten Geschwindigkeitsfeld übereinstimmt. Schwache Kompressibilität bedeutet dabei, dass der Kompressibilitätsgrad $\wp = \frac{\langle (\nabla_i v^i)^2 \rangle}{\langle (\nabla_i v^j)^2 \rangle} < \frac{d}{\xi^2}$ ist, während starke Kompressibilität durch einen Kompressibilitätsgrad $\wp \geq \frac{d}{\xi^2}$ definiert ist. d ist dabei die Dimension und ξ der in der Korrelationsfunktion im Kraichnanmodell auftretende Exponent. Im Fall schwacher Kompressibilität erhält man nach [11] für die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte des Anfangsabstandes zweier Teilchen r zum Endabstand R in der Zeit t im Grenzwert verschwindender Anfangsabstände und verschwindender Diffusionskonstante κ

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \kappa \rightarrow 0}} \mathcal{P}_N(r; R; t) \sim \frac{R^{d-\gamma-1}}{|t|^{\frac{d-\gamma}{2-\xi}}} \exp\left(-\text{const.} \frac{R^{2-\xi}}{|t|}\right) \quad \text{mit } \gamma = \wp \xi \frac{d+\xi}{1+\wp \xi} \quad (2.15)$$

Das explosive Auseinanderlaufen der Teilchen auch für beliebig kleine Anfangsabstände bleibt also erhalten, nur begünstigt der Vorfaktor $R^{-\gamma}$ mit $\gamma > 0$ im Vergleich mit dem inkompressiblen Fall kleinere Endabstände.

Im Fall starker Kompressibilität wird die obige Dichte aufgrund der Singularität bei $r = 0$ nicht mehr integrierbar und man erhält nach [6] bzw. [11]

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \mathcal{P}_N(r; R; t) = \mathcal{P}_N^{\text{reg}}(r; R; t) + p(r; t) \delta(R) \quad (2.16)$$

wobei der reguläre Teil der Dichte $\mathcal{P}_N^{\text{reg}}$ gegen 0 geht und p gegen 1 geht für $r \rightarrow 0$. Das bedeutet nun, dass sich zwei anfänglich am gleichen Ort befindliche Teilchen nicht trennen werden und Trajektorien wie im Fall inkompressibler, glatter Geschwindigkeiten durch ihren Anfangspunkt charakterisiert werden können. In Fall eines stark kompressiblen Geschwindigkeitsfeldes gilt sogar noch mehr: Zwei Trajektorien mit Anfangsabstand r werden sich mit positiver Wahrscheinlichkeit immer weiter annähern.

3. Eigenschaften von Nullmoden

Nullmoden eines Operators $T(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ sind Funktionen $f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, so dass $T(\underline{\mathbf{r}})f(\underline{\mathbf{r}}) = 0$ gilt und werden zum Beispiel in [6] und [7] betrachtet. Im Speziellen bezeichnet der Begriff die Nullmoden des adjungierten Operators \mathcal{M}_N^* des Operators \mathcal{M}_N , der in der Fokker-Planck-Gleichung $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}_N(\underline{\mathbf{r}}, t) = \mathcal{M}_N(\underline{\mathbf{r}})\mathcal{P}_N(\underline{\mathbf{r}}, t)$ auftritt.

Die Nullmoden sind dann Funktionen der Teilchenkoordinaten, deren Erwartungswert zeitlich erhalten bleibt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f(\underline{\mathbf{r}}) \rangle (t) &= \frac{d}{dt} \int f(\underline{\mathbf{r}})\mathcal{P}_N(\underline{\mathbf{r}}, t)d\underline{\mathbf{r}} = \int f(\underline{\mathbf{r}})\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}_N(\underline{\mathbf{r}}, t)d\underline{\mathbf{r}} \\ &= \int f(\underline{\mathbf{r}})\mathcal{M}_N(\underline{\mathbf{r}})\mathcal{P}_N(\underline{\mathbf{r}}, t)d\underline{\mathbf{r}} = \int \mathcal{P}_N(\underline{\mathbf{r}}, t)\mathcal{M}_N^*(\underline{\mathbf{r}})f(\underline{\mathbf{r}})d\underline{\mathbf{r}} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Wir wollen nun versuchen, die Evolution einer Teilchenwolke mithilfe dieser Nullmoden zu beschreiben. Dabei erscheint weniger die Bewegung des Schwerpunktes einer Teilchenwolke interessant, als vielmehr die relative Bewegung der Teilchen zueinander. Wir gehen deshalb zu Schwerpunktkoordinaten $\bar{\mathbf{R}}$ und Relativkoordinaten $\tilde{\mathbf{R}} = (\mathbf{r}_1 - \bar{\mathbf{R}}, \dots, \mathbf{r}_n - \bar{\mathbf{R}})$ über. Man erhält die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte für die Relativkoordinaten dann durch Integration über alle möglichen Translationen $\underline{\rho} = (\rho, \dots, \rho)$ aus der ursprünglichen Übergangswahrscheinlichkeitsdichte (vgl. [6]):

$$\tilde{\mathcal{P}}_N(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{R}}, t) = \int \mathcal{P}_N(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{R}} + \underline{\rho}, t)d\underline{\rho} \quad (3.2)$$

Im Folgenden werden wir immer das Kraichnanmodell zugrundelegen, zu dem wir die Fokker-Planck-Gleichung explizit angeben können. Die relative Übergangswahrscheinlichkeitsdichte hat dann nach [6] das Skalierungsverhalten

$$\tilde{\mathcal{P}}_N(\lambda\underline{\tilde{\mathbf{r}}}, \underline{\tilde{\mathbf{R}}}, t) = \lambda^{-(N-1)d}\tilde{\mathcal{P}}_N(\underline{\tilde{\mathbf{r}}}, \lambda^{-1}\underline{\tilde{\mathbf{R}}}, \lambda^{\xi-2}t) \quad (3.3)$$

denn der auf Relativkoordinaten umgeschriebene Operator \mathcal{M}_N aus der Fokker-Planck-Gleichung, $\tilde{\mathcal{M}}_N$, hat die Dimension Länge $^{\xi-2}$, die Zeit skaliert also wie Länge $^{2-\xi}$, wobei ξ den Exponenten im Kraichnanmodell bezeichnet.

Im Speziellen betrachtet man als Nullmoden Funktionen, die ein Skalierungsverhalten der Form $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^\zeta f(\mathbf{x})$ mit $\zeta > 0$ aufweisen, sogenannte homogene Funktionen vom Grad ζ , auf deren Betrachtung wir uns im Folgenden beschränken möchten. Der Grund hierfür wird weiter unten ersichtlich werden.

In Größen- und Formkoordinaten $R = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n < m} R_{nm}^2}$ und $\hat{\mathbf{R}} = \frac{\tilde{\mathbf{R}}}{R}$, wobei R_{nm} der Abstand des n -ten und des m -ten Teilchens ist, lassen sich solche Funktionen stets schreiben als

$$f(R, \hat{\mathbf{R}}) = R^\zeta \hat{f}(\hat{\mathbf{R}}) \quad (3.4)$$

Beweis.

$$f(\lambda \underline{\mathbf{R}}) = f(\lambda R, \hat{\underline{\mathbf{R}}}) \stackrel{!}{=} \lambda^\zeta f(R, \hat{\underline{\mathbf{R}}})$$

Es genügt also, die Behauptung für Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu zeigen.

Für solche Funktionen ist sie aber klar, weil eine eindimensionale Funktion f , für die gilt $f(\lambda x) = \lambda^\zeta f(x)$, eindeutig durch ihren Funktionswert y_0 an einer einzigen Stelle x_0 festgelegt ist und die Funktion $f(x) = \frac{y_0}{x_0^\zeta} x^\zeta$ eine homogene Funktion darstellt, die durch den Punkt (x_0, y_0) geht. \square

In Abschnitt 2.3 haben wir gesehen, dass der Erwartungswert des Abstandes zweier Teilchen, also auch die Größe einer Teilchenwolke mit der Zeit wächst (vgl. (2.14)). Intuitiv würde man von homogenen Funktionen zunächst das Gleiche erwarten. Berechnen wir wie in [6] den Erwartungswert einer homogenen Funktion unter Benutzung der Eigenschaft (3.3) mit $\lambda = t^{\frac{1}{2-\xi}}$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle f(\tilde{\underline{\mathbf{R}}}(t)) \rangle &= \int f(\tilde{\underline{\mathbf{R}}}) \tilde{\mathcal{P}}_N(\tilde{\underline{\mathbf{r}}}, \tilde{\underline{\mathbf{R}}}, t) d\tilde{\underline{\mathbf{R}}} = \int f\left(t^{\frac{1}{2-\xi}} \tilde{\underline{\mathbf{R}}}\right) \tilde{\mathcal{P}}_N\left(\tilde{\underline{\mathbf{r}}}, t^{\frac{1}{2-\xi}} \tilde{\underline{\mathbf{R}}}, t\right) d\left(t^{\frac{1}{2-\xi}} \tilde{\underline{\mathbf{R}}}\right) \\ &= t^{\frac{\zeta}{2-\xi}} \int f(\tilde{\underline{\mathbf{R}}}) \tilde{\mathcal{P}}_N\left(t^{\frac{1}{\xi-2}} \tilde{\underline{\mathbf{r}}}, \tilde{\underline{\mathbf{R}}}, 1\right) d\tilde{\underline{\mathbf{R}}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$= t^{\frac{\zeta}{2-\xi}} \int f(\tilde{\underline{\mathbf{R}}}) \tilde{\mathcal{P}}_N(\underline{\mathbf{0}}, \tilde{\underline{\mathbf{R}}}, 1) d\tilde{\underline{\mathbf{R}}} + o\left(t^{\frac{\zeta}{2-\xi}}\right) \quad (3.6)$$

Wir sehen hier, dass der Erwartungswert einer homogenen Funktion vom Grad ζ tatsächlich mit der Zeit wächst wie $t^{\frac{\zeta}{2-\xi}}$, also wie man es bei einer Verallgemeinerung des Richardsongesetzes auf N Teilchen erwarten würde. Aus diesem Grund ist es besonders lehrreich, als Nullmoden homogene Funktionen zu betrachten. Ein langsames Wachstum erhält man nämlich nur, falls das Integral in (3.6) null ist. Da der Erwartungswert von Nullmoden nach (3.1) zeitlich konstant ist, müssen Nullmoden also Funktionen sein, bei denen das Integral in (3.6) null ist.

Gleichung (3.6) legt außerdem nahe, das Prinzip der Nullmoden noch zu verallgemeinern auf Funktionen, deren Erwartungswert zwar nicht zeitlich konstant, ist, wo aber das Integral trotzdem null ist, so dass sie langsamer wachsen als Gleichung (3.6) erwarten lässt. Dies sind die sogenannten langsamen Moden. In [2] und [6] stellt sich heraus, dass die langsamen Moden gerade die Nullmoden von $\tilde{\mathcal{M}}_N^{k+1}$ sind, denn wenn f_k eine homogene Funktion vom Grad $\zeta + (2-\xi)k$ und $\tilde{\mathcal{M}}_N^{k+1} f_k = 0$ ist, so ist $\tilde{\mathcal{M}}_N^k f_k$ eine Nullmode im eigentlichen Sinn und es lässt sich per Induktion zeigen, dass der Erwartungswert $\langle f_k(\tilde{\underline{\mathbf{R}}}(t)) \rangle$ wächst wie t^k , für $\zeta > 0$, also langsamer als Gleichung (3.6) erwarten lässt. Wir stellen außerdem fest, dass die Anwendung von $\tilde{\mathcal{M}}_N$ auf eine langsame Mode den Exponenten um $2-\xi$ verringert. Demnach kann man die langsamen Moden hierarchisch nach k anordnen, mit den Nullmoden ($k=0$) auf der untersten Stufe. Man erreicht eine jeweils niedrigere Stufe durch Anwendung von $\tilde{\mathcal{M}}_N$.

Insgesamt haben wir also festgestellt, dass homogene Funktionen vom Grad ζ mit der Zeit wachsen müssen wie $t^{\frac{\zeta}{2-\xi}}$, es sei denn das Integral in Gleichung (3.6) ist null. Physikalisch betrachtet muss diese merkwürdige Eigenschaft der Null- und langsamen Moden damit zusammenhängen, dass neben der Größe der Teilchenwolke, deren Erwartungswert in jedem

Fall wie $t^{\frac{\zeta}{2-\xi}}$ wächst, auch die Form der Teilchenwolke in die Funktion f eingeht und das Größenwachstum der Teilchenwolke kompensiert wird durch eine Abnahme der Formfluktuationen. Man könnte also erwarten über die Bestimmung der Nullmoden etwas über die zeitliche Entwicklung der Form einer Teilchenwolke zu erfahren.

Wirklich neue Informationen über die zeitliche Entwicklung einer N -Teilchenwolke, die man nicht aus der Entwicklung einer $(N-1)$ -Teilchenwolke ziehen kann, erhält man dabei allerdings nur aus den sogenannten irreduziblen Nullmoden, d.h. aus den Nullmoden, die nicht-trivial von den Koordinaten aller N beteiligten Teilchen abhängen. Es ist nämlich klar, dass Nullmoden von $\tilde{\mathcal{M}}_{N-1}$ auch Nullmoden von $\tilde{\mathcal{M}}_N$ sind. Wir beschränken uns also immer auf die Betrachtung der irreduziblen Nullmoden.

Mathematisch betrachtet sind Nullmoden Martingale, denn der Erwartungswert einer Nullmode zur Zeit t entspricht gerade dem Wert der Nullmode zur letzten bekannten Zeit $t' < t$ bzw. genauer:

Wir fassen die Nullmoden $f(\tilde{\mathbf{R}}(t))$ als Folge von Zufallsvariablen mit Indexmenge \mathbb{R} auf ($t \in \mathbb{R}$). Dann ist $\langle f(\tilde{\mathbf{R}}(t)) | f(\tilde{\mathbf{R}}(t')) \rangle = f(\tilde{\mathbf{R}}(t'))$. Das bedeutet, dass wenn man die Nullmode (als Zufallsvariable) zur Zeit t' kennt, die beste Schätzung für die Nullmode zur Zeit $t > t'$ gerade die Nullmode zur Zeit t' ist. (Zur Definition eines Martingals siehe Anhang A.) Die folgenden Abschnitte beschäftigen sich nun genauer mit Eigenschaften von Flüssigkeiten, die mithilfe von Nullmoden beschrieben werden können.

3.1. Die asymptotische Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichten

Eine erste interessante Eigenschaft der Null- und langsamen Moden ist ihr von Bernard, Gawędzki und Kupiainen entdecktes Auftreten in einer asymptotischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichten für kleine Anfangsabstände der Teilchen oder große Teilchenabstände zu großen Zeiten. Genauer gilt (vgl. [2] und [6]):

$$\tilde{\mathcal{P}}_N(\lambda \underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{R}}, t) = \sum_a \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{\zeta_a - (2-\xi)k} f_{a,k}(\underline{\mathbf{r}}) g_{a,k}(\underline{\mathbf{R}}, t) \quad (3.7)$$

für kleine λ . Dabei sind $f_{a,k}$ die langsamen Moden für $k > 0$ und $f_{a,0}$ sind die Nullmoden, $g_{a,k}$ stellen Wahrscheinlichkeitsdichten dar, die die Fokker-Planck-Gleichung erfüllen. Die Funktionen $f_{a,k}$ und $g_{a,k}$ können so gewählt werden, dass $f_{a,k-1} = \tilde{\mathcal{M}}_N f_{a,k}$ und $g_{a,k+1} = \tilde{\mathcal{M}}_N g_{a,k} = \frac{\partial}{\partial t} g_{a,k}$ gilt. Auf eine Herleitung der Entwicklung (3.7) soll hier verzichtet werden, zumal sie in [2] zu finden ist. Setzen wir die Entwicklung (3.7) in (3.5) ein, so erhalten wir für den Erwartungswert einer homogenen Funktion f

$$\langle f(\underline{\mathbf{R}}(t)) \rangle = \sum_a \sum_{k=0}^{\infty} t^{\frac{\zeta_a - \zeta_a}{2-\xi} + k} f_{a,k}(\underline{\mathbf{r}}) \int f(\underline{\mathbf{R}}) g_{a,k}(\underline{\mathbf{R}}, 1) d\underline{\mathbf{R}} \quad (3.8)$$

Die $f_{a,k}$ und die $g_{a,k}$ zu verschiedenen Werten von a müssen orthogonal sein, denn setzt man für f eine langsame Mode $f_{a,k}$ ein, müssen die Summanden, die ein schnelleres Wachstum als $\sim t^k$ hervorrufen würden, null sein.

Die Tatsache, dass man die Übergangswahrscheinlichkeitsdichten mithilfe von Null- und

langsamen Moden entwickeln kann, deutet schon darauf hin, dass diese eine wesentliche Rolle für das Verständnis der Evolution einer N -Teilchenwolke in einem Kraichnan'schen Geschwindigkeitsfeld haben werden.

3.2. Die Strukturfunktionen passiver Skalare

Eine weitere wichtige und in der Literatur oft besprochene Eigenschaft der Nullmoden ist (vgl. z.B. [1], [6], [3], [4] und [11]), dass ihre Grade im Fall nicht glatter Geschwindigkeitsfelder gerade den anomalen Exponenten der Strukturfunktionen im Inertialbereich entsprechen und so einen Schlüssel für das Verständnis der anomalen Exponenten der Strukturfunktionen liefern.

Genauer sieht das wie folgt aus:

Ein passiver Skalar ist, wie der Name schon sagt, eine skalare Größe, $\theta(\mathbf{r}, t)$ wie zum Beispiel die Temperatur, die mit dem Geschwindigkeitsfeld transportiert wird, aber nicht auf das Geschwindigkeitsfeld einwirkt. Diese genügt dann der Advektions-Diffusions-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\theta(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\theta(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\theta(\mathbf{r}, t) = \kappa\Delta\theta(\mathbf{r}, t) + \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.9)$$

Dabei stellt $\Phi(\mathbf{r}, t)$ eine Kraft dar, die den passiven Skalar erzeugt, zum Beispiel wäre, falls θ eine Temperatur wäre, Φ eine Wärmequelle (vgl. [6]).

Strukturfunktionen sind nun die Erwartungswerte der mit $N \in \mathbb{N}$ potenzierten Differenz der Werte passiver Skalare in zwei Punkten im Abstand r :

$$S_N(r) = \left\langle (\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{0}))^N \right\rangle \quad (3.10)$$

Nach Kolmogorow skalieren diese wie r^{ζ_N} , wobei ζ_N linear von N abhängt. Im Fall der Brownschen Bewegung ist dieses mit $\zeta_N = N$ erfüllt, im Fall von Geschwindigkeitsfeldern mit räumlichen Korrelationen der Geschwindigkeiten, beobachtet man jedoch Abweichungen von den Kolmogorowschen Voraussagen und zwar sowohl im getriebenen Fall mit $\Phi \neq 0$ als auch im ungetriebenen Fall mit $\Phi = 0$. Es ist nun gelungen, diese anomalen Exponenten mit den Graden der irreduziblen Nullmoden mit den kleinsten Graden zu identifizieren. In [1] werden diese Grade für kleine ξ in linearer Ordnung in ξ zu $\frac{N}{2}(2 - \xi) - \frac{N(N-2)}{2(d+2)}\xi + \mathcal{O}(\xi^2)$ bestimmt und in [11] durch das Einfügen des Faktors $(1 + 2\varphi)$ auf ein kompressibles Geschwindigkeitsfeld verallgemeinert.

Gehen wir nun zu einer anschaulichen Erklärung des gerade beschriebenen Phänomeres über. Im Fall $\Phi \neq 0$ sei L_θ die Korrelationslänge der Kraft Φ und η wie schon oben die Skala, auf der die Viskosität eine Rolle spielt und Dissipation stattfindet. Falls diese beiden Längen weit genug auseinander liegen, hat man nach [7] eine Kaskade des Skalars durch den Inertialbereich, ähnlich wie die Energiekaskade: Die Kraft produziert Fluktuationen des Skalars auf großen Skalen der Größenordnung L_θ , die zunächst durch das Geschwindigkeitsfeld verzerrt werden, so dass Fluktuationen auf kleineren Skalen entstehen, die schließlich durch Diffusion verwischt werden. Physikalisch entspricht die Berechnung von Strukturfunktionen der Berechnung der Zeit, die eine Teilchenwolke braucht, um ihre Anfangsform zu vergessen. Strukturfunktionen sind nämlich Differenzen von Korrelationsfunktionen mit verschiedenen

Anfangsbedingungen (siehe hierzu [7] und [8]). Zum Beispiel hat man bei der Strukturfunktion $S_3(r) = \langle (\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{0}))^3 \rangle = 3 \langle \theta^2(\mathbf{r})\theta(\mathbf{0}) - \theta(\mathbf{r})\theta^2(\mathbf{0}) \rangle$ die Differenz der Korrelationsfunktionen zum einen mit zwei Teilchen am Ort \mathbf{r} und einem Teilchen am Ort $\mathbf{0}$ und zum anderen mit einem Teilchen am Ort \mathbf{r} und zwei Teilchen am Ort $\mathbf{0}$. S_3 muss also proportional zu der Zeit sein, in der man die eine Anfangsbedingung von der anderen unterscheiden kann. Diese Zeit nimmt ab, wenn r wächst, denn wenn r größer ist, sind die räumlichen Korrelationen schwächer. Genauer gesagt muss die Abnahme gerade der Abnahme der Formfluktuationen entsprechen. Deshalb fallen die Exponenten der Strukturfunktionen mit den kleinsten Graden der irreduziblen Nullmoden zusammen und für den Fall $\Phi \neq 0$ ergibt sich

$$S_n(r) \sim \frac{r^{\zeta_n}}{L_\theta^{n(1-\alpha)-\zeta_n}}. \quad (3.11)$$

Dabei ist ζ_n der Grad derjenigen irreduziblen Nullmode, die den kleinsten Grad unter allen irreduziblen Nullmoden von \mathcal{M}_n hat. Eine genaue Herleitung hierzu befindet sich zum Beispiel in [1] und in [6].

Für den nicht getriebenen Fall mit $\Phi = 0$ ergibt sich ein ähnliches Ergebnis, das man erhält, indem man die asymptotische Entwicklung aus Abschnitt 3.1 für die Berechnung der Strukturfunktionen benutzt. Auch hierzu findet man eine Herleitung in [6], aus der sich ergibt, dass für große Zeiten gilt

$$S_{2N}(\mathbf{r}, t) \sim \left(\frac{r}{l(t)} \right)^{\zeta_{2N}} \langle \theta^{2N}(t) \rangle \quad (3.12)$$

Dabei ist $l(t)$ die integrale Längenskala, die mit der Zeit wächst wie $t^{\frac{1}{2-\xi}}$.

Das Auftauchen der Grade der Nullmoden als Exponenten der Strukturfunktionen zeigt, dass die Statistik eines passiven Skalars bestimmt wird durch statistische, geometrische Erhaltungsgrößen und die anomalen Exponenten darauf zurückzuführen sind, dass das Geschwindigkeitsfeld trotz seiner zeitlichen δ -Korrelation durch die räumlichen Korrelationen eine Art „Gedächtnis“ hat.

3.3. Die zeitliche Entwicklung der Form einer Teilchenwolke

Wie oben dargestellt, ist davon auszugehen, dass mithilfe von Nullmoden Aussagen über die zeitliche Entwicklung der Form einer Teilchenwolke gemacht werden können. In diesem Abschnitt möchten wir versuchen, dieses zu quantifizieren und folgen dabei einer Herleitung in [9].

Wir betrachten dazu Größe und Form einer Teilchenwolke wie oben definiert. Seien jetzt R_0 die Anfangsgröße und $\hat{\mathbf{R}}_0$ die Anfangsform der Teilchenwolke. Natürlicherweise ist die Form der Teilchenwolke eine stetige Funktion der Zeit. Die Idee in [9] ist nun, die Zeitabhängigkeit der Form durch eine Größenabhängigkeit zu substituieren. Dazu setzt man für $R > R_0$

$$\hat{\mathbf{R}}^*(R) = \hat{\mathbf{R}}(t_R) \quad (3.13)$$

wobei t_R den Zeitpunkt darstellt, an dem zum ersten Mal die Größe R erreicht wird. (Mit Wahrscheinlichkeit 1 passiert dieses in endlicher Zeit.) $\hat{\mathbf{R}}^*$ ist damit eine nicht notwendigerweise stetige Funktion der Größe, weil die Größe sich möglicherweise zwischenzeitlich verringert. Die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte von einer Anfangsform $\hat{\mathbf{R}}_0^*$ bei der Größe R_0

zur Endform $\hat{\underline{R}}^*$ bei der Größe R sei bezeichnet mit $\gamma\left(\hat{\underline{R}}_0^*, \hat{\underline{R}}^*, \frac{R}{R_0}\right)$. Für eine Anfangsdichte der Form bei der Größe R_0 , $\rho_{R_0}\left(\hat{\underline{R}}_0^*\right)$, ergibt sich damit die Dichte bei der Größe R zu

$$\rho_R\left(\hat{\underline{R}}^*\right) = \int \rho_{R_0}\left(\hat{\underline{R}}_0^*\right) \gamma\left(\hat{\underline{R}}_0^*, \hat{\underline{R}}^*, \frac{R}{R_0}\right) d\hat{\underline{R}}_0^* \quad (3.14)$$

In [9] wird nun angenommen, dass es einen vollständigen Satz von Eigenfunktionen $\left(\beta_1\left(\hat{\underline{R}}^*\right), \dots, \beta_n\left(\hat{\underline{R}}^*\right), \dots\right)$ zu dem Operator $\int \cdot \gamma\left(\hat{\underline{R}}_0^*, \hat{\underline{R}}^*, \frac{R}{R_0}\right) d\hat{\underline{R}}_0^*$ gibt, deren zugehörige Eigenwerte $\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\zeta_n}$ sein müssen, wie man durch wiederholte Anwendung des Operators $\int \cdot \gamma\left(\hat{\underline{R}}_0^*, \hat{\underline{R}}^*, \frac{R}{R_0}\right) d\hat{\underline{R}}_0^*$ feststellen kann. Demnach kann man γ nach den Eigenfunktionen β_m entwickeln.

$$\gamma\left(\hat{\underline{R}}_0^*, \hat{\underline{R}}^*, \frac{R}{R_0}\right) = \sum_m \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\zeta_m} \beta_m\left(\hat{\underline{R}}^*\right) \mu\left(\hat{\underline{R}}_0^*\right) \quad (3.15)$$

β_m und μ_m sind biorthogonale Familien von Funktionen. Dabei stellt sich heraus, dass die μ_m gerade die Nullmoden sind. Zur genauen Herleitung dieser Tatsache siehe [9].

Betrachten wir nun den Erwartungswert einer Funktion der Größe der Teilchenwolke, erhalten wir unter Benutzung von Gleichung (3.15)

$$\begin{aligned} \langle f\left(\hat{\underline{R}}^*(R)\right) \rangle &= \int f\left(\hat{\underline{R}}\right) \gamma\left(\hat{\underline{R}}_0^*, \hat{\underline{R}}^*, \frac{R}{R_0}\right) d\hat{\underline{R}}^* \\ &= \int f\left(\hat{\underline{R}}\right) \sum_m \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\zeta_m} \beta_m\left(\hat{\underline{R}}^*\right) \mu_m\left(\hat{\underline{R}}_0^*\right) d\hat{\underline{R}}^* \\ &= \sum_m \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\zeta_m} \mu_m\left(\hat{\underline{R}}_0^*\right) \int f\left(\hat{\underline{R}}\right) \beta_m\left(\hat{\underline{R}}^*\right) d\hat{\underline{R}}^* \end{aligned} \quad (3.16)$$

Das bedeutet, dass der Erwartungswert einer beliebigen Funktion der Form (als Funktion der Größe) relaxiert als eine Kombination von negativen Potenzen der Größe R wobei die Nullmoden die Relaxationsmoden sind (vgl. [6]). Betrachtet man den Erwartungswert einer Nullmode μ_a , erhält man

$$\langle \mu_a\left(\hat{\underline{R}}(R)\right) \rangle = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\zeta_a} \mu_a\left(\hat{\underline{R}}_0^*\right) \quad (3.17)$$

Die Formerwartungswerte der Nullmoden verschwinden also mit zunehmender Größe. Da die Größe einer Teilchenwolke mit der Zeit wächst wie $t^{\frac{1}{2-\xi}}$, verschwinden auch die Formerwartungswerte mit der Zeit. Man kann an dieser Stelle also quantitativ sehen, dass die zeitliche Konstanz der Erwartungswerte der Nullmoden erreicht wird durch das Abfallen der Formerwartungswerte, das das Größenwachstum kompensiert.

4. Lösungsverfahren für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In Kapitel 5 werden wir auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung stoßen. Im Hinblick darauf betrachten wir hier allgemeine Differentialgleichungen zweiter Ordnung und stellen das in Kapitel 5 zu verwendende Lösungsverfahren vor. Dieses ist zu finden in [15].

4.1. Allgemeine Form der Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

Wir betrachten in diesem Kapitel eine Differentialgleichung der Form

$$y''(z) + a_1(z)y'(z) + a_0(z)y(z) = 0 \quad (4.1)$$

wobei a_1 und a_0 holomorph auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sein sollen.

Zunächst werden wir untersuchen wie die Lösungen dieser Differentialgleichung in der Umgebung isolierter singulärer Punkte der Koeffizientenfunktionen a_1 und a_0 aussehen.

Dazu definieren wir:

$$\begin{aligned} \Gamma(z_0, r) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\} \\ \Gamma_-(z_0, r) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r, z \neq z_0 - x, 0 < x < r\} \\ \Gamma_+(z_0, r) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r, z \neq z_0 + x, 0 < x < r\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

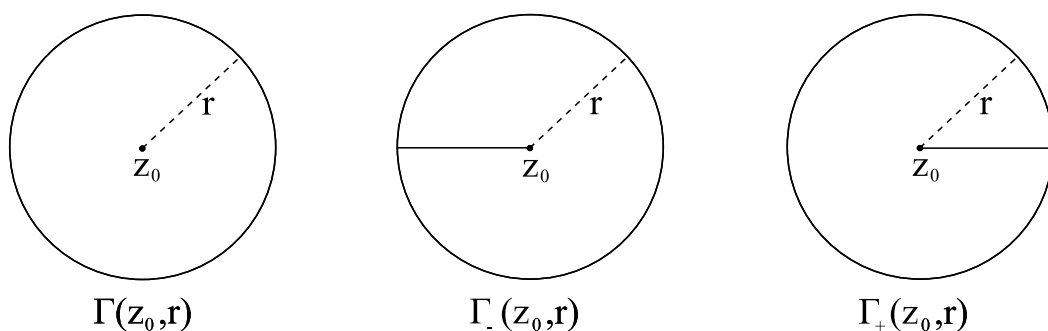


Abbildung 4.1.: Die Gebiete Γ , Γ_- und Γ_+

$\Gamma(z_0, r)$ ist also der punktierte offene Kreis um z_0 mit Radius r , bei Γ_- und Γ_+ sind die negative bzw. die positive reelle Achse herausgenommen, so dass letztere sternförmig sind. Der Einfachheit halber nehmen wir nun an, dass $z_0 = 0$ die zu untersuchende Singularität ist und

a_0 und a_1 auf $\Gamma(0, r)$ für ein r holomorph sind. Dann existiert aufgrund der Sternförmigkeit von $\Gamma_-(0, r)$ ein Fundamentalsystem $(y_i^{(1)}(z), \Gamma_-(0, r))$, $i = 1, 2$ von Lösungen der Differentialgleichung (4.1).

Wir bilden jetzt zwei weitere Fundamentalsysteme wie folgt:

Wir wählen einen Punkt α in der oberen Hälfte von $\Gamma(0, r)$ und betrachten das Fundamentalsystem $(y_i^{(2)}(z), \Gamma_+(0, r))$ mit $y_i^{(2)}(\alpha) = y_i^{(1)}(\alpha)$.

Nun wählen wir einen Punkt β in der unteren Hälfte von $\Gamma(0, r)$ und betrachten das Fundamentalsystem $(y_i^{(3)}(z), \Gamma_-(0, r))$ mit $y_i^{(3)}(\beta) = y_i^{(2)}(\beta)$.

Damit geht das Fundamentalsystem $(y_i^{(3)}(z), \Gamma_-(0, r))$ aus dem Fundamentalsystem $(y_i^{(1)}(z), \Gamma_-(0, r))$ durch analytische Fortsetzung bei einem positiven Umlauf um 0 hervor.

Also muss es eine konstante Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ geben, so dass

$$\begin{pmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

gilt. A muss außerdem nichtverschwindende Determinante haben, weil $(y_i^{(3)}(z), \Gamma_-(0, r))$ auch Fundamentalsystem ist, wie man durch Bilden der Wronskideterminante feststellen kann. Aufgrund der Existenz einer Jordannormalform einer Matrix über \mathbb{C} , muss es eine Matrix T mit $TAT^{-1} = D$ geben, wobei $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ oder $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Für die Fundamentalsysteme $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \end{pmatrix}$ gilt demnach

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Falls $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, so folgt $\tilde{w}_i = \lambda_i w_i$, w_i geht also bei einem positiven Umlauf um den Nullpunkt in $\lambda_i w_i$ über.

Nun geht die Funktion $z^{-\rho_i}$, $\rho_i = \frac{\log \lambda_i}{2\pi i}$ bei einem positiven Umlauf um den Nullpunkt in $\frac{1}{\lambda_1} z^{-\rho_i}$ über, $z^{-\rho_i} w_i(z)$ stellt also eine auf ganz $\Gamma(0, r)$ holomorphe Funktion dar, kann also in eine Laurentreihe

$$z^{-\rho_i} w_i(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

entwickelt werden.

Damit haben die Fundamentallösungen auf $\Gamma_-(0, r)$ in diesem Fall die Form

$$w_i(z) = z^{\rho_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Es muss im Allgemeinen eine Achse, also zum Beispiel wie hier der negative Teil der reellen Achse, herausgenommen werden, weil die Funktion z^ρ für $\rho \notin \mathbb{Z}$ keine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion darstellt.

Falls $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, so folgt $\tilde{w}_1 = \lambda_1 w_1$ und $\tilde{w}_2 = w_1 + \lambda_1 w_2$.

Wie oben geht $z^{-\rho_1}w_1$ bei einem positiven Umlauf um 0 in sich selbst über, des Weiteren geht nun $z^{-\rho_1}\left(w_2(z) - \frac{\log z}{2\pi i \lambda_1}w_1(z)\right)$ bei einem positiven Umlauf um 0 in sich selbst über, kann also in eine Laurentreihe um diesen Punkt entwickelt werden, so dass eine Darstellung

$$\begin{aligned} w_1(z) &= z^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \\ w_2(z) &= \frac{\log(z)}{2\pi i \lambda_1} w_1(z) + z^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n \end{aligned} \quad (4.4)$$

folgt.

Allgemein existiert also für eine Differentialgleichung der Form (4.1) mit $G = \Gamma(z_0, r)$ ein Fundamentalsystem $(y_i(z), \Gamma_-(z_0, r))$ der Form

$$\begin{aligned} y_1(z) &= (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ y_2(z) &= (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + c y_1(z) \log(z - z_0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Falls $c \neq 0$ ist, so ist $\rho_1 = \rho_2$.

4.2. Die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten

In diesem Abschnitt werden wir Gleichungen für die in (4.5) auftretenden Entwicklungskoeffizienten der Lösungen herleiten.

Dazu schreiben wir die Differentialgleichung (4.1) um in eine Gleichung der Form

$$y''(z) + \frac{Q_1(z)}{z} y'(z) + \frac{Q_2(z)}{z^2} y(z) = 0, \quad Q_i(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu,i} z^\nu \text{ holomorph auf } \Gamma(0, r) \quad (4.6)$$

Wir betrachten wieder zur Vereinfachung eine mögliche Singularität an der Stelle 0. Dann gibt es nach der Herleitung in Abschnitt 4.1 eine Lösung der Form

$$\left(y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{n+\rho}, \quad \Gamma_-(0, r) \right) \quad (4.7)$$

Setzen wir dies in (4.6) ein, ergibt sich

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left((n + \rho)(n + \rho - 1)a_n + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} ((\nu + \rho)c_{n-\nu,1} + c_{n-\nu,0}) a_\nu \right) z^{n+\rho-2} = 0 \quad (4.8)$$

Setzen wir nun noch

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \rho(\rho - 1) + \rho c_{0,1} + c_{0,0} \\ C_{n,\nu}(\rho) &= (\nu + \rho)c_{n-\nu,1} + c_{n-\nu,0} \end{aligned} \quad (4.9)$$

ergibt sich das Gleichungssystem

$$F(n + \rho)a_n + \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq n}}^{\infty} C_{n,\nu}(\rho)a_\nu = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.10)$$

Um eine Lösung der Differentialgleichung anzugeben, müssen wir also $((a_n), \rho)$ finden, die (4.10) erfüllen. Des Weiteren gibt es eine Lösung der Form

$$\left(\tilde{y}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^{n+\tilde{\rho}} + cy(z) \log(z), \Gamma_-(0, r) \right) \quad (4.11)$$

Dieses in die Differentialgleichung (4.6) eingesetzt liefert

$$F(n + \rho)b_n + cF'(n + \rho)a_n + \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq n}}^{\infty} (C_{n,\nu}(\rho)b_\nu + cC'_{n,\nu}(\rho)a_\nu) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.12)$$

Wir betrachten o.E. den Fall $c \neq 0$, ansonsten ist das zweite sich ergebende Gleichungssystem analog zum ersten mit b_n statt a_n und $\tilde{\rho}$ statt ρ .

Gesucht sind jetzt nichttriviale Lösungen ρ , a_ν , b_ν und c dieser Gleichungssysteme, für die die entsprechenden Laurentreihen auf $\Gamma(0, r)$ konvergieren.

Die Gleichungssysteme vereinfachen sich, wenn Q_1 und Q_2 auch noch für $z = 0$ holomorph sind, denn dann sind $c_{\nu,i} = 0$ für alle negativen ν , wir erhalten also

$$F(n + \rho)a_n + \sum_{\nu=-\infty}^{n-1} C_{n,\nu}(\rho)a_\nu = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$F(n + \rho)b_n + cF'(n + \rho)a_n + \sum_{\nu=-\infty}^{n-1} (C_{n,\nu}(\rho)b_\nu + cC'_{n,\nu}(\rho)a_\nu) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.13)$$

Weiterhin wird in [15] hergeleitet, dass wenn Q_i auch noch holomorph für $z = 0$ ist, die Lösungsfunktionen keine wesentlichen Singularitäten bei 0 haben können, die Laurentreihen also im absteigenden Teil abbrechen müssen. Wenn Q_1 und Q_2 auch bei $z = z_0$ noch holomorph sind (wir betrachten nun wieder eine Singularität an einer beliebigen Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$), gibt es also sogar eine Lösung der Form

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+\rho}, \quad \Gamma_-(0, r) \right) \quad (4.14)$$

(Man kann durch Anpassung des ρ die Summation o.E. bei 0 anfangen lassen.)

Eine "logarithmische" Lösung hat in diesem Fall die Form

$$\left(\sum_{n=N}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n+\rho} + c \log(z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+\rho}, \quad \Gamma_-(0, r) \right) \quad (4.15)$$

Die Gleichungssysteme (4.10) und (4.12) werden nun also zu

$$F(n + \rho)a_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} C_{n,\nu}(\rho)a_\nu = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.16)$$

und (o.E. $N \leq 0$)

$$F(n + \rho)b_n + cF'(n + \rho)a_n + \sum_{\nu=N}^{\infty} (C_{n,\nu}(\rho)b_\nu + cC'_{n,\nu}(\rho)a_\nu) = 0, \quad n \geq N \quad (4.17)$$

Falls $F(n + \rho) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, kann (4.16) iterativ gelöst werden. Dabei muss für eine nicht-triviale Lösung $a_0 \neq 0$ gelten, es muss also $F(\rho) = \rho(\rho - 1) + \rho Q_1(z_0) + Q_0(z_0) = 0$ sein. Seien ρ_1 und ρ_2 die beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung $F(\rho) = 0$ und gelte $\rho_1 \geq \rho_2$. Dann erhalten wir aus $a_0 = 1$ in jedem Fall iterativ eine Lösung

$$\left(y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+\rho_1}, \quad \Gamma_-(0, r) \right) \quad (4.18)$$

weil $F(n + \rho_1) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Die Berechnung der zweiten Fundamentallösung hängt davon ab, ob $\rho_1 = \rho_2$ und -wenn nicht- ob $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}$ ist.

Hier wird im Hinblick auf die Relevanz in Abschnitt 6.2 nur der Fall $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}$ betrachtet werden.

Sei also $\rho_1 = \rho_2 + k$, $k \in \mathbb{N}$. Für $0 < |\rho - \rho_2| < 1$ ist $F(n + \rho) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $a_0(\rho) = F(\rho + k)$ und berechnen für $|\rho - \rho_2| < 1$ eine Folge $(a_n(\rho))$, die das Gleichungssystem (4.16) erfüllt, so dass gilt

$$F(n + \rho)a_n(\rho) + \sum_{\nu=0}^{n-1} C_{n,\nu}(\rho)a_\nu(\rho) = 0, \quad n \geq 1. \quad (4.19)$$

Durch diese Wahl von $a_0(\rho)$ sind die Funktionen $a_n(\rho)$ für $|\rho - \rho_2| < 1$ holomorph und es gilt $a_0(\rho_2) = \dots = a_{k-1}(\rho_2) = 0$. Damit folgt

$$F(n + \rho_2)a_n(\rho_2) + \sum_{\nu=k}^{n-1} C_{n,\nu}(\rho_2)a_\nu(\rho_2) = 0, \quad n \geq k \quad (4.20)$$

Ersetzen wir hier n durch $n + k$ erhalten wir

$$F(n + \rho_1)a_{n+k}(\rho_2) + \sum_{\nu=0}^{n-1} C_{n,\nu}(\rho_1)a_{\nu+k}(\rho_2) = 0, \quad n \geq 0, \quad (4.21)$$

denn $n + k + \rho_2 = n + \rho_1$ und $C_{n+k,\nu+k}(\rho_2) = C_{n,\nu}(\rho_1)$.

Damit muss

$$a_{n+k}(\rho_2) = a_k(\rho_2)a_n \quad (4.22)$$

gelten, denn die Lösung des Gleichungssystems ist eindeutig bis auf einen konstanten Faktor und da $a_0 = 1$ ist, muss dieser gerade $a_k(\rho_2)$ sein.

Differentiation von (4.19) nach ρ liefert nach anschließendem Einsetzen von ρ_2

$$\begin{aligned} & F(n + \rho_2)a'_n(\rho_2) + F'(n + \rho_2)a_n(\rho_2) \\ & + \sum_{\nu=0}^{n-1} (C_{n,\nu}(\rho_2)a'_\nu(\rho_2) + C'_{n,\nu}(\rho_2)a_\nu(\rho_2)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

(Die Gleichung gilt auch noch für $n = 0$, weil $a_0(\rho_2) = 0$.)

Ersetzen wir nun wieder n durch $n + k$ und benutzen (4.22), erhalten wir

$$F(n + \rho_1)a'_{n+k}(\rho_2) + a_k(\rho_2)F'(n + \rho_1)a_n + \sum_{\nu=-k}^{n-1} (C_{n,\nu}(\rho_1)a'_{\nu+k}(\rho_2) + a_k(\rho_2)C'_{n,\nu}(\rho_1)a_\nu) = 0, \quad n \geq -k \quad (4.24)$$

Ein Vergleich mit (4.17) liefert, dass man $b_n = a'_{n+k}(\rho_2)$ wählen kann und eine zweite Lösung der Differentialgleichung (4.6) durch

$$\left(\sum_{n=-k}^{\infty} a'_{n+k}(\rho_2)(z - z_0)^{n+\rho_1} + a_k(\rho_2) \log(z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+\rho_1}, \quad \Gamma_-(0, r) \right) \quad (4.25)$$

gegeben ist.

Dass die beiden Lösungen tatsächlich ein Fundamentalsystem bilden kann man durch Berechnen der Wronskideterminante feststellen.

5. Ein eindimensionales Modell

Wir werden in diesem Kapitel ein eindimensionales Modell aus drei Teilchen, die sich auf einer Geraden in einem Geschwindigkeitsfeld bewegen und möglicherweise durcheinander durchlaufen können, betrachten.



Abbildung 5.1.: Das Modell

Die Positionen der drei Teilchen 1, 2 und 3 sind gegeben durch die Koordinaten x_1 , x_2 und x_3 . Die Teilchen bewegen sich in einem kompressiblen Geschwindigkeitsfeld mit Kompressibilitätsgrad $\varphi = \frac{\langle \nabla_i v_i \rangle}{\langle \nabla_i v_j \rangle} = 1$. (Ein eindimensionales, inkompressibles Geschwindigkeitsfeld hätte notwendigerweise die Eigenschaft $v = \text{const.}$)

Das Geschwindigkeitsfeld ist ein Gaußsches Geschwindigkeitsfeld mit Korrelationsfunktion $\langle v(x, t)v(x', t') \rangle = 2\delta(t - t')D(x - x')$, also das in Kapitel 2 besprochene Kraichnanensemble für den eindimensionalen Fall.

5.1. Die Bestimmungsgleichung für die Nullmoden

In diesem Abschnitt werden wir die in Kapitel 3 erfolgte, allgemeine Herleitung einer Gleichung für die Nullmoden auf unser Modell anwenden.

Die in Abschnitt 2.1 allgemein hergeleitete Fokker-Planck-Gleichung lautet in unserem Fall

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_3(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} D(0) \mathcal{P}_3(x_1, x_2, x_3, t) \\ &+ \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D(x_i - x_j) \mathcal{P}_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dabei sind x_1, x_2 und x_3 die Koordinaten der drei Teilchen und t die Zeit.

5.1.1. Transformation auf Relativkoordinaten

Weil wir uns nur für den Abstand der Teilchen untereinander und nicht für ihre absolute Position interessieren, transformieren wir die Gleichung in eine Gleichung in Relativkoordinaten. Dazu sei:

$$\begin{aligned}
 r_1 &:= x_1 - x_3 \\
 r_2 &:= x_2 - x_3 \\
 \tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t) &:= \mathcal{P}_3(x_1, x_2, x_3, t)
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Mithilfe der Kettenregel erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial r_1} \\
 \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial r_2} \\
 \frac{\partial}{\partial x_3} &= -\frac{\partial}{\partial r_1} - \frac{\partial}{\partial r_2}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Damit ergibt sich die Fokker-Planck-Gleichung in Relativkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t) &= \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} (D(0) - D(r_1)) + 2 \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} (D(0) - D(r_2)) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} (D(0) + D(r_1 - r_2) - D(r_1) - D(r_2)) \right\} \tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t) \\
 &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} d(r_1) + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} d(r_2) + \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} (d(r_1) + d(r_2) - d(r_1 - r_2)) \right\} \tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.1.2. Die Gleichung für Nullmoden in Relativkoordinaten

Es gilt für den Erwartungswert einer beliebigen Funktion f von den Relativkoordinaten als Funktion der Zeit:

$$\langle f(r_1, r_2) \rangle (t) = \int f(r_1, r_2) \tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t) dr_1 dr_2 \tag{5.5}$$

Nullmoden sind Funktionen, für die gilt:

$$\frac{d}{dt} \langle f(r_1, r_2) \rangle (t) = \frac{d}{dt} \int f(r_1, r_2) \tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t) dr_1 dr_2 \stackrel{!}{=} 0$$

Durch partielle Integration, bei der die Randterme verschwinden, erhalten wir analog zur allgemeinen Herleitung in Kapitel 3 aus der Fokker-Planck-Gleichung eine Gleichung für die

Nullmoden:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle f(r_1, r_2) \rangle (t) &= \int f(r_1, r_2) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t) dr_1 dr_2 \\
 &= \int f(r_1, r_2) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} d(r_1) + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} d(r_2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} (d(r_1) + d(r_2) - d(r_1 - r_2)) \right\} \tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t) dr_1 dr_2 \\
 &= \int \tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t) \left\{ d(r_1) \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + d(r_2) \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} \right. \\
 &\quad \left. + (d(r_1) + d(r_2) - d(r_1 - r_2)) \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} \right\} f(r_1, r_2) dr_1 dr_2 \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Weil $\tilde{\mathcal{P}}_3$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte - also nicht negativ - ist, müssen Funktionen, deren Erwartungswert zeitlich erhalten bleibt, die Bedingung

$$\left\{ d(r_1) \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + d(r_2) \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} + (d(r_1) + d(r_2) - d(r_1 - r_2)) \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} \right\} f(r_1, r_2) = 0 \quad (5.7)$$

erfüllen.

5.1.3. Transformation auf Größen- und Form-Koordinaten

Wie schon in Kapitel 3 erwähnt, suchen wir Nullmoden, die homogene Funktionen sind, also Funktionen, die die Bedingung $f(\lambda \mathbf{r}) = \lambda^\zeta f(\mathbf{r})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Aus diesem Grund ist es zweckmäßig, Gleichung (5.7) in eine Gleichung in den Koordinaten $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ und $\rho = \frac{r_1}{r_2}$ zu transformieren. Dann beschreibt r die Größe und ρ die Form der Teilchenwolke.

Die Abbildungen $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $(r_1, r_2) \longmapsto (r, \rho)$ bzw. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $(r_1, r_2) \longmapsto (r, \rho)$ sind jeweils bijektiv. Wir müssen also nach dieser Transformation für die obere und die untere Hälfte der Koordinatenebene getrennt Lösungen finden und diese dann aneinandersetzen.

Für die obere Halbebene ergibt diese Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{\rho r}{\sqrt{1 + \rho^2}} \\
 r_2 &= \frac{r}{\sqrt{1 + \rho^2}} \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

und für die untere Halbebene:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= -\frac{\rho r}{\sqrt{1 + \rho^2}} \\
 r_2 &= -\frac{r}{\sqrt{1 + \rho^2}} \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir (für die obere Halbebene):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r_1} &= \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{r} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{\partial}{\partial r_2} &= \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\rho\sqrt{1+\rho^2}}{r} \frac{\partial}{\partial \rho}\end{aligned}\quad (5.10)$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen erhält man also (sowohl in der unteren als auch in der oberen Halbebene)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} &= \frac{1}{r(1+\rho^2)} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\rho}{r} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial r} + \frac{1+\rho^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} &= \frac{\rho^2}{r(1+\rho^2)} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\rho(1+\rho^2)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{1+\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2\rho}{r} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial r} + \frac{\rho^2(1+\rho^2)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} &= -\frac{\rho}{r(1+\rho^2)} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1+\rho^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\rho}{1+\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\rho^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial r} - \frac{\rho(1+\rho^2)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\end{aligned}\quad (5.11)$$

In Abschnitt 2.2 haben wir für das Verhalten von $d(r)$ im Inertialbereich $d(r) \sim r^\zeta$ mit $\zeta \in [0, 2]$ gefordert. Im Grenzwert $\eta \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$ erhalten wir also auf allen Skalen $d(r) = \text{const} \cdot |r|^\zeta$. Der Betrag ist notwendig, damit die Korrelationsfunktion der Geschwindigkeiten in zwei Punkten im Abstand r , $D(r) = D(0) - \frac{1}{2}d(r)$, mit wachsendem r fällt, denn alles andere wäre physikalisch nicht sinnvoll. Wir wählen also ab jetzt $d(r) = |r|^\zeta$, vermeiden aber zunächst die Rechnung mit den Beträgen, indem wir die r_1 - r_2 -Ebene in sechs Bereiche einteilen und die Differentialgleichung zunächst nur für einen Bereich lösen.

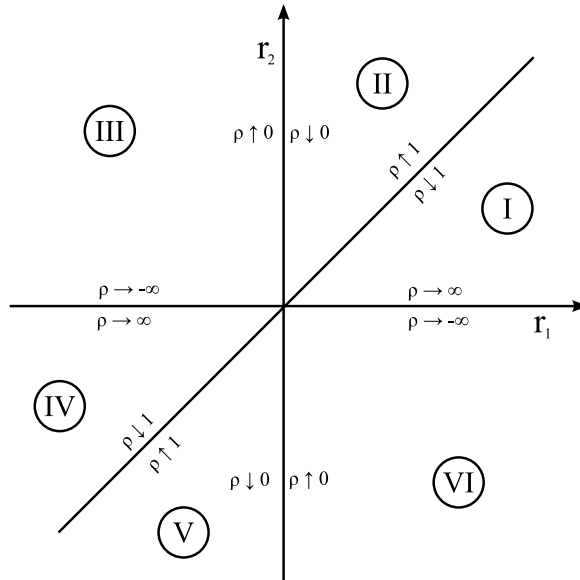


Abbildung 5.2.: Verschiedene Bereiche des Parameters ρ

Die Bereiche in Abbildung 5.2 sind durch folgende Relationen zwischen den Teilchenkoordinaten ausgezeichnet:

Bereich I: $x_1 > x_2 > x_3$

Bereich II: $x_2 > x_1 > x_3$

Bereich III: $x_2 > x_3 > x_1$

Bereich IV: $x_3 > x_2 > x_1$

Bereich V: $x_3 > x_1 > x_2$

Bereich VI: $x_1 > x_3 > x_2$

Wir betrachten zunächst ohne Einschränkung den Fall $x_1 > x_2 > x_3 \iff r_1 > r_2 > 0 \implies \rho \in]1, \infty[$ und lassen die Betragsstriche weg.

Damit erhalten wir Lösungen im Bereich I, die Lösungen in den anderen Bereichen werden sich später aus dieser durch Koordinatentransformationen ergeben. Zum Schluss werden wir die Lösungen in den verschiedenen Bereichen über Anschlussbedingungen zu einer Lösung zusammensetzen.

Zunächst erhält man als Bestimmungsgleichung für die Nullmoden im Bereich I:

$$\begin{aligned}
 & r_1^\xi \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r_1^2} + r_2^\xi \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r_2^2} + \left(r_1^\xi + r_2^\xi - (r_1 - r_2)^\xi \right) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r_1 \partial r_2} = 0 \\
 \iff & \left(\frac{\rho r}{\sqrt{1 + \rho^2}} \right)^\xi \left(\frac{1}{r(1 + \rho^2)} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2\rho}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial r} + \frac{1 + \rho^2}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \right) \\
 & + \left(\frac{r}{\sqrt{1 + \rho^2}} \right)^\xi \left(\frac{\rho^2}{r(1 + \rho^2)} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{2\rho(1 + \rho^2)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{1 + \rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{2\rho}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial r} + \frac{\rho^2(1 + \rho^2)}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \right) \\
 & + \left(\left(\frac{\rho r}{\sqrt{1 + \rho^2}} \right)^\xi + \left(\frac{r}{\sqrt{1 + \rho^2}} \right)^\xi - \left(\frac{\rho r}{\sqrt{1 + \rho^2}} - \frac{r}{\sqrt{1 + \rho^2}} \right)^\xi \right) \\
 & \left(-\frac{\rho}{r(1 + \rho^2)} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1 + \rho^2}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\rho}{1 + \rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1 - \rho^2}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial r} - \frac{\rho(1 + \rho^2)}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & \frac{\rho^\xi + \rho^2 - \rho(\rho^\xi + 1 - (\rho - 1)^\xi)}{\sqrt{1 + \rho^{2\xi+2}}} r^{\xi-1} \frac{\partial f}{\partial r} \\
 & + \frac{2\rho - \rho^\xi - 1 + (\rho - 1)^\xi}{\sqrt{1 + \rho^{2\xi-2}}} r^{\xi-2} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\
 & + \frac{\rho^{\xi+2} + 1 + \rho(\rho^\xi + 1 - (\rho - 1)^\xi)}{\sqrt{1 + \rho^{2\xi+2}}} r^\xi \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \\
 & + \frac{2\rho(\rho^\xi - 1) + (1 - \rho^2)(\rho^\xi + 1 - (\rho - 1)^\xi)}{\sqrt{1 + \rho^{2\xi}}} r^{\xi-1} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \rho} \\
 & + \frac{\rho^\xi + \rho^2 - \rho(\rho^\xi + 1 - (\rho - 1)^\xi)}{\sqrt{1 + \rho^{2\xi-2}}} r^{\xi-2} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} = 0
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

In Kapitel 3 hatten wir hergeleitet, dass homogene Funktionen f in Größen- und Formkoordinaten R und $\hat{\mathbf{R}}$ die Form $f(R, \hat{\mathbf{R}}) = R^\zeta \hat{f}_\zeta(\hat{\mathbf{R}})$ haben. Mithilfe des Ansatzes $f(r, \rho) = r^\zeta g_\zeta(\rho)$ erhalten wir außer im Fall $\xi = 2$ (vgl. Kapitel 6.1) aus (5.12) eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $g_\zeta(\rho)$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho^\xi + \rho^2 - \rho(\rho^\xi + 1 - (\rho - 1)^\xi)}{\sqrt{1 + \rho^{2\xi+2}}} r^{\xi-1} \zeta r^{\zeta-1} g_\zeta(\rho) \\
 & + \frac{2\rho - \rho^\xi - 1 + (\rho - 1)^\xi}{\sqrt{1 + \rho^{2\xi-2}}} r^{\xi-2} r^\zeta g'_\zeta(\rho) \\
 & + \frac{\rho^{\xi+2} + 1 + \rho(\rho^\xi + 1 - (\rho - 1)^\xi)}{\sqrt{1 + \rho^{2\xi+2}}} r^\xi \zeta(\zeta - 1) r^{\zeta-2} g_\zeta(\rho) \\
 & + \frac{2\rho(\rho^\xi - 1) + (1 - \rho^2)(\rho^\xi + 1 - (\rho - 1)^\xi)}{\sqrt{1 + \rho^{2\xi}}} r^{\xi-1} \zeta r^{\zeta-1} g'_\zeta(\rho) \\
 & + \frac{\rho^\xi + \rho^2 - \rho(\rho^\xi + 1 - (\rho - 1)^\xi)}{\sqrt{1 + \rho^{2\xi-2}}} r^{\xi-2} r^\zeta g''_\zeta(\rho) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left\{ \zeta \rho^2 + \zeta(\zeta - 2)\rho + \zeta(\zeta - 1) + \zeta(\zeta - 1)\rho^{\xi+2} + \zeta(\zeta - 2)\rho^{\xi+1} + \zeta\rho^\xi + \right. \\
 & \left. \zeta(2 - \zeta)\rho(\rho - 1)^\xi \right\} g_\zeta(\rho) \\
 & + (1 + \rho^2) \left\{ 2\rho^3 - (1 + \zeta)\rho^2 + 2(1 - \zeta)\rho + \zeta - 1 - (1 + \zeta)\rho^{\xi+2} + 2\zeta\rho^{\xi+1} \right. \\
 & \left. + (\zeta - 1)\rho^\xi + (1 - \zeta)(\rho - 1)^\xi + (1 + \zeta)\rho^2(\rho - 1)^\xi \right\} g'_\zeta(\rho) \\
 & (1 + \rho^2)^2 \left\{ \rho^2 - \rho - \rho^{\xi+1} + \rho^\xi + \rho(\rho - 1)^\xi \right\} g''_\zeta(\rho) = 0
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Wir erhalten also eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Formanteil der Nullmoden. Diese hat (außer im Fall $\xi = 2$) nach dem Satz von Picard-Lindelöf für alle ζ zwei linear unabhängige Fundamentallösungen.

Lösungen der Gleichung für die Nullmoden im Bereich I sind also alle Funktionen f mit

$$f(r, \rho) = r^\zeta g_\zeta(\rho) \quad (5.14)$$

wobei g_ζ eine die Differentialgleichung (5.13) erfüllende Funktion ist. Die Differentialgleichung (5.12) ist also für beliebige ζ lösbar. Allerdings gelten diese Lösungen nur im Bereich I. Um eine globale Lösung angeben zu können, müssen wir zunächst die Lösungen in den anderen Bereichen durch Koordinatentransformationen bestimmen und danach aneinandersetzen. Dadurch werden sich diskrete ζ -Werte ergeben, die wir auch aufgrund der in der Literatur aufgeführten Eigenschaften der Nullmoden erwarten. Z.B. soll der Grad der irreduziblen Nullmode mit dem kleinsten Grad dem anomalen Exponenten der Strukturfunktion entsprechen (vgl. z.B. [1], [3], [4], [6] und [11]).

Bevor wir uns aber diesen Anschlussbedingungen zuwenden, möchten wir versuchen, eine Vereinfachung der Differentialgleichung (5.13) zu finden.

5.1.4. Vereinfachung der Differentialgleichung für den Formanteil

Die Differentialgleichung (5.13) hat im Allgemeinen die Form

$$a_\zeta(\rho)g_\zeta(\rho) + (1 + \rho^2)b_\zeta(\rho)g'_\zeta(\rho) + (1 - \rho^2)^2c_\zeta(\rho)g''_\zeta(\rho) = 0 \quad (5.15)$$

Falls ξ ganzzahlig ist, sind die Funktionen a_ζ , b_ζ und c_ζ Polynome.

Denkt man über eine weitere Vereinfachung der Differentialgleichung (5.13) nach, fallen als erstes die Vorfaktoren $1 + \rho^2$ bzw. $(1 + \rho^2)^2$ auf. Diese bieten Anlass zu der Vermutung, dass auch die Lösungsfunktionen der Differentialgleichung für den Formanteil, g_ζ , einen Faktor $(1 + \rho^2)^n$ für ein $n \in \mathbb{R}$ beinhalten. Um die Differentialgleichung zu vereinfachen, machen wir also den Lösungsansatz

$$g_\zeta(\rho) = (1 + \rho^2)^n \tilde{g}_\zeta(\rho) \quad (5.16)$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung (5.13) ergibt dies

$$\begin{aligned} & \{a_\zeta(\rho) + 2n\rho b_\zeta(\rho) + (2n(2n - 1)\rho^2 + 2n)c_\zeta(\rho)\} \tilde{g}_\zeta(\rho) \\ & + (1 + \rho^2) \{b_\zeta(\rho) + 4n\rho c_\zeta(\rho)\} \tilde{g}'_\zeta(\rho) \\ & + (1 + \rho^2)^2 c_\zeta(\rho) \tilde{g}''_\zeta(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Wenn die Differentialgleichung (5.13) durch diese Maßnahme vereinfacht werden soll, muss also die Funktion $b_\zeta(\rho) + 4n\rho c_\zeta(\rho)$ durch $1 + \rho^2$ teilbar sein und die Funktion $a_\zeta(\rho) + 2n\rho b_\zeta(\rho) + (2n(2n - 1)\rho^2 + 2n)c_\zeta(\rho)$ durch $(1 + \rho^2)^2$, denn dann kürzt sich der Faktor $(1 + \rho^2)^2$ aus allen Summanden heraus. Für ganzzahlige ξ sind diese Funktionen Polynome, so dass wir durch Polynomdivision, wenn möglich, ein n bestimmen können, so dass sich der Faktor $(1 + \rho^2)^2$ aus allen Summanden herauskürzt.

5.2. Die Anschlussbedingungen

In diesem Abschnitt möchten wir uns Gedanken über die Anschlussbedingungen für $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ und $r_1 = r_2$, also für die Punkte, wo zwei Teilchen am gleichen Ort sind, machen. Ein Schlüssel dazu ist die Kenntnis über das Verhalten der Lagrangeschen Trajektorien für

kleine Teilchenabstände, das in Abschnitt 2.3 für verschiedene ξ -Werte betrachtet wurde. Da wir ein eindimensionales Modell betrachten, muss die Flüssigkeit kompressibel sein, denn ein inkompressibles, eindimensionales Geschwindigkeitsfeld ist konstant. Der Kompressibilitätsgrad $\varphi = \frac{\langle (\nabla_i v^i)^2 \rangle}{\langle (\nabla_i v^j)^2 \rangle}$ ist im Fall eines eindimensionalen Modells 1. Die in Abschnitt 2.3 definierte starke Kompressibilität liegt für $\varphi \leq \frac{d}{\xi^2}$ vor, in unserem Modell also für $\xi \geq 1$, schwache Kompressibilität liegt für $\xi < 1$ vor. Im Fall starker Kompressibilität hatten wir in Abschnitt 2.3 gesehen, dass zwei Teilchen, die anfangs am gleichen Ort sind, sich nicht mit der Zeit trennen werden, während zwei Teilchen am gleichen Ort im Fall schwacher Kompressibilität auseinanderlaufen können. Bei starker Kompressibilität erhalten wir also die Bedingung, dass die Dichte $\tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t)$ für die Anfangsbedingung $r_1^0 = r_2^0$ die Form $\tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t) = \tilde{\mathcal{P}}_2(r_1, t)\delta(r_1 - r_2)$ haben muss. Analog muss für die Anfangsbedingungen $r_1^0 = 0$ bzw. $r_2^0 = 0$ gelten $\tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t) = \tilde{\mathcal{P}}_2(r_2, t)\delta(r_1)$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}_3(r_1, r_2, t) = \tilde{\mathcal{P}}_2(r_1, t)\delta(r_2)$. Dabei ist \mathcal{P}_2 die Dichte für zwei Teilchen, erfüllt also die Fokker-Planck-Gleichung für zwei Teilchen

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} D(0) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} D(0) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} D(x_1 - x_2) \right\} \mathcal{P}_2(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_2(x_1, x_2, t) \quad (5.18)$$

Wie in Abschnitt 5.1.2 transformieren wir die Fokker-Planck-Gleichung auf Relativkoordinaten $r_1 = x_1 - x_2$.

Dann gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial r_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= -\frac{\partial}{\partial r_1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Wir erhalten also für die Fokker-Planck-Gleichung in Relativkoordinaten

$$\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} d(r_1) \tilde{\mathcal{P}}_2(r_1, t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{P}}_2(r_1, t) \quad (5.21)$$

Also gilt bei der Anfangsbedingung $r_1^0 = r_2^0$ für den Erwartungswert einer beliebigen Funktion von den Teilchenkoordinaten

$$\langle f(r_1, r_2) \rangle (t) = \int f(r_1, r_2) \tilde{\mathcal{P}}_2(r_1, t) \delta(r_1 - r_2) dr_1 dr_2 = \int f(r_1, r_1) \tilde{\mathcal{P}}_2(r_1, t) dr_1 \quad (5.22)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f(r_1, r_2) \rangle (t) &= \frac{d}{dt} \int f(r_1, r_1) \tilde{\mathcal{P}}_2(r_1, t) dr_1 \\ &= \int f(r_1, r_1) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{P}}_2(r_1, t) dr_1 = \int f(r_1, r_1) \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} d(r_1) \tilde{\mathcal{P}}_2(r_1, t) dr_1 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Analog zu Abschnitt 5.1.2 finden wir durch partielle Integration eine Gleichung für die Nullmoden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} f(r_1, r_1) &= \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} \sqrt{2}^\zeta r^\zeta g_\zeta(1) = 0 \\ \iff \zeta(\zeta - 1)g_\zeta(1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Es muss also $\zeta = 0$ oder $\zeta = 1$ oder $g_\zeta(1) = 0$ gewählt werden.

Für $r_1^0 = 0$ bzw. $r_2^0 = 0$ ergeben sich die analogen Bedingungen $g_\zeta(\infty) = 0$ bzw. $g_\zeta(0) = 0$. Wir werden also im stark kompressiblen Fall diese Bedingungen als Anschlussbedingungen benutzen, während wir im Fall schwacher Kompressibilität lediglich differenzierbare Übergänge schaffen müssen.

6. Nullmoden für verschiedene Werte von ξ

In diesem Kapitel werden wir Nullmoden für verschiedene Werte von ξ explizit berechnen, und zwar für $\xi = 2$, $\xi = 1$ und $\xi = 0$. Der Fall $\xi = 0$ entspricht dabei dem Fall der Brownschen Bewegung, während der Fall $\xi = 2$ dem Fall glatter Geschwindigkeitsfelder entspricht. Der Fall $\xi = 1$ entspricht einem nicht glatten Geschwindigkeitsfeld, allerdings mit starker Kompressibilität, so dass nach wie vor deterministische Lagrangesche Trajektorien vorliegen und wir die für diesen Fall hergeleiteten Anschlussbedingungen benutzen müssen.

6.1. Der Fall $\xi = 2$

Wir nehmen in diesem Fall für die Korrelationsfunktion $d(r) = |r|^2 = r^2$, also $\xi = 2$ an. Die sich hieraus durch Einsetzen in (5.13) ergebende Differentialgleichung ist sogar in der gesamten oberen Halbebene und nicht nur - wie die allgemeine Gleichung (5.13) - für Bereich I gültig, denn es gilt $|r|^2 = r^2$. Wir erhalten für $\xi = 2$ den Sonderfall, dass (5.13) zu

$$\zeta(\zeta - 1)\rho^2(\rho^2 - 2)g_\zeta(\rho) = 0 \quad (6.1)$$

wird, also keine Differentialgleichung zweiter Ordnung mehr ist.

Lösungen von (6.1) sind beliebige Funktionen g mit $\zeta = 0$ oder $\zeta = 1$, $\rho \in]1, \infty[$. Diese Werte von ζ erfüllen auch automatisch die in Abschnitt 5.2 hergeleiteten Bedingungen, die sich aus der Charakterisierungsmöglichkeit der Lagrangeschen Trajektorien durch ihre Anfangswerte ergeben haben.

Die Lösungen in der unteren Halbebene entsprechen den für die obere Halbebene gefundenen Lösungen, denn die Differentialgleichung für die untere Halbebene ist zu Gleichung (6.1) äquivalent. Es ergeben sich also auch hier als Nullmoden beliebige Funktionen mit $\zeta = 0$ oder $\zeta = 1$. Nullmoden für $\xi = 2$ sind daher Funktionen der Form

$$f(r, \phi) = g(\phi) \quad (6.2)$$

und

$$f(r, \phi) = rg(\phi) \quad (6.3)$$

Hierbei ist ϕ der Winkel zwischen r_1 und r_2 und $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige auf dem Einheitskreis differenzierbare Funktion.

Aus $\langle g(\phi) \rangle = \text{const.}$ für beliebige g folgt, dass die Verteilung des Winkels ϕ zu einer Zeit t , wenn man die Verteilung des Winkels zur Zeit $s < t$ kennt, gerade die Verteilung von ϕ zur Zeit s ist. Das Verhältnis der Abstände der Teilchen selber ist also ein Martingal. Um das zu sehen, berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass ϕ sich in einem Intervall I des Einheitskreises befindet:

$$\mathbb{P}(\phi \in I)(t) = \langle \chi_I(\phi) \rangle (t) = \underbrace{\langle \chi_I^n(\phi) \rangle (t)}_{= \langle \chi_I^n(\phi) \rangle (s) = \mathbb{P}(\phi \in I)(s) + \tilde{\epsilon}_n} + \epsilon_n \quad (6.4)$$

Dabei ist χ_I die charakteristische Funktion auf dem Intervall I und χ_I^n eine Folge differenzierbarer Funktionen, die von unten gegen χ_I konvergiert. Dann konvergieren ϵ_n und $\tilde{\epsilon}_n$ nach dem Satz über monotone Konvergenz gegen null.

Des Weiteren ist zum Beispiel die Funktion $f(r, \phi) = r$ eine Nullmode. Der Erwartungswert der Größe der Teilchenwolke bleibt also zeitlich erhalten. Das Gleiche gilt für den Erwartungswert des Abstandes zweier Teilchen, wie man auch durch direktes Einsetzen in Gleichung (5.7) sehen kann. Das stimmt mit einem Ergebnis aus [5] überein, dass in einem kompressiblen, glatten Geschwindigkeitsfeld der Erwartungswert von $R^{\frac{4\wp-d}{1+2\wp}}$ zeitlich erhalten bleibt. Dabei sind R der Abstand zweier Lagrangescher Teilchen, \wp der Kompressibilitätsgrad, und d die Dimension. In unserem Fall ergibt sich der Exponent also zu 1.

6.2. Der Fall $\xi = 1$

Wie setzen nun $d(r) := |r|^1$.

Dann erhalten wir aus (5.13) eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $g_\zeta(\rho)$:

$$\begin{aligned} & \{\zeta(\zeta - 1)(\rho^3 + 2\rho + 1) + \zeta\rho(\rho - 1)\} g_\zeta(\rho) \\ & + \{2(\rho - 1)(1 + \rho^2) + 2\zeta(1 - \rho)\} (1 + \rho^2)g'_\zeta(\rho) \\ & + \rho(\rho - 1)(1 + \rho^2)^2 g''_\zeta(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Wir versuchen nun, mit den in Abschnitt 5.1.4 hergeleiteten Bedingungen ein n zu finden, mit dem sich die Lösung dieser Differentialgleichung schreiben lässt als

$$g_\zeta(\rho) = (1 + \rho^2)^n \tilde{g}_\zeta(\rho) \quad (6.6)$$

Mithilfe von Polynomdivision finden wir, dass sich der Faktor $(1 + \rho^2)^2$ für $n = -\frac{\zeta}{2}$ aus allen Summanden der Differentialgleichung (6.5) herauskürzt und die neue Differentialgleichung lautet

$$\zeta(\zeta + 1)\tilde{g}_\zeta(\rho) + ((2 - 2\zeta)\rho + 2\zeta - 2)\tilde{g}'_\zeta(\rho) + (\rho^2 - \rho)\tilde{g}''_\zeta(\rho) = 0 \quad (6.7)$$

Mithilfe von Maple findet man heraus und verifiziert durch Einsetzen, dass für $\rho \neq 1$ $\tilde{g}_\zeta(\rho)$ genau dann eine Lösung von (6.7) ist, wenn $\tilde{g}_\zeta(\rho) = (\rho - 1)h_\zeta(\rho)$ gilt, wobei $h_\zeta(\rho)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\rho(1 - \rho)h''_\zeta(\rho) + (2 - 2\zeta - ((2 - \zeta) + (1 - \zeta) + 1)\rho)h'_\zeta(\rho) - (2 - \zeta)(1 - \zeta)h_\zeta(\rho) = 0 \quad (6.8)$$

ist.

Dieses ist eine hypergeometrische Differentialgleichung, hat also reguläre Singularitäten an den Stellen 0, 1 und ∞ .

Weil wir Lösungen für $\rho \in]1, \infty[$ suchen, ist es zweckmäßig, ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung an der Stelle ∞ zu suchen, denn es wird sich herausstellen, dass dieses auf $\Gamma_-(1, \infty)$ definiert ist (zur Notation vgl. Kapitel 4.1).

Das ist äquivalent zur Bestimmung eines Fundamentalsystems der auf die Variable $P = \frac{1}{\rho}$ transformierten Differentialgleichung an der Stelle 0. Als Differentialgleichung für $H(P) := h(\rho)$ erhalten wir

$$H''(P) - \frac{2 - 2\zeta + 2\zeta P}{P(1 - P)}H'(P) + \frac{(2 - \zeta)(1 - \zeta)}{P^2(1 - P)}H(P) = 0 \quad (6.9)$$

Dies ist wiederum eine Differentialgleichung mit drei Singularitäten an den Stellen 0, 1 und ∞ , die wir mithilfe der Transformation $H(P) := P^\kappa(1-P)^\lambda\eta(P)$ wie in [15] in eine hypergeometrische Differentialgleichung überführen. Wir erhalten als Differentialgleichung für η :

$$\eta''(P) + \frac{Q_1(P)}{P(1-P)}\eta'(P) + \frac{Q_2(P)}{P^2(1-P)^2}\eta(P) = 0 \quad (6.10)$$

mit

$$\begin{aligned} Q_1(P) &= 2(\kappa(1-P) - \lambda P) - 2 + 2\zeta - 2\zeta P \\ Q_2(P) &= \kappa(\kappa - 1)(1-P)^2 - 2\kappa\lambda P(1-P) + \lambda(\lambda - 1)P^2 \\ &\quad - (\kappa(1-P) - \lambda P)(2 - 2\zeta + 2\zeta P) + (2 - \zeta)(1 - \zeta)(1 - P) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Um eine hypergeometrische Differentialgleichung zu erhalten, muss also gelten $Q_2(P) = cP(1-P)$. Weil Q_2 ein Polynom zweiten Grades ist, ist dies äquivalent zu $Q_2(0) = Q_2(1) = 0$. Dieses ergibt:

$$\begin{aligned} \kappa &= 2 - \zeta \vee \kappa = 1 - \zeta \\ \lambda &= 0 \vee \lambda = 1 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Wir wählen $\kappa = 2 - \zeta$ und $\lambda = 0$.

Dann erhält man:

$$\eta''(P) + \frac{2 - ((2 - \zeta) + (1 + \zeta) + 1)P}{P(1-P)}\eta'(P) - \frac{(2 - \zeta)(1 + \zeta)}{P(1-P)}\eta(P) = 0 \quad (6.13)$$

Dies ist nun eine hypergeometrische Differentialgleichung, für die wir ein Fundamentalsystem an der Stelle 0 bestimmen müssen. Dazu wenden wir die Methoden aus Kapitel 4 an. Die Funktionen F und $C_{n,\nu}$ aus Kapitel 4 ergeben sich in unserem Fall zu:

$$\begin{aligned} F(P) &= P(P - 1) + PQ_1(0) + Q_0(0) = P(P - 1) + 2P \\ C_{n,\nu}(P) &= (\nu + P)(2 - (2 - \zeta) - (1 + \zeta) - 1) - (2 - \zeta)(1 + \zeta) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Damit erhalten wir aus dem in Kapitel 4 hergeleiteten Gleichungssystem (4.16) für die Koeffizienten einer Reihendarstellung der Lösung dieser Differentialgleichung

$$F(n + 1 + P)a_{n+1} - F(n + P)a_n + ((n + P)(-2) - (2 - \zeta)(1 + \zeta))a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (6.15)$$

Hieraus erhält man nun

$$(n + 1 + P)(n + 2 + P)a_{n+1} = (n + 2 - \zeta + P)(n + 1 + \zeta + P)a_n \quad (6.16)$$

Die Nullstellen von $F(P)$ sind 0 und -1.

Zur Anwendung des Verfahrens aus Kapitel 4 setzen wir also $P_0 = 0$ und $P_1 = -1$.

Dann folgt mit $a_0 = 0$

$$a_n = \frac{(2 - \zeta) \dots (2 - \zeta + n - 1)(1 + \zeta) \dots (1 + \zeta + n - 1)}{n!(n + 1)!}, \quad n \geq 1 \quad (6.17)$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n$ ist für $|P| < 1$ konvergent.

Beweis. Es gilt

$$|a_n| = \left| \frac{(1+\zeta)(1-\zeta+n)}{n+1} \frac{(2-\zeta)(2+\zeta)}{2^2} \dots \frac{(n-\zeta)(\zeta+n)}{n^2} \right| \quad (6.18)$$

Sei nun $N_\zeta \in \mathbb{N}$ so, dass $N_\zeta - 1 < \zeta \leq N_\zeta$.

Dann gilt

$$|a_n| \leq \underbrace{\left((1+\zeta) \frac{(2^2-\zeta^2) \dots ((N_\zeta-1)^2-\zeta^2)}{((N_\zeta-1)!)^2} \right)}_{=: J_\zeta} \underbrace{\frac{N_\zeta^2-\zeta^2}{N_\zeta^2}}_{<1} \dots \underbrace{\frac{n^2-\zeta^2}{n^2}}_{<1} < J_\zeta \quad (6.19)$$

Damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| P^n < J_\zeta \sum_{n=0}^{\infty} P^n \quad (6.20)$$

Die Reihe ist damit kleiner als ein Vielfaches der geometrischen Reihe und daher konvergent für $|P| < 1$. □

Eine Lösung der Differentialgleichung (6.9) ist also

$$\left(H_1(P) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n, \quad \Gamma_-(0,1) \right) \quad (6.21)$$

mit a_n wie oben.

Damit ist

$$\left(g_\zeta^{(1)}(\rho) = (1+\rho^2)^{-\frac{\zeta}{2}} (\rho-1) \rho^{\zeta-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{\rho^n}, \quad \mathbb{C} \setminus \left\{ \overline{\Gamma(0,1)} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq x, x < 0\} \right\} \right) \quad (6.22)$$

eine Lösung der Differentialgleichung (6.5) für die Nullmoden im Fall $\xi = 1$ wobei

$$a_n = \prod_{k=1}^n \frac{(k+1-\zeta)(k+\zeta)}{n(n+1)} \quad (6.23)$$

Um eine zweite Lösung zu finden, die diese zu einem Fundamentalsystem ergänzt, stellen wir zunächst fest, dass $P_1 - P_2 = 0 - (-1) = 1 \in \mathbb{N}$ ist.

In der Notation von Kapitel 4.2 ist also $k = 1$.

Wir setzen nun also wie in Kapitel 4.2 gefordert $a_0(P) = F(P+1) = (P+1)(P+2)$ und bestimmen eine Folge $(a_n(P))$, die das Gleichungssystem (4.19) erfüllt d.h. für die gilt

$$(n+1+P)(n+2+P)a_{n+1}(P) = (n+2-\zeta+P)(n+1+\zeta+P)a_n(P) \quad (6.24)$$

Das ergibt

$$a_0(P) = (P+1)(P+2)$$

$$a_n(P) = (2-\zeta+P)(1+\zeta+P) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+2-\zeta+P)(k+1+\zeta+P)}{(k+1+P)(k+2+P)}, \quad n \geq 1 \quad (6.25)$$

Ableitung nach P ergibt

$$\begin{aligned}
 a'_0(P) &= 2\rho + 3 \\
 a'_n(P) &= \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+2-\zeta+P} + \frac{1}{k+1+\zeta+P} - \frac{1}{k+1+P} - \frac{1}{k+2+P} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2-\zeta+P} + \frac{1}{1+\zeta+P} \right\} a_n(P), \quad n \geq 1
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Damit folgt

$$a_1(P_2) = a_1(-1) = \zeta(1 - \zeta) \tag{6.27}$$

und

$$\begin{aligned}
 a'_0(-1) &= 1 \\
 a'_{n+1}(-1) &= (1 - \zeta)\zeta \underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{\zeta}{(k+1)(k+1-\zeta)} - \frac{\zeta}{k(k+\zeta)} \right) + \frac{1}{1-\zeta} + \frac{1}{\zeta} \right\}}_{=: K_n} a_n, \quad n \geq 0
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Eine die erste Lösung der Differentialgleichung (6.9) zu einem Fundamentalsystem ergänzende Lösung ist also (vgl.(4.25))

$$\begin{aligned}
 \left(H_2(P) &= \sum_{n=-1}^{\infty} a'_{n+1}(-1)P^n + a_1(-1) \log(P) \sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n \right. \\
 &= \left. \frac{1}{P} + \zeta(1 - \zeta) \sum_{n=0}^{\infty} K_n a_n P^n + \zeta(1 - \zeta) \log(P) \sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n, \Gamma_-(0, 1) \right)
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Die auftauchenden Reihen konvergieren beide für $|P| < 1$.

Beweis. Für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n$ wurde das bereits oben gezeigt. Wir betrachten hier also lediglich die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} K_n a_n P^n$.

Es ist für $\zeta \notin \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
 K_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\zeta}{(k+1)(k+1-\zeta)} - \frac{\zeta}{k(k+\zeta)} \right) + \frac{1}{1-\zeta} + \frac{1}{\zeta} \\
 &= \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\zeta \frac{(\zeta-1)(2k-1)}{k(k+1)(k+\zeta)(k+1-\zeta)} \right)}_{< 2\zeta(\zeta-1)\frac{1}{k^3} \text{ ab einem } k_\zeta} + \frac{1}{1-\zeta} + \frac{1}{\zeta} \\
 &< \frac{1}{1-\zeta} + \frac{1}{\zeta} + \sum_{k=0}^{k_\zeta} \left(\zeta \frac{(\zeta-1)(2k-1)}{k(k+1)(k+\zeta)(k+1-\zeta)} \right) + 2\zeta(\zeta-1) \sum_{k=k_\zeta}^{\infty} \frac{1}{k^3} =: L_\zeta < \infty
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Für $\zeta \in \mathbb{N}_0$ ist K_n zunächst nicht definiert, jedoch $K_n a_n$. Man erhält aber wie in der Rechnung oben $K_n a_n < L_\zeta a_n$.

Also gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n a_n P^n < L_\zeta \sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n < L_\zeta J_\zeta \sum_{n=0}^{\infty} P^n \quad (6.31)$$

Die Reihe ist damit kleiner als ein Vielfaches der geometrischen Reihe, konvergiert also für $|P| < 1$. □

Also ist $\left(g_\zeta^{(2)}(\rho), \mathbb{C} \setminus \left\{ \overline{\Gamma_-(0,1)} \cup \{z \in \mathbb{C} | z = x, x < 0\} \right\} \right)$ mit

$$g_\zeta^{(2)}(\rho) = (1 + \rho^2)^{-\frac{\zeta}{2}} (\rho - 1) \rho^{\zeta-2} \left\{ \rho + \zeta(1 - \zeta) \sum_{n=0}^{\infty} K_n a_n \frac{1}{\rho^n} - \zeta(1 - \zeta) \log(\rho) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{\rho^n} \right\} \quad (6.32)$$

eine weitere, $\left(g_\zeta^{(1)}(\rho), \mathbb{C} \setminus \left\{ \overline{\Gamma_-(0,1)} \cup \{z \in \mathbb{C} | z = x, x < 0\} \right\} \right)$ zu einem Fundamentalsystem ergänzende Lösung.

Die Fundamentallösungen sind also beide auf dem uns interessierenden Intervall $]1, \infty[$ definiert.

Wir bestimmen nun die Lösungen in den anderen Bereichen durch Koordinatentransformationen. Der Übergang von Bereich I nach Bereich II bedeutet eine Vertauschung von x_1 und x_2 , wir erhalten also Lösungen im Bereich II durch die Transformation $\rho \rightarrow \frac{1}{\rho}$. Bereich III geht aus Bereich I hervor durch $x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_3, x_3 \rightarrow x_1$, die Lösung im Bereich III entsteht also aus der im Bereich I durch die Transformation $\rho \rightarrow \frac{\rho-1}{\rho}, r \rightarrow r \sqrt{\frac{2\rho^2-2\rho+1}{1+\rho^2}}$. Die Lösungen im Bereich IV entsprechen denen im Bereich I, die im Bereich V denen im Bereich II und die im Bereich VI denen im Bereich III, denn die linke Seite von Gleichung (5.7) ist hier für $\xi = 1$ bis auf das Vorzeichen identisch.

Um die Nullmoden zu bestimmen, müssen wir eine Fortsetzung der Lösung in die anderen Bereiche finden.

Da $\xi = 1 \geq \varphi$ ist, liegt starke Kompressibilität vor. Die diskreten Werte für ζ , bei denen sich möglicherweise eine Fortsetzung in die anderen Bereiche finden lässt, sind also $\zeta = 0$, $\zeta = 1$ und diejenigen ζ , für die es Konstanten c_1 und c_2 gibt, so dass für $g_\zeta = c_1 g_\zeta^{(1)} + c_2 g_\zeta^{(2)}$ $g_\zeta(1) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} g_\zeta(\rho) = 0$ gilt.

Für $\zeta = 0$ ergibt sich als allgemeine Lösung im Bereich I

$$f_0^I(r, \rho) = A_I f_0^{(1),I}(r, \rho) + B_I f_0^{(2),I}(r, \rho) \quad (6.33)$$

mit den beiden Fundamentallösungen (die auch für den Bereich IV gelten)

$$f_0^{(1),I}(r, \rho) = g_0^{(1),I}(\rho) = \frac{\rho-1}{\rho^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} = \frac{1}{\rho} = \frac{r_2}{r_1}$$

und

$$f_0^{(2),I}(r, \rho) = g_0^{(2),I}(\rho) = \frac{\rho-1}{\rho} = \frac{r_1-r_2}{r_1} \quad (6.34)$$

Die Fundamentallösungen in den anderen Bereichen erhält man mit der oben angegebenen Koordinatentransformation. Dabei ergibt sich in den Bereichen II und V

$$f_0^{(1),II}(r, \rho) = f_0^{(1),V}(r, \rho) = g_0^{(1),II}(\rho) = g_0^{(1),I}\left(r, \frac{1}{\rho}\right) = \rho = \frac{r_1}{r_2}$$

und

$$f_0^{(2),II}(r, \rho) = f_0^{(2),V} = g_0^{(2),II}(\rho) = g_0^{(2),I}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 1 - \rho = \frac{r_2 - r_1}{r_2} \quad (6.35)$$

und in den Bereichen III und VI

$$f_0^{(1),III}(r, \rho) = f_0^{(1),VI}(r, \rho) = g_0^{(1),III}(\rho) = g_0^{(1),I}\left(r, \frac{\rho - 1}{\rho}\right) = \frac{\rho}{\rho - 1} = \frac{r_1}{r_1 - r_2}$$

und

$$f_0^{(2),III}(r, \rho) = f_0^{(2),VI} = g_0^{(2),III}(\rho) = g_0^{(2),I}\left(\frac{\rho - 1}{\rho}\right) = \frac{1}{1 - \rho} = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \quad (6.36)$$

Um eine in der ganzen r_1 - r_2 -Ebene definierte Lösung anzugeben, müssen wir die Koeffizienten so bestimmen, dass die Lösungen in den einzelnen Bereichen differenzierbar ineinander übergehen.

Dabei ergibt sich die konstante Nullmode $f_0^{(1)}(r_1, r_2) = 1$ deren Erwartungswert trivialerweise zeitlich erhalten ist.

Für $\zeta = 1$ erhält man die Fundamentallösungen

$$f_1^{(1),I}(r, \rho) = r g_1^{(1),I}(\rho) = r (1 + \rho^2)^{-\frac{\zeta}{2}} \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} = r (1 + \rho^2)^{-\frac{\zeta}{2}} = r_2$$

$$f_1^{(2),I}(r, \rho) = r g_1^{(2),I}(\rho) = r (1 + \rho^2)^{-\frac{\zeta}{2}} (\rho - 1) = r_1 - r_2 \quad (6.37)$$

Eine Transformation dieser Lösungen auf die anderen Bereiche ergibt die Lösungen in den anderen Bereichen:

Bereich II und V: r_1 und $r_1 - r_2$

Bereich III und VI: r_1 und r_2

Durch Linearkombination erhält man also immer r_1 und r_2 als Fundamentallösungen.

Folglich bleibt der Erwartungswert des Abstandes zweier Teilchen zeitlich erhalten.

Wir sehen hier, dass wir es mit einem kompressiblen Geschwindigkeitsfeld zu tun haben, so dass der Erwartungswert des Abstandes zweier Teilchen nicht wie im Richardsongesetz mit der Zeit wächst (vgl. Kapitel 3). Stattdessen wird die Tendenz der Trajektorien auseinanderzulaufen durch die Eigenschaft des Feldes ausgeglichen, Bereiche mit größerer Dichte zu bilden, die die Teilchen an sich binden.

Die Menge aller Nullmoden sind nun alle Linearkombinationen aus r_1 und r_2 im zweidimensionalen, von r_1 und r_2 aufgespannten Vektorraum, also alle durch den Nullpunkt gehenden

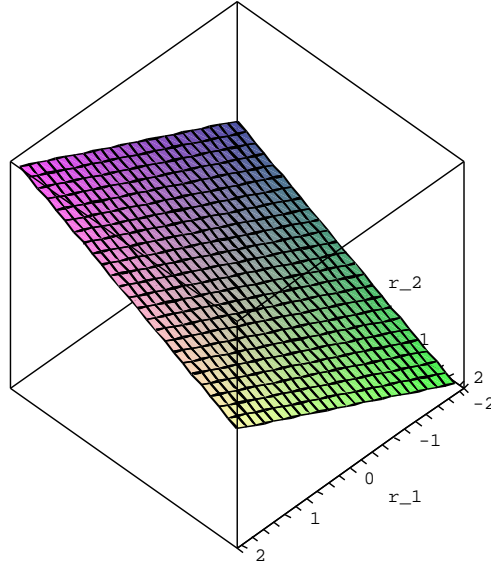


Abbildung 6.1.: Die Nullmode f_1^I

Ebenen.

Eine Veranschaulichung dieser Nullmoden gibt Abbildung 6.1.

Die Nullmoden für $\zeta = 1$ sind allerdings reduzibel, denn sie hängen nur von einer der beiden Relativkoordinaten r_1 und r_2 ab. Wir können deshalb aus dieser Nullmode keine Informationen über die zeitliche Evolution einer 3-Teilchenwolke ziehen, die über die Information über das Verhalten zweier Teilchen hinausgeht.

Wir gehen nun zur Bestimmung der irreduziblen Nullmoden über. Diese ergeben sich bei Verwendung der Bedingung $g_\zeta(1) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} g_\zeta(\rho) = 0$. Wir suchen also Werte für ζ und Konstanten c_1 und c_2 , so dass $c_1 g_\zeta^{(1)}(1) + c_2 g_\zeta^{(2)}(1) = g_\zeta(1) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} g_\zeta(\rho) = 0$. Dazu betrachten wir zunächst die Grenzwerte der beiden Fundamentallösungen bei 1 und bei ∞ .

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\rho \searrow 1} g_\zeta^{(1)}(\rho) \\
 &= \lim_{\rho \searrow 1} (1 + \rho^2)^{-\frac{\zeta}{2}} (\rho - 1) \rho^{\zeta-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{\rho^n} \\
 &= 2^{-\frac{\zeta}{2}} \lim_{\rho \searrow 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{\rho^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{\rho^n} \right) = 2^{-\frac{\zeta}{2}} \lim_{\rho \searrow 1} \left(a_0 \rho + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \frac{1}{\rho^n} \right) \\
 &= 2^{-\frac{\zeta}{2}} \left(a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \right) = 2^{-\frac{\zeta}{2}} \lim_{K \rightarrow \infty} \left(a_0 + \sum_{n=0}^K (a_{n+1} - a_n) \right) \\
 &= 2^{-\frac{\zeta}{2}} \lim_{K \rightarrow \infty} a_{K+1} \tag{6.38}
 \end{aligned}$$

Alle obigen Schritte sind erlaubt, weil eine Reihe innerhalb ihres Konvergenzradius absolut konvergiert und diese Reihe konvergiert für $|\frac{1}{\rho}| < 1$ absolut.

In Abbildung 6.2 ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ in Abhängigkeit von ζ aufgezeichnet, um das Verhalten der ersten Fundamentallösung bei $\rho = 1$ zu sehen: Die erste Fundamentallösung oszilliert also bei $\rho = 1$ in Abhängigkeit von ζ und ist null bei den natürlichen Zahlen.

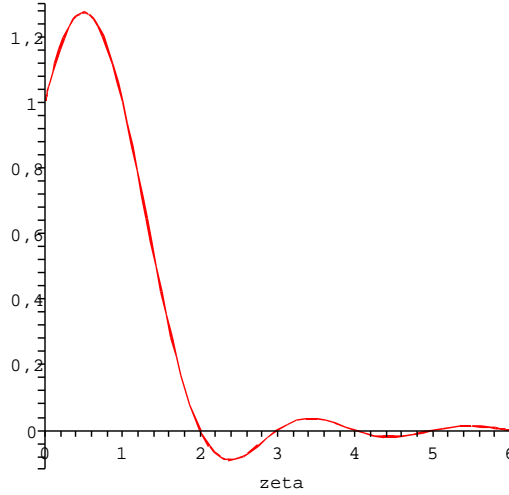


Abbildung 6.2.: Grenzwert von $g_\zeta^{(1)}$ bei 1 in Abhängigkeit von ζ

Bei $\rho \rightarrow \infty$ ergibt sich ein etwas anderes Bild:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} g_\zeta(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} (1 + \rho^2)^{-\frac{\zeta}{2}} (\rho - 1) \rho^{\zeta-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{\rho^n} = 0 \quad (6.39)$$

Die erste Fundamentallösung konvergiert also für $\rho \rightarrow \infty$ unabhängig von ζ gegen null. Nun

untersuchen wir $g_\zeta^{(2)}$.

Die Grenzwertbetrachtung für $\rho \rightarrow \infty$ liefert bei der zweiten Fundamentallösung

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow \infty} g_\zeta^{(2)}(\rho) \\ &= \lim_{\rho \searrow 1} (1 + \rho^2)^{-\frac{\zeta}{2}} (\rho - 1) \rho^{\zeta-2} \left(\rho + \zeta(1 - \zeta) \sum_{n=0}^{\infty} K_n a_n \frac{1}{\rho^n} - \zeta(1 - \zeta) \log(\rho) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{\rho^n} \right) \\ &= 2^{-\frac{\zeta}{2}} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Die zweite Fundamentallösung konvergiert also für $\rho \rightarrow \infty$ unabhängig von ζ gegen einen Wert $\neq 0$.

Um die Nullmoden zu bestimmen, müssen wir eine Linearkombination der beiden Fundamentallösungen $g_\zeta = c_1 g_\zeta^{(1)} + c_2 g_\zeta^{(2)}$ finden, so dass $g_\zeta(1) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} g_\zeta(\rho) = 0$. Da $\lim_{\rho \rightarrow \infty} g_\zeta(\rho) = 2^{-\frac{\zeta}{2}} c_2$ gilt, muss $c_2 = 0$ sein. Da $\lim_{\rho \rightarrow \infty} g_\zeta^{(2)}(\rho) \neq 0 \forall \zeta$ und $\lim_{\rho \rightarrow \infty} g_\zeta^{(1)}(\rho) = 0 \forall \zeta$, muss für $\zeta \neq 0, 1$ $c_2 = 0$ gelten.

Es ergibt sich folglich für $\zeta \neq 1$ $g_\zeta(\rho) = g_\zeta^{(1)}(\rho)$ und wir müssen Werte ζ finden, so dass $g_\zeta^{(1)}(1) = 0$.

Dieses ist nach obiger Abbildung der Fall für $\zeta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Damit haben wir als irreduzible Nullmoden $f(r, \rho) = r^\zeta g_\zeta(\rho)$ mit g_ζ wie folgt:

$$\begin{aligned}
 g_\zeta^I(\rho) &= -g_\zeta^{IV}(\rho) = (1 + \rho^2)^{-\frac{\zeta}{2}} (\rho - 1) \rho^{\zeta-2} \sum_{n=0}^{\zeta-1} a_n \frac{1}{\rho^n} \\
 g_\zeta^{II}(\rho) &= -g_\zeta^V(\rho) = -g_\zeta^I\left(\frac{1}{\rho}\right) = \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right)^{-\frac{\zeta}{2}} (\rho - 1) \rho^{1-\zeta} \sum_{n=0}^{\zeta-1} a_n \rho^n \\
 g_\zeta^{III}(\rho) &= -g_\zeta^{VI}(\rho) = \sqrt{\frac{2\rho^2 - 2\rho + 1}{1 + \rho^2}}^\zeta g_\zeta^I\left(\frac{\rho - 1}{\rho}\right) \\
 &= -\frac{\rho^\zeta}{\sqrt{1 + \rho^{2\zeta}}} (\rho - 1)^{\zeta-2} \rho^{1-\zeta} \sum_{n=0}^{\zeta-1} a_n \frac{\rho^n}{(\rho - 1)^n} \\
 \text{mit } \zeta &\in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad a_n = \prod_{k=1}^n \frac{(n + 1 - \zeta)(n + \zeta)}{n(n + 1)} \tag{6.41}
 \end{aligned}$$

Dabei sind die Vorzeichen so gewählt, dass g_ζ überall differenzierbar ist.

Die vier irreduziblen Nullmoden mit den niedrigsten Graden sind demnach

$$f_2(r_1, r_2) = \begin{cases} r_2(r_1 - r_2) & \text{falls } r_1 \geq r_2 \geq 0 \\ r_1(r_1 - r_2) & \text{falls } r_2 \geq r_1 \geq 0 \\ -r_1 r_2 & \text{falls } r_2 \geq 0 \geq r_1 \\ r_2(r_2 - r_1) & \text{falls } r_1 \leq r_2 \leq 0 \\ r_1(r_2 - r_1) & \text{falls } r_2 \leq r_1 \leq 0 \\ r_1 r_2 & \text{falls } r_1 \geq 0 \geq r_2 \end{cases} \tag{6.42}$$

$$f_3(r_1, r_2) = \begin{cases} r_2(r_1 - r_2)(r_1 - 2r_2) & \text{falls } r_1 \geq r_2 \geq 0 \\ r_1(r_1 - r_2)(r_2 - 2r_1) & \text{falls } r_2 \geq r_1 \geq 0 \\ -r_1 r_2(r_1 + r_2) & \text{falls } r_2 \geq 0 \geq r_1 \\ r_2(r_2 - r_1)(r_1 - 2r_2) & \text{falls } r_1 \leq r_2 \leq 0 \\ r_1(r_2 - r_1)(r_2 - 2r_1) & \text{falls } r_2 \leq r_1 \leq 0 \\ r_1 r_2(r_1 + r_2) & \text{falls } r_1 \geq 0 \geq r_2 \end{cases} \tag{6.43}$$

$$f_4(r_1, r_2) = \begin{cases} r_2(r_1 - r_2)(r_1^2 - 5r_1 r_2 + 5r_2^2) & \text{falls } r_1 \geq r_2 \geq 0 \\ r_1(r_1 - r_2)(r_2^2 - 5r_1 r_2 + 5r_1^2) & \text{falls } r_2 \geq r_1 \geq 0 \\ -r_1 r_2(r_1^2 + 3r_1 r_2 + r_2^2) & \text{falls } r_2 \geq 0 \geq r_1 \\ r_2(r_2 - r_1)(r_1^2 - 5r_1 r_2 + 5r_2^2) & \text{falls } r_1 \leq r_2 \leq 0 \\ r_1(r_2 - r_1)(r_2^2 - 5r_1 r_2 + 5r_1^2) & \text{falls } r_2 \leq r_1 \leq 0 \\ r_1 r_2(r_1^2 + 3r_1 r_2 + r_2^2) & \text{falls } r_1 \geq 0 \geq r_2 \end{cases} \tag{6.44}$$

und

$$f_5(r_1, r_2) = \begin{cases} r_2(r_1 - r_2)(r_1 - 2r_2)(r_1^2 - 7r_1r_2 + 7r_2^2) & \text{falls } r_1 \geq r_2 \geq 0 \\ r_1(r_1 - r_2)(r_2 - 2r_1)(r_2^2 - 7r_1r_2 + 7r_1^2) & \text{falls } r_2 \geq r_1 \geq 0 \\ -r_1r_2(r_1 + r_2)(r_1^2 + 5r_1r_2 + r_2^2) & \text{falls } r_2 \geq 0 \geq r_1 \\ r_2(r_2 - r_1)(r_1 - 2r_2)(r_1^2 - 7r_1r_2 + 7r_2^2) & \text{falls } r_1 \leq r_2 \leq 0 \\ r_1(r_2 - r_1)(r_2 - 2r_1)(r_2^2 - 7r_1r_2 + 7r_1^2) & \text{falls } r_2 \leq r_1 \leq 0 \\ r_1r_2(r_1 + r_2)(r_1^2 + 5r_1r_2 + r_2^2) & \text{falls } r_1 \geq 0 \geq r_2 \end{cases} \quad (6.45)$$

Diese Nullmoden werden illustriert durch die Abbildungen 6.3, 6.4, 6.5 und 6.6, in denen der durch g_ζ gegebene Formanteil als Funktion des zu r_1 und r_2 gehörigen Winkels ϕ aufgezeichnet ist, d.h.

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{\rho}\right) & \text{falls } r_1, r_2 \geq 0 \\ 2\pi - \arctan\left(\frac{1}{\rho}\right) & \text{falls } r_1, r_2 \leq 0 \\ \arctan\left(\frac{1}{\rho}\right) + \pi & \text{falls } r_1 \leq 0, r_2 \geq 0 \\ \pi - \arctan\left(\frac{1}{\rho}\right) & \text{falls } r_1 \geq 0, r_2 \leq 0 \end{cases} \quad (6.46)$$

In Abbildung 6.6 ist ϕ allerdings auf das Intervall $[0, \pi]$ beschränkt, damit der Verlauf des Graphen besser zu erkennen ist.

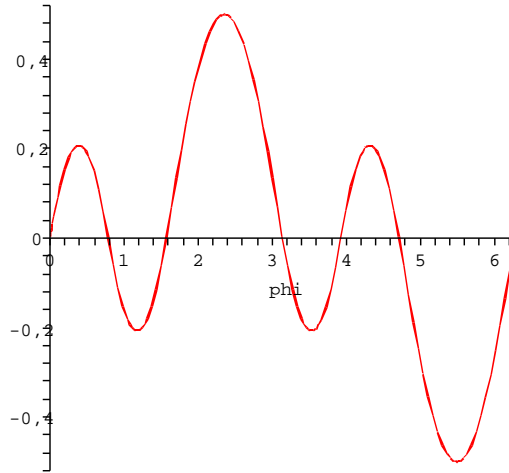


Abbildung 6.3.: Winkelanteil der Nullmode für $\xi = 1$ und $\zeta = 2$

Als Nullmoden erhält man also jeweils Polynome in r_1 und r_2 , deren Grad gerade ζ entspricht. Die Nullmoden sind, wie durch die Anschlussbedingungen festgelegt, null, wenn zwei Teilchen am gleichen Ort sind, also für $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ und $r_1 = r_2$. Bei der Nullmode mit dem geringsten Grad (Grad 2) sind dies schon die einzigen Nullstellen, die Nullmode vom nächst höheren Grad (Grad 3) hat in jedem der sechs Bereiche eine zusätzliche Nullstelle und zwar immer dann, wenn das mittlere Teilchen von beiden äußeren Teilchen den gleichen

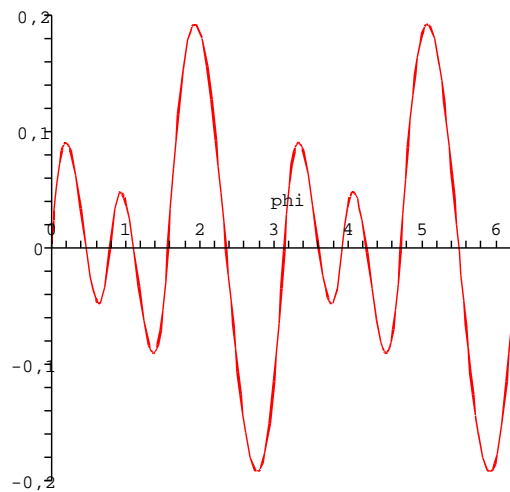


Abbildung 6.4.: Winkelanteil der Nullmode für $\xi = 1$ und $\zeta = 3$

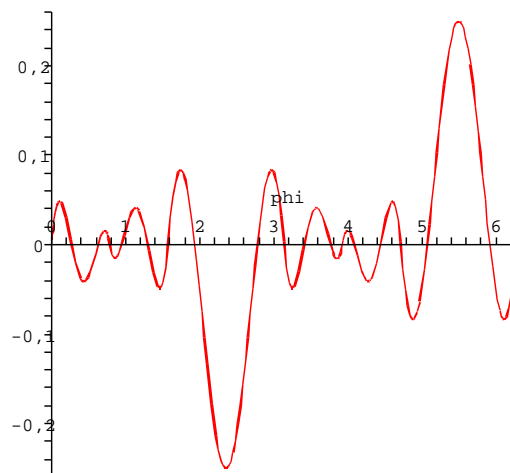


Abbildung 6.5.: Winkelanteil der Nullmode für $\xi = 1$ und $\zeta = 4$

Abstand hat. Die Nullmode vom Grad 4 hat in jedem der sechs Bereiche zwei zusätzliche Nullstellen, nämlich an den Stellen, an denen der Abstand der beiden Teilchen, die am weitesten voneinander entfernt sind, $\frac{5+\sqrt{5}}{2} \approx 3,618$ -mal so groß ist wie der Abstand der beiden Teilchen, die sich am nächsten sind. Die Nullmode vom Grad 5 hat in jedem Bereich drei weitere Nullstellen, dabei ist eine wie bei f_3 dort, wo alle drei Teilchen den gleichen Abstand haben. Die anderen beiden sind dort, wo der Abstand der beiden Teilchen, die am weitesten

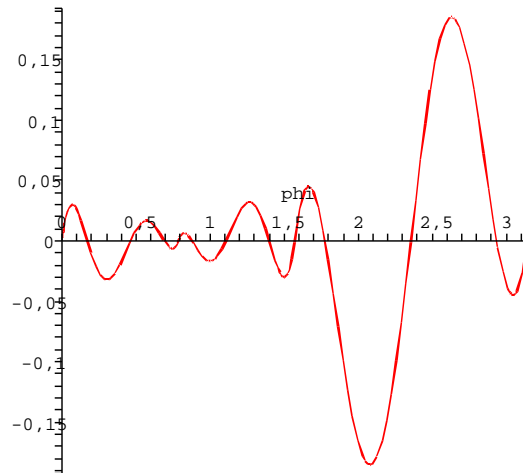


Abbildung 6.6.: Winkelanteil der Nullmode für $\xi = 1$ und $\zeta = 5$ im Intervall $[0, \pi]$

voneinander entfernt sind, $\frac{7+\sqrt{7}}{2} \approx 4,823$ -mal so groß ist wie der Abstand der beiden Teilchen, die sich am nächsten sind. Die Abbildungen 6.7 und 6.8 zeigen die relativen Positionen der Teilchen, für die die ersten fünf Nullmoden Nullstellen haben. Dabei markieren die beiden äußeren Punkte die Positionen der beiden äußeren Teilchen und die mittleren Punkte markieren die Positionen des mittleren Teilchens, bei denen die entsprechende Nullmode Nullstellen hat. Da Nullmoden Martingale sind, können wir zum Beispiel folgern, dass die Form einer Anfangskonfiguration der Teilchen, bei der die Teilchen so angeordnet sind, dass eine Nullmode Nullstellen hat, im Mittel erhalten bleiben muss. Denn der Erwartungswert der Nullmode zu einem späteren Zeitpunkt ist dann auch null.

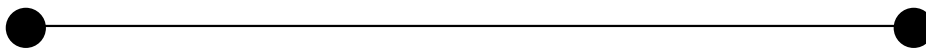


Abbildung 6.7.: Die relativen Teilchenpositionen, bei denen die Nullmode zweiten Grades Nullstellen hat

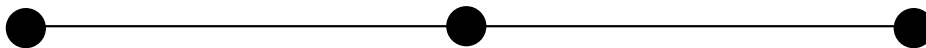


Abbildung 6.8.: Die relativen Teilchenpositionen, bei denen die Nullmode dritten Grades Nullstellen hat

Aus Abschnitt 3.3 wissen wir, dass Erwartungswerte von Nullmoden als Funktion der Form (und diese wiederum als Funktion der Größe) mit wachsender Größe abfallen (vgl. 3.17). Genauer gilt

$$\langle \mu_a(\hat{\mathbf{R}}(R)) \rangle = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\zeta_a} \mu_a(\hat{\mathbf{R}}_0^*) \quad (6.47)$$

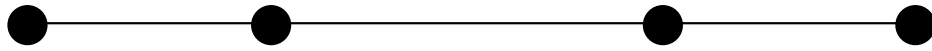


Abbildung 6.9.: Die relativen Teilchenpositionen, bei denen die Nullmode vierten Grades Nullstellen hat



Abbildung 6.10.: Die relativen Teilchenpositionen, bei denen die Nullmode fünften Grades Nullstellen hat

wobei μ_a eine Nullmode vom Grad ζ_a darstellt.

Wenden wir das auf unser Modell an, können wir schließen, dass für große $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, also für große Teilchenabstände, die statistische Verteilung der Teilchenpositionen so sein muss, dass der Erwartungswert der Nullmoden klein wird. Da die Nullmode vom Grad 2 nur an den Stellen Nullstellen hat, an denen zwei Teilchen die gleiche Position haben, müssten sich zwei Teilchen relativ zur Gesamtgröße der Wolke immer mehr annähern, je größer die absolute Größe der Teilchenwolke wird. Die Teilchen können nämlich nach Abschnitt 2.3 nicht durcheinander durchlaufen, denn dann hätten sie zwischenzeitlich die gleiche Position. Zwei Teilchen, die die gleiche Position haben, können sich aber nicht mehr trennen. Bei einer festen Anfangskonfiguration der drei Teilchen hat die Nullmode zweiten Grades also ein festes Vorzeichen. Das betragsmäßige Abfallen des Formerwartungswertes mit wachsendem r kann also nicht dadurch erreicht werden, dass sich die Teilchenkonfiguration so verändert, dass sich das Vorzeichen der Nullmode ändert, sondern nur durch eine immer wahrscheinlicher werdende Annäherung an eine Form, bei der sich zwei Teilchen im Verhältnis zur Gesamtgröße der Konstellation relativ nahe sind.

Aus Gleichung (3.17) können wir des Weiteren entnehmen, dass die Formerwartungswerte der höheren Nullmoden aufgrund ihres höheren ζ -Wertes mit wachsendem r schneller abfallen. Hierfür müssen die zusätzlichen Nullstellen verantwortlich sein. Durch diese zusätzlichen Nullstellen wechseln die höheren Nullmoden das Vorzeichen auch an Stellen, an denen nicht zwei Teilchen die gleiche Position haben. Aus diesem Grund hat eine Nullmode bei einer festen Anfangskonfiguration kein festes Vorzeichen und das betragsmäßige Abfallen des Erwartungswertes könnte auch dadurch erreicht bzw. verstärkt werden, dass sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit die Teilchenkonfiguration so ändert, dass die Nullmode ihr Vorzeichen wechselt oder die Teilchenkonfiguration sich auf diese Nullstelle zubewegt. Weil die Formerwartungswerte der Nullmoden umso schneller mit wachsendem r abfallen, je höher das ζ ist, muss sich also die Form einer Teilchenkonfiguration mit wachsendem r mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auch den Formen nähern, bei denen nur die höheren Nullmoden null sind bzw. müssen gewisse Wahrscheinlichkeiten sowohl für Formen auf der einen wie auf der anderen Seite dieser Nullstellen bestehen. Z.B. hat die Nullmode vom Grad 3 eine zusätzliche Nullstelle an der Stelle, wo das mittlere Teilchen von den beiden äußeren den gleichen Abstand hat. Das gegenüber der Nullmode vom Grad 2 schnellere Abfallen des Formerwartungswertes dieser Nullmode mit wachsendem r kann also durch zwei Mechanismen erreicht werden: Zum einen wird mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eine Teilchenkonfiguration verwirklicht, bei der das mittlere Teilchen von den beiden Äußeren relativ zur Gesamtgröße der Teilchenwolke ungefähr gleichen Abstand hat (an dieser Stel-

le hat außerdem die Nullmode zweiten Grades ihr Maximum), zum anderen werden mit gewissen Wahrscheinlichkeiten Teilchenkonfigurationen verwirklicht, bei denen das mittlere Teilchen näher am linken äußeren Teilchen ist und mit gewissen Wahrscheinlichkeiten werden Teilchenkonfigurationen verwirklicht, bei denen das mittlere Teilchen näher am rechten äußeren Teilchen ist. Für diese beiden Zustände hat nämlich die Nullmode dritten Grades unterschiedliche Vorzeichen während die Nullmode zweiten Grades gleiche Vorzeichen hat. Ähnlich könnte man das noch schnellere Abfallen der noch höheren Nullmoden mit weiteren zusätzlichen Nullstellen erklären.

6.3. Der Fall $\xi = 0$

In diesem Fall haben wir als Korrelationsfunktion der Geschwindigkeiten $D(r) = D_0$. Der Operator \mathcal{M}_3 , der sich vor der Transformation auf Relativkoordinaten ergibt, ist also, wie in Abschnitt 2.2 schon erwähnt, der Laplaceoperator. Dieser Fall wird auch in [6] behandelt. Als Nullmoden ergeben sich Funktionen der Form $R^j \Phi_j(\hat{\mathbf{R}})$, wobei Φ_j Eigenfunktionen des Formanteils des Laplaceoperators $\hat{\Delta}$ darstellen, dessen Eigenwerte $-j(j+d-2)$ mit $j = 0, 1, \dots$ sind (vgl. [6]). Der Laplaceoperator hat in Größen- und Formkoordinaten nämlich die Form

$$\Delta = R^{1-d} \frac{\partial}{\partial R} R^{d-1} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \hat{\Delta} \quad (6.48)$$

In unserem Fall mit drei Teilchen ergibt sich also der dreidimensionale Laplaceoperator und die Nullmoden sind $R^j \Phi_j(\hat{\mathbf{R}})$, wobei $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und Φ_j sind die Kugelflächenfunktionen. Allerdings findet man auf diese Weise auch die nicht translationsinvarianten Nullmoden. Bei einer Transformation des Laplaceoperators auf r_1 und r_2 ergibt sich nicht der Laplaceoperator in den Koordinaten r_1 und r_2 , sondern

$$\frac{\partial}{\partial r_1^2} + \frac{\partial}{\partial r_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} \quad (6.49)$$

Wir bestimmen nun die translationsinvarianten Nullmoden, indem wir zunächst in Gleichung (5.13) $\xi = 0$ setzen:

$$\begin{aligned} & \{\zeta^2 \rho^2 + \zeta(\zeta - 2)\rho + \zeta^2\} g_\zeta(\rho) \\ & + (1 + \rho^2) \{2\rho^3 - (1 + \zeta)\rho^2 + 2\rho + \zeta - 1\} g'_\zeta(\rho) \\ & + (1 + \rho^2)^2 (\rho^2 - \rho + 1) g''_\zeta(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (6.50)$$

Wir benötigen hier anders als in Abschnitt 6.2 keine Aufteilung in die sechs Bereiche der r_1 - r_2 -Ebene, die sich aus den möglichen Anordnungen der drei Teilchen ergeben, denn in diesem Fall gilt $d(r) = |r|^0 = 1$ für beliebige Anordnungen der drei Teilchen. Es müssen lediglich die obere und die untere Koordinatenebene getrennt betrachtet werden, weil die Koordinatentransformation auf r und ρ sonst nicht bijektiv ist (vgl. Abschnitt 5.1.3). Wie in Abschnitt 6.2 versuchen wir, mit den in Abschnitt 5.1.4 hergeleiteten Bedingungen ein n zu finden, mit dem sich die Lösung dieser Differentialgleichung schreiben lässt als

$$g_\zeta(\rho) = (1 + \rho^2)^n \tilde{g}_\zeta(\rho) \quad (6.51)$$

Mithilfe von Polynomdivision finden wir, dass sich der Faktor $(1 + \rho^2)^2$ für $n = -\frac{\zeta}{2}$ aus allen Summanden der Differentialgleichung (5.13) herauskürzt und die neue Differentialgleichung lautet

$$\zeta(\zeta - 1)\tilde{g}_\zeta(\rho) + ((2 - 2\zeta)\rho + \zeta - 1)\tilde{g}'_\zeta(\rho) + (\rho^2 - \rho + 1)\tilde{g}''_\zeta(\rho) = 0 \quad (6.52)$$

Diese Differentialgleichung ist nun mit Maple lösbar und es ergeben sich als Fundamentallösungen

$$\tilde{g}_\zeta^{(1)}(\rho) = \left(2\rho - 1 - \sqrt{3}i\right)^\zeta \quad (6.53)$$

$$\tilde{g}_\zeta^{(2)}(\rho) = \left(2\rho - 1 + \sqrt{3}i\right)^\zeta \quad (6.54)$$

Dies sind zunächst komplexe Lösungen der Differentialgleichung, reelle Lösungen werden durch Real- und Imaginärteil dieser Lösungen repräsentiert. Ein reelles Fundamentalsystem ist also

$$\bar{g}_\zeta^{(1)}(\rho) = \Re(g_\zeta^{(1)}) = \Re(g_\zeta^{(2)}) = \frac{1}{2} \left\{ \left(2\rho - 1 + \sqrt{3}i\right)^\zeta + \left(2\rho - 1 - \sqrt{3}i\right)^\zeta \right\} \quad (6.55)$$

$$\bar{g}_\zeta^{(2)}(\rho) = -\Im(g_\zeta^{(1)}) = \Im(g_\zeta^{(2)}) = \frac{1}{2i} \left\{ \left(2\rho - 1 + \sqrt{3}i\right)^\zeta - \left(2\rho - 1 - \sqrt{3}i\right)^\zeta \right\} \quad (6.56)$$

Der Formanteil der Nullmoden lautet also

$$g_\zeta^{(1)}(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \rho^2}^\zeta} \left\{ \left(2\rho - 1 + \sqrt{3}i\right)^\zeta + \left(2\rho - 1 - \sqrt{3}i\right)^\zeta \right\} \quad (6.57)$$

$$g_\zeta^{(2)}(\rho) = \frac{1}{2i\sqrt{1 + \rho^2}^\zeta} \left\{ \left(2\rho - 1 + \sqrt{3}i\right)^\zeta - \left(2\rho - 1 - \sqrt{3}i\right)^\zeta \right\} \quad (6.58)$$

Um Nullmoden zu bestimmen, müssen wir nun die Lösungen in der oberen und der unteren Hälfte der Koordinatenebene, die jeweils durch Gleichung (6.57) gegeben sind, differenzierbar aneinander setzen. In der obigen Betrachtung, bei der auch die nicht translationsinvarianten Nullmoden bestimmt wurden, ist klar geworden, dass die Exponenten der Nullmoden gerade die natürlichen Zahlen \mathbb{N}_0 sind. Da die translationsinvarianten Nullmoden eine Teilmenge aller Nullmoden sein müssen, wissen wir bereits, dass die Exponenten auch hier gerade die natürlichen Zahlen sein werden. Wir bestimmen also die Grenzwerte von $g_\zeta^{(1)}$ und $g_\zeta^{(2)}$ für $\rho \rightarrow \infty$ und $\rho \rightarrow -\infty$ im Fall ganzzahliger ζ .

Dazu schreiben wir zunächst $2\rho - 1 + \sqrt{3}i = r(\rho)e^{i\psi_1(\rho)}$ und $2\rho - 1 - \sqrt{3}i = r(\rho)e^{i\psi_2(\rho)}$. Für $\rho \rightarrow \infty$ gilt $\psi_1(\rho) \rightarrow 0$ und $\psi_2(\rho) \rightarrow 2\pi$ während für $\rho \rightarrow -\infty$ $\psi_1(\rho) \nearrow \pi$ und $\psi_2(\rho) \searrow \pi$ gilt. Die Potenzierung mit ζ ändert bei der Grenzwertbildung $\rho \rightarrow \infty$ nichts Wesentliches, insofern, als dass auch die Winkel von $(2\rho - 1 + \sqrt{3}i)^\zeta = r(\rho)^\zeta e^{i\zeta\psi_1(\rho)}$ und $(2\rho - 1 - \sqrt{3}i)^\zeta = r(\rho)^\zeta e^{i\zeta\psi_2(\rho)}$, $\zeta\psi_1(\rho)$ und $\zeta\psi_2(\rho)$, gegen 0 bzw. 2π konvergieren, die potenzierten Werte bleiben also in der Nähe der reellen Achse. Daher konvergiert der Realteil der einzelnen Summanden auch nach der Potenzierung mit ζ gegen ∞ und der Imaginärteil bleibt beschränkt. Berücksichtigt man noch den Faktor $\frac{1}{2\sqrt{1 + \rho^2}^\zeta}$, so erhält man für $\rho \rightarrow \infty$

die Grenzwerte

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} g_\zeta^{(1)}(\rho) = 2^\zeta \quad (6.59)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} g_\zeta^{(2)}(\rho) = 0 \quad (6.60)$$

Anders als bei der Grenzwertbildung $\rho \rightarrow \infty$ kann sich bei der Grenzwertbildung $\rho \rightarrow -\infty$ das Verhalten von $2\rho - 1 + \sqrt{3}i = r(\rho)e^{i\psi_1(\rho)}$ und $2\rho - 1 - \sqrt{3}i = r(\rho)e^{i\psi_2(\rho)}$ durch eine Potenzierung mit ζ ändern, denn der Winkel der potenzierten Größe liegt dann in der Nähe von $\zeta\pi$, also unter Umständen nicht mehr in der Nähe von π . Genauer gesagt liegt er bei geraden ζ in der Nähe von π und bei ungeraden ζ in der Nähe von 0 bzw. 2π . Damit ergeben sich für $\rho \rightarrow \infty$ folgende Grenzwerte:

$$\lim_{\rho \rightarrow -\infty} g_\zeta^{(1)}(\rho) = \begin{cases} -2^\zeta & \text{falls } \zeta \text{ gerade} \\ 2^\zeta & \text{falls } \zeta \text{ ungerade} \end{cases} \quad (6.61)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow -\infty} g_\zeta^{(2)}(\rho) = 0 \quad (6.62)$$

Der Grenzwert der zweiten Fundamentallösung $g_\zeta^{(2)}$ für $\rho \rightarrow \pm\infty$ ist also null, der Grenzwert der ersten Fundamentallösung $g_\zeta^{(1)}$ jedoch ungleich null. Damit die Lösung differenzierbar ist, muss die Fortsetzung von $g_\zeta^{(2)}$ in die untere Hälfte der Koordinatenebene also gerade $-g_\zeta^{(2)}$ sein. Die Fortsetzung von $g_\zeta^{(1)}$ in die untere Hälfte der Koordinatenebene muss $g_\zeta^{(1)}$ sein, falls ζ ungerade ist, und $-g_\zeta^{(1)}$ für gerade ζ . Die Nullmoden mit den kleinsten Graden sind demnach

$$f_0(r_1, r_2) = 1 \quad (6.63)$$

$$f_1^{(1)}(r_1, r_2) = r_1 \quad (6.64)$$

$$f_1^{(2)}(r_1, r_2) = r_2 \quad (6.65)$$

$$f_2^{(1)}(r_1, r_2) = r_1^2 - r_2^2 \quad (6.66)$$

$$f_2^{(2)}(r_1, r_2) = r_1^2 - 2r_1r_2 = f_2^{(1)}(r_2 - r_1, r_2) \quad (6.67)$$

$$f_3^{(1)}(r_1, r_2) = 2r_1^3 - 3r_1^2r_2 - 3r_1r_2^2 + 2r_2^3 = f_3^{(1)}(r_2 - r_1, r_2) \quad (6.68)$$

$$f_3^{(2)}(r_1, r_2) = r_1^2r_2 - r_1r_2^2 = f_3^{(2)}(r_2 - r_1, r_2) \quad (6.69)$$

$$f_4^{(1)}(r_1, r_2) = r_1^4 - 4r_1^3r_2 + 4r_1r_2^3 - r_2^4 \quad (6.70)$$

$$f_4^{(2)}(r_1, r_2) = r_1^4 - 6r_1^2r_2^2 + 4r_1r_2^3 = f_4^{(1)}(r_2 - r_1, r_2) \quad (6.71)$$

$$f_5^{(1)}(r_1, r_2) = r_1^5 - 10r_1^3r_2^2 + 10r_1^2r_2^3 - r_2^5 \quad (6.72)$$

$$f_5^{(2)}(r_1, r_2) = r_1^5 - 5r_1^4r_2 + 10r_1^2r_2^3 - 5r_1r_2^4 = f_5^{(1)}(r_2 - r_1, r_2) \quad (6.73)$$

Die hier angegebenen Funktionen $f_\zeta^{(1)}$ und $f_\zeta^{(2)}$ entsprechen nicht direkt den oben bestimmten Fundamentallösungen, sondern sind durch Linearkombinationen aus diesen gewonnen, damit die Symmetrien in r_1 , r_2 und $r_2 - r_1$ besser erkannt werden können. Natürlicherweise muss eine Nullmode als Funktion von r_1 und r_2 weiterhin eine Nullmode sein, wenn man z.B. statt r_1 $r_2 - r_1$ schreibt, denn das entspricht nur einer Teilchenvertauschung ($r_1 = x_1 - x_3$, $r_2 = x_2 - x_3$, $r_2 - r_1 = x_2 - x_1$). In der Tat kann man bei allen oben angegebenen Nullmoden, außer denen vom Grad 3, zwei linear unabhängige Lösungen so wählen, dass sich, wenn man in die erste $r_2 - r_1$ statt r_1 einsetzt, gerade die zweite ergibt. Bei den Lösungen vom Grad 3 ist das nicht so, sondern diese reproduzieren sich jeweils selber, wenn man r_1 durch

$r_2 - r_1$ ersetzt, und das ist dann natürlich auch bei allen Linearkombinationen dieser beiden Lösungen der Fall. Die Abbildungen 6.11, 6.12, 6.14 und 6.15 zeigen jeweils eine (bzw. bei 3 beide) der Nullmoden der Grade 2, 3, 4 und 5 als Funktion von r_1 und r_2 . In den Fällen, in denen nur eine der beiden Fundamentallösungen aufgezeichnet ist, geht die andere aus dieser durch eine Teilchenvertauschung hervor. Die Abbildungen 6.16, 6.17, 6.18, 6.19 zeigen den Formanteil der Nullmoden als Funktion des Winkels ϕ , wobei ϕ wie in 6.46 definiert ist.

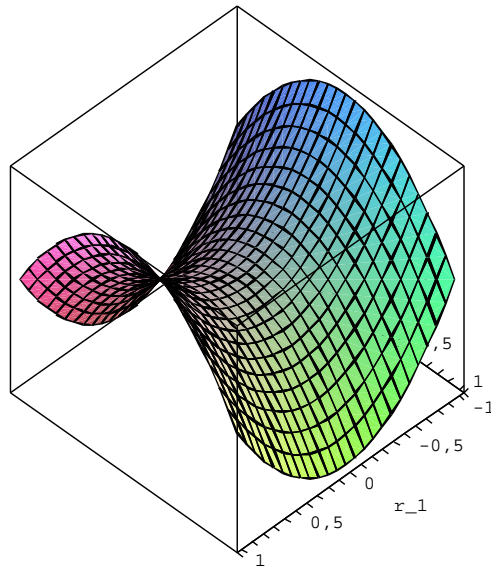


Abbildung 6.11.: Die Nullmode $f_2^{(1)}$

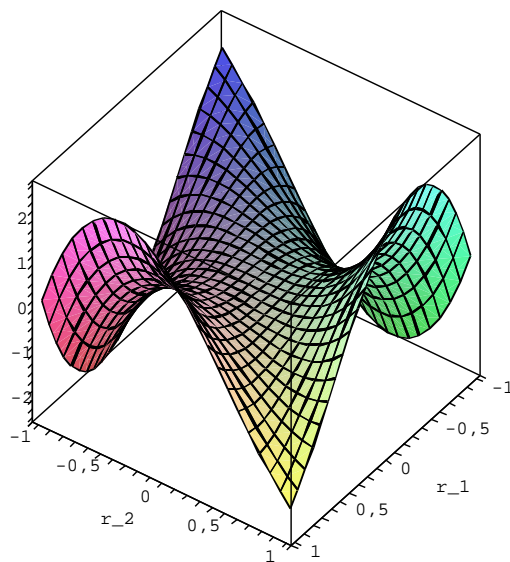
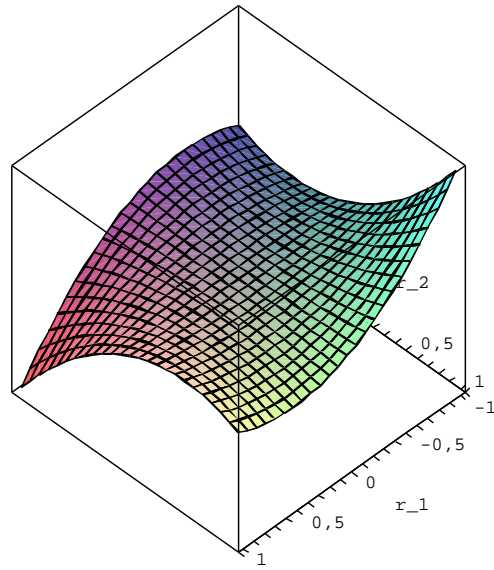
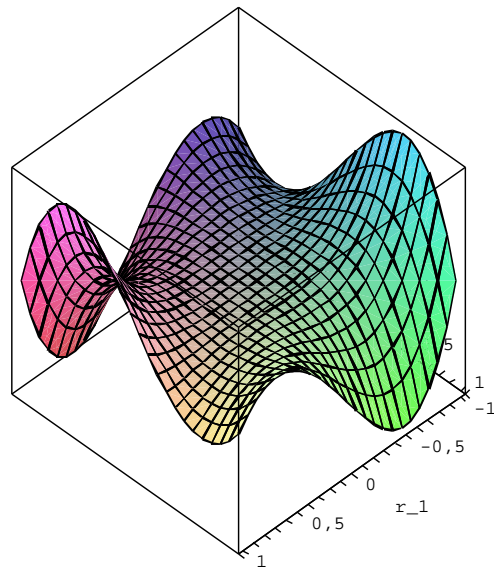


Abbildung 6.12.: Die Nullmode $f_3^{(1)}$

Abbildung 6.13.: Nullmode $f_3^{(2)}$ Abbildung 6.14.: Die Nullmode $f_4^{(1)}$

Die Nullmoden ersten und zweiten Grades sind reduzibel. Wie schon in den Fällen $\xi = 2$ und $\xi = 1$ ist also auch im Fall $\xi = 0$ der Erwartungswert des Abstandes zweier Teilchen erhalten. Die Nullmoden vom Grad 2 sind die irreduziblen Nullmoden mit dem kleinsten Grad. Die Nullmode $r_1^2 - r_2^2$ ist die bereits in der Einleitung auf anderem Wege hergeleitete Nullmode der Brownschen Bewegung. Der Erwartungswert der Differenz der Quadrate der Abstände von zwei Teilchen bleibt also erhalten. Dies liegt wie in der Einleitung schon beschrieben

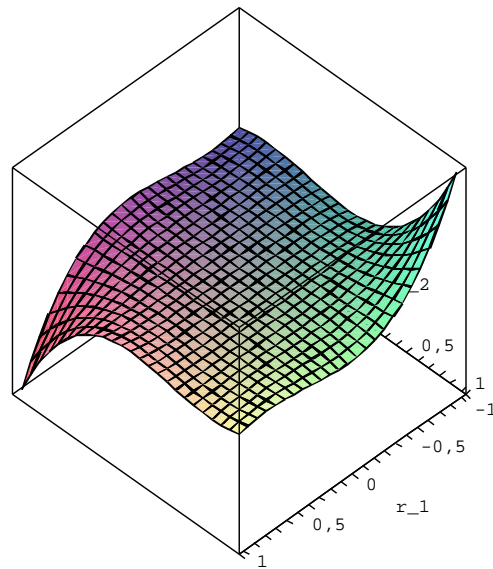


Abbildung 6.15.: Die Nullmode $f_5^{(1)}$

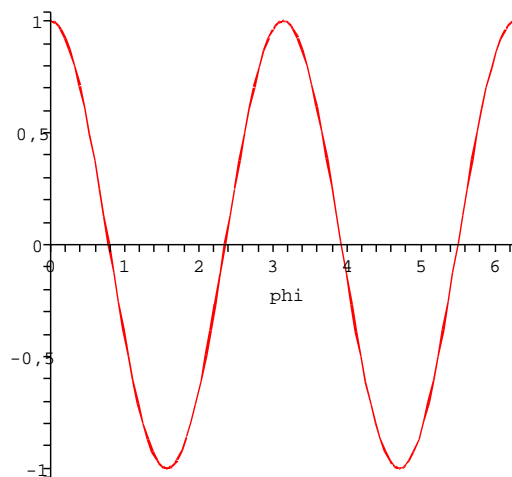


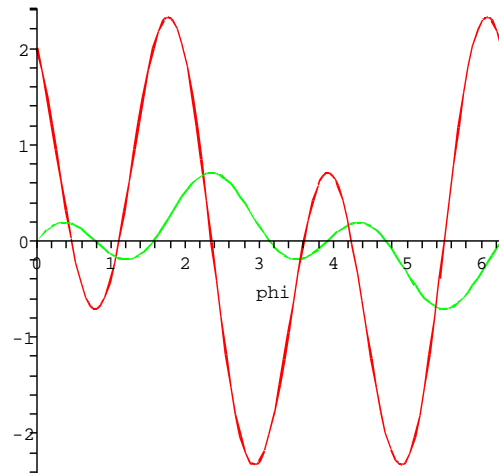
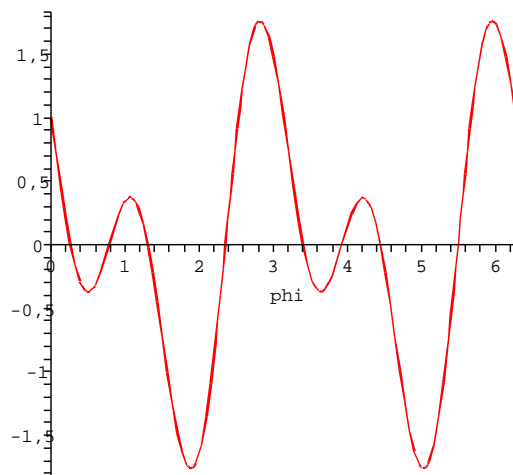
Abbildung 6.16.: Winkelanteil der Nullmode für $\xi = 0$ und $\zeta = 2$

daran, dass für den Erwartungswert des Abstandsquadrates zweier Teilchen gilt

$$\langle R^2 \rangle (t) = R^2(0) + Dt \tag{6.74}$$

Bei einer Differenzbildung fällt das Dt also heraus.

Wie schon oben in Abschnitt 6.2 beschrieben, muss, wenn die Größe der Teilchenkonfiguration wächst, der Erwartungswert des Formanteils der Nullmode fallen, und zwar umso schneller

Abbildung 6.17.: Winkelanteil der Nullmoden für $\xi = 0$ und $\zeta = 3$ Abbildung 6.18.: Winkelanteil der Nullmode für $\xi = 0$ und $\zeta = 4$

je höher der Grad der Nullmode ist. Dies hängt damit zusammen, dass bei wachsender Größe der Teilchenwolke die Teilchenkonfiguration sich relativ zur Gesamtgröße der Konstellation den Nullstellen der Nullmoden annähert bzw. gewisse Wahrscheinlichkeiten für Teilchenkonfigurationen auf der linken und auf der rechten Seite der Nullstellen bestehen (vgl. Abschnitt 6.2). Durch die verschiedenen Vorzeichen der Nullmoden auf den verschiedenen Seiten der Nullstellen verringert sich der Erwartungswert des Formanteils der Nullmoden. Außerdem

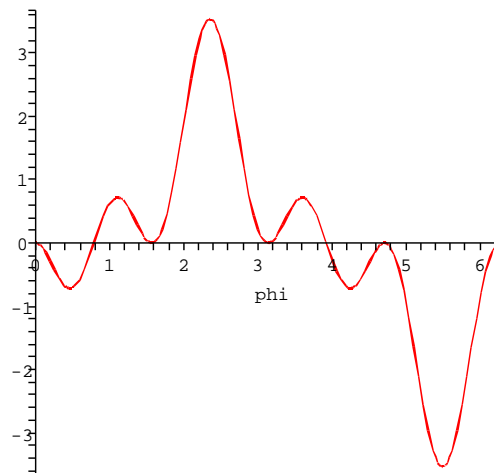


Abbildung 6.19.: Winkelanteil der Nullmode für $\xi = 0$ und $\zeta = 5$

muss, wie in Abschnitt 6.2 erklärt, die Form einer Teilchenkonfiguration, für die eine Nullmode Nullstellen hat, im Mittel erhalten bleiben.

Die Nullmoden vom Grad 2 haben Nullstellen, wenn zwei Teilchen dieselbe Position haben und wenn das mittlere Teilchen von beiden äußeren den gleichen Abstand hat. Je nach dem welche der beiden Fundamentallösungen man wählt, sind es aber unterschiedliche Teilchen, die die gleiche Position haben müssen bzw. welches in der Mitte sein muss. Allerdings liegt hier mit $\xi = 0$ - anders als für $\xi = 1$ - schwache Kompressibilität vor, die Teilchen können also durcheinander durchlaufen, so dass sich jede Anfangskonfiguration zu jeder Endkonfiguration entwickeln kann. Die Nullmoden vom Grad 3 haben Nullstellen an den Stellen, wo zwei Teilchen dieselbe Position haben ($f_3^{(2)}$), bzw. an den Stellen, wo das mittlere Teilchen gleichen Abstand von den beiden Äußeren hat ($f_3^{(1)}$). Im Unterschied zu den Nullmoden zweiten Grades hat hier allerdings die eine Nullmode Nullstellen, wenn zwei beliebige Teilchen an der gleichen Stelle sind ($f_3^{(2)}$) bzw. wenn ein beliebiges Teilchen in der Mitte zwischen den beiden anderen ist ($f_3^{(1)}$). Dadurch kann das schnellere Abfallen des Erwartungswertes des Formanteils für wachsende Größe der Teilchenwolke erklärt werden. Die Nullmoden vom Grad 4 haben Nullstellen, wenn zwei Teilchen dieselbe Position haben, wenn ein Teilchen in der Mitte zwischen den beiden äußeren ist und wenn der Abstand der Teilchen, die am weitesten voneinander entfernt sind, $2 + \sqrt{3} \approx 3,732$ -mal so groß ist wie der Abstand der Teilchen, die sich am nächsten sind. Auch hier haben aber - wie bei den Nullmoden vom Grad 2 - nicht alle Nullmoden an all diesen Stellen wirklich Nullstellen, sondern jede Fundamentallösung hat nur Nullstellen, wenn bestimmte Teilchen diese Bedingungen erfüllen. Insgesamt beobachten wir hier wie im Fall $\xi = 1$ eine Zunahme der Anzahl der Nullstellen mit wachsendem Grad der Nullmoden, durch die das schnellere Abfallen mit wachsendem r erklärt werden kann.

Dadurch, dass es in diesem Fall pro Grad zwei linear unabhängige Nullmoden gibt, werden

die Lagen der Nullstellen allerdings beliebig, denn man kann durch Linearkombination für eine beliebige Konstellation eine Nullmode eines Grades finden, die an dieser Stelle eine Nullstelle hat. Dies spiegelt den besonders regellosen Charakter der Brownschen Bewegung von Teilchen in einer Flüssigkeit wider, der durch die räumliche Dekorrelation der Geschwindigkeiten bestimmt ist. Im Gegensatz dazu findet sich im Fall $\xi = 1$ nur eine Nullmode, die mehr Nullstellen hat, als die Nullmoden gleichen Grades zum Parameter $\xi = 0$. Dafür sind die Nullstellen der Nullmoden nicht variabel und die Evolution der Form der Teilchenwolke kann stärker durch die Nullmoden eingeschränkt werden. Dies spiegelt die Tatsache wider, dass die räumlichen Korrelationen des Geschwindigkeitsfeldes die zeitliche Entwicklung der Geometrie einer Teilchenwolke bestimmen. Der dritte betrachtete Fall war der Fall glatter Geschwindigkeitsfelder mit $\xi = 2$. Hier tritt schon ein fundamentaler Unterschied bei den Graden auf, zu denen Nullmoden existieren. Es gibt nämlich nur Nullmoden zu den Graden 0 und 1, allerdings sind auch beliebige, homogene Funktionen nullten und ersten Grades statistisch erhalten, so dass sogar die Form der Teilchenwolke selber ein Martingal darstellt. Da die möglichen Grade der Nullmoden bei den Parametern $\xi = 0$ und $\xi = 1$ übereinstimmen, bei $\xi = 2$ aber ein fundamental anderes Verhalten zeigen, wäre es nun interessant, die Grade der Nullmoden für $\xi > 1$ zu bestimmen, um möglicherweise einen Übergang zu sehen. Im nächsten Kapitel werden wir also versuchen, Nullmoden zu einem Parameter $\xi = 1 + \epsilon$ zu berechnen.

7. Störungsrechnung zur Bestimmung der Grade der Nullmoden bei $\xi = 1 + \epsilon$

In diesem Kapitel werden wir mithilfe der Störungstheorie eine Integralformel für die Nullmoden in einem Modell finden, bei dem der Parameter ξ aus dem Kraichnanmodell in der Nähe von eins liegt. Die Nullmoden werden am Ende durch Integrale gegeben sein, die zu lösen wären, um zunächst die Exponenten und dann auch die Nullmoden zu finden. Dies ist jedoch leider nicht analytisch möglich, trotzdem soll die gefundene Formel hier abgeleitet werden.

Wir gehen zunächst von der Differentialgleichung (5.13) für den Formanteil der Nullmoden für beliebige ξ aus. In dieser setzen wir $\xi = 1 + \epsilon$ und ersetzen in Gleichung (5.13) $\rho^{n+\epsilon}$ durch die Taylorentwicklung bis zum linearen Glied:

$$\rho^{n+\epsilon} = \rho^n + \epsilon \rho^n \log \rho + o(\epsilon) \quad (7.1)$$

Dann erhalten wir die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & \{ \zeta(\zeta - 1)\rho^3 + \zeta\rho^2 + \zeta(2\zeta - 3)\rho + \zeta(\zeta - 1) \\ & + \epsilon [\zeta(\zeta - 1)\rho^3 \log \rho + \zeta(\zeta - 2)\rho^2 \log \rho + \zeta\rho \log \rho + \zeta(2 - \zeta)\rho(\rho - 1) \log(\rho - 1)] \} g(\rho) \\ & + (1 + \rho^2) \{ 2\rho^3 - 2\rho^2 + 2(1 - \zeta)\rho + 2(\zeta - 1) + \epsilon [- (1 + \zeta)\rho^3 \log \rho + 2\zeta\rho^2 \log \rho \\ & + (\zeta - 1)\rho \log \rho + (1 - \zeta)(\rho - 1) \log(\rho - 1) + (1 + \zeta)\rho^2(\rho - 1) \log(\rho - 1)] \} g'(\rho) \\ & + (1 + \rho^2)^2 \{ \rho^2 - \rho + \epsilon [-\rho^2 \log \rho + \rho \log \rho + \rho(\rho - 1) \log(\rho - 1)] \} g''(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Wir setzen nun $\zeta = \zeta_0 + \epsilon\zeta_1$ und $g(\rho) = g_0(\rho) + \epsilon g_1(\rho)$. g_0 und ζ_0 stellen dabei die ungestörten Nullmoden und die zugehörigen Exponenten dar. Setzt man dieses in die Differentialgleichung (7.2) ein, erhält man

$$A_{\zeta_0}(\rho)g_0(\rho) + \epsilon \left\{ A_{\zeta_0}(\rho)g_1(\rho) + F_{\zeta_0}^{\zeta_1}(\rho) \right\} \quad (7.3)$$

Dabei ist $A_{\zeta_0}(\rho)$ der Differentialoperator der ungestörten Differentialgleichung (5.13), die in Abschnitt 6.2 behandelt wurde und

$$\begin{aligned} & F_{\zeta_0}^{\zeta_1}(\rho) \\ & = (\zeta_0(\zeta_0 - 1)\rho^3 \log \rho + \zeta_0(\zeta_0 - 2)\rho^2 \log \rho + \zeta_0\rho \log \rho + \zeta_0(2 - \zeta_0)\rho(\rho - 1) \log(\rho - 1)) g_0(\rho) \\ & + (1 + \rho^2) (- (1 + \zeta_0)\rho^3 \log \rho + 2\zeta_0\rho^2 \log \rho + (\zeta_0 - 1)\rho \log \rho + (1 - \zeta_0)(\rho - 1) \log(\rho - 1) \\ & + (\zeta_0 + 1)\rho^2(\rho - 1) \log(\rho - 1)) g_0'(\rho) \\ & + (1 + \rho^2)^2 (-\rho^2 \log \rho + \rho \log \rho + \rho(\rho - 1) \log(\rho - 1)) g_0''(\rho) \\ & + (\zeta_1(2\zeta_0 - 1)\rho^3 + \zeta_1\rho^2 + \zeta_1(4\zeta_0 - 3)\rho + \zeta_1(2\zeta_0 - 1)) g_0(\rho) \\ & + (1 + \rho^2) (-2\zeta_1\rho + 2\zeta_1) g_0'(\rho) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Wir erhalten also in nullter Ordnung die ungestörte Differentialgleichung für g_0 , die schon in Abschnitt 6.2 behandelt wurde, und in erster Ordnung eine inhomogene Differentialgleichung für $g_1(\rho)$. Dabei entspricht die zugehörige homogene Gleichung gerade der ungestörten Gleichung für $g_1(\rho)$ mit einem festen ζ_0 , die wir bereits in Abschnitt 6.2 gelöst haben. Um die inhomogene Differentialgleichung zu lösen, müssen wir also noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden und benutzen dazu das Prinzip der Variation der Konstanten, das im Anhang E beschrieben ist. Die inhomogene Differentialgleichung hat die Form (vgl. (7.3))

$$A_{\zeta_0}(\rho)g_1(\rho) = a_{\zeta_0}(\rho)g_1(\rho) + b_{\zeta_0}(\rho)g_1'(\rho) + c_{\zeta_0}(\rho)g_1''(\rho) = -F_{\zeta_0}^{\zeta_1}(\rho) \quad (7.5)$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung ist äquivalent zu folgendem System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_1' \end{pmatrix}'(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_{\zeta_0}(\rho)}{c_{\zeta_0}(\rho)} & -\frac{b_{\zeta_0}(\rho)}{c_{\zeta_0}(\rho)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_1' \end{pmatrix}(\rho) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F_{\zeta_0}^{\zeta_1}(\rho)}{c_{\zeta_0}(\rho)} \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems ist also

$$\begin{pmatrix} g_{\zeta_0}^{(1)}(\rho) \\ g_{\zeta_0}^{(1)'}(\rho) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{\zeta_0}^{(2)}(\rho) \\ g_{\zeta_0}^{(2)'}(\rho) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Dabei sind $g_{\zeta_0}^{(1)}$ und $g_{\zeta_0}^{(2)}$ die in Abschnitt 6.2 gefundenen Fundamentallösungen. Eine spezielle Lösung des homogenen Systems ist daher nach dem Prinzip der Variation der Konstanten

$$\Psi(\rho) = \underline{\Phi}(\rho)\mathbf{u}(\rho) \quad (7.8)$$

wobei

$$\mathbf{u}(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \underline{\Phi}^{-1}(\rho')\mathbf{q}(\rho')d\rho' + C \quad (7.9)$$

$$\underline{\Phi}(\rho) = \begin{pmatrix} g_{\zeta_0}^{(1)}(\rho) & g_{\zeta_0}^{(2)}(\rho) \\ g_{\zeta_0}^{(1)'}(\rho) & g_{\zeta_0}^{(2)'}(\rho) \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

und

$$\mathbf{q}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F_{\zeta_0}(\rho)}{c_{\zeta_0}(\rho)} \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Wir erhalten damit als spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\Psi_1(\rho) = g_{\zeta_0}^{(1)}(\rho)u_1(\rho) + g_{\zeta_0}^{(2)}(\rho)u_2(\rho) \quad (7.12)$$

Dabei sind

$$u_1(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{g_{\zeta_0}^{(2)}(\rho')F(\rho')}{c_{\zeta_0}(\rho')(g_{\zeta_0}^{(1)}(\rho')g_{\zeta_0}^{(2)'}(\rho') - g_{\zeta_0}^{(2)}(\rho')g_{\zeta_0}^{(1)'}(\rho'))}d\rho' \quad (7.13)$$

und

$$u_2(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{g_{\zeta_0}^{(1)}(\rho')F(\rho')}{c_{\zeta_0}(\rho')(g_{\zeta_0}^{(2)}(\rho')g_{\zeta_0}^{(1)'}(\rho') - g_{\zeta_0}^{(1)}(\rho')g_{\zeta_0}^{(2)'}(\rho'))}d\rho' \quad (7.14)$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems lautet also

$$g_1(\rho) = Ag_{\zeta_0}^{(1)}(\rho) + Bg_{\zeta_0}^{(2)}(\rho) + g_{\zeta_0}^{(1)}(\rho)u_1(\rho) + g_{\zeta_0}^{(2)}(\rho)u_2(\rho) \quad (7.15)$$

Um nun zunächst diskrete ζ_1 -Werte und daraus dann die Nullmoden zu bestimmen, müsste man analog zu dem Verfahren in Abschnitt 6.2 ζ_1 so bestimmen, dass $g_1(1) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} g_1(\rho) = 0$ gilt, denn auch hier liegt mit $\xi = 1 + \epsilon > 1$ starke Kompressibilität vor. Allerdings müsste man hierzu zunächst u_1 und u_2 bestimmen und das ist zumindest analytisch nicht möglich.

7. Störungsrechnung zur Bestimmung der Grade der Nullmoden bei $\xi = 1 + \epsilon$

8. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Charakterisierungsmöglichkeit der Bewegung einer n -Teilchenwolke mithilfe von Nullmoden anhand eines einfachen, aber dafür analytisch behandelbaren Beispiels untersucht. Zunächst wurde dazu in den Kapiteln 1, 2 und 3 der theoretische Hintergrund der Nullmoden erläutert. In Kapitel 1 ging es darum, eine Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Koordinaten einer n -Teilchenwolke, die Fokker-Planck-Gleichung, aus der Langevin-Gleichung, einer stochastischen Differentialgleichung für die Variablen, zu entwickeln. Die in der Fokker-Planck-Gleichung auftretenden Drift- und Diffusionskoeffizienten lassen sich allerdings nicht für jedes Modell explizit bestimmen. Ein Modell, in dem diese Bestimmung jedoch möglich ist, ist das Kraichnanmodell. Dieses Modell für ein Geschwindigkeitsfeld, bei dem die Geschwindigkeiten zeitlich δ -korreliert sind, wurde in Kapitel 2 behandelt und es wurde die Fokker-Planck-Gleichung für dieses Modell hergeleitet. Dabei entsprechen die Diffusionskoeffizienten gerade den räumlichen Korrelationsfunktionen der Geschwindigkeiten. Aus der sich ergebenden Fokker-Planck-Gleichung konnte in Kapitel 3 eine Gleichung für Funktionen hergeleitet werden, deren Erwartungswert zeitlich erhalten bleibt, die Nullmoden. Diese Funktionen sind besonders geeignet für eine Untersuchung der zeitlichen Entwicklung der Form einer Teilchenwolke, denn der Erwartungswert der Größe einer Teilchenwolke wächst (zumindest in einem inkompressiblen Geschwindigkeitsfeld) mit der Zeit. Homogene Funktionen, d.h. Funktionen mit der Eigenschaft $f(\lambda \underline{\mathbf{R}}) = \lambda^\zeta f(\underline{\mathbf{R}})$, deren Erwartungswert zeitlich erhalten bleibt, müssen also so beschaffen sein, dass das Ansteigen des Größenerwartungswertes durch ein Abfallen des Erwartungswertes des Formanteils der Nullmoden kompensiert wird. Mithilfe von Nullmoden ist es gelungen, die anomalen Exponenten der Strukturfunktionen herzuleiten und auf statistische, geometrische Erhaltungssätze zurückzuführen. Des Weiteren kann man die Wahrscheinlichkeitsdichte für einen Übergang einer n -Teilchenwolke vom Zustand $\underline{\mathbf{r}}$ in den Zustand $\underline{\mathbf{R}}$ mithilfe von Nullmoden entwickeln, ebenso wie die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Übergang einer Form der Teilchenwolke $\underline{\mathbf{r}}$ bei einer Größe r zur Form $\underline{\mathbf{R}}$ bei der Größe R . Nullmoden scheinen also ein gutes Konzept zu sein, geometrische Überlegungen in die Beschreibung von Turbulenz einzubinden. Aus diesem Grund wurde in den Kapiteln 4, 5, 6 und 7 ein eindimensionales Modell aus drei Teilchen behandelt, für das die Nullmoden explizit gefunden werden sollten. Das Modell wurde in Kapitel 5 zunächst vorgestellt und eine Gleichung für die Nullmoden in diesem Modell hergeleitet, die für alle Parameterwerte $\xi \in [0, 2]$ im Kraichnanmodell gültig ist. Diese ist jedoch nicht allgemein analytisch lösbar, so dass wir in Kapitel 6 gewisse Werte für den Parameter ξ herausgegriffen haben, für die die Gleichung analytisch lösbar ist, nämlich die Parameterwerte $\xi = 2$, $\xi = 1$ und $\xi = 0$. Im Fall $\xi = 2$ liegt ein glattes Geschwindigkeitsfeld vor und man stellt fest, dass beliebige homogene Funktionen vom Grad 0 und vom Grad 1 Nullmoden sind, so zum Beispiel auch das Verhältnis der Teilchenabstände und die Größe der Teilchenwolke. In diesem Fall bleibt also die Form der Teilchenwolke sowie deren Größe selber statistisch erhalten. Für den Fall $\xi = 1$ wurde nun das in Kapitel 4 beschriebene Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Diffe-

rentialgleichungen zweiter Ordnung herangezogen. Die Nullmoden sind in diesem Fall ein Produkt aus diversen Vorfaktoren und hypergeometrischen Funktionen, die aufgrund der in Kapitel 5 hergeleiteten Anschlussbedingungen null sind, wenn zwei Teilchen sich am gleichen Ort befinden. Mithilfe der Nullmoden, insbesondere ihrer Nullstellen, konnten hier und auch für den Fall $\xi = 0$ statistische Aussagen über die Entwicklung der Form der Teilchenwolke bei wachsender Größe getroffen werden. Im Fall $\xi = 0$ sind die Nullmoden in den Teilchenkoordinaten x_1 , x_2 und x_3 die Kugelflächenfunktionen, in Relativkoordinaten ergeben sich Polynome in den Koordinaten $r_1 = x_1 - x_3$ und $r_2 = x_2 - x_3$. Zu guter Letzt wurde in Kapitel 7 mithilfe der Störungstheorie eine Formel für die Nullmoden in der Nähe des Parameters $\xi = 1$ hergeleitet. Diese ist allerdings durch Integrale gegeben, so dass die explizite analytische Bestimmung der Nullmoden in diesem Fall nicht möglich ist. Von Bedeutung wäre daher eine numerische Bestimmung der in Kapitel 7 gefundenen Integrale, um die gestörten Exponenten sowie die gestörten Nullmoden explizit angeben zu können. Interessant an dieser Arbeit ist der analytische Zugang und die explizite Bestimmung der Nullmoden für andere Modelle als die Brownsche Bewegung. Wenn eine solche Vorgehensweise auch sicher nicht für kompliziertere Modelle oder beliebige Parameter möglich ist, so kann man auf diese Weise doch grundsätzlich erkennen, wie das Prinzip der Nullmoden funktioniert und wie man aus den Nullmoden statistische Aussagen über die Entwicklung der Geometrie einer Teilchenwolke gewinnen kann. Eine explizite Berechnung der Nullmoden selber findet man ansonsten nur für den Fall der Brownschen Bewegung, bei der der Parameter ξ im Kraichnanmodell null ist. Auch die Bestimmung der Exponenten beschränkt sich in allgemeineren Modellen auf Entwicklungen für kleine Parameterwerte ξ oder große Dimensionen d .

A. Definition eines Martingals

Die hier angegebene Definition eines Martingals befindet sich in [14]. Gegeben sei eine Menge Ω und eine Indexmenge I , die bzgl. \leq vollständig geordnet ist. Dann ist eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ eine Folge von σ -Algebren über Ω , so dass gilt $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $s, t \in I, s \leq t$.

Sei weiterhin X_t eine Folge von Zufallsvariablen über Ω .

Die Folge X_t heißt adaptiert bzgl. (\mathcal{F}_t) , falls X_t \mathcal{F}_t -messbar ist für alle $t \in I$.

Für eine Zufallsgröße X auf Ω , eine σ -Algebra \mathcal{F} über Ω und ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} auf (Ω, \mathcal{F}) ist die Zufallsgröße $\langle X | \mathcal{F} \rangle$ definiert als eine \mathcal{F} -messbare Zufallsgröße mit

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \langle X | \mathcal{F} \rangle d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad (\text{A.1})$$

und heißt der bedingte Erwartungswert von X gegeben \mathcal{F} . Wenn X \mathcal{F} -messbar ist, ist also $\langle X | \mathcal{F} \rangle = X$ \mathbb{P} -fast sicher. Falls $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, ist $\langle X | \mathcal{F} \rangle = \langle X \rangle$. Die bedingte Erwartung einer Zufallsvariable X gegeben eine σ -Algebra \mathcal{F} ist damit im L_2 -Sinne die beste Annäherung an X , die \mathcal{F} -messbar ist. Oft betrachtet man auch $\langle X | Y \rangle$, wobei Y eine Zufallsgröße ist. Damit ist $\langle X | \mathcal{F}_Y \rangle$ gemeint, wobei \mathcal{F}_Y die kleinste σ -Algebra bezeichnet, für die Y messbar ist. Anschaulich ist $\langle X | Y \rangle$ die beste Näherung für die Zufallsvariable X unter der Voraussetzung dass man Y kennt.

Nun kommen wir zur eigentlichen Definition eines Martingals.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei Ω eine Menge, \mathcal{F} eine σ -Algebra über Ω und \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) ist. $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ sei eine Filtration mit $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ für alle $t \in I$. $(X_t)_{t \in I}$ sei eine Folge von Zufallsvariablen, die an (\mathcal{F}_t) adaptiert ist, und alle Zufallsvariablen X_t seien integrierbar.

Dann heißt $(X_t)_t$ ein Martingal bzgl. \mathcal{F}_t falls für alle $s \leq t$ gilt

$$\langle X_t | \mathcal{F}_s \rangle = X_s \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.} \quad (\text{A.2})$$

Anschaulich sind Martingale Folgen von Zufallsvariablen, so dass die Zufallsvariablen Prozesse beschreiben, bei denen die beste Schätzung des Prozesses zur Zeit t , wenn man den Prozess zur Zeit $s < t$ kennt, gerade der Prozess zur Zeit s ist. Es werden also Prozesse beschrieben, bei denen man im Mittel weder etwas gewinnt noch etwas verliert. Zum Beispiel ist die Folge von Zufallsvariablen, die den Gesamtgewinn bei einem fairen Spiel zum Zeitpunkt n beschreibt ein Martingal. Denn der erwartete Gesamtgewinn zur Zeit $n + k$, $k > 0$, wenn man den Gewinn zur Zeit n kennt, ist gerade der Gewinn zu Zeit n .

B. Herleitung von $\sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \rightarrow t$

Die folgende Herleitung ist [13] entnommen.

Wir zeigen, dass für eine Folge von Partitionen des Intervalls $[0, t]$, $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = t$, der L_2 -Limes von $\sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$ gerade t ist. Dabei ist B_t wie in Abschnitt 1.1 definiert. (Notation: $B_{t_{j+1}}^{(n)} - B_{t_j}^{(n)} = \Delta B_j$ und $t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)} = \Delta t_j$)

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 - t \right\|^2 &= \left\langle \left(\sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 - t \right)^2 \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i,j=0}^{n-1} (\Delta B_i)^2 (\Delta B_j)^2 \right\rangle - 2t \left\langle \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 \right\rangle + t^2 \\
 &= \left\langle \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^4 \right\rangle + \left\langle \sum_{i \neq j} (\Delta B_i)^2 (\Delta B_j)^2 \right\rangle - 2t \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j}_{t} + t^2 \\
 &= \left\langle \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^4 \right\rangle + \left\langle \sum_{i \neq j} (\Delta B_i)^2 (\Delta B_j)^2 \right\rangle - t^2 \\
 &= 3 \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t_j)^2 + \left\langle \sum_{i \neq j} (\Delta B_i)^2 (\Delta B_j)^2 \right\rangle - t^2 \text{ denn } \Delta B_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t_i) \\
 &= \underbrace{2 \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t_j)^2}_{\rightarrow 0} + \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j}_{=t} \right)^2 - t^2 \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

□

B. Herleitung von $\sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \rightarrow t$

C. Die Itôformel

Die hier angegebene Itôformel ist mit Herleitung, auf die wir jedoch verzichten möchten, in [13] zu finden. Die Itôformel sei an dieser Stelle der Übersichtlichkeit halber in einer Dimension angegeben, ist aber auch in mehreren Dimensionen richtig.

Es sei $X_t = X_0 + \int_0^t U_s ds + \int_0^t V_s dB_s$ ein stochastisches Integral, das im Itôsinn interpretiert werden soll. Des Weiteren sei $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto g(t, x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Setzen wir nun $Y_t = g(t, X_t)$, dann ist auch Y_t ein stochastisches Integral mit

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \tilde{U}_s ds + \int_0^t \tilde{V}_s dB_s \quad (\text{C.1})$$

wobei

$$\tilde{U}_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)U_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} V_t^2 \quad (\text{C.2})$$

$$\tilde{V}_t = \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)V_t \quad (\text{C.3})$$

Mithilfe dieser Formel ist es nun möglich, einfache Itôintegrale zu berechnen. Wir testen die Formel an dem einzigen Itôintegral, das in dieser Arbeit bestimmt wurde (vgl. Abschnitt 1.2), nämlich $\int_0^t B_s dB_s$.

Dazu haben wir zunächst einmal aus der klassischen Analysis die Idee, dass B_t^2 in der Lösung vorkommen könnte. Wir setzen also $X_t = B_t$ (d.h. $U_t = 0$ und $V_t = 1$) und $g(t, x) = x^2$. Dann gilt nach der Itôformel

$$Y_t = g(t, X_t) = X_t^2 = B_t^2 = B_0^2 + \int_0^t \tilde{U}_s ds + \int_0^t \tilde{V}_s dB_s$$

mit

$$\tilde{U}_t = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

$$\tilde{V}_t = 2X_t = 2B_t$$

Also folgt

$$\begin{aligned} B_t^2 &= \int_0^t ds + \int_0^t 2B_s dB_s \\ \iff \int_0^t B_s dB_s &= \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{t}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Wir erhalten also auch auf diesem Weg das bereits aus Abschnitt (1.2) bekannte Ergebnis.

D. Das Prinzip großer Abweichungen

Eine Herleitung des Prinzips großer Abweichungen findet sich zum Beispiel in [14]. Es geht dabei um die Frage, wie schnell eigentlich die Konvergenz im starken Gesetz der großen Zahlen ist, d.h. wie schnell die Konvergenz

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \langle X_1 \rangle \right| > \epsilon \right) \rightarrow 0 \quad (\text{D.1})$$

für eine Folge X_1, X_2, \dots unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit existierendem Erwartungswert ist. Das Prinzip großer Abweichungen macht hierüber eine Aussage, falls $\phi(t) = \langle \exp(tX_1) \rangle < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Des Weiteren sei die Verteilung von X_1 nicht fast sicher in einem Punkt konzentriert. Dann besagt das Prinzip der großen Abweichungen für $a > \langle X_1 \rangle$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \geq na \right) = - \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda a - \log(\phi(\lambda))) \quad (\text{D.2})$$

E. Variation der Konstanten

Wir beschreiben hier das Prinzip der Variation der Konstanten, mit dem sich eine spezielle Lösung eines inhomogenen, linearen Systems von Differentialgleichungen bestimmen lässt. Sei also das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{x}'(t) = \underline{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}(t) \quad (\text{E.1})$$

gegeben. Dabei seien $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{q}(t)$ Vektoren und $\underline{A}(t)$ sei eine Matrix. Es wird eine Lösung für $\mathbf{x}(t)$, $t \in I$, wobei I ein Intervall ist, gesucht. \mathbf{q} und \underline{A} seien auf dem Intervall I stetig. Sei nun $\underline{\Phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des zugehörigen homogenen Systems.

Dann ist für jede Funktion u auf dem Intervall I , für die $\underline{\Phi}\mathbf{u}' = \mathbf{q}$ gilt, die Funktion $\underline{\Psi}$ mit $\underline{\Psi}(t) = \underline{\Phi}(t)\mathbf{u}(t)$ eine Lösung des inhomogenen Systems. \mathbf{u} kann wie folgt gewählt werden:

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^t \underline{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{q}(s)ds + C \quad (\text{E.2})$$

Literaturverzeichnis

- [1] Denis Bernard, Krzysztof Gawędzki und Antti Kupiainen: *Anomalous scaling in the N -point functions of a passive scalar*, In: Physical Review E 54 (2564), 1996
- [2] Denis Bernard, Krzysztof Gawędzki und Antti Kupiainen: *Slow Modes in Passive Advection*, In: Journal of Statistical Physics 90 (519), 1998
- [3] Michael Chertkow: *Instanton for random advection*, In: Physical Review E 55 (2722), 1997
- [4] Michael Chertkow und Gregory Falkowitsch: *Anomalous Scaling Exponents of a White-Advectioned Passive Scalar*, In: Physical Review Letters 76 (2706), 1996
- [5] Michael Chertkow, Gregory Falkowitsch und I. Kolokolow: *Intermittent Dissipation of a Passive Skalar in Turbulence*, In: Physical Review Letters 80 (2121), 1998
- [6] Gregory Falkowitsch, Krzysztof Gawędzki und Massimo Vergassola: *Particles and fields in fluid turbulence*, In: Review of Modern Physics 73 (913), 2001
- [7] Gregory Falkowitsch: *Some novel ideas in turbulence studies*, Lecture course delivered in Imperial College, London, December, 2005
- [8] Gregory Falkowitsch: *Novel approach to turbulence and mixing*, Research Report „Glorious decade 1995-2005”
- [9] Omri Gat und Reuven Zeitak: *Multiscaling in passive scalar advection as stochastic shape dynamics*, In: Physical Review E 57 (5511), 1998
- [10] Krzysztof Gawędzki und Antti Kupiainen: *Anomalous Scaling of the Passive Scalar*, In: Physical Review Letters 75 (3834), 1995
- [11] Krzysztof Gawędzki und Massimo Vergassola: *Phase transition in the passive scalar advection*, In: Physica D 138 (63), 2000
- [12] Robert H. Kraichnan: *Small-Scale Structure of a Scalar Field Convected by Turbulence*, In: The Physics of Fluids 11 (945), 1968
- [13] Matthias Löwe: *Stochastische Analysis*, Mitschrift der Vorlesung im Wintersemester 2006/2007
- [14] Matthias Löwe: *Wahrscheinlichkeitstheorie II* Mitschrift der Vorlesung im Wintersemester 2004/2005
- [15] Alexander Peyerimhoff: *Gewöhnliche Differentialgleichungen II*, Akademische Verlagsgesellschaft, 1982

- [16] Lewis F. Richardson: *Atmospheric Diffusion shown on a Distance-Neighbour Graph*, In: Proceedings of the Royal Society of London, Series A 110 (709), 1926
- [17] Hannes Risken: *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag, 1989

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Diplomarbeit unterstützt haben.

An erster Stelle danke ich Prof. Dr. Rudolf Friedrich für die interessante und auf mich zugeschnittene Themenstellung und die stets freundliche und hilfsbereite Betreuung während meiner Diplomarbeitszeit. Sie hat dazu beigetragen, dass meine Motivation für diese Arbeit immer aufrecht erhalten blieb.

Sehr dankbar bin ich des Weiteren Robin und Michael für die technische Unterstützung beim Schreiben dieser Arbeit, ohne die ich die Arbeit sicherlich auf der Schreibmaschine getippt und mit handgezeichneten Skizzen versehen hätte abgeben müssen.

Ein großes Dankeschön gilt außerdem allen Korrekturlesern, die viele Fehler gefunden und mich auf so manchen Bandwurmsatz aufmerksam gemacht haben.

Danken möchte ich außerdem denjenigen, die einen Teil meiner Diplomarbeitsunterlagen eingesammelt haben, als beim Campen ein Sturm auf Korsika unser Zelt fast zum Einsturz brachte und meine Unterlagen durch die Luft wirbelte.

Ein herzliches Dankeschön gilt außerdem allen Freunden, die ich im Laufe meines Studiums in Münster gewonnen habe, und die das Studium zu einem wunderschönen Lebensabschnitt gemacht haben. Besonders ist an dieser Stelle mein Freund Andreas zu nennen, der in den letzten Wochen vor der Abgabe aufgeregter war als ich selber und meine Schreibzeit durch das Erledigen vieler anderweitiger Aufgaben wie Kochen und Wäschewaschen maximiert hat. Ein besonderer Dank geht auch an meine Eltern, die mich immer von Herzen unterstützt und mir das Studium ermöglicht haben.

Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig angefertigt und keine weiteren Hilfsmittel außer den angegebenen verwendet zu haben.

Münster, im Dezember 2007