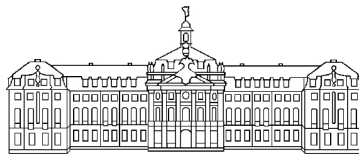


# Spinwellendynamik und symmetriebrechende Solitonenkomplexe

Diplomarbeit  
von  
Fabian Schnier

vorgelegt dem  
Fachbereich Physik  
der Universität Münster



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER

14. Februar 2007



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Die Landau-Lifshitz-Gleichung</b>	<b>10</b>
2.1	Ableitung der Grundgleichung . . . . .	10
2.1.1	Zeitliche Entwicklung des quantenmechanischen Erwartungswertes	10
2.1.2	Zeitliche Entwicklung des Spinoperators . . . . .	11
2.1.3	Verbindung zur klassischen Mechanik und zum Elektromagnetismus	11
2.1.4	Landau-Lifshitz-Gilbert-Gleichung . . . . .	13
2.2	Effektive Felder . . . . .	15
2.2.1	Externes Feld $\mathbf{H}_{ext}$ . . . . .	16
2.2.2	Mikrowellen-Pump-Feld $\mathbf{h}_p(t)$ . . . . .	16
2.2.3	Demagnetisierungsfeld $\mathbf{H}_{dem}$ . . . . .	16
2.2.4	Das Dipolfeld $\mathbf{h}_{dip}(t)$ . . . . .	17
2.2.5	Die Austauschwechselwirkung . . . . .	19
2.2.6	Das Anisotropiefeld . . . . .	22
2.3	Stereographische Projektion von $\mathbf{M}$ . . . . .	22
2.3.1	Die Erhaltungsgröße $\mathbf{M}^2$ . . . . .	22
2.3.2	Stereographische Projektion . . . . .	23
2.3.3	Stereographische Projektion der Landau-Lifshitz-Gleichung . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Anregbare Moden</b>	<b>28</b>
3.1	Theoretische Betrachtung der Modenprofile . . . . .	28
3.1.1	Austauschdominierte Moden . . . . .	29
3.1.2	Magnetostatische dipolare Moden . . . . .	33
3.1.3	Modenprofil unter Berücksichtigung von Dipol-Dipol- und Austauschwechselwirkung . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Die Nichtlineare Schrödinger-Gleichung</b>	<b>42</b>
4.1	Bedeutung der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung . . . . .	42
4.2	Gewöhnliche Herleitung der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung . . . . .	43
4.3	Ableitung der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung aus der Landau-Lifshitz-Gleichung . . . . .	45
4.4	Zusammenhang der stereographisch projizierten LLG mit der KNSG . . . . .	47
4.5	Skalierung der Schrödinger-Gleichung . . . . .	49
4.6	Exakte Lösungen der ungestörten Kubischen Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung . . . . .	49

<b>5</b>	<b>Störungstheorie</b>	<b>53</b>
5.1	Bedeutung der Störung für die exakte Solitonenlösung . . . . .	53
5.2	Zeitabhängige Grundgrößen des gestörten Solitons . . . . .	54
5.3	Das Fundamentaldifferentialgleichungssystem . . . . .	55
5.4	Störungsbeispiele . . . . .	58
5.4.1	Dämpfung der KNSG . . . . .	58
5.4.2	Parametrische Anregung A . . . . .	59
5.4.3	Parametrische Anregung B . . . . .	60
5.4.4	Parametrische Anregung C . . . . .	61
5.4.5	Parametrische Anregung D . . . . .	63
5.4.6	Parametrische Anregung E . . . . .	64
5.4.7	Lokalisierte externe Anregung F . . . . .	64
5.4.8	Parametrische Anregung an mehreren Orten . . . . .	65
5.4.9	Parametrische Anregung und Dämpfung . . . . .	66
5.5	Gestörte Lösung für ein ruhendes Soliton . . . . .	67
5.5.1	Dämpfung der KNSG . . . . .	69
5.5.2	Parametrische Anregung der Form $h\psi^*(z, t)e^{2i\Omega t}$ . . . . .	69
5.5.3	Parametrische Anregung der Form $h\psi(z, t)e^{2i\Omega t}$ . . . . .	70
5.5.4	Kombination aus parametrischer Anregung und Dämpfung . . . . .	70
5.5.5	Lokalisierung der parametrischen Anregung . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Phänomenologische Betrachtung der KNSG</b>	<b>73</b>
6.1	Die parametrisch getriebene Schrödinger-Gleichung . . . . .	73
6.2	Auswertung des gekoppelten Differentialgleichungssystems . . . . .	74
6.2.1	Differentialgleichung im Ortsraum ( $\phi = 0, n\pi; n \in \mathbb{N}$ ) . . . . .	74
6.2.2	Lösungen im Phasenraum . . . . .	75
6.2.3	Der Parameter $\Omega$ . . . . .	79
6.2.4	Parameterabhängige Diskussion der Lösungen . . . . .	83
6.3	Experimentelle Beobachtungen von Solitonenlösungen . . . . .	86
6.4	Lösungen der KNSG ohne Envelope-Näherung . . . . .	91
6.4.1	Galilei-Invarianz der KNSG . . . . .	91
6.4.2	Selektionsmechanismus der Lösungen . . . . .	93
6.4.3	Anregbare Solitonenkomplexe im Ringsystem . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Ausblick</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Numerische Simulation</b>	<b>102</b>
A.1	Zeitliche Integration . . . . .	103
A.2	Das Pseudospektralverfahren . . . . .	105
A.3	Gewöhnliche Fouriertransformation . . . . .	106
A.4	Verallgemeinertes Pseudospektralverfahren . . . . .	107
A.5	Implementierung der stereographisch projizierten Landau-Lifshitz-Gleichung	108
A.6	Diskretisierung durch ein Gitter . . . . .	110

<b>B</b>	<b>Numerische Visualisierung der Landau-Lifshitz-Gleichung</b>	<b>113</b>
B.1	Dynamik des Magnetisierungsvektors in der Grundform . . . . .	113
B.1.1	Vergleich der Zeitintegrationsverfahren . . . . .	114
B.1.2	Auswirkung von $l$ auf die Grundform . . . . .	116
B.1.3	Auswirkung von $g$ auf die Grundform . . . . .	117
B.1.4	Dynamik benachbarter Gitterpunkte unter Austauschwechselwirkung	117
B.2	Einbindung des Dipolfeldes in die Grundform . . . . .	119
B.3	Einkopplung äußerer Felder . . . . .	121
B.3.1	Das statische Feld . . . . .	122
B.3.2	Das Pumpfeld . . . . .	127
B.3.3	Problematiken bei der numerischen Analyse über die stereographische Projektion . . . . .	136
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>142</b>

# 1 Einleitung

Die physikalische Welt wird in einer Vielzahl von Bereichen ganz entscheidend von Nichtlinearitäten bestimmt. Dennoch wurde die große Bedeutung dieser nichtlinearen Systeme erst vergleichsweise spät erkannt, was sich natürlich auch darin begründet, dass mit dem Begriff der Nichtlinearität immer ein erhebliches Maß an Komplexität verbunden ist. Diese Komplexität wird genau an den Stellen unumgänglich, wo die lineare Physik versagt, physikalische Phänomene also nicht mehr mit den üblichen Formeln und Gesetzmäßigkeiten erklärt werden können.

Nichtlineare Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten vermögen mittlerweile eine immense Menge von ungewöhnlich erscheinenden Naturereignissen zu erklären und über Simplifizierungsmodelle sogar analytisch zugänglich zu machen. Dabei sind die neuen Modelle keineswegs auf den Bereich der Physik beschränkt, sondern werden auch in vielen anderen naturwissenschaftlichen Bereichen immer mehr angewandt, sei es bei Wachstumsprozessen, bei chemischen Reaktionen, bei der Auswertung von Wetterdaten oder der plötzlichen Strukturierung von Oberflächen. Dank der nichtlinearen Physik ist es gerade im medizinischen Bereich in den letzten Jahren zu großen Fortschritten gekommen, sei es in der Diagnose und Prognose von Erkrankungen, wie beispielsweise Herzinfarkten oder sogar in der Behandlung von Epilepsiepatienten.

Nichtlineare Physik ist immer eine Physik, in der es entscheidend auf das Auffinden und die Charakterisierung von Instabilitäten ankommt. An diesen Instabilitätspunkten verändert sich das Verhalten eines Systems relativ abrupt, geht also eine Lösung einer nichtlinearen Gleichung direkt in eine andere über. Ein Beispiel dafür ist die sogenannte Konvektions-Instabilität (Bénard-Instabilität), die bei zwei unterschiedlich temperierten Schichten in Abhängigkeit der Temperaturdifferenz dazu führt, dass sich verschiedene Muster und Strukturen zwischen den Schichten ausbilden können. Andere physikalische Systeme, die entscheidend von diesen Instabilitätspunkten getragen werden, sind z.B. ein Laser aber auch so fundamentale Systeme wie gewisse Oszillatoren.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem raumzeitlichen, nichtlinearen, dynamischen Verhalten in magnetischen Systemen, basierend auf dem elementaren Grundverhalten eines einzelnen magnetischen Spinvektors in Anwesenheit spezifischer Wechselwirkungsterme. Als essentielle Gleichung, die Ausgangspunkt für sämtliche Betrachtungen ist, wird uns die Landau-Lifshitz-Gleichung (LLG) begegnen, die mit den speziellen Wechselwirkungstermen zu einer streng nichtlinearen Gleichung wird. In ihr treten eine Vielzahl von Parametern auf, die das System maßgeblich beeinflussen und in einem weiten Bereich seine Determiniertheit steuern können. Die Analyse einer derartigen Gleichung kann schließlich über die gewöhnlichen Methoden der Nichtlinearen Physik vollzogen werden. Es sei an dieser Stelle auf das einschlägig bekannte Buch von Philip. E.

---

Wigen hingewiesen [56], in welchem eine große Klasse nichtlinearer und chaotischer Phänomene in magnetischen Materialien analysiert und charakterisiert wird. In vorliegender Arbeit werden wir uns auf ein eher qualitatives Vorgehen beschränken, da das Hauptaugenmerk bei der Gleichung mehr in den Zusammenhängen zur Kubischen Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung (KNSG) liegen soll. Beschreibt die LLG die Dynamik eines einzelnen Spinvektors, so beschreibt die KNSG letztlich die Dynamik des Quasiteilchens einer Spinwellenanregung, dem sogenannten Magnon.

Die Propagation einer Spinwelle wird durch die Wechselwirkung der Spins untereinander ermöglicht. Dabei unterscheidet man zwischen Austauschwechselwirkung, die zwischen allernächsten Nachbarn besonders wichtig ist, und der Dipol-Dipol-Wechselwirkung, die bei längeren Wellenlängen den entscheidenden Beitrag liefert. Da wir die Dynamik eines Spinvektors also auch über die Dynamik der entsprechenden Spinwelle beschreiben können, muss es einen fundamentalen Zusammenhang der LLG zur KNSG geben. Dieser wird in der Arbeit erläutert und orientiert sich dabei an der berühmten Vorgehensweise aus [54], in der die Methode des Hamilton-Formalismus für nichtlineare Spinwellenprozesse gemäß [57] und [58] angewandt wird. Eine alternative Vorgehensweise ist die der stereographischen Projektion, die als mathematisches Rüstzeug der Funktionentheorie angesehen wird.

Die Beschreibung magnetodynamischer Prozesse über eine Wellengleichung zeigt, dass ein ferromagnetisches System in einem weiten Bereich ähnliche Bedingungen, wie ein optisches System erfüllen muss. Dennoch gibt es für magnetodynamische Systeme viele Vorteile. Ganz wesentlich ist sicherlich die geringere Gruppengeschwindigkeit der Spinwellenanregung, die mit ca.  $10^6 \frac{m}{s}$  deutlich unter der Lichtgeschwindigkeit liegt. Sämtliche zeitaufgelöste Untersuchungen lassen sich folglich wesentlich leichter realisieren. Außerdem liegen die Größenordnungen von Dispersion und Beugung viel näher beieinander, was die gleichzeitige Berücksichtigung dieser beiden Größen in der KNSG ermöglicht. Das ist gerade für die Analyse zweidimensionaler, nichtlinearer Wellenpakete von Bedeutung. Letztlich besteht ein weiterer Vorteil in der Zugänglichkeit der experimentellen Messung, da Oberflächenmessungen in vielen Fällen ausreichend sind, um das System zu charakterisieren [23].

Gehorcht ein Wellenpaket der KNSG, ist es unter gewissen Umständen möglich, dass sich Dispersion und Brechung durch die nichtlinearen Effekte kompensieren. Dieses kann dann zu der in [23] beobachteten raumzeitlichen Selbstfokussierung führen. Die Anregung geschieht zumeist über eine Antenne, über die Pulse im Mikrowellenbereich in das System eingekoppelt werden können <sup>1</sup>. Über ein angelegtes äußeres Magnetfeld kann über die Richtung einer propagierenden Spinwelle entschieden werden. Dieses resultiert aus der Präzessionsbewegung jedes einzelnen Spins um dieses externe Magnetfeld, womit seine Richtung explizit ausgezeichnet ist.

In Kapitel 3 werden wir die möglichen anregbaren Moden in einer dünnen ferromagnetischen Schicht kurz vorstellen. Kapitel 4 beschäftigt sich dann mit den Zusammenhängen

---

<sup>1</sup>Die selbstfokussierten Wellenpakete werden Mikrowellenkugeln genannt und können über die Brillouin Light Scattering (BLS) - Methode [23] detektiert werden.

zwischen LLG und KNSG. In Kapitel 5 erfolgt die Analyse der dynamischen Entwicklung einer expliziten Lösung der KNSG unter Hinzunahme von Störtermen. In realen Systemen wird man beispielsweise immer Dämpfungseinflüsse berücksichtigen müssen, die erst durch entsprechende Anregungen kompensiert werden können, wodurch die Lösungen langlebiger wird. Im Wesentlichen ist es dieser Anregungsprozess, der über die Existenz und Selektion einer Lösung in einem System entscheidet, welches der KNSG gehorcht.

Kapitel 6 soll diesen Selektionsmechanismus genauer beleuchten. Unter periodischen Randbedingungen schränkt sich der Lösungsraum der KNSG ein, womit nur noch diskrete Frequenzen  $\Omega$  der Anregung<sup>2</sup> zu Lösungen führen. Mit der notwendigen Gallilei-Invarianz der KNSG lassen sich alle Lösungen in Abhängigkeit des selektierten  $k$ -Wellenvektors, der die Quantisierungsbedingung gemäß der periodischen Randbedingungen erfüllen muss, angeben. Es ist dabei auffällig, dass es für Multisolitonenkomplexe bei gewisser Energie und Frequenz stets symmetrische und antisymmetrische Lösungen in einem kleinen Frequenzbereich gibt. Dieses Verhalten findet kein Analogon in der linearen Physik und zeigt nochmals, wie leicht sich nichtlineare Phänomene in der Natur manifestieren können.

Letztlich gelingt es, mit den über die Anregungsfrequenz  $\Omega$   $k$ -selektierten Moden, die in [15] beschriebenen Möbius-Moden zu charakterisieren und in den Rahmen einer simplen Theorie einzubinden. Das dynamische Verhalten jeder einzelnen Mode kann dann wieder störungstheoretisch untersucht werden. Die gesamte Arbeit wird sich wie folgt gliedern:

Ausgehend von der Landau-Lifshitz-Gleichung in Kapitel 2 werden wir die Dispersionsrelationen von Moden in dünnen ferromagnetischen Schichten herleiten [51], [30], [52]. Die numerische Auswertung der LLG in der stereographischen Projektionsmethode ist bewusst in den Anhang gestellt, um die stringente Vorgehensweise beim Auffinden des Möbius-Solitons nicht zu verlieren. Nach Einführung der KNSG als Wellengleichung, besteht der analytische Auswertungsteil aus einer störungstheoretischen Betrachtung der KNSG in Bezug auf diverse Störterme, sowie der theoretischen Beschreibung der zunächst mystisch erscheinenden Möbius-Moden.

Im Anhang wird dann ein Verfahren zur numerischen Implementierung der LLG vorgestellt und für unterschiedliche Parameter ausgewertet werden. Dieser Anhang dient eher dem Gesamtverständnis magnetodynamischer Prozesse und soll die Dynamik in der LLG eingehend visualisieren. Die analytische Auswertung dieser Differentialgleichung soll nicht Aufgabe dieser Diplomarbeit sein. Man wird sonst, entsprechend den anfänglichen Beschreibungen, mit den Methoden der Nichtlinearen Physik das System auf Stabilität, Bifurkationsverhalten und Strukturbildung etc. untersuchen müssen. Es sei in diesem Zusammenhang auf [17] verwiesen, in dem diese Untersuchungen für die stereographisch projizierte LLG durchgeführt wurde.

Die Vorgehensweise und Zusammenstellung dieser Arbeit basiert auf den chronologischen Überlegungen, die zur Charakterisierung des 'symmetriebrechenden' Möbius-Solitons angestellt wurden. Anfänglich sind wir davon ausgegangen, dass die Ursache dieses Solitons in der Störung durch eine entsprechende parametrische Anregung zu fin-

---

<sup>2</sup>Parametrische Anregung  $\propto \Psi$  oder  $\propto \Psi^*$ .



---

den ist. Die Vermutung bestand darin, dass es durch diese Anregung hervorgerufene Instabilitäten gibt, durch die die Phasenakkumulation entscheidend bestimmt wird, so dass eine Phase relativ plötzlich einen unerwarteten Phasensprung machen kann. Die störungstheoretische Beschreibung hat derartige Ergebnisse nicht liefern können, vielmehr hat sie schließlich dazu beigetragen den aktiven, nichtlinearen Ring wesentlich fundamentaler als eine Art quantenmechanisches System zu betrachten, in dem alle Lösungen vorgegeben sind und nur entsprechend selektiert werden müssen. Selektiert wird dabei durch die Frequenz der parametrischen Anregung, die die, aufgrund der periodischen Randbedingungen quantisierten Lösungen, in diskreten Abständen anregen und stabilisieren kann. Die Evolutionsgleichung für Envelope-Solitonen kann diesen Selektionsmechanismus nicht begründen, da in der Beschreibung eines Envelope-Solitons die Wellenvektor-Abhängigkeit der Phase verloren geht und damit nach einer Periode keine ungewöhnliche Phasenakkumulation sichtbar wird.

## 2 Die Landau-Lifshitz-Gleichung

Mit der Landau-Lifshitz-Gleichung für magnetische Modellsysteme ist es möglich, dynamische Magnetisierungsprozesse als nichtlineare Vektorgleichung zu formulieren. Im Jahr 1935 wurde diese vektorwertige Bewegungsgleichung erstmals phänomenologisch von L.D.Landau und E.M.Lifshitz [33] eingeführt. Sie dient als Ausgangspunkt für sämtliche Untersuchungen auf dem Gebiet der Ferromagneten, deren physikalische Eigenschaften erst vergleichsweise spät weitgehend verstanden wurden. Ihre Gültigkeit erstreckt sich vorwiegend auf den Bereich tiefer Temperaturen, die unterhalb der Curie-Temperatur liegen.

Im folgenden Abschnitt soll eine kurze Herleitung dieser Gleichung gegeben werden. Dabei wird insbesondere Wert auf die Analogie zwischen Magnetisierungsgleichung und ihrem quantenmechanischen Gegenstück, der dynamischen Grundgleichung für den freien Elektronenspin, gelegt. So wie in der klassischen Mechanik beispielsweise eine Beziehung zwischen Drehimpuls und Drehmoment besteht, gibt es für magnetische Anwendungen eine ähnliche Beziehung zwischen Drehimpuls und magnetischem Dipolmoment, welches eng mit der Magnetisierung verknüpft ist.

Experimentelle Erfahrungen zeigen, dass die reine Präzessionsbewegung, wie sie durch die LLG beschrieben wird, nicht ausreicht, um die dynamischen Prozesse in magnetischen Medien zu verstehen. So wird in **2.1.4** auf erneut klassisch, phänomenologische Art ein zusätzlicher Dämpfungsterm eingeführt.

### 2.1 Ableitung der Grundgleichung

#### 2.1.1 Zeitliche Entwicklung des quantenmechanischen Erwartungswertes

Ausgangspunkt für die Ableitung der LLG soll die quantenmechanische Betrachtung für die zeitliche Entwicklung des Spinoperators sein. Aus [49] ist die zeitliche Entwicklung des Erwartungswertes einer Observablen  $A$  bekannt. Im normierten Zustand  $|\psi(t)\rangle$  des Systems gilt für ihn zum Zeitpunkt  $t$

$$\langle A \rangle (t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle . \quad (2.1.1)$$

Die zeitliche Entwicklung von Gleichung (2.1.1) ergibt dann

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle (t) = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H_{Op}(t)] \rangle + \langle \partial_t A \rangle . \quad (2.1.2)$$

Hierbei wurde die zeitliche Entwicklung des Zustandes  $|\psi(t)\rangle$  eingesetzt, die über die Schrödinger-Gleichung gegeben ist:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_{Op}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (2.1.3)$$

Die fundamentale Bedeutung von Gleichung (2.1.2) manifestiert sich im Ehrenfestschen Theorem, in dem die Erwartungswerte der Observablen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{P}$  für den Hamilton-Operator  $H_{Op} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(\mathbf{R})$  berechnet werden. Als Resultat erhält man in diesem Theorem zwei Gleichungen, die stark an die klassischen Hamilton-Gleichungen für ein Teilchen erinnern, sie aber nur im Fall gewisser Potentiale exakt widerspiegeln [49]. Dennoch zeigt diese kurze Abhandlung über die zeitliche Entwicklung von Erwartungswerten, wie eng quantenmechanische Observablen und klassische Größen miteinander verbunden sind. Oftmals ist es deshalb von Nutzen, Analogien in der Dynamik klassischer Größen mit ihren entsprechenden quantenmechanischen Gegenstücken zu finden und auszuarbeiten.

### 2.1.2 Zeitliche Entwicklung des Spinoperators

Für den Spinoperator kann Gleichung (2.1.2) ohne explizite Zeitabhängigkeit dargestellt werden:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \mathbf{S}_{Op} \rangle (t) = \langle [\mathbf{S}_{Op}, H_{Op}(t)] \rangle. \quad (2.1.4)$$

Im Fall der Wechselwirkung dieses Spins mit einem zeitabhängigen äußeren Feld lässt sich der Hamiltonian in Form des Zeeman-Terms [20] aufschreiben:

$$H_{Op}(t) = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \mathbf{S}_{Op} \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (\text{im Vakuum}). \quad (2.1.5)$$

Dabei bezeichnet  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton, während  $g$  den sogenannten gyromagnetischen Faktor darstellt, der für ein freies Elektron in etwa den Wert 2 annimmt.

Unter Verwendung der fundamentalen Kommutator-Relationen für die Komponenten des Spins  $\mathbf{S}$  erhält man aus (2.1.4)

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{S}_{Op} \rangle (t) = \frac{g\mu_B}{\hbar} (\langle \mathbf{S}_{Op} \rangle (t) \times \mathbf{B}(t)). \quad (2.1.6)$$

### 2.1.3 Verbindung zur klassischen Mechanik und zum Elektromagnetismus

Die tiefe Analogie zwischen der in 2.1.2 abgeleiteten zeitlichen Entwicklung des Spinoperators und der entsprechenden zeitlichen Entwicklung des klassischen Drehimpulses kann schließlich über Gleichung (2.1.6) verifiziert werden.

Der klassische Drehimpuls ist definiert durch

$$\mathbf{L} = m_e (\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \quad (2.1.7)$$

Hierbei bezeichnet  $m_e$  die Masse des Elektrons, während die dickgedruckten Buchstaben Vektoren darstellen. Ein sich bewegendes Elektron erzeugt gezwungenermaßen ein Dipolmoment, welches letztlich mit dem Drehimpuls in Verbindung gebracht werden kann.

Aus der Elektrodynamik ist die infinitesimale Kraft  $d\mathbf{F}$  auf ein stromdurchflossenes Leiterstück im Magnetfeld mit der Kraftflussdichte  $\mathbf{B}$  bekannt. Sei  $I$  der Strom, der durch dieses Leiterstück der Länge  $dl$  fließt, dann ergibt sich

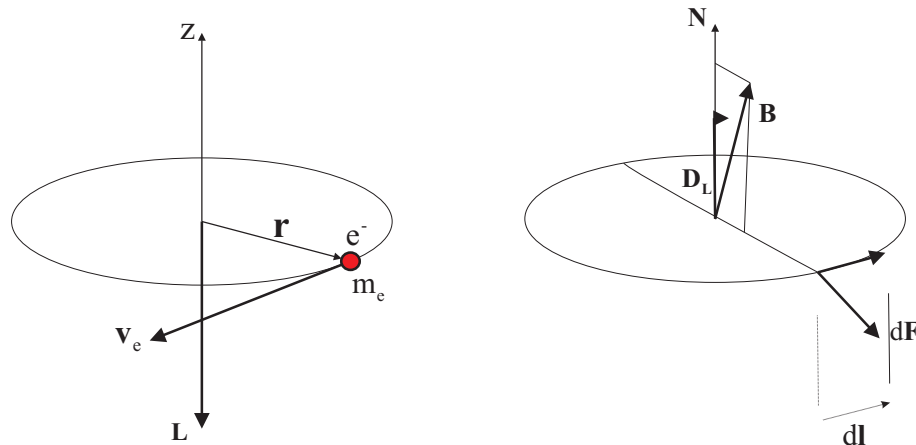
$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (2.1.8)$$

Das Elektron durchlaufe nun im ortsfesten Abstand  $\mathbf{r}$  einen Ring mit Fläche  $A$  (Abbildung 2.1), der sich aus den Leiterstücken  $dl$  zusammensetzt [24]. Unter Berücksichtigung des doppelten Kreuzproduktes erhält man nach Aufintegration von Gleichung (2.1.8) die Gleichung für das Drehmoment  $\mathbf{\Gamma}$

$$\mathbf{\Gamma} = I \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} = AN. \quad (2.1.9)$$

Die Definition des klassischen Dipolmomentes  $\mathbf{D}_L$  lautet:

$$\mathbf{D}_L = I \mathbf{A}, \quad \text{mit} \quad I = \frac{q_e v}{2\pi r}, \quad q_e, v < 0. \quad (2.1.10)$$



**Abbildung 2.1:** Grafische Darstellung der Beziehung zwischen Drehimpuls und magnetischem Dipolmoment.

Da  $\mathbf{v}_e$  stets tangential zum stromdurchflossenen Ring liegt, hat man somit die direkte Beziehung zwischen (2.1.7) und (2.1.10) gefunden. Dabei sei wegen  $q_e < 0$  auf die antiparallele Orientierung von Drehimpuls und magnetischem Moment hingewiesen:

$$\mathbf{D}_L = \frac{q_e}{2m_e} \mathbf{L}. \quad (2.1.11)$$

In völliger Analogie zur geometrischen Beziehung von magnetischem Dipolmoment und Drehimpuls erhält man eine Beziehung zwischen magnetischem Dipolmoment und Spin. Der Proportionalitätsfaktor ist hierbei das sogenannte gyromagnetische Verhältnis  $\gamma$ ,

welches für den freien Elektronenspin in etwa den Wert  $\gamma = 2.0 \cdot 1.001159657$  annimmt [24].

$$\mathbf{D}_S = \gamma \langle \mathbf{S} \rangle, \quad \gamma = \frac{g g_e}{2 m_e} = \frac{g \mu_B}{\hbar} < 0, \quad \mu_B = \text{Bohrsches Magneton.} \quad (2.1.12)$$

Damit lässt sich Gleichung (2.1.6) schreiben als

$$\frac{d}{dt} \mathbf{D}_S(t) = \gamma [\mathbf{D}_S(t) \times \mathbf{B}(t)]. \quad (2.1.13)$$

Führt man nun gemäß [4] die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  als Summe aller Dipolmomente pro Einheitsvolumen ein, so erhält man die Landau-Lifshitz-Gleichung:

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{D}_S}{\text{Einheitsvolumen}}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{M}(t) = \mu_0 \gamma [\mathbf{M}(t) \times \mathbf{H}(t)]. \quad (2.1.14)$$

Mit der Definition von  $\gamma_0$  als neuem Vorfaktor führt dies auf die Standardversion der ungedämpften LLG:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}(t) = -\gamma_0 [\mathbf{M}(t) \times \mathbf{H}(t)], \quad \gamma_0 = \mu_0 \frac{g |\mu_B|}{\hbar} = \mu_0 |\gamma|. \quad (2.1.15)$$

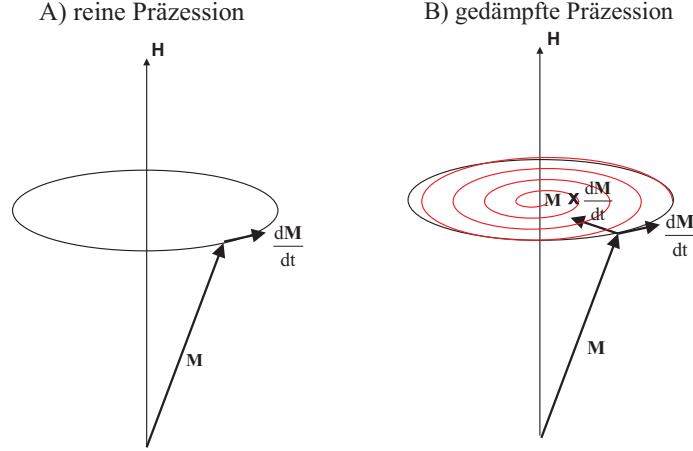
Gleichung (2.1.15) beschreibt offensichtlich eine Präzessionsbewegung des Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}$  um das zeitabhängige Magnetfeld  $\mathbf{H}(t)$ . Dieses ist daraus ersichtlich, dass sukzessive Multiplikation von (2.1.15) mit  $\mathbf{M}$  bzw.  $\mathbf{H}(t)$ , unter Verwendung der Rechenregeln für das doppelte Kreuzprodukt, auf die Gleichungen (2.1.16) führen:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{M}(t)]^2 = 0, \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{H}(t)] = 0. \quad (2.1.16)$$

Magnetisierungsbetrag und Winkel zwischen Magnetisierungsvektor und angelegtem Magnetfeld  $\mathbf{H}$  sind somit Erhaltungsgrößen des Systems. Die Kreisfrequenz für ein freies Elektron errechnet sich über  $\omega_0 = \gamma_0 |\mathbf{H}|$ . Experimentelle Ergebnisse zeigen jedoch, dass die Magnetisierung der Probe nach einer gewissen, für jedes Medium charakteristischen Zeit, gesättigt ist. Eine anfängliche Präzessionsbewegung muss also zu einer nahezu Parallelstellung von Magnetisierungsvektor und magnetischem Feldvektor führen. Dies soll im folgenden Abschnitt erläutert werden, wobei die Dämpfung auf einem rein phänomenologischen Weg eingeführt wird.

#### 2.1.4 Landau-Lifshitz-Gilbert-Gleichung

Das in 2.1.3 beschriebene Modell der Präzession des Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}$  um das Magnetfeld  $\mathbf{H}$  ist nicht ausreichend, um zum Beispiel den Hysterese-Effekt in magnetischen Medien zu erklären, bei dem mit zunehmender Feldstärke  $\mathbf{H}$  die Hystereseschleife in die sogenannte 'Neukurve' oder 'Sättigungskurve' hineinläuft. An dieser Stelle ist es



**Abbildung 2.2:** Präzession der Magnetisierung. (A) Präzession ohne Dämpfung gemäß (2.1.16). (B) gedämpfte Präzession (Kreuzprodukt beschreibt Gilbert-Dämpfung).

notwendig, in der Präzessionsgleichung (2.1.15) einen zusätzlichen Dämpfungsterm einzufügen. Diesem zusätzlichen dissipativen Effekt wird in [24] durch Ersetzung des Magnetfeldes  $\mathbf{H}$  durch ein effektives Magnetfeld  $\mathbf{H}_{eff}$  Rechnung getragen. Dissipationen vom Ohmschen Typ haben die Form

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H} - \xi \frac{d\mathbf{M}}{dt}, \quad \xi = \frac{\alpha}{\gamma_0 M_S}. \quad (2.1.17)$$

In (2.1.17) wurde ein Dämpfungsparameter  $\alpha$  eingeführt;  $M_S$  ist die Sättigungsmagnetisierung, die dem Betrag des Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}$  entspricht. Für das oftmals verwendete Yttrium-Ionen-Garnat beträgt  $4\pi M_S$  in etwa 1750 Gauss [55]. Nach Einsetzen von Gleichung (2.1.17) in Gleichung (2.1.15) erhält man die Landau-Lifshitz-Gilbert-Gleichung als dynamische Grundgleichung für die Bewegung des Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}(t)$ :

$$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = -\gamma_0 [\mathbf{M}(t) \times \mathbf{H}_{eff}(t)] + \frac{\alpha}{M_S} \left[ \mathbf{M}(t) \times \frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} \right]. \quad (2.1.18)$$

Die dynamische Größe der zeitlichen Ableitung des Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}(t)$  kann nun rekursiv durch (2.1.15) ersetzt werden, und man erhält wie in [24] die Landau-Lifshitz-Gilbert-Gleichung in der Form

$$\left( \frac{1 + \alpha^2}{\gamma_0} \right) \cdot \frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = - [\mathbf{M}(t) \times \mathbf{H}_{eff}(t)] - \frac{\alpha}{M_S} [\mathbf{M}(t) \times [\mathbf{M}(t) \times \mathbf{H}_{eff}(t)]]. \quad (2.1.19)$$

Gleichung (2.1.19) hat für den Mikromagnetismus in etwa die Bedeutung wie die Navier-Stokes-Gleichung für die Fluid-Dynamik. In ihr ist die Gilbert-Dämpfung phänomenologisch eingeführt worden. Es existieren auch alternative Dämpfungen, wie z.B. die Bloch-Bloembergen-Dämpfung  $\alpha_{\perp} M_x \mathbf{e}_x + \alpha_{\perp} M_y \mathbf{e}_y + \alpha_{\parallel} (M_z - M_S) \mathbf{e}_z$ , die oftmals in Verbindung mit ferromagnetischer Resonanz verwendet wird.

Eine Vereinfachung von Gleichung (2.1.19) erhält man bei kleiner Dämpfung, indem Terme proportional zu  $\alpha^2$  vernachlässigt werden. Des Weiteren wird  $\mathbf{H}_{eff}$  oftmals auf die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  normiert, so dass man letztlich eine Gleichung erhält, die vom gyromagnetischen Verhältnis  $\gamma$ , der Dämpfungskonstanten  $\alpha$  und der Sättigungsmagnetisierung  $M_S$  abhängt:

$$\frac{1}{\gamma} \partial_t \mathbf{M} = -\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} - \frac{\alpha}{M_S} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}). \quad (2.1.20)$$

Das effektive Magnetfeld  $\mathbf{H}_{eff}$  kann man u.a. aus dem Energie-Dichte-Funktional gewinnen. An der Stelle  $\mathbf{r}$  im Bezugssystem des entsprechenden Magnetisierungsvektors lässt es sich als funktionale Ableitung der Energie schreiben:

$$\mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}}. \quad (2.1.21)$$

Wir werden im Folgenden die Beiträge zum effektiven Magnetfeld rein phänomenologisch herleiten und in die LLG einbinden.

## 2.2 Effektive Felder

Die zunächst unbekannteste Größe in (2.1.20) ist das effektive Magnetfeld  $\mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t)$ , welches sich in realen Systemen als Summe verschiedener Größen schreiben lässt. Welche Größen in Betracht gezogen werden müssen, hängt natürlich stark von der Versuchsscharakteristik ab. Für ein isotropes, ferromagnetisches Medium besteht  $\mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t)$  im Wesentlichen aus fünf Teilgrößen [55]:

$$\mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{ext} + \mathbf{h}_p(t) + \mathbf{H}_{dem} + \mathbf{h}_{dip}(t) + \mathbf{h}_{ex}(\mathbf{r}, t). \quad (2.2.1)$$

$\mathbf{H}_{ext}$  ist das angewandte, statisch externe Feld. Mit großen externen Feldern kann man die Richtung der Sättigungsmagnetisierung steuern, da der Magnetisierungsvektor  $\mathbf{M}$  sich unter Dämpfung stets parallel zum effektiven Magnetfeld  $\mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t)$  ausrichten will.  $\mathbf{h}_p(t)$  trägt dem zeitabhängigen Mikrowellen-Pump-Feld Rechnung.  $\mathbf{H}_{dem}$  beschreibt das Demagnetisierungsfeld, welches das statische Dipolfeld beschreibt, das durch die statische Magnetisierung  $\mathbf{M}_S$  generiert wird. Für endliche Proben ist dieses Feld stark verbunden mit der Form des Mediums. Zusammen mit  $\mathbf{H}_{ext}$  bildet  $\mathbf{H}_{dem}$  das statisch interne Feld  $\mathbf{H}_{int}$ . Damit ist klar, dass  $\mathbf{H}_{ext}$  nur unter bestimmten Bedingungen parallel zu  $\mathbf{H}_{int}$  ist. Die Dipol-Dipol-Wechselwirkung zwischen den Spins, die im Magnetfeld präzedieren, wird über  $\mathbf{h}_{dip}(t)$  eingebunden. Der letzte Term in (2.2.1) beschreibt die Austauschwechselwirkung, die letztlich nichts anderes als eine dynamische Antwort auf das Spin-System ist. Diese einzelnen Terme werden in den folgenden Unterabschnitten genauer untersucht. Dabei wird auch ein zusätzlicher Anisotropie-term in Betracht gezogen werden.

### 2.2.1 Externes Feld $\mathbf{H}_{ext}$

Meist wird das externe Feld als groß genug angenommen, um eine Probe entlang seiner Richtung zu sättigen. Externe Felder sind relativ zur Probe in jede beliebige Richtung anlegbar. Dennoch gibt es wesentliche Unterschiede, die sich vor allen Dingen bei der Detektion resultierender Spinwellen manifestieren.

Welche Mode in einem System angeregt wird, hängt nämlich stark von der relativen Richtung zwischen Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und angelegtem Magnetfeld ab. Beispielsweise kann beim Anlegen des externen Feldes senkrecht zur Probe nur die 'Magnetostatische Vorwärts-Volumen-Mode' (MSFVM) angeregt werden, während bei zur Probe parallelen Magnetfeldern  $\mathbf{H}_{ext}$  sowohl die 'Magnetostatische Oberflächenmode' (MSSM) als auch die 'Magnetostatische Rückwärts-Volumen-Mode' (MSBVM) angeregt werden kann. Die resultierenden Spinwellen können dann in einer zueinander orthogonalen Probenrichtung detektiert werden. In welchen Frequenzbereichen diese unterschiedlichen Moden sichtbar werden, wird in Kapitel 3 erläutert werden. Dabei sei schon auf das besondere Charakteristikum der (MSBVM) hingewiesen, die negative Dispersion besitzt und bei der die Gruppengeschwindigkeit antiparallel zum Wellenvektor  $\mathbf{k}$  ist.

Bekanntlich lässt sich die Landau-Lifshitz-Gleichung in die sogenannte (2+1)-dimensionale Nichtlineare Schrödinger-Gleichung entwickeln [54]. In ihr spiegelt sich das angelegte Magnetfeld  $\mathbf{H}_{ext}$  dadurch wider, dass die Vorzeichen von Dispersion, Beugung und Nichtlinearität so gegeben sind, dass sich ein Spinwellenpaket gemäß dem Lighthillkriterium [36] stabilisieren kann und es zur Propagation von sogenannten Spinwellenkugeln kommt. Diese wurden erstmalig in [7] beobachtet.

### 2.2.2 Mikrowellen-Pump-Feld $\mathbf{h}_p(t)$

Das Mikrowellen-Pump-Feld wird oftmals als zeitabhängiges Anregungsfeld für ein Spin-System benutzt. Dabei kann der gesamten Probe dieses Mikrowellenfeld aufgezwungen werden, so dass alle Spins global angeregt werden. Natürlich ist es auch möglich, eine derartige Anregung an einem lokalisierten Ort in der Probe durchzuführen. Auf diese Weise lassen sich z.B. beliebige Solitonenkomplexe erzeugen, die mit einer gewissen Geschwindigkeit durch das Medium propagieren.

Es ist zudem ein probates Mittel, Mikrowellen-Pump-Felder als Verstärkungsfelder einzusetzen, um die durch das Medium und die Apparatur hervorgerufenen Dämpfungsbeiträge aufzuheben, d.h. den Solitonenkomplex langlebiger zu machen.

Im Wesentlichen unterscheidet man drei Arten des Pumpens.  $\mathbf{h}_p(t)$  kann parallel zum internen Feld  $\mathbf{H}_{int}$  angelegt werden. Dieses Pumpen trägt folgerichtig den Namen 'Paralleles Pumpen'. Entsprechend sind dann die Begriffe des 'Senkrechten Pumpens' und des Pumpens unter einem beliebigen Winkel definiert.

### 2.2.3 Demagnetisierungsfeld $\mathbf{H}_{dem}$

Das durch den statischen Magnetisierungsvektor  $\mathbf{M}_S$  hervorgerufene Dipolfeld wird als Demagnetisierungsfeld bezeichnet. In vielen theoretischen Abhandlungen wird dieses Feld



implizit vernachlässigt, da seine Beiträge oftmals in das externe Feld  $\mathbf{H}_{ext}$  eingebunden werden. Liegt beispielsweise  $\mathbf{M}_S$  in Richtung von  $\mathbf{e}_z$ , so ist dieses Feld gegeben durch [55]

$$\mathbf{H}_{dem} = -4\pi M_S \mathbf{N} \mathbf{e}_z. \quad (2.2.2)$$

Für eine ellipsoide Probe ist  $\mathbf{N}$  ein  $3 \times 3$  Tensor [55]. Wenn die Hauptachsen dieser Ellipse mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, sind nur die Diagonalelemente dieses Tensors  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  und  $N_{zz}$  ungleich Null. Falls  $\mathbf{H}_{ext}$  parallel zu  $\mathbf{M}_S$  und  $\mathbf{H}_{ext}$  in  $z$ -Richtung angelgt ist, gilt

$$\mathbf{H}_{dem} = -4\pi M_S N_{zz} \mathbf{e}_z. \quad (2.2.3)$$

Gemäß [55] kombinieren  $\mathbf{H}_{ext}$  und  $\mathbf{H}_{dem}$  zum statischen, internen Feld  $\mathbf{H}_{int}$ :

$$\mathbf{H}_{int} = \mathbf{H}_{ext} + \mathbf{H}_{dem}. \quad (2.2.4)$$

Das bedeutet im Fall obiger Annahmen, dass das interne Feld parallel zur  $z$ -Achse liegt:

$$\mathbf{H}_{int} = (H_{ext} - 4\pi M_S N_{zz}) \mathbf{e}_z. \quad (2.2.5)$$

Im statischen Gleichgewicht muss  $\mathbf{M}_S$  stets parallel zu  $\mathbf{H}_{int}$  sein. Im Folgenden werden wir das Demagnetisierungsfeld in ein allgemeines Dipolfeld  $\mathbf{H}_{dip}(t)$  einbinden. Für detailliertere Ausführungen zum Demagnetisierungstensor sei auf [55] verwiesen.

#### 2.2.4 Das Dipolfeld $\mathbf{h}_{dip}(t)$

Das Dipolfeld ist das dynamische, magnetische Feld, das aus der Dipol-Dipol-Wechselwirkung der präzedierenden magnetischen Momente im Spin-System resultiert. Es kann quasi als Entmagnetisierungsfeld aufgrund räumlicher Ladungsverteilung angesehen werden. Das Dipolfeld genügt den Maxwell-Gleichungen in der magnetostatischen Approximation, wobei elektromagnetische Wellenpropagationen vernachlässigt werden:

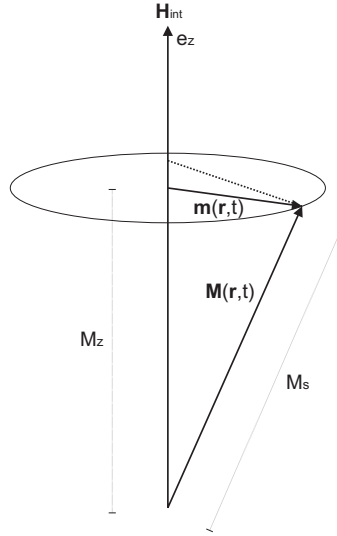
$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{h}_{dip}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla \cdot [\mathbf{h}_{dip}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \mathbf{m}(\mathbf{r}, t)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$  beschreibt die dynamische Magnetisierung, also die Vektorkomponente des Magnetisierungsvektors, die stets orthogonal zu  $\mathbf{H}_{int}$  steht. Der gesamte Magnetisierungsvektor lässt sich schreiben zu

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = M_S \mathbf{e}_z + \mathbf{m}(\mathbf{r}, t). \quad (2.2.7)$$

Im Folgenden führen wir das allgemeine Dipolfeld  $\mathbf{H}_{dip}(t) = \mathbf{h}_{dip}(t) + \mathbf{H}_{dem}$  ein. Gleichung (2.2.6) lässt sich dann unter Berücksichtigung von (2.2.3) und (2.2.7) mit  $N_{zz} = 1$  umformulieren zu

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_{dip}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla \cdot [\mathbf{H}_{dip}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$



**Abbildung 2.3:** Zerlegung des Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  in eine Komponente parallel zu  $\mathbf{H}_{int}$  und eine dazu senkrechte dynamische Magnetisierung  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ .

In Abbildung (2.3) sind die Zusammenhänge zwischen Magnetisierung und dynamischer Magnetisierung  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$  verifiziert. Die dynamische Magnetisierung ist letztlich der Magnetisierungsbeitrag, der für die Spinwellenbildung die entscheidende Rolle spielt, deshalb ist dieser Beitrag häufig in eine räumliche Fourierreihe zerlegt [55]:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}_0(t) + \sum \mathbf{m}_{\mathbf{k}}(t)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (2.2.9)$$

Mit (2.2.8) ist das Dipolfeld  $\mathbf{H}_{dip}(t)$  konservativ und besitzt ein Potential  $\phi(\mathbf{r}, t)$ . Damit gilt:

$$\mathbf{H}_{dip}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi, \quad (2.2.10)$$

$$\Delta\phi = -\rho_M, \quad \rho_M = -4\pi\nabla\mathbf{M}, \quad (2.2.11)$$

$\rho_M$  = magnetische Pseudo-Volumen-Ladungsdichte.

Es sei an dieser Stelle nochmals auf den fundamentalen Zusammenhang zwischen Magnetfeld  $\mathbf{H}$ , magnetischer Induktion  $\mathbf{B}$  und Magnetisierung  $\mathbf{M}$  hingewiesen, um möglichen Fehlerquellen in Bezug auf die Poisson-Gleichung aus dem Weg zu gehen [41]:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \quad (2.2.12)$$

(2.2.11) entspricht einer Poisson-Gleichung, deren Lösung nun berechnet werden kann. Falls die das Potential  $\phi(\mathbf{r}, t)$  erzeugenden Pseudovolumenladungsdichten  $\rho_M$  bekannt sind und keine speziellen Randbedingungen auf Grenzflächen zu erfüllen sind, reicht es

völlig aus, die Lösung in allgemeiner Form als Poisson-Integral zu schreiben:

$$\phi_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = - \int \frac{\nabla \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (2.2.13)$$

Bei zusätzlichen Randbedingungen an der Oberfläche des zu integrierenden Gebietes, z.B.  $\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{M} = \mathbf{nM}$  mit Normalenvektor  $\mathbf{n}$ , ist es sinnvoll, (2.2.13) in ein Oberflächenintegral umzuwandeln. Unter Ausnutzung des Gausschen Satzes [41] ergibt sich

$$\phi_M(\mathbf{r}) = - \int_V d^3r' \frac{\nabla \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \int_{S(V)} dS' \mathbf{n}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.2.14)$$

Über Gleichung (2.2.14) kann schließlich das Dipolfeld für eine exemplarische Probe explizit berechnet werden.

### 2.2.5 Die Austauschwechselwirkung

Es gibt eine Vielzahl von festen Körpern, die in einem weiten Temperaturbereich eine Form von Fernordnung aufweisen. Diese Fernordnung manifestiert sich dadurch, dass die magnetischen Momente der Atome nach Betrag und Orientierung übereinstimmen. Abschalten externer Magnetfelder hat nur geringen Einfluss auf diese Form von Ordnung, die nahezu beliebig lange bestehen kann, d.h. die Fernordnung ist faktisch nicht an das Vorhandensein äußerer Felder gekoppelt. Dieser Effekt weist also darauf hin, dass die magnetischen Momente untereinander wechselwirken müssen. Die Dipol-Dipol-Wechselwirkung kann diese Beobachtungen nicht erklären, da ihre Größenordnung besonders in isolierenden Magneten vergleichsweise gering ist. Das folgende Rechenbeispiel belegt diese Vermutung. Für das Feld eines magnetischen Dipols  $\mathbf{m}$  gilt [47]

$$\mathbf{B}_{Dipol} = \mu_0 \frac{3(\mathbf{m}\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5}. \quad (2.2.15)$$

Dies bedeutet für einen Gitterabstand von  $1 \text{ \AA}$  unter Vernachlässigung der Winkelabhängigkeit:

$$B_{Dipol} \approx \mu_0 \frac{\mu_B}{r^3} \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{10^{-23} Am^2}{10^{-30} m^3} \approx 1,5T. \quad (2.2.16)$$

Also beträgt die magnetische Energie eines zweiten Momentes der Größenordnung  $\mu_B$  mit demselben Abstand:

$$E = \mu_B B \approx \mu_0 \frac{\mu_B^2}{r^3} \approx 10^{-23} Am^2 \cdot 1,5T \approx 9 \cdot 10^{-5} eV. \quad (2.2.17)$$

Die Ordnungstemperatur errechnet sich damit zu  $T = \frac{E}{k_B} \approx 0,3K$ , wobei  $k_B$  die Boltzmann-Konstante ist. Sie ist damit für typische Ordnungstemperaturen ( $\approx 100K$ ) viel zu klein [30]. So ist es notwendig, im effektiven Magnetfeld einen Term zu berücksichtigen, der den beschriebenen Beobachtungen Rechnung trägt, die sogenannte Austauschwechselwirkung.

Historisch gesehen waren Heisenberg und Frenkel die ersten, die eine direkte Austauschwechselwirkung angaben und den folgenden Hamilton-Operator niederschrieben ( $\mathbf{H}_{Op,f}$  kennzeichnet den intrinsisch eingeführten Operator):

$$\mathbf{H}_{Op,f} = - \sum_{i,j} J_{i,j} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j. \quad (2.2.18)$$

$J_{i,j}$  ist das Austauschintegral;  $\mathbf{S}_i$  und  $\mathbf{S}_j$  stellen die zu den Atomen  $i$  und  $j$  gehörigen Spinoperatoren dar. Des Weiteren gilt  $J_{i,i} = 0 \forall i$ . (2.2.18) kann folgerichtig geschrieben werden als

$$\mathbf{H}_{Op,f} = -2 \sum_{i>j} J_{i,j} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j. \quad (2.2.19)$$

Die Funktion der Austauschintegrale basiert auf der energetischen Differenz zwischen paralleler und antiparalleler Spinstellung. Da Fermionen, wie man leicht aus der relativistischen Quantenmechanik und der Dirac-Gleichung sehen kann [50], total antisymmetrische Wellenfunktionen besitzen müssen, kann man die Austauschintegrale in geschlossener Form als Erwartungswert der Coulomb-Energie angeben. Seien  $\Upsilon$  und  $\Omega$  Teilchen mit Spin 1/2, wobei die Gesamtwellenfunktion  $\Sigma_{gesamt}(\Upsilon, \Omega)$  beider Teilchen sich aus Ortswellenfunktion  $\Psi_i(\mathbf{r}_i)$  und Spinfunktion  $X_{SM_S}(\Upsilon, \Omega)$  zusammensetzt. Kombinieren beide Teilchen zu Spin 0, d.h. antiparallele Spinstellung ( $A$ ), oder Spin 1, d.h. parallele Spinstellung ( $B$ ), wäre eine mögliche Gesamtwellenfunktion  $\Sigma_{gesamt}(\Upsilon, \Omega)$  [50],[21]:

$$\begin{aligned} (A) \Sigma_{gesamt}(\Upsilon, \Omega) &= X_{0,0}(\Upsilon, \Omega) \Psi_{\Upsilon}(\mathbf{r}_{\Upsilon}) \Psi_{\Omega}(\mathbf{r}_{\Omega}), \\ (B) \Sigma_{gesamt}(\Upsilon, \Omega) &= X_{1,1}(\Upsilon, \Omega) \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{\Upsilon}(\mathbf{r}_{\Upsilon}) \Psi_{\Omega}(\mathbf{r}_{\Omega}) - \Psi_{\Upsilon}(\mathbf{r}_{\Omega}) \Psi_{\Omega}(\mathbf{r}_{\Upsilon})), \\ X_{0,0}(\Upsilon, \Omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [X_{1/2}(\Upsilon) X_{-1/2}(\Omega) - X_{1/2}(\Omega) X_{-1/2}(\Upsilon)], \\ X_{1,1}(\Upsilon, \Omega) &= X_{1/2}(\Upsilon) X_{1/2}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Für parallele Spinstellung existieren natürlich zwei weitere symmetrische Spinwellenfunktionen gemäß den Auswahlregeln für die Quantenzahl  $M_S$ . Der Interessent sei für detailliertere Ausführungen auf beliebige Bücher zur Atom- und Molekülphysik verwiesen. (2.2.20) bedeutet für die Erwartungswerte der Coulomb-Energie  $\frac{e^2}{r_{12}}$  in den entsprechenden Gesamtwellenfunktionen:

$$\begin{aligned} E_A &= \left\langle \Psi_{\Upsilon}(\mathbf{r}_{\Upsilon}) \Psi_{\Omega}(\mathbf{r}_{\Omega}) \left| \frac{e^2}{r_{12}} \right| \Psi_{\Upsilon}(\mathbf{r}_{\Upsilon}) \Psi_{\Omega}(\mathbf{r}_{\Omega}) \right\rangle, \\ E_B &= \left\langle \Psi_{\Upsilon}(\mathbf{r}_{\Upsilon}) \Psi_{\Omega}(\mathbf{r}_{\Omega}) \left| \frac{e^2}{r_{12}} \right| \Psi_{\Upsilon}(\mathbf{r}_{\Upsilon}) \Psi_{\Omega}(\mathbf{r}_{\Omega}) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \Psi_{\Upsilon}(\mathbf{r}_{\Omega}) \Psi_{\Omega}(\mathbf{r}_{\Upsilon}) \left| \frac{e^2}{r_{12}} \right| \Psi_{\Upsilon}(\mathbf{r}_{\Omega}) \Psi_{\Omega}(\mathbf{r}_{\Upsilon}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Den zweiten Term in  $E_B$  bezeichnet man als Austauschintegral  $J_{12}$ . Offensichtlich gibt es also für die energetische Differenz zwischen paralleler und antiparalleler Spinstellung

einen direkten Zusammenhang zum Austauschintegral:

$$E_B - E_A = -J_{12}. \quad (2.2.22)$$

Die folgende quasiklassische Herleitung der Austauschwechselwirkung ist in enger Anlehnung an [8] gestaltet und soll die Proportionalität von  $\mathbf{H}_{aus}$  zu  $\nabla^2 \mathbf{M}$  zeigen. In der quasiklassischen Form und bei kontinuierlicher Magnetisierung (essentielle Nebenbedingung) kann (2.2.19) direkt über die Definition des Skalarproduktes der Spinnomente angegeben werden:

$$E_{aus} = -2JS^2 \sum_{i>j} \cos(\beta_{i,j}). \quad (2.2.23)$$

$\beta_{i,j}$  bezeichnet den Winkel zwischen den Spins  $\mathbf{S}_i$  und  $\mathbf{S}_j$ .  $J$  ist das Austauschintegral, das die Einheit einer Energie hat<sup>1</sup>. Durch Anwendung des Cosinussatzes  $|\mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i|^2 = 2S^2(1 - \cos(\beta_{i,j}))$  und Neueichung der Energie  $\mathbf{H}_{aus}$ , d.h. der konstante Term, der die Energie paralleler Spins beschreibt, wird in die neue Energie  $E'$  skaliert, erhält man

$$E'_{aus} = JS^2 \sum_{i>j} \left( \frac{1}{S} |\mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i| \right)^2. \quad (2.2.24)$$

Nehmen wir nun an, dass  $\mathbf{S}_i$  nah genug an  $\mathbf{S}_j$  liegt,  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  total differenzierbar ist und die Austauschwechselwirkung nur für nächste Nachbarn berücksichtigt wird (Ising-n-Vektor-Modell) [12], so gilt (2.1.12) folgend:

$$\frac{1}{S} |\mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i| \approx \frac{1}{M_S} |(\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla) \mathbf{M}(\mathbf{x}_i)|. \quad (2.2.25)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{M}$  wie üblich den Magnetisierungsvektor. Nach Einsetzen von (2.2.25) in (2.2.24) erhält man

$$E'_{aus} = JS^2 \sum_i \sum_{\mathbf{x}_{ij}} \left( \frac{1}{M_S} |(\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla) \mathbf{M}| \right)^2. \quad (2.2.26)$$

Sei  $\delta$  nun der Atomabstand und alle  $\mathbf{x}_{ij}$  in der Größenordnung von  $\delta$ , dann gilt mit  $E'_{aus} = \int F_{aus} d^3r'$ :

$$F_{aus} = \frac{A}{M_S^2} [(\nabla M_x)^2 + (\nabla M_y)^2 + (\nabla M_z)^2], \quad A = \eta JS^2 \delta^2. \quad (2.2.27)$$

$\eta$  hängt von der Kristallstruktur ab und zählt die Anzahl nächster Nachbarn ( $\eta = 1$  für eine lineare Spinkette). Damit ist wegen  $\mathbf{H}_{aus} = -\frac{\partial F_{aus}}{\partial \mathbf{M}}$ , vgl. [34]:

$$\mathbf{H}_{aus} = \frac{2A}{M_S^2} \nabla^2 \mathbf{M} = D \nabla^2 \mathbf{M}, \quad (2.2.28)$$

<sup>1</sup>Das Austauschintegral ist der Erwartungswert der Coulomb-Energie in den entsprechenden Wellenfunktionen.

$D$  ist die sogenannte Austauschwechselwirkungskonstante, die für Ferromagneten stets positiv ist [1]. Die in diesem Abschnitt abgeleitete Austauschwechselwirkung ist eine äußerst kurzreichweitige Wechselwirkung. Dies wird dadurch begründet, dass ihr Energiebeitrag zum effektiven Magnetfeld  $\mathbf{H}_{eff}$  aus dem Überlapp der Wellenfunktionen resultiert.

### 2.2.6 Das Anisotropiefeld

Bisher wurde das Medium stets als isotrop betrachtet. Experimentell kann man in ferromagnetischen Kristallen aber stets Richtungen leichter und schwerer Magnetisierung beobachten [30]. Die Ursache hierfür liegt in der Asymmetrie der Ladungsverteilung infolge der Spin-Bahn-Wechselwirkung, also auch der Wechselwirkung der magnetischen Momente mit dem elektrischen Feld des Kristallgitters [1]. Infolgedessen hat ein magnetischer Festkörper Vorzugsrichtungen, in die sich die Magnetisierung bevorzugt richtet, um die freie Enthalpie zu minimieren. Oftmals wird von gewissen axialen Anisotropien ausgegangen, deren Einfluss auf das effektive Magnetfeld sich in folgender Form darstellen lässt:

$$\mathbf{H}_{ani} = aM_x\mathbf{e}_x + bM_y\mathbf{e}_y + cM_z\mathbf{e}_z. \quad (2.2.29)$$

Es sind natürlich beliebige Anisotropieterme vorstellbar, von Formanisotropien bis zu Anisotropien verursacht durch Störstellen. Im idealisierten Fall kann dieser eher schwierig zu handhabende Term vernachlässigt werden. Wir haben als Beispiel für Anisotropien (2.2.29) in das effektive Feld  $\mathbf{H}_{eff}$  eingearbeitet und die entsprechende LLG abgeleitet. Die essentiellen Grundgleichungen, die für unsere Betrachtung die entscheidende Rolle spielen, sind folglich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma}\partial_t\mathbf{M} &= -\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} - \frac{\alpha}{M_S}\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}), \\ \mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_{ext} + \mathbf{h}_p(t) + \mathbf{H}_{dip}(t) + \mathbf{h}_{ext}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_{ani}. \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

Das Demagnetisierungsfeld ist dabei aus den oben angeführten Gründen in das allgemeine Dipolfeld  $\mathbf{H}_{dip}(t)$  eingebunden worden; das interne Feld  $\mathbf{H}_{int}$  liegt weiterhin parallel zu  $\mathbf{H}_{ext}$  [55].

## 2.3 Stereographische Projektion von $\mathbf{M}$

### 2.3.1 Die Erhaltungsgröße $M^2$

In der Bewegungsgleichung des Magnetisierungsvektors (2.1.19) oder (2.1.20) ist der Betrag der totalen Magnetisierung  $\mathbf{M}$  eine Erhaltungsgröße. Abbildung 2.3 folgend kann man für  $\mathbf{M}$  schreiben:

$$\mathbf{M}^2 = m_x^2 + m_y^2 + M_z^2 = M_S^2. \quad (2.3.1)$$

Hierbei kennzeichnet  $\mathbf{m}$  die dynamische Magnetisierung, während  $M_z$  die auf die  $z$ -Achse projizierte totale Magnetisierung  $\mathbf{M}$  darstellt. Damit kann  $M_z$  durch die  $x$ - und

y-Komponenten der dynamischen Magnetisierung ausgedrückt werden [54]:

$$M_z = M_S \sqrt{1 - \frac{m_x^2 + m_y^2}{M_S^2}} \cong M_S \left[ 1 - \frac{|m|^2}{2M_S^2} \right] = M_S [1 - |\Psi|^2]. \quad (2.3.2)$$

Dabei ist die Reihenentwicklung der Wurzel ausgenutzt worden.  $|\Psi|^2 = \frac{|m|^2}{2M_S^2}$  bezeichnet das Betragsquadrat der dimensionslosen dynamischen Amplitude  $\Psi$ . Fundamental an Gleichung (2.3.2) ist, dass  $M_z$  gerade von dieser Magnetisierungsamplitude abhängt, da damit die Spinwelleneigenfrequenzen in der Schicht von  $|\Psi|$  abhängen [54], [46]. Vermöge der Abhängigkeit einer Komponente der Magnetisierung von den anderen beiden haben wir ein effektiv zweidimensionales Problem vorliegen, was dazu Anlass gibt, den Magnetisierungsvektor mit festem Betrag  $M_S$  in die komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C}$  zu projizieren.

### 2.3.2 Stereographische Projektion

Die Stereographische Projektion ist in erster Linie ein mathematisches Werkzeug, um sich komplizierte Zusammenhänge in der komplexen abgeschlossenen Zahlensphäre (Riemannsche Zahlensphäre)  $\hat{\mathbb{C}}$  durch eine bijektive Abbildung  $\varphi^{-1}$  auf die zweidimensionale Einheitssphäre  $S^2 = [(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1]$  verständlich zu machen. Dabei wird vom Nordpol  $N=(0,0,1)$  eine Verbindungsgerade in die komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C}$  gelegt (Abbildung 2.4). So wird jedem  $\xi \in S^2 - (N)$  ein Schnittpunkt  $\varphi(\xi)$  zugeordnet [18]. Die zugehörige bijektiv stetige Abbildung erhält man bei gegebenem  $\xi$  durch Berechnung des Schnittpunktes von Gerade und Ebene (Abbildung 2.4):

$$\varphi : S^2 - N \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 - x_3} (x_1 + ix_2). \quad (2.3.3)$$

Die Umkehrabbildung errechnet sich aus dem Schnittpunkt von einer Geraden mit  $S^2$  [18]:

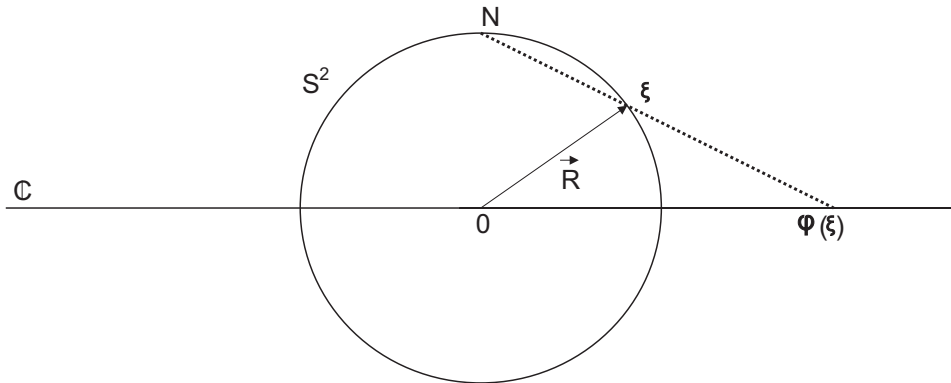
$$\varphi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S^2 - N, \quad \varphi^{-1}(x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1). \quad (2.3.4)$$

Letztlich setzt man  $\varphi$  zu der Bijektion  $\hat{\varphi}$  fort, indem man die folgende Abbildungseigenschaft explizit angibt:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \hat{\varphi}(\xi) &= \varphi(\xi) \quad \text{für } \xi \neq N, \\ \hat{\varphi}(N) &= \infty. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$\hat{\varphi}$  und  $\hat{\varphi}^{-1}$  sind damit stetige Abbildungen und  $\hat{\mathbb{C}}$  wird topologisch mit der kompakten Einheitssphäre  $S^2$  identifiziert.

Die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  ist durch einen Punkt auf einer Sphäre mit Radius  $M_S$  definiert. Das bedeutet, dass jedem Magnetisierungsvektor in bijektiv stetiger Weise ein Punkt in der komplexen Zahlenebene zugeordnet wird. Analog zu Abbildung 2.4 kann natürlich



**Abbildung 2.4:** Stereographische Projektion ( $|\vec{R}| = 1$  im Fall der mathematischen Herleitung;  $|\vec{R}| = M_S$  im Fall der Präzession des Magnetisierungsvektors)

auch der Südpol  $(0,0,-1)$  als Ausgangspunkt für die stereographische Projektion benutzt werden.

Betrachtet man den Magnetisierungsvektor  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$  mit  $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M_S^2$ , so erhält man als Projektionsrelation

$$m(\mathbf{r}, t) = \frac{M_x + iM_y}{M_S + M_z}, \quad m(\mathbf{r}, t) \in \hat{\mathbb{C}}. \quad (2.3.6)$$

Das Pluszeichen im Nenner resultiert aus einer Südpolprojektion.

Die Rücktransformation zurück zum Magnetisierungsvektor  $\mathbf{M}$  erhält man in völliger Analogie zu (2.3.4):

$$\mathbf{M} = \frac{M_S}{1 + |m|^2} \begin{pmatrix} m + m^* \\ im^* - im \\ 1 - |m|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.3.7)$$

### 2.3.3 Stereographische Projektion der Landau-Lifshitz-Gleichung

Die Landau-Lifshitz-Gleichung (2.1.20) beschreibt die Dynamik des Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}$ . Es soll nun der Versuch unternommen werden, mittels (2.3.2) die entsprechende dynamische Grundgleichung für die projizierte Größe  $m(\mathbf{r}, t)$  in  $\mathbb{C}$  abzuleiten. Dabei werden wir uns möglichst lange vom expliziten Einsetzen des effektiven Magnetfeldes  $\mathbf{H}_{eff}$  lösen.

[32] folgend gilt für die zeitlichen Ableitungen der einzelnen Komponenten des Magneti-



sierungsvektors  $\mathbf{M}$  aus (2.3.7)

$$\begin{aligned}\partial_t M_x &= \Gamma \left[ \partial_t m (1 - m^{*2}) + \partial_t m^* (1 - m^2) \right], \\ i\partial_t M_y &= \Gamma \left[ \partial_t m (1 + m^{*2}) - \partial_t m^* (1 + m^2) \right], \\ m\partial_t M_z &= -2\Gamma m m^* \partial_t m - 2\Gamma m^2 \partial_t m^*,\end{aligned}\quad (2.3.8)$$

wobei \* das Komplex Konjugierte kennzeichnet, während  $\Gamma = \frac{M_S}{(1+mm^*)^2}$  ist. Aus (2.3.8) folgt der direkte Zusammenhang von  $\partial_t m$  zu den zeitlichen Ableitungen der Magnetisierungsvektorkomponenten:

$$\partial_t M_x + i\partial_t M_y - m\partial_t M_z = \frac{2M_S \partial_t m}{1 + mm^*}. \quad (2.3.9)$$

Die zeitlichen Ableitungen der einzelnen Komponenten von  $\mathbf{M}$  können aus (2.1.20) berechnet werden. Wir werden im Folgenden zur besseren Übersichtlichkeit  $\mathbf{H}_{eff}$  schlicht als  $\mathbf{H}$  schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial_t M_x}{\gamma} &= -[M_y H_z - M_z H_y] - \frac{g}{M_S} [M_x (\mathbf{M}\mathbf{H}) - H_x \mathbf{M}^2], \\ \frac{\partial_t M_y}{\gamma} &= -[M_z H_x - M_x H_z] - \frac{g}{M_S} [M_y (\mathbf{M}\mathbf{H}) - H_y \mathbf{M}^2], \\ \frac{\partial_t M_z}{\gamma} &= -[M_x H_y - M_y H_x] - \frac{g}{M_S} [M_z (\mathbf{M}\mathbf{H}) - H_z \mathbf{M}^2].\end{aligned}\quad (2.3.10)$$

Setzt man nun (2.3.10) in (2.3.9) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von (2.3.7) die zeitliche Ableitung von  $m(\mathbf{r}, t)$  in Abhängigkeit der Komponenten des effektiven Magnetfeldes  $\mathbf{H}$ :

$$\frac{2}{\gamma} \partial_t m = (i - g) [H_x (m^2 - 1) - iH_y (m^2 + 1) + H_z 2m]. \quad (2.3.11)$$

Wir wählen für (2.3.11) ein effektives Magnetfeld  $\mathbf{H}_{eff}$  der Form (vgl.[17])

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{eff} &= (H_x + h_x(t))\mathbf{e}_x + (H_y + h_y(t))\mathbf{e}_y + (H_z + h_z(t))\mathbf{e}_z \\ &+ D\nabla^2 \mathbf{M} - \nabla \Phi_M \\ &+ aM_x \mathbf{e}_x + bM_y \mathbf{e}_y + cM_z \mathbf{e}_z.\end{aligned}\quad (2.3.12)$$

Als Gradient des magnetostatischen Potentials gehorcht das dipolare Feld der Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi_M = \begin{cases} 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}, & \text{innerhalb der Probe} \\ 0, & \text{außerhalb der Probe} \end{cases} \quad (2.3.13)$$

Nimmt man nun einen Film der Dicke  $d$  an, der in der (x,y)-Ebene liegt und seien alle Spins an der Oberfläche frei, d.h. ohne Pinning, so kann man Neumannartige Randbedingungen annehmen [17]:

$$|\nabla \Phi_M| (|z| \rightarrow \infty) = \partial_z \mathbf{M}_{z=0} = \partial_z \mathbf{M}_{z=d} = 0. \quad (2.3.14)$$

Im Fall des starken Pinnings würde man zu Dirichletartigen Randbedingungen übergehen.

Nach Einsetzen von (2.3.12) in Gleichung (2.3.11) erhält man die partielle Differentialgleichung für die dynamische Grundgröße  $m(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial_t m}{\gamma(i-g)} &= DM_S \left( -\nabla^2 m + \frac{2m^*(\nabla m)^2}{1+|m|^2} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) \Phi_M - \frac{m^2}{2} (\partial_x - i\partial_y) \Phi_M \\
 &+ m \left( H_z + h(t)_z - \partial_z \Phi_M + cM_S \frac{1-|m|^2}{1+|m|^2} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} (m^2 - 1) \left( H_x + h(t)_x + 2a \frac{M_S}{1+|m|^2} \operatorname{Re}[m] \right) \\
 &- \frac{1}{2} i (m^2 + 1) \left( H_y + h(t)_y + 2b \frac{M_S}{1+|m|^2} \operatorname{Im}[m] \right). \quad (2.3.15)
 \end{aligned}$$

Nun wird Gleichung (2.3.15) analog zu [17] skaliert. Dabei werden folgende Skalierungen unternommen:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{t'}{4\pi\gamma M_S}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}'d, \\
 l &= \frac{1}{d} \sqrt{\frac{D}{4\pi}}, \quad \phi_M = \frac{\Phi_M}{4\pi M_S d}, \\
 \Theta_z &= \frac{H_z}{4\pi M_S}, \quad \theta_z(t') = \frac{1}{4\pi M_S} h \left( \frac{t'}{4\pi\gamma M_S} \right) \\
 \Theta_y &= \frac{H_y}{4\pi M_S}, \quad \theta_y(t') = \frac{1}{4\pi M_S} h \left( \frac{t'}{4\pi\gamma M_S} \right) \\
 \Theta_x &= \frac{H_x}{4\pi M_S}, \quad \theta_x(t') = \frac{1}{4\pi M_S} h \left( \frac{t'}{4\pi\gamma M_S} \right). \quad (2.3.16)
 \end{aligned}$$

Mit den Skalierungen aus (2.3.16) ist man in der Lage, eine partielle Differentialgleichung für  $m(\mathbf{r}, t)$  anzugeben, die sowohl externe Magnetfelder, wie auch die Austauschwechselwirkung, das dipolare Feld und axiale Anisotropien des Mediums berücksichtigt. Es ist nun die Analyse eben dieser Gleichung, die uns die Spindynamik in ferromagnetischen Schichten unter Annahme der speziellen Anisotropieterme beschreiben kann. In (2.3.15) wird deutlich, dass das System nichtlineare Wellenpakete bzw. Solitonen als Lösung haben sollte, da (2.3.15) quasi eine Nichtlineare Schrödinger-Gleichung darstellt. Die genauen Zusammenhänge werden im Verlauf dieser Arbeit noch erläutert werden.

Die Wahl der externen Felder, sowohl des statischen Feldes  $\mathbf{H}_{ext}$ , als auch des Pumpfeldes  $\mathbf{h}_p(t)$ , bleibt der Versuchscharakteristik vorbehalten. Die skalierte Gleichung (2.3.15)

mit  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$  und  $t' \rightarrow t$  lautet:

$$\begin{aligned}
 \partial_t m &= (i - g) \left[ -l^2 \nabla^2 m + \frac{2l^2 m^* (\nabla m)^2}{1 + |m|^2} \right] \\
 &+ (i - g) \left[ \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) \phi_M - \frac{m^2}{2} (\partial_x - i\partial_y) \phi_M \right] \\
 &+ (i - g) \left[ m \left( \Theta_z + \theta(t)_z - \partial_z \phi_M + c \frac{1 - |m|^2}{4\pi(1 + |m|^2)} \right) \right] \\
 &+ (i - g) \left[ \frac{1}{2} (m^2 - 1) \left( \Theta_x + \theta(t)_x + a \frac{\text{Re}[m]}{2\pi(1 + |m|^2)} \right) \right] \\
 &- (i - g) \left[ \frac{1}{2} i (m^2 + 1) \left( \Theta_y + \theta(t)_y + b \frac{\text{Im}[m]}{2\pi(1 + |m|^2)} \right) \right]. \quad (2.3.17)
 \end{aligned}$$

Die skalierte Poisson-Gleichung [17] lässt sich schreiben als

$$\Delta \phi_M = \begin{cases} (\partial_x + i\partial_y) \left( \frac{m^*}{1 + |m|^2} \right) + (\partial_x - i\partial_y) \left( \frac{m}{1 + |m|^2} \right) + \partial_z \left[ \left( \frac{1 - |m|^2}{1 + |m|^2} \right) \right], & \text{im Medium} \\ 0, & \text{außerhalb des Mediums} \end{cases}$$

Dabei haben wir analog zu [17] ein reskaliertes Potential  $\phi_m = \frac{\Phi_M}{4\pi M_S d}$  eingeführt. Die Neumannartigen Randbedingungen (2.3.14) transformieren sich zu:

$$|\nabla \phi_M| (|z| \rightarrow \infty) = \partial_z m_{z=0} = \partial_z m_{z=1} = 0. \quad (2.3.18)$$

Die Grundgleichungen für die Dynamik des Magnetisierungsvektors sind folgerichtig hergeleitet. Damit kann ohne Weiteres die Stabilität einzelner Zustände, beispielsweise des Grundzustandes bestimmt werden [17]. Das Augenmerk dieser Arbeit soll aber vorwiegend auf dem raumzeitlichen Verhalten der Spinvektoren nach Gleichung (2.3.17) als Ausgangspunkt für wellendynamische Prozesse und der numerischen Visualisierung liegen. Die Frage besteht darin, inwiefern sich Anregungen jeglicher Form auf das System auswirken. In gewissen Parameterbereichen kann das raumzeitliche Verhalten des projizierten Magnetisierungsvektors  $m(\mathbf{r}, t)$  untersucht werden. Die Dynamik von  $m(\mathbf{r}, t)$  lässt sich dann wieder auf den entsprechenden Magnetisierungsvektor zurücktransformieren und liefert die Dynamik von  $\mathbf{M}$  in der Landau-Lifshitz-Gleichung. Das Verfahren zu der numerischen Analyse von (2.1.20) wird in Anhang **A** erläutert werden. Des Weiteren wird es von Interesse sein, wie sich die LLG auf die Nichtlineare Schrödinger-Gleichung transformieren lässt; die strukturelle Übereinstimmung dieser beiden Gleichungen ist besonders durch die stereographische Projektion augenscheinlich geworden.

Gleichung (2.3.17) besteht im Wesentlichen aus einem diffusiven Term, einer kubischen Nichtlinearität, einem Term, der dem Dipolfeld Rechnung trägt, globaler Dämpfung und natürlich den entsprechenden Anregungs- und Anisotropietermen. Für  $m = 0$  liefern die rein z-abhängigen effektiven Felder keine Beiträge mehr. Dieses ist einleuchtend, da  $m = 0$  aufgrund der stereographischen Projektion bedeutet, dass  $\mathbf{M}$  parallel zu  $\mathbf{e}_z$  ist. Für  $m = \pm i$  bzw.  $m = \pm 1$  kann man analoge Schlüsse für die rein x- und y-abhängigen effektiven Felder ziehen.

## 3 Anregbare Moden

Wie in Abschnitt 2 gezeigt wurde, lässt sich der Magnetisierungsvektor  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  in einen statischen  $\mathbf{M}_z$  und einen dynamischen Anteil  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$  zerlegen (Abbildung 2.3). Im Folgenden soll der Begriff der Spinwellenanregung erstmals eingeführt werden. Spinwellen sind letztlich nichts anderes als das magnetische Pendant zu den in der Festkörperphysik weitreichend bekannten Gitterschwingungen, den sogenannten Phononen. Regt man in einem Ferromagneten beispielsweise thermisch die im Grundzustand parallel zueinander ausgerichteten Spins an, so führen diese die in 2 erläuterte Präzessionsbewegung aus. Bei kohärenter Anregung mit fester Phasenbeziehung  $\Phi$  spricht man von Spinwellenanregungen mit Wellenvektor  $\mathbf{k}$  [22], [55].

Entscheidend bei der Ausbildung von Spinwellen ist die Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten. Die in Abschnitt 2 hergeleiteten Austauschfelder und dipolaren Felder sind die beiden wesentlichen Größen, die es ermöglichen, dass sich Spinwellen bilden und propagieren können. Beide basieren auf zwei völlig unterschiedlichen Ursachen. Während die dipolare Wechselwirkung klassischer Natur ist und auch noch in einer relativ großen Spindistanz wirksam ist, ist die Austauschwechselwirkung rein quantenmechanischer Natur und wirkt nur zwischen allernächsten Nachbarn.

Daraus resultiert, dass die Spinwelleneigenschaften bei kleinen Wellenlängen durch die Austauschwechselwirkung dominiert werden, während bei großen Wellenlängen diese vernachlässigt werden kann und die dipolare Wechselwirkung zum Tragen kommt. Welche Terme in experimentellen Verfahren berücksichtigt werden müssen, hängt natürlich stark von den Untersuchungsmethoden ab. Bei dem in [23] entwickelten Verfahren der Brillouin-Lichtstreuung werden Moden mit einem Wellenvektor in der Größenordnung des Lichtwellenvektors untersucht. In diesem Bereich müssen dipolare und Austauschwechselwirkung berücksichtigt werden.

### 3.1 Theoretische Betrachtung der Modenprofile

Zur Visualisierung von Spinwellen sei an die Zerlegung der dynamischen Magnetisierung  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$  in eine Fourierreihe erinnert. Es gilt:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = M_S \mathbf{e}_z + \mathbf{m}(\mathbf{r}, t), \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}_0(t) + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \mathbf{m}_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (3.1.2)$$

$\mathbf{m}_0(t)$  kennzeichnet den ortsungebundenen Teil der dynamischen Magnetisierung und wird oftmals als uniforme Mode bezeichnet [55]. Da  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}$  ist, ist auch  $\mathbf{m}_0(t) \in \mathbb{R}$ ,

während  $\mathbf{m}_{\mathbf{k}}(t) \in \mathbb{C}$  mit  $\mathbf{k} \neq 0$ . Weil nun sowohl über alle positiven, wie auch alle negativen Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  summiert werden muss, existiert, basierend auf der Forderung  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}$ , ein fundamentaler Zusammenhang zwischen entgegenlaufenden Wellen:

$$\mathbf{m}_{\mathbf{k}}^*(t) = \mathbf{m}_{-\mathbf{k}}(t). \quad (3.1.3)$$

Mit der Entwicklung in die uniforme Mode und die nichtuniformen gemäß [55] wird klar, dass  $\mathbf{m}_0(t)$  in der dynamischen Magnetisierung gerade die Komponente darstellt, die in Bezug auf Phase und Ort stets einheitlich ist ('uniform'). Die klassischen Spinwellen hingegen werden von den propagierenden orts- und zeitabhängigen Komponenten in der dynamischen Magnetisierung beschrieben, also von  $\mathbf{m}_{\mathbf{k}}(t)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ .

Nimmt man nun an, dass  $\mathbf{m}_{\mathbf{k}}$  von der Form  $e^{\pm i\omega_{\mathbf{k}}t}$  ist, so erhält man für klassische Spinwellen natürlich denselben Phasenfaktor, wie er auch für elektromagnetische, ebene Wellen bekannt ist:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \propto e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} \pm \omega_{\mathbf{k}}t)}. \quad (3.1.4)$$

Entscheidend bleibt immer, wie sich die dynamische Magnetisierung  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$  entlang des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  bei bekanntem Magnetfeld  $\mathbf{H}_{int}$ , welches oftmals mit der Richtung des externen Feldes  $\mathbf{H}_{ext}$  (vgl. 2.2.3) übereinstimmt, ändert. Dass diese relative Orientierung von Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und Magnetfeld  $\mathbf{H}_{int}$  die Moden im Medium entscheidend beeinflusst, erkennt man in Abbildung 3.1. Für  $\mathbf{k}$  parallel zu  $\mathbf{H}_{int}$  ist  $\nabla\mathbf{m} = 0$ , da  $\mathbf{r} \perp \mathbf{k}$ . Für  $\mathbf{k}$  senkrecht zu diesem ist  $\nabla\mathbf{m} \neq 0$  und Dipolfelder müssen berücksichtigt werden [55]. Die Energie des Systems steigt und kreisförmige Präzessionen des Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}$  gehen in elliptische Präzessionbewegungen über.

Ziel im Folgenden soll sein, die Dispersionsrelationen für die entsprechenden Moden herzuleiten und zu charakterisieren. Die Kenntnis des Modenprofils ist für jedes Experiment unumgängliche Voraussetzung, da die Anregung entsprechender Moden entscheidend für das Ergebnis ist.

### 3.1.1 Austauschdominierte Moden

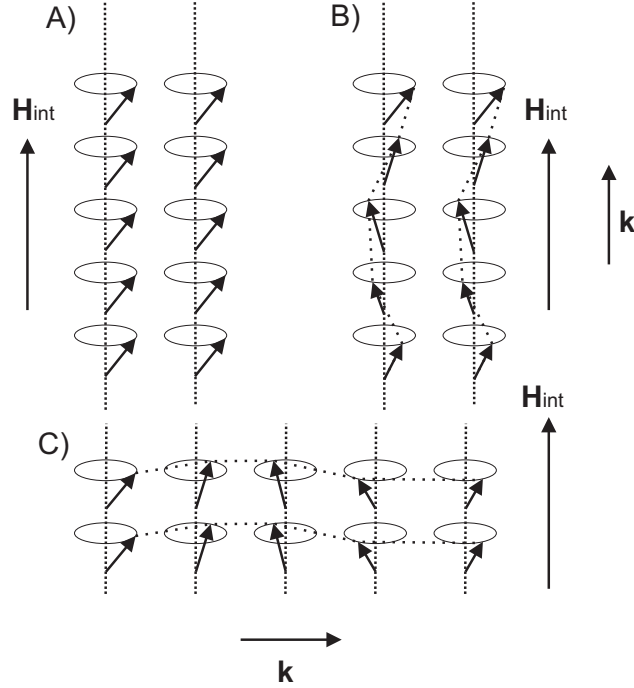
Austauschdominierte Moden sind vor allen Dingen bei kleinen Wellenlängen  $\lambda$  zu beobachten. Sie sind im Wesentlichen stehende Spinwellen, die einer gewissen Resonanzbedingung gehorchen müssen.

Entscheidend für austauschdominierte Moden sind die im Hamiltonoperator stehenden Spinoperatoren. Sie lassen sich durch die sogenannten Paulimatrizen ausdrücken [49].

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.5)$$

Den Umklapp eines Spins kann man über  $\hat{S}_+$  und  $\hat{S}_-$  beschreiben:

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.6)$$



**Abbildung 3.1:** A)  $k=0$  (uniforme) Mode, Präzession verläuft mit konstanter Phasenbeziehung  $\Delta\Phi = 0$ , kein Energieübertrag möglich ; B)  $k \neq 0$  (Spinwelle) Mode, wobei  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_{int}$ ,  $\Delta\Phi \neq 0$  aber phasenkohärent ; C)  $k \neq 0$  (Spinwelle) Mode, wobei  $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_{int}$ ,  $\Delta\Phi \neq 0$  aber phasenkohärent. Die eingezeichnete gestrichelte Linie zeigt die Propagation der Spinwellen.

Mit den Paulimatrizen  $\sigma_i$  [50] schreiben wir den Spinoperator als

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.1.7)$$

Klar ist, dass  $\sigma_i^2$  stets  $\mathbf{1}$  ist. Die fundamentale Vertauschungsrelation für die Paulimatrizen unter Verwendung der Kommutatorschreibweise lautet:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z. \quad (3.1.8)$$

Nun sind die Eigenzustände von  $\hat{S}_z$  genau die Spinoren [49], also die Eigenzustände, die 'Spin up' und 'Spin down' beschreiben:

$$\chi_+ = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi_- = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.9)$$

An dieser Stelle sei der Leser auf [19] verwiesen, um die weitere quantenmechanische Berechnung der Spinwellendispersionsrelation nachzuvollziehen. Zur weiteren Berechnung der Dispersionsrelation für austauschdominierte Moden (Spinwellen) wird an dieser Stelle vom halbklassischen Prinzip der linearen Spinkette ausgegangen, und zwar nur unter

Berücksichtigung nächster Nachbarn. Die quantenmechanischen Operatoren sind dabei wiederum klassische Vektoren. Der Grundzustand besitzt unter obigen Voraussetzungen die Energie [52]

$$E_0 = \frac{-1}{2} 2J \sum_{j=1}^N S_j (S_{j-1} + S_{j+1}) = -2JS^2 N. \quad (3.1.10)$$

Umkappen eines Spins ist der erste Anregungszustand, der sich berechnet zu

$$E_1 = -2JS^2(N-2) + 4JS^2 = E_0 + 8JS^2. \quad (3.1.11)$$

Derartige Anregungszustände sind nur im Bereich der Curietemperatur  $T_C$  zu erwarten [52]; die bei weitaus geringeren Anregungsenergien anzutreffenden Spinwellen basieren auf dem Prinzip der Präzession um eine raumfeste Achse. Mit dem magnetischen Moment am Ort  $j$   $\mu_j = -g\mu_B \mathbf{S}_j$  kann man wie in [30] das an das Moment angreifende, effektive Magnetfeld berechnen:

$$\mathbf{B}_j = \left( -\frac{2J}{g\mu_B} \right) (\mathbf{S}_{j-1} + \mathbf{S}_{j+1}). \quad (3.1.12)$$

Mit Gleichung (2.1.6), wobei das Bohrsche Magneton  $\mu_B$  für Elektronen negativ ist, gilt:

$$\frac{d\mathbf{S}_j}{dt} = \left( \frac{2J}{\hbar} \right) (\mathbf{S}_j \times \mathbf{S}_{j-1} + \mathbf{S}_j \times \mathbf{S}_{j+1}). \quad (3.1.13)$$

Gleichung (3.1.13) lässt sich in den einzelnen Komponenten aufschreiben. Unter der zusätzlichen Annahme, dass  $S_j^x, S_j^y \ll S$  mit  $S_j^z = S$  und Linearisierung von (3.1.13), erhält man (vgl.[30])

$$\begin{aligned} \frac{dS_j^x}{dt} &= \left( \frac{2JS^2}{\hbar} \right) (2S_j^y - S_{j-1}^y - S_{j+1}^y), \\ \frac{dS_j^y}{dt} &= - \left( \frac{2JS^2}{\hbar} \right) (2S_j^x - S_{j-1}^x - S_{j+1}^x), \\ \frac{dS_j^z}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Die explizit formulierte Kleinheit der Größen  $S_j^x, S_j^y$  im Vergleich zu  $S_j^z$  bedeutet die Annahme einer schwachen Anregung. Dies entspricht einer vergleichsweise kleinen, dynamischen Magnetisierung in unserem Magnetisierungsbild (Abbildung 2.3). Als Lösungsansatz für (3.1.14) wählt man wiederum einen typischen ebenen Wellen-Ansatz, wobei der Ort des  $j$ -ten Spins genau  $j \cdot \delta$  ist ( $\delta$ =Gitterkonstante):

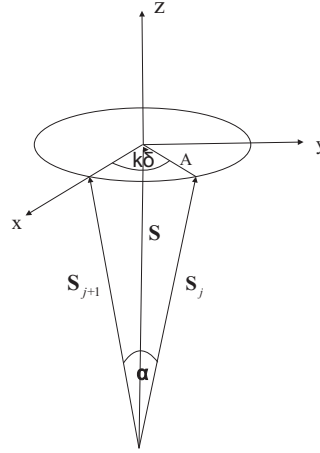
$$S_j^x = A e^{i(jk\delta - \omega t)}, \quad S_j^y = B e^{i(jk\delta - \omega t)}. \quad (3.1.15)$$

Durch Einsetzen in (3.1.14) erhält man unter der Lösbarkeitsbedingung für A und B [30] eine Beziehung für die Energie bzw. Dispersion in der Form

$$\hbar\omega = 4JS^2(1 - \cos k\delta). \quad (3.1.16)$$

Des Weiteren ist  $B = -iA$ . Damit hat man unter reiner Berücksichtigung der Realteile von (3.1.15) eine typische Kreisbewegung des Spins in der  $x$ - $y$ -Ebene und eine Präzession jedes Spins um die  $z$ -Achse. Sei  $k\delta \ll 1$ , aber die Wellenlänge klein genug, dass die von der Austauschwechselwirkung dominierte Mode angeregt wird, so gilt  $(1 - \cos k\delta) \approx 1/2(k\delta)^2$  und damit

$$\omega \cong \frac{2JS\delta^2 k^2}{\hbar}. \quad (3.1.17)$$



**Abbildung 3.2:** Benachbarte Spinvektoren in einer Spinwelle mit Wellenvektor  $\mathbf{k}$  im Gitter mit Gitterkonstante  $\delta$ .

Der Energieinhalt einer Spinwelle kann sich um ein sogenanntes Magnon  $\hbar\omega_k$  ändern. Gemäß [52] lässt sich für eine Spinkette schreiben:

$$S_z = \sqrt{S^2 - A^2} \approx S \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{A}{S} \right)^2 \right). \quad (3.1.18)$$

Jede Energieänderung um  $\hbar\omega_k$  ist aufgrund der Auswahlregeln für den Drehimpuls mit einer Spinänderung um  $\Delta |S| = \pm\hbar$  verknüpft [49]. Falls  $\alpha$  der Winkel zwischen zwei benachbarten Spins zum Zeitpunkt  $T_0$  ist, lässt sich ein geometrischer Zusammenhang zwischen ihnen finden (vgl. 3.2) [52]:

$$\frac{\mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1}}{\hbar^2} = S^2 \cos(\alpha) = S^2 - A^2 + A^2 \cos(k\delta). \quad (3.1.19)$$

Die Gesamtenergie einer Spinwelle errechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} E_S &= -2NJS^2 \cos(\alpha), \\ E_S &= E_0 + 2NJA^2(1 - \cos k\delta). \end{aligned} \quad (3.1.20)$$



$N$  kennzeichnet dabei wie oben die Anzahl der Spins in der Spinkette. Durch Einsetzen von (3.1.16) in (3.1.20) lässt sich die Formel für die Gesamtenergie der Spinwelle in Abhängigkeit von den angeregten Magnonen finden:

$$E_S = E_0 + \frac{NA^2}{2S} \hbar \omega_k. \quad (3.1.21)$$

Gleichung (3.1.17) zeigt, dass unter entsprechenden Voraussetzungen  $\omega \propto k^2$  ist, d.h. dass für sehr große Wellenlängen die Anregungsenergie Null wird.

### 3.1.2 Magnetostatische dipolare Moden

Bei ausreichend großer Wellenlänge ( $k < 10^8 \frac{1}{m}$ ) kann wiederum die Austauschwechselwirkung vernachlässigt werden [22]. In diesen Fällen ist die dipolare Wechselwirkung der entscheidende Term in  $\mathbf{H}_{eff}$  [25]. Falls die Fluktuationen durch Spinwellen in  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{M}$  klein sind, können diese Größen als Summe von zeitunabhängigem Beitrag in Richtung des internen Feldes und zeitabhängigem Beitrag, der die Spinwellenpropagation beschreibt, geschrieben werden [14]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= M_S \mathbf{e}_z + \mathbf{m}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{H} &= H_{int} \mathbf{e}_z + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Da wir uns im Folgenden nur für die reinen dipolaren Moden interessieren wollen und die Wellenlänge der Mode im Vergleich zur elektromagnetischen Wellenpropagation klein sein soll, kann man in (3.1.22) nach Walker einen Ansatz folgender Form machen [51]:

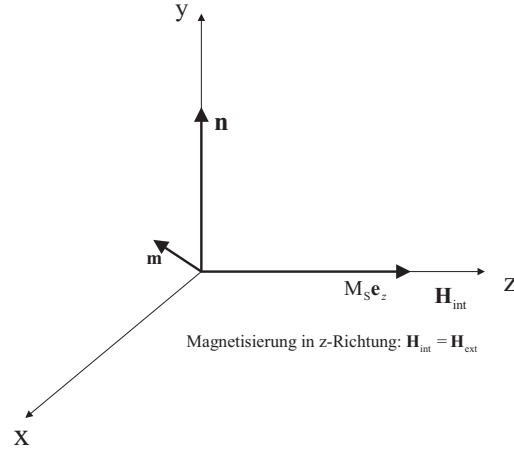
$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= M_S \mathbf{e}_z + \mathbf{m} e^{i\omega t}, \\ \mathbf{H} &= H_{int} \mathbf{e}_z + \mathbf{h} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Dabei liegt die dynamische Magnetisierung  $\mathbf{m}$  in der  $x,y$ -Ebene (Abbildung 3.3), da  $m_z \ll M_S \mathbf{e}_z$ . Als dynamischer Teil des Magnetfeldes kann  $\mathbf{h}$  durchaus nichtverschwindende  $x,y$ - und  $z$ -Komponenten haben. Wie in Abschnitt 2.2.4 erläutert wurde, sind der Ausgangspunkt zur Betrachtung dipolarer Moden die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik. In Bezug auf die dynamische Magnetisierung  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$  lauten sie:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{h}_{dip}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla [\mathbf{h}_{dip}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \mathbf{m}(\mathbf{r}, t)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Dabei kennzeichnet wie in Abschnitt (2.2.4)  $\mathbf{h}_{dip}$  den dynamischen Teil des magnetischen Dipolfeldes. Man beachte, dass sowohl die statischen wie auch die dynamischen Teilkomponenten der Felder aus (3.1.23) den Maxwellgleichungen genügen müssen. Unter den Annahmen  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$  sowie  $\mathbf{h}_{dip}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$  (vgl. 3.1.23) gilt gemäß (3.1.24):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}) &= 0, \\ \nabla [\mathbf{h}(\mathbf{r}) + 4\pi \mathbf{m}(\mathbf{r})] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$



**Abbildung 3.3:** Koordinatensystem zur Herleitung dipolarer Moden.  $M_S$  liegt parallel zu  $\mathbf{H}_{int}$ ;  $\mathbf{n}$  kennzeichnet den Flächennormalenvektor.

Im Folgenden werden die Komponenten des zeitunabhängigen Beitrags in der dynamischen Magnetisierung, also  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ , schlicht mit  $(m_x, m_y, m_z)$  bezeichnet.  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  beschreibt den zeitunabhängigen Beitrag des Dipolfeldes. Offensichtlich kann mit (3.1.25) ein magnetostatisches Potential  $\Phi$  eingeführt werden mit  $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \nabla\Phi$ :

$$\Delta\Phi + 4\pi\nabla\mathbf{m}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.1.26)$$

Unter Benutzung der ungedämpften Landau-Lifshitz-Gleichung  $\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} = \gamma(\mathbf{M} \times \mathbf{H})$  und unter der Annahme  $h_z \ll h_x, h_y$  erhält man mit der Cramerschen Regel eine Beziehung zwischen den dynamischen Komponenten  $m_x, m_y$  und dem Potential  $\Phi$  in der Form [51]

$$4\pi \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & -i\nu \\ i\nu & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (3.1.27)$$

mit

$$\kappa = \frac{4\pi\gamma^2 M_S H_{int}}{\gamma^2 H_{int}^2 - \omega^2}, \quad \nu = \frac{4\pi\gamma M_S \omega}{\gamma^2 H_{int}^2 - \omega^2}. \quad (3.1.28)$$

Wir bemerken, dass in erster Näherung wegen der Zeitunabhängigkeit der  $z$ -Komponente des Magnetisierungsvektors eine interessante Beziehung zwischen den zeitunabhängigen  $\mathbf{m}$ - und  $\mathbf{h}$ -Komponenten besteht:

$$\frac{m_x}{m_y} = \frac{h_x}{h_y}. \quad (3.1.29)$$

Durch Einsetzen von (3.1.27) in (3.1.26) und der Annahme, dass  $\Phi$  zweimal partiell differenzierbar ist, erhält man die berühmte Walker-Gleichung für das Potential  $\Phi^i$  im

Inneren der Probe unter Berücksichtigung rein dipolarer Wechselwirkung [51]:

$$(1 + \kappa) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.1.30)$$

Die Dispersionrelationen können jetzt über die Walker-Gleichung für unterschiedliche Geometrien hergeleitet werden. Im Fall einer dünnen Schicht, die in die  $x$ - $z$ -Ebene ausgedehnt ist und die in  $z$ -Richtung magnetisiert ist, verschwindet der Demagnetisierungsfaktor in  $z$ -Richtung (vgl. (2.2.3)), d.h. es gilt  $\mathbf{H}_{int} = \mathbf{H}_{ext}$ .

Um eine allgemeine Dispersionsrelation für eine derartige Geometrie zu errechnen, muss das Potential in zwei verschiedenen Raumbereichen betrachtet werden [51], da außerhalb der Probe keine Magnetisierung existiert, also  $\kappa = 0$  ist. Sei im folgenden  $\Phi^i$  das Potential, das Gleichung (3.1.30) für  $\kappa \neq 0$  erfüllt und  $\Phi^a$  jenes, welches sie für  $\kappa = 0$  erfüllt. Die Indizierung  $i$  ist gültig im Probenbereich, die Indizierung  $a$  außerhalb des Bereiches. Für den äußeren Raumbereich muss  $\Phi^a$  schlicht die Laplace-Gleichung erfüllen:

$$\nabla^2 \Phi^a = 0. \quad (3.1.31)$$

Die Randbedingungen an den Grenzflächen für die magnetische Induktion und Feldstärke bei fehlender Flächenstromdichte lauten [41]:

$$B_x^i = B_x^a, \quad H_{y,z}^i = H_{y,z}^a. \quad (3.1.32)$$

Diese Grenzbedingungen bedeuten für das Potential  $\Phi$  nach (3.1.27), wobei eine mögliche Konstante in (3.1.33) zu Null gewählt wurde [51]:

$$\begin{aligned} [(1 + \kappa)\partial_x \Phi^i - i\nu\partial_y \Phi^i]_{x=\pm\delta/2} &= \partial_x \Phi_{x=\pm\delta/2}^a, \\ \Phi_{x=\pm\delta/2}^i &= \Phi_{x=\pm\delta/2}^a. \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Aufgrund der Separabilität der Lösung [51] wird eine Lösung der Form  $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$  gesucht. Folgende Ansätze werden für die entsprechenden Raumbereiche gewählt. In der Probe gilt

$$Y(y) = e^{ik_y y}, \quad Z(z) = e^{ik_z z}. \quad (3.1.34)$$

Dies entspricht der möglichen Wellenpropagation in der  $y$ - $z$ -Ebene. Aufgrund der Randbedingungen in  $x$ -Richtung wählt man den Ansatz

$$X^i(x) = a \sin k_x^i x + b \cos k_x^i x, \quad -\delta/2 \leq x \leq \delta/2. \quad (3.1.35)$$

Außerhalb des Raumbereiches erwartet man wegen der Laplace-Gleichung ein exponentielles Abfallen für  $X^a(x)$ . Typischerweise wählt man dort für  $k_x^a > 0$  den Ansatz

$$\begin{aligned} X^a(x) &= ce^{-k_x^a x} & x > \delta/2, \\ X^a(x) &= de^{k_x^a x} & x < -\delta/2. \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

Unter Einsetzen dieser Größen in (3.1.30) und (3.1.31) erhält man den fundamentalen Zusammenhang für die Wellenvektorkomponenten in den entsprechenden Raumbereichen:

$$\begin{aligned} (1 + \kappa) (k_x^{i2} + k_y^2) + k_z^2 &= 0, \\ k_x^{a2} - k_y^2 - k_z^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

Wir setzen die Lösungsansätze in die Randbedingungen ein und erhalten eine Beziehung zwischen den Amplitudenkoeffizienten in den entsprechenden Raumbereichen. Aus (3.1.33) resultiert

$$\begin{aligned} \frac{a}{c-d} &= \frac{e^{-\frac{k_x^a \delta}{2}}}{2 \sin \frac{k_x^i}{2} \delta}, \\ \frac{b}{c+d} &= \frac{e^{-\frac{k_x^a \delta}{2}}}{2 \cos \frac{k_x^i}{2} \delta}. \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Die Randbedingungen (3.1.33) an den Stellen  $-\delta/2$  und  $\delta/2$  liefern

$$\begin{aligned} (1 + \kappa) k_x^i \left[ \frac{c-d}{2} \cot \frac{k_x^i \delta}{2} - \frac{c+d}{2} \tan \frac{k_x^i \delta}{2} \right] + c \nu k_y &= -c k_x^a, \\ (1 + \kappa) k_x^i \left[ \frac{c-d}{2} \cot \frac{k_x^i \delta}{2} + \frac{c+d}{2} \tan \frac{k_x^i \delta}{2} \right] + d \nu k_y &= d k_x^a. \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

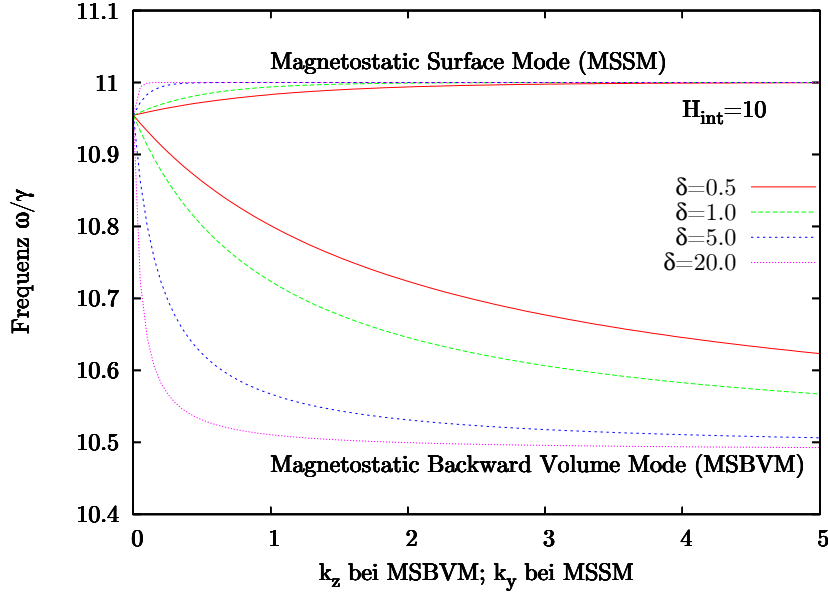
Gleichsetzen von (3.1.39) und (3.1.39) unter Elimination von  $c$  und  $d$  und Ausnutzung fundamentaler, trigonometrischer Rechenregeln liefert schließlich

$$k_x^{a2} + 2k_x^a k_x^i (1 + \kappa) \cot k_x^i \delta - k_x^{i2} (1 + \kappa)^2 - (\nu k_y)^2 = 0. \quad (3.1.40)$$

Über die Gleichungen (3.1.37) können  $k_x^i$  und  $k_x^a$  ersetzt werden und man erhält unter Einführung der dimensionslosen Größe  $\eta = \frac{k_z}{k_y}$  die Dispersionsrelation für Moden, deren Propagation in einem, in der Probenebene magnetisiertem Medium verläuft. Wir werden hier die Formel verwenden, wie sie in der Arbeit von Damon und Eshbach abgeleitet wurde [14]:

$$\begin{aligned} (1 + \eta^2) + 2\sqrt{1 + \eta^2} \sqrt{-\frac{1 + \kappa + \eta^2}{1 + \kappa}} (1 + \kappa) \cot \left[ |k_y| \delta \sqrt{-\frac{1 + \kappa + \eta^2}{1 + \kappa}} \right] \\ + (1 + \kappa)^2 \left[ -\frac{1 + \kappa + \eta^2}{1 + \kappa} \right] - \nu^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

Es ist auffällig, dass zwei große Teilbereiche in (3.1.41) unterschieden werden müssen, abhängig davon, ob das Wurzelargument negativ wird oder nicht.



**Abbildung 3.4:** Modenprofil der Magnetostatic Surface Mode (MSSM) und der Magnetostatic Backward Volume Mode (MSBVM) in linearer Näherung des  $\arctan$ .  $\delta$  bezeichnet die Schichtdicke der Prope.  $[k_i] = [\frac{1}{\delta}]$ .

### 1. Volumenmoden

Falls  $(1 + \kappa) < 0$  sind stets reelle Wellenzahlen in der Probe erlaubt. Betrachtet man die Wellenpropagation in  $z$ -Richtung und wählt  $k_y = 0$ , d.h.  $\eta = \infty$ , so lässt sich Gleichung (3.1.41) vereinfachen. Mit  $\frac{1+\eta^2+\kappa}{1+\kappa} \rightarrow \frac{\eta^2}{1+\kappa}$  und  $\text{Arg}(\cot) \rightarrow \frac{-|k_z|\delta}{1+\kappa}$  kann die Dispersion wie in [51] beschrieben werden:

$$2 \cot[\alpha |k_z| \delta] = \alpha - \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{-1}{1+\kappa}}. \quad (3.1.42)$$

Damit gilt für die Wellenzahl  $k_z$  in Volumenmoden:

$$k_z = \frac{1}{\alpha\delta} \arctan \frac{2}{\alpha - 1/\alpha}. \quad (3.1.43)$$

Gleichung (3.1.43) kann natürlich nicht explizit nach  $\omega$  umgestellt werden, jedoch kann für festes  $k_z$  der  $\arctan$  entwickelt werden und man erhält so die Dispersionsrelation um den Entwicklungspunkt. Für  $\alpha \gg 0$  kann der  $\arctan$  durch sein Argument genähert werden, gleiches gilt für  $\alpha$  nahe 0. Falls  $\alpha$  nahe bei 1 ist, wird das Argument des  $\arctan$  unendlich groß. An diesen Stellen ist eine Approximation durch  $\pi/2$  möglich. Damit erhält man aus (3.1.42):

$$\frac{\omega}{\gamma}(k_z) = \sqrt{H_{int}^2 + 4\pi M_S H_{int} \frac{2 + k_z \delta}{2 + 2k_z \delta}}. \quad (3.1.44)$$

Gleichung (3.1.44) zeigt, wie die Dispersionsrelation für dipolare Volumenmoden von  $H_{int}$  abhängt.

In Abbildung 3.4 ist das Modenprofil dieser Volumenmoden (MSBVM) für unterschiedliche Schichtdicken  $\delta$  und unter der Skalierung  $M_S = \frac{1}{2\pi}$  aufgetragen. Auffällig ist die negative Dispersion dieser Moden.

## 2. Oberflächenmoden

Falls nun  $(1 + \kappa) > 0$  ist und  $|\eta| < \sqrt{\frac{4\pi M_S}{H_{int}}}$ , zeigt [51], dass der Frequenzbereich der Volumenmoden nicht mehr erfüllt wird, insbesondere wird  $k_x^i$  imaginär (vgl.3.1.37). Gleichung (3.1.41) kann mit den Euler-Formeln in reelle Größen umgeschrieben werden und man erhält

$$(1 + \eta^2) + 2\sqrt{1 + \eta^2} \sqrt{\frac{1 + \kappa + \eta^2}{1 + \kappa}} (1 + \kappa) \coth \left[ |k_y| \delta \sqrt{\frac{1 + \kappa + \eta^2}{1 + \kappa}} \right] - (1 + \kappa)^2 \left[ \frac{1 + \kappa + \eta^2}{1 + \kappa} \right] - \nu^2 = 0. \quad (3.1.45)$$

Für  $k_z = 0$ , also den Oberflächenlösungen, ergibt sich

$$\omega = \gamma \sqrt{H_{int} \left( H_{int} + 4\pi M_S + \frac{8\pi^2 M_S^2}{H_{int}(1 + \coth k_y \delta)} \right)}. \quad (3.1.46)$$

Dabei gilt für die Wellenzahlen, wie aus (3.1.37) ersichtlich wird:

$$k_x^a = |k_y|, \quad k_x^i = \pm i k_y. \quad (3.1.47)$$

Gleichung (3.1.46) ist die berühmte Formel der Dispersion für dipolare Damon-Eshbach-Moden. Sie beschreiben exponentielles Abklingen mit der charakteristischen Abklinglänge  $1/|k_y|$  in Richtung von  $\mathbf{e}_x$ . Dies ist sofort ersichtlich, wenn man folgende Funktionengleichheit benutzt:

$$1 - e^{-2k_y \delta} = \frac{2}{1 + \coth k_y \delta}. \quad (3.1.48)$$

Durch Einsetzen in (3.1.46) ergibt sich für die Dispersion der Oberflächenmode

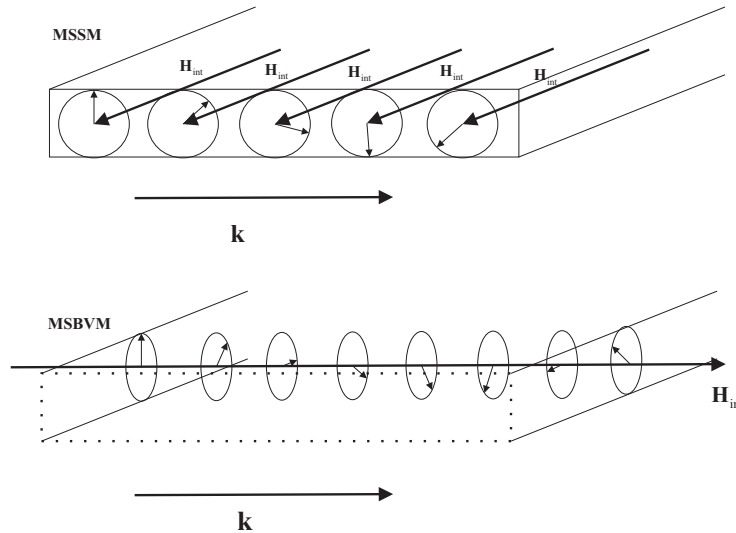
$$\omega = \gamma \sqrt{\left( \frac{4\pi M_S}{2} + H_{int} \right)^2 - \left( \frac{4\pi M_S}{2} \right)^2 e^{-2k_y \delta}}. \quad (3.1.49)$$

Benutzt man hier dieselben Skalierungen wie in 1, sprich  $M_S = \frac{1}{2\pi}$ , so erhält man die Dispersionsrelation  $\frac{\omega}{\gamma}(k_y)$ , die in Abbildung 3.4 in Abhängigkeit der Schichtdicke  $\delta$  aufgetragen ist:

$$\frac{\omega}{\gamma}(k_y) = \sqrt{(H_{int} + 1)^2 - e^{-2k_y \delta}}. \quad (3.1.50)$$

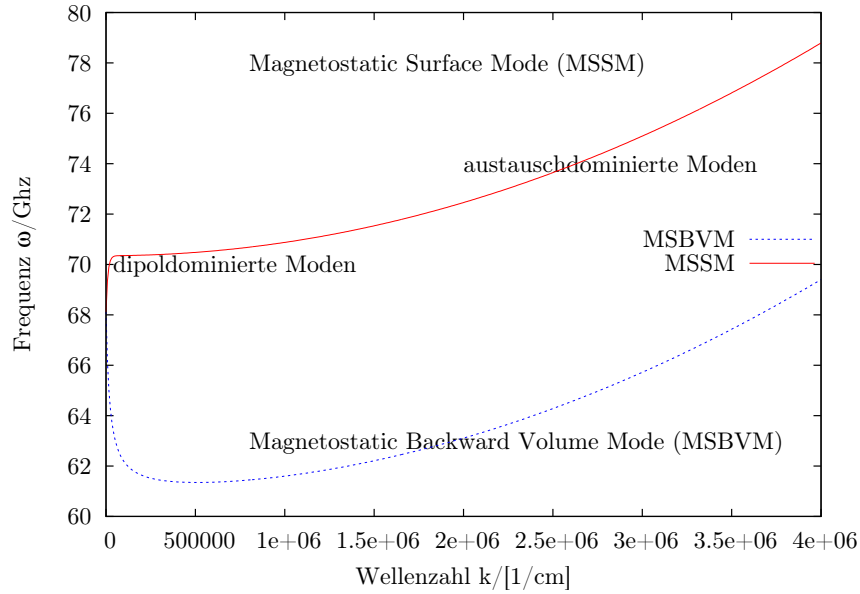
Für die Herleitung sowohl der Volumen- als auch der Oberflächenmodenprofile haben wir die explizite Annahme gemacht, dass der Magnetisierungsvektor in der Probenebene liegt. Es wäre natürlich auch möglich, ein Magnetfeld senkrecht zur Probenebene anzulegen und eine Stellung des Magnetisierungsvektors parallel zum Flächennormalenvektor zu erzwingen. Es sei an dieser Stelle aber nur auf die Existenz einer entsprechenden Mode hingewiesen, die im Allgemeinen als 'Magnetostatic Forward Volume Mode' (MSFVM) bezeichnet wird [23].

Die angesprochene magnetostatische Oberflächenmode wird 'Magnetostatic Surface Mode' (MSSM) genannt [16]. Die o.a. Volumenmode bezeichnet man aufgrund der antiparallelen Stellung von Gruppengeschwindigkeit und Wellenvektor als 'Magnetostatic Backward Volume Mode' (MSBVM). Sättigungsmagnetisierung  $\mathbf{M}_S$  und Wellenvektor  $\mathbf{k}$  liegen bei der MSBVM parallel in der Probenebene. Bei der MSSM liegen beide orthogonal zueinander, aber stets in der Probenebene (vgl. Abbildung 3.5). Charakteristisch für die MSBVM ist das Abnehmen der Frequenz, also der Energie mit zunehmender Wellenzahl [2],[23].



**Abbildung 3.5:** Magnetostatische Wellenpropagation in der Filmebene. Bei der MSSM und der MSBVM liegt die Sättigungsmagnetisierung  $\mathbf{M}_S$  und damit das interne Feld  $\mathbf{H}_{int}$  in der Probenebene. Bei der nicht eingezeichneten MSFVM läge  $\mathbf{H}_{int}$  parallel zur Flächennormalen. Für Oberflächenmoden gilt  $\mathbf{H}_{int} \perp \mathbf{k}$ , für MSB-Volumenmoden  $\mathbf{H}_{int} \parallel \mathbf{k}$ .

Wegen der negativen Dispersion wird der MSBVM eine besondere Bedeutung zugeschrieben, da in diesem Fall das Lighthill-Kriterium [36] als Stabilitätskriterium für ein nichtlineares Wellenpaket greift. Der nichtlineare Anteil kann Beugung und Dispersion ausgleichen und so ein vorzeitiges Auseinanderfließen des Wellenpakets verhindern. Die so erzeugten Solitonen sind in einem gewissen Zeitraum stabil.



**Abbildung 3.6:** Dispersionsrelation der MSSM und der MSBVM unter Berücksichtigung von Dipol-Dipol- und Austauschwechselwirkung; Berechnung für:  $M_S = 0,2T$ ;  $H_{int} = 0,3T$ ;  $a = 10^{-7}cm$ ;  $\delta = 0,5 \cdot 10^{-4}cm$ . Für große  $k$  ist  $\omega \propto k^2$ , da die Moden bei kleinen Wellenlängen austauschdominiert sind.

### 3.1.3 Modenprofil unter Berücksichtigung von Dipol-Dipol- und Austauschwechselwirkung

Wir haben in **3.1.2** und **3.1.1** die Dispersionsrelationen der entsprechend angeregten Moden hergeleitet. Aus den Vorüberlegungen war ersichtlich geworden, dass die Austauschwechselwirkung vor allen Dingen bei großem  $|\mathbf{k}|$ , also kleinen Wellenlängen, die entscheidende Wechselwirkung der Spins untereinander sein sollte, während bei großen Wellenlängen die Dipol-Dipol-Wechselwirkung maßgeblich die Dispersionsrelation dominiert. Diese Überlegungen waren eine stringente Folgerung unseres Modellsystems.

Berücksichtigt man nun formal beide Wechselwirkungen für eine dünne, ferromagnetische Schicht, erhält man die Dispersionsrelation, die im gesamten Wellenvektorbereich gültig sein muss. Aus (3.1.44),(3.1.49) und (3.1.17) erhält man additiv die Dispersionrelation der MSSM und der MSBVM im vollen Wellenvektorbereich<sup>1</sup>. Es gilt für die MSSM unter Berücksichtigung von (3.1.12):

$$\omega(k) = \gamma a^2 k^2 H_{int} + \gamma \sqrt{\left(H_{int} + \frac{4\pi M_S}{2}\right)^2 - \left(\frac{4\pi M_S}{2}\right)^2 e^{-2\delta k}}. \quad (3.1.51)$$

<sup>1</sup>Für die Austauschwechselwirkung ist die Näherung einer linearen Spinkette gemacht worden.



Dabei haben wir wegen der Doppelbenennung die Gitterkonstante mit  $a$  bezeichnet,  $\delta$  bleibt weiterhin die Schichtdicke. Für die MSBVM gilt:

$$\omega(k) = \gamma a^2 k^2 H_{int} + \gamma \sqrt{(H_{int})^2 + 4\pi M_S H_{int} \frac{2 + k\delta}{2 + 2k\delta}}. \quad (3.1.52)$$

Dieses volle Modenprofil ist in Abbildung 3.6 für spezielle Werte dargestellt. Die o.a. Vermutungen bestätigen sich, da die Moden für kleine  $|k|$  dipoldominiert sind, während die Funktionen für große  $|k| \propto k^2$  und damit austauschdominiert sind, vgl. (3.1.51) und (3.1.52).

Im Grenzfall  $k = 0$  erhält man exakt die Grenzfrequenzen wie sie schon in [55] über die lineare Antworttheorie abgeleitet wurden.

## 4 Die Nichtlineare Schrödinger-Gleichung

Im folgenden Abschnitt soll ein Einblick in die nichtlineare Wellentheorie gewonnen werden. In **2** hatten wir uns ausführlich mit der Herleitung der Landau-Lifshitz-Gleichung befasst, die uns die Dynamik des Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  geliefert hat. Der Übergang von dieser vektordynamischen Gleichung zu einer skalaren, dynamischen Gleichung in Bezug auf  $m(\mathbf{r}, t)$  gelang mit Hilfe der stereographischen Projektion (2.3.2). Gleichung (2.3.15) beinhaltet zwei wichtige Terme, die die gesamte Charakteristik dieser partiellen Differentialgleichung widerspiegeln. Da  $\partial_t m \propto \Delta m$  existiert eine Art Diffusionsterm in der projizierten Gleichung. Der Term  $\propto m^*(\nabla m)^2$  ist der nichtlineare Term in dieser Gleichung, der in seiner Form eine kubische Nichtlinearität beschreibt. Es ist damit ersichtlich, in welchem engen Zusammenhang die in  $\mathbb{C}$  projizierte Landau-Lifshitz-Gleichung mit der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung stehen muss. Der Übergang zwischen diesen beiden Gleichungen kann sowohl über die Hamiltondarstellung [37], [54], wie auch durch Einsetzen eines Wellenansatz der Form  $m(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, t)e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)}$  gewonnen werden. Die erste Methode wird in einem der folgenden Unterabschnitte kurz skizziert werden, die zweite explizit erläutert.

### 4.1 Bedeutung der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung

Die kubische Schrödinger-Gleichung gehört zu den einfachen kanonischen Gleichungen, für die es eine Vielzahl von expliziten und exakten Lösungen gibt. Damit kann mit ihrer Hilfe eine präzise Vorhersage zum Beispiel zur Anzahl der entstehenden solitären Wellen gemacht werden, die aus einer anfänglichen, zeit- und raumbegrenzten Störung entstehen. Die drei in der Wellendynamik wichtigen kanonischen Gleichungen sind die Korteweg-de Vries-Gleichung,

$$\partial_t \eta + \zeta \eta \partial_x \eta + \partial_{xxx} \eta = 0, \quad (4.1.1)$$

die Sine-Gordon-Gleichung,

$$\partial_{tt} \phi - \partial_{xx} \phi + \sin \phi = 0, \quad (4.1.2)$$

und die angesprochene Nichtlineare Schrödinger-Gleichung [26], [53]:

$$i\partial_t u + \partial_{xx} u + \nu |u|^2 u = 0. \quad (4.1.3)$$

Gewöhnlicherweise werden Wellen-Prozesse in einer Vielzahl von Medien durch folgende Wellengleichung beschrieben:

$$\frac{\delta^2 \Psi}{\delta t^2} = v_0^2 \frac{\delta^2 \Psi}{\delta x^2}. \quad (4.1.4)$$

Sie beschreibt die Propagation von Wellen mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v_0$  und kann u.a. aus den Maxwell-Gleichungen gewonnen werden. Entscheidend in dieser fundamentalen Wellengleichung sind drei Grundannahmen. Offensichtlich beinhaltet Gleichung (4.1.4) keinen dissipativen Term, was sich dadurch manifestiert, dass sie invariant gegen Zeitinversion  $t \rightarrow -t$  bleibt. Auch wird bei ihrer Herleitung die Annahme gemacht, dass Oszillationen relativ klein bleiben, wodurch ein möglicher nichtlinearer Term vernachlässigt werden kann. Letztlich sollte im betrachteten Wellenlängenbereich auch keine Dispersion auftreten, d.h. dass die Propagationsgeschwindigkeit nicht von der Frequenz, oder Wellenlänge abhängen soll. Gleichung (4.1.4) ist in vielen Medien eine gültige Näherung und zwar immer genau dann, wenn Dissipation, Dispersion und Nichtlinearität als klein angenommen werden können.

Jedoch gibt es in der Natur eine Vielzahl von Medien, bei denen diese Effekte zu einem qualitativ völlig anderen Verhalten führen. Dissipation beispielsweise wird die Lösung der Wellengleichung entscheidend ändern, da die Amplitude der Lösung mit zunehmender Dauer abklingen wird. Dispersion führt zu einem Auseinanderlaufen des Wellenpakets, während ein zusätzlicher nichtlinearer Term die Wellenfront steiler werden lassen kann. Dieser Effekt wird in der englischen Literatur oftmals als "steepening the front" [42] bezeichnet.

Das Einbauen dieser Korrekturterme geschieht oftmals über intrinsische Annahmen einer möglichst einfachen Dispersion, während die Nichtlinearität durch Abgleich mit den Erhaltungsgrößen des Systems eingebunden werden kann [42].

## 4.2 Gewöhnliche Herleitung der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung

Sei  $\Phi(x, t)$  eine Störung in einem Medium. Um nun lineare Wellen und Instabilitäten in homogenen Medien zu untersuchen, ist es zweckmäßig, diese Störung in Fourier-Moden auszudrücken. Es gilt als generelle Lösung für eine lineare, dispersive Mode:

$$\Phi(x, t) = \Psi e^{ikx - i\omega(k, \nu, |\Phi|^2)t}. \quad (4.2.1)$$

Die Amplitude  $\Psi$  ist dabei konstant. Die Dispersionsrelation nach [26]  $\omega = \omega(k, \nu, |\Phi|^2)$  beinhaltet die Idee des Kontrollparameters  $\nu$ , der das System extern steuern kann, sowie die Vorstellung, dass die Nichtlinearität auf eine parametrische Art die Dispersionsrelation beeinflussen kann.

Wir greifen uns eine Mode heraus und zerlegen  $\Phi(x, t)$  in zwei Terme, in denen die verbleibende dispersive Variation in den Amplitudenfaktor geschrieben wird:

$$\Phi(x, t) = \zeta(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}. \quad (4.2.2)$$

$\omega_0$  und  $k_0$  sind die fundamentale lineare Frequenz und die lineare Wellenzahl  $k_0$ , um die die Dispersionsrelation entwickelt werden kann. Der Vergleich von (4.2.1) und (4.2.2) zeigt:

$$\zeta(x, t) = \Psi e^{i[(k-k_0)x - (\omega[k, \nu, |\zeta|^2] - \omega_0)t]}. \quad (4.2.3)$$

Die Entwicklung der Dispersionsrelation  $\omega$  um den Entwicklungspunkt  $k_0$ , wobei Terme bis quadratischer Ordnung in  $k$  und nur lineare Terme in  $\nu$  und  $|\zeta|^2$  berücksichtigt werden, lautet:

$$\begin{aligned} \omega(k, \nu, |\zeta|^2) = \omega(k_0, \nu_0, 0) + \partial_k \omega(k - k_0) + \frac{1}{2} \partial_{kk} \omega (k - k_0)^2 + \partial_\nu \omega (\nu - \nu_0) \\ + \partial_{|\zeta|^2} \omega |\zeta|^2 + H.O.T. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Der Entwicklungspunkt ist dabei  $\omega_0 = \omega(k_0, \nu_0, 0)$ .  $\zeta(x, t)$  gehorcht unter der Identifikation von  $\partial_k \omega$  mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  folgender Gleichung:

$$i \left( \frac{\delta \zeta}{\delta t} + v_g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \omega_{kk} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \left[ (\nu - \nu_0) \omega_\nu + \omega_{|\zeta|^2} |\zeta|^2 \right] \zeta = 0. \quad (4.2.5)$$

Gleichung (4.2.5) ist die berühmte (1+1)-dimensionale Nichtlineare Schrödinger-Gleichung. Wie gezeigt, ist sie eine Gleichung für die Orts- und Zeitmodulation der Amplitude einer linearen Welle. Über die Terme  $\propto \nu$  werden Hintergrundstörungen eingebunden. Wegen der kubischen Nichtlinearität bleibt aber auch bei Nichtvorhandensein dieser Störungen ein Term  $\propto \zeta$  erhalten. Man erhält:

$$i \left( \frac{\delta \zeta}{\delta t} + v_g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - N |\zeta|^2 \zeta = 0. \quad (4.2.6)$$

$D = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$  ist der Dispersionskoeffizient, während  $N = \frac{\partial \omega}{\partial |\zeta|^2}$  den nichtlinearen Koeffizienten in der Taylor-Entwicklung darstellt. Es kommt nun entscheidend darauf an, ob Modulationen stabil oder instabil sind. [53] folgend sind die Modulationen gemäß der Schreibweise in Gleichung (4.2.6) für  $N > 0$  stabil, während sie für  $N < 0$  instabil werden. [44] zeigt Gleiches, indem die Stabilität eines allgemeinen Lösungsansatzes  $\zeta(x, t) = \Phi_0(x) e^{i\omega t}$  mit  $\Phi_0, \omega \in \mathbb{R}$  von Gleichung (4.2.6) untersucht wird. In der Schreibweise (4.2.6) sind bei gleichem Vorzeichen von  $N$  und  $D$  alle Lösungen obiger Form, wobei  $\Phi_0(x)$  einem periodischen, nichtlinearen Wellenansatz genügt, instabil. Im Fall entgegengesetzter Vorzeichen sind alle Lösungen, auch die schockartigen, stabil, zumindest für langreichweitige Wellenlösungen [44]. Der Spezialfall  $\partial_\nu \omega(\nu - \nu_0) = 0$  ist bereits 1972 von Zakharov und Shabat untersucht worden und bestätigt obige Stabilitätsanalyse.

Gleichung (4.2.6) besitzt also Lösungen, die explizit angegeben werden können. Spezielle Lösungen dieser Gleichung sind in vielfältigen Artikeln und Büchern publiziert worden [53], [27], [13] etc.

### 4.3 Ableitung der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung aus der Landau-Lifshitz-Gleichung

Der folgende Unterabschnitt soll ein mögliches Verfahren zur Herleitung der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung als Fundamentalgleichung für Spinwellenprozesse skizzieren. Nichtlineare Spinwellen werden in vielen Bereichen durch den klassischen Hamiltonformalismus, der für große, voluminöse Ferromagneten zuerst von Zakharov, L'vov und Starobinets entwickelt wurde, beschrieben [37]. Es war vor allen Dingen die Arbeitsgruppe um A.N.Slavin, die diesen Formalismus auch für dünne, ferromagnetische Schichten, die hier betrachtet werden sollen, vorantrieb und mit [54],[46] und [45] veröffentlichte. Der phänomenologische Ausgangspunkt für die Herleitung ist wiederum die Landau-Lifshitz-Gleichung. In ungedämpfter Form unter Berücksichtigung von (2.1.21) lautet sie:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma \left[ \mathbf{M} \times \frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}} \right]. \quad (4.3.1)$$

Dabei ist es freigestellt, welche Wechselwirkungen in der funktionalen Ableitung des Energieterms berücksichtigt werden müssen. Dies wird sicherlich stark von der Geometrie des Ferromagneten und dem zu betrachtenden Wellenlängenbereich abhängen. Nun kann der dynamische Teil der Magnetisierung  $\mathbf{m}(\xi, \mathbf{r}, t)$  nach inhomogenen ebenen Wellen entwickelt werden, so dass sich der Gesamtmagnetisierungsvektor  $\mathbf{M}(\xi, \mathbf{r}, t)$  schreiben lässt als

$$\mathbf{M}(\xi, \mathbf{r}, t) = \mathbf{M}_z + \mathbf{m}(\xi, \mathbf{r}, t) = M_S \mathbf{e}_z + \sum_{n,k} \mathbf{m}_{nk}(t) \Phi_n(\xi) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (4.3.2)$$

Die Funktion  $\Phi_n(\xi)$  beschreibt Beiträge der dynamischen Magnetisierung in Richtung der Flächennormale und muss den entsprechenden Randbedingungen an der Oberfläche der Probe genügen. Für eine Probe der Dicke  $\delta$ , die in  $y$ - $z$ -Richtung ausgerichtet ist, gilt im komplett ungepinnten Fall der Spins,

$$\frac{\partial m}{\partial x} = 0|_{x=\pm\delta/2}, \quad (4.3.3)$$

während im vollständig gepinnten Fall gilt:

$$m = 0|_{x=\pm\delta/2}. \quad (4.3.4)$$

Diese Randbedingungen führen unmittelbar auf die gesuchten Funktionen  $\Phi_n(x)$  [54]. Da  $\mathbf{m} \ll \mathbf{M}_S$ , sind auch die Amplituden der Spinwellenmoden klein und man kann die Hamiltonfunktion der Spinwellen in eine Taylorreihe entwickeln. Benutzt man die über die Holstein-Primakoff-Transformation [35] transformierten Amplituden  $b_{nk}, b_{nk}^*$ , so lässt sich die Hamiltonfunktion schreiben zu [54]:

$$H(b_{nk}, b_{nk}^*) = \sum_{nk} \omega_{nk}(k) b_{nk} b_{nk}^* + H_3 + H_4 + \dots H.O.T. \quad (4.3.5)$$

Der erste Term beschreibt die kinetische Energie der Spinwellen mit Dispersionsrelation  $\omega_{nk}(k)$ ;  $H_3$  und  $H_4$  beschreiben drei- und vier-Wellen- Prozesse [37] und kennzeichnen nichtlineare Wechselwirkungen der Spinwellen. [54] folgend können drei-Wellen-Prozesse im Medium vermieden werden, indem nur ein gewisser spektraler Bereich betrachtet wird. Die Erhaltungssätze für vier-Wellen-Prozesse lauten:

$$\begin{aligned}\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) &= \omega_3(\mathbf{k}_3) + \omega_4(\mathbf{k}_4), \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4.\end{aligned}\quad (4.3.6)$$

Die Anregung eines Spinwellenpaketes erfolgt über eine Antenne der Länge  $l_A$ . D.h., die vertikale Ausdehnung des Pakets ist ungefähr

$$\Delta k_y \approx k_y^{max} \approx \frac{2\pi}{l_A}.\quad (4.3.7)$$

Die horizontale Ausdehnung ist durch die endliche Pulsdauer  $T$  des Anregungspulses gegeben:

$$\Delta k_z \approx \frac{2\pi}{v_{gz}T}.\quad (4.3.8)$$

Unter der Annahme, dass die spektrale Ausdehnung des Wellenpakets transversal und vertikal begrenzt bleibt, also  $\Delta k_y, \Delta k_z \ll k_{0z}$  und die Amplitude ebenfalls klein ist  $|\Psi|^2 \ll 1$ , besteht die Möglichkeit  $\omega(\mathbf{k}, |\Psi|^2)$  in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt ( $\omega = \omega_0, \mathbf{k} = k_{0z}\mathbf{e}_z, |\Psi|^2 = 0$ ), der dem Zentrum des Wellenpakets entspricht, zu entwickeln:

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{k}, |\Psi|^2) &= \omega_0(k_{0z}) + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\Delta k_z + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_y^2}(\Delta k_y)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_z^2}(\Delta k_z)^2 \\ &\quad + \frac{\partial\omega}{\partial |\Psi|^2}|\Psi|^2 + H.O.T.\end{aligned}\quad (4.3.9)$$

Vermöge der so entwickelten Dispersionsrelation (4.3.9) und aus der Bewegungsgleichung für die Spinwellenamplituden, wie sie in [54] abgeleitet wurde, erhält man für die Einhüllende des Spinwellenpaketes unter Benutzung von [53] mit

$$\phi(y, z, t) = \Psi(y, z, t)e^{i(\omega_0 t - k_{0z} z)}\quad (4.3.10)$$

die (2+1) dimensionale Nichtlineare Schrödinger-Gleichung:

$$i\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + v_g\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + S\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - N|\Psi|^2\Psi = -i\gamma\Psi.\quad (4.3.11)$$

Die Dämpfung in der Form  $-i\gamma\Psi$  ist in der Herleitung phänomenologisch eingefügt worden. Da in vertikaler Richtung nur Beugung und keine Dispersion zu erwarten ist, gilt  $\frac{\partial\omega}{\partial k_y} = 0$ . Für die fundamentalen Koeffizienten in Gleichung (4.3.11) erhält man [23], [54]:

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\Big|_{k_{0z}}, \quad D = \frac{\partial^2\omega}{\partial k_z^2}\Big|_{k_{0z}}, \quad S = \frac{\partial\omega}{\partial(k_y^2)}\Big|_{k_{0z}}, \quad N = \frac{\partial\omega}{\partial|\Psi|^2}\Big|_{k_{0z}}.\quad (4.3.12)$$

$\gamma$  ist der Dissipationsparameter,  $D$  der Dispersionskoeffizient,  $S$  der Beugungskoeffizient und  $N$  der nichtlineare Koeffizient. Schwache Dämpfung ist dadurch charakterisiert, dass  $\gamma \ll N |\Psi|^2$  ist. Wie wir sehen werden, besitzt Gleichung (4.3.11) im Fall keiner Dämpfung exakte Lösungen, im Fall schwacher Dämpfung können solitonenartige Lösungen über eine störungstheoretische Betrachtung ermittelt werden. Die störungstheoretische Behandlung der Dämpfung in der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung ist ein adäquates Mittel, um ihren Einfluss auf die exakte Lösung der kanonischen Gleichung vorherzusagen. Vorstellbar sind natürlich auch andere Einflüsse, wie z.B. zeitabhängige oder zeitunabhängige äußere Einflüsse, ortsabhängige Störungen, Anisotropien oder zusätzliche Nichtlinearitäten, die die Lösung des Systems entscheidend beeinflussen können. Um diesen Störtermen Rechnung zu tragen, wird in (4.3.11) ein zusätzlicher und zunächst beliebiger Term  $g(z, t, \Psi, \Psi^*)$  eingeführt und das Problem eindimensional behandelt. Mit  $z \rightarrow z''$  und unter rein eindimensionaler Betrachtung, erhält man für ein Envelope-Soliton:

$$i \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t'} + v_g \frac{\partial \Psi}{\partial z''} \right) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z''^2} - N |\Psi|^2 \Psi = -i\gamma \Psi + g(z'', t', \Psi, \Psi^*). \quad (4.3.13)$$

#### 4.4 Zusammenhang der stereographisch projizierten LLG mit der KNSG

Aufgrund der strukturellen Übereinstimmung der stereographisch projizierten LLG mit der KNSG bestand die Vermutung, diese Gleichungen ineinander überführen zu können. Notwendige Voraussetzung dabei ist die Kenntnis der Dispersionsrelation für die entsprechenden Moden. Im allgemeinen Fall, d.h. unter Berücksichtigung von Austausch- und Dipol-Dipol-Wechselwirkung ist diese Relation aber recht kompliziert, wie in Kapitel 3 gezeigt wurde. Wir begnügen uns an dieser Stelle damit, diesen Zusammenhang basierend auf reiner Austauschwechselwirkung zu zeigen. Dabei wird der Dämpfungsterm in der Grundform der LLG,

$$\frac{\partial_t m}{\gamma(i-g)} = DM_S \left( -\nabla^2 m + \frac{2m^*(\nabla m)^2}{1+|m|^2} \right), \quad (4.4.1)$$

vernachlässigt und das System eindimensional betrachtet. Ausgehend von  $g = 0$  kann man für 4.4.1 die allgemeinste Form eines Wellenansatzes machen:

$$m(z, t) = \Psi(z, t) e^{i\phi(z, t)}, \quad m(z, t), \Psi(z, t) \in \mathbb{C}; \quad \phi(z, t) \in \mathbb{R}. \quad (4.4.2)$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} i\dot{\Psi} - \dot{\phi}\Psi &= \gamma DM_S \left[ \Psi'' + 2i\phi'\Psi' + i\phi''\Psi - \phi'^2\Psi \right] \\ &- \gamma DM_S \left[ \frac{2}{1+|\Psi|^2} \left( \Psi^*\Psi'^2 - \phi'^2\Psi|\Psi|^2 + 2i\phi'\Psi'|\Psi|^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Unter der Annahme, dass  $m(z, t)$  die Lösung einer generellen, dispersiven Mode darstellt, kann  $m(z, t)$  analog zu 4.2 in zwei Terme zerlegt werden, die uns die Darstellung von  $\Psi(z, t)$  und  $\phi(z, t)$  liefern. Mit

$$m(z, t) = \Psi(z, t)e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \quad (4.4.4)$$

gilt:

$$\Psi(z, t) = Ae^{i[(k-k_0)z - (\omega[k, |\Psi|^2] - \omega_0)t]}, \quad \phi(z, t) = k_0 z - \omega_0 t. \quad (4.4.5)$$

$A$  stellt eine konstante Amplitude dar <sup>1</sup>,  $\omega_0(k_0, 0)$  den Entwicklungspunkt der Dispersionsrelation. Unter diesen Annahmen vereinfacht sich (4.4.3) zu

$$(i\dot{\Psi} + \omega_0\Psi)(1 + |\Psi|^2) = \gamma DM_S [\Psi'' + 2ik_0\Psi' - k_0^2\Psi + k^2|\Psi|^2\Psi], \quad (4.4.6)$$

womit direkt folgt:

$$i\dot{\Psi} + \omega_0\Psi = \gamma DM_S [\Psi'' + 2ik_0\Psi' - k_0^2\Psi] + \left(-\omega(k, |\Psi|^2) + \gamma DM_S k^2\right) |\Psi|^2 \Psi \quad (4.4.7)$$

Damit haben wir die stereographisch projizierte LLG auf die Form der Kubischen Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung gebracht. Nehmen wir die Nichtlinearität als klein an, so kann man mit der Dispersionsrelation für austauschdominierte Moden  $\omega(k) = |\gamma| DM_S k^2$  nach 3.1.1' schreiben:

$$i\left(\dot{\Psi} + \frac{\partial\omega}{\partial k}\Big|_{k_0,0}\Psi'\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\Big|_{k_0,0}\Psi'' = 0. \quad (4.4.8)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass das gyromagnetische Verhältnis im Fall eines Elektronenspins negativ anzusetzen ist. Die Koeffizienten vor den entsprechenden Termen können nun mit  $v_g$  und  $D$  identifiziert werden, so dass die (1+1)- dimensionale KNSG nach (4.2.6) bei Vernachlässigung der Nichtlinearität resultiert. Diese Form der Schrödinger-Gleichung erhält man auch ohne die explizite Annahme, dass die Amplitude  $A$  konstant ist. Erst bei Berücksichtigung der Nichtlinearität ist diese Näherung erforderlich.

Durch die Annahme, dass die Dispersionsrelation zusätzlich von  $|\Psi|^2$  abhängen soll, lässt sich über eine Taylorentwicklung der Nichtlineare Koeffizient in Gleichung (4.4.7) bestimmen. Bis auf den Koeffizienten  $\frac{\partial\omega}{\partial|\Psi|^2}$  heben sich alle Terme weg und man erhält die vollständige KNSG.

Für das rein austauschdominierte System kann man die LLG folglich in die KNSG überführen. Dabei ist die Kenntnis der Dispersionsrelation unumgänglich, um den Vergleich nachvollziehen zu können. Prinzipiell sollte es über eine derartige Vorgehensweise auch möglich sein, die vollständige LLG in eine Wellengleichung, die die Form der KNSG hat, zu überführen. Dabei müssen Dipol-Dipol-Wechselwirkungsterme berücksichtigt werden, was die Analyse äußerst schwierig macht<sup>2</sup>. Die Einbindungen äußerer Felder und des Dämpfungsterms sollten sich in Störtermen der KNSG manifestieren.

---

<sup>1</sup>Die Annahme einer konstanten Amplitude ist eine Näherung, die für das Berechnen der Nichtlinearität sinnvoll ist.

<sup>2</sup>Die Dispersionsrelation wird wesentlich komplizierter.



## 4.5 Skalierung der Schrödinger-Gleichung

Gleichung (4.3.13) für ein Envelope-Soliton soll im folgenden Unterabschnitt auf eine möglichst einfache Form skaliert werden. Im mitbewegten Bezugssystem gilt:

$$z'' = z' + v_g t'. \quad (4.5.1)$$

Diese Skalierung führt direkt auf

$$i \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \right) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - N |\Psi|^2 \Psi = -i\gamma \Psi + g(z', t', \Psi, \Psi^*). \quad (4.5.2)$$

Mit der Skalierung der Einhüllenden-Funktion sowie Ortskoordinaten und Zeit lassen sich die übrigen Koeffizienten eliminieren:

$$\psi = \frac{\Psi}{\Psi_0}, \quad z = \frac{z'}{z_0}, \quad t = \frac{t'}{t_0} \quad (4.5.3)$$

Einsetzen führt auf

$$i \frac{\Psi_0 \partial \psi}{t_0 \partial t} + \frac{1}{2} D \Psi_0 \frac{\partial^2 \psi}{z_0^2 \partial z^2} - N |\Psi_0|^2 \Psi_0 |\psi|^2 \psi = -i\gamma \Psi_0 \psi + g(z_0 z, t_0 t, \Psi_0 \psi, \Psi_0^* \psi^*). \quad (4.5.4)$$

Skaliert man nun  $z_0 = \sqrt{\frac{D}{2}} \in \mathbb{R}$  und  $\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \in \mathbb{R}$ , so erhält man die gestörte Nichtlineare Schrödinger-Gleichung in der Form

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \pm |\psi|^2 \psi = -i\gamma \psi + \frac{1}{\Psi_0} g(z_0 z, t, \Psi_0 \psi, \Psi_0 \psi^*). \quad (4.5.5)$$

Das Vorzeichen vor der kubischen Nichtlinearität kann je nach Definition des nichtlinearen Koeffizienten  $N$  positiv oder negativ sein und bestimmt die Stabilität der Lösung (vgl. 4.6). Die ungestörte Gleichung <sup>3</sup> besitzt exakte Lösungen.

## 4.6 Exakte Lösungen der ungestörten Kubischen Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung

Es ist eine der bemerkenswertesten Eigenschaften der ungestörten Kubischen Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung  $i\partial_t \psi + \partial_{zz} \psi + |\psi|^2 \psi = 0$ , dass sie exakte Lösungen besitzt. Infolgedessen kann auch die gedämpfte, getriebene KNSG Solitonenlösungen vorweisen und zwar sowohl stabile [28],[39],[4],[53] wie auch instabile [4],[3],[53], wobei diese Lösungen sich wiederum zu stabilen und instabilen Multisolitonenlösungen (Multisolitonenkomplex) zusammensetzen können [38],[5]. Es war dabei lange Zeit unklar, dass die gedämpfte, getriebene Nichtlineare Schrödinger-Gleichung auch sich bewegende Solitonenlösungen besitzt, da die 'Inverse Scattering'-Methode [53] keine derartigen Lösungen

<sup>3</sup>Die rechte Seite von Gleichung (4.5.5) ist dann Null.

postulieren konnte. Die Tatsache sich bewegender Solitonen wurde in [6] verifiziert. Im ungedämpften, ungetriebenen Fall soll im Folgenden eine mögliche, sich bewegende Solitonenlösung abgeleitet und ihr Verhalten kurz erläutert werden. Gegeben sei also die skalierte KNSG, wobei das Vorzeichen von  $N$  entsprechend definiert wurde:

$$i\partial_t\psi(z, t) + \partial_{zz}\psi(z, t) + |\psi(z, t)|^2\psi(z, t) = 0. \quad (4.6.1)$$

Da  $\psi \in \mathbb{C}$  besitzt  $\psi$  eine Darstellung der Form (allgemeiner Wellenansatz)

$$\psi(z, t) = A(z, t)e^{i\Phi(z, t)}. \quad (4.6.2)$$

Einsetzen in Gleichung (4.6.1) und Trennung der Gleichungen nach Real- und Imaginärteil liefert das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_t A(z, t) + 2\partial_z \Phi(z, t)\partial_z A(z, t) + A(z, t)\partial_{zz}\Phi(z, t) &= 0, \\ A(z, t) [\partial_t \Phi(z, t) + \partial_x \Phi^2(z, t)] - A^3(z, t) - \partial_{zz}A(z, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Das System ist entscheidend durch die Größe  $T(z, t) = \partial_t \Phi(z, t) + \partial_z \Phi^2(z, t)$  gekennzeichnet, da mit  $T(z, t)$  das Verhalten der Phase charakterisiert wird. Für Solitonenlösungen gilt:

$$T(z, t) = a^2. \quad (4.6.4)$$

Die Einhüllenden-Funktion  $A(z, t)$  erfüllt gemäß (4.6.3) die Gleichung

$$\partial_{zz} = -\frac{\partial}{\partial A}V(A). \quad (4.6.5)$$

Dabei ist  $V(A)$  das Potential für diese Einhüllenden-Funktion  $A(z, t)$ :

$$V(A) = -\frac{a^2}{2}A^2 + \frac{A^4}{4}. \quad (4.6.6)$$

Nach Restriktion auf homokline Lösungen kann man (4.6.5) aufintegrieren und erhält dann

$$\frac{1}{2}\partial_z A^2 + V(A) = 0. \quad (4.6.7)$$

Die Differentialgleichung (4.6.7) wird gelöst durch

$$A(z, t) = \frac{\sqrt{2}a(t)}{\cosh a(t)(z - R(t))}. \quad (4.6.8)$$

Offensichtlich erfüllt (4.6.8) die für Solitonenlösungen essentiellen Randbedingungen  $A(z \rightarrow \pm\infty, t) = 0$ . In (4.6.8) bleibt das zeitliche Verhalten der Größen  $a(t)$  und  $R(t)$  zu bestimmen. Dies geschieht wiederum mit (4.6.3), aus der sich direkt unter der speziellen Solitonenannahme (4.6.4) folgende Gleichung ableiten lässt:

$$\partial_t A(z, t) + 2\partial_z \Phi(z, t)\partial_z A(z, t) = 0. \quad (4.6.9)$$

Wir definieren die Bewegungskordinate  $\chi(z, t) = a(t)(z - R(t))$  und schreiben die Solitonlösung in der Form:

$$A(z, t) = a(t)F(\chi(z, t)). \quad (4.6.10)$$

Die Orts- und Zeitableitungen von  $A(z, t)$  liefern:

$$\begin{aligned} \partial_t A(z, t) &= \dot{a}F(\chi) + aF'(\chi) [\dot{a}(z - R) - a\dot{R}], \\ \partial_z A(z, t) &= a^2 F'(\chi). \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

Mit Gleichung (4.6.9) erhält man aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Größen  $F(\chi)$  und  $F'(\chi)$  folgendes gekoppeltes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0, \\ \dot{a}(z - R) - a\dot{R} + 2a\partial_z \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

Über (4.6.12) und (4.6.4) sind für Solitonlösungen der Form (4.6.8) die Phase  $\Phi(z, t)$  und die Größen  $a(t)$  und  $R(t)$  miteinander gekoppelt. Es gilt:

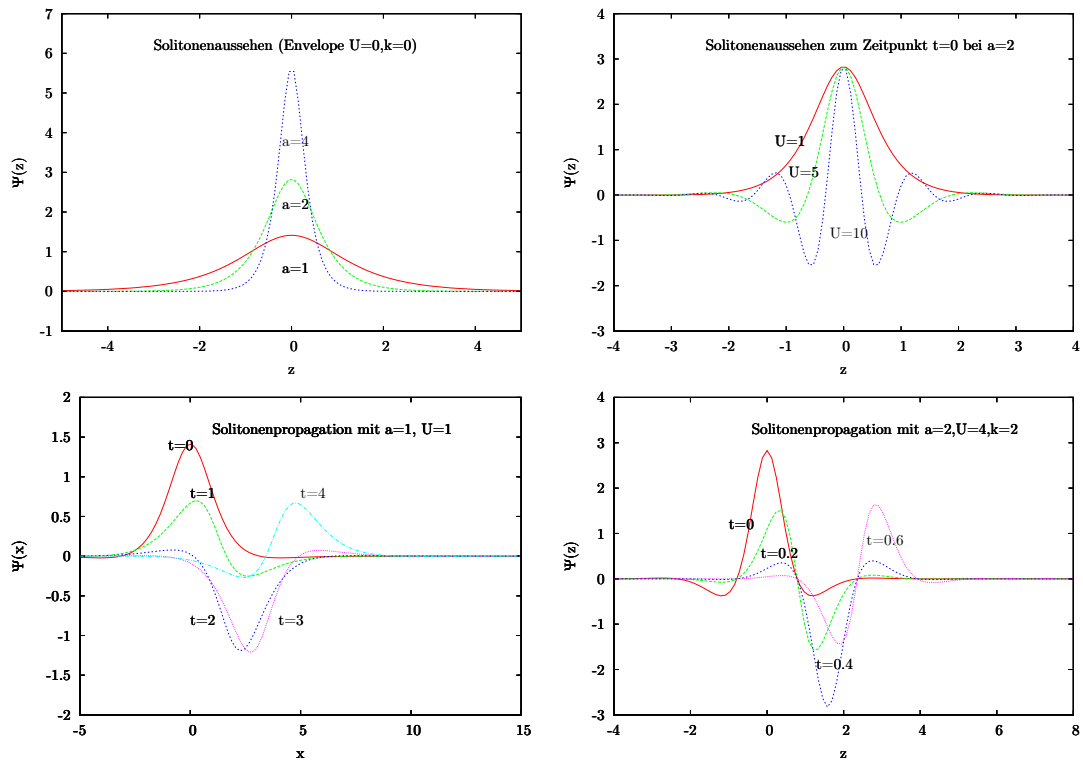
$$\begin{aligned} \partial_t R(t) &= 2\partial_z \Phi(z, t) \\ \partial_t \Phi(z, t) &= a^2(t) - \frac{(\partial_t R(t))^2}{4} \\ \partial_t a(t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Unter den obigen Annahmen und mit (4.6.13) ist eine exakte Lösung der Kubischen Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung formulierbar in der Form

$$\psi(z, t) = \frac{\sqrt{2}ae^{i(kz - \phi(t))}}{\cosh a(z - R(t))}. \quad (4.6.14)$$

Die charakteristischen Eigenschaften der Funktion  $\psi(z, t)$  sind in Abbildung 4.1 unter den Annahmen  $R(t) = Ut$ , also einer konstanten Propagationsgeschwindigkeit  $U$ , verdeutlicht. Die Phase  $\Phi(z, t)$  wurde unter den Bedingungen (4.6.14) zu  $\Phi(z, t) = \frac{U}{2}z - \omega t$  gewählt. Der essentielle Zusammenhang der Solitonpropagationsgeschwindigkeit  $U$  mit dem Betrag des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  zeigt, dass die Lösung (4.6.14) für  $k = 0$  nicht propagiert.

Sie stellt des Weiteren, wegen der expliziten  $k$ -Abhängigkeit der Phase, keine Envelope-Lösung mehr dar.



**Abbildung 4.1:** A) Charakteristisches Aussehen des Solitons (Envelope) in Abhängigkeit der zeitunabhängigen Amplitude  $a$ ; B) Charakteristisches Aussehen des Solitons in Abhängigkeit vom Betrag des Wellenvektors  $k$ ; C) Propagierendes Soliton für  $U = 1$ ; D) Propagierendes Soliton für  $U = 4$ .

## 5 Störungstheorie

Die Störungstheorie ist ein wesentliches Hilfsmittel der Physik, bei der das Verhalten einer exakten, physikalischen Lösung bei kleinen Störungen untersucht werden kann. Das Erweitern einer exakt lösbaren Gleichung um gewisse Korrekturterme macht diese Gleichung in vielen Fällen analytisch nicht mehr lösbar. Oftmals ist es dann unumgänglich, das Problem numerisch zu implementieren. Die Störungstheorie ist eine Methode, um mit Hilfe analytischer Näherungen die zugrunde liegende Gleichung approximativ zu lösen. Die populärsten Beispiele für störungstheoretische Betrachtungen von gewissen physikalischen Problemen findet man sicherlich in der Quantenmechanik, in der Näherungen der Lösungen von Eigenwertgleichungen gesucht werden. Hier wird ein Operator  $\mathcal{H}$ , z.B. der Hamiltonoperator, um einen Störoperator  $\lambda \cdot \mathcal{U}$  mit Störparameter  $\lambda$  erweitert und Eigenzustände sowie Eigenwerte des Operators  $\mathcal{H}$  in Potenzen von  $\lambda$  entwickelt. Sortieren nach Potenzen und Projektion auf den entsprechenden Eigenvektor liefert dann den Störbeitrag in der entsprechenden Ordnung [50].

Wir haben uns in Abschnitt 4 intensiv mit der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung beschäftigt und gesehen, wie sich diese fundamentale kanonische Gleichung auf ihre einfachste Form skaliert (vgl. 4.5):

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + |\psi|^2\psi = -i\gamma\psi + \frac{1}{\Psi_0}g(z_0z, t, \Psi_0\psi, \Psi_0\psi^*). \quad (5.0.1)$$

Im Folgenden werden wir die rechte Seite von Gleichung (5.0.1) qualitativ als Störung der linken Seite, also der Kubischen Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung auffassen.

### 5.1 Bedeutung der Störung für die exakte Solitonenlösung

In Abschnitt 4.6 ist eine exakte Lösung der Kubischen Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung hergeleitet worden und ihr Verhalten für bestimmte Werte aufgezeichnet:

$$\psi(z, t) = \frac{\sqrt{2}a(t)e^{i(kz - \phi(t))}}{\cosh a(z - R(t))}. \quad (5.1.1)$$

Die Solitonenlösung (5.1.1) unterlag dabei den essentiellen Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_t R(t) &= 2k, \\ \partial_t \phi(t) &= a^2 - \frac{(\partial_t R(t))^2}{4}, \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

und dem Postulat, dass  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} (\psi(z, t)) = 0$  gelten soll. Sie stellt folgerichtig keine Envelope-Lösung mehr dar, da ihre Phase entscheidend vom Wellenvektor  $k$  getragen wird. Mit den Skalierungsvorschriften muss diese Lösung sich jedoch wieder auf Envelope-Form bringen lassen.

Es existieren also vier fundamentale Größen in der KNSG. Die Größe  $a$  beschreibt quasi die Amplitude,  $k$  den Betrag des Wellenvektors,  $\phi(t)$  die Phase und  $R(t)$  den tatsächlichen Ort, also einen Term, der die zusätzliche Geschwindigkeit des Solitons enthalten muss<sup>1</sup>. Wir prägen nun dem zu untersuchenden, eindimensionalen System eine Störung in Form eines beliebigen Störterms  $g(\mathbf{S})$  auf, der von den entsprechend skalierten Größen in zunächst beliebiger Weise abhängen kann. Dabei kennzeichnet  $\mathbf{S}$  den Vektor dieser orts- und zeitabhängig skalierten Größen.  $\mathbf{S}$  muss natürlich in gleicher Form, wie die Nichtlineare Schrödinger-Gleichung skaliert werden.

Jegliche Störung des Systems kann nun zu einer zeitabhängigen Änderung der obigen vier essentiellen Grundgrößen führen, d.h.  $a \xrightarrow{!} a(t)$  und  $k \xrightarrow{!} k(t)$ ;  $R(t)$  und  $\phi(t)$  hatten wir in der Grundlösung schon möglichst allgemein gelassen. Folglich erhält man für das zu störende Soliton:

$$\psi(z, t) = C \frac{\sqrt{2}a(t)e^{i(k(t)z - \phi(t))}}{\cosh a(z - R(t))}, \quad C \in \mathbb{C}. \quad (5.1.3)$$

Wir haben an dieser Stelle noch eine allgemeine Konstante  $C$  eingeführt, die berücksichtigt, dass mit jeder Lösung gemäß (4.6.1) auch  $e^{i\theta}\psi(z, t)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  eine Lösung darstellt. Da  $|C|^2 = 1$  gelten muss, zeigt sich, dass dies in der Störungstheorie jedoch keine Auswirkungen hat. Die Vorgehensweise der störungstheoretischen Betrachtung ist im Folgenden recht intuitiv und berücksichtigt beispielsweise keine Störungsordnungen; sie kann aber das qualitative Verhalten des Solitons in Bezug auf eine gewisse Störung beschreiben.

## 5.2 Zeitabhängige Grundgrößen des gestörten Solitons

Unter Berücksichtigung der Solitonenlösung (5.1.3) definieren wir uns die vier Grundgrößen, die das qualitative Aussehen beschreiben:

$$\begin{aligned} a_\kappa(t) &= \int dz \psi^*(z, t)\psi(z, t) = 4a(t) |C|^2 = 4a(t), \\ R_\kappa(t) &= \int dz \psi^*(z, t)z\psi(z, t) = a_\kappa(t)R(t), \\ k_\kappa(t) &= -i \int dz \psi^*(z, t)\partial_z\psi(z, t) = a_\kappa(t)k(t), \\ \dot{\phi}_\kappa(t) &= \frac{i}{2} \int dz [\psi(z, t)^*\partial_t\psi(z, t) - \psi(z, t)\partial_t\psi(z, t)^*] \\ &= a_\kappa(t)\partial_t\phi(t) - R_\kappa(t)\partial_tk(t). \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

---

<sup>1</sup>'zusätzlich' bezieht sich auf die durch  $k$ -Selektion hervorgerufene Geschwindigkeit  $U$ . Das Soliton bewegt sich im Wesentlichen mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$ .

Die gestörte, auf ihre einfachste Form skalierte Schrödinger-Gleichung, lautet:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + |\psi|^2 \psi = g(\mathbf{S}). \quad (5.2.2)$$

Ein Soliton (5.1.1) propagiert unter der Dynamik dieser Gleichung, spürt also die Einflüsse der Störung  $g(\mathbf{S})$  und muss durch ein, in all den wichtigen Grundgrößen zeitabhängiges Soliton, ersetzt werden (vgl. 5.1.3). Die essentiellen Gleichungen (5.2.1) liefern die neue Dynamik in Abhängigkeit der Größen  $\psi(z, t)$  und  $\psi^*(z, t)$ . Ihre Definitionen leiten sich stringent aus der Solitonenlösung ab, können aber auch durch wenige Überlegungen gewonnen werden:  $a_\kappa(t)$  beschreibt bis auf Vorfaktor eine Norm,  $R_\kappa(t)$  den Erwartungswert von  $z$ ,  $k_\kappa(t)$  ist quasi der Erwartungswert des Ortsableitungsoperators und  $\dot{\phi}_\kappa(t)$  gewissermaßen der Erwartungswert für den Zeitableitungsoperator, der bis auf die Konstante  $\hbar$  die Energie des Systems darstellt. Diese Konstante werden wir im Folgenden vernachlässigen, bzw. die Energie auf  $\hbar$  skalieren. Es gilt:

$$\dot{\phi}_\kappa(t) = \text{Re} \int dz \psi(z, t) (-i \partial_t) \psi^*(z, t) = E(t). \quad (5.2.3)$$

Die Energie des Solitons kann uns wichtige Aufschlüsse in Bezug auf seine Dynamik liefern. Im ungestörten Fall und unter der Annahme, dass  $\ddot{\phi}(t)=0$  und  $a, k = \text{const.}$  sind, zeigt Gleichung (5.2.1), dass die Energie eine Erhaltungsgröße ist, also  $\ddot{\phi}_\kappa(t) = \dot{E}(t) = 0$  gilt. Propagiert somit das ungestörte Soliton (5.1.1) gemäß der ungestörten KNSG, ist  $E(t) = \text{const.}$  für alle Zeiten  $t$ . Nur unter Verwendung von Störtermen kann sich die Solitonenenergie ändern. Typischerweise sind diese Störterme in Form von Dämpfungen oder Anregungen anzusetzen. Die Definition des totalen Feldmomentes  $P$  in der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung gemäß

$$P(t) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz [\psi_z^* \psi - \psi_z \psi^*] = \frac{1}{2} (k_\kappa(t) + k_\kappa^*(t)) = \frac{1}{2} \text{Re}[k_\kappa(t)] \quad (5.2.4)$$

zeigt, dass eben dieses Moment bei konstantem  $k_\kappa$  eine Erhaltungsgröße ist, d.h. nach obiger Definition (5.2.1):  $P(t)$  ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn  $a$  und  $k$  konstant sind. Dies hatten wir für das Soliton aus (5.1.1) angenommen, welches eine Lösung der ungestörten Schrödinger-Gleichung war. Das Moment  $P(t)$  ist eine äußerst nützliche Größe, um sich klar zu machen, wie ein solitäres Wellenpaket propagiert.

## 5.3 Das Fundamentaldifferentialgleichungssystem

Wir leiten die Größen  $a_\kappa(t)$ ,  $R_\kappa(t)$  und  $k_\kappa(t)$  in (5.2.1) ab und ersetzen die zeitlichen Ableitungen  $\partial_t \psi(z, t)$  und  $\partial_t \psi^*(z, t)$  durch die gestörte Schrödinger-Gleichung in der

Form (5.2.2).

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_\kappa(t) &= \int dz [g(\mathbf{S})\psi^*(z, t) - g^*(\mathbf{S})\psi(z, t)], \\
 \dot{R}_\kappa(t) &= 2k(t) - i \int dz [g(\mathbf{S})\psi^*(z, t) - g^*(\mathbf{S})\psi(z, t)] z, \\
 \dot{k}_\kappa(t) &= \int dz [g^*(\mathbf{S})\partial_z\psi(z, t) + g(\mathbf{S})\partial_z\psi^*(z, t)], \\
 \dot{\phi}_\kappa(t) &= \underbrace{\int dz [|\partial_z\psi(z, t)|^2 - |\psi(z, t)|^4]}_{E_0(t)} \\
 &= +\frac{1}{2} \int dz [g^*(\mathbf{S})\psi(z, t) + g(\mathbf{S})\psi^*(z, t)]. \tag{5.3.1}
 \end{aligned}$$

Bei der Herleitung von (5.3.1) sind die essentiellen Randbedingungen für Solitonen verwendet worden:  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \psi(z, t) = 0$ . Des Weiteren haben wir die Größe  $E_0(t)$  definiert, die den Energieterm des ungestörten Solitons darstellt und wie schon erwähnt für (5.1.1) eine Erhaltungsgröße ist, d.h. dort gilt  $E_0(t) \rightarrow E_0 = 4a [k^2 - a^2]$ . Im Fall des gestörten Solitons (5.1.3) bleibt dieser Energieterm natürlich zeitabhängig. Der Zusammenhang mit den für das gestörte Soliton fundamentalen Größen  $a(t), k(t), R(t), \phi(t)$  lautet:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}(t) &= \frac{-i}{4} \int dz [g(\mathbf{S})\psi^*(z, t) - g^*(\mathbf{S})\psi(z, t)], \\
 \dot{R}(t) &= 2k(t) - \frac{i}{4a(t)} \int dz [(z - R(t)) (g(\mathbf{S})\psi^*(z, t) - g^*(\mathbf{S})\psi(z, t))], \\
 \dot{k}(t) &= \frac{1}{4a(t)} \int dz [g^*(\mathbf{S}) (\partial_z\psi(z, t) - ik(t)\psi(z, t)) + g(\mathbf{S}) (\partial_z\psi^*(z, t) + ik(t)\psi^*(z, t))], \\
 \dot{\phi}(t) &= R(t)\dot{k}(t) + \frac{E_0(t)}{4a(t)} + \frac{1}{8a(t)} \int dz [g^*(\mathbf{S})\psi(z, t) + g(\mathbf{S})\psi^*(z, t)]. \tag{5.3.2}
 \end{aligned}$$

Um das gekoppelte Differentialgleichungssystem auf eine übersichtlichere Form zu bringen, definieren wir uns die neuen Größen

$$\Gamma(z, t) = g^*(\mathbf{S}) (\partial_z\psi(z, t) - ik(t)\psi(z, t)), \tag{5.3.3}$$

$$\Lambda(z, t) = g(\mathbf{S})\psi^*(z, t), \tag{5.3.4}$$

$$\Theta(z, t) = g(\mathbf{S})\partial_z\psi^*(z, t). \tag{5.3.5}$$

Die so definierten Größen gehorchen dem Zusammenhang

$$\Gamma(z, t) = \Theta^*(z, t) - ik(t)\Lambda^*(z, t), \quad \Gamma^*(z, t) = \Theta(z, t) + ik(t)\Lambda(z, t). \tag{5.3.6}$$

Damit können wir das Differentialgleichungssystem (5.3.2) vereinfachen und die so entstehenden fundamentalen Differentialgleichungen in Abhängigkeit nur dreier Integrale



bringen:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[ \int dz \Lambda(z, t) \right], \\
 \dot{R}(t) &= 2k(t) - \frac{R(t)}{2a(t)} \operatorname{Im} \left[ \int dz \Lambda(z, t) \right] + \frac{1}{2a(t)} \operatorname{Im} \left[ \int dz z \Lambda(z, t) \right], \\
 \dot{k}(t) &= \frac{1}{2a(t)} \operatorname{Re} \left[ \int dz \Theta(z, t) \right] - \frac{k(t)}{2a(t)} \operatorname{Im} \left[ \int dz \Lambda(z, t) \right], \\
 \dot{\phi}(t) &= \frac{E_0(t)}{4a(t)} + \frac{R(t)}{2a(t)} \operatorname{Re} \left[ \int dz \Theta(z, t) \right] - \frac{R(t)k(t)}{2a(t)} \operatorname{Im} \left[ \int dz \Lambda(z, t) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4a(t)} \operatorname{Re} \left[ \int dz \Lambda(z, t) \right].
 \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

$E_0(t)$  für das gestörte Soliton (5.1.3) berechnet sich zu

$$E_0(t) = 4a(t) [k^2(t) - a^2(t)]. \tag{5.3.8}$$

Dabei muss explizit erwähnt werden, dass dies nicht die Energie des gestörten Solitons ist, da dieser Term aus der ungestörten KNSG für ein gestörtes Soliton abgeleitet worden ist. Der korrekte Energieterm für das gestörte Soliton in der gestörten KNSG berechnet sich stets aus (5.2.1)

$$E(t) = 4a(t) \partial_t \phi(t) - 4a(t) R(t) \partial_t k(t). \tag{5.3.9}$$

Im Fall des ungestörten Solitons fordert man die Gleichheit  $E_0(t) = E(t)$ , was unter den ungestörten Annahmen bedeutet  $E_0 = E$ , also  $k^2 - a^2 = \partial_t \phi(t) - R(t) \partial_t k(t)$  und damit  $k^2 - a^2 = \partial_t \phi(t)$ . Dies ist aber nun eine der Forderungen an das ungestörte Soliton, wie wir sie in (5.1.2) gestellt haben und zeigt, dass die bisherigen Annahmen und Rechnungen ihre Berechtigung finden.

Es wird schließlich bei der störungstheoretischen Betrachtung der KNSG entscheidend auf die Berechnung der folgenden drei Integrale ankommen:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int dz \Lambda(z, t), \\
 I_2 &= \int dz z \Lambda(z, t), \\
 I_3 &= \int dz \Theta(z, t).
 \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

In ihnen ist die Größe  $g(\mathbf{S})$  enthalten, deren Skalierung gemäß der Skalierung der Schrödinger-Gleichung (4.5) erfolgen muss. Im Folgenden sollen einige störungstheoretische Beispiele betrachtet und die Dynamik der für das Soliton wichtigen vier Grundgrößen aufgestellt werden.

## 5.4 Störungsbeispiele

Mit dem Differentialgleichungssystem (5.3.7) lassen sich nun einige Beispiele für mögliche Störungen berechnen. Es existieren aber nur einige wenige Störungen, wie z.B. die Dämpfung in (5.4.1), die sich analytisch leicht auswerten lassen. In den meisten Fällen muss man auf numerische Verfahren oder spezielle Vereinfachungen zurückgreifen, um sich das entstehende Differentialgleichungssystem zugänglich zu machen. Die störungstheoretische Betrachtung wird immer mit der skalierten Gleichung erfolgen, d.h. in allen Beispielen muss auf die korrekte Mitskalierung des Störterms geachtet werden. Damit vollziehen wir quasi eine Störungstheorie für ein Envelope-Soliton, da ihre entsprechende Evolutionsgleichung Ausgangspunkt der Betrachtung ist.

### 5.4.1 Dämpfung der KNSG

In 4.5 haben wir gezeigt, dass sich eine Störung der Form  $-i\gamma\Psi$  direkt mitskaliert zu einer Dämpfung der Form  $-i\gamma\psi$ , so dass

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = -i\frac{\gamma}{2}\psi(z, t). \quad (5.4.1)$$

Einsetzen in (5.3.10) und (5.3.7) führt direkt zu dem gekoppelten Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= -\gamma a(t), \\ \dot{k}(t) &= 0, \\ \dot{R}(t) &= 2k(t), \\ \dot{\phi}(t) &= k^2(t) - a^2(t). \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Dieses Differentialgleichungssystem lässt sich analytisch leicht lösen und zeigt die Dynamik des Solitons unter Dämpfung:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(0)e^{-\gamma t}, \\ k(t) &= k = \text{const}, \\ R(t) &= 2kt + R(0), \\ \phi(t) &= \phi(0) - \frac{a^2(0)}{2\gamma} + k^2t + \frac{a^2(0)e^{-2\gamma t}}{2\gamma}. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Der Energieinhalt des nach (5.4.3) propagierenden Solitons ändert sich gemäß

$$E(t) = 4a(0)e^{-\gamma t} (k^2 - a^2(0)e^{-2\gamma t}). \quad (5.4.4)$$

Damit ist die Energie des Solitons natürlich keine Erhaltungsgröße mehr. Für das Feldmoment  $P(t)$  ergibt sich entsprechend obiger Definition

$$P(t) = 2ka(t) = 2ka(0)e^{-\gamma t}. \quad (5.4.5)$$

Dies führt direkt auf die Ratengleichung [6]

$$\dot{P} = -\gamma P \quad (5.4.6)$$

und zeigt, dass auch das totale Feldmoment  $P(t)$  keine Erhaltungsgröße mehr ist. Wenn  $\gamma > 0$  ist, wird dieses Feldmoment stets gegen Null gehen und den Aussagen von [29] folgend bedeutet dies, dass ein sich bewegendes Soliton mit der Zeit gedämpft wird und schließlich an einem gewissen Punkt anhält. Diese Aussage lässt sich natürlich auch aus der Energiegleichung (5.4.4) gewinnen. Skaliert man nun die Lösung des Solitons (5.1.3) unter den Skalierungsvorschriften 4.5 zurück, so erhält man näherungsweise die Dynamik des gedämpften Solitons für die Gleichung

$$i \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t'} + v_g \frac{\partial \Psi}{\partial z''} \right) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z''^2} + N |\Psi|^2 \Psi = -i \frac{\gamma}{2} \Psi. \quad (5.4.7)$$

Es galten die Skalierungsvorschriften  $z = (z'' - v_g t) \sqrt{\frac{2}{D}}$  und  $\psi = \sqrt{N} \Psi$ , woraus sich unter der Dynamik (5.4.3) die genäherte Solitonenlösung für (5.4.7) ableiten lässt:

$$\Psi(z'', t') = \sqrt{\frac{2}{N}} a(t) \frac{e^{i \left( \sqrt{\frac{2}{D}} (z'' - v_g t) k(t) - \phi(t) \right)}}{\cosh a(t) \left( \sqrt{\frac{2}{D}} (z'' - v_g t) - R(t) \right)}. \quad (5.4.8)$$

### 5.4.2 Parametrische Anregung A

Im Folgenden soll dem System Energie zugeführt werden, und zwar in Form eines Störtermes, der zunächst durch eine nicht lokalisierte parametrische Anregung beschrieben wird. Ausgangspunkt ist dabei wieder die Schrödinger-Gleichung in der Form (4.3.13), bei der der Dämpfungsterm zunächst vernachlässigt wird. Wir wählen eine Störung der Form

$$g(z'', t') = g(t) \Psi(z'', t'), \quad g(t) \in \mathbb{C}. \quad (5.4.9)$$

Dies führt direkt auf die Störung  $g(\mathbf{S}) = g(z, t) = g(t) \psi(z, t)$  für die skalierte Schrödinger-Gleichung (5.2.2). Die Berechnung der fundamentalen Integrale (5.3.10) resultiert in einem gekoppelten Differentialgleichungssystem der Form:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= 2a(t) \text{Im}g(t), \\ \dot{k}(t) &= 0, \\ \dot{R}(t) &= 2k(t), \\ \dot{\phi}(t) &= k^2(t) - a^2(t) + \text{Re}g(t). \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Das Gleichungssystem (5.4.10) liefert interessante Deutungsmöglichkeiten in Bezug auf das gestörte Soliton. Des Weiteren besteht für (5.4.10) die Möglichkeit, eine analytische

Lösung anzugeben. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 a(t) &= a(0)e^{2 \int \text{Im}g(t)dt}, \\
 k(t) &= k = \text{const}, \\
 R(t) &= R(0) + 2kt, \\
 \phi(t) &= \phi(0) + \int dt \left[ k^2 - a^2(0)e^{4 \int \text{Im}g(t)dt} + \text{Re}g(t) \right]. \quad (5.4.11)
 \end{aligned}$$

Mit (5.2.1) kann schließlich den Energieinhalt des Solitons angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 E(t) &= 4a(t) (k^2(t) - a^2(t) + \text{Re}g(t)) \\
 &= 4a(0)e^{2 \int \text{Im}g(t)dt} \left( k^2 - a^2(0)e^{4 \int \text{Im}g(t)dt} + \text{Re}g(t) \right). \quad (5.4.12)
 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist für  $g(t) \neq 0$  diese Energie nie eine Erhaltungsgröße. Inwieweit die über die parametrische Anregung hinzugefügte Energie in das System einwirkt, hängt offensichtlich entscheidend von der Größe  $g(t)$  ab. Nehmen wir  $g(t)$  beispielsweise als konstant und reell an, so wirkt diese hinzugefügte Energie nicht auf die Amplitude  $a(t)$  des Solitons; vielmehr gilt dann stets  $a(t) = \text{const.}$  für alle Zeiten  $t$ . Die gesamte Energie wird in die Phase des Solitons 'gepumpt' und führt letztlich zu einer Phasenverschiebung (vgl.5.4.11). Falls nun aber  $g(t)$  konstant ist und  $\text{Im}g(t) \neq 0$  gilt, so ändert sich auch die Amplitude des Solitons. Ist  $g(t)$  rein imaginär, so wird die Phasenänderung  $\dot{\phi}(t)$  basierend auf der Störung  $g(t)$  vollständig über die Amplitudenänderung  $\dot{a}(t)$  bestimmt.

Für das totale Feldmoment  $P(t)$  erhält man entsprechend obiger Definition

$$P(t) = 2ka(t) = 2ka(0)e^{2 \int \text{Im}g(t)dt}. \quad (5.4.13)$$

Falls nun  $g(t) \in \mathbb{R}$  ist, so ist das totale Feldmoment genauso wie im ungedämpften, ungetriebenen Fall eine Erhaltungsgröße, also  $\dot{P}(t) = 0$  für alle Zeiten  $t$ .

### 5.4.3 Parametrische Anregung B

Die parametrische nichtlokalisierte Anregung vom Typ A beinhaltet einen Störterm der proportional zu  $\psi(z, t)$  ist. Es ist natürlich auch denkbar, einen Störterm analog zu (5.4.2) so zu wählen, dass dieser proportional zu  $\psi^*(z, t)$  ist. Man betrachte also in der unskalierten Schrödinger-Gleichung eine Störung der Form  $g(z'', t') = g(t)\Phi^*(z'', t')$ , die unter der Annahme  $N > 0$  in eine analoge Störung der skalierten Schrödinger-Gleichung übergeht:

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = g(t)\psi^*(z, t), \quad g(t) \in \mathbb{C}. \quad (5.4.14)$$

Die Berechnung der fundamentalen Integrale (5.3.10) erweist sich in diesem Fall als äußerst schwierig und man wird spezielle Nebenbedingungen stellen müssen, um die Berechnung zu vereinfachen. Der Fall eines ruhenden Solitons ( $k = 0$ ) lässt sich z.B. sehr

schnell ermitteln (vgl. 5.5.2). Die Integrale  $I_1, I_2$  und  $I_3$  sind von der Form

$$\begin{aligned}
 I_1 &= g(t) \int dz \left[ 2a^2(t) \frac{e^{-2i(k(t)z - \phi(t))}}{\cosh^2 a(t)(z - R(t))} \right], \\
 I_2 &= g(t) \int dz z \left[ 2a^2(t) \frac{e^{-2i(k(t)z - \phi(t))}}{\cosh^2 a(t)(z - R(t))} \right], \\
 I_3 &= 2g(t)a^2(t) \int dz \left[ \frac{-ik(t)e^{-2i(k(t)z - \phi(t))}}{\cosh^2 a(t)(z - R(t))} \right], \\
 &\quad - 2g(t)a^2(t) \int dz \left[ \frac{a(t)e^{-2i(k(t)z - \phi(t))} \tanh a(t)(z - R(t))}{\cosh^2 a(t)(z - R(t))} \right]. \quad (5.4.15)
 \end{aligned}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass nach Zerlegung der Integrale (5.4.15) über die Euler-Formeln aus Symmetriegründen einige Integrale direkt Null werden.

#### 5.4.4 Parametrische Anregung C

Die nicht lokalisierte Anregung B war recht schwer auszuwerten. Wir werden in diesem Unterabschnitt die Anregung der Form in 5.4.3 lokalisieren, und zwar punktuell über eine  $\delta$ -Lokalisierung. Es sei im Folgenden  $L$  der Ort, an welchem diese parametrische Anregung in Erscheinung tritt. Wenn wir uns, von der störungstheoretischen Beschreibung ausgehend, der unskalierten Schrödingergleichung nähern, so müssen wir auf die Skalierung des Störterms entscheidend Acht geben. Die Störung der unskalierten Schrödinger-Gleichung sei also von der Form

$$g(z'', t') = g(t') \Psi^*(z'', t') \delta(z'' - t'). \quad (5.4.16)$$

Nach Skalierung dieses Störterms mit 4.5 erhält man für die Störung  $g(\mathbf{S})$  der skalierten Schrödinger-Gleichung (5.0.1)

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = \sqrt{\frac{2}{DN}} g(t) \delta(z + v_g t - L) \psi^*(z, t). \quad (5.4.17)$$

Gemäß dieser Störung lassen sich die drei Fundamentalintegrale (5.3.10) lösen. Nach Integration über den ganzen Ortsraum erhält man das Differentialgleichungssystem, das die Dynamik des Envelope-Solitons in Bezug auf eine  $\delta$ -lokalisierte Störung beschreibt. Für die geschlossene Herleitung dieses Systems haben wir  $g(t) = h e^{2i\Omega t}$ ,  $h \in \mathbb{R}$  gewählt, also eine parametrische Anregung, die mit doppelter Frequenz am Ort  $L$  dem Soliton

Energie zufügt:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}(t) &= \sqrt{\frac{2}{DN}} a^2(t) \frac{h \sin 2(\Omega t + \phi(t) - k(t)(L - v_g t))}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{k}(t) &= -\sqrt{\frac{2}{DN}} a^2(t) \frac{\tanh(a(t)(L - v_g t - R(t))) h \cos 2(\Omega t + \phi(t) - k(t)(L - v_g t))}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{R}(t) &= 2k(t) + \sqrt{\frac{2}{DN}} [a(t)(L - v_g t - R(t))] \frac{h \sin 2(\Omega t + \phi(t) - k(t)(L - v_g t))}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{\phi}(t) &= k^2(t) - a^2(t) + \sqrt{\frac{2}{DN}} a(t) \frac{h \cos 2(\Omega t + \phi(t) - k(t)(L - v_g t))}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))} \\
 &\quad \times \left( \frac{1}{2} - a(t)R(t) \tanh(a(t)(L - v_g t - R(t))) \right). \tag{5.4.18}
 \end{aligned}$$

Man kann in (4.3.13)  $D = 2$  und  $N = 1$  wählen und die Kubische Nichtlineare Schrödinger-Gleichung auf eine sehr einfache Form bringen. Entsprechend sind dann in (5.4.18) die Vorfaktoren zu eins skaliert.

Die gekoppelten Differentialgleichungen (5.4.18) spiegeln zwar die Dynamik des durch eine  $\delta$ -lokalisierte parametrische Anregung gestörten Solitons (5.4.8) wieder, sind aber in ihrer Gesamtheit relativ schwer zu analysieren und auszuwerten. Ohne numerische Hilfsmittel wird man an dieser Stelle nicht mehr exakt fortfahren können.

Es ist auffällig, dass die vier dynamischen Grundgrößen des Solitons die Störung in Form zweier Funktionen spüren, wobei die eine die Störung lokalisiert und die andere die Periodizität der Störung beschreibt.

Die Argumente der jeweiligen Funktion charakterisieren folglich die Störung. Ihre Dynamik manifestiert sich in den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 \dot{P}(t) &\equiv \frac{\partial}{\partial t} (a(t)(L - R(t) - v_g t)) = (v_g - 2k(t))a(t) \\
 \dot{\Upsilon}(t) &\equiv \frac{\partial}{\partial t} (\Omega t + \phi(t) - k(t)(L - v_g t)) \\
 &= \Omega + k^2(t) - a^2(t) + a(t) \frac{h \cos 2\Upsilon(t)}{\cosh^2 P(t)} \left( \frac{1}{2} + P(t) \tanh P(t) \right). \tag{5.4.19}
 \end{aligned}$$

Zusammen mit den Differentialgleichungen für  $a(t)$  und  $k(t)$  liefern die beiden Größen  $P(t)$  und  $\Upsilon(t)$  einen etwas leichter zu handhabenden Satz von gekoppelten Differentialgleichungen, da gilt

$$\begin{aligned}
 \dot{a}(t) &= a^2(t) \frac{h \sin 2\Upsilon(t)}{\cosh^2 P(t)}, \\
 \dot{k}(t) &= -a^2(t) \frac{\tanh P(t) h \cos 2\Upsilon(t)}{\cosh^2 P(t)}. \tag{5.4.20}
 \end{aligned}$$

Gleichung (5.4.19) zeigt, dass das totale Feldmoment im Fall der Gleichheit von Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  und  $2k$  eine Erhaltungsgröße ist. Zudem beschreibt Gleichung

(5.4.19) die Dynamik der Phase des Solitons; Phasenakkumulation wird entscheidend von der Frequenz der parametrischen Anregung bestimmt.

Die Funktion  $\frac{1}{(\cosh P(t))^2}$  gibt an, wann die Störung über die parametrische Anregung besonders wirksam ist. Dies ist an den Nullstellen des cosh der Fall, da hier die lokalisierte Anregung das Maximum des Solitons überläuft. Unter dieser Annahme ist  $R(t) = L - v_g t$  und es ist klar, dass die Störung keinen Einfluss mehr auf die  $k$ -Selektion nehmen kann. Einzig die Amplitude  $a(t)$  und die Phase  $\phi(t)$  ändern sich beim Überlauf. Das Differentialgleichungssystem in Bezug auf diese 'Wirksamkeitsnäherung' lautet:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \sqrt{\frac{2}{DN}} a^2(t) h \sin 2(\Omega t + \phi(t) - kR(t)), \\ \dot{k}(t) &= 0, \\ \dot{R}(t) &= 2k, \\ \dot{\phi}(t) &= k^2(t) - a^2(t) + \sqrt{\frac{1}{2DN}} a(t) h \cos 2(\Omega t + \phi(t) - kR(t)). \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

Außerhalb des Wirksamkeitsbereiches können wir  $\frac{1}{\cosh^2 P(t)}$  durch Null nähern, womit die Solitonenpropagation der ungestörten Dynamik folgt. Die genaue Definition des Wirksamkeitsbereiches als Bereich, in dem die ortslokalisierte Störung Einfluss auf die Solitonenlösung nimmt, ist damit abhängig von der Breite des Solitons, die über  $a(t)$  gegeben ist und der Breite der Anregung. Es ist klar, dass für  $\delta$ -lokalisierte Anregungen und Solitonen, deren Breite besonders gering ist ( $a(t) \gg 0$ ), der Wirksamkeitsbereich auch nahezu  $\delta$ -förmig ist und die dynamische Betrachtung der gestörten Solitonenlösung besonders einfach wird. Diese Lösungen folgen dann nämlich dem Differentialgleichungssystem (5.4.21) und  $k$  bleibt konstant. Vergrößert man den Wirksamkeitsbereich, so wird sich  $k$  zwar innerhalb des Wirksamkeitsbereiches der Störung ändern, im Mittel aber keine Änderung verzeichnen, wie man aus der Symmetrie der Funktionen  $\frac{\tanh x}{(\cosh x)^2}$  und  $\frac{x}{(\cosh x)^2}$  sofort ersehen kann. Die parametrische Anregung dieser Form nimmt also keinen Einfluss auf die Selektion eines  $k$ -Wellenvektors; ein einmalig selektierter  $k$ -Wellenvektor ändert sich nicht. Die Störung manifestiert sich einzig in der Amplituden- und Phasenänderung. Dieses Resultat behält für alle im Folgenden beschriebenen parametrischen Anregungen seine Gültigkeit. Basierend auf ihm ist es möglich, dass sich parametrische Anregung und Dämpfung im Wirksamkeitsbereich ohne Veränderung der Modencharaktere kompensieren.

### 5.4.5 Parametrische Anregung D

Analog zur Skalierung in (5.4.4) sei der Störterm in der skalierten, Kubischen Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung gegeben durch

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = i \sqrt{\frac{2}{DN}} g(t) \delta(z + v_g t - L) \psi(z, t), \quad g(t) = h e^{2i\Omega t}, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (5.4.22)$$

Dies führt auf das gekoppelte Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}(t) &= \sqrt{\frac{2}{DN}} a^2(t) \frac{h \cos 2(\Omega t)}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{k}(t) &= \sqrt{\frac{2}{DN}} a^2(t) \frac{\tanh(a(t)(L - v_g t - R(t))) h \sin 2(\Omega t)}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{R}(t) &= 2k(t) + \sqrt{\frac{2}{DN}} [a(t)(L - v_g t - R(t))] \frac{h \cos 2(\Omega t)}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{\phi}(t) &= k^2(t) - a^2(t) + \sqrt{\frac{2}{DN}} a(t) \frac{h \sin 2(\Omega t)}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))}, \\
 &\quad \times \left( a(t)R(t) \tanh(a(t)(L - v_g t - R(t))) - \frac{1}{2} \right). \tag{5.4.23}
 \end{aligned}$$

### 5.4.6 Parametrische Anregung E

Eine Verallgemeinerung des Störterms in (5.4.5) ist ein Störterm der Form

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = \sqrt{\frac{2}{DN}} g(t) \delta(z + v_g t - L) \psi(z, t), \quad g(t) \in \mathbb{C}. \tag{5.4.24}$$

Mit den Fundamentalintegralen und dem so gewählten  $g(\mathbf{S})$  ergibt sich (vgl. 5.4.23)

$$\begin{aligned}
 \dot{a}(t) &= \sqrt{\frac{2}{DN}} \frac{a^2(t)}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))} \text{Im}[g(t)], \\
 \dot{k}(t) &= -\sqrt{\frac{2}{DN}} \frac{a^2(t) \tanh(a(t)(L - v_g t - R(t)))}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))} \text{Re}[g(t)], \\
 \dot{R}(t) &= 2k(t) + \sqrt{\frac{2}{DN}} \frac{[a(t)(L - v_g t - R(t))]}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))} \text{Im}g(t), \\
 \dot{\phi}(t) &= k^2(t) - a^2(t) + \sqrt{\frac{2}{DN}} \frac{a(t) \text{Re}g(t)}{\cosh^2(a(t)(L - v_g t - R(t)))} \\
 &\quad \times \left( a(t)R(t) \tanh\left(\frac{1}{2} - a(t)(L - v_g t - R(t))\right) \right). \tag{5.4.25}
 \end{aligned}$$

### 5.4.7 Lokalisierte externe Anregung F

Eine in ihrer Art recht einfache Anregung ist eine schlichte, lokalisierte externe Anregung. 'Extern' heißt die Anregung deswegen, weil sie unabhängig von der im Medium propagierenden Solitonenlösung ist. Für den extern getriebenen Störterm kann man in der skalierten Schrödinger-Gleichung (5.0.1) ohne Dämpfung den Ansatz

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = \sqrt{\frac{2}{DN}} g(t) \delta(z + v_g t - L), \quad g(t) \in \mathbb{R} \tag{5.4.26}$$



machen. Die Entwicklung des Differentialgleichungssystems erfolgt analog zu den obigen und man erhält mit den Fundamentalintegralen für die vier wichtigen dynamischen Grundgrößen der gestörten Solitonenlösung:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}(t) &= \sqrt{\frac{2}{DN}} \frac{g(t)}{\sqrt{2}} \frac{a(t) \sin(\phi(t) - k(t)(L - v_g t))}{\cosh(a(t)(L - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{k}(t) &= -\sqrt{\frac{2}{DN}} \frac{g(t)a(t) \tanh(a(t)(L - v_g t - R(t))) \cos(\phi(t) - k(t)(L - v_g t))}{\cosh(a(t)(L - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{R}(t) &= 2k(t) - \sqrt{\frac{2}{DN}} \frac{(L - v_g t - R(t)) a(t)g(t) \sin(\phi(t) - k(t)(L - v_g t))}{\cosh(a(t)(L - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{\phi}(t) &= k^2(t) - a^2(t) + \sqrt{\frac{2}{DN}} \frac{g(t)}{\sqrt{2}} \frac{\cos(\phi(t) - k(t)(L - v_g t))}{\cosh(a(t)(L - v_g t - R(t)))} \\
 &\quad \times \left( \frac{1}{\sqrt{4}} - a(t)R(t) \tanh(a(t)(L - v_g t - R(t))) \right). \tag{5.4.27}
 \end{aligned}$$

Denkbar wären auch externe Anregungen, bei denen  $g(t) \in \mathbb{C}$  gewählt wird, was nach kurzer Auswertung der Fundamentalintegrale zu etwas längeren Formeln führt. In [6] wird beispielsweise eine nicht lokalisierte, externe Anregung der Form  $g(t) = he^{i\Omega t}$  angesprochen.

### 5.4.8 Parametrische Anregung an mehreren Orten

Bis jetzt haben wir stets Beispiele betrachtet, die an einem Ort  $L$  lokalisiert eine parametrische Anregung beschreiben. In derartigen Systemen ist die Anregung nur zu einem Zeitpunkt wirksam, nämlich genau bei der Propagation des Solitons über diesen Ort  $L$ . Das Soliton erfährt einmalig die Störung und verlässt schließlich ihren Wirkungsbereich für immer. Parametrische Anregungen werden aber meistens dazu benutzt, um dem System immer wieder Energie zuzuführen, zum Beispiel so, dass Dämpfung und Anregung sich kompensieren und ein möglichst langlebiges Wellenpaket existieren kann.

Die Verifizierung dieser sich wiederholenden parametrischen Anregung kann über ein Ringsystem geschehen, in welchem ein propagierendes Soliton eine ortslokalisierte Störung immer wieder durchläuft. Mathematisch würde man Ringsysteme wohl durch eine Reihe von äquidistanten Störungen beschreiben, wobei zur Berechnung nur endlich viele Glieder mitgenommen werden können.

Wir postulieren also in der skalierten KNSG eine Störung der Form

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = \sqrt{\frac{2}{DN}} \sum_{n=1}^m g(t) \delta(z + v_g t - nL) \psi^*(z, t), \quad g(t) = he^{2i\Omega t}. \tag{5.4.28}$$

Damit lautet das Differentialgleichungssystem (vgl. 5.4.4) mit  $\zeta(\phi(t), k(t), t, n) = \Omega t + \phi(t) - k(t)(nL - v_g t)$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{a}(t) &= \sqrt{\frac{2}{DN}} a^2(t) h \sum_{n=1}^m \frac{\sin 2(\zeta(\phi(t), k(t), t, n))}{\cosh^2(a(t)(nL - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{k}(t) &= -\sqrt{\frac{2}{DN}} a^2(t) \sum_{n=1}^m \frac{\tanh(a(t)(nL - v_g t - R(t))) h \cos 2(\zeta(\phi(t), k(t), t, n))}{\cosh^2(a(t)(nL - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{R}(t) &= 2k(t) + \sqrt{\frac{2}{DN}} \sum_{n=1}^m [a(t)(nL - v_g t - R(t))] \frac{h \sin 2(\zeta(\phi(t), k(t), t, n))}{\cosh^2(a(t)(nL - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{\phi}(t) &= k^2(t) - a^2(t) + \sqrt{\frac{2}{DN}} a(t) \sum_{n=1}^m \frac{h \cos 2(\zeta(\phi(t), k(t), t, n))}{\cosh^2(a(t)(nL - v_g t - R(t)))} \\
 &\quad \times \left( \frac{1}{2} - a(t) R(t) \tanh(a(t)(nL - v_g t - R(t))) \right). \tag{5.4.29}
 \end{aligned}$$

Analog kann man natürlich auch alle anderen Störbeispiele, die an einem Ort lokalisiert sind, auf Lokalisierungen an mehreren äquidistanten Orten erweitern. Die Störbeispiele sind in allen Fällen aber stets nur für Envelope-Solitonen gültig, da wir ihre Evolutionsgleichung als Ausgangsgleichung für die störungstheoretische Betrachtung herangezogen haben.

### 5.4.9 Parametrische Anregung und Dämpfung

In realen Systemen ist die Dämpfung in der Regel nicht mehr zu vernachlässigen, d.h. eine Störung der Form (5.4.1) ist zu berücksichtigen. Die Kombination des Dämpfungsterms mit einer parametrischen Anregung ermöglicht es, dissipative Effekte zu kompensieren und die resultierenden Energieverluste auszugleichen. Infolgedessen kann sich ein Soliton über einen längeren Zeitraum stabilisieren. Die Stabilisierung ist u.a. nur deswegen möglich, da die selektierte  $k$ -Mode von der Störung unbeeinflusst bleibt (vgl. 5.4.4).

Die Störung des realen Systems sei also von der Form

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{S}) &= g(z, t) = \sqrt{\frac{2}{DN}} \sum_{n=1}^m g(t) \delta(z + v_g t - nL) \psi^*(z, t) - i \frac{\gamma}{2} \psi(z, t), \\
 g(t) &= e^{2i\Omega t}. \tag{5.4.30}
 \end{aligned}$$

Hieraus resultiert mit  $\zeta(\phi(t), k(t), t, n) = \Omega t + \phi(t) - k(t)(nL - v_g t)$  das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}(t) &= \sqrt{\frac{2}{DN}} a^2(t) h \sum_{n=1}^m \frac{\sin 2(\zeta(\phi(t), k(t), t, n))}{\cosh^2(a(t)(nL - v_g t - R(t)))} - \gamma a(t), \\
 \dot{k}(t) &= -\sqrt{\frac{2}{DN}} a^2(t) \sum_{n=1}^m \frac{\tanh(a(t)(nL - v_g t - R(t))) h \cos 2(\zeta(\phi(t), k(t), t, n))}{\cosh^2(a(t)(nL - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{R}(t) &= 2k(t) + \sqrt{\frac{2}{DN}} \sum_{n=1}^m [a(t)(nL - v_g t - R(t))] \frac{h \sin 2(\zeta(\phi(t), k(t), t, n))}{\cosh^2(a(t)(nL - v_g t - R(t)))}, \\
 \dot{\phi}(t) &= k^2(t) - a^2(t) + \sqrt{\frac{2}{DN}} a(t) \sum_{n=1}^m \frac{h \cos 2(\zeta(\phi(t), k(t), t, n))}{\cosh^2(a(t)(nL - v_g t - R(t)))} \\
 &\quad \times \left( \frac{1}{2} - a(t) R(t) \tanh(a(t)(nL - v_g t - R(t))) \right). \tag{5.4.31}
 \end{aligned}$$

Die einzige Änderung in Bezug auf die Störung durch rein parametrische Anregung manifestiert sich in der Differentialgleichung für  $a(t)$ . Auch wenn das Aussehen für beide Differentialgleichungssysteme recht ähnlich ist, ergibt sich dennoch eine völlig unterschiedliche Physik. Das reine Anregungssystem ist beispielsweise nicht zu stabilisieren, da die ständige Energiezufuhr das Soliton mit der Zeit kollabieren lässt. Der Dämpfungsterm wirkt dem entgegen und vermag so den Energiekollaps zu verhindern. Ist die Dämpfung ausreichend stark, wird das nichtlineare Wellenpaket mit der Zeit auseinanderlaufen und seine Amplitude gegen Null gehen.

Alle bisher betrachteten Anregungsbeispiele sind entweder global oder  $\delta$ -lokalisiert. Dadurch vereinfachen sich die zu lösenden Differentialgleichungen entscheidend. Der Wirkungsbereich der Anregung ist einzig über  $a(t)$  gegeben, so dass man für  $a(t) \gg 0$  auch diesen als  $\delta$ -Funktion annehmen kann. In realen Systemen wird die Anregung sicherlich über eine Antenne endlicher Breite eingekoppelt werden müssen, so dass  $\delta$ -Lokalisierungen die Dynamik nur noch bedingt adäquat wiedergeben können. In diesen Fällen muss die Integration der Fundamentalintegrale über Heavisidesche Stufenfunktionen durchgeführt werden.

## 5.5 Gestörte Lösung für ein ruhendes Soliton

Wir haben bisher stets die Störung eines sich bewegenden Solitons ( $k(t) \neq 0, R(t) \neq 0$ ) betrachtet. Die fundamentalen Störungsgleichungen (5.3.7) vereinfachen sich wesentlich, wenn man die spezielle Annahme eines im bewegten Bezugssystem  $\Sigma'$  ruhenden Solitons postuliert<sup>2</sup>. Wir suchen also nach einer gestörten Lösung für ein in  $\Sigma'$  ruhendes Soliton

<sup>2</sup>Dieses ist der leichter zu handhabende Spezialfall von 5.4.

der Form (vgl.5.4.8)

$$\Psi(z'', t') = \sqrt{\frac{2}{N}} a(t) \frac{e^{-i\phi(t)}}{\cosh a(t) \left( \sqrt{\frac{2}{D}} (z'' - v_g t) \right)}. \quad (5.5.1)$$

$\Psi(z'', t)$  ist wie oben eine exakte, in  $\Sigma'$  ruhende Lösung der ungestörten KNSG in der Envelope-Näherung:

$$i \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t'} + v_g \frac{\partial \Psi}{\partial z''} \right) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z''^2} + N |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (5.5.2)$$

Die störungstheoretische Betrachtung verläuft analog zu **5.2**, d.h. in Gleichung (5.5.2) wird ein zunächst beliebiger Störterm  $g(z'', t)$  eingeführt und in Abhängigkeit dieses Termes ein Fundamentaldifferentialgleichungssystem entwickelt. Wir verwenden direkt das zur skalierten, gestörten Gleichung entwickelte Differentialgleichungssystem (5.3.7) aus Abschnitt **5.3** und können in ihm  $k(t)$  und  $R(t)$  Null setzen:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \frac{1}{2} \text{Im} \left[ \int dz \Lambda(z, t) \right], \\ \dot{R}(t) &= \frac{1}{2a(t)} \text{Im} \left[ \int dz z \Lambda(z, t) \right], \\ \dot{k}(t) &= \frac{1}{2a(t)} \text{Re} \left[ \int dz \Theta(z, t) \right], \\ \dot{\phi}(t) &= \frac{E_0(t)}{4a(t)} + \frac{1}{4a(t)} \text{Re} \left[ \int dz \Lambda(z, t) \right]. \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

$$\Lambda(z, t) = g(\mathbf{S}) \psi^*(z, t), \quad (5.5.4)$$

$$\Theta(z, t) = g(\mathbf{S}) \partial_z \psi^*(z, t). \quad (5.5.5)$$

$E_0(t)$  berechnet sich für das gestörte Soliton gemäß (5.3.1) und der skalierten, in  $\Sigma'$  ruhenden Solitonenlösung,

$$\psi(z, t) = \frac{\sqrt{2} a(t) e^{-i\phi(t)}}{\cosh a(t) z} \quad (5.5.6)$$

zu

$$E_0(t) = -4a^3(t). \quad (5.5.7)$$

Wegen  $k(t), R(t) = 0$  muss für (5.5.6) automatisch  $\dot{k}(t), \dot{R}(t) = 0$  gelten, was sich wegen der Punktsymmetrie der zu integrierenden Funktionen in (5.5.3) für beliebig sinnvolle Störterme bestätigt. Wir gelangen also effektiv zu einem gekoppelten Differentialgleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \frac{1}{2} \text{Im} \left[ \int dz \Lambda(z, t) \right], \\ \dot{\phi}(t) &= -a^2(t) + \frac{1}{4a(t)} \text{Re} \left[ \int dz \Lambda(z, t) \right]. \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Damit kann für beliebige Störterme die Dynamik des im mitbewegten Bezugssystem  $\Sigma'$  ruhenden Solitons (5.5.1) bestimmt werden, womit natürlich auch die Dynamik in  $\Sigma$  bekannt ist. Es können die folgenden Beispiele mit denen aus 5.4 verglichen werden.

### 5.5.1 Dämpfung der KNSG

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = -i\frac{\gamma}{2}\psi(z, t) \quad (5.5.9)$$

Das Differentialgleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= -\gamma a(t), \\ \dot{\phi}(t) &= -a^2(t). \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Also gilt

$$\begin{aligned} a(t) &= a(0)e^{-\gamma t}, \\ \phi(t) &= \phi(0) - \frac{a^2(0)}{2\gamma} + \frac{a^2(0)}{2\gamma}e^{-2\gamma t}. \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

### 5.5.2 Parametrische Anregung der Form $h\psi^*(z, t)e^{2i\Omega t}$

Den Skalierungsvorschriften 4.5 folgend gilt für den Störterm in der skalierten Gleichung

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = h\psi^*(z, t)e^{2i\Omega t}. \quad (5.5.12)$$

Einsetzen in das Fundamentalgleichungssystem (5.5.8) führt auf die gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= 2ha(t) \sin 2(\Omega t + \phi(t)), \\ \dot{\phi}(t) &= -a^2(t) + h \cos 2(\Omega t + \phi(t)). \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

Mit der Substitution  $\eta(t) = \phi(t) + \Omega t$  erhält man

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= 2ha(t) \sin 2\eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= \Omega - a^2(t) + h \cos 2\eta(t). \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

Wir haben bis jetzt eine Lösung der Form (5.5.6) angenommen. Wie schon in 5.1 erwähnt, ist aber auch jedes ruhende Soliton der Form

$$\psi(z, t) = e^{i\theta} \frac{\sqrt{2}a(t)e^{-i\phi(t)}}{\cosh a(t)z}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad (5.5.15)$$

eine Lösung der ungestörten KNSG. Beispielsweise haben die Differentialgleichungen (5.5.14) für  $e^{i\theta} = i$  die Form [31]

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= -2ha(t) \sin 2\eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= \Omega - a^2(t) - h \cos 2\eta(t). \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

Transformation von  $h \rightarrow -h$  führt (5.5.14) in (5.5.16) über.

### 5.5.3 Parametrische Anregung der Form $h\psi(z, t)e^{2i\Omega t}$

Der Störterm einer parametrischen Anregung für die skalierte Gleichung sei nun nicht mehr  $\propto \psi^*(z, t)$ , sondern  $\propto \psi(z, t)$

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = h\psi(z, t)e^{2i\Omega t}. \quad (5.5.17)$$

Diese Form der Störung führt auf einen relativ leicht zu handhabenden Satz von Differentialgleichungen, da im Argument der trigonometrischen Funktionen keine explizite Phasenabhängigkeit mehr berücksichtigt werden muss:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= 2ha(t) \sin 2\Omega t, \\ \dot{\phi}(t) &= -a^2(t) + h \cos 2\Omega t. \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

Damit ist die Lösung dieser Differentialgleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned} a(t) &= a(0)e^{-\frac{h}{\Omega}(\cos 2\Omega t - 1)}, \\ \phi(t) &= \phi(0) + \int dt \left[ -a^2(0)e^{-2\frac{h}{\Omega}(\cos 2\Omega t - 1)} + h \cos 2\Omega t \right]. \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

Die Ergebnisse kann man wie folgt interpretieren. Zunächst bleibt festzuhalten, dass es keine Frequenz  $\Omega$  der parametrischen Anregung (5.5.17) gibt, bei der sich kein Einfluss auf die ruhende Solitonenlösung manifestiert. Des Weiteren ist jede dynamische Änderung von  $a(t)$  automatisch mit einer dynamischen Änderung von  $\phi(t)$  verbunden. Koppelt man die parametrische Anregung an einen  $\delta$ -Puls, d.h.  $g(\mathbf{S}) = g(z, t) = h\psi(z, t)e^{2i\Omega t} \delta(t - T)$ , so erkennt man, dass es Frequenzen  $\Omega$  gibt, für die keine Amplitudenänderung  $\dot{a}(t)$  zu erwarten ist, bei denen sich aber die parametrische Anregung in einer Phasenakkumulation mit der Anregungsamplitude  $\pm h$  niederschlägt. Diese Frequenzen sind dann gegeben durch  $\Omega = n\frac{\pi}{2T}, n \in \mathbb{Z}$ .

### 5.5.4 Kombination aus parametrischer Anregung und Dämpfung

Wir kombinieren nun die Dämpfung aus 5.5.1 mit der parametrischen Anregung aus 5.5.2, was im mitbewegten Bezugssystem bedeutet

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = h\psi^*(z, t)e^{2i\Omega t} - i\frac{\gamma}{2}\psi(z, t). \quad (5.5.20)$$

Daraus resultiert konsequenterweise für das beschriebene ruhende Soliton das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= -\gamma a(t) - 2ha(t) \sin 2\eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= \Omega - a^2(t) - h \cos 2\eta(t). \end{aligned} \quad (5.5.21)$$

Dieses System hat stabile, stationäre Fixpunkte, die wir für  $\dot{a}(t) = \dot{\eta}(t) = 0$  erhalten [31]:

$$\begin{aligned} a_m &= (-1)^m \sqrt{\Omega + \sqrt{h^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}, \\ \eta_n &= \pi_n + \eta_0, \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

wobei  $\sin 2\eta_0 = -\frac{\gamma}{2h}$  gilt. Da  $a(t)$  und  $\eta(t)$  aus  $\mathbb{R}$  sein müssen, kann ein stabiles Soliton der Form (5.5.14) oder (5.5.16) nur dann existieren, wenn gilt

$$\frac{\gamma}{2} < h < \sqrt{\Omega^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (5.5.23)$$

### 5.5.5 Lokalisierung der parametrischen Anregung

Bis jetzt sind alle Störterme immer global im Ort betrachtet worden. Ein im mitbewegten Bezugssystem ruhendes Soliton erfährt also an jedem Ort gleichermaßen die Störung. Für Störungen durch Dämpfung ist diese globale Betrachtung sicherlich eine realistische Approximation, da es für ein homogenes Medium idealerweise keinen Unterschied machen sollte, an welcher Stelle sich das Soliton befindet; die Dämpfung sollte eben nicht ortsabhängig sein. Anregungen hingegen sind oftmals an einem gewissen Bereich lokalisiert, da die experimentelle Realisierung zumeist über Antennen von endlicher Breite erfolgt. So bleibt die Frage zu klären, was sich bei Lokalisierung effektiv an der Dynamik des betrachteten Solitons ändert und wie die essentiellen Differentialgleichungen aussehen, die das Soliton zu jeder Zeit charakterisieren. Wie schon in Abschnitt 5.4 sind die Anregungen über  $\delta$ -Lokalisierungen besonders leicht zu handhaben. Es sei an dieser Stelle nochmals daran erinnert, dass die Störung der in diesem Abschnitt betrachteten ruhenden Solitonen, ein leichter zu handhabender Spezialfall von 5.2 ist.

Wir wählen in der unskalierten Gleichung (5.5.2) einen Störterm der Form

$$g(z'', t) = \sum_{n=1}^m h e^{2i\Omega t} \delta(z'' - nL) \Psi^*(z'', t). \quad (5.5.24)$$

Die Summierung von lokalisierten  $\delta$ -Anregungen ist durchaus sinnvoll, da im ruhenden Bezugssystem das Soliton mit  $R(t) = 0$  sich zwar nicht bewegt, dafür aber die  $\delta$ -Lokalisierungen mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  dieses ruhende Soliton überlaufen. Die Transformation hin zu  $g(\mathbf{S})$  gemäß der Skalierungsvorschriften für die KNSG liefert

$$g(\mathbf{S}) = g(z, t) = \sqrt{\frac{2}{DN}} \sum_{n=1}^m g(t) \delta(z + v_g t - nL) \psi^*(z, t), \quad g(t) = h e^{2i\Omega t}. \quad (5.5.25)$$

Das Fundamentaldifferentialgleichungssystem (5.5.8) lautet:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= h \sqrt{\frac{2}{DN}} a^2(t) \sin 2(\phi(t) + \Omega t) \sum_{n=1}^m \frac{1}{\cosh^2 a(t)(nL - v_g t)}, \\ \dot{\phi}(t) &= -a^2(t) + h \sqrt{\frac{1}{2DN}} a(t) \cos 2(\phi(t) + \Omega t) \sum_{n=1}^m \frac{1}{\cosh^2 a(t)(nL - v_g t)}. \end{aligned} \quad (5.5.26)$$

Sei nun  $a(t) \gg 0$ , dann können wir mit der 'Wirksamkeitsnäherung' schreiben:

$$\frac{1}{\cosh^2 a(t)(nL - v_g t)} \approx \delta(nL - v_g t). \quad (5.5.27)$$

Dieses Ergebnis ist wiederum so zu interpretieren, dass sich Amplitude und Phase für alle Zeiten, in denen keine  $\delta$ -Lokalisierung in Betracht gezogen werden muss, gemäß der Dynamik  $\dot{a}(t) = 0$  und  $\dot{\phi}(t) = -a^2(t)$  entwickeln. An jeder Nullstelle der  $\delta$ -Funktion machen Phase und Amplitude einen zusätzlichen Sprung, der im Wesentlichen von der Frequenz  $\Omega$  und der Amplitude  $h$  der Anregung abhängt. (5.5.26) stimmt konsequenterweise mit Gleichungssystem (5.4.21) für  $k = 0$  überein. Die Unstetigkeitsstellen sind analytisch wiederum relativ schwer auszuwerten. Dennoch kann man für einige Spezialfälle interessante Schlußfolgerungen ziehen. Beispielsweise gilt  $\dot{a}(t) = 0$  für  $\phi(t) = -\Omega t + \frac{n\pi}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dies bedeutet, dass ein in  $\Sigma'$  ruhendes Soliton der Form

$$\psi(z, t) = e^{i\theta} \frac{\sqrt{2}a(t)e^{i\Omega t}}{\cosh a(t)z}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad (5.5.28)$$

mit obiger Anregung (5.5.24) an den  $\delta$ -lokalisierten Orten reine Phasenakkumulation zu erwarten hat, was zu einer echten Verstärkung der Amplitude ohne Änderung der Solitonencharakteristik führt. Wir weisen darauf hin, dass der Begriff Amplitude für  $a(t)$  eigentlich nicht ganz korrekt war, da sich mit  $\dot{a}(t) \neq 0$  das Aussehen nicht nur in Bezug auf die Solitonenmagnitude, sondern auch in Bezug auf die Varianz entscheidend ändert. Über die Störungsbeispiele ist für kleine Störungen also stets die raumzeitliche Dynamik eines Solitons nahezu vollständig zu bestimmen. Nimmt man an, dass sich Dämpfung und Anregung gerade kompensieren, in jeder Anregungssequenz quasi neu ein Soliton der Frequenz  $\Omega$  erzeugt wird, und man sich nur für die qualitative Dynamik an den Anregungsstellen interessiert, ist es möglich diese Störbeiträge zu vernachlässigen und nach Lösungen zu suchen, die der ungestörten KNSG gehorchen. Dieses haben wir in Kapitel 6 angenommen und so die theoretische Beschreibung des Möbiussolitons [15] gefunden. Die vollständige zu allen Zeiten und an allen Orten gültige Dynamik dieses speziellen Solitons gelingt dann wiederum mit der störungstheoretischen Betrachtung unter Hinzunahme entsprechender Störterme.



# 6 Phänomenologische Betrachtung der KNSG

In Abschnitt 4 ist es uns gelungen, die Kubische Nichtlineare Schrödinger-Gleichung zu plausibilisieren und ihre Bedeutung für nichtlineare, dispersive Medien aufzuzeigen. Wir haben gesehen, dass die KNSG exakte Lösungen besitzt; Lösungen, die beispielsweise die Amplitude einer fast harmonischen Welle in einem nichtlinearen, dispersiven Medium beschreiben. Die Störung dieser Lösungen durch Dämpfungsterme oder Anregungen haben wir in Abschnitt 5 behandelt. Dabei sind wir des Öfteren auf mehr oder weniger komplizierte Differentialgleichungen gestoßen, die die Dynamik des gestörten Solitons für relativ kleine Störungen näherungsweise beschreiben können.

Wir werden uns im Folgenden explizit mit einer parametrisch getriebenen, Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung beschäftigen, wobei eine mögliche Lokalisierung zunächst durch eine allgemeine Funktion  $f(z, t)$  angegeben werden soll. Die Betrachtung spezieller Lösungen ermöglicht letztlich eine Darstellung im Ortsraum und einen direkten Zusammenhang der Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung zu schwach nichtlinearen Oszillatoren, wie beispielsweise den Duffin-Oszillator.

Nutzt man die Galilei-Invarianz der KNSG aus, lassen sich eine Vielzahl möglicher Lösungen angeben, die alle durch einen individuellen  $k$ -Wellenvektor gekennzeichnet sind. Die Dynamik der Phase wird entscheidend von diesen  $k$ -Wellenvektoren getragen, was letztlich zur Beschreibung der in [15] gefundenen Möbius-Solitonen führt. Um die Abhängigkeit der Phase vom Wellenvektor  $k$  nachvollziehen zu können, muss die ursprüngliche KNSG verwendet werden. Die Evolutionsgleichung für das Envelope-Soliton kann keine  $k$ -abhängige Phasenakkumulation zeigen.

## 6.1 Die parametrisch getriebene Schrödinger-Gleichung

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der gestörten Kubischen Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung als Evolutionsgleichung für ein Envelope-Soliton <sup>1</sup> im mitbewegten Bezugssystem  $\Sigma'$ :

$$i\dot{\Psi} + \left( \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + N |\Psi|^2 \right) \Psi = -i\gamma\Psi + he^{2i\Omega t} f(z, t)\Psi^*. \quad (6.1.1)$$

---

<sup>1</sup>Für ein Envelope-Soliton wird die  $k$ -Abhängigkeit der Phase vernachlässigt. Damit stellt es die Einhüllenden-Funktion eines Solitons mit Wellenvektor  $k$  dar.

Nehmen wir nun Lösungen der Form  $\Psi = e^{i\Omega t}\psi$  an, so erhält man für  $\psi$  die Differentialgleichung

$$i(\dot{\psi} + i\Omega\psi) + \left(\frac{D}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + N|\psi|^2\right)\psi = -i\gamma\psi + hf(z,t)\psi^*. \quad (6.1.2)$$

Es ist sofort ersichtlich, dass mit einer parametrischen Anregung  $\propto \Psi^*$  der Frequenz  $2\Omega$  ein Envelope-Soliton mit der Frequenz  $\Omega$  verstärkt werden muss. Für Gleichung (6.1.2) können wir nun die allgemeine Form eines Wellenansatzes machen:

$$\psi(z,t) = A(z,t)e^{i\phi(z,t)}, \quad A(z,t), \phi(z,t) \in \mathbb{R}. \quad (6.1.3)$$

Eingesetzt in Gleichung (6.1.2) und Aufspaltung in Real- und Imaginärteil, liefert das gekoppelte Differentialgleichungssystem, welches die Dynamik der Lösung

$$\Psi(z,t) = A(z,t)e^{i(\Omega t + \phi(z,t))} \equiv A(z,t)e^{i\Phi(z,t)} \quad (6.1.4)$$

von Gleichung (6.1.1) beschreibt. Wenn nicht explizit notwendig, werden wir im Folgenden zur besseren Übersichtlichkeit das Argument der Funktionen nicht mehr hinschreiben, und Ortsableitungen mit einem hochgestellten ' kennzeichnen. Die Envelope-Solitonen werden im Folgenden schlicht als Solitonen bezeichnet, obwohl wir schon an dieser Stelle auf den fundamentalen Unterschied in Bezug auf die Phase hinweisen:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} + \Omega + \frac{D}{2}\phi'^2 - \frac{D}{2}\frac{A''}{A} - NA^2 + hf(z,t)\cos 2\phi &= 0, \\ \dot{A} + \frac{D}{2}\phi''A + D\phi'A' + \gamma A + Ahf(z,t)\sin 2\phi &= 0. \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

## 6.2 Auswertung des gekoppelten Differentialgleichungssystems

Das Differentialgleichungssystem (6.1.5) besitzt spezielle Lösungen, die wir uns in den folgenden Unterabschnitten plausibel machen wollen.

### 6.2.1 Differentialgleichung im Ortsraum ( $\phi = 0, n\pi; n \in \mathbb{N}$ )

Unter den Randbedingungen  $\phi = 0, n\pi; n \in \mathbb{N}$  vereinfacht sich das Differentialgleichungssystem zu

$$\begin{aligned} \dot{A} + \gamma A &= 0, \\ \frac{D}{2}A'' - \Omega A + NA^3 &= hAf(z,t). \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Mit den so gewählten Randbedingungen postuliert man die Existenz eines Envelope-Solitons. Nehmen wir weiter ein ungedämpftes System ( $\gamma = 0$ ) an, so muss  $A(z,t)$  zeitunabhängig sein,  $A(z,t) \rightarrow A(z)$ . Daraus resultiert eine Differentialgleichung, die man als leicht abgeänderte, getriebene Duffin-Gleichung im Ort bezeichnen kann [48]:

$$\frac{D}{2}A''(z) - \Omega A(z) + NA^3(z) = hA(z)f(z). \quad (6.2.2)$$

Für  $\phi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$  ändert sich das Vorzeichen der rechten Seite in (6.2.2). Die Wahl dieser speziellen Lösungen transformiert das zeit- und ortsabhängige Differentialgleichungssystem in ein rein ortsabhängiges und mit der so entwickelten Differentialgleichung (6.2.2) ist es uns möglich, die Dynamik eines Solitons der Form  $\pm A(z)e^{i\Omega t}$  und eines der Form  $\pm iA(z)e^{i\Omega t}$  zu analysieren <sup>2</sup>.

Vernachlässigen wir die Anregung  $hA(z)f(z)$  und betrachten das dynamische Verhalten analog im Zeitraum, dann erinnert Gleichung (6.2.2) für  $D = 2$  stark an eine Federgleichung mit der treibenden Kraft  $F(A(z)) = \Omega A(z) - NA^3(z)$  und der Federkonstanten  $k = k(A(z)) = -\Omega + NA^2(z)$ . Für  $N > 0$  wird mit zunehmender Ausdehnung die Federkonstante größer, was zu größeren Frequenzen der Oszillationen führt. Für  $N < 0$  wird die Feder mit zunehmender Ausdehnung immer weicher <sup>3</sup>.

Gleichung (6.2.2) beschreibt für  $h = 0$  statische Lösungen der KNSE, wobei der Term  $\propto A(z)$  in eine verallgemeinerte Schrödinger-Gleichung eingearbeitet werden muss [44]. Wir integrieren Gleichung (6.2.2) und erhalten

$$\frac{D}{4} (A'(z))^2 = \frac{\Omega}{2} A^2(z) - \frac{N}{4} A^4(z) + C + \int dz [A'(z)hA(z)f(z)]. \quad (6.2.3)$$

Hierbei bezeichnet  $C$  die Integrationskonstante, die die verallgemeinerte Energie im System beschreibt. Lösen des Integrals auf der rechten Seite zeigt, wie die Amplitude  $h$  der parametrischen Anregung die in  $\phi(z, t)$  phasenfeste Lösung  $A(z)$  des Solitons  $\psi(z, t)$  beeinflusst. (Man beachte, dass die komplette Phase des Solitons  $\Psi(z, t)$  als Lösung von (6.1.1) die Form  $\Phi(z, t) = \Omega t + \phi$  hat). Wir werden im Folgenden stets  $\phi = 0$  und  $N > 0$  annehmen und Lösungen von Gleichung (6.2.3) in Abhängigkeit der Vorzeichen von  $D$  und  $\Omega$  betrachten.

### 6.2.2 Lösungen im Phasenraum

Sei im Folgenden  $h = 0$  angenommen, also ein System, welches nur durch die eingekoppelte Frequenz der parametrischen Anregung entscheidend bestimmt ist. Dieses ist z.B. dann physikalisch sinnvoll, wenn Dämpfungseinflüsse und Anregung sich kompensieren. Verwendet man anstelle der parametrischen Anregung in (6.1.1) die Anregung  $ihe^{2i\Omega t} f(z, t)\Psi^*$ , führt dies unter Verwendung der Lösungen aus 6.2.1 direkt zum gekoppelten Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{A} + \gamma A - hA f(z, t) &= 0, \\ \frac{D}{2} A'' - \Omega A + NA^3 &= 0, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

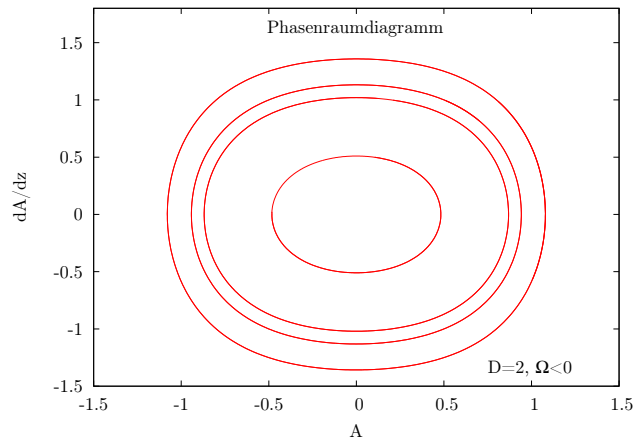
womit die Kompensationsmöglichkeit unmittelbar augenscheinlich wird. Man unterscheidet nun zwischen fünf unterschiedlichen Lösungen von Gleichung (6.2.3)[44].  $D = 2$  und

<sup>2</sup>Die Analyse basiert auf der Wahl der speziellen Störterme in 6.1.1, andere Störterme sind ebenso anwendbar.

<sup>3</sup>Gleichung (6.2.2) stellt im Zeitraum quasi eine Newtonsche Bewegungsgleichung dar.

$C = 0$  wird im Allgemeinen als solitärer Puls bezeichnet, während  $D = -2$  und  $C = -\frac{\Omega^2}{4N}$  als Schockzustand bezeichnet wird. Die Abgrenzung dieser Zustände geschieht also über die Faktorisierungsmöglichkeiten der rechten Seite in (6.2.3). Die anderen Lösungen werden unter dem Stichwort periodisch nichtlineare Wellen zusammengefasst. Dabei werden wir  $D$  stets als  $\pm 2$  annehmen (durch geschickte Skalierung ist dies immer möglich), um die Differentialgleichung (6.2.2) in ihrer Struktur möglichst einfach zu halten. Mit einer weiteren Skalierung lässt sich auch der nichtlineare Koeffizient  $N$  auf eins skalieren. Dieses haben wir in der numerischen Auswertung von Gleichung (6.2.2) berücksichtigt. Die Frequenz  $\Omega$  hingegen wollen wir als variablen Parameter der Gleichung betrachten und ihn in keine weitere Skalierung einbinden. Das bedeutet, dass wir Gleichung (6.2.2) in Abhängigkeit der Parameter  $C$  und  $\Omega$  auswerten können.

1.  $D = 2, \Omega < 0$



**Abbildung 6.1:** Phasenraumplot von  $A'$  gegen  $A$  für  $D = 2, \Omega < 0$ , die verschiedenen Konturen basieren auf unterschiedlichen Anfangsbedingungen.

Im allgemeinen Fall ist also die Differentialgleichung (6.2.3) zu lösen, um die rein ortsabhängige Lösung  $A(z)$  zu erhalten. Nach Separation der Variablen ist dies äquivalent zur Lösung des Integrals

$$\frac{\sqrt{D}}{2} \int_{A(0)}^{A(z_0)} \frac{dA}{\sqrt{C + \frac{\Omega A^2}{2} - \frac{NA^4}{4}}} = z_0. \quad (6.2.5)$$

Da die Auswertung dieses Integrals nicht trivial ist <sup>4</sup>, versuchen wir uns die Lösungen im Phasenraum zu veranschaulichen. Zu diskutieren bleibt also die Funktion

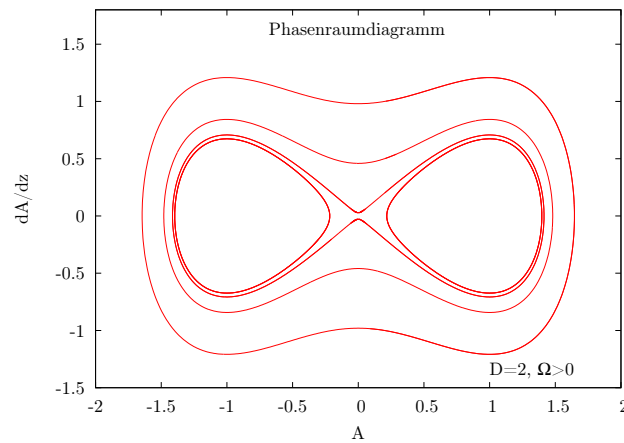
$$A'(z) = \frac{2}{\sqrt{D}} \sqrt{C + \frac{\Omega A^2(z)}{2} - \frac{NA^4(z)}{4}}. \quad (6.2.6)$$

<sup>4</sup>Das Integral wird als elliptisches Integral nicht unmittelbar zu analysieren sein.

Die Diskussion dieser Funktion in Abhängigkeit der variablen Parameter und Anfangsbedingungen wird in Abschnitt 6.2.4 vollzogen. An dieser Stelle werden wir Gleichung (6.2.2) als gewöhnliche Differentialgleichung direkt numerisch implementieren und die Lösungen in Abhängigkeit der gewählten Parameter im Phasenraum grafisch auswerten. Die Integrationskonstante  $C$  ist dabei gemäß der Anfangsbedingungen und der Frequenz  $\Omega$  in der numerischen Implementierung gegeben und gibt, wie eingangs erwähnt, eine verallgemeinerte Energie des Systems vor.

Der Parameter  $\Omega$  wurde für alle Phasenraumlösungen zunächst festgehalten. Abbildung 6.1 visualisiert schließlich das Phasenporträt für  $h = 0$ ,  $D = 2$  und  $\Omega < 0$ . Man erkennt die Periodizität der Lösungen und die Beschränktheit von  $A(z)$  auf ein festes Raumgebiet. Jede Periode ist durch zwei Nulldurchgänge und zwei Extrema (Hochpunkt und Tiefpunkt) charakterisiert. Nimmt man  $A(0) = 1$  an, entspricht dieses im Ortsraum einem cosinusoidalen Verhalten. Wählt man  $(A, A') = (0, 0)$  als Anfangsbedingung, so muss  $C = 0$  gelten. Für  $D, N > 0$  und  $\Omega < 0$  existiert dann aber nur die Lösung, die sich eben auf den Punkt  $(A, A') = (0, 0)$  zusammenzieht. Wir werden dieses mit 6.2.4 nachvollziehen können.

2.  $D = 2, \Omega > 0$

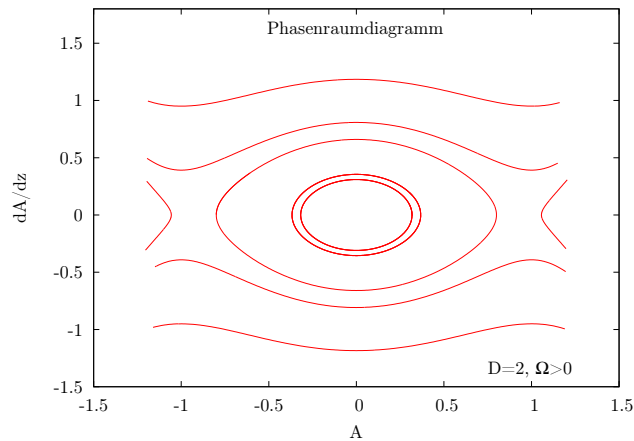


**Abbildung 6.2:** Phasenraumplot von  $A'$  gegen  $A$  für  $D = 2, \Omega > 0$ . Die verschiedenen Konturen basieren auf unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Deutlich zu erkennen ist die starke Abhängigkeit der Periodizität einer Kontur von diesen Anfangsbedingungen.

Abbildung 6.2 zeigt das qualitative Verhalten der Lösungen  $\Psi(z, t) = e^{i\Omega t} A(z)$  für  $h = 0$  und  $\Omega > 0$  im Phasenraum. Auch bei dem so gewählten Vorzeichen von  $\Omega$  zeigt sich die Periodizität der Lösungen und die Beschränktheit von  $A(z)$ . Dennoch unterscheiden sich Abbildung 6.1 und Abbildung 6.2 in zwei wesentlichen Punkten. Zum einen existiert bei gewissen Anfangsbedingungen eine Lösung, die während einer Periode keinen Nulldurchgang in  $A$  hat, also im Ortsraum keine Symmetrie zur

$z$ -Achse aufweist. Es existiert aber stets auch die zur  $A$ -Achse symmetrische Lösung mit gleichem periodischen Verhalten, nur eben mit entgegengesetztem Vorzeichen von  $A$ . Zum anderen existieren Lösungen mit geschlossener, periodischer Kontur, für die  $A'$  an vier Stellen extremal wird, d.h. die periodische Lösung hat im Gegensatz zu Abbildung 6.1 vier Wendepunkte. Diese Lösungen liegen punktsymmetrisch um  $(A, A') = (0, 0)$  und weisen deswegen eine wesentlich längere Periode auf als die eben beschriebenen. Wir werden uns mit diesen beiden unterschiedlichen Periodizitäten im folgenden Abschnitt beschäftigen und ihr Verhalten in Abhängigkeit des Parameters  $\Omega$  von Gleichung (6.2.2) auswerten. Wir bemerken des Weiteren, dass über die Anfangsbedingungen und den Parameter  $\Omega$  der Parameter  $C$  festgelegt wird.

3.  $D = -2, \Omega > 0$



**Abbildung 6.3:** Phasenraumplot von  $A'$  gegen  $A$  für  $D = -2, \Omega > 0$ , die verschiedenen Konturen basieren auf unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Die Konturen sind nur für gewisse Anfangsbedingungen geschlossen, also räumlich periodisch, für andere sind die Lösungen nicht mehr beschränkt.

Wählt man  $D$  negativ, haben in der Schrödinger-Gleichung nach (6.1.1)  $D$  und  $N$  ( $N$  war stets als positiv angenommen) entgegengesetzte Vorzeichen. Dieses hat entscheidende Auswirkungen für die Lösungen  $A(z)$  von Gleichung (6.2.2). Für bestimmte Anfangsbedingungen ist das Verhalten ähnlich zu dem in 1, d.h. die Lösungen sind periodisch und  $A(z)$  bleibt beschränkt  $\forall z$ . Schließlich existieren aber auch numerische Anfangsbedingungen ( $C$ -Werte), aus denen keine Beschränktheit der Lösung  $A(z)$  mehr folgt und kein räumlich periodisches Verhalten mehr möglich ist. Bei diesen unbeschränkten Lösungen kann man die mit Nullstellen aber ohne Extrema von denen mit Extrema aber ohne Nullstellen unterscheiden (Abbildung 6.3).

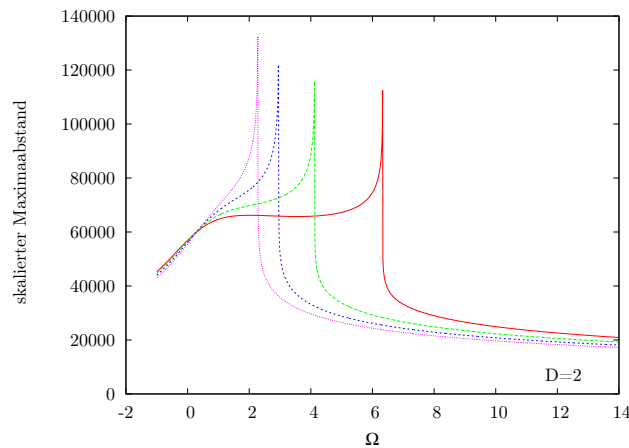
Wir weisen des Weiteren darauf hin, dass es für  $\Omega < 0$  und  $D = -2$  keine geschlossenen Konturen gibt. Periodisches Verhalten ist in diesem Fall also gänzlich ausgeschlossen. An dieser Stelle sei bemerkt, dass die abgeleitete Gleichung (6.2.2) für  $h = 0$  die statischen Lösungen einer Schrödinger-Gleichung der Form

$$i \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial z^2} - \Omega A(z, t) + N |A(z, t)|^2 A(z, t) = 0 \quad (6.2.7)$$

beschreibt. Letztlich beschreiben die Phasenraumplots also auch Plots eben dieser statischen Lösungen.

### 6.2.3 Der Parameter $\Omega$

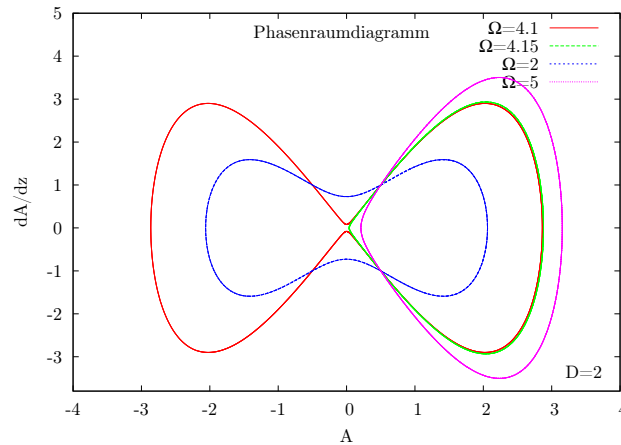
Wir werden uns im Folgenden nur noch den ortsfesten Lösungen mit  $D = 2$  widmen, also den Lösungen aus 1 und 2, und ihr Verhalten in Abhängigkeit des Parameters  $\Omega$  skizzieren. Interessant ist vor allem die mögliche Änderung der Periodizität der ortsfesten Lösung in 2, da es in einem sehr kleinen Parameterbereich  $(C, \Omega)$  zu einem qualitativ völlig unterschiedlichen Verhalten kommen kann. Dazu hält man die Anfangsbedingungen  $(A_0, A'_0)$  der numerisch implementierten Differentialgleichung (6.2.2) fest, variiert  $\Omega$  und visualisiert sich numerisch das Verhalten von  $A(z)$ . Mit jeder  $\Omega$ -Variation variiert gemäß (6.2.6) auch der Wert der verallgemeinerten Energie  $C$ , was physikalisch sinnvoll ist. Abbildung 6.4 zeigt, wie sich die Periodizität, die über den Abstand zweier Maxima definiert wurde, in Abhängigkeit von  $\Omega$  bei festen Anfangsbedingungen ändert. Besonders augenscheinlich sind die scharfen Peaks bei gewissem  $\Omega$ , die sich in Abhängigkeit diverser Anfangsbedingungen verschieben lassen. An diesen Stellen reicht eine kleine Abweichung vom Parameter  $\Omega$  aus, um die Periodizität der Lösung  $A(z)$  entscheidend zu beeinflussen.



**Abbildung 6.4:** Abstand zweier Maxima von  $A(z)$  in Abhängigkeit des Parameters  $\Omega$ , der die Phase eines Solitons der Form  $\psi(z, t) = A(z)e^{i\Omega t}$  beschreibt. Die unterschiedlichen Kurven basieren auf verschiedenen Anfangsbedingungen  $(A_0, A'_0)$ . Bei festem  $(A_0, A'_0)$  resultiert aus jeder  $\Omega$ -Variation automatisch eine Änderung der verallgemeinerten Energie  $C$ .

Im Phasenraumbild ist dieser Peak dadurch manifestiert, dass die Lösungen mit Nulldurchgängen in jene übergehen, die keine Nulldurchgänge in Bezug auf  $A(z)$  haben und umgekehrt. Dieser Übergang resultiert dann in einer Verdopplung bzw. Halbierung der Periode.

Abbildung 6.5 veranschaulicht dieses Verhalten, wobei die Anfangsbedingungen so gewählt wurden, dass sie mit der entsprechenden Kurve in Abbildung 6.4 übereinstimmen. Folgerichtig ist der Parameter  $\Omega$  maßgeblich dafür verantwortlich, wann die ortsfeste Lösung  $A(z)$  ihre Anfangsbedingung erneut erreicht und entscheidet über das strukturelle Erscheinungsbild von  $A(z)$  während einer Periode.

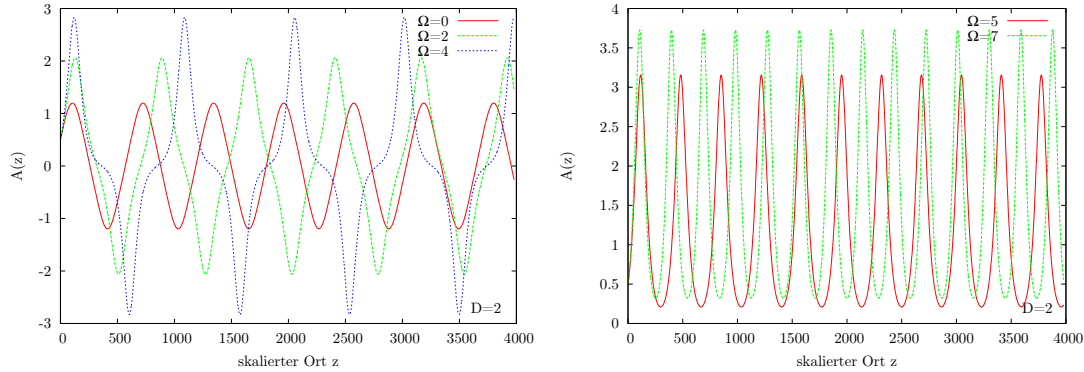


**Abbildung 6.5:** Phasenraumbild für feste Anfangsbedingungen  $(A_0, A'_0)$  bei unterschiedlichen Werten für  $\Omega$ .

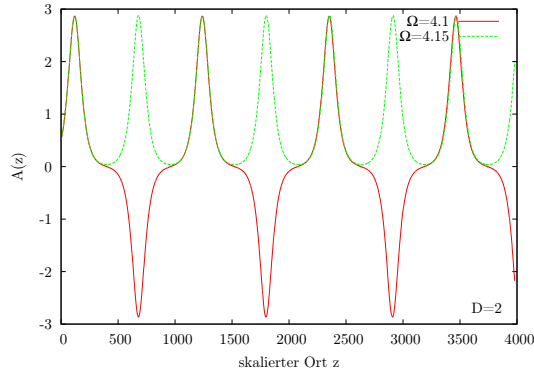
Gleiches gilt natürlich auch für den Parameter  $C$ , also die verallgemeinerte Energie des Systems, bzw. die Anfangsbedingungen, wie wir im vorangegangenen Abschnitt schon verdeutlicht hatten. In einem sehr engen Frequenzbereich kommt es zu einem in Bezug auf die Symmetrie völlig unterschiedlichen Modenverhalten. Abbildung 6.6 zeigt das Modenverhalten weit entfernt vom 'kritischen Peak', während Abbildung 6.7 nochmals die plötzliche Periodizitätsänderung des ortsaufgelösten Solitons visualisiert. Das Auffinden der 'kritischen Frequenz'  $\Omega$ , an der die Periodizität der Lösung derart entscheidend beeinflusst wird, ist mit Gleichung (6.2.6) leicht zu berechnen, da die entsprechend 'kritische Lösung' durch den Phasenraumpunkt  $(A, A') = (0, 0)$  gehen muss. Dies bedeutet  $C = 0$  (solitärer Puls), womit eine direkte Beziehung der Frequenz  $\Omega$  zu den Anfangsbedingungen  $(A_0, A'_0)$  hergestellt werden kann (vgl. 6.2.4).

Die bis jetzt betrachteten Lösungen der KNSG sind im Ortsraum fest und variieren mit der Frequenz  $\Omega$  nur in Bezug auf ihre Phase. Es sind deshalb stehende Lösungen der KNSG, die den Ortsraum entsprechend der Abbildungen 6.6 und 6.7 ausfüllen. Nun muss unter periodischen Randbedingungen stets  $A(z) = A(z + L)$  gelten, wobei  $L$  die Periodenlänge bezeichnet. Gibt man  $L$  vor, lassen sich stehende Lösungen nur für bestimmte





**Abbildung 6.6:** Lösung von  $A(z)$  im Ortsraum für unterschiedliche Frequenzen  $\Omega$  und bei fester Anfangsbedingung  $(A_0, A'_0)$ .



**Abbildung 6.7:** Lösung von  $A(z)$  im Ortsraum am kritischen Peak. In einem sehr kleinen Frequenzbereich kommt es bei fester Anfangsbedingung zur Periodenverdopplung.

Frequenzen  $\Omega$  erzeugen. Unter Variation der Anfangsbedingungen, lassen sich aber stets solche Lösungen erzeugen, deren Phasenfrequenz nahe am kritischen Peak liegt, für die also  $C = 0$  gilt.

Koppelt man nur ein Soliton pro Periodenlänge ein ist dies natürlich nicht relevant, erst bei Multi-Solitonen, die man durch Mehrfachanregung pro Periodenlänge erzeugen kann, kommt dieser kritische Peak entscheidend zum Tragen. Beispielsweise können sich bei Moden aus 2 Solitonen die symmetrischen, genauso wie die antisymmetrischen, als stehende Lösungen in einem sehr engen Frequenzbereich stabilisieren. Die Bezeichnung der Moden als 'symmetrisch(s)' und 'antisymmetrisch(a)' bezieht sich auf sinnvoll gewählte Symmetrieachsen und soll im Folgenden Nomenklatur für diese Moden sein. Das zunächst überraschend erscheinende Resultat der Existenz dieser beiden Lösungen, findet kein Analogon in der linearen Physik mehr und wurde erst kürzlich in den Arbeiten [10]

und [11] untersucht.

Es bleibt die Frage zu klären, welche Lösungen sich für die kleinere Frequenz und welche für die größere am kritischen Peak stabilisieren. Vergrößert man langsam die Frequenz, stabilisieren sich im Ortsraum die antisymmetrischen vor den symmetrischen. Es ist nun zu beachten, dass sich die bis jetzt erhaltenen Ergebnisse als stehende Lösungen auf ein mitbewegtes Bezugssystem  $\Sigma'$  beziehen. Im realen Bezugssystem  $\Sigma$  wird sich das Soliton mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  bewegen, also der unskalierten Schrödinger-Gleichung der Form

$$i \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + v_g \frac{\partial \Psi}{\partial z''} \right) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z''^2} + N |\Psi|^2 \Psi = -i\gamma \Psi + h e^{2i\Omega t} f(z'', t) \Psi^* \quad (6.2.8)$$

gehörchen.

$v_g$  steht dabei im direkten Zusammenhang zum selektierten Wellenvektor  $k$  und bezeichnet die Geschwindigkeit des Envelope-Solitons. Für  $k = 0$  ist  $v_g = 0$  und das mitbewegte Bezugssystem  $\Sigma'$  ist identisch mit  $\Sigma$ . Die reale Bewegung der Solitonen ist natürlich wesentlich, um mit einer einzigen, lokalisierten Anregung Multisolitonen als in  $\Sigma'$  stehende Lösungen zu erzeugen.

Sei  $T_0$  nun die Umlaufzeit, in welcher das Soliton mit der Geschwindigkeit  $v_g$  die Länge  $L$  durchläuft, dann hat dieses Soliton nach der Länge  $\frac{L}{2}$  und der verstrichenen Zeit  $\frac{T_0}{2}$  gemäß der Frequenz  $\Omega$  eine Phasenakkumulation um  $\pi$  erhalten. Diese Akkumulation ist stringentes Resultat aus den periodischen Randbedingungen, die eine Phasenakkumulation des mit  $v_g$  bewegten Solitons nach einem kompletten Umlauf von  $2\pi$  fordern. Zusammen mit den antisymmetrischen Ortslösungen erhält man folgerichtig symmetrische Gesamtlösungen, die bei kleineren Frequenzen als die antisymmetrischen Gesamtlösungen anzutreffen sind. Diese Gesamtlösungen schieben sich dann als Multisolitonenlösungen mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  durch das periodische Ringsystem<sup>5</sup>.

Die Auswertung der parametrisch getriebenen, gedämpften KNSG unter speziellen Randbedingungen (Envelope-Näherung) hat uns also auf eine Differentialgleichung geführt, mit deren Hilfe man die Lösungen im Ort in Abhängigkeit zweier Parameter  $C$  und  $\Omega$  bestimmen kann. Es ist immer möglich, für gegebene Periodenlänge  $L$  und Frequenz  $\Omega$ , die den periodischen Randbedingungen genügen muss, durch Einstellung der Energie die Frequenz in die Nähe des kritischen Peaks zu bringen, so dass es immer zwei im mitbewegten Bezugssystem  $\Sigma'$  stehende Lösungen mit leicht unterschiedlicher Frequenz geben kann, nämlich die symmetrischen und die antisymmetrischen. Diese Multisolitonenlösungen variieren zwar noch zeitlich mit der Frequenz  $\Omega$ , da die Gesamtlösung die Form  $\psi(z, t) = A(z) e^{i\Omega t}$  hat, müssen aber aufgrund der periodischen Randbedingungen nach der Zeit  $T_0$  wieder die Anfangsbedingungen erreicht haben. Im realen Bezugssystem  $\Sigma$  sind die obigen Multisolitonenlösungen aber Lösungen der Form

$$\Psi(z, t) = A(z - v_g t) e^{i\Omega t}, \quad k \neq 0, \quad (6.2.9)$$

bewegen sich also als in sich stabile Lösung mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$ . Wir weisen des Weiteren darauf hin, dass die Differenzierung zwischen symmetrischen und

---

<sup>5</sup>Ein Ring ist eine der einfachsten Möglichkeiten, um periodische Randbedingungen zu generieren.

antisymmetrischen Lösungen trivialerweise nur für Multisolitonen, die bei Mehrfachanregung pro Periodenlänge entstehen, sinnvoll ist.

#### 6.2.4 Parameterabhängige Diskussion der Lösungen

Die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes lassen sich unmittelbar an Gleichung

$$A'(z) = \frac{2}{\sqrt{D}} \sqrt{C + \frac{\Omega A^2(z)}{2} - \frac{N A^4(z)}{4}} \quad (6.2.10)$$

verifizieren. Bei festem  $D$  und  $N$ , was für homogene, nichtlineare Medien sicherlich eine gute Approximation ist, hat man insgesamt zwei Parameter und die Anfangsbedingungen, die die Lösung festlegen müssen. Nur zwei dieser Größen sind frei wählbar und determinieren damit die Lösung schon vollständig. In der numerischen Implementierung waren dies die Anfangsbedingungen und der Parameter  $\Omega$ , die folgerichtig den Parameter  $C$  festlegen. Da  $A, A' \in \mathbb{R}$  muss stets gelten:

$$C \geq \frac{N A^4}{4} - \frac{\Omega A^2}{2}. \quad (6.2.11)$$

Die Nullstellen von  $A'(z)$  müssen die Lösungen maßgeblich charakterisieren. Man erhält für sie:

$$A_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{\Omega}{N} \pm \sqrt{\frac{\Omega^2}{N^2} + \frac{4C}{N}}}. \quad (6.2.12)$$

Für die Nullstellen in  $A(z)$  gilt:

$$A'_{1,2} = \pm 2 \sqrt{\frac{C}{D}}. \quad (6.2.13)$$

Die Anzahl der Nullstellen für  $A$  und  $A'$  lässt sich also über den Parameter  $C$  klassifizieren.

- $C > 0$

(6.2.13) folgend existieren genau zwei reelle Nullstellen in  $A$ , die punktsymmetrisch zu  $A' = 0$  liegen:

$$A'_{1,2} = \pm 2 \sqrt{\frac{C}{D}}. \quad (6.2.14)$$

Sie sind unabhängig von dem freien Parameter  $\Omega$  und dem Systemparameter  $N$ , besitzen aber eine Dispersionsabhängigkeit. Im Ortsraum haben wir diese Lösungen als antisymmetrische Lösungen gekennzeichnet. Nach Formel (6.2.12) sind für  $C > 0$  nur zwei reelle Nullstellen von  $A'$  möglich, nämlich:

$$A_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\Omega}{N} + \sqrt{\frac{\Omega^2}{N^2} + \frac{4C}{N}}}. \quad (6.2.15)$$

Diese liegen punktsymmetrisch zu  $A = 0$  und sind nicht vom Dispersionsparameter  $D$  abhängig. Für  $\Omega < 0$  sind dies die einzig möglichen Nullstellen ( $N, D > 0$  und fest), wie man aus (6.2.11) und (6.2.15) leicht ableiten kann. Deshalb sind die Konturen in Abbildung 6.1 alle punktsymmetrisch um  $(A, A') = (0, 0)$  und zeigen ihr typisches elliptisches Verhalten. Für  $\Omega > 0$  gilt dieses nicht mehr, da in diesem Fall auch Lösungen mit  $C < 0$  erlaubt sind, die ein anderes Lösungsverhalten aufweisen. Abbildung 6.2 zeigt die Lösungen für  $C > 0$ . Es sind die Lösungen, die der verzerrten Ellipse folgen und nur zwei Nulldurchgänge in  $A'(z)$  haben.

- $C < 0$

Trivialerweise existieren in diesem Fall keine reellen Nullstellen in  $A$ . Die Lösung bleibt im Ortsraum auf eine Halbebene ( $+ \vee -$ ) beschränkt und wurde von uns als symmetrische Lösung bezeichnet. Das Nullstellenverhalten nach Formel (6.2.12) muss für zwei Unterfälle unterschieden werden. Gilt  $|C| > \frac{\Omega^2}{4N}$ , so existieren keine reellen Nullstellen, da die Diskriminante negativ wird. Auch mit der notwendigen Lösungsbedingung (6.2.11) führt dieses sofort zum Widerspruch. Im Phasenraum sind unter diesen Gegebenheiten keine geschlossenen Konturen mehr möglich. Ist  $|C| = \frac{\Omega^2}{4N}$ , existieren zwei Nullstellen von  $A'(z)$ . Die Forderung  $(A, A') \in \mathbb{R}$  erlaubt dann aber nur noch Lösungen mit  $A = \pm \sqrt{\frac{\Omega}{N}}$ , d.h. die Gesamtlösung hat sich auf diese beiden Punkte zusammengezogen und die Periodizitätslänge ist Null. Im Ortsraum entspricht dieses zwei zur  $z$ -Achse symmetrischen Geraden mit Steigung Null. Wir bemerken, dass diese Punkte gerade die Fixpunkte der Differentialgleichung sind. Für  $|C| < \frac{\Omega^2}{4N}$  existieren vier Nullstellenlösungen in  $A'(z)$  gemäß

$$A_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{\Omega}{N} \pm \sqrt{\frac{\Omega^2}{N^2} + \frac{4C}{N}}}, \quad (6.2.16)$$

da die Diskriminanten beider Wurzeln positiv bleiben. Mit Bedingung (6.2.11) sind diese vier möglichen Nullstellen wiederum nur dann möglich, wenn  $A$  auf ein entsprechendes Phasenraumgebiet eingeschränkt wird, und zwar muss gelten:

$$|A| \leq \sqrt{\frac{\Omega}{N} + \sqrt{\frac{4C}{N} + \frac{\Omega^2}{N^2}}}. \quad (6.2.17)$$

Diese zusätzliche Einschränkung ist insofern ersichtlich, da  $\Omega$  und die Anfangsbedingungen  $(A_0, A'_0)$  den Parameter  $C$  determinieren. Genauso legen die Parameter  $(\Omega, C)$  die Kontur fest, also das für  $A$  und  $A'$  beschränkte Phasenraumgebiet. Wir weisen nochmals darauf hin, dass  $C < 0$  nur für  $\Omega > 0$  Lösungen der Differentialgleichung (6.2.2) liefern kann. Die gefundenen Lösungen sind mit den Abbildungen 6.1 und 6.2 in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen sowie mit Abbildung 6.5 für  $\Omega$ -Variation nachzuvollziehen. Interessant ist nun aber der kritische Peak, d.h. die Frequenz, für die es bei minimaler Abweichung zu einer Periodenverdopplung bzw.

Halbierung kommt. An dieser Stelle müssen die Lösungen mit zwei Nullstellen in  $A'(z)$  in jene mit vier Nullstellen übergehen und umgekehrt. Die Vorhersage dieses Peaks ermöglicht dann ein direktes Einstellen der Frequenz, an der quasi parallel symmetrische und antisymmetrische Lösungen im Ort möglich sind.

- $C = 0$

$C = 0$  beschreibt obigen Ausführungen folgend die kritischen Lösungen des Systems. Nur für das so gewählte  $C$  durchläuft die Phasenraumtrajektorie den Punkt  $(A, A') = (0, 0)$ . Nach (6.2.10) erhält man für das kritische  $\Omega$ :

$$\Omega = \frac{D}{2} \frac{A'^2}{A^2} + \frac{N}{2} A^2. \quad (6.2.18)$$

Damit ist klar, wie bei gegebenen Anfangsbedingungen  $(A_0, A'_0)$  der Parameter  $\Omega$  gewählt werden muss, um symmetrische und antisymmetrische Lösungen in einem kleinen Frequenzbereich zu erzeugen (vgl. Abbildung 6.8). Andersherum kann für ein gegebenes  $\Omega$  die Anfangsbedingung auch so abgeändert werden, dass sie (6.2.18) genügt. Aufgrund der Beschränktheit der  $C=0$  - Lösung muss es auch Einschränkungen für diese Anfangsbedingungen geben. Für gegebenes  $\Omega$  und  $A$  muss  $A'$  weiterhin reell bleiben, womit gelten muss:

$$\Omega^2 \geq \frac{1}{2} N A^4. \quad (6.2.19)$$

Für gegebenes  $\Omega$  und  $A'$  muss  $A$  reell bleiben. Also muss gelten:

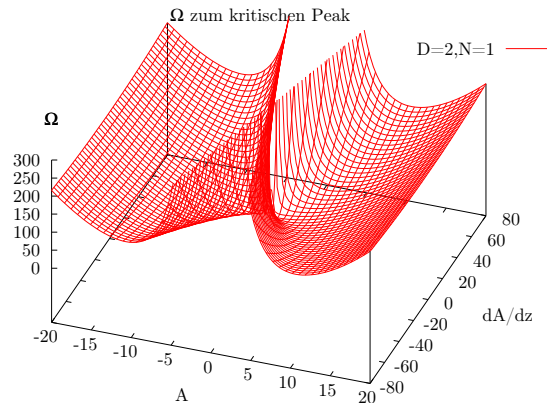
$$\Omega^2 \geq D N A'^2. \quad (6.2.20)$$

Da  $(A_0, A'_0)$  aber beliebig gewählt werden dürfen, sind für festes  $\Omega$  diese Bedingungen immer erfüllbar.

Die Nullstellen in  $A'$  liegen (6.2.12) folgend bei

$$A_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2\Omega}{N}}, \quad A_3 = 0, \quad (6.2.21)$$

während  $A'_1 = 0$  konsequenterweise die einzige Nullstelle in  $A$  ist. Die bisherigen Ergebnisse haben zwar eine gewisse Aussagekraft, beschreiben das Verhalten der Lösungen aber nur in Bezug auf einige Spezialpunkte. Das vollständige Verständnis kann erst mit der Analyse des elliptischen Integrals (6.2.5) gewonnen werden. Unter der Annahme, dass dieses Integral nicht pseudoelliptisch ist, wird eine exakte Stammfunktion jedoch nicht zu finden sein.



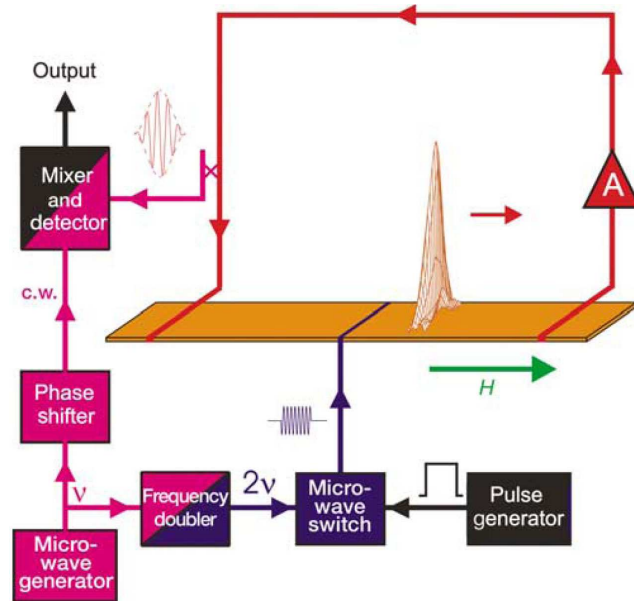
**Abbildung 6.8:** Kritisches  $\Omega$ , bei dem es in einem kleinen Frequenzbereich zur Periodenverdopplung kommt, in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen  $(A_0, A'_0)$ .

### 6.3 Experimentelle Beobachtungen von Solitonenlösungen

Wir haben im vorherigen Abschnitt mögliche Envelope-Solitonenlösungen der KNSG kennengelernt, die wir uns als im mitbewegtem Bezugssystem  $\Sigma'$  stehende Lösungen in Orts- und Phasenraum plausibilisiert haben. Als Störterme haben wir einen Dämpfungsterm wie auch eine parametrische Anregung mit der Frequenz  $2\Omega$  eingeführt, wobei der Dämpfungsterm, wie auch der Betrag der Anregung in weiteren Betrachtungen nicht mehr berücksichtigt wurden ( $\gamma = 0, h = 0$ ). Diese vereinfachte Betrachtung resultiert aus der möglichen Kompensation des Dämpfungstermes in der KNSG durch die parametrische Anregung. Das bedeutet, dass beide Terme auf das qualitative Verhalten des Solitons am Ort der Anregung kaum Einfluss nehmen. Die vollständige, analytische Auswertung des Differentialgleichungssystems (6.2.1) wird im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr behandelt werden. In unserem vereinfachten Fall gemäß 6.2 werden sich die Störeinflüsse einzig in der Frequenz, mit der die parametrische Anregung getrieben wird, entscheidend manifestieren.

Das folgende Experiment [15], durchgeführt am Fachbereich Physik der TU Kaiserslautern, ist eine Anordnung, die dem oben beschriebenen Verhalten Rechnung trägt. Alle hier beschriebenen Ausführungen versuchen sich nur auf das Wesentliche zu konzentrieren. Für detailliertere Ausführungen sei auf [15] verwiesen<sup>6</sup>. Gemäß Abbildung 6.9 wird ortslokalisiert ein Soliton der Frequenz  $\Omega$  über eine parametrische Anregung mit Frequenz  $2\Omega$  in einem nichtlinearen Medium (YIG) angeregt. Die periodischen Randbedingungen sind über einen Ring verifiziert. Es liegt also insgesamt ein System vor, welches durch die gedämpfte, parametrisch getriebene KNSG (6.2.8) beschrieben werden kann. Die Stellung der Spinvektoren ist u.a. über ein externes Magnetfeld  $\mathbf{H}$  zu steuern, welches

<sup>6</sup>erhältlich auf der Homepage der AG Demokritov an der WWU Münster.



**Abbildung 6.9:** Schematischer Aufbau zur Erzeugung von Moden, die als Lösung der gedämpften, parametrisch getriebenen KNSG betrachtet werden können. Als nichtlineares Medium zur Beobachtung der nichtlinearen Moden im Ring, die Resultat der Spinwellenanregung sind, dient YIG (Yttrium Iron Garnat). Die Propagationsrichtung für Spinwellen kann über ein externes Magnetfeld  $\mathbf{H}$  gesteuert werden. Das Lighthillkriterium [36] zeigt, dass sich für  $N > 0$  und  $D > 0$  gemäß Gleichung 6.1.1 die magnetostatischen Rückwärts-Volumen-Moden (MSBVM) stabilisieren können. Mit einer parametrischen Anregung doppelter Frequenz  $2\Omega$  werden Spinwellen der Frequenz  $\Omega$  angeregt, was zu phasenselektiver Verstärkung führt. Der Ring besteht zudem aus einem Mikrowellen-Verstärker (A), der nur Moden mit einer wohldefinierten Phase an der Stelle des Verstärkers zulässt. Phasensensitive Messung geschieht über Mischen der Moden im Ring mit einem wohldefinierten Referenzsignal (c.w.) und anschließender Detektion. Die Abbildung ist aus [15] entnommen worden.

gemäß Abbildung 6.9 die Anregung der 'Magnetostatischen Rückwärts-Volumen-Mode (MSBVM)' erzwingen kann. Damit gibt das  $\mathbf{H}$ -Feld auch die Richtung der mit Wellenvektor  $\mathbf{k}$  propagierenden Spinwellen vor.

Bei gegebener Länge  $L$  und Frequenz  $\Omega$  können nun stets über  $\mathbf{H}$ -Variation im mitbewegten Bezugssystem  $\Sigma'$  stehende Envelope-Lösungen erzeugt werden, deren Frequenz nahe des kritischen Peaks aus 6.2.3 liegen.

Die Anregung von Multisolitonen geschieht dabei über einen Pulsgenerator, der mehrere Solitonen in den Ring einkoppeln kann. Diese im mitbewegten Bezugssystem ruhenden Multisolitonen bewegen sich dann mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$ , wie in 6.2.3 beschrieben, durch das nichtlineare Medium. Für ein Soliton pro Ring existiert genau eine stehende Lösung im mitbewegten Bezugssystem. Diese normale Mode propagiert im realen System mit  $v_g$  durchs Medium und hat nach einem Umlauf eine zusätzliche Phase

von  $2\pi$  akkumuliert. Singlesolitonen zeigen folgerichtig kein atypisches Verhalten, welches sich nicht mehr aus der linearen Physik ableiten lässt. Für Multisolitonen gibt es nun aber den in **6.2.3** beschriebenen schmalen Frequenzbereich, in denen zwei im mitbewegten Bezugssystem ruhende Envelope-Lösungen möglich sind, nämlich die symmetrischen und die antisymmetrischen. Auch diese beiden Multisolitonenlösungen propagieren nun mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  im YIG-Film und akkumulieren nach einem Umlauf im Ring die Phase  $2\pi$ . Es ist zu beachten, dass für die Stabilisierung aller obigen Moden die Umlaufzeit  $T_0$  stets in Bezug zur Pumpsequenz  $T_p$  gebracht werden muss. Ein Singlesoliton stabilisiert sich nur, wenn die Pumpsequenz  $T_p$  mit der Umlaufzeit  $T_0$  übereinstimmt. Für ein Multisoliton, bestehend aus zwei Solitonen, muss  $T_p = \frac{T_0}{2}$  gelten, für drei Solitonen  $T_p = \frac{T_0}{3}$  etc. Geringe Abweichungen, wie in [15] beschrieben, reichen nach Abbildung 6.10 wenige Nanosekunden aus, zerstören die Moden.

Betrachtet man Abbildung 6.10, so erkennt man im Wesentlichen zwei unterschiedliche, zeitaufgelöste Lösungen im aktiven Ringsystem. Die Moden, die mit (N) gekennzeichnet sind, akkumulieren in einem Umlauf die Phase  $2\pi$  und Vielfache<sup>7</sup>, erreichen also nach selbigem erneut die Anfangsbedingungen. Im erwarteten Frequenzbereich unterscheiden sich bei Multisolitonenlösungen zusätzlich die symmetrischen von den antisymmetrischen. Die Einstellung des Systems auf diesen schmalen Frequenzbereich, das heißt, das Auffinden des kritischen Peaks gelingt bei fester Periodenlänge  $L$  durch Abgleich der Frequenz  $\Omega$  mit den Anfangsbedingungen  $(A_0, A'_0)$ , also den freien Parametern von der Differentialgleichung (6.2.2). Diese Parameter sind so einzustellen, dass das notwendige Kriterium  $C = 0$  erfüllt wird. Effektiv kann das Verhalten dieser Normalen, in  $\Sigma'$  ruhenden Moden, noch mit der Envelope-Näherung

$$\Psi(z, t) = A(z - v_g t) e^{i\Omega t}, \quad (6.3.1)$$

erklärt werden. Es zeigt sich aber, dass diese Näherung für die echte Phasenakkumulation nicht richtig ist, da diese maßgeblich vom selektierten Wellenvektor  $k$  getragen wird.

Wählt man sich nun ein beliebiges Soliton und setzt seine Phase zu 0, so kann man relativ zu diesem Soliton die Phasen anderer Solitonen indizieren. Ein Soliton mit derselben Phase wird mit '0' indiziert, eines mit einer Phasenverschiebung von  $\pi$  mit ' $\pi$ '. Diese Bezeichnungen sind aus [15] übernommen worden, um jede Mode im Folgenden entsprechend ansprechen zu können (vgl. Abbildung 6.10). Die mit (M) gekennzeichneten Moden akkumulieren in einem Umlauf die Phase  $\pi$  und werden erst nach einem erneuten Umlauf die Anfangsbedingungen erreichen. Ihre Beschreibung gelingt eben nicht mehr mit den in Abschnitt **6.2.3** eingeführten stehenden Lösungen im mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  mitbewegten Bezugssystem  $\Sigma'$  (Envelope-Näherung). Für diese Moden muss folgerichtig ein wohldefinierter Wellenvektor  $k$  existieren, der der Quantisierungsbedingung

$$kL = 2\pi n, \quad (n \neq 0) \in \mathbb{N}, \quad (6.3.2)$$

genügt, und die Phase entscheidend beeinflusst. Die Selektion eines Wellenvektors  $k \neq 0$  führt folglich auf sich mit der Geschwindigkeit  $v_s$  bewegende Solitonen und verändert

---

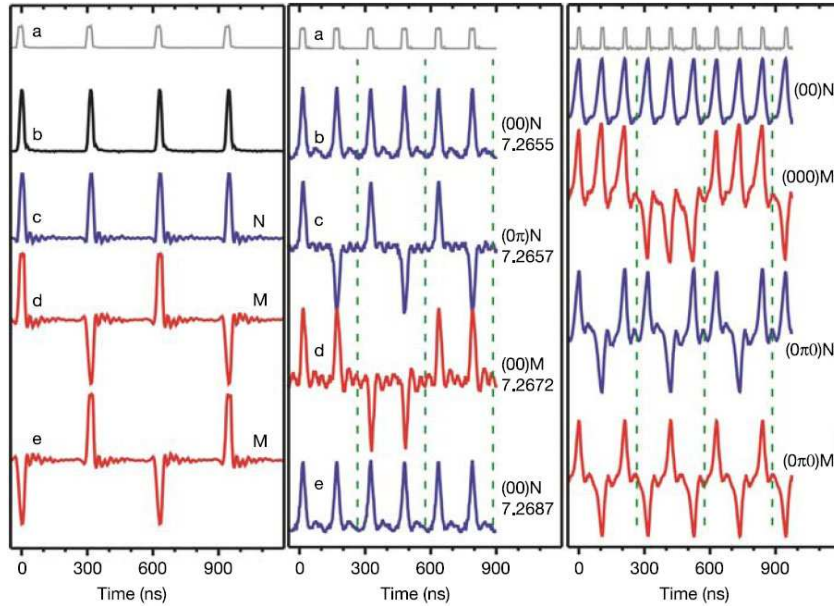
<sup>7</sup>Die Kurve e hat nach einem Umlauf die Phase  $(\kappa + 2)\pi$  akkumuliert, falls b und c die Phase  $\kappa 2\pi$  akkumulieren, vgl. **6.4.2**



gleichzeitig das Phasenverhalten der Lösungen. Mit der neu eingeführten Geschwindigkeit  $v_s$  wollen wir eine Abgrenzung dieser Lösungen von den Envelope-Lösungen schaffen, deren Geschwindigkeit wir mit  $v_g$  bezeichnet haben.

In welchem Frequenzbereich die entsprechend Abbildung 6.10 gefundenen Lösungen existieren, wird im folgenden Abschnitt erläutert werden.

Wir werden sehen, dass die Annahme der Galilei-Invarianz der ursprünglichen KNSG ohne Envelope-Näherung, eine zusätzliche Phasenakkumulation erfordert, die im direkten Zusammenhang zum selektierten  $k$ -Wellenvektor gesehen werden kann. Möbius-Solitonen können dann als Lösungen der Galilei-invarianten KNSG angesehen werden, die mit bestimmten Wellenvektor  $k \neq 0$  durch das nichtlineare Medium propagieren. Die Quantisierung dieser Wellenvektoren ist direktes Resultat der periodischen Randbedingungen. Basierend auf ihr sind natürlich auch nur ganz bestimmte Lösungen möglich, die man über die Anregungsfrequenz selektieren kann.



**Abbildung 6.10:** Zeitaufgelöste Wellenformen, die im nichtlinearen Ringsystem beobachtet werden können. **Linkes Bild:** Ein-Soliton-Mode für  $T_p = T_0$ . Es existiert nur eine, im mitbewegten Bezugssystem stehende Lösung, die mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  propagiert. Diese wird durch die Kurven b und c beschrieben und ist mit einem großen (N) für Normale Mode gekennzeichnet. Ihr Phasenverhalten ist wegen des speziell selektierten Wellenvektors  $k$  noch mit der Envelope-Näherung zu erklären. Kurve a beschreibt die Wellenform der Pumpenregung. Die Kurven d und e wurden in [15] als Möbius-Moden (M) bezeichnet. Diese Moden verlangen einen zweimaligen Umlauf im Ring, um zu den Anfangsbedingungen zurückzukehren. Ihre Phasenakkumulation ist mit der Envelope-Näherung nicht mehr begründbar. **Mittleres Bild:** Zwei-Soliton-Mode für  $T_p = \frac{T_0}{2}$ . Es existieren in einem kleinen Frequenzbereich zwei im mitbewegten Bezugssystem ruhende Solitonlösungen, die symmetrischen gemäß Kurve b und die antisymmetrischen gemäß Kurve c. Beide akkumulieren in einer Periode die Phase  $2\pi$ . Die Möbiusmode d akkumuliert nach einem Umlauf die Phase  $\pi$ . Die Zahlen beziehen sich auf die Anregungsfrequenz. Die Bezeichnungen der Moden sind analog zu [15] und im Text erläutert. **Rechtes Bild:** Drei-Soliton-Mode für  $T_p = \frac{T_0}{3}$ . In blau sind die Normalen Moden (N) dargestellt, in rot die sogenannten Möbius-Moden (M). Die Abbildung ist aus [15] entnommen.

## 6.4 Lösungen der KNSG ohne Envelope-Näherung

Die bisher betrachteten im mitbewegten Bezugssystem  $\Sigma'$  ruhenden Single- oder Multi-solitonen haben wir uns als Lösungen der KNSG plausibilisiert. Es waren die Lösungen  $A(z)e^{i\Omega t}$  mit Wellenvektor  $k \neq 0$  in der Envelope-Näherung, deren Verhalten und Stabilität unter periodischen Randbedingungen maßgeblich von der Differentialgleichung

$$\Omega A(z) - A''(z) - A^3(z) = 0 \quad (6.4.1)$$

bestimmt wurde. Als Envelope-Lösung der skalierten KNSG bewegen sich alle Lösungen wegen  $k \neq 0$  in  $\Sigma$  mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$ . Diese Lösungen müssen nun der Galilei-invarianz der KNSG Rechnung tragen und ihre Phase entsprechend dieser Invarianz-Forderung anpassen. Da mit der Envelope-Näherung die explizite  $k$ -Abhängigkeit der Phase vernachlässigt wird, ist ein weiteres Vorgehen mit der Evolutionsgleichung für ein Envelope-Soliton nicht angebracht. In dieser Näherung wird die Phase einzig von der Frequenz  $\Omega$  getragen und nach einer Periode stets eine Phase von  $2\pi$  akkumuliert. Das Experiment nach [15] belegt aber die Existenz des sogenannten Möbius-Solitons mit einer Phasenakkumulation von  $\pi$ , was die Vermutung nahe legt, dass in der Envelope-Näherung diese geometrische Phase zerstört wird. Um die exakte Phase des Solitons angeben zu können, muss die gewöhnliche KNSG

$$i\dot{\tilde{\Psi}} + \tilde{\Psi}'' + |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi} = 0, \quad (6.4.2)$$

Ausgangspunkt der Betrachtung sein, da ihre Lösungen die explizite Wellenvektorabhängigkeit der Phase fordern. Aus ihren Lösungen lassen sich die Envelope-Lösungen durch die Skalierung  $z = z' - v_g t$  zurückgewinnen. Wir werden sehen, dass es aufgrund der Galilei-Invarianz von (6.4.2) Lösungen gibt, die eine  $k$ -abhängige Phasenakkumulation verlangen, die man für das Envelope-Soliton nicht gewinnen kann.

### 6.4.1 Galilei-Invarianz der KNSG

Als Galilei-Transformation bezeichnet man den Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes ohne Berücksichtigung der Speziellen Relativitätstheorie. Falls dann  $z'$  und  $z$  bzw.  $t'$  und  $t$  die Ortskoordinaten und Zeitkoordinaten in den entsprechenden Systemen  $\diamond$  und  $\diamond'$  bezeichnen, so gilt für die Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} z' &= z - v_s t, \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Wir haben die Inertialsysteme mit  $\diamond$  bezeichnet, um sie von den entsprechenden Inertialsystemen  $\Sigma$  für Envelope-Solitonen abzugrenzen, die sich mit einer relativen Geschwindigkeit von  $v_g$  zueinander bewegen. Invarianz einer Gleichung unter dieser Transformation bedeutet also, dass man durch die Transformation (6.4.3) Lösungen aus der

ursprünglichen Lösung in  $\diamond$  findet, die diese Gleichung wieder erfüllen. Sucht man nun nach Lösungen der KNSG

$$i\dot{\tilde{\Psi}} + \tilde{\Psi}'' + \left| \tilde{\Psi} \right|^2 \tilde{\Psi} = 0, \quad (6.4.4)$$

so kann man einen Ansatz der Form

$$\tilde{\Psi} = e^{i\Phi} \psi(z - v_s t) \quad (6.4.5)$$

machen und die Phase  $\Phi$  gemäß obiger Invarianz bestimmen. Man erhält unter der Annahme  $\Phi'' = 0$  die essentiellen Bedingungen:

$$\begin{aligned} \Phi &= kz + \chi(t) \\ v_s &= 2\Phi' \quad \rightarrow \quad v_s = 2k, \\ \dot{\Phi} &= -\Phi'^2 \quad \rightarrow \quad \dot{\Phi} = -k^2 = -\frac{v_s^2}{4}. \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Also führt die Galilei-Invarianz der KNSG (6.4.4) direkt auf die Lösung

$$\tilde{\Psi} = \psi(z - v_s t) e^{i\left(\frac{v_s}{2}z - \frac{v_s^2}{4}t\right)}. \quad (6.4.7)$$

Mit jeder Lösung  $\psi(z - v_s t)$ , die die KNSG erfüllt, ist also auch  $\tilde{\Psi}$  eine Lösung. Für  $\psi(z - v_s t)$  macht man nun analog zu **6.2** den Ansatz

$$\psi(z, t) = A(z - v_s t) e^{i\Omega t}. \quad (6.4.8)$$

Dies führt sofort auf die fundamentale Differentialgleichung

$$\Omega A - A'' - A^3 = 0, \quad (6.4.9)$$

wie wir sie schon eingehend besprochen haben. Der einzige Unterschied manifestiert sich also in der Abhängigkeit von einer Bewegungskordinate  $z - v_s t$ . Das qualitative Aussehen im Ortsraum bleibt hingegen völlig gleich. In  $\diamond$  werden sich die invarianten Lösungen mit der Geschwindigkeit  $v_s$  bewegen und nach (6.4.7) eine zusätzliche Phase von  $\frac{v_s}{2}z - \frac{v_s^2}{4}t$  akkumulieren. Diese Phase ist aufgrund der Skalierungsvorschriften dimensionsbehaftet. Die Theorie ist insofern geschlossen, da wir für  $v_s = 0$  wieder die in  $\diamond$  ruhenden Lösungen erhalten, die eben keine zusätzliche Phase akkumulieren. Dies ist im Übrigen die einzige Lösung, die gleichzeitig Envelope-Lösung ist. Es sind uns an dieser Stelle eine Vielzahl von möglichen Lösungen der KNSG an die Hand gelegt. Die Periodischen Randbedingungen verkleinern, aufgrund der  $k$ -Quantisierung, den Lösungsraum. Es war für Multisolitonen dennoch stets möglich, in einem kleinen Frequenzbereich symmetrische und antisymmetrische ruhende Lösungen, in Abhängigkeit des Parameters  $\Omega$  und der Anfangsbedingungen, bei fester Periodenlänge  $L$  zu erhalten. Zusätzlich zu diesen Lösungen gibt es nun die, die sich durch den individuellen Wellenvektor  $k$  unterscheiden und bei denen zu klären bleibt, wie ihre Selektion stattfindet, d.h. beispielsweise für das

Experiment aus Abschnitt 6.3, warum sich nur für eine bestimmte Frequenz entsprechende Moden ausbilden.

Das qualitative Aussehen der Lösungen in  $A(z)$  und  $A(z - v_s t)$  ist völlig gleich, da sie derselben Differentialgleichungen genügen müssen. Einzig der Phasenfaktor gemäß der Geschwindigkeit  $v_s$  liefert den fundamentalen Unterschied zwischen den beiden Lösungen.

Dieser Phasenfaktor kann in der Envelope-Näherung nicht gewonnen werden. Man erhält mit der Evolutionsgleichung für Envelope-Solitonen nach Berücksichtigung der Galilei-Invarianz einen Phasenfaktor der Form  $\frac{v_s}{2}(z - v_s t) - \frac{v_s^2}{4}t$ , der ein völlig anderes Verhalten aufweist.

### 6.4.2 Selektionsmechanismus der Lösungen

Prinzipiell sind sämtliche Lösungen, die die KNSG nach (6.4.4) erfüllen als Moden in einem physikalischen System anregbar. Das impliziert die Existenz von Single- wie auch Multisolitonenkomplexen, die sich gemäß der invarianten Lösung

$$\tilde{\Psi} = e^{i\Omega t} e^{i\left(\frac{v_s}{2}z - \frac{v_s^2}{4}t\right)} A(z - v_s t) \quad (6.4.10)$$

schreiben lassen. Periodische Ränder, wie sie in jeglichen Ringsystemen anzusetzen sind, schränken diesen Lösungsraum nun erheblich ein. Zum einen werden sich nur für gewisse  $\Omega$  Lösungen stabilisieren, zum anderen führen sie zu einer Quantisierung des Wellenvektors  $k$ , was bei einer Periodizitätslänge von  $L$  bedeutet:

$$kL = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.4.11)$$

In  $\diamond$  stehende Lösungen für  $n = 0$  weisen in der Nähe des kritischen Peaks das charakteristische Symmetrieverhalten auf. Basierend auf einer zusätzlichen Geschwindigkeit  $v_s \neq 0$  für sich bewegende Solitonen, können sich diese Solitonen aber nur mit einem Phasenfaktor stabilisieren, der Gleichung (6.4.10) genügt. Mit der Quantisierungsbedingung für  $k$  lässt sich dieser zusätzliche Phasenfaktor schreiben zu:

$$\frac{v_s}{2}z - \frac{v_s^2}{4}t = \frac{v_s}{4}z = \lambda \frac{v_s L}{4}, \quad \lambda = \frac{z}{L}. \quad (6.4.12)$$

Hierbei haben wir den zur Periodenlänge relativen, dimensionslosen Ort  $\lambda$  eingeführt, den das Soliton mit der Geschwindigkeit  $v_s$ <sup>8</sup> nach der Zeit  $t$  erreicht. D.h. am Ort  $z$  wird sich genau diese Phase akkumulieren. Einsetzen der  $k$ -Quantisierung führt auf die Lösung:

$$\tilde{\Psi} = e^{i\Omega t} e^{i\lambda n \pi} A(z - v_s t), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.4.13)$$

Dies sind die allgemeinsten Lösungen, die in einem System mit Periodenlänge  $L$  möglich sind. Der Selektionsmechanismus dieser Lösungen geschieht nun über die Frequenz  $\Omega$

<sup>8</sup>Für  $k = 0$  findet keine Bewegung statt. Damit ist der Phasenfaktor in Gleichung (6.4.12) Null.

der parametrischen Anregung. Ruhende Lösungen erhält man bei Anregung mit genau der Frequenz  $\Omega$ , wobei die Anfangsbedingungen über  $H$ -Feld-Variation gemäß **6.3** so eingestellt werden können, dass in einem kleinen Frequenzbereich darüber entschieden wird, ob es zu symmetrischen oder antisymmetrischen Multisolitonenlösungen kommt. Vergrößern der Frequenz zerstört diese im realen Bezugssystem stehenden Moden und das Soliton wird keine Lösung der KNSG mehr sein. Kennzeichnet man die Abweichung von der kritischen Frequenz mit  $\Delta\Omega$ , so wird je nach Pumpsequenz ein Solitonenkomplex mit der Frequenz  $\Omega + \Delta\Omega$  erzeugt, der für gewisses  $\Delta\Omega$  wieder eine Lösung der KNSG darstellt. Dieses sind die Lösungen, die mit einer Geschwindigkeit  $v_s$  propagieren:

$$\tilde{\Psi} = e^{i(\Omega + \Delta\Omega)t} A(z - v_s t). \quad (6.4.14)$$

Nun muss diese Frequenz  $\Delta\Omega$  der zusätzlich akkumulierten Phase, basierend auf der Galilei-invarianten KNSG und der entsprechenden Quantisierungsbedingung der  $k$ -Wellenvektoren, Rechnung tragen, da alle möglichen Solitonenlösungen über (6.4.13) gegeben sind. Das bedeutet, dass wir fordern müssen:

$$\Delta\Omega t = \lambda n \pi. \quad (6.4.15)$$

Mit  $\lambda = \frac{t}{T_0} = \frac{z}{L}$ ,  $\Omega_{T_0} = \frac{2\pi}{T_0}$  und der dimensionslosen relativen Frequenz  $\mu = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_{T_0}}$  lässt sich die Forderung 6.4.15 umschreiben zu:

$$\mu \lambda 2\pi = \lambda n \pi \leftrightarrow 2\mu = n \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.4.16)$$

Es können im Ringsystem also nur Lösungen existieren, die der essentiellen Bedingung (6.4.16) genügen. Für  $n \neq 0$  sind dies stets sich mit der Geschwindigkeit  $v_s$  in  $\diamond$  bewegende Solitonenkomplexe. Beispielsweise bedeutet  $\mu = \frac{1}{2}$  eine  $k$ -Selektion gemäß der Quantisierungsbedingung für  $n = 1$ . Der Solitonenkomplex bewegt sich also in  $\diamond$  mit der Geschwindigkeit  $v_s = 2k = \frac{4\pi}{L}$ , ändert aber sein qualitatives Aussehen im Vergleich zu den stehenden Lösung nur in Bezug auf die Phase:

$$\tilde{\Psi} = e^{i\Omega t} e^{i\lambda\pi} A(z - v_s t). \quad (6.4.17)$$

Nach einer Periode  $L$ , also für  $\lambda = 1$  ist eine zusätzliche Phase von  $\pi$  akkumuliert worden, hat also insgesamt eine Phasenakkumulation um  $3\pi$  stattgefunden. Das Soliton muss ein weiteres Mal die Länge  $L$  durchlaufen, um wieder die Anfangsbedingungen zu erreichen. Dies ist genau die theoretische Beschreibung der Möbiusmoden aus [15]. Sie treten also immer dann auf, wenn  $n \in \mathbb{N}$  eine ungerade, natürliche Zahl ist, d.h. wenn für das Frequenzverhältnis  $\mu$  gilt:

$$\mu = \frac{\tau}{2} \quad \text{mit} \quad \tau \in \mathbb{N}, \quad 2 \nmid \tau. \quad (6.4.18)$$

Ist  $n \in \mathbb{N}$  eine gerade, natürliche Zahl, das Frequenzverhältnis  $\mu$  also ganzzahlig, werden zusätzlich zur gewöhnlichen Phasenakkumulation von  $2\pi$  pro Periodenlänge immer Vielfache von  $2\pi$  akkumuliert, womit die Anfangsbedingung für den Solitonenkomplex schon

nach einer Periode  $L$  wieder erreicht ist. Diese Moden haben für den experimentellen Aufbau gemäß [15] das Erscheinungsbild der gewöhnlichen stehenden Lösungen, unterscheiden sich aber in der zusätzlichen Propagationsgeschwindigkeit  $v_s = \frac{4n\pi}{L}, n \in 2\mathbb{N}$ . Die Existenz dieser Moden verifiziert sich in Abbildung 6.10 im mittleren Bild durch die  $(00)N$ -Mode, die mit **e** gekennzeichnet ist. Wenn die Moden in **b** und **c** mit einem Wellenvektor  $k$  selektiert wurden, der der Quantisierungsbedingung für  $n = \kappa, \kappa \in 2\mathbb{N}, \kappa \neq 0$  genügt<sup>9</sup>, so genügt die Mode in **e** der Quantisierungsbedingung für  $n = \kappa + 2$ . Die Möbiusmoden hingegen sind mit **d** gekennzeichnet. Welche Mode selektiert wird, hängt also entscheidend von der Pumpsequenz und der  $k$ -Quantisierung in Kombination mit der Wahl des Parameters  $\mu$  ab.

Damit ist klar, dass die Envelope-Näherung auch für die Normalen Moden nicht die exakte Phasenakkumulation nach einem Umlauf angeben kann. Für  $\kappa \neq 0$  und  $2 \mid \kappa$  wird zusätzlich zur Phasenakkumulation von  $2\pi$ , basierend auf der Frequenz  $\Omega$ , eine Phase von  $\kappa 2\pi$  akkumuliert. Dieses ist mit den Detektionsmethoden aus [15] nicht nachzuweisen, so dass diese Moden noch über die Envelope-Evolutionsgleichung beschrieben werden können. Im Fall der Möbius-Moden ist die  $k$ -Abhängigkeit der Phase aber von entscheidender Bedeutung, so dass die Envelope-Näherung ihre Berechtigung verliert. Zu diesem Ergebnis gelangt man auch, wenn man sich aus den Lösungen (6.4.10) mit der Skalierungsvorschrift  $z' = z - v_g t$  die entsprechenden Envelope-Lösungen berechnet.

### 6.4.3 Anregbare Solitonenkomplexe im Ringsystem

Dieser Abschnitt soll die Ausführungen der vorherigen Abschnitte nochmals zusammenfassen und in einer Art Schaubild zu einer adäquaten Theorie vereinigen. In ihr sind die möglichen Lösungen, die der KNSG unter periodischen Randbedingungen gehorchen, zusammengestellt. Ihre Selektion ist entscheidend abhängig von der anregenden Frequenz  $\Omega$ , der verallgemeinerten Energie  $C$ , die über die Anfangsbedingungen festgelegt wird, und natürlich der  $k$ -Quantisierung, die direktes Resultat aus der endlichen Länge des periodischen Ringsystems ist. Als Ausgangspunkt kann man die skalierte KNSG ohne Envelope-Näherung betrachten:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + |\Psi|^2 \Psi = -i\gamma \Psi + h e^{2i\Omega t} f(z, t) \Psi^*. \quad (6.4.19)$$

An dieser Stelle werden wir die Skalierungsvorschriften nicht mehr explizit niederschreiben, da sie völlig analog zu Abschnitt 4.5 verlaufen. Da sich Dämpfung und Anregung an den Stellen der ortslokalisierten, parametrischen Anregung kompensieren sollen, können die Störterme auf der rechten Seite in (6.4.19) vernachlässigt werden und somit direkt Lösungen angenommen werden, die der Frequenz der Anregung Rechnung tragen. Wir weisen nochmals darauf hin, dass mit doppelter Frequenz  $2\Omega$  Lösungen mit der Frequenz  $\Omega$  angeregt werden. Außer zur Beschreibung der Anfangsbedingungen, bedarf es also keiner weiteren Betrachtung der Störterme in Gleichung 6.4.19, da wir uns nur für ein

<sup>9</sup> $\kappa \neq 0$  ist zwingende Voraussetzung, um Multisolitonen mit einer einzigen lokalisierten Anregungsquelle zu erzeugen.

qualitatives Verhalten der Solitonenkomplexe an gewissen Orten des Ringsystems aus [15] interessieren wollen. Eine exakte, zu jeder Zeit und an jedem Ort adäquate Beschreibung der vollständigen Dynamik, ist aber unter Hinzunahme der Störterme jederzeit möglich. Die genaue Form der Störterme sei dabei der Versuchscharakteristik vorbehalten; Sie sollten aber eine ähnliche Form, wie in Gleichung (6.4.19) haben. In  $\diamond^{10}$  sind also die möglichen Lösungen der KNSG,

$$i\dot{\Psi} + \Psi'' + |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (6.4.20)$$

die über eine parametrische Anregung mit wohldefinierter Frequenz  $\Omega$  angeregt werden, aufzufinden, entsprechend zu charakterisieren und zu bezeichnen. Schließlich existieren, wie schon mehrfach angesprochen, Lösungen der Form

$$\Psi(z - v_s t, t) = A(z - v_s t) e^{i\Omega t} e^{i\Phi}, \quad (6.4.21)$$

wobei die zusätzliche Phase  $\Phi$  der Galilei-Invarianz der KNSG Rechnung trägt und als notwendige Akkumulation sich im realen Bezugssystem  $\diamond$  bewegender Solitonenkomplexe betrachtet werden muss. In  $\diamond$  stehende Lösungen dürfen diese Akkumulation nicht haben. Sie sind die einzigen Lösungen, die schon von der Envelope-Evolutionsgleichung exakt wiedergegeben werden, da die  $k=0$ -Mode gleichzeitig Envelope-Funktion ist.

Es ist letztlich diese Phase, die die zunächst mystisch erscheinenden Möbius-Solitonen beschreiben kann. Mit der Geschwindigkeit  $v_s$  wird, wie oben, die Geschwindigkeit der Solitonenkomplexe in  $\diamond$  bezeichnet. Das Aussehen der Solitonenkomplexe wird hauptsächlich von der Größe  $A(z - v_s t)$  getragen. Unter der physikalisch sinnvollen Ausnutzung keiner expliziten Störtermberücksichtigung, muss diese Größe der fundamentalen, nichtlinearen Differentialgleichung

$$\Omega A - A'' - A^3 = 0, \quad (6.4.22)$$

mit dem Selektionsparameter  $\Omega$  und dem Energieparameter  $C$ , der von den Anfangsbedingungen für  $(A_0, A'_0)$  festlegt wird, gehorchen.

Die Quantisierung des Wellenvektors  $k$  lässt nur diskrete zusätzliche Phasen  $\Phi$  zu, die über die Anregungsfrequenz  $\Omega + \Delta\Omega$  selektiert werden können. Ausgehend von den stehenden Lösungen, erhält man bei Erhöhung der entsprechend Gleichung (6.4.16) eingestellten, diskreten Frequenz, abwechselnd sich bewegende Lösungen, die eine Phasenakkumulation von  $\pi$  oder  $2\pi$  nach einem vollen Periodenumlauf aufweisen. Stehende Lösungen können mit den experimentellen Methoden nach [15] jedoch nicht verifiziert werden. So besitzt jeder Solitonenkomplex im Experiment einen wohldefinierten Wellenvektor  $k$ .

Das Schaubild 6.11 verdeutlicht die Vorgehensweise beim Aufsuchen der zunächst relativ spektakulär erscheinenden Möbius-Solitonen. Die zusätzliche Phasenakkumulation für sich bewegenden Solitonen ist direktes Resultat aus der Wellenvektor-Abhängigkeit der Phase. Derartige Solitonen werden direkt über die parametrische Anregung mit Frequenz  $\Omega + \Delta\Omega$  selektiert. Es muss des Weiteren darauf hingewiesen werden, dass es

---

<sup>10</sup> $\diamond$  und  $\Sigma$  bezeichnen das Reale Bezugssystem.



im Fall eines Multisolitons, bestehend aus zwei Solitonen in einer Periode  $L$ , keinen Unterschied macht, ob man Möbius-Solitonen aus symmetrischen oder antisymmetrischen stehenden Lösungen erzeugt, da sie physikalisch völlig identisch sind, wie man sich durch Verschiebung des Ursprungs der Zeitskala um  $\frac{T_0}{2}$  sofort klar machen kann. Erst Multi-Möbius-Solitonen, bestehend aus mehr als zwei Solitonen, müssen in dieser Hinsicht wieder unterschieden werden. Für Singlesolitonen war diese Trennung ja schon im stehenden Fall gänzlich überflüssig. Die Nomenklatur aller Solitonen ist analog zu [15] vollzogen worden. Möbius-Solitonen sind also kein Resultat, welches aus störungstheoretischen Betrachtungen gewonnen werden kann, vielmehr existieren sie immer als Lösungen der KNSG unter periodischen Randbedingungen und werden schlicht über die Frequenz  $\Omega + \Delta\Omega$  der parametrischen Anregung selektiert. Die Dynamik eines jeden einzelnen Solitons kann natürlich wieder unter den Störtermbetrachtungen aus Abschnitt 5 gewonnen werden. Im Wesentlichen kommt es dabei auf die Kompensation von Dämpfung und Anregung an, die dem Solitonenkomplex ein langlebiges Verhalten garantieren kann. Wir haben uns in diesem Abschnitt nur für das qualitative Verhalten aller Solitonen interessiert, die vollständige dynamische Auswertung wurde nicht vollzogen.

Das Prinzip der Galilei-Invarianz ist ein für viele Systeme allgemeingültiges Konzept. Wir haben dies für die KNSG ausgenutzt und verweisen darauf, dass es diese 'gebrochene Symmetrie' auch für Solitonen-Komplexe in optischen Medien geben muss. Phasenakkumulation für sich bewegende Solitonen, die diesem Typ Gleichung gehorchen, ist also direkte Konsequenz aus dieser Invarianz. Während für die KNSG die Existenz von Möbius-Solitonen und geometrischer Phase nachgewiesen werden kann, ist diese Eigenschaft bei der Evolutionsgleichung für ein Envelope-Soliton nach (6.2.8) offensichtlich nicht gegeben. Dieses basiert auf der expliziten Vernachlässigung der Wellenvektor-Abhängigkeit in der Envelope-Solitonen-Phase. Envelope-Solitonen beschreiben somit nur das qualitative Aussehen eines Wellenzuges. Die zugrundeliegende Evolutionsgleichung kann nicht für Phasen-selektive Experimente herangezogen werden, da bei dieser Näherung geometrische Phasen zerstört werden können.

Da der experimentellen Aufbau nach [15] nur für sich bewegende Solitonenkomplexe ( $k \neq 0$ ) funktioniert, sind sowohl die Phasen der Möbius, wie auch der Normalen Moden über die Envelope-Näherung nicht exakt wiedergegeben. Einzig für die Möbius-Moden macht sich dieses jedoch bemerkbar. Ihre zusätzlich akkumulierte Phase von  $\pi$  ist mit der Envelope-Evolutionsgleichung nicht mehr aufzufinden.

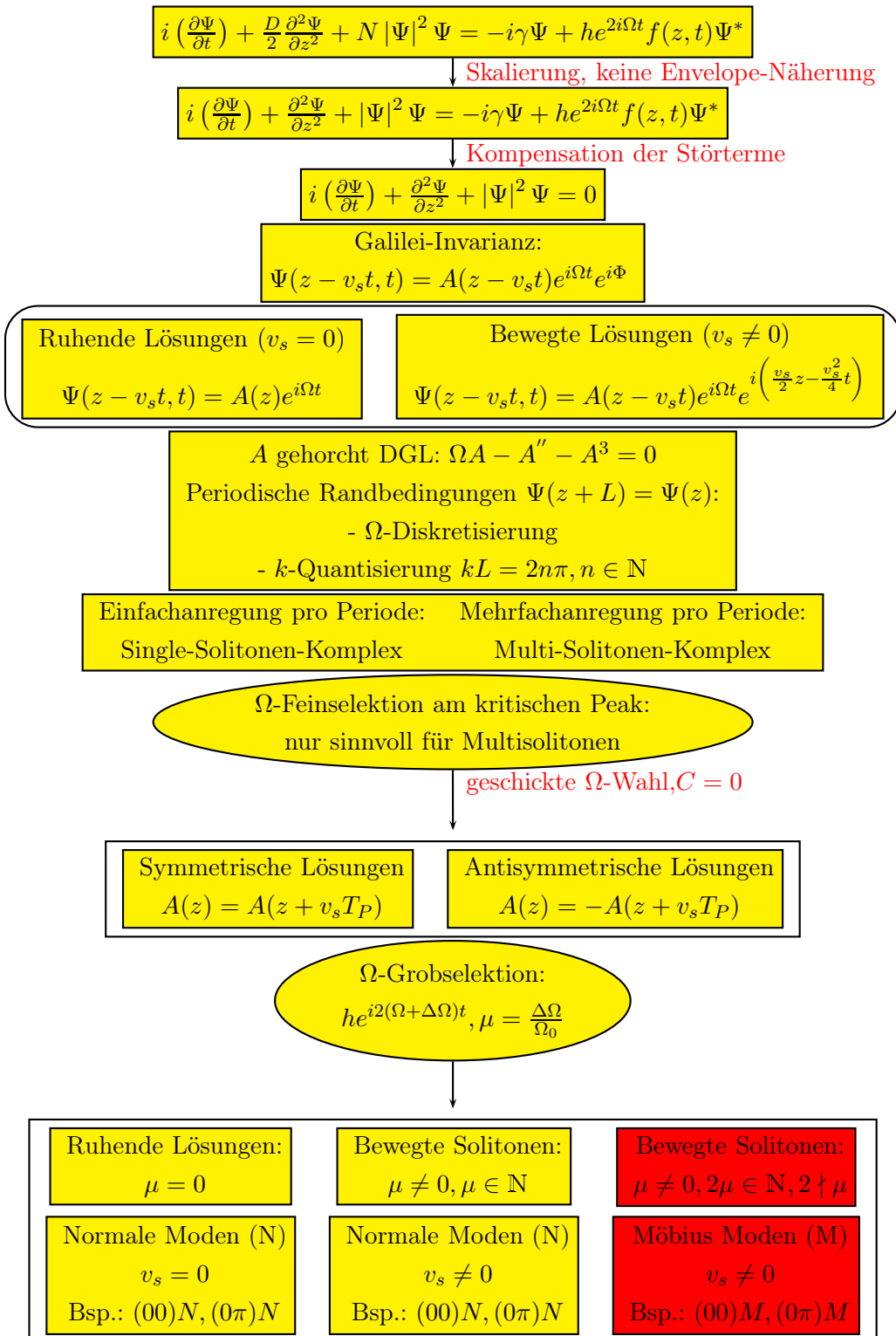


Abbildung 6.11: Schaubild zum Auffinden der Möbius-Solitonen.

## 7 Ausblick

Mit dieser Arbeit konnte ein Einblick in ferromagnetische, raumzeitlich dynamische Systeme gewonnen werden. Basierend auf der raumzeitlichen Dynamik eines einzelnen Spinvektors, der der LLG gehorcht, ist es uns gelungen, über die KNSG die Spinwellenanregungen oder Magnonen zu begründen und ihr Verhalten aufzuzeigen. Dieser Übergang kann nur vollzogen werden, wenn die Spins miteinander wechselwirken. Die Dipol-Dipol-Wechselwirkung reicht aber nicht aus, um gewisse Anregungsprozesse zu erklären, so dass es notwendig war, den quantenmechanischen Term der Austauschwechselwirkung zu berücksichtigen. Da diese Wechselwirkung kurzreichweitig, aber vergleichsweise stark ist, kann man die in einem Ferromagneten anregbaren Moden in austauschdominierte und dipoldominierte zerlegen. Ebenso gibt es einen Wellenlängenbereich, in dem beide Wechselwirkungen berücksichtigt werden müssen. Für eine exemplarisch dünne Schicht sind diese Modenprofile hergeleitet worden und wir haben gesehen, dass im dipoldominierten Wellenlängenbereich, je nach Richtung des externen Magnetfeldes und relativer Orientierung zum Wellenvektor  $\mathbf{k}$ , MSFVM, MSBVM und MSSM als Moden anregbar sind. Gerade die MSBVM ist aufgrund der negativen Dispersion eine sehr interessante Mode, da sich in ihr, gemäß dem Lighthill-Kriterium Dispersion, Beugung und Nichtlinearität kompensieren können, so dass es zu einem langlebigen Wellenpaket, der sogenannten Spinwellenkugel ('Micro-Wave-Bullet'), kommen kann. Es sei in diesem Zusammenhang auf das Buch 'Spin Dynamics in Confined Magnetic Structures 1' verwiesen [23]. In ihm wird auch eine sehr schöne Möglichkeit zur Detektion entsprechender Spinwellenpakete vorgestellt, die sogenannte 'Brillouin-Light-Scattering-Methode' (BLS).

Das Gebiet von Spinwellenanregungen und Solitonen ist schließlich bei Weitem noch nicht vollständig verstanden und man findet immer wieder Fragestellungen, die einer genaueren theoretischen Betrachtung bedürfen. Das Möbius-Soliton ist hierbei nur ein kleines Problem in diesem weitreichenden Feld. Als direktes Resultat der Galilei-Invarianz der KNSG ohne Envelope-Näherung ließ sich eine Lösung formulieren, in der die Phase entscheidend von dem selektierten Wellenvektor  $\mathbf{k}$  getragen wurde. Für  $k \neq 0$  sind dann in einem periodischen Ringsystem Solitonen zugelassen, die nach einem Umlauf eine zunächst ungewöhnlich erscheinende Phasenakkumulation von  $\pi$  erhalten. Die Selektion der entsprechenden Moden (Normale Moden oder Möbius-Moden) wird durch diskrete Frequenzvariation der parametrischen Anregung erreicht. Obwohl die Möbius-Moden experimentell bis heute nur für Spinwellenanregungen beobachtet wurden, muss es entsprechende Moden auch in optischen Systemen geben. Zudem sei darauf verwiesen, dass auch Lösungen anderer Galilei-invarianter Wellengleichungen entsprechende Phasenakkumulationen aufweisen können. Eine mögliche zukünftige Aufgabe besteht also darin, dieses experimentell nachzuweisen.

Die vollständige dynamische Beschreibung aller möglichen Lösungen kann letztlich wieder störungstheoretisch vollzogen werden. Dabei wird die entsprechend  $k$ -selektierte Mode wiederum den physikalisch sinnvollen Termen der Dämpfung und parametrischen Anregung unterworfen. Rechnerisch aufwendig wird die vollständige dynamische Beschreibung für Anregungsstreifen endlicher Breite, da viele der auftretenden Fundamentalintegrale schwierig auszuwerten sind. Gleiches gilt für Solitonen mit relativ großer Varianz, da damit auch der Wirkungsbereich für die parametrische Anregung vergrößert wird. Dennoch kann in dieser vollständigen Beschreibung eine zukünftige Aufgabe liegen.

Die Physik der Spinwellen und Solitonenkomplexen ist insofern interessant, da sich aufgrund der, im Vergleich zu Lichtwellen erheblich geringeren Geschwindigkeit, eine Vielzahl von Problemen zeitlich leichter auflösen lassen. Dieses Forschungsgebiet kann quasi als Vorreiter für optische Systeme dienen, bis Methoden entwickelt werden, die entsprechende Phänomene auch in diesen detektieren können.

Gleichwie ist das Verständnis der Spindynamik in Ferromagneten auch für anwendungsorientierte Aufgaben nicht zu unterschätzen, sei es im Bereich der Datenspeicherung <sup>1</sup>, des Datentransports oder der Oberflächenstrukturierung.

---

<sup>1</sup>Es sei an dieser Stelle auf den MRAM-Speicher verwiesen, dessen Entwicklung in den letzten Jahren stark vorangetrieben wurde.

# Anhangskapitel zur numerischen Visualisierung

# A Numerische Simulation

Es ist nicht verwunderlich, dass der Nichtlinearen Physik und Komplexen Dynamik erst in den letzten Jahrzehnten ein so großes Augenmerk zugekommen ist. Diese Entwicklung korreliert stark mit den immer besser werdenden Rechnern und der damit verbundenen Möglichkeit, Daten und Gleichungen numerisch auszuwerten und eingehend zu veranschaulichen.

Nichtlineare Physik und Komplexe Dynamik sind, wie der Name schon beinhaltet, oftmals äußerst schwer zu behandelnde physikalische Probleme. Während in der linearen Physik eine analytische Lösung meist zu ermitteln ist, bedarf es in der Nichtlinearen Physik sehr oft anderer Zugänge, um die Problemstellungen zu lösen. Phasenräume, Trajektorien, Lyapunov-Exponenten, Bifurkationszenarien und Chaos sind dabei nur eine kleine Zusammenstellung dieser neu zu ergründenden Möglichkeiten. Eine, in ihrer Gesamtheit geschlossene Lösung einer nichtlinearen Bewegungsgleichung anzugeben, ist in der Regel jedoch nicht möglich. Gerade aus diesem Grund bleibt dem Physiker meist nur die Möglichkeit, ein Problem numerisch auszuwerten. Dabei sind beliebig komplizierte Szenarien denkbar und gerade diese Komplexität erweist sich als limitierender Faktor, die Problematik in den Griff zu bekommen.

Der Rechner ist in der heutigen Zeit weitaus mehr als eine reine Datenauswertungsmaschine. Vielmehr ist er aufgrund der stetig größer werdenden Rechenleistung auch in der Lage, physikalische Simulationen durchzuführen und so ganze Datensätze zu produzieren. Gleichungen, die einem vorher keine Möglichkeit zur analytischen oder grafischen Auswertung gelassen haben, lassen sich numerisch plötzlich visualisieren und auswerten. Da sich kontinuierliche, dynamische Physik im Wesentlichen über die Lösung von Differentialgleichungen definiert, kommt der numerischen Lösung eben dieser Gleichungen, gewöhnlich oder partiell, eine besondere Bedeutung zu. Hat man das Rüstzeug zur numerischen Auswertung von derartigen Differentialgleichung einmal in der Hand, lässt es sich natürlich auf andere DGL's übertragen, um in den entsprechenden physikalischen Teilbereichen theoretische Vorhersagen machen zu können. Gleichsam kann die Numerik natürlich auch dazu dienen, ein gewonnenes Modell zu verifizieren und seine Tragweite für gewisse Bereiche abzuschätzen.

Dennoch birgt die numerische Simulation und Auswertung komplexer Systeme auch gewisse Gefahren in sich. Sämtliche Numerik basiert auf einem approximativen System. Es gibt beispielsweise keine Möglichkeit, eine DGL exakt zu simulieren. Eine exakte mathematische Lösung ist somit niemals numerisch zu gewinnen, vielmehr sind alle gewonnenen Lösungen fehlerbehaftet. Dabei ist der gemachte Fehler natürlich umso größer, je approximativer die Numerik arbeitet. Letztendlich heißt das, dass die numerisch gewonnenen Daten immer noch den physikalischen Maßstäben der Beobachtbarkeit, Reproduzierbarkeit

und gewissen Stabilität unterliegen müssen. Man würde vielleicht sagen, dass die Determiniertheit des Systems durch die Ungenauigkeit der Numerik limitiert ist. Es besteht immer die Möglichkeit des numerischen Chaos, welches eben nicht mehr der Determiniertheit der Gleichung unterliegt. Schuster hat diesen Sachverhalt 1994 so formuliert: "Dieses Argument zeigt, wie Chaos durch Verstärkung des inneren numerischen Rauschens von irrationalen Zahlen entstehen kann..."

Numerisch erzeugte Ergebnisse sind also stets mit Vorsicht zu genießen und bedürfen immer einer äußerst kritischen Betrachtung. Ein Abgleich mit dem Experiment ist unumgänglich. Gerade für ein physikalisches Langzeitverhalten ist die Ordnung des gemachten Fehlers möglichst klein zu halten und ein Verfahren zu wählen, dass der Kleinheit dieser Ordnung in akzeptabler Weise Rechnung trägt. Gleiches gilt natürlich auch im Ortsraum, der in der Numerik als diskretes Gitter betrachtet werden muss. Hier bestimmt der Abstand zweier Gitterpunkte das räumliche Auflösungsvermögen numerischer Simulationen. Im Folgenden soll ein mögliches Verfahren zur numerischen Simulation von partiellen Differentialgleichungen vorgestellt werden und in expliziter Weise auf die partielle DGL der projizierten Landau-Lifshitz-Gleichung, wie sie uns in (2.3.17) begegnet ist, angewendet werden.

## A.1 Zeitliche Integration

Die große Klasse der partiellen Differentialgleichungen unterscheidet sich von den gewöhnlichen in der Hinsicht, dass sie anstelle einer unabhängigen Variabel zwei besitzt, beispielsweise Ort  $\mathbf{r}$  und Zeit  $t$ , wobei  $\mathbf{r}$  ein  $n$ -komponentiger Vektor ist, der die Dimension des Ortsraumes charakterisiert. Eine der einfachsten partiellen DGL's in der Physik ist die Wärmeleitungsgleichung, die die Temperaturverteilung einer Probe durch Wärmeleitung oder durch Diffusion die Ausbreitung eines gelösten Stoffes beschreibt:

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = a \Delta u(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.1.1})$$

Terme  $\propto \Delta u(\mathbf{r}, t)$  werden in der Physik in Anlehnung an die Wärmeleitungsgleichung Diffusionsterme genannt. Gleichung (A.1.1) steht beispielhaft für die allgemeinste Form von Bewegungsgleichungen, nämlich die des Typs

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)). \quad (\text{A.1.2})$$

Gleichung (A.1.2) ist in ihrer einfachen Struktur dennoch fundamental für sämtliche dynamischen Prozesse in der Linearen und Nichtlinearen Physik. Über die rechte Seite  $\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t))$  ist keine explizite Aussage gemacht, mit Ausnahme der funktionalen Abhängigkeit von  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .  $\mathbf{F}$  kann aus linearen wie nichtlinearen Termen bestehen, also letztlich als Abgrenzungsmaßstab der Nichtlinearen von der Linearen Physik genutzt werden. Die strukturelle Übereinstimmung aller partieller Differentialgleichungen gemäß (A.1.2) zeigt schon, wie mächtig numerische Integrationen sein können, wenn man ihre Fehler minimiert. Das Grundgerüst der numerischen Integration lässt sich auf alle Gleichungen

anwenden, d.h. nachdem man den Code zur numerischen Integration einer partiellen Differentialgleichung programmiert hat, steht einem quasi auch die Physik anderer partieller DGL's zur Verfügung.

Wir wollen Gleichung (A.1.2) zeitlich numerisch integrieren und müssen dazu die Zeit diskretisieren. Es gibt nun eine Reihe von Möglichkeiten, die zu betrachtende Größe  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  zu einem späteren Zeitpunkt  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \Delta t)$  zu bestimmen. Dabei kommt es entscheidend auf den Fehler an, der beim entsprechenden Diskretisierungsverfahren gemacht wird. Die Definition der mathematischen Ableitung lautet:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}. \quad (\text{A.1.3})$$

Für kleine  $\Delta t$  ist eine Näherung durch den Differenzenquotienten möglich. Man beachte jedoch, dass der Fehler umso größer ist, je größer der Zeitschritt gewählt wird.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}. \quad (\text{A.1.4})$$

Umstellen und Einsetzen von (A.1.2) zeigt, wie sich  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  von  $t \rightarrow t + \Delta t$  entwickelt hat:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \Delta t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) + O(\Delta t)^2. \quad (\text{A.1.5})$$

Das so entwickelte Basisverfahren zur zeitlichen Integration wird Euler-Verfahren genannt. Es ist mit einem Fehler der Ordnung  $O(\Delta t)^2$  behaftet [43]. Der Fehler lässt sich durch andere Verfahren drastisch minimieren, dennoch bietet das Euler-Verfahren in vielen Fällen eine adäquate Möglichkeit der numerischen Integration und zeigt, wie man z.B. eine gewöhnliche DGL auf einfachste Art implementieren kann. Wir werden zur Implementierung von Gleichung (2.3.17) u.a. ein Verfahren verwenden, welches einen Fehler der Ordnung  $O(\Delta t)^5$  aufweist, das sogenannte Vierte Ordnung-Runge-Kutta-Verfahren. Ausgangspunkt ist die Gleichung (A.1.5), in der man versucht, den Term  $\propto \Delta t$  so zu erweitern, dass man die Fehlerordnung minimiert. Eine Möglichkeit besteht in einer größeren Anzahl von Stützstellen, die sich sowohl der vollen, als auch der halben Diskretisierungsbreite  $\Delta t$  bedienen. Es wären natürlich auch noch mehr Stützstellen denkbar, die den Fehler weiter minimieren würden, aber für eine Vielzahl von Gleichungen die Stabilität nicht mehr entscheidend beeinflussen und zu einer erheblich längeren Rechenzeit führen würden [48]. Allgemeine Formeln zum Runge-Kutta-Verfahren lassen sich in jedem Numerikbuch finden.

Für ein festes  $\mathbf{r}$  muss man zur numerischen Implementierung vier zusätzliche Nebenrechnungen machen. Wir definieren (vgl. [43], [40], [48]):

$$\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_0, t_N) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t_N))|_{\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t_N)} \Delta t, \quad (\text{A.1.6})$$

$$\mathbf{k}_2(\mathbf{r}_0, t_N) = \mathbf{F}\left(\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t_N) + \mathbf{k}_1(\mathbf{r}_0, t_N) \frac{1}{2}\right) \Delta t, \quad (\text{A.1.7})$$

$$\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_0, t_N) = \mathbf{F}\left(\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t_N) + \mathbf{k}_2(\mathbf{r}_0, t_N) \frac{1}{2}\right) \Delta t, \quad (\text{A.1.8})$$

$$\mathbf{k}_4(\mathbf{r}_0, t_N) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t_N) + \mathbf{k}_3(\mathbf{r}_0, t_N)) \Delta t. \quad (\text{A.1.9})$$



Mit entsprechenden Gewichtungsfaktoren kann man über dieses Verfahren den Funktionswert  $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t + \Delta t)$  bestimmen. Es gilt (vgl.[43],[40],[48]):

$$\mathbf{u}(t + \Delta t)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = \left[ \mathbf{u}(t) + \frac{1}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + O(\Delta t)^5 \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}. \quad (\text{A.1.10})$$

Die Genauigkeit in diesem Verfahren ist von vierter Ordnung und damit drei Ordnungen besser als beim Euler-Verfahren. Gerade im Langzeitlimites macht sich dies stark bemerkbar. Zeitschritte können größer gewählt und damit Rechenzeit gespart werden. Im Fall der numerischen Simulation von Spinsystemen ist ein Euler-Verfahren genau dann ausreichend, wenn es in der Simulation nicht mehr auf fein aufzulösende Strukturen ankommt, beispielsweise falls ein externes Feld das System derart dominiert, dass die feineren Austauschwechselwirkungsprozesse nicht mehr zur Geltung kommen.

## A.2 Das Pseudospektralverfahren

Wir haben in **A.1** Möglichkeiten zur zeitlichen Integration einer Differentialgleichung kennengelernt. Die Frage bleibt nun zu klären, wie eine partielle Differentialgleichung im Ortsraum behandelt werden kann. Die Funktion  $\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t))$  kann schließlich noch beliebige Ortsabhängigkeiten enthalten. Zu klären bleibt also, wie man z.B. Ableitungen im Ortsraum numerisch nähern kann. Die Diskretisierung des Ortsraumes erfolgt dabei über ein sogenanntes Gitter. Nehmen wir z.B. eine typische Größe  $u(x, y, t)$ , die nur von zwei Raumkoordinaten  $x$  und  $y$  abhängt. Abhängigkeiten von mehr als zwei Ortskoordinaten sind schwer zu implementieren und rechnerisch äußerst aufwendig; eine 3-dimensionale Darstellung ist dann natürlich nicht mehr möglich und man müsste auf projektive Maßnahmen zurückgreifen.

Die Ortsdiskretisierung für  $u(x, y, t)$  ist damit eine Aufteilung der 2d-Ebene in diskrete Gitterpunkte. Die Auflösung des Gitters ist durch die Seitenlängen und die Anzahl der Gitterpunkte bestimmt. Für ein quadratisches Gitter der Länge  $256LE$  mit  $N \times N = 2^8 \times 2^8$  Gitterpunkten beträgt das Auflösungsvermögen beispielsweise  $\Delta x = \frac{256LE}{2^8} = 1LE$  in x- und y-Richtung. Es besteht damit die Möglichkeit, Ortsableitungen über das Gitter zu berechnen. Für die erste Ableitung erhält man aber immer eine Sekantensteigung. Eine exakte Tangentensteigung in einem Punkt zu berechnen, ist auch bei noch so hoher Auflösung in der Numerik nicht möglich. In vielen Fällen erweist sich die Fouriertransformation als sehr hilfreich, um gewissen Problemen im Ortsraum aus dem Weg zu gehen. Gerade die einfache Darstellung der Ortsableitung im Fourierraum ist ein nützliches Mittel, Differentialgleichungen geschickt zu implementieren, zumal hier keine Diskretisierungsfehler entstehen können, wie etwa bei der Methode der finiten Differenzen. Das Pseudospektralverfahren trägt seinen Namen aber aufgrund der Tatsache, dass in ihm sowohl Operationen im Ortsraum wie auch im Fourierraum durchgeführt werden, wobei die FFT entscheidend für die Rechenzeit dieses Verfahrens ist. Nach [43] skaliert sie bei  $M_{gesamt} = N \times N$  Gitterpunkten mit  $M_{gesamt} \log M_{gesamt}$ .

### A.3 Gewöhnliche Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ist ein physikalisches Hilfsmittel, die es erlaubt, eine physikalische Größe in einen anderen Raum zu transformieren, in welchem sie sich beispielsweise besser plausibilisieren lässt. Das Hin- und Herwechseln zwischen den beiden Räumen, wobei üblicherweise der Ortsraum in den Wellenvektorraum und der Zeitraum in den Frequenzraum transformiert wird, erlaubt es, gewisse Operationen im entsprechenden Raum zu vereinfachen.

Die Ortsraumdiskretisierung hatte die Aufteilung in einzelne Gitterpunkte gefordert, die es unmöglich machen, Tangentensteigungen zu berechnen. Mit der Fouriertransformierten lässt sich nun aber eine exakte alternative Darstellung im Fourierraum finden, was bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen einen immensen Vorteil bieten kann.

Ein weiteres Problem in der Ortsdiskretisierung liegt in der Betrachtung der Ränder. Oftmals sind für physikalische Systeme spezielle Randbedingungen gegeben, die die Entwicklung der betrachteten Größe dominieren. Die Realisierung entsprechender Randbedingungen ist oftmals nicht einfach zu handhaben. Wählt man ein genügend großes Gitter, kann man die Randeffekte vernachlässigen und zu den numerisch einfacher zu handhabenden periodischen Randbedingungen übergehen, d.h. für ein Gitter der Länge  $L_x$  in  $x$ -Richtung und  $L_y$  in  $y$ -Richtung gilt:

$$u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r} + \mathbf{L}, t). \quad (\text{A.3.1})$$

Eine periodische Funktion lässt sich in eine Fourierreihe entwickeln, d.h. wir können für  $u(\mathbf{r}, t)$  schreiben:

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\mathbf{k}_n \mathbf{r}}. \quad (\text{A.3.2})$$

$\alpha_n \in \mathbb{C}$  bezeichnen die Entwicklungskoeffizienten der Fourierreihe, die sich in zwei Dimensionen bestimmen lassen zu:

$$\alpha_n = \frac{1}{|\mathbf{L}|^2} \int_0^L \int_0^L e^{-i\mathbf{k}_n \mathbf{r}} u(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (\text{A.3.3})$$

Periodische Randbedingungen führen zu einer Diskretisierung des Wellenvektors  $\mathbf{k}$ . Aufgrund der diskreten Ortsraumdarstellung existiert ein maximal auflösbarer Wellenvektor und die zunächst unendliche Reihe geht in eine endliche Summe über:

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-m}^m \alpha_n e^{i\mathbf{k}_n \mathbf{r}}. \quad (\text{A.3.4})$$

Im Folgenden wird für die Fouriertransformierte einer Größe  $u$  stets das 'Tildesymbol  $\tilde{u}$ ' verwendet werden. Der Vorteil der Fouriertransformierten besteht in der Simplifizierung der Ableitungen. So liefert die Ortsableitung im Fourierraum den Zusammenhang:

$$\mathcal{F}(\nabla u(\mathbf{r})) = i\mathbf{k}\tilde{u}(\mathbf{k}). \quad (\text{A.3.5})$$

## A.4 Verallgemeinertes Pseudospektralverfahren

Gegeben sei im Folgenden eine Differentialgleichung, die die Dynamik der Größe  $u(\mathbf{r}, t)$  beschreibt. Nach Aufteilung in linearen Anteil  $\mathcal{L}$  und nichtlinearen Anteil  $\mathcal{N}$  ergibt sich die allgemeine Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{r}, t) = \mathcal{L}(u(\mathbf{r}, t)) + \mathcal{N}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.4.1})$$

$\mathcal{L}$  und  $\mathcal{N}$  können in beliebiger Form vorliegen. Die Fouriertransformation transformiert nun diese Operatoren in den Fourierraum:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{u}(\mathbf{k}, t)) + \mathcal{F}[\mathcal{N}(u(\mathbf{r}, t))]. \quad (\text{A.4.2})$$

Rücktransformation liefert wieder die gesuchte Lösung im Ortsraum. Man könnte sich nun die Frage stellen, warum man pseudospektral und nicht rein spektral rechnet. Der Grund hierfür liegt in der problematischen Berechnung der Fouriertransformierten von  $\mathcal{N}(u(\mathbf{r}, t))$  im Fourierraum. Nichtlinearitäten in  $u(\mathbf{r}, t)$  setzen sich stets aus Produkten von  $u(\mathbf{r}, t)$  zusammen, deren Fouriertransformierte einer Faltung im Fourierraum entspricht:

$$\mathcal{F}(u(\mathbf{r}, t) \cdot u(\mathbf{r}, t)) = u(\mathbf{r}, t) * u(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.4.3})$$

'\*' kennzeichnet die Faltung, '.' das Produkt. Wegen eben diesem Fouriertheorem ist eine rein spektrale Rechnung meist nicht angebracht, denn für eine Faltung muss integriert werden, was analytisch und numerisch schwerer zu handhaben ist als eine reine Produktbildung. Produkte werden also numerisch stets im Ortsraum berechnet und dann, wenn nötig, in den Fourierraum transformiert. Mit der Orts- und Zeitintegration gemäß der obigen Verfahren besteht also die Möglichkeit, eine partielle Differentialgleichung numerisch zu implementieren. Um sich das Pseudospektralverfahren in Kombination mit einer zeitlichen Integrationsmethode zu veranschaulichen, ist die zeitliche Runge-Kutta-Integration eher ungeeignet. Als Ausgangspunkt betrachte man Gleichung (A.4.1). Die zeitliche Ableitung können wir wiederum für kleine Zeitschritte durch den Differentialquotienten nähern:

$$\frac{u(\mathbf{r}, t + \Delta t) - u(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} = \frac{u(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} + \mathcal{L}(u(\mathbf{r}, t)) + \mathcal{N}(u(\mathbf{r}, t)). \quad (\text{A.4.4})$$

Im impliziten Euler-Verfahren wird die rechte Seite von (A.4.1) zeitlich unterschiedlich behandelt. Während die Nichtlinearität für  $u(\mathbf{r}, t)$  berechnet wird, werden alle linearen Terme zum Zeitpunkt  $u(\mathbf{r}, t + \Delta t)$  bestimmt. Da wir die Linearität schreiben können als  $\mathcal{L}(u(\mathbf{r}, t + \Delta t)) \rightarrow \mathcal{L}'u(\mathbf{r}, t + \Delta t)$  kann man im Fourierraum echt separieren:

$$\mathcal{L}'u(\mathbf{r}, t + \Delta t) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}' \cdot \tilde{u}(\mathbf{k}, t + \Delta t). \quad (\text{A.4.5})$$

Der Punkt '.' notiert hier ein echtes Produkt. Mit dieser Eigenschaft kann man Gleichung (A.4.4) im Fourierraum nach  $u(\mathbf{k}, t + \Delta t)$  auflösen:

$$\tilde{u}(\mathbf{k}, t + \Delta t) = \frac{\frac{\tilde{u}(\mathbf{k}, t)}{\Delta t} + \mathcal{F}[\mathcal{N}(u(\mathbf{r}, t))]}{\frac{1}{\Delta t} - \tilde{\mathcal{L}}'}. \quad (\text{A.4.6})$$

Nach Rücktransformation von (A.4.6) in den Ortsraum kann man letztendlich  $u(\mathbf{r}, t + \Delta t)$  bestimmen, was die raumzeitliche Integration einer partiellen Differentialgleichung von Typ (A.4.1) ermöglicht.

## A.5 Implementierung der stereographisch projizierten Landau-Lifshitz-Gleichung

Wir haben gesehen, dass aufgrund der Erhaltung des Betrags der Magnetisierung  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  die Landau-Lifshitz-Gleichung in der Form (2.1.19) ein effektiv zweidimensionales Problem darstellt, was uns dazu veranlasst hat, sie in die komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C}$  stereographisch zu projizieren. Die so gewonnene partielle Differentialgleichung ist vom Typ (A.4.1), d.h. eine Implementierung gemäß **A.1** und **A.2** ist möglich. Die zweidimensionale projizierte und skalierte Landau-Lifshitz-Gleichung lautet für die dynamische Größe  $m(x, y, t)$  (vgl.2.3.17):

$$\begin{aligned}
\partial_t m &= (i - g) \left[ -l^2 \nabla^2 m + \frac{2l^2 m^* (\nabla m)^2}{1 + |m|^2} \right] \\
&+ \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) \phi_M - \frac{m^2}{2} (\partial_x - i\partial_y) \phi_M \\
&+ m \left( \Theta_z + \theta(t)_z + c \frac{1 - |m|^2}{4\pi(1 + |m|^2)} \right) \\
&+ \frac{1}{2} (m^2 - 1) \left( \Theta_x + \theta(t)_x + a \frac{\operatorname{Re}[m]}{2\pi(1 + |m|^2)} \right) \\
&- \frac{1}{2} i(m^2 + 1) \left( \Theta_y + \theta(t)_y + b \frac{\operatorname{Im}[m]}{2\pi(1 + |m|^2)} \right). \tag{A.5.1}
\end{aligned}$$

Das  $\phi$ -Feld ist über die Poisson-Gleichung zu errechnen gemäß:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_M = \begin{cases} \frac{1}{M_S} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{M}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{M}_y \right) & \text{innerhalb der Probe} \\ 0 & \text{außerhalb der Probe.} \end{cases} \tag{A.5.2}$$

Dabei haben wir die z-Abhängigkeit des  $\phi_M$ -Feldes vernachlässigt, da nur so eine zweidimensionale numerische Implementierung möglich ist. Um das Verfahren der Integration von (A.5.1) besser zu veranschaulichen, vernachlässigen wir die Anisotropieterme, die einfach den entsprechenden Linearitäten und Nichtlinearitäten zuzuordnen wären. Mittels

Fouriertransformation erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{m}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} &= (i - g) [l^2 k^2 \tilde{m}(\mathbf{k}, t) + \tilde{m}(\mathbf{k}, t)(\Theta_z + \theta(t)_z)] \\
&+ (i - g) \mathcal{F} \left[ \frac{2l^2 m(\mathbf{r}, t)^* (\nabla m(\mathbf{r}, t)^2)}{1 + |m(\mathbf{r}, t)|} \right] \\
&+ (i - g) \mathcal{F} \left[ \frac{1}{2} (m^2(\mathbf{r}, t) - 1) (\Theta_x + \theta(t)_x) - \frac{1}{2} i (m^2(\mathbf{r}, t) + 1) (\Theta_y + \theta(t)_y) \right] \\
&+ (i - g) \mathcal{F} \left[ \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) \phi_M - \frac{m^2(\mathbf{r}, t)}{2} (\partial_x - i\partial_y) \phi_M \right]. \tag{A.5.3}
\end{aligned}$$

Auch für das  $\phi_M$ -Feld ist es sinnvoll, in den Fourierraum zu wechseln, da wir uns dort einer expliziten Lösung der Poisson-Gleichung (A.5.2) entziehen können. Für die fouriertransformierte Gleichung (A.5.2) gilt:

$$-\mathbf{k}^2 \mathcal{F}[\phi_M] = -ik_x \mathcal{F} \left[ \frac{m + m^*}{1 + |m|^2} \right] - ik_y \mathcal{F} \left[ \frac{m - m^*}{1 + |m|^2} \right]. \tag{A.5.4}$$

Damit ist  $\mathcal{F}[\phi_M]$  bestimmt, also nach Rücktransformation auch  $\phi_M$  und Gleichung (A.5.3) kann zur numerischen Integration benutzt werden. In dem verwendeten Programm haben wir aus obigen Gründen sämtliche Nichtlinearitäten stets im Ortsraum multipliziert. Die Zeitintegration erfolgt in zwei verschiedenen Versionen, einmal über das implizite Euler-Verfahren und zum anderen über das in **A.1** vorgestellte Runge-Kutta-Verfahren. Beide Verfahren laufen relativ stabil <sup>1</sup>, wobei zu beachten ist, dass beim Runge-Kutta-Verfahren der Zeitschritt aufgrund der Fehlerordnung  $\mathcal{O}(\Delta t)^5$  stets größer gewählt werden konnte. Für dieses Verfahren muss dafür bei der Zeititeration die Differentialgleichung an vier verschiedenen Stützstellen bestimmt werden. Man beachte, dass der gesamte Rechenaufwand durch das Pseudospektralverfahren bestimmt ist und in 2d bei  $M_{ges} = N \times N$  Gitterpunkten mit  $M_{ges} \log M_{ges}$  skaliert [43]. Damit kann der höhere Rechenaufwand des RK4-Verfahrens in pseudospektraler Rechnung unter Umständen nicht mehr durch die größere Zeitschrittwahl kompensiert werden und ein implizites Euler-Verfahren wäre zur Zeitintegration geeigneter.

Wir wollen im folgenden Unterabschnitt nochmals kurz auf das Prinzip der Gitterdiskretisierung eingehen und zeigen, wie der diskrete Ortsraum mit dem diskreten Fourierraum zusammenhängt. In sämtlichen Programmen haben wir uns der FFT (Fast-Fourier-Transformation) bedient, mit deren Hilfe gerade in den letzten Jahren ein großer Teil partieller Differentialgleichungen numerisch simuliert werden konnte.

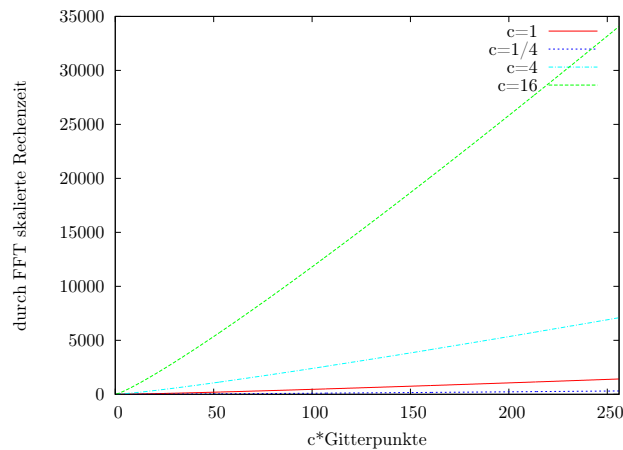
Ein problematischer Effekt der Fourier-Methoden, der eine Fehlinterpretation der Datensätze zur Folge haben kann und direkt mit dem endlichen Auflösungsvermögen eines diskreten Gitters zusammenhängt, ist der sogenannte Aliasing-Effekt, der im folgenden Abschnitt kurz erläutert wird.

---

<sup>1</sup>'stabil' im Rahmen geschickt gewählter Parameter.

## A.6 Diskretisierung durch ein Gitter

Orts- und Fourierraum müssen in der Numerik aus diskreten Gitterpunkten bestehen. Eine Simulation der vollständigen kontinuierlichen Dynamik ist völlig ausgeschlossen, da überabzählbar unendlich viele dynamische Größen berechnet werden müssten. Nun ist es aber klar, dass eine große Anzahl von Gitterpunkten das Auflösungsvermögen in Orts- und Fourierraum stark verbessert, hingegen eine kleinere Gitterpunktsanzahl die Rechenzeit entscheidend verkürzen kann. Da die Rechenzeit im Wesentlichen mit  $M_{ges} \log M_{ges}$  skaliert, skaliert sie bei der Hälfte der Gitterpunkte nur noch mit  $\frac{M_{ges}}{2} \log M_{ges} - \frac{M_{ges}}{2} \log \frac{1}{2}$ .



**Abbildung A.1:** Visualisierung der Rechenzeit, die für die FFT mit  $M_{ges} \log M_{ges}$  skaliert. Die Rechenzeiten können jeweils mit der  $c = 1$ -Kurve verglichen werden. Jede Verdopplung der Gitterpunkte in eine Richtung führt zu einer Vervierfachung der Punkte im 2d-Gitter. Die Rechenzeit steigt für eine große Anzahl von Gitterpunkten erheblich.

Jedem diskreten zwei-dimensionalen Gitterpunkt kann nun die zu untersuchende Größe  $m(i\Delta x, j\Delta y, t)$  zugeordnet werden. Dabei sind  $i, j \in \mathbb{N}$  und  $\Delta x$  bzw.  $\Delta y$  bezeichnen das Auflösungsvermögen des Gitters in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Die Diskretisierung erfolgt also durch eine äquidistante Einteilung des Gitters in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Wenn nun  $N \times N$  die Anzahl der Gitterpunkte eines quadratischen Gitters bezeichnet, so rechnet man auf einem Gitter der Länge  $N\Delta x \times N\Delta y|_{x=y}$ .

Die im Programm verwendeten periodischen Randbedingungen verifiziert man über ein effektives Feld mit  $[(N + 2) \times (N + 2) - 4]$  Gitterpunkten, wobei die isg. vier zusätzlichen Gitterpunktzeilen und -spalten am Anfang und am Ende des Feldes angeschlossen werden. Ordnet man der nullten Gitterpunktzeile bzw. Spalte die Werte der  $N$ -ten zu und der  $(N+1)$ -ten Gitterpunktzeile bzw. -spalte die Werte der ersten zu, so ist das Feld periodisch angeschlossen. Diese Anschlussbedingungen sind genau dann wichtig, wenn über die Methode der finiten Differenzen Ortsableitungen berechnet werden, da hier die Kenntnis der Nachbarpunkte von entscheidender Bedeutung ist. Da im Fourierbild Ablei-

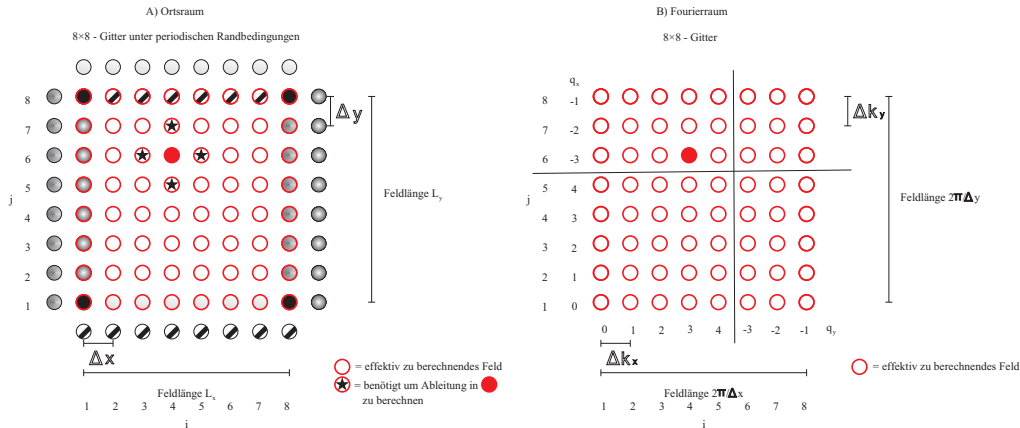
tungen exakt über den entsprechenden Wellenvektor dargestellt werden können, ist dieses Verfahren dort nicht nötig. Die sogenannte 'Centered Space'-Methode ist eine Möglichkeit, Ableitungen im Ortsraum zu berechnen. Das Verfahren benutzt die Sekante, die durch die nächsten Nachbarpunkte geht und errechnet deren Steigung. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial m(x, y, t)}{\partial x}\Big|_{i,n} &= \frac{m(x, y, t)_{i+1}^n - m(x, y, t)_{i-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \\ \frac{\partial^2 m(x, y, t)}{\partial x^2}\Big|_{i,n} &= \frac{m(x, y, t)_{i+2}^n - m(x, y, t)_{i-2}^n}{4(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2.\end{aligned}\quad (\text{A.6.1})$$

Zweite Ableitungen werden aber besser durch die sogenannte Mittelpunktmethode approximiert, deren Fehlerordnung mit  $\mathcal{O}(\Delta x)^4$  skaliert [43]:

$$\frac{\partial^2 m(x, y, t)}{\partial x^2}\Big|_{i,n} = \frac{m(x, y, t)_{i+1}^n - 2m(x, y, t)_i^n + m(x, y, t)_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^4.\quad (\text{A.6.2})$$

Die für die Numerik relevanten Informationen an einem Gitterpunkt sind also nicht auf denselbigen beschränkt sondern benötigen Information von den umgebenden Punkten. Abbildung A.2 zeigt nochmals einen der großen Vorteile der Fourierdarstellung. Es wer-



**Abbildung A.2:** A) Gitterdarstellung im Ortsraum mit Auflösungsvermögen  $\Delta x$  in  $x$ -Richtung und  $\Delta y$  in  $y$ -Richtung. Die Verifizierung der periodischen Randbedingungen lässt sich über eine Erweiterung des  $8 \times 8$  - Gitters auf ein effektives  $10 \times 10$  - Gitter erreichen. Zur Berechnung von ersten und zweiten Ableitungen benötigt man die Nachbargitterpunkte. B) Gitterdarstellung im Fourierraum mit Auflösungsvermögen  $\Delta k_x = \frac{2\pi}{L_x}$  in  $x$ -Richtung und  $\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y}$  in  $y$ -Richtung. Die Faktoren  $q_{x,y}$  zeigen, wie die Einordnung der  $k$ -Werte auf die entsprechenden Gitterpunkte erfolgt  $(q_x\Delta k_x, q_y\Delta k_y) = (k_x, k_y)_{i,j}$ .

den keine finiten Differenzen benötigt. An jedem Gitterpunkt existiert ein exakter (exakt im Rahmen der FFT)  $\mathbf{k}$ -Wellenvektor-Wert, der uns eine alternative Darstellung von

Ortsableitungen ermöglicht:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\left(\frac{\partial m(x, y, t)}{\partial x}\right) &= ik_x \tilde{m}(\mathbf{k}, t) \\
 \mathcal{F}\left(\frac{\partial m(x, y, t)}{\partial y}\right) &= ik_y \tilde{m}(\mathbf{k}, t) \\
 \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 m(x, y, t)}{\partial x^2}\right) &= -k_x^2 \tilde{m}(\mathbf{k}, t) \\
 \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 m(x, y, t)}{\partial y^2}\right) &= -k_y^2 \tilde{m}(\mathbf{k}, t).
 \end{aligned} \tag{A.6.3}$$

Dennoch beinhaltet auch der Fourierraum einige Darstellungsschwächen. Da der Ortsraum nicht beliebig klein aufgelöst werden kann, existiert im Fourierraum stets eine größte Wellenzahl, die das Maximum aller auflösbaren Wellenzahlen ist (**A.3**). Wellenzahlen oberhalb dieser maximalen Grenze werden also nicht mehr als solche wahrgenommen und falsch interpretiert. In einem kleineren Wellenzahlbereich kommt es zur Anhäufung. Dieser Effekt wird in der Fachwelt im Allgemeinen als Aliasing-Effekt bezeichnet. Große Wellenzahlen werden dann in der Numerik abgeschnitten, um diese Misinterpretation zu vermeiden. Schwingen nur wenig Moden an, ist diesem Effekt nur in geringem Maß Rechnung zu tragen ([43], [9] für weitere Details). Ein zweiter Nachteil ist natürlich die größere Rechenzeit, da die FT im Programm den wesentlichen Anteil der Integrationszeit ausmacht.



## B Numerische Visualisierung der Landau-Lifshitz-Gleichung

In Kapitel A haben wir die numerischen Möglichkeiten für die Implementierung der stereographisch projizierten LLG kennengelernt. Basierend auf dem Pseudospektralverfahren, welches uns die Möglichkeit verschafft, im Ortsraum vergleichsweise komplizierte und fehlerbehaftete Rechnungen in den leichter zu handhabenden Fourierraum zu transformieren, ist es uns gelungen, einen Programmcode zur Visualisierung der Dynamik der projizierten Magnetisierung  $m(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{C}$  zu entwickeln. Die Rücktransformation in den  $\mathbb{R}^3$  bzw. effektiv in  $S^2$  liefert dann die vollständige Dynamik des Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ . Ordnet man jedem Gitterpunkt gemäß A.6 einen Anfangswert  $m_0(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{C}$  zu, so ist dies gleichbedeutend mit der Zuordnung eines Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}_0(\mathbf{r}, t)$ . Es sei an dieser Stelle nochmals darauf verwiesen, dass ein Magnetisierungsvektor, der in Richtung des Pols zeigt, in der komplexen Zahlenebene auf  $\infty$  abgebildet wird, was numerisch äußerst problematisch ist. Dieser Problematik kann dadurch Abhilfe geleistet werden, indem große  $m(\mathbf{r}, t)$  in der projizierten LLG vernachlässigt werden oder alle Magnetisierungsvektoren durch die entsprechenden Anfangsbedingungen möglichst weit von diesem kritischen Punkt entfernt liegen. Da die erste Methode das explizite Nachvollziehen der Dynamik nahezu unmöglich macht, beschränken wir uns auf zweite. Dabei ist zu berücksichtigen, dass sowohl die Anfangsbedingungen als auch der gewählte Parameterbereich den Werten von  $m(\mathbf{r}, t)$  Rechnung tragen. Das Fernhalten vom kritischen Punkt ist also nur für gewisse Parameterwerte möglich. In sämtlichen numerischen Auswertungsteilen musste dieses Stabilitätskriterium berücksichtigt werden.

Die Gitterdiskretisierung entspricht einer Diskretisierung des Ortsraumes, also des Mediums, in welchem wir die Magnetisierungsvektoren  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  betrachten. Dieses Gitter hat nichts mit der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  zu tun. Die komplexen Zahlenwerte können vielmehr als Höhenprofil auf dem diskreten Gitter betrachtet werden, d.h. eine Visualisierung von  $m(\mathbf{r}, t)$  stellt ein Höhenlinienprofil im diskretisierten Medium dar.

### B.1 Dynamik des Magnetisierungsvektors in der Grundform

Die reale Größe in unserem System aus Magnetisierungsvektoren ist die Größe  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  und nicht die komplexe Größe  $m(\mathbf{r}, t)$ , die wir nur deswegen eingeführt haben, um die Dynamik effektiv zwei-dimensional zu halten. Das dynamische Verhalten von  $m(\mathbf{r}, t)$  und insbesondere von  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  soll im Folgenden qualitativ untersucht werden.

Gleichung (2.3.17) enthält eine Vielzahl von Parametern, über die die Dynamik von  $m(\mathbf{r}, t)$  gesteuert wird. Inwieweit sich das System numerisch stabilisiert, hängt also stark

von der Wahl der entsprechenden Parameter ab. Ein zusätzliches Problem besteht in einer geeigneten Wahl des Zeitschritts. Kapitel A hat zwei wichtige Möglichkeiten zur Zeitdiskretisierung aufgezeigt. Das implizite Euler-Verfahren war mit einem relativ hohen Fehler behaftet, ließ sich aber eingehend formulieren und implementieren, während das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung durch den relativ kleiner Fehler in der Zeitdiskretisierung den entscheidenden Vorteil lieferte. Die Richtigkeit numerischer Ergebnisse muss für den entsprechenden Zeitschritt stets überprüft werden. Ein Zeitschritt ist erst dann gut gewählt, wenn sich bei einer Zeitschrittverkleinerung das qualitative Verhalten des Systems kaum noch ändert und die Numerik stabil läuft. Wir werden in Abschnitt B.1.1 auf die Wahl des Zeitschrittes bei den beiden entsprechenden Zeitintegrationsverfahren eingehen. Zunächst vereinfachen wir Gleichung (2.3.17) auf seine essentielle Grundform und werden in den folgenden Abschnitten sukzessive Terme in der Grundform hinzufügen. Da der Dämpfungsterm in (2.3.17) der kompletten Gleichung vorsteht, wird sein Einfluss als Spezialfall diskutiert werden.

Von der Grundform sprechen wir im Folgenden genau dann, wenn die Dynamik des Magnetisierungsvektors nur über die Austauschwechselwirkung im effektiven Magnetfeld  $\mathbf{H}_{eff}$  mit eventueller Dämpfung  $g$  gegeben ist, also für  $m(\mathbf{r}, t)$  von einer partiellen Differentialgleichung der Form:

$$\partial_t m = (i - g) \left[ -l^2 \nabla^2 m + \frac{2l^2 m^* (\nabla m)^2}{1 + |m|^2} \right]. \quad (\text{B.1.1})$$

Für  $l = 0$  ist  $m(\mathbf{r}, t)$  konstant, d.h. es gibt keinen Grund für den Magnetisierungsvektor, sich im Medium zu verändern.  $g = 0$ , also ein dämpfungsfreies System, bleibt hingegen weiter ein interessanter Spezialfall der Grundform. Da dem System keine Richtung durch externe Felder aufgezwungen wird, gibt es für die Magnetisierungsvektoren auch keinen Grund, sich entlang einer bestimmten Richtung auszurichten. Sind alle Magnetisierungsvektoren in der Probenebene zufällig orientiert, werden sich die Bewegungen jedes Vektors aufgrund der Austauschwechselwirkung mit der Zeit angleichen. Bei großen Dämpfungen wird dieser Angleichungsprozess beschleunigt werden, da jede Dämpfung dem System aus Vektoren weniger Freiheit zur dynamischen Bewegung lässt.

### B.1.1 Vergleich der Zeitintegrationsverfahren

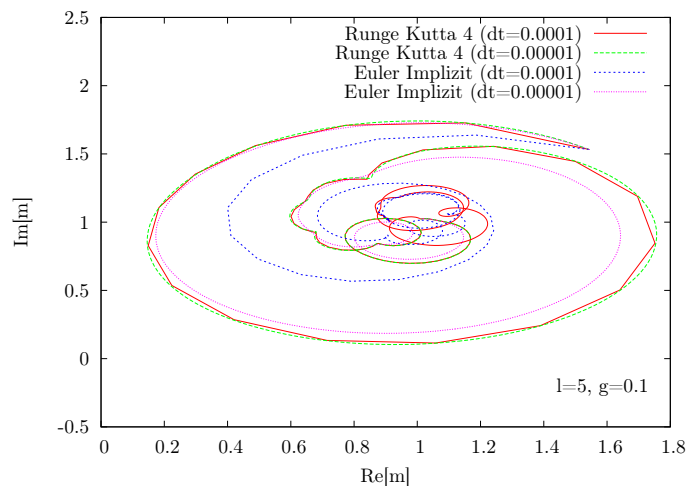
Wir werden zur Überprüfung der Richtigkeit des Zeitintegrationsverfahrens die komplexe projizierte Größe  $m(\mathbf{r}, t)$  in  $\mathbb{C}$  betrachten. Dies bietet den Vorteil, in  $\mathbb{C}$  einer zweidimensionalen Trajektorie folgen zu können, die uns die Dynamik der Grundform beschreibt <sup>1</sup>. Es ist zu erwarten, dass das Runge-Kutta-Verfahren wegen der niedrigeren Fehlerordnung schon bei vergleichsweise größeren Zeitschritten adäquate Ergebnisse liefert; dabei bezieht sich das Wort 'adäquat' auf die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse bei Wahl eines noch kleineren Zeitschritts. Zwingende Voraussetzung für die Zeitschrittwahl ist natürlich die Konvergenz des entsprechenden Verfahrens.

---

<sup>1</sup>Man kann sich durch einfache Rückprojektion auch die reale Trajektorie im  $\mathbb{R}^3$  anschauen.

Das Fernhalten vom kritischen Punkt, z.B. bei Wahl entsprechender Parameter, ist wesentlich, um die Numerik auch im Langzeitlimit stabil zu halten. Prinzipiell muss diese Zeitschrittüberprüfung nun für sämtliche Parameterwerte durchgeführt werden und erst recht bei Hinzunahme weiterer Terme zur Grundform. Wir werden des Öfteren annehmen, dass die Trajektorien bei einmaliger Überprüfung des Zeitschritts auch für gewisse andere Parameterwerte, die numerisch stabile Ergebnisse liefern, eine qualitativ gute Lösung sind.

Die Diskretisierung des Ortsraumes (vgl. **A.6**) erfolgt in unserem Fall über ein  $2^8 \times 2^8$ -Gitter. Um die Dynamik eines Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  zu verfolgen, verfolgt man also die Dynamik von  $m(\mathbf{r}, t)$  an einem Gitterpunkt. Die Anfangsbedingungen werden durch komplexe Zahlenwerte für  $m_0(\mathbf{r}, t)$  so vorgegeben, dass der Magnetisierungsvektor keine Gefahr läuft, den kritischen Punkt zu erreichen. Wir haben  $m_0(\mathbf{r}, t)$  für jeden Gitterpunkt als zufällige komplexe Zahl  $m_0(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[m_0(\mathbf{r}, t)] + i\text{Im}[m_0(\mathbf{r}, t)]$  z.B. mit  $\text{Re}[m_0(\mathbf{r}, t)], \text{Im}[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 1]$  gewählt, was obigem 'Fernheitsprinzip' Rechnung trägt. In einem weiteren Unterabschnitt wird die Dynamik von  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  in Abhängigkeit unterschiedlicher Startbedingungen untersucht werden.



**Abbildung B.1:** Vergleich von RK4-Verfahren und implizitem Euler bei unterschiedlichen Zeitschritten. Nicht mehr eingezeichnet ist das implizite Euler-Verfahren für  $dt = 10^{-6}$ , da mit diesem Zeitschritt eine nahezu deckungsgleiche Trajektorie zum RK4-Verfahren erzeugt wird.

Abbildung B.1 zeigt, wie genau implizites Euler-Verfahren und RK4-Verfahren arbeiten. Wählt man im RK4-Verfahren einen Zeitschritt von  $dt = 10^{-4}$ , erhält man schon eine adäquate Trajektorie für  $m(\mathbf{r}, t)$ , während beim implizitem Euler-Verfahren die Trajektorie bei gleichem Zeitschritt noch stark von der realen Lösung abweicht. Deckungsgleichheit mit der Trajektorie aus dem RK4-Verfahren bekommt man erst für einen 100-fach kleineren Zeitschritt. Für die in Abbildung B.1 gewählten Parameter und Anfangsbedingungen kann mit dem RK4-Verfahren  $100\times$  schneller gearbeitet werden, ohne auf Qua-

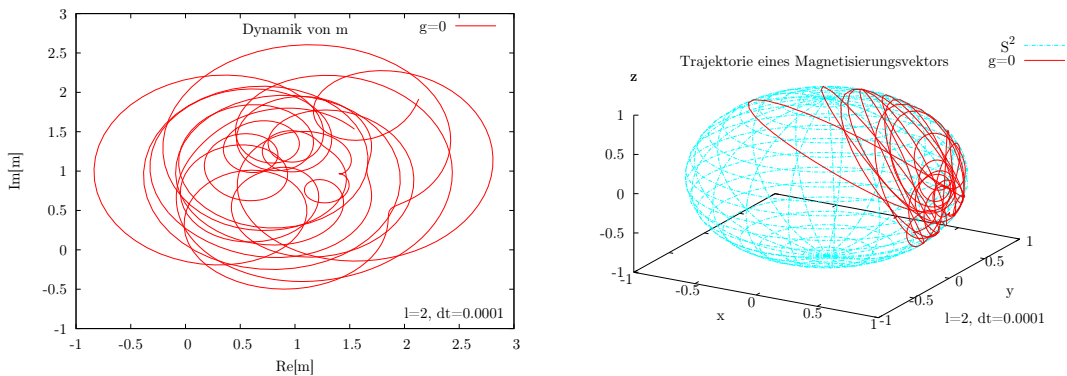
lität des Datensatzes verzichten zu müssen. Da der Fehler beim RK4-Verfahren deutlich geringer zu halten ist als beim impliziten Euler-Verfahren, wird im Folgenden, wenn kein Zeitintegrationsverfahren explizit angegeben ist, stets das RK4-Verfahren zur numerischen Integration verwendet werden.

### B.1.2 Auswirkung von $l$ auf die Grundform

In (2.3.16) haben wir den Parameter  $l = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{D}{4\pi}}$  erstmals eingeführt und gesehen, dass  $l^2$  direkt proportional zur Austauschwechselwirkungskonstanten  $D$  ist. Die Auswirkungen von  $l$  auf die Grundform sind trivial, da  $l^2$  der ganzen Funktion  $\mathbf{F}(m(\mathbf{r}, t))$  vorsteht und damit wegskaliert werden kann. Wählt man  $t' = l^2 t$  so lautet die Grundform:

$$\partial_{t'} m = (i - g) \left[ \nabla^2 m + \frac{2m^* (\nabla m)^2}{1 + |m|^2} \right]. \quad (\text{B.1.2})$$

An der charakteristischen Dynamik bei unterschiedlichen Werten für  $l$  sollte sich deswegen mit Ausnahme der Geschwindigkeit, mit der ein dynamischer Prozess vorangetrieben wird, nichts ändern. Dabei ist klar, dass bei steigenden  $l$ -Werten diese Geschwindigkeit zunimmt. Ohne Dämpfung  $g$  und weitere Zusatzterme gibt es für den Magnetisierungsvektor keine Veranlassung, sich in einer bestimmten Richtung auszurichten, d.h. die von reiner Austauschwechselwirkung verursachte Dynamik bleibt relativ 'chaotisch' (vgl.: Abbildung B.2).

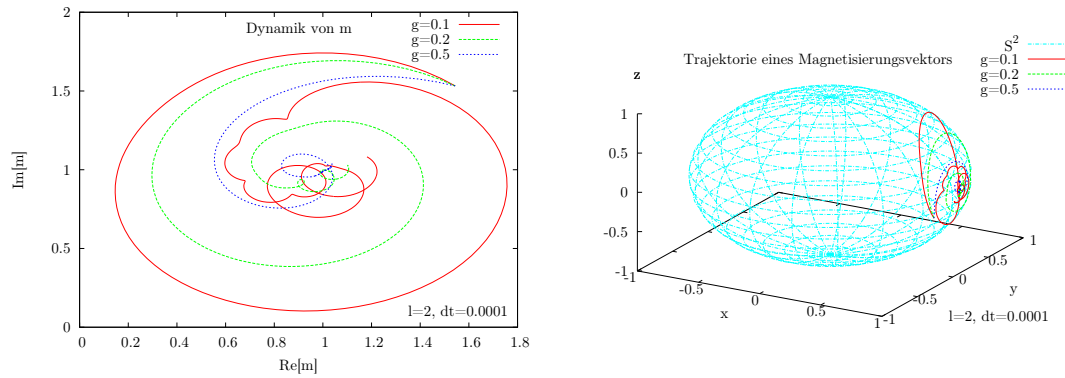


**Abbildung B.2:** Komplexe Dynamik und Dynamik des Magnetisierungsvektors auf der Sphäre  $S^2$  in der Grundform bei reiner Austauschwechselwirkung ( $g=0$ ). '1000 ZS'.

Die Trajektorie in Abbildung B.2 basiert auf einem rein quantenmechanischen Effekt und zeigt, wie sich die Wechselwirkung nächster Nachbarn auf ein Medium auswirkt. Wellenpropagation wird bei reiner Austauschwechselwirkung nicht möglich sein, da es nicht möglich ist, einen wohldefinierten Wellenvektor anzugeben.

### B.1.3 Auswirkung von $g$ auf die Grundform

Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich eine Dämpfung mit Dämpfungsparameter  $g$ , die in realen Medien sicherlich stets anzunehmen ist, auf die Spindynamik in der Grundform auswirkt. Unter reiner Austauschwechselwirkung müssten alle Spinvektoren in stetiger Bewegung sein und, wie wir in Abschnitt 2 gesehen haben, stets um das interne Feld  $\mathbf{H}_{int}^2$  präzidieren. Dass dies eben nicht der Fall ist, ist in selbigem Abschnitt gezeigt worden, weshalb es zwingend notwendig war, einen Dämpfungsterm in Form der Gilbert-Dämpfung einzuführen. Abbildung B.3 zeigt den Einfluss der Dämpfung



**Abbildung B.3:** Komplexe Dynamik und Dynamik des Magnetisierungsvektors auf der Sphäre  $S^2$  in der Grundform bei Austauschwechselwirkung und Dämpfung, '1000 ZS'.

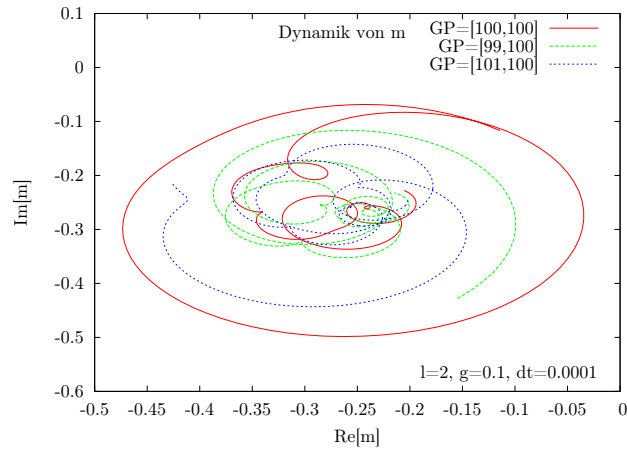
fung auf das Spinsystem. Bei zunehmender Dämpfung wird auch die Bewegungsfreiheit eines Magnetisierungsvektors zunehmend eingeschränkt und die Dynamik beschränkt sich auf einen kleineren Raumbereich. Damit wird aber auch die Stabilität des Systems durch den Dämpfungsterm mit Dämpfungsparameter  $g$  entscheidend beeinflusst, da das 'Fernheitsprinzip' durch eben diesen Dämpfungsparameter gesteuert werden kann. Deutlich interessanter ist der Dämpfungseinfluss aber bei starken, externen Feldern  $\mathbf{H}_{ext}$ , da die Präzessionsbewegung in diesem Fall schließlich in eine nahezu Parallelstellung zum externen Feld übergeht.

### B.1.4 Dynamik benachbarter Gitterpunkte unter Austauschwechselwirkung

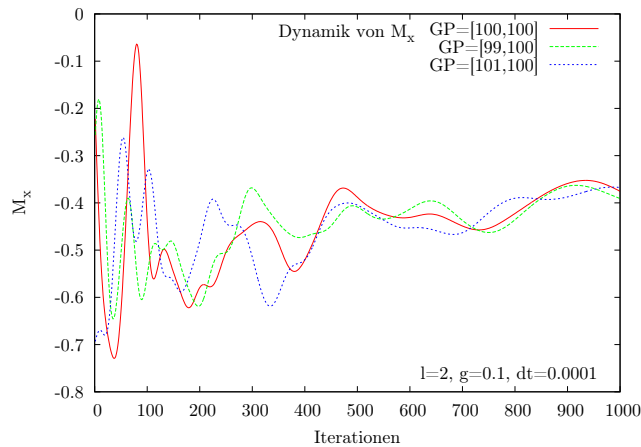
In der Herleitung des Austauschwechselwirkungsbeitrags zum effektiven Magnetfeld haben wir explizit die Austauschwechselwirkung nur nächster Nachbarn berücksichtigt. Unter diesen speziellen Annahmen konnten wir in einer recht schlüssigen Vorgehensweise die Proportionalität von  $\mathbf{H}_{aus}$  zu  $\nabla^2 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  zeigen. Da die Austauschwechselwirkung rein quantenmechanischer Natur ist, ist die Vorstellung, die wir über diese Art von

<sup>2</sup>Die Auszeichnung einer Richtung ist auch ohne externe Felder durch das statische Dipolfeld  $\mathbf{H}_{Dip}$  gegeben.

Wechselwirkung haben, eher auf einen qualitativen, phänomenologischen Rahmen beschränkt. Eine Voraussetzung muss aber der ganzen Betrachtungsweise voranstellen, und zwar das Prinzip der 'dynamischen Angleichung' benachbarter Magnetisierungsvektoren. Dieses 'Angleichungsprinzip' manifestiert sich in der quasiklassischen Betrachtung der Austauschwechselwirkung gemäß (2.2.23).



**Abbildung B.4:** Komplexe Dynamik in der Grundform bei Austauschwechselwirkung ( $l = 2$ ) und Dämpfung ( $g = 0.1$ ) für drei benachbarte Gitterpunkte.'1000 ZS'.



**Abbildung B.5:** Dynamik einer Magnetisierungsvektorkomponente bei Austauschwechselwirkung ( $l = 2$ ) und Dämpfung ( $g = 0.1$ ) für drei benachbarte Gitterpunkte.'1000 ZS'.

Basierend auf dem Prinzip der Energieminimierung ist eine besonders günstige Stellung benachbarter Magnetisierungsvektoren gerade die Parallelstellung. Bei beliebigen

Anfangsbedingungen für benachbarte Gitterpunkte werden die Magnetisierungsvektoren je nach Größe der Austauschwechselwirkungskonstanten  $D(\propto l^2)$  versuchen, ihre Dynamik einander anzugleichen. Die Anfangsbedingungen in Abbildung B.4 sind dem 'Fernheitsprinzip' folgend so gewählt, dass gilt  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [-0.5, 0.5]$ . Man erkennt mit zunehmender Iteration die Angleichung der Trajektorien für drei beliebige Nachbarpunkte<sup>3</sup> auf dem  $2^8 \times 2^8$  - Gitter. Abbildung B.5 zeigt dieses Verhalten in Bezug auf die Magnetisierungsvektoren auf  $S^2$ . Wir werden dieses Angleichungsprinzip noch eingehender beobachten können, wenn dem System externe Felder und damit eine ausgezeichnete Richtung aufgezwungen wird. Dann wird auch der Wechselwirkungsparameter  $l$  nicht mehr die Bedeutung eines reinen Zeitskalierungsparameters haben, sondern mit seinem Betrag effektiv den Einfluss äußerer Felder steuern können.

Da die Terme  $\propto l^2$  wesentlich für die Dynamik der Nachbarpunkte verantwortlich sind, resultiert aus der Austauschwechselwirkung die Möglichkeit der Propagation von Spinwellen, die als magnetodynamisches Analogon zu Lichtwellen angesehen werden können, sich aber dennoch in einer Vielzahl von Eigenschaften erheblich unterscheiden. Das alleinige Vorhandensein dieser Form von Wechselwirkung reicht jedoch nicht zur Wellenpropagation aus, da ohne Vorzugsrichtung für den Magnetisierungsvektor  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  keine Wellenausbreitung möglich ist, also kein Wellenvektor  $\mathbf{k}$  mit im gesamten System fester Richtung existiert.

## B.2 Einbindung des Dipolfeldes in die Grundform

Bis jetzt resultierte die Wechselwirkung der Magnetisierungsvektoren einzig aus der quantenmechanischen Austauschwechselwirkung. In **2** postulierten wir die Existenz eines Dipolfeldes, welches seine Ursache in der Wechselwirkung der präzedierenden magnetischen Momente im Spinsystem fand. Die Einbindung dieses Feldes in die Grundform führt auf eine Gleichung der Form:

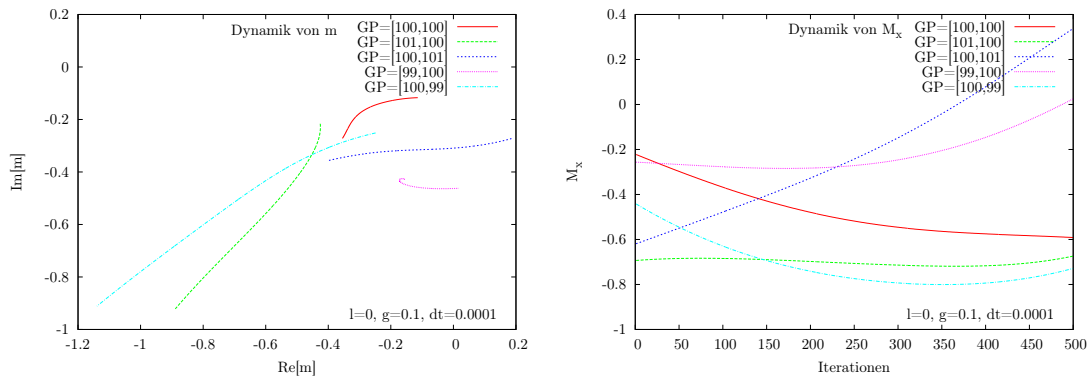
$$\begin{aligned} \partial_t m &= (i - g) \left[ -l^2 \nabla^2 m + \frac{2l^2 m^* (\nabla m)^2}{1 + |m|^2} \right] \\ &+ (i - g) \left[ \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) \phi_M - \frac{m^2}{2} (\partial_x - i\partial_y) \phi_M \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.1})$$

Dabei gehorcht  $\phi_M$  der in **2** eingeführten skalierten Poisson-Gleichung. Skaliert man nun gemäß **B.1.2** die Zeit  $t$ , so resultiert folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t m &= (i - g) \left[ -\nabla^2 m + \frac{2m^* (\nabla m)^2}{1 + |m|^2} \right] \\ &+ (i - g) \frac{1}{l^2} \left[ \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) \phi_M - \frac{m^2}{2} (\partial_x - i\partial_y) \phi_M \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.2})$$

<sup>3</sup>Es sind zur besseren Übersichtlichkeit nur die drei Nachbarn in x-Richtung des Gitters verwendet worden.

Große Austauschwechselwirkungskonstanten bedeuten also automatisch, dass dem Dipolfeld weniger Bedeutung zukommt. Für  $l = 0$  wird die Dynamik von  $m$  nur noch durch das Dipolfeld bestimmt. Numerisch wird die Dynamik immer dann schwer zu handhaben sein, wenn keine Richtung ausgezeichnet ist oder wenn die dynamischen Prozesse einzelner Magnetisierungsvektoren ein qualitativ unterschiedliches Verhalten zeigen, es also nicht zum oben aufgezeigten 'Angleichungsprinzip' kommt. Dieses ist für reine Dipol-Dipol-Wechselwirkungsprozesse der Fall, weshalb gerade numerisches Langzeitverhalten über die Projektionsmethode schwer zu implementieren ist.

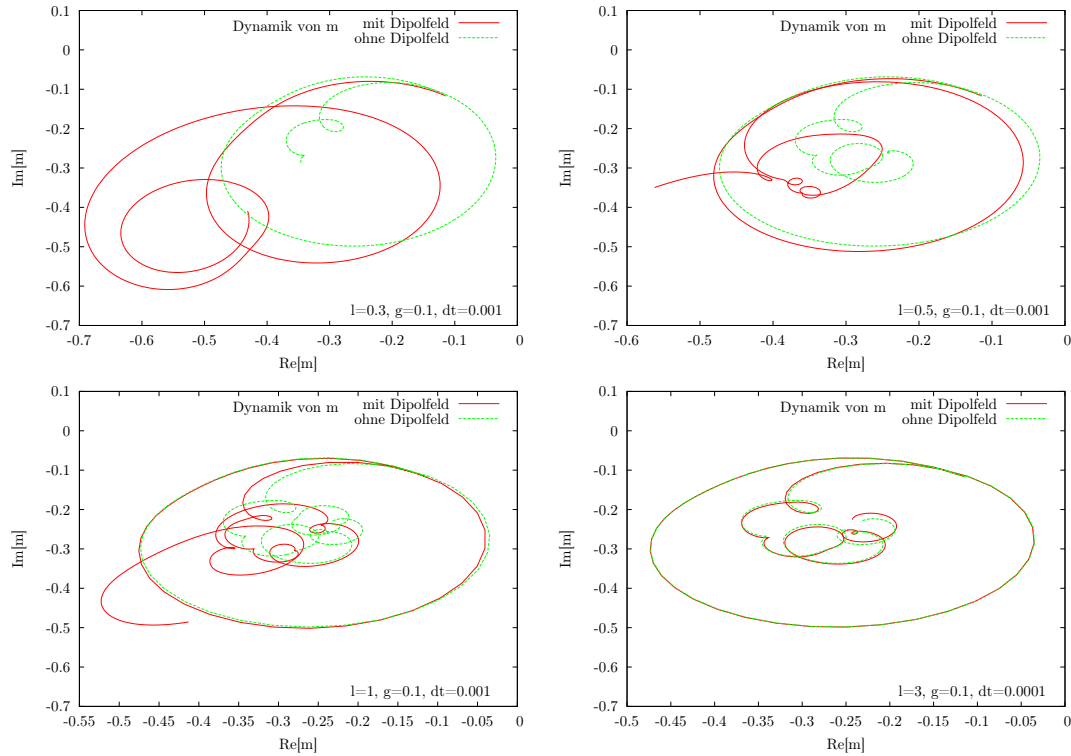


**Abbildung B.6:** Auswirkung des reinen Dipolfeldes auf benachbarte Gitterpunkte ( $l = 0, g = 0.1$ ). '500 ZS'.

Abbildung B.6 zeigt, dass die numerische Implementierung des reinen Dipolfeldes schwierig ist, da jeder Magnetisierungsvektor stets die Gegend um den kritischen Punkt (Südpol) erreichen kann. Eine Einbindung in das Programm wird erst dadurch unproblematisch, dass andere Felder die Ausrichtung eines jeden Magnetisierungsvektors dominieren, und somit das 'Fernheitsprinzip' über entsprechende Anfangsbedingungen erfüllt werden kann.

Effektiv muss die zusätzliche Einbindung des Dipolfeldes in unsere Grundform zu einer Art 'Verzerrung' der durch die Austauschwechselwirkung dominierten Dynamik führen. Dies wird im folgenden Abschnitt bei äußeren Feldern besonders augenscheinlich, da wir in Abschnitt 2 bereits erwähnt hatten, dass kreisförmige Präzessionen um  $\mathbf{H}_{int}$  mit angelegtem Dipolfeld in elliptische Präzessionen übergehen. Die Verzerrung ohne äußere Felder kann in Abbildung B.7 nachvollzogen werden. Für  $l = 3$  ist die Dynamik kaum noch von der ohne Dipolfeld zu unterscheiden. Beim Anlegen äußerer Magnetfelder muss man in diesem Fall austauschdominierte Wellenpropagation erwarten, während für relative kleine  $l$ -Werte die Moden dipoldominiert sind. Im Bereich um  $l = 1$  müssen beide Beiträge zum effektiven Magnetfeld berücksichtigt werden. Vergleicht man in B.7 die Trajektorien ohne Dipolfeld in  $\mathbb{C}$ , so manifestiert sich nochmals die schnellere Dynamik eines Magnetisierungsvektors  $\mathbf{M}$  bei größeren Austauschwechselwirkungskonstanten.





**Abbildung B.7:** Auswirkung des Dipolfeldes auf  $m \in \mathbb{C}$  für verschiedene Austauschwechselwirkungskonstanten bei den Anfangsbedingungen  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [-0.5, 0.5]$ . '1000 ZS'.

## B.3 Einkopplung äußerer Felder

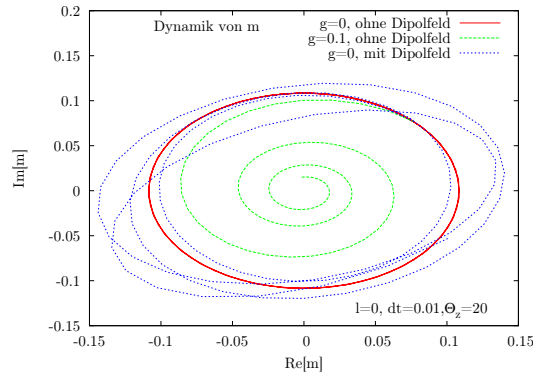
Bis jetzt konnten wir auf die Symmetrisierung der einzelnen Magnetisierungsvektoren auf dem Gitter keinen Einfluss nehmen. Austauschwechselwirkung und Dipol-Dipol-Wechselwirkung bestimmten zwar die Dynamik, ließen aber keine Vorzugsrichtungen erkennen, womit auch jegliche Form von Wellenpropagation ausblieb. Koppelt man nun von außen ein externes Magnetfeld ein, so unterliegt jeder einzelne Vektor dem neuen Feld und versucht sich unter Dämpfung parallel zu diesem auszurichten. Es sind beliebige äußere Felder vorstellbar. In statischen Feldern ist die Vorzugsrichtung für den Magnetisierungsvektor für alle Zeiten  $t$  gegeben und fest. Bei Pumpfeldern hingegen variiert sie in Abhängigkeit von der Frequenz<sup>4</sup>. Dauerhafte Wellenpropagation wird nur über Pumpfelder möglich sein, da nur in diesem Fall den Magnetisierungsvektoren die Möglichkeit

<sup>4</sup>Bei gepulster Anregung ist zusätzlich zur Pulsfrequenz auch die Pulsdauer zu beachten.

gegeben wird, sich stets neu zu orientieren. Die neu zu betrachtende Gleichung lautet also:

$$\begin{aligned}
 \partial_t m &= (i - g) \left[ -l^2 \nabla^2 m + \frac{2l^2 m^* (\nabla m)^2}{1 + |m|^2} \right] \\
 &+ (i - g) \left[ \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) \phi_M - \frac{m^2}{2} (\partial_x - i\partial_y) \phi_M \right] \\
 &+ (i - g) [m (\Theta_z + \theta(t)_z)] \\
 &+ (i - g) \left[ \frac{1}{2} (m^2 - 1) (\Theta_x + \theta(t)_x) \right] \\
 &- (i - g) \left[ \frac{1}{2} i (m^2 + 1) (\Theta_y + \theta(t)_y) \right].
 \end{aligned} \tag{B.3.1}$$

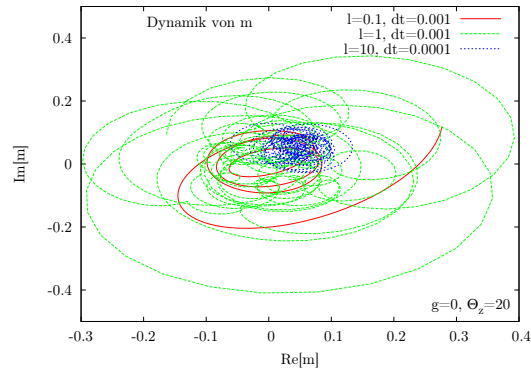
Dabei ist die z-Abhängigkeit des Potentials  $\phi_M$  vernachlässigt worden. Es ist gemäß der Skalierung  $t \rightarrow t'$  wiederum klar, dass mit größeren Werten für  $l$  sowohl die Bedeutung des Dipolfeldes als auch die der externen Felder abnimmt.



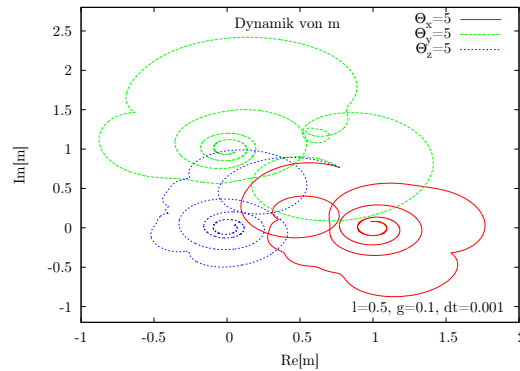
**Abbildung B.8:** Dynamik von  $m$  in  $\mathbb{C}$  bei externem, statischen Feld ( $\Theta_z = 20$ ) mit und ohne Dipoleinfluss. '100 ZS'.

### B.3.1 Das statische Feld

Greift man sich einen Magnetisierungsvektor  $\mathbf{M}$  auf dem Ortsgitter heraus, so führt dieser unter Einfluss eines statischen Feldes  $\mathbf{H}_{ext}$  eine Präzessionsbewegung um  $\mathbf{H}_{ext}$  (vgl. 2.1.16) aus. Dipoleinflüsse führen zu einer Verzerrung des Präzessionskreises und rufen eine eher elliptische Präzession hervor. Diese für alle dynamischen Prozesse essentiellen Grundaussagen sind nochmals in Abbildung B.8 verifiziert. Für  $l \neq 0$  wird das Verhalten von Abbildung B.8 komplizierter. Der Einfluss von Dipolfeld und statischem Feld auf die Dynamik der komplexen Größe  $m$  ist gemäß (B.3.1) stark an die Austauschwechselwirkungskonstante gekoppelt. Für große  $l$  und bei Vernachlässigung des Dämpfungsterms wird das austauschdominierte System relativ spät dem statischen Feld folgen und um



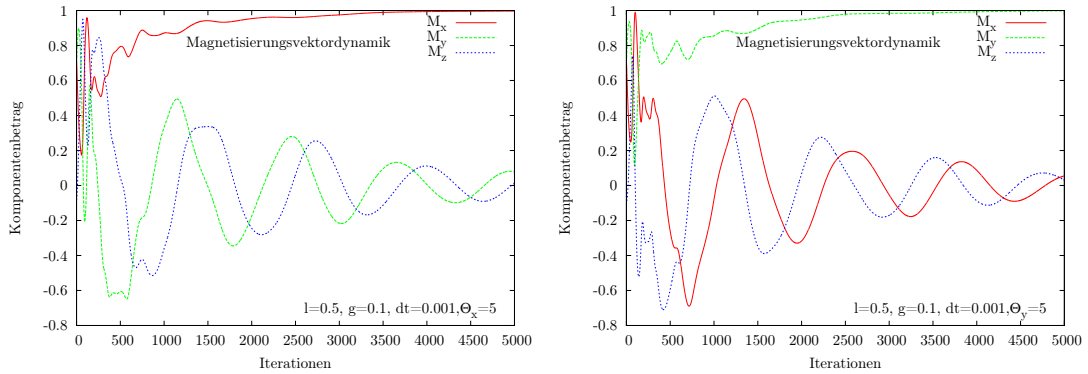
**Abbildung B.9:** Dynamik von  $m$  in  $\mathbb{C}$  bei äußerem, statischen Feld ( $\Theta_z = 20$ ) für unterschiedliche Werte von  $l$ .  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [-0.5, 0.5]$ . '1000 ZS'.



**Abbildung B.10:** Dynamik von  $m$  in  $\mathbb{C}$  bei drei unterschiedlich gerichteten äußeren, statischen Feldern mit Dämpfungseinfluss.  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 1]$ . '5000 ZS'.

seine Vorzugsrichtung präzedieren; gleichsam werden die Präzessionsbewegungen kreisförmig sein. Erst bei kleineren  $l$ -Werten sind die typischen 'Dipolellipsen' und die Präzession des Magnetisierungsvektors um die vom externen Feld vorgegebene, raumfeste Achse zu erkennen (vgl. Abbildung B.9). Des Weiteren ist ersichtlich, dass die Stabilität des numerischen Integrationsverfahrens wesentlich von der Konstanten  $l$  abhängt, da sie nicht nur den zeitlichen Ablauf der Dynamik steuert, sondern auch über die externen Felder den Bereich, in dem diese Dynamik sich abspielen soll. Ihr obliegt es also ganz entscheidend, dem 'Fernheitsprinzip' Rechnung zu tragen.

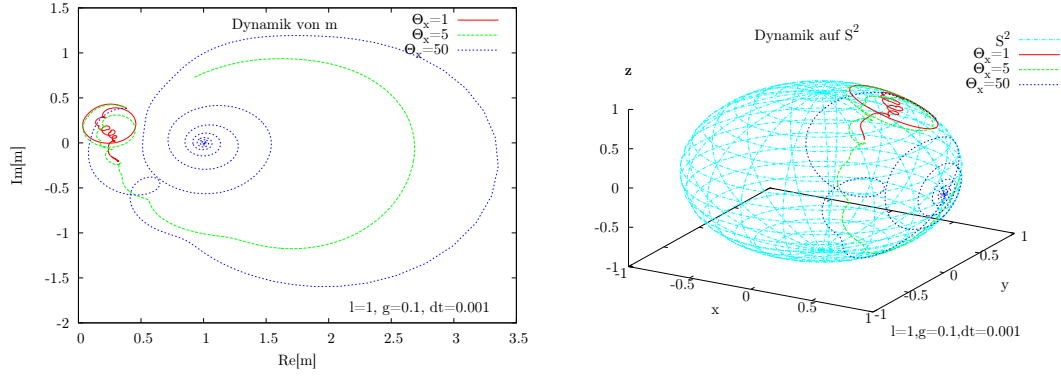
Berücksichtigt man in Abbildung B.9 zusätzlich den Dämpfungsterm ( $g \neq 0$ ), so mündet die früher oder später auftretende Präzessionsbewegung in einer Parallelstellung zum angelegten statischen Feld  $\mathbf{H}_{ext}$ . In Abbildung B.10 kann man erkennen, wie sich  $m(\mathbf{r}, t)$  für



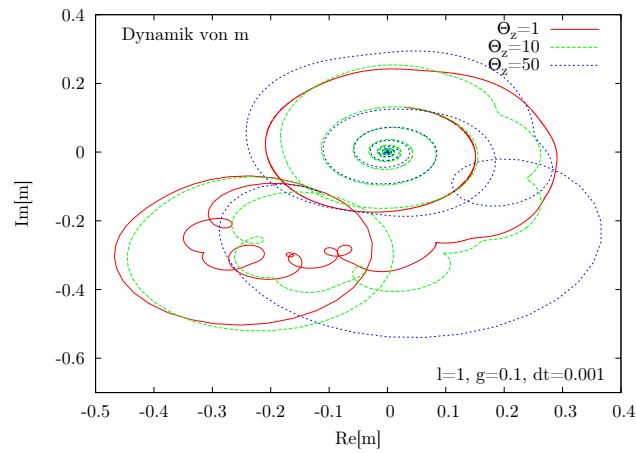
**Abbildung B.11:** Dynamik eines Magnetisierungsvektors auf  $S^2$  bei zwei unterschiedlich gerichteten äußeren, statischen Feldern mit Dämpfungseinfluss.  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 1]$ . '5000 ZS'.

unterschiedliche Richtungen des äußeren Feldes  $\mathbf{H}_{ext}$  den entsprechenden Punkten<sup>5</sup> in  $\mathbb{C}$  nähert. Abbildung B.11 zeigt das zeitaufgelöste Verhalten eines Magnetisierungsvektors, der sich je nach Feldrichtung bei eingeschalteter Dämpfung  $g$  parallel zu diesem ausrichtet. Abgesehen von der Richtung der äußeren Felder, muss auch ihre Stärke direkten Einfluss auf die Dynamik des Spinsystems haben. Schwache Felder lassen dem Spinsystem noch genügend Möglichkeit, auf die Austauschwechselwirkung und die Dipolfelder zu reagieren. Die Spins werden sich in diesem Fall relativ langsam am angelegten Feld orientieren und den stetigen Einfluss der Nachbarspins in einer vergleichsweise starken Form spüren. Relativ starke, externe Felder hingegen dominieren das System und werden jeden Magnetisierungsvektor vergleichsweise schnell in die Vorzugsrichtung zwingen. Wir konstatieren diese Aussagen mit Abbildung B.12. Dass sich jede Trajektorie unabhängig von der Stärke dennoch mit der Zeit auf einen Punkt fixiert, d.h. nahezu Parallelstellung von  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{H}_{ext}$  erreicht wird, sei nochmals mit der länger iterierten Abbildung B.13 gezeigt. An Abbildung B.14 lassen sich eine Vielzahl von Überlegungen und Ergebnissen in Bezug auf die Parameter in der projizierten LLG überprüfen, da sich die Variation in  $l$  nach entsprechender Skalierung auch als Variation der externen Felder interpretieren lässt.

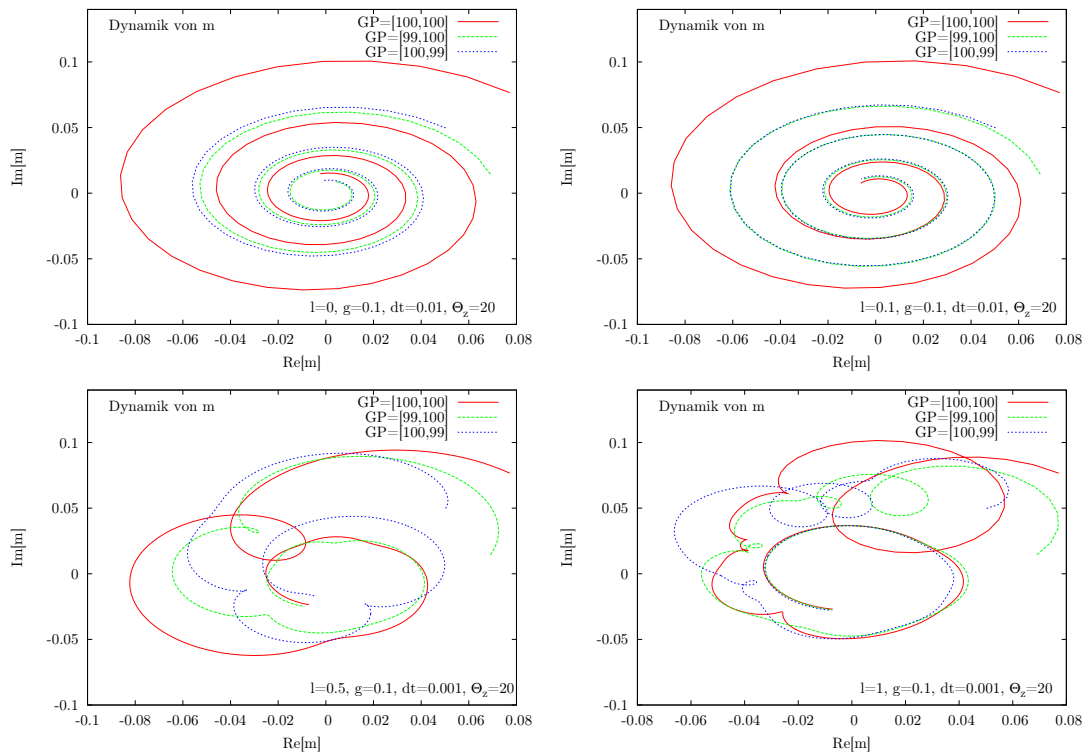
<sup>5</sup>'entsprechend' bezieht sich auf die stereographische Projektion.



**Abbildung B.12:** Dynamik für unterschiedlich starke statische, externe Felder. Für kleine  $\Theta_x$  verifiziert sich anfangs eine gänzlich austauschdominierte Trajektorie.  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.5]$ . '500 ZS.'



**Abbildung B.13:** Langzeititerierte Dynamik von m in  $\mathbb{C}$  für drei unterschiedlich starke äußere, statische Felder in Richtung von  $\mathbf{e}_z$ .  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 1]$ . '10000 ZS.'



**Abbildung B.14:** Auswirkung der Konstanten  $l$  auf die projizierte  $m$ -Dynamik dreier Nachbarpunkte bei Einkopplung eines statischen, externen Feldes.  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.1]$ . '500 ZS.'

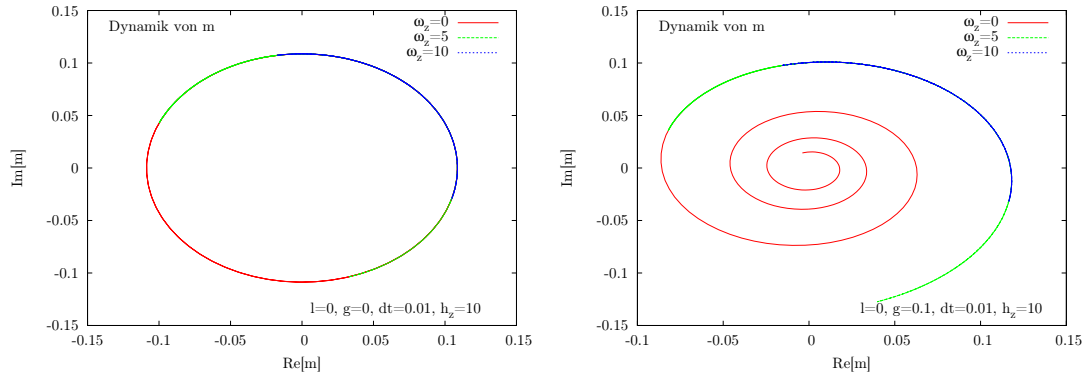
### B.3.2 Das Pumpfeld

Pumpfelder werden in erster Linie dazu verwendet, Spinwellen in ferromagnetischen Systemen anzuregen und ihre Propagation aufrechtzuerhalten. Da dem Pumpfeld eine explizite Zeitabhängigkeit zugeschrieben ist, erweist sich die analytische, wie auch die numerische Auswertung, schwieriger als bei statischen Feldern. Oftmals verwendete Pump- anregungen sind die sinusoidale oder cosinusoidale sowie die gepulste Anregungen. Wir werden zeigen, dass die ersten beiden ein qualitativ unterschiedliches Verhalten von der letzteren aufweisen. Wie auch schon beim statischen Feld sind die Anregungsrichtungen frei wählbar, und man unterscheidet im Wesentlichen zwischen Pumpen parallel zum externen, statischen Feld und senkrechtem Pumpen. Auf beide möglichen Pumpverfahren wird für entsprechende Anregungen eingegangen werden. Für die folgenden grafischen Auswertungen ist das Dipolfeld nicht berücksichtigt worden. Im RK4-Verfahren ist der Zeitschritt stets klein genug gewählt worden, um qualitativ gute Ergebnisse zu erzielen. Grundlage der numerischen Auswertung ist folgerichtig Gleichung (B.3.1) mit  $\phi_M = 0$ .

1.  $\theta(t)_i = h_i \cos \omega_i t$

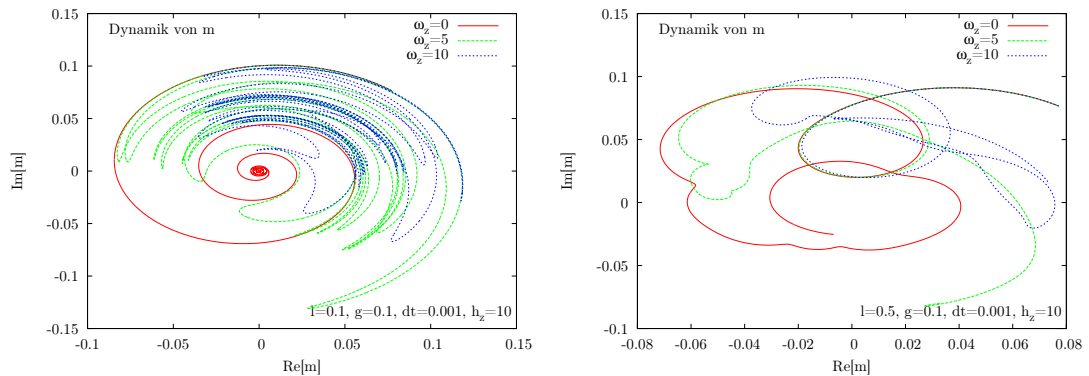
Eine Cosinus-Anregung weist im Wesentlichen die beiden entscheidenden Merkmale der Periodizität gemäß der Anregungsfrequenz  $\omega$  und des Vorzeichenwechsels nach einer halben Periode auf. Die Stärke des Pumpfeldes mit der Amplitude  $h$  variiert also in einer Periodenlänge ( $L_P = \frac{2\pi}{\omega}$ ) gemäß der Cosinusfunktion. Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  spürt das Spinsystem die volle Amplitude  $h$ . Diese schwächt sich ab und bei  $\frac{L_P}{4}$  spürt das System punktuell gar keine Anregung. Schließlich steigt die Anregung wieder, aber in entgegengesetzte Richtung, schwächt sich nach  $\frac{L_P}{2}$  wieder ab, um dann nach der Periodenlänge  $\frac{3L_P}{2}$  wieder positiv zu werden. D.h. unter der Annahme einer cosinusoidalen Anregung wird die Orientierung des angelegten Pumpfeldes stets geändert. Mit der Orientierungsänderung muss der Magnetisierungsvektor auch seine Umlaufrichtung ändern, was zur Stagnation der reinen Präzession führt und eine Schwingungsbewegung des Magnetisierungsvektors um die Richtung des angelegten Pumpfeldes erzwingt. Wir manifestieren diese Vermutungen für  $l, g = 0$  und  $l = 0, g = 0.1$  in Abbildung B.15.

Die Trajektorien in  $\mathbb{C}$  für  $\omega_z \neq 0$  liegen natürlich deckungsgleich auf der für  $\omega_z = 0$ , da es keine weiteren äußeren Einflüsse für den Magnetisierungsvektor gibt ( $l = 0$ ). An dieser Stelle sei auf die triviale Aussage hingewiesen, dass für  $\omega_z = 0$  das Pumpfeld zu einem statischen Feld mit Anregungsamplitude  $h_z$  wird. Berücksichtigt man die für die Spinwellenentwicklung fundamentale Austauschwechselwirkung, dann ist die relative Stärke vom Pumpfeld im Vergleich zur Austauschwechselwirkung ausschlaggebend für die Dynamik des Magnetisierungsvektors. Diese ändert sich stetig, falls  $\omega_i \neq 0$  gilt. Das bedeutet, dass die dynamischen Prozesse zeitabhängig sind und in unterschiedlicher Weise gesteuert werden. Folgt der Magnetisierungsvektor anfangs noch dem relativ starken Pumpfeld, wird er mit der Zeit zunehmend über die Austauschwechselwirkung gesteuert werden, um schließlich wieder dem Pumpfeld folgen zu können. Es ist klar, dass dieser 'duale Kausalitätseffekt' bei großen



**Abbildung B.15:** Dynamik von  $m$  in  $\mathbb{C}$  für ein reines Pumpfeld mit Frequenz  $\omega_z$  in Richtung von  $\mathbf{e}_z$  ohne und mit Dämpfung.  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.1]$ . '200 ZS.'

Austauschwechselwirkungskonstanten wesentlich stärker zum Tragen kommt. Für kleine  $l$  erkennt man noch wesentliche Ähnlichkeiten mit Abbildung B.15. Dieses charakteristische Verhalten ist in Abbildung B.16 für zwei unterschiedliche Werte von  $l$  verifiziert. Die Trajektorie wird sich bei reinem Pumpfeld ( $\omega \neq 0$ ) aber nie auf einen festen Punkt fixieren, da sich ja das externe Pumpfeld stetig umorientiert. Erst wenn ein zusätzliches statisches Feld angelegt wird, welches stärker als dieses Pumpfeld ist, wird es unter Dämpfung zur echten Parallelstellung von  $\mathbf{M}$  zum externen Feld kommen können. Es sei aber darauf verwiesen, dass mit einem statischen

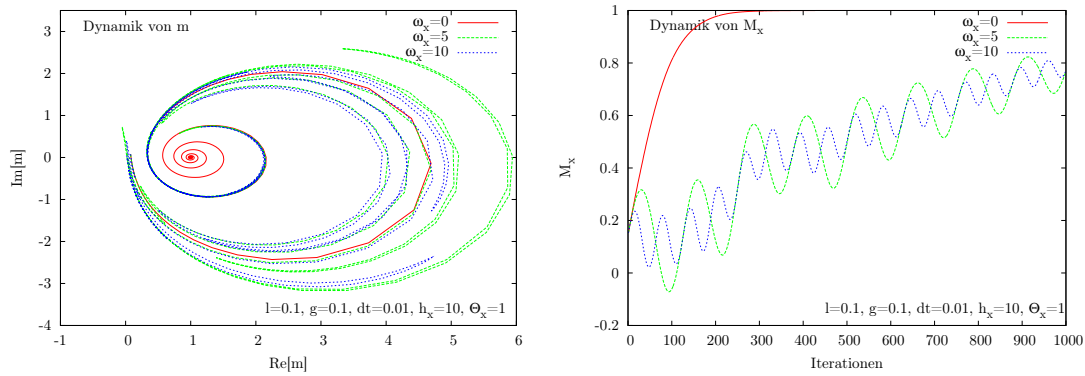


**Abbildung B.16:** Dynamik von  $m$  in  $\mathbb{C}$  für ein reines Pumpfeld mit Frequenz  $\omega_z$  in Richtung von  $\mathbf{e}_z$  für zwei unterschiedliche Werte von  $l$ .  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.1]$ . Linkes Bild: '10000 ZS', Rechtes Bild: '1000 ZS'.

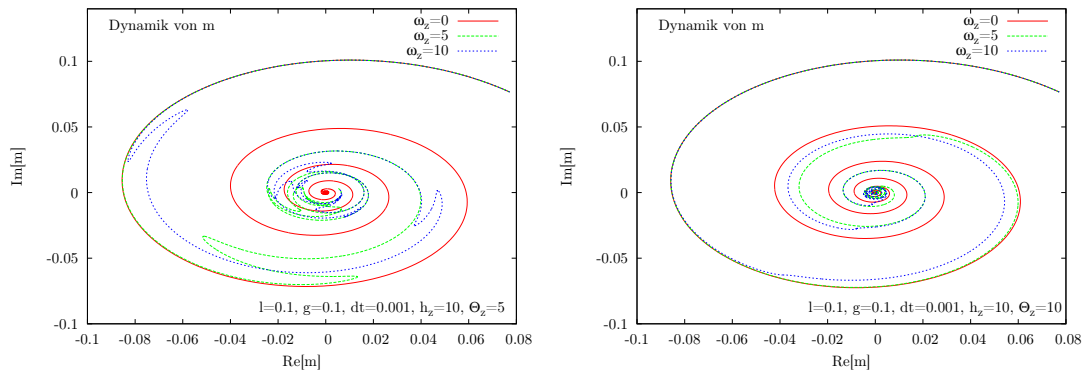
Feld immer eine Vorzugsrichtung ausgewiesen ist, die, vom Pumpfeld unbeeinflusst, dem Magnetisierungsvektor die bevorzugte Stellung aufzeigt. Die Umorientierung des Pumpfeldes kann diese bevorzugte Richtung nicht aufheben und verhindert ein-



zig die angesprochene Parallelstellung. Wie das von der Parallelstellung abtrünnige Verhalten genau aussieht, hängt natürlich im Wesentlichen von den Parameterwerten  $l, g, h_i$  und  $\omega_i$  ab. Abbildung B.17 bestätigt diese These für ein statisches Feld  $\Theta_x = 1$  und eine Pumpamplitude  $h_x = 10$ . Eine analoge Bestätigung erhalten wir für eine stärkeres statisches Feld in z-Richtung aus Abbildung B.18. Die Vorzugsrichtung kristallisiert sich bei stärkeren statischen Feldern natürlich wesentlich schneller heraus als bei schwächeren. Da für  $\Theta_z = 10$  und  $h_z = 10$  nie eine Richtungsänderung des gesamten äußeren Feldes stattfindet, kommt es in diesem Fall dennoch zur Parallelstellung von Magnetisierungsvektor und statischem Feld.



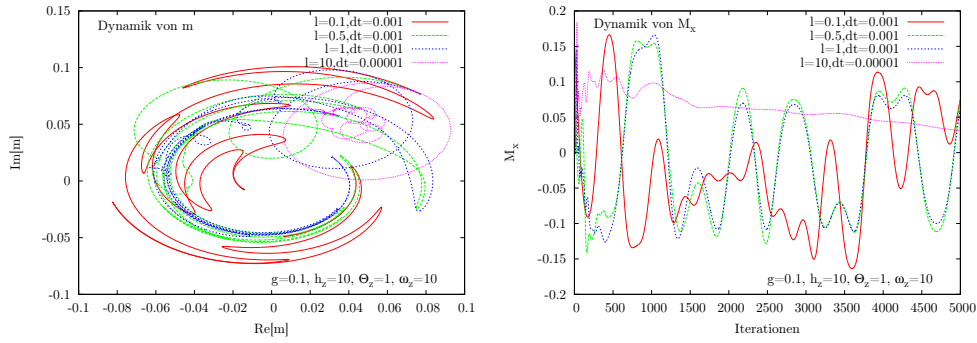
**Abbildung B.17:** Einfluss des statischen Feldes  $\Theta_x = 1$  auf die Magnetisierungsvektordynamik bei angelegtem Pumpfeld mit Frequenz  $\omega_x$  und Anregungsamplitude  $h_x = 10$ .  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.1] \cdot 1000$  ZS'.



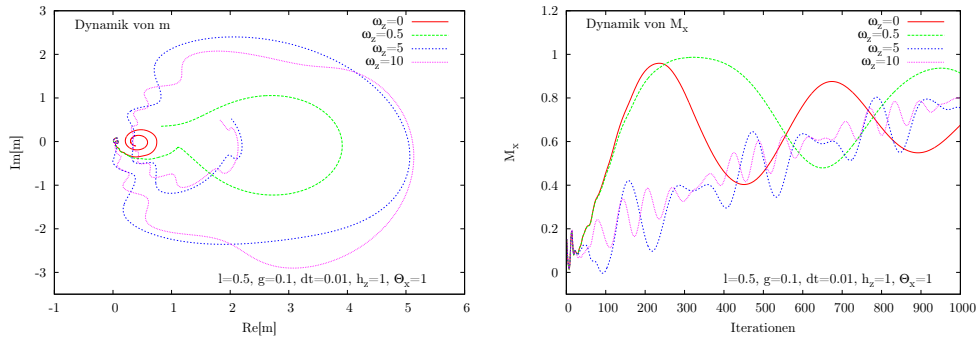
**Abbildung B.18:** Einfluss der statischen Felder  $\Theta_z = 5$  und  $\Theta_z = 10$  auf die Magnetisierungsvektordynamik bei angelegtem Pumpfeld mit Frequenz  $\omega_z$  und Anregungsamplitude  $h_z = 10$ .  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.1] \cdot 5000$  ZS'.

Wir wollen uns nun nochmals einen Eindruck davon verschaffen, wie die Austauschwechselwirkungskonstante  $D$  bzw. in unserem Fall der Parameter  $l$ , auf das Pumpfeld und damit auf die dynamischen Magnetisierungsvektorprozesse einwirkt. Es liegt in der Natur der Gleichung (B.3.1), dass die Auswirkungen ähnlich wie beim statischen Feld verlaufen sollten. Für einen relativ kleinen Wert von  $l$  dominieren die externen Felder, die dem Spinvektor sein dynamisches Verhalten aufoktroieren und eine schnellere Einstellung der Vektoren gemäß der Felder fordern. Die typischen Austauschwechselwirkungsbewegungen für sehr kleine  $l$  bleiben aus, womit auch der Zeitschritt im Integrationsverfahren höher gewählt werden kann, da es nicht mehr auf die 'feinen' Wechselwirkungsbewegungen benachbarter Spins ankommt. Bei großen  $l$  führt eine große Zeitschrittwahl sehr schnell zu falschen Ergebnissen und zur numerischen Instabilität, worauf wir in Abschnitt **B.1.1** explizit eingegangen sind. Die Magnetisierungsvektorbewegungen folgen zunächst gänzlich der Austauschwechselwirkung und werden sich erst relativ langsam entsprechend der externen Feldern orientieren (vgl. Abbildung B.19).

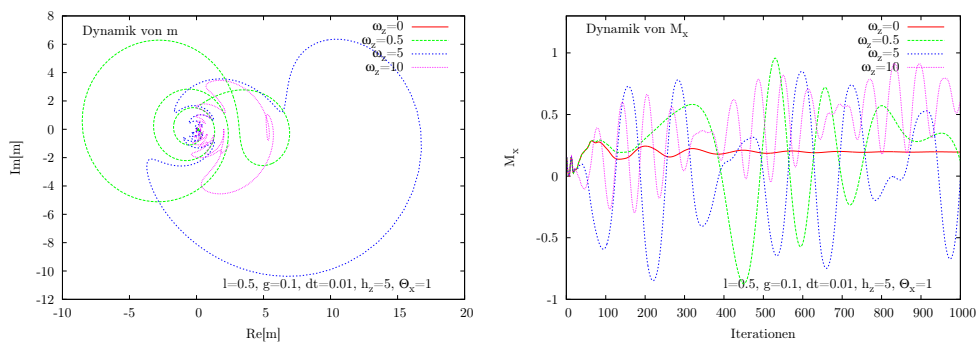
Es gibt nun einen wesentlichen Unterschied zwischen parallelem Pumpen, so wie wir es beschrieben haben, und Pumpen in beliebiger anderer Richtung, der sich darin manifestiert, dass sich zusätzlich zur Orientierung des äußeren Feldvektors auch seine Richtung zeitabhängig ändert. Damit ändert sich abhängig von der Frequenz  $\omega_i$  auch die Vorzugsrichtung für die Magnetisierungsvektoren. Für kleine Frequenzen ist diese Änderung relativ langsam, womit sich auch die Trajektorie in  $\mathbb{C}$  vergleichsweise langsam ändert. Mit den Regeln der Vektoraddition ist klar, in welchem Gebiet die Vorzugsrichtung für den Magnetisierungsvektor variieren muss. Dieses Raumgebiet ist natürlich abhängig von den Größen  $h_i \mathbf{e}_i$  und  $\Theta_j \mathbf{e}_j$  und umso größer, je größer wir die Anregungsamplitude  $h_i$  wählen. Für  $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$  sprechen wir vom senkrechten Pumpen. Die stetige Änderung der Vorzugsrichtung für einen Magnetisierungsvektor zeigt sich in Abbildung B.20. Die Probe wird folgerichtig unter senkrechtem Pumpeinfluss niemals gesättigt werden. Vergrößert man das Raumgebiet, in welchem sich die Vorzugsrichtung orientieren kann, durch Vergrößerung der Anregungsamplitude  $h_i$ , so wird auch die Trajektorie in  $\mathbb{C}$  auf einem größeren Raumgebiet verlaufen. Dennoch ist zu erwarten, dass im Mittel die Richtung des statischen Feldes ausgezeichnet bleibt und die Schwingungsbewegungen des Magnetisierungsvektors im Wesentlichen um diese ausgezeichnete Richtung erfolgen. Diese Vermutungen verifizieren sich in der numerischen Auswertung nach Abbildung B.21.



**Abbildung B.19:** Einfluss der Konstanten  $l$  für festes  $\omega_z = 10$  auf die Magnetisierungsvektordynamik bei angelegtem Pumpfeld mit  $h_z = 10$  und statischem Feld mit  $\Theta_z = 1$ .  $Re[m_0(\mathbf{r}, t), Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.1]$ . '5000 ZS'.



**Abbildung B.20:** Senkrechtes Pumpen mit  $h_z = 1$  zum statischen Feld mit  $\Theta_x = 1$  für unterschiedliche Frequenzen  $\omega_z$ .  $Re[m_0(\mathbf{r}, t), Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.1]$ . '1000 ZS'.



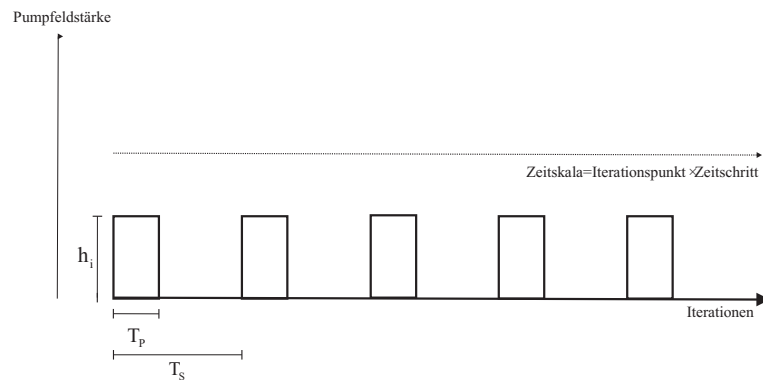
**Abbildung B.21:** Senkrechtes Pumpen mit  $h_z = 5$  zum statischen Feld mit  $\Theta_x = 1$  für unterschiedliche Frequenzen  $\omega_z$ .  $Re[m_0(\mathbf{r}, t), Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.1]$ . '1000 ZS'.

## 2. Rechteckgepulstes Pumpen

Es gibt vielfältige Möglichkeiten, einem System durch Pumpfelder Energie zuzuführen. Die in 1 eingeführte cosinusoidale Anregung änderte mit der Zeit stetig die Amplitude des Anregungsfeldes und hatte mit fester Periodizität immer wieder einen Vorzeichenwechsel zu verzeichnen. Anregungen über Rechteckpulse in der Form nach Abbildung B.22 weisen ein qualitativ etwas anderes Verhalten auf. Die Unstetigkeit der Anregung muss zu einem plötzlichen Sprung der Magnetisierungsvektoren führen. Dies ist für austauschdominierte Moden in der allgemeinsten Form der LLG schnell nachvollziehbar. Sei  $\mathbf{S}$  ein beliebiger Spinvektor, dann gilt mit der LLG unter reiner Austauschwechselwirkung und eindimensionaler Betrachtung die Gleichung <sup>6</sup>

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times \mathbf{S}'', \quad (\text{B.3.2})$$

wobei der Punkt wie üblich die zeitliche Ableitung kennzeichnet, während der hochgestellte Strich die eindimensionale Ortsableitung (z.B. in x-Richtung) symbolisiert. Zwingt man nun dem System an einer bestimmten Stelle <sup>7</sup> ein zusätzliches externes



**Abbildung B.22:** Iterativer Verlauf für das rechteckgepumpte System.  $h_i$  gibt den Betrag des Pumpfeldes an, welches in beliebige Richtung angelegt werden kann.

Feld  $\Theta\delta(x)$  auf, so muss der Spin  $\mathbf{S}$  der Gleichung

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times \mathbf{S}'' + \mathbf{S} \times \Theta(x)\delta(x) \quad (\text{B.3.3})$$

folgen. Wir können mit der Propagationsgeschwindigkeit  $v = \dot{x}$  annehmen, dass  $\dot{\mathbf{S}} = v\mathbf{S}'$  gilt und Gleichung B.3.3 aufintegrieren:

$$v(\mathbf{S}(\epsilon) - \mathbf{S}(-\epsilon)) = \mathbf{S}(\epsilon) \times (\mathbf{S}'(\epsilon) - \mathbf{S}'(-\epsilon)) + \mathbf{S}(\epsilon) \times \Theta(0) \quad (\text{B.3.4})$$

<sup>6</sup>Dies ist die allgemeinste skalierte Form der LLG.

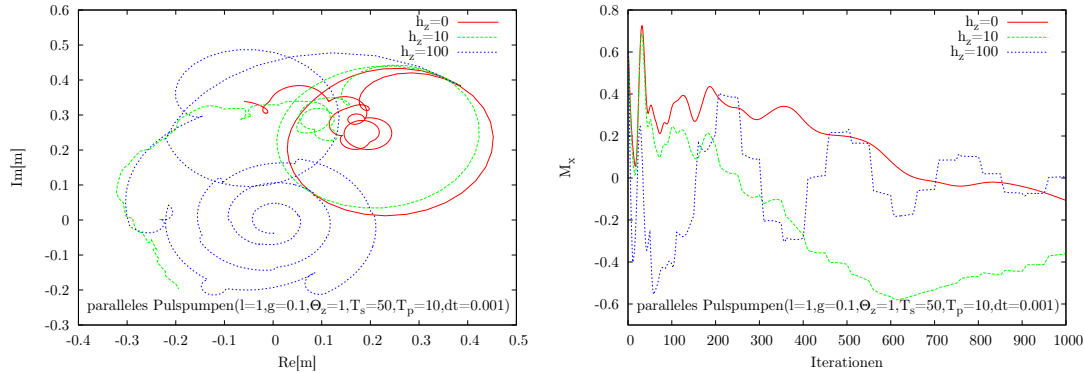
<sup>7</sup>Zum Beispiel an der Stelle  $x = 0$ .

Hierbei haben wir die Stetigkeit von  $\mathbf{S}$  angenommen, was sicherlich physikalisch seine Begründung findet; d.h.  $\mathbf{S}(\epsilon) = \mathbf{S}(-\epsilon)$ . Daraus resultiert ein Sprung von  $\mathbf{S}'$  um  $-\Theta(0)$ :

$$-\Theta(0) = \mathbf{S}'(\epsilon) - \mathbf{S}'(-\epsilon). \quad (\text{B.3.5})$$

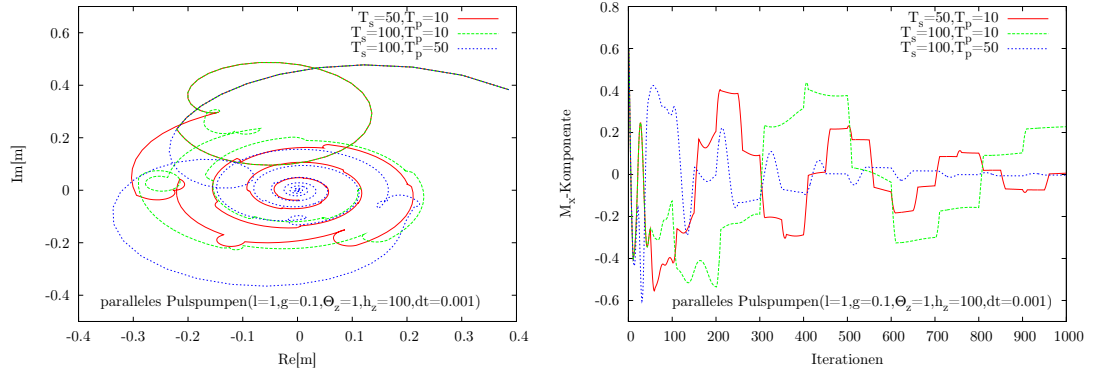
Die Unstetigkeit der Ableitung ist also direktes Resultat aus der Unstetigkeit des angelgten äußeren Feldes und man erwartet folgerichtig eine plötzliche Richtungsänderung der Magnetisierungsvektoren. Für die Zeit  $T_P$  muss sich der Magnetisierungsvektor also einem neuen, externen Feld unterordnen. Pumpst man nun parallel zum externen, statischen Feld, resultiert daraus je nach Orientierung des Pumpfeldes eine Verstärkung oder Schwächung des statischen Feldes, was zu einer qualitativen Änderung der relativen Stärke von Austauschwechselwirkung<sup>8</sup> und externem Feld führt. Die Auswirkung der relativen Stärke des statischen Feldes haben wir eingehend in Abschnitt **B.3.1** erläutert.

Wird aufgrund der Stärke und Orientierung des Pumpfeldes kein Vorzeichenwechsel vollzogen, muss sich ein Magnetisierungsvektor mit der Zeit parallel zum entsprechend orientierten statischen Feld ausrichten, d.h. das System wird unter Dämpfung gesättigt werden. Diese Sättigungsmöglichkeit existiert natürlich nur für parallel gepumpte Felder und ihr zeitlicher Verlauf ist konsequenterweise in starkem Maße abhängig von der Anregungsamplitude  $h_i$  (vgl. Abbildung B.23).

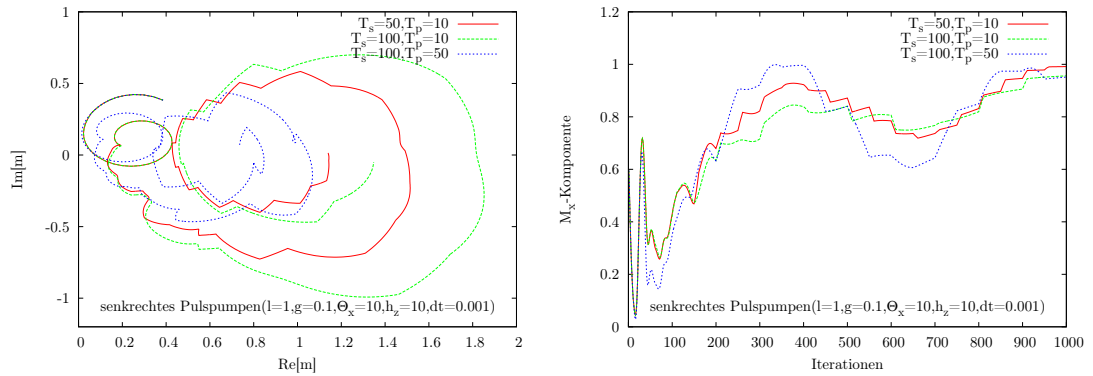


**Abbildung B.23:** Paralleles Rechteckpumpen zum statischem Feld mit  $\Theta_z = 1$  für unterschiedliche Werte von  $h_z$   $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.5]$ . 1000 ZS'.

<sup>8</sup>Wir haben in allen Berechnungen das Dipolfeld vernachlässigt.



**Abbildung B.24:** Paralleles Rechteckpumpen mit  $h_z = 100$  zum statischem Feld mit  $\Theta_z = 1$  für unterschiedliche Pumpdistanzen  $T_S$  und Pumpdauern  $T_P$ .  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.5] \cdot 1000$  ZS'.



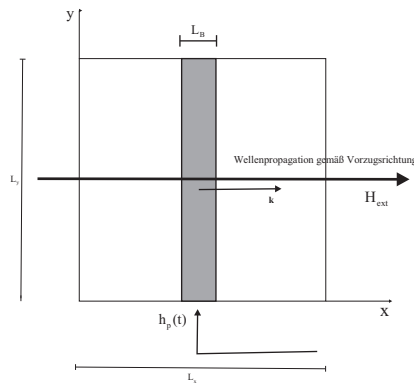
**Abbildung B.25:** Senkrecht-rechteckiges Pumpen mit  $h_z = 10$  zum statischen Feld mit  $\Theta_x = 10$  für unterschiedliche Pumpdistanzen  $T_S$  und Pumpdauern  $T_P$ .  $Re[m_0(\mathbf{r}, t)], Im[m_0(\mathbf{r}, t)] \in [0, 0.5] \cdot 1000$  ZS'.

Abbildung B.24 verifiziert die obigen Vermutungen. Bei starkem zugeschaltetem Pumpfeld ist die Austauschwechselwirkung relativ schwach und für die Dauer  $T_P$  manifestiert sich die typische Präzessionsbewegung um das neue, wesentlich stärkere Feld  $\mathbf{H}_{ext}$ . Nach  $T_S$  wird die Dynamik wieder mehr von den Austauschwechselwirkungsbeiträgen getragen. Der Vorgang wiederholt sich periodisch mit der Periode  $T_S$ . Da statisches Feld und Pumpfeld gleich orientiert sind, kommt es zur Sättigung, und zwar umso schneller, je kleiner  $T_S$  und je größer  $T_P$  gewählt werden. Folglich kann nur mit Vorzeichenänderung von  $\mathbf{H}_{ext}$  eine stetige Bewegung der Spins unter Dämpfungseinflüssen aufrechterhalten werden. Ganz anders verhält es sich beim Pumpen gemäß Abbildung B.22 unter beliebigen Winkeln zum statischen Feld, speziell bei senkrechter Pumpenanregung. Für die Zeit  $T_S$  ändert sich dann nämlich auch

die Richtung des effektiven, äußeren Feldes, welches sich aus statischem Feld und Pumpfeld zusammensetzt. Diese Richtungsänderung erhält die stetigen Schwingungen der Magnetisierungsvektoren um das statische Feld, so dass es unter Dämpfung nie zur Parallelstellung von  $\mathbf{H}_{ext}$  und  $\mathbf{M}$  kommen wird. Die Änderung der Vorzugsrichtung ist natürlich abhängig von der Wahl der Pulsamplitude  $h_i$ . Die effektive Richtung der Präzessionsbewegung ist zudem in starkem Maße abhängig von den Größen  $T_S$  und  $T_P$ . Abbildung B.25 trägt diesen Forderungen Rechnung. In allen Fällen jedoch ist deutlich die Unstetigkeit von  $\nabla\mathbf{M}$  an den Unstetigkeitsstellen des externen Feldes gemäß der Pumpenanregung nachzuvollziehen.

### 3. Lokalisiertes rechteckgepulstes Pumpen

In vielfältigen Experimenten geschieht die Anregung von Spinwellen über eine Antenne, die lokalisiert Mikrowellen einer gegebenen Frequenz in das System einbindet. Nach Abbildung B.26 ist es jedoch nicht klar, in welche Richtung die angeregte Spinwelle propagiert. Prinzipiell sind beide Richtungen gleich ausgezeichnet und man erwartet bidirektionale Wellenpropagation. Erst mit zusätzlichen statischen Feldern kann man wieder eine Vorzugsrichtung zur Wellenpropagation auszeichnen. Nun ermöglicht die Lokalisierung der Anregung die Erzeugung von Wellenpaketen



**Abbildung B.26:** Schematische Skizze für lokalisierte Anregungen. Die Antennenbreite  $L_B$  gibt die Breite der Anregung an, über die die Rechteckpulse gemäß Abbildung B.22 eingekoppelt werden.

endlicher Breite. Diesen Effekt kann man wie folgt verstehen.

Nehmen wir die gepulste Anregung aus 2 an, so wird während eines Pulses an der Lokalisierung die Vorzugsrichtung für die Magnetisierungsvektoren geändert. Für die Pulsdauer  $T_P$  präzedieren alle Magnetisierungsvektoren innerhalb der Lokalisierung um diese neu ausgezeichnete Richtung. Aufgrund der Austauschwechselwirkung<sup>9</sup> werden die zur lokalisierten Anregung benachbarten Magnetisierungsvektoren

<sup>9</sup>Wir vernachlässigen die Dipolwechselwirkung und betrachten rein austauschdominierte Moden.

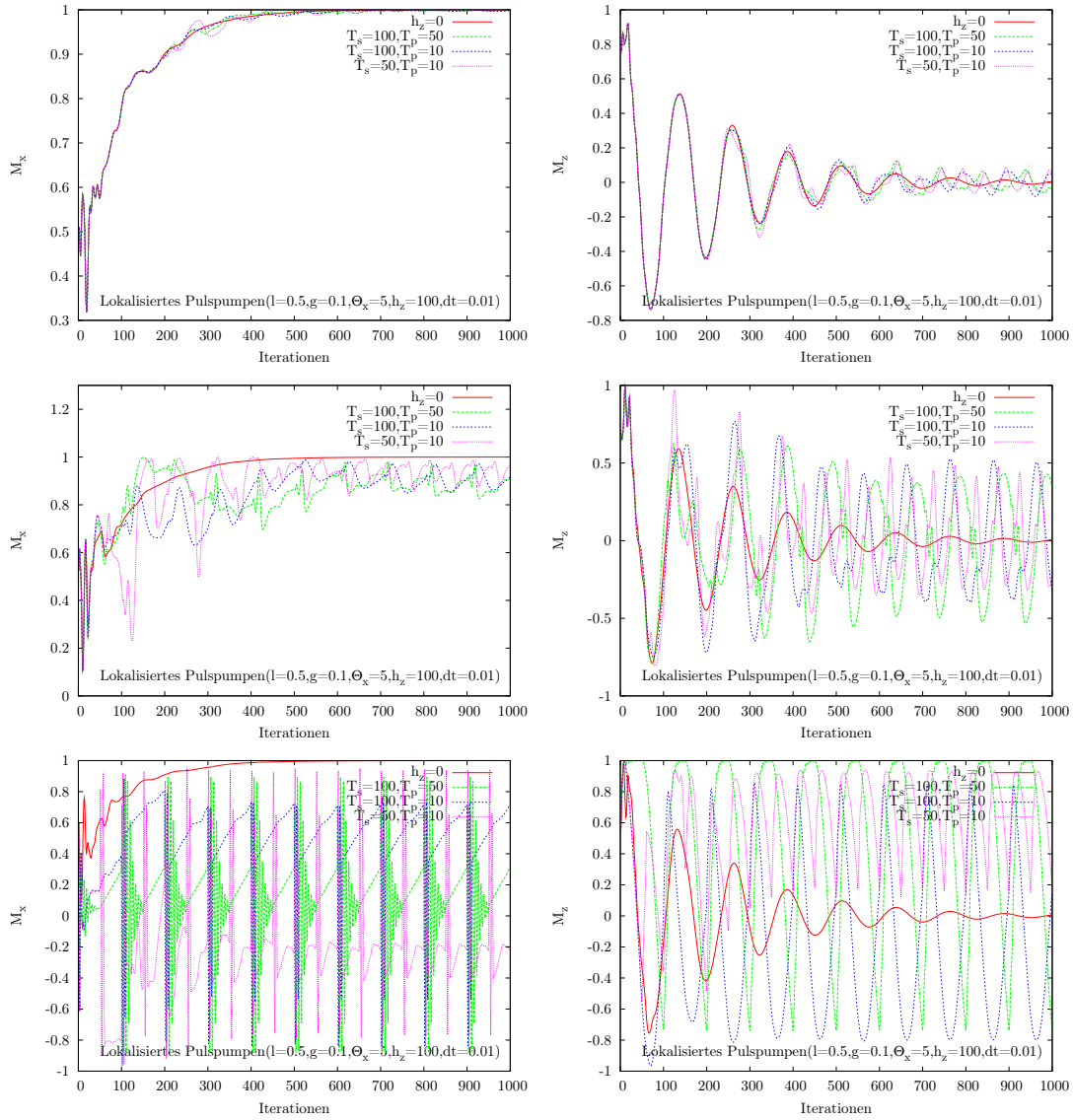
ren je nach Anregungsstärke und Größe der Austauschwechselwirkungskonstanten aus ihrer ursprünglichen Präzessionsbewegung um das statische Feld ausgelenkt. Ist die Probe zum Zeitpunkt der Anregung gesättigt, erfolgt eine neue Anregung, die sich im Medium als propagierende Welle (Magnon) fortsetzt. Ist die Zeit  $T_P$  verstrichen, richten sich alle Vektoren wieder gemäß dem statischen Feld aus; die Welle propagiert jedoch weiter, bis Dämpfung die Parallelstellung von statischem Feld und Magnetisierungsvektoren erzwingt.

Letztlich muss man natürlich für unterschiedliche Orte im Medium auch eine unterschiedliche Dynamik erwarten. Für einen Ort, der weit von der Anregungslagerung entfernt ist, muss die Anregung weniger starke Auswirkungen haben, als für einen Ort, der direkt an diesen Anregungstreifen angrenzt. Dieses prognostizierte Verhalten ist natürlich stark abhängig von der Austauschwechselwirkungskonstanten und der Dämpfung  $g$ . Wir tragen diesen Effekten mit den Abbildungen B.27 Rechnung, in denen das iterative Verhalten der Magnetisierungsvektorkomponenten am entsprechenden Ort im Medium aufgetragen ist.

### B.3.3 Problematiken bei der numerischen Analyse über die stereographische Projektion

Die stereographische Projektion stellt zwar ein mathematisch nützliches Hilfsmittel dar, um sich die relativ komplizierte, vektorwertige LLG zu veranschaulichen, ist aber zur numerischen Implementierung eher problematisch. Es ist im Wesentlichen der Verlust der Beschränktheit in der Projektionsmethode, der die Stabilität des Programms negativ beeinträchtigt. Schwierigkeiten treten immer dann in der numerischen Simulation auf, wenn keine ausgezeichneten Richtungen, beispielsweise durch äußere, statische Felder vorgegeben sind oder wenn die Austauschwechselwirkungsbeiträge derart groß sind, dass die Vorzugsrichtung sich anfänglich nicht genügend auszeichnen kann. Mit entsprechenden Anfangsbedingungen, die dem 'Fernheitsprinzip' Rechnung tragen, kann ein wesentlicher Anteil zur Stabilisierung des Programms geleistet werden. Um einen, in allen Parameterbereichen stabilen Programmcode zu erhalten, ist es sicherlich zweckmäßiger, direkt komplexe Größen  $M_+ = M_x + iM_y$  und  $M_- = M_x - iM_y$  einzuführen oder den Versuch zu unternehmen, das Problem in Kugelkoordinaten zu lösen. Ersteres Verfahren birgt den Nachteil, dass man keine Bijektion in die komplexe Zahlenebene mehr hat. Eigenschaften auf  $S^2$  werden also nicht in bijektiv stetiger Weise auf Eigenschaften der komplexen Variablen  $M_+$  und  $M_-$  übertragen. Im zweiten Verfahren muss mit komplizierter zu handhabenden Winkelvariablen gearbeitet werden. Welches Verfahren zur numerischen Implementierung der LLG genutzt wird, bleibt also der Versuchscharakteristik vorbehalten. Da der Fokus dieser Arbeit auf den Zusammenhängen zu der Kubischen Nichtlinearen Schrödinger-Gleichung liegen soll, haben wir uns dennoch für die 'problematische' stereographische Projektion entschieden.





**Abbildung B.27:** Lokalisiertes, senkrechtetes Rechteckpuls-pumpen. Oben: Dynamik von  $M$  weit entfernt von der lokalisierten Anregung. Mitte: Dynamik von  $M$  in der Nähe der Anregung. Unten: Dynamik von  $M$  innerhalb der Anregung. '1000 ZS'.



# Danksagung

Ich danke ganz herzlich Herrn Prof. Dr. Rudolf Friedrich für die interessante und spannende Themenstellung, die vielfältigen und jederzeit anregenden Gespräche zur Thematik, sowie der sehr guten Betreuung bei der Anfertigung dieser Arbeit.

Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. S. J. Linz für die mühevollte Zweitkorrektur und die lehrreichen Vorlesungen während des Hauptstudiums.

Dann möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. S. O. Demokritov bedanken, der diese Arbeit durch sein Experiment und die damit verbundene Fragestellung zum 'Möbiussoliton' erst ermöglicht hat.

Desweiteren bedanke ich mich bei der Arbeitsgruppe Friedrich, die mich so nett aufgenommen hat, mit denen ich in jeglicher Hinsicht während der gesamten Diplomzeit eine Menge Spass hatte und durch die ich einen Einblick in eine Vielzahl aktueller Forschungsgebiete bekommen habe. Gern werde ich mich an unsere gemeinsamen Workshops zurückerinnern.

Ein weiterer Dank gilt meinen Büronachbarn, Karsten und Christian, die mir fachlich und menschlich jederzeit zur Seite standen.

Schließlich danke ich auch meinen Eltern und meinen beiden Geschwistern, die mir stets ein wichtiger Rückhalt in dieser Zeit waren und mir bei der Fehlersuche sehr behilflich waren.



# Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig und unter keinen weiteren, als den angegebenen Hilfsmitteln durchgeführt und angefertigt habe.

Münster, den 14. Februar 2007

---

Fabian Schnier

## Literaturverzeichnis

- [1] AKHIEZER, A.I., BAR'YAKHTAR, V.G., AND PELETMINSKII, S.V. *Spin Waves*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.
- [2] ANDRÉ, A. Nichtlineare spinwellenpakete in yttrium-eisen-granat-filmen mit kontrollierten phaseneigenschaften. *Diplomarbeit am FB Physik der TU Kaiserslautern* (2004).
- [3] BARASHENKOV, I.V., BOGDAN, M.M., AND KOROBV, V.I. Stability diagram of the phase-locked solitons in the parametrically driven, damped nonlinear schrödinger equation. *Europhys. Letters* 15 (1991), 113–118.
- [4] BARASHENKOV, I.V., AND SMIRNOV, YU.S. Existence and stability chart for the ac-driven, damped nonlinear schrödinger equation. *Phys.Rev.E* 54 (1996), 5707–5725.
- [5] BARASHENKOV, I.V., SMIRNOV, YU.S., AND ALEXEEVA, N.V. Bifurcation to multisoliton complexes in the ac-driven, damped nonlinear schrödinger equation. *Phys.Rev.E* 60 (1999), 2350–2364.
- [6] BARASHENKOV, I.V., AND ZEMLYANAYA, E.V. Traveling solitons in the damped-driven nonlinear schrödinger equation. *J.Appl.Math.* 64, 3 (2004), 800–818.
- [7] BAUER, M., BÜTTNER, O., DEMOKRITOV, S.O., HILLEBRANDS, B., GRIMALSKI, V., RAPOPORT, YU., AND SLAVIN, A.N. Observation of spatiotemporal self-focusing of spin waves in magnetic films. *Physical Review Letters* 81, 17 (1998).
- [8] BAYER, C. *Quantisierung und Lokalisierung von Spinwellen in mikrometerbreiten magnetischen Streifen*. Diplomarbeit durchgeführt am Fachbereich Physik der TU Kaiserslautern, 2003.
- [9] CANUTO, C., HUSSAINI, M.Y., QUATERONI, A., AND ZANG, T.A. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag, New York, 1988.
- [10] CARR, L.D., CLARK, C.W., AND REINHARDT, W.P. Stationary solutions of the one-dimensional nonlinear schrödinger equation. 1. case of repulsive nonlinearity. *Phys.Rev.A* 62 (2000), 063610.

- 
- [11] CARR, L.D., CLARK, C.W., AND REINHARDT, W.P. Stationary solutions of the one-dimensional nonlinear schrödinger equation. 2. case of attractive nonlinearity. *Phys.Rev.A* 62 (2000), 063611.
- [12] CHAIKIN, P.M., AND LUBENSKY, T.S. *Principles of condensed matter physics*. Cambridge University Press, 2000.
- [13] CHERNIHA, R. Spherically symmetric solutions of nonlinear schrödinger equations. *Vienna, Preprint ESI 187*, Inst. of Mathematics; Ukrainian Academy of Science (1995).
- [14] DAMON, R.W., AND ESHBACH, J.R. *J.Phys.Chem.Solids* 19 (1961).
- [15] DEMOKRITOV, S.O., SERGA, A.A., DEMIDOV, V.E., HILLEBRANDS, B., KOSTYLEV, M.P., AND KALINIKOS, B.A. Experimental observation of symmetry-breaking nonlinear modes in an active ring. *Nature* 426 (2003), 159–162.
- [16] DEMOKRITOV, S.O., HILLEBRANDS, B., AND SLAVIN, A.N. Brillouin light scattering studies of confined spin waves: linear and nonlinear confinement. *Physics Reports* 348, 441 (2001).
- [17] ELMER, F. Pattern dynamics of parametrically excited spin waves near the instability threshold. *Physical Review B* 53, 21 (1995).
- [18] FISCHER, W., AND LIEB, I. *Funktionentheorie*. Vieweg, 2003.
- [19] GASSER, W., HEINER, E., AND ELK, K. *Greensche Funktionen in Festkörper- und Vielteilchenphysik*. Wiley-VCH, 2001.
- [20] HAKEN, HERMANN, AND WOLF, HANS CHRISTIAN. *Atom- und Quantenphysik*. Springer-Verlag, 2004.
- [21] HANNE, G. F. *Atom und Molekülphysik*. Skript zur Vorlesung an der WWU Münster, 2004.
- [22] HILLEBRANDS, B. *Spinwellen in magnetischen Schichten und Vielfachschichten*. Manuskript, 1993.
- [23] HILLEBRANDS, B., AND ONUNADJELA, K. Spin dynamics in confined magnetic structures 1. Springer, 2002, ch. Slavin, A.N. and Demokritov, S.O. and Hillebrands, B.; Nonlinear Spinwaves in One- and Two-Dimensional Magnetic Waveguides (Chpt.2).
- [24] HILLEBRANDS, B., AND ONUNADJELA, K. Spin dynamics in confined magnetic structures 1. Springer-Verlag, 2002, ch. Miltat, J. et al.; An Introduction to Micromagnetics in the Dynamic Regime (Chpt.1).

- [25] HURBEN, M.J., AND PATTON, C.E. Theory of magnetostatic waves for in-plane magnetized isotropic films. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 139, 263 (1995).
- [26] INFELD, E., AND ROWLANDS, G. *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*. Cambridge University Press, 1992.
- [27] KANNA, T., TSOY, E.N., AND AKHMEDIEV, N. On the solution of multicomponent nonlinear schrödinger equations. *Physics Letters A* 330 (2004), 224–229.
- [28] KAUP, D.J., AND NEWELL, A.C. Solitons as particles, oscillators, and in slowly changing media: A singular perturbation theory. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 361 (1978), 413–446.
- [29] KAUP, D.J., AND NEWELL, A.C. Theory of nonlinear oscillating dipolar excitations in onedimensional condensates. *Phys. Rev. B* (1978), 5162–5167.
- [30] KITTEL, C. *Einführung in die Festkörperphysik*. Oldenbourg, 1999.
- [31] KIVSHAR, YURI S., AND MALOMED, BORIS A. *Dynamics of solitons in nearly integrable systems*, vol. 61. Reviews of Modern Physics, 1989.
- [32] LAKSHMANAN, M., AND NAKAMURA, K. Landau-lifshitz equation of ferromagnetism: Exact treatment of the gilbert damping. *Physical Review Letters* 53, 26 (1984).
- [33] LANDAU, L.D., AND LIFSHITZ, E.M. On the theory of dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Z. Sowjet. 8*, 153 (1935).
- [34] LAX, B., AND BUTTON, K.J. *Microwave Ferrites and Ferrimagnetics*. McGraw Hill, New York, 1962.
- [35] LAX, B., AND BUTTON, K.J. *Microwave Ferrites and Ferrimagnetics*. McGraw-Hill, New York, 1962.
- [36] LIGHTHILL, M. Contributions to the theory of waves in non-dispersive systems. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications* 1, 269 (1965).
- [37] L'VOV, V. *Wave Turbulence Under Parametric Excitation*. Springer, Berlin, 1994.
- [38] MALOMED, B. Bound solitons in the nonlinear schrödinger-ginzburg-landau equation. *Physical Review A* 44 (1991), 6954–6957.



- 
- [39] MILES, J. Parametrically excited solitary waves. *J.Fluid Mech.* (1984), 451–460.
- [40] MÜLLGES,G.E., NIEDERDRENK,K., AND WODICKA,R. *Numerik Algorithmen.* Springer, Berlin, 2005.
- [41] NOLTING, W. *Grundkurs der theoretischen Physik 3.* Springer-Verlag, 2004.
- [42] NOVIKOV,S., MANAKOV,S.V., PITAEVSKII,L.P., AND ZAKHAROV,V.E. *Theory of Solitons.* Consultants Bureau, New York, 1984.
- [43] PRESS,W.H., FLANNERY,B.P., TEUKOLSKY,S.A., AND VETTERLING,W.T. *Numerical Recipes.* Cambridge, 1987.
- [44] ROWLANDS, G. On the stability of solutions of the nonlinear schrödinger equation. *J.Inst.Maths Applics 13* (1973), 367–377.
- [45] SLAVIN,A.N., AND KALINIKOS,B.A. *Sov.Phys.Tech.Phys 32*, 1446 (1987).
- [46] SLAVIN,A.N., AND ROJDESTVENSKI,I.V. Bright and dark spinwave envelope solitons in magnetic films. *IEEE Trans.Mag. 30*, 37 (1994).
- [47] STÖCKER, H. *Taschenbuch der Physik.* Verlag Harri Deutsch, 2000.
- [48] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos.* Westview Press, 2000.
- [49] TANNOUJJI,C.C., DIU,B., AND LALOË,F. *Quantenmechanik 1.* Walter de Gruyter, 1999.
- [50] TANNOUJJI,C.C., DIU,B., AND LALOË,F. *Quantenmechanik 2.* Walter de Gruyter, 1999.
- [51] WALKER, L. Magnetostatic modes in ferromagnetic resonance. *Physical Review 105* (1957).
- [52] WEISSMANTEL,CH., AND HAMANN,C. *Grundlagen der Festkörperphysik.* Johann Ambrosius Barth, 1995.
- [53] WHITHAM, G. *Linear and Nonlinear Waves.* Wiley Interscience, 1999.
- [54] WIGEN, P. Nonlinear phenomena and chaos in magnetic materials. World Scientific, 1994, ch. Slavin,A.N. and Kalinkos,B.A. and Kovshikov,N.G.; Spin Wave Envelope Solitons in Magnetic Films (Chpt.9).
- [55] WIGEN, P. Nonlinear phenomena and chaos in magnetic materials. World Scientific, 1994, ch. Ming Chen and Carl E. Patton; Spin Wave Instability Processes in Ferrites (Chpt.3).

- [56] WIGEN, P. E. *Nonlinear Phenomena and Chaos in magnetic materials.* World Scientific, 1994.
- [57] ZAKHAROV, V.E., L'VOV, V.S., AND STAROBINETS, S.S. *Sov.Phys.-Solid State* 11 (1970), 2368.
- [58] ZAKHAROV, V.E., L'VOV, V.S., AND STAROBINETS, S.S. *Sov.Phys.Usp.* 17 (1975), 896.