

Analyse der turbulenten zweidimensionalen inversen Kaskade mittels eines Rotor-Modells

als Diplomarbeit vorgelegt von

Benjamin Motz

August 2012



Westfälische Wilhelms-Universität
Münster

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Grundlagen	3
2.1. Navier-Stokes Gleichungen	3
2.2. Wirbeltransportgleichung	4
2.3. Eulergleichungen	5
2.3.1. Erhaltungsgrößen	5
2.4. Kirchhoff Punktwirbel	6
2.5. Punktwirbel mit periodischen Rändern	7
2.6. Statistische Beschreibung einer Strömung	9
2.6.1. Statistik in Punktwirbelsystemen	9
2.6.2. Onsagers Theorie	10
2.6.3. Ergodizität	11
2.7. Kaskadenprozesse	12
2.7.1. Energiebilanzgleichung	13
2.7.2. Energiefluss in zwei Dimensionen	14
3. Das Rotormodell	15
3.1. Elliptischer Verzug bei der inversen Kaskade	15
3.2. Entwicklungsgleichung für gaußförmige, isolierte Wirbelstrukturen	15
3.3. Die Rotornäherung	19
3.4. Das Rotormodell	20
4. Statistische Analysen	23
4.1. Clustering (<i>Wirbelkondensation</i>)	23
4.2. Paarkorrelation	24
4.3. Kondensationsschwelle	28
4.4. Energiespektrum	35
4.4.1. Normale Punktwirbel	35
4.4.2. Rotoren	37
5. Numerische Methoden	42
5.1. Zeitintegration	42
5.2. Spektrale Berechnungen	43
5.2.1. Räumliche Diskretisierung von Punktwirbeln	43
5.2.2. Check des Geschwindigkeitsfeldes	47
5.3. Beschleunigung der Rechnungen	49

6. Zusammenfassung und Ausblick	50
A. Die beiliegende CD	52
B. Danksagung	53
Literaturverzeichnis	53
C. Selbständigkeitserklärung	56

1. Einleitung

Turbulente Strömungen lassen sich im Alltag ständig beobachten. Sei es ein Wasserfall mit seinen Verwirbelungen, der aufsteigende Rauch eines Vulkans, die Wirbelschleppe eines Flugzeugs oder die Bildung eigenartiger Wolkenformationen am Himmel. Dabei dürfte uns oft nicht bewusst sein, welch komplexe Interaktionen zu diesen Phänomenen führen. Tatsächlich ist Turbulenz eines der Gebiete in der Physik, welches selbst nach Aussage der intelligentesten Köpfe unserer Zeit die größten Geheimnisse in sich birgt. Einer von ihnen war Horace Lamb, der dies folgendermaßen zum Ausdruck brachte

I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic.

Die Navier-Stokes-Gleichungen, welche nach allgemeiner Auffassung die Dynamik laminarer und auch turbulenter Strömungen vollständig beschreiben, sind bereits seit 1823 bekannt. Doch bis heute ist nicht bekannt, ob sie überhaupt allgemeine Lösungen besitzen.

Der Titel dieser Arbeit lautet auf zweidimensionale Turbulenz. Man darf sich fragen, welchen Platz diese in unserem dreidimensionalen Raum findet. Es ist in der theoretischen Physik jedoch durchaus nicht unüblich, sich komplizierten Phänomenen durch die Betrachtung von (hoffentlich) einfacheren zu nähern und die Ergebnisse zu nutzen, um an das Geheimnis des vollständigen Problems heranzukommen.

Darüber hinaus finden sich in der uns umgebenden Natur tatsächlich auch Beispiele, die sich als näherungsweise zweidimensional erweisen und Eigenschaften zeigen, die sich eindeutig zweidimensionalen Strömungen zuordnen lassen. Dazu zählen beispielsweise Oberflächenwellen. Dies ist etwa in vielen Planetenatmosphären der Fall, deren Höhe im Vergleich zu ihrer lateralen Ausdehnung klein ist. Eines Beispiel dafür sieht man auf nebenstehender Abbildung. Es handelt sich um den berühmten Großen Roten Fleck zusammen mit zwei kleineren Flecken auf dem Planeten Jupiter. Seine Existenz wurde bereits vor 300 Jahren beobachtet und lässt sich vermutlich mit einem Prozess erklären, der ausschließlich in zweidimensionaler Turbulenz vorkommt, nämlich der *inversen Kaskade*, um die es auch in dieser Arbeit gehen soll.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

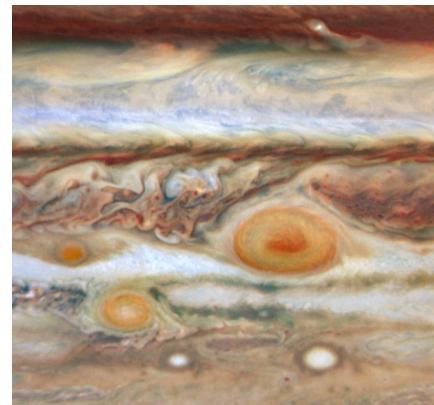


Abb. 1.1. Jupiterfleck (Quelle: ESA)

Im zweiten Kapitel werden theoretische Grundlagen eingeführt, die zum Verständnis der Arbeit nötig sind. Von den Grundgleichungen der Hydrodynamik ausgehend wird die Wirbeltransportgleichung abgeleitet und die Punktwirbellösung erläutert, die in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielt. Schließlich werden wichtige Ergebnisse zu statistischen Theorien zusammengefasst.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit einer Erweiterung der Punktwirbellösung, dem sogenannten Rotormodell. Hierzu werden Entwicklungsgleichungen für allgemeine Ellipsen hergeleitet und auf den Spezialfall unendlich dünner Ellipsen reduziert. Dieses Modell gestattet die Beschreibung von Anziehung zwischen Wirbelstrukturen.

Im vierten Kapitel wird das Modell für eine große Wirbelanzahl numerisch simuliert und statistisch ausgewertet. Es werden Vergleich gezogen zu normalen Punktwirbeln und direkten numerischen Simulationen der Wirbeltransportgleichung.

Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit den verwendeten numerischen Methoden und erläutert Lösungsansätze für die bei der Simulation auftretenden Schwierigkeiten.

Schließlich wird die Arbeit zusammengefasst und es werden offene Fragestellungen zum dem Themenkomplex diskutiert, die für zukünftige Arbeiten interessant sein könnten.

2. Grundlagen

2.1. Navier-Stokes Gleichungen

Die Grundgleichungen zur Beschreibung der Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit sind die Navier-Stokes Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.2)$$

Hierbei wird das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit mit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet, $p(\mathbf{x}, t)$ ist das Druckfeld, ν die kinematische Viskosität und $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ eine externe Kraft. Zur Vervollständigung muss zusätzlich die Geschwindigkeit auf dem Rand des betrachteten Gebiets bekannt sein. Die Navier-Stokes Gleichungen lassen sich aus elementaren Überlegungen zur Beschleunigung von Flüssigkeits-Volumenelementen ableiten (Pope, 2000).

Strömungen lassen sich mit Hilfe der Reynoldszahl

$$Re := \frac{UL}{\nu} \quad (2.3)$$

in Ähnlichkeitsklassen unterteilen. Hier sind U und L charakteristische Längen und Geschwindigkeitsskalen der Strömung. Die in den Navier-Stokes-Gleichungen auftretenden Größen können mit den charakteristischen Größen reskaliert werden, so dass nur noch die Reynoldszahl als Skalenmaß auftritt.

Der Druck kann in Gleichung (2.1) in Zusammenhang mit dem Geschwindigkeitsfeld gebracht werden, indem man die Divergenzfreiheit (2.2) ausnutzt

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad (2.4)$$

Mit Hilfe einer Greenschen Funktion lässt sich die Gleichung lösen. Die genaue Form der Lösung hängt von den genauen Randbedingungen des die Strömung begrenzenden Gebietes ab. In einem unendlich ausgedehnten dreidimensionalen Gebiet mit verschwindender Geschwindigkeit im Unendlichen erhält man folgende Lösung

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 x' \frac{\nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}', t))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.5)$$

Damit bilden die Grundgleichungen (2.1) und (2.2) ein geschlossenens Gleichungssystem. Allerdings ist die Dynamik der Strömung damit nichtlokal, d.h. die Geschwindigkeitsänderung an einem Ort \mathbf{x} wird nicht nur durch die Strömung im umliegenden Gebiet des

Ortes beeinflusst, sondern durch das Verhalten im kompletten Gebiet einschließlich der Ränder. Der Druckterm vermittelt langreichweite Kräfte und ist zusammen mit dem nichtlinearen Advektionsterm Ursache für komplexe Interaktion zwischen den Skalen.

Der Viskositätsterm $\nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ übt einen glättenden Einfluss auf die Strömung aus, durch welche kleinen Verwirbelungen verschwinden. Der nichtlineare Advektionsterm ist verantwortlich für den Transport von Flüssigkeitselementen. Wenn der Advektionsterm das Verhalten dominiert und der glättende Einfluss der Viskosität gering ist, entsteht turbulentes Strömungsverhalten. Dies korrespondiert mit hohen Reynoldszahlen.

Insgesamt sind die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen partielle, nichtlineare Integrodifferentialgleichungen. Die Existenz allgemeiner geschlossener Lösungen ist nicht bekannt, man kennt lediglich spezielle Lösungen.

2.2. Wirbeltransportgleichung

Wie eingangs erwähnt, finden sich in der Welt der Flüssigkeiten eine Vielzahl von Beispielen, wo lokalisierte Strukturen eine sichtbare Rolle spielen. Solche kohärenten Strukturen lassen sich meist besser anhand der Wirbelstärke beschreiben

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

Für die Wirbelstärke lassen sich durch Einsetzen in die Navier-Stokes Gleichungen Entwicklungsgleichungen, die Wirbeltransportgleichungen formulieren

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

Zum Erhalt dieser Gleichungen wurde die Graßmann-Identität verwendet, um den Advektionsterm umzuformulieren. Die dabei auftauchenden Rotationen von Gradientenfeldern, darunter des Drucks, verschwinden identisch.

Genau wie die Navier-Stokes Gleichungen ermöglichen die Wirbeltransportgleichungen zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung eine vollständige Beschreibung der Flüssigkeitsdynamik. Um von der Wirbelstärke auf das Geschwindigkeitsfeld zu schließen, muss der Rotationsoperator invertiert werden. Die Lösung ist durch ein Biot-Savartsches Gesetz gegeben

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \int d^3 x' \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \times \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.8)$$

\mathbf{u}_0 ist eine beliebige Potentialströmung und \mathbf{K} ist der negative Gradient der Greenschen Funktion

$$\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (2.9)$$

Damit ist auch klar, dass die Nichtlokalität bei der Wirbeltransportgleichung erhalten bleibt, obwohl der Druckterm eliminiert werden konnte. Sie tritt nun in dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ auf, welches mit dem Biot-Savartschen Gesetz berechnet werden muss.

Da wir in dieser Arbeit an Flüssigkeiten in zweidimensionalen Gebieten interessiert sind beschränken sich die folgenden Betrachtungen auf diesen Spezialfall.

Der Kern $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ ist in zwei Dimensionen gegeben durch (siehe z.B. [Argyris u. a., 2010](#))

$$\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \quad (2.10)$$

In zweidimensionalen Strömungen liegt die Wirbelstärke senkrecht zum Geschwindigkeitsfeld. Dadurch verschwindet der Wirbelstreckungsterm

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \omega_z(x, y, t) \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

und die Wirbeltransportgleichung erhält folgende Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.12)$$

Das Wegfallen des Wirbelstreckungsterms ist mitverantwortlich dafür, dass sich Wirbel in zwei Dimensionen zu großen Strukturen sammeln können, ein Phänomen, was in drei Dimensionen nicht beobachtet wird.

2.3. Euler-Gleichungen

Bei der Beschreibung einer (idealisiert) reibungsfreien Flüssigkeit, in der dissipative Effekte nicht auftreten, muss in den Navier-Stokes Gleichungen der Grenzübergang $\nu \rightarrow 0$ vollzogen werden. Da dadurch eine zweite räumliche Ableitung entfällt, müssen auch andere Randbedingungen gefordert werden. Nur die Komponente senkrecht zum Rand \mathbf{u}_\perp muss bekannt sein, die Parallelkomponente der Geschwindigkeit ist frei. Dies ist schon deshalb klar, weil es ohne Reibung keine Wechselwirkung zwischen \mathbf{u}_\parallel und Rand geben kann.

Betrachtet man eine ideale Flüssigkeit ohne Einwirkung äußerer Kräfte, so gelangt man zu den Euler-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) \quad (2.13)$$

Die entsprechende Wirbeltransportgleichung lautet

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.14)$$

2.3.1. Erhaltungsgrößen

Bei der Beschränkung auf zwei Dimensionen wird die Enstrophe zur Erhaltungsgröße. Sie ist definiert als

$$\Omega(t) = \frac{1}{2} \left\langle \boldsymbol{\omega}^2(\mathbf{x}, t) \right\rangle \quad (2.15)$$

Ihre Entwicklungsgleichung lässt sich durch Multiplikation der Wirbeltransportgleichung mit $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ und anschließende Mittelung ableiten:

$$\frac{d}{dt} \Omega(t) = \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (2.16)$$

Für die kräftefreie Eulerflüssigkeit ist sie zeitlich konstant.

Bei der Analyse nichtviskoser, inkompressibler Flüssigkeiten kommt der *Zirkulation* eine wichtige Bedeutung zu. Sie ist definiert als

$$\Gamma_L = \oint_L \mathbf{u} \cdot d^n s = \int_F \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, d^{n+1} F \quad (2.17)$$

wobei L die geschlossene Kurve um die Fläche F ist und im zweiten Schritt der Stokessche Integralsatz angewandt wurde.

Das Kelvinsche Zirkulationstheorem besagt, dass die in einer Flüssigkeit mitbewegte Zirkulation zeitlich konstant ist. Die Aussage gilt unter der Bedingung, dass es sich um eine nichtviskose, inkompressive und barotrope¹ Flüssigkeit handelt.

2.4. Kirchhoff PunktWirbel

Die nichtviskose Wirbeltransportgleichung kann unter bestimmten Anfangsbedingungen zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen vereinfacht werden (Argyris u. a., 2010, Kap. 9). Dabei wird hier nur der zweidimensionale Fall betrachtet. Dieses Wirbelstärkefeld ist durch eine Überlagerung von δ -Distributionen gegeben, sogenannten Punkt-wirbeln:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \mathbf{e}_z \quad (2.18)$$

Die Wirbel sind alle parallel zur \mathbf{e}_z -Achse angeordnet. Sie unterliegen der Dynamik der Gleichung (2.14). Nun kann man zu einer Lagrangeschen Beschreibung des Fluids übergehen, in der die Koordinaten dem Strömungsverlauf folgen. Sie werden also zeitabhängig: $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j(t)$. Für den Ort eines Wirbels ergibt sich deshalb folgende Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_j(t) = \sum_{l \neq j} \Gamma_l \mathbf{e}_z \times \mathbf{K}(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_l(t)) = \sum_{l \neq j} \Gamma_l \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l}{2\pi |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l|^2} \quad (2.19)$$

Darin wurde der Green-Kern $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ für den zweidimensionalen Fall eingesetzt. Der divergierende Term mit $l = j$ wurde von der Summe abgezogen, da die Bewegungsänderung sonst divergieren würde.

Die Zirkulationen Γ_j der PunktWirbel bleiben wegen des Kelvinschen Zirkulationstheorems in dieser Lagrangeschen Beschreibung konstant. Dieses System besitzt hamiltonsche Eigenschaften und ist besonders gut geeignet, um mit Hilfe der Methoden dynamischer Systeme untersucht zu werden.

Nach dem Ausrechnen des Kreuzprodukts und Einführung der Definitionen $x_{ij} := x_i - x_j$, $y_{ij} := y_i - y_j$ sowie $r_{ij} := x_{ij}^2 + y_{ij}^2$ erhält man in Koordinatenschreibweise die Entwicklungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i} \frac{\Gamma_j}{r_{ij}^2} \begin{pmatrix} -y_{ij} \\ x_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

¹barotrop bedeutet, dass der Druck unabhängig von der Temperatur und der Dichte der Flüssigkeit ist

Punktwirbel besitzen eine konstante Gesamtenergie und sind ein hamiltonsches System. Für Punktwirbel im unendlich ausgedehnten Raum lautet die Hamiltonfunktion

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_l \sum_{j \neq l} \Gamma_j \Gamma_l \ln |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l|. \quad (2.21)$$

Darüber hinaus können drei weitere Erhaltungsgrößen identifiziert werden: Die beiden Koordinaten des Wirbelschwerpunkts

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_l \Gamma_l \mathbf{x}_l}{\sum_l \Gamma_l} \quad (2.22)$$

unter der Bedingung nichtverschwindender Gesamt-Zirkulation, sowie eine Art Wirbel-Drehimpuls

$$L = \sum_j \Gamma_j \mathbf{x}_j^2 \quad (2.23)$$

Die kanonisch konjugierten Variablen des Systems sind die x - und y -Komponenten der Punktwirbel:

$$\begin{aligned} \Gamma_j \frac{dx_j}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y_j} H \\ \Gamma_j \frac{dy_j}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_j} H \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.5. Punktwirbel mit periodischen Rändern

Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung von Prozessen, die zur Clusterbildung in zweidimensionaler Turbulenz führen. Die Betrachtung von Punktwirbeln in der unendlich ausgedehnten Ebene führt dabei nicht zum Ziel, da eine endliche Wirbelanzahl sich über den gesamten Raum verteilt. Dann findet keine Wechselwirkung zwischen Wirbelstrukturen mehr statt. Deshalb muss dafür gesorgt werden, dass Wirbelstrukturen dauerhaft interagieren können. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten:

- Man betrachtet Wirbelstrukturen mit Zirkulationen gleichen Vorzeichens ([Lundgren u. Pointin, 1977](#)). Diese werden in der Summe eine große Kreisbewegung um ihren Schwerpunkt ausführen. Wirbel entgegengesetzter Vorzeichen würden sich paaren und weit von der Wirbelansammlung entfernen. Durch ihr Fehlen bleibt die Kreisbewegung stabil.
- Die Punktwirbel werden in einem endlichen Gebiet eingeschlossen. Häufig wurde ein zylindrisches Gebiet betrachtet (z.B. [Bühler, 2002](#)). Die Implementierung der Randbedingung geschieht über ein Prinzip, welches ganz analog zur Methode der Spiegelladungen in der Elektrodynamik funktioniert: Die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand soll verschwinden, was über die Platzierung eines Spiegelwirbels entgegengesetzten Vorzeichens außerhalb des Gebiets erreicht wird.
- Es werden unendlich viele Punktwirbel betrachtet: ein periodisch fortgesetztes Punktwirbelfeld. Dieser Ansatz besitzt den Vorteil, dass viele direkte numerische

Turbulenzsimulationen ebenfalls in periodischen Randbedingungen ausgeführt werden. Ergebnisse können damit einfacher verglichen werden. Deshalb soll dieser Ansatz hier verfolgt werden.

Die Konstruktion der Bewegungsgleichungen und der Hamiltonfunktion für PunktWirbel in periodischen Randbedingungen soll hier kurz skizziert werden, in Anlehnung an Weiss u. McWilliams (1991). Eine gute Einführung zur Methode der Spiegelwirbel findet sich auch in Newton (2001).

Die Erweiterung auf periodische Ränder wird hier für eine Periodenlänge von 2π vorgenommen. Durch Reskalierung der Einheiten lässt sich der allgemeine Fall auf diesen zurückführen. Außerdem wird angenommen, dass alle Zirkulationsbeträge $|\Gamma_j|$ gleich groß sind. Die periodischen Randbedingungen werden durch Summation über unendlich viele Spiegelwirbel erreicht.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^N \Gamma_j \begin{pmatrix} -S(y_{ij}, x_{ij}) \\ +S(x_{ij}, y_{ij}) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

mit den doppelt-unendlichen Summen

$$S(x, y) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{x - 2\pi n}{(x - 2\pi n)^2 + (y - 2\pi m)^2}. \quad (2.26)$$

Sie sind als Grenzwert der Partialsummen für $M, N \rightarrow \infty$

$$S_{M,N}(x, y) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \frac{x - 2\pi n}{(x - 2\pi n)^2 + (y - 2\pi m)^2} \quad (2.27)$$

zu verstehen. Um diese Doppelsumme auszurechnen muss man die Methode der LaplaceTransformation anwenden und macht sich zu Nutze, dass die Grenzübergänge unabhängig von der Reihenfolge der Grenzwertbildung sein müssen (Weiss u. McWilliams, 1991). Schließlich erhält man für die endlichen Summen $S_{M,N}$ die Beziehung

$$S_{M,N} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cosh(y - 2\pi m) - \cos(x)} + \frac{x}{2\pi} - \frac{x}{\pi^2} \arctan\left(\frac{N}{M}\right) \quad (2.28)$$

Das Verhältnis N/M kann bestimmt werden aus der Tatsache, dass ein PunktWirbel, der sich im Abstand $x_{ij} = \pi$ befindet keinen Beitrag zur Geschwindigkeit liefert. Deswegen ist $S(\pi, y) = 0$, die letzten beiden Terme in (2.28) müssen sich also kompensieren. Dies erfordert insbesondere $N = M$. Damit lautet die korrekte unendliche Summe

$$S(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cosh(y - 2\pi m) - \cos(x)} \quad (2.29)$$

Die Summe hat die nützliche Eigenschaft, sehr schnell zu konvergieren. Die PunktWirbel-Bewegungsgleichungen lauten somit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{pmatrix} = \sum_{j \neq i}^N \Gamma_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{-\sin(y_{ij})}{\cosh(x_{ij} - 2\pi m) - \cos(y_{ij})} \\ \frac{\sin(y_{ij})}{\cosh(y_{ij} - 2\pi m) - \cos(x_{ij})} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Die Vorfaktoren wurden durch Wahl einer geeigneten Zeiteinheit entfernt.

Für dieses Gleichungen findet sich auch eine Hamiltonfunktion

$$H = - \sum_j \sum_{l \neq j} \frac{\Gamma_j \Gamma_l}{2} h(x_{jl}, y_{jl}) \quad (2.31)$$

welche die hamiltonschen Bewegungsgleichungen liefert

$$\Gamma_j \begin{pmatrix} \dot{x}_j \\ \dot{y}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial H / \partial y_j \\ - \partial H / \partial x_j \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Die Form von $h(x, y)$ lässt sich bestimmen zu

$$h(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\cosh(x - 2\pi m) - \cos(y)}{\cosh(2\pi m)} \right) - \frac{x^2}{2\pi}. \quad (2.33)$$

Die Funktion ist periodisch in x und y . Wegen der guten Konvergenz der Summe ist sie sehr gut für numerische Simulationen geeignet.

2.6. Statistische Beschreibung einer Strömung

Bei den Navier-Stokes-Gleichungen und entsprechend auch bei den daraus abgeleiteten Punktwirbelgleichungen handelt es sich um deterministische Gleichungen. Dennoch ist turbulenten Größen ein statistischer Charakter zuzuschreiben. Dafür ist die Kombination zweier Ursachen verantwortlich. Jede Realisation eines Experiments kann nur mit begrenzter Genauigkeit durchgeführt werden. Bei numerischen Experimenten ist die Maschinengenauigkeit der begrenzende Faktor. Die Navier-Stokes-Gleichungen reagieren sensibel auf minimale Änderungen in den Anfangsbedingungen. Die kleinen Abweichungen führen deshalb nach endlicher Zeit zu völlig zufälligen Messgrößen. Exakte Vorhersagen können dann nur im statistischen Sinne getroffen werden.

2.6.1. Statistik in Punktwirbelsystemen

Die statistische Behandlung von Punktwirbelsystemen findet ihren Ursprung in Onsagers Bemühen, ein Phänomen wie die Bildung großskaliger, isolierter Wirbelstrukturen, welches in der Natur derart häufig auftritt, mit Hilfe der Methoden statistischer Gleichgewichtstheorie zu erklären (Newton, 2001). Der Fokus liegt auf zweidimensionalen Strömungen und geht von den nichtviskosen Eulergleichungen aus. Damit kann also beispielsweise keine Aussage über Wirbelstreckung gemacht werden. Viskose Effekte, welche vor allem auf kleinen Skalen wichtig sind, können ebenfalls nicht berücksichtigt werden.

Es handelt sich hierbei um eine statistische Theorie im thermodynamischen Gleichgewicht. Damit soll das asymptotische Verhalten turbulenter Strömungen erklärt werden, ein Regime, welches oft eher mit Methoden der Nichtgleichgewichtsstatistik behandelt wird.

In Abschnitt 2.4 wurde bereits die Hamiltonfunktion eines Punktwirbelsystems eingeführt, mit den kanonischen Variablen x_j, y_j . Der Phasenraum eines Punktwirbelsystems wird einfach durch die zweidimensionale Ebene aufgespannt. Die Größe $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, einen Punktwirbel in der Umgebung $d\mathbf{x}$ von \mathbf{x} mit der Geschwindigkeit in der Umgebung $d\mathbf{v}$ von \mathbf{v} anzutreffen. Die Wahrscheinlichkeit, die gesamte Konfiguration in einem Zustand anzutreffen wird durch die Größe $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}$ angegeben, mit $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_N, d\mathbf{y} = dy_1 \dots dy_N$. Die Punktwirbel bewegen sich auf einer Fläche konstanter Energie entsprechend der in 2.4 eingeführten kanonischen Gleichungen.

An der Hamiltonfunktion $H = -\frac{1}{4\pi} \sum_l \sum_{j \neq l} \Gamma_j \Gamma_l \ln |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l|$ kann man erkennen, dass große positive Energien entstehen, wenn sich zwei Wirbel gleichen Vorzeichens nahe kommen, und negative Energien, wenn zwei Wirbel unterschiedlicher Vorzeichen aufeinander treffen. Demnach besitzen Zustände mit Ansammlungen gleichnamiger Wirbel eher positive Energien und solche mit unterschiedlichen Wirbeln eher negative Energien.

In berandeten Gebieten kommen negative Energien auch dann vor, wenn sich ein Wirbel nahe am Rand, also nahe bei seinem korrespondierenden Spiegelwirbel befindet. Deshalb kann die Energie in diesem Fall auch Rückschlüsse darauf geben, ob die Wirbel sich eher in Randnähe oder eher im Inneren des Gebiets befinden.

2.6.2. Onsagers Theorie

Die Gleichgewichtstheorie von [Onsager \(1949\)](#) hat großen Einfluss auf die statistische Hydrodynamik genommen und seine Gedanken sind noch heute wichtig für aktuelle Forschungsarbeiten. Weil seine Theorie einen ersten Erklärungsansatz für Clusterbildung bietet, soll sie hier kurz erläutert werden.

In der klassischen statistischen Mechanik lässt sich die Entropie definieren als

$$S(E) = \ln \Lambda \quad (2.34)$$

wo Λ die Phasenraumoberfläche mit $H = E$, auf der sich die Bewegung abspielt, darstellt. Die Temperatur ist gegeben als

$$T^{-1} = \frac{dS}{dE} \quad (2.35)$$

Um das Argument Onsagers nachzuvollziehen, betrachte man ein endliches Phasenraumvolumen $\Phi(E)$, welches den Phasenraum für alle Energien kleiner als E enthält:

$$\Phi(E) = \int_{-\infty}^E dE' \Phi'(E') \quad (2.36)$$

Es gilt $\Phi(-\infty) = 0$ und das Volumen ist wegen des endlichen Phasenraums bei $\Phi(\infty)$ konstant. Da weiterhin das Phasenraumvolumen monoton anwächst, also immer $\Phi'(E) > 0$ gelten muss, gibt es einen Energiewert, wo Φ' ein Maximum annimmt und $\Phi'' = 0$ wird. Die Temperatur ist die Änderungsrate der Energie mit dem Volumen (Lehrbücher der stat. Physik, z.B. [Landau u. a. \(1980\)](#)), d.h. für die reziproke Temperatur

$$T^{-1} = \frac{d\Phi}{dE} = \frac{\Phi''}{\Phi'} = \frac{d}{dE} \ln(\Phi'(E)) \quad (2.37)$$

Die Entropie hängt also durch $S = \ln(\Phi'(E))$ mit dem energieabhängigen Phasenraumvolumen zusammen und für die Phasenraumoberfläche gilt $\Lambda = \Phi'(E)$.

Für kleine Energien ist die Temperatur positiv. Wenn nun die Energie einen kritischen Wert überschreitet, wird sie negativ, die bekannten *Zustände negativer Energie* treten auf. Wegen des Gibbs-Faktors $\exp(-E/T)$ besitzen dann Zustände hoher Energie eine größere Realisierungswahrscheinlichkeit. Nach den Erwägungen zu Beginn des Abschnitts folgt daraus, dass sich Wirbel gleicher Vorzeichen häufen und kohärente Strukturen bilden. Das bedeutet, dass sich in diesem Bereich räumlich inhomogene Zustände bilden.

Onsagers Theorie ist von Interesse, weil die Häufung von Wirbeln einen wichtigen Beitrag zur inversen Kaskade (siehe Abschnitt 2.7) liefern kann.

2.6.3. Ergodizität

Wegen der Inkompressibilität der Strömung kann man für die Punktwirbeldynamik ein *Liouville-Theorem* formulieren (Newton, 2001):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla H = 0 \quad (2.38)$$

wobei die Vektoren wieder im Phasenraum liegen

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_N}{dt}; \frac{dy_1}{dt}, \dots, \frac{dy_N}{dt} \right) \\ \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}; \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_N} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Das Theorem besagt, dass das Phasenraumvolumen erhalten bleibt. Eine Grundannahme der statistischen Mechanik ist, dass alle mikroskopischen Zustände gleicher Energie gleich wahrscheinlich sind. Ob diese Aussage für eine endliche Anzahl von Punktwirbeln zutrifft ist eine nach wie vor ungeklärte Frage.

Sie ist eng verknüpft mit der *Ergodenhypothese*. Grob gesprochen besagt diese, dass eine Phasenraumtrajektorie in einem System im Gleichgewicht nach unendlich langer Zeit den ganzen Phasenraum ausfüllt (beziehungsweise die Fläche konstanter Energie). Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in jedem Teil des Phasenraums ist gleich groß. Das bedeutet, dass die räumliche Mittelung zum gleichen Ergebnis kommt wie die zeitliche Mittelung. Dies ermöglicht die Ersetzung eines Ensemblemittels durch ein zeitliches Mittel. In Experimenten oder Simulationen ist es meist nicht möglich, alle möglichen Realisierungen eines Systems für eine Messung bereit zu stellen, weshalb ein Zeitmittel betrachtet wird. Deshalb ist die Ergodenhypothese eine elementare Annahme der statistischen Physik.

Untersuchungen haben für einige Punktwirbelsysteme ergeben, dass sie sich in einigen Energiebereichen nicht-ergodisch verhalten (Newton, 2001; Weiss u. McWilliams, 1991; Babilio u. a., 1994). Ein einfaches Beispiel für ein nichtergodisches System ist die Bewegung auf einem Kreis, welche durch die Abbildung $T_\alpha \exp(2\pi i \Theta) = \exp(2\pi i(\Theta + \alpha))$, mit einem rationalen Winkel α generiert wird. Nur für irrationale Winkel α wird nach unendlicher Zeit jeder Punkt des Kreises getroffen. Ein ähnliches Prinzip gilt für die Bewegung eines Vortexdipols in einem periodischen Parallelogramm. Dort hängt die Ergodizität des Systems von den Winkeln der Dipolbewegung und der Inklination des Parallelogramms ab.

Ist deren Verhältnis rational, ergibt sich eine periodische, also nichtergodische Bewegung, andernfalls eine quasiperiodische, die das Parallelogramm voll ausfüllt.

Weiss u. McWilliams (1991) haben Punktwirbel in periodischen Randbedingungen für verschiedene Energien simuliert und gezeigt, dass Zeit- und Ensemblemittel voneinander abweichen. Dazu wurde die Paarkorrelationsfunktion analysiert. Für eine perfekt ergodische System wäre zu erwarten, dass die Mittelung für $N \rightarrow \infty$ mit einem zufälligen Feld übereinstimmt, bei dem sich die Wirbel im Mittel an jedem Ort mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufhalten.

Diese Ergebnisse legen es nahe, Zeitmittel nach Möglichkeit zu vermeiden und statt dessen über Ensembles zu mitteln. Dieser Ansatz wurde auch in der vorliegenden Arbeit verfolgt.

2.7. Kaskadenprozesse

Die exakte statistische Beschreibung turbulenter Strömungen auf Basis der Grundgleichungen findet ihr Gegenstück in einer phänomenologischen Theorie. Hier wird versucht, anhand von Experimenten ein Modell abzuleiten, welches die beobachteten Phänomene korrekt beschreiben kann. Viele der heute verwendeten Theorien bauen auf die Idee einer Energiekaskade von Richardson (1922) auf. Danach besteht eine turbulente Strömung aus Wirbeln verschiedener Größen, welche durch Energiezufuhr auf der sogenannten *integrale Skala* erzeugt werden. Große Wirbel zerfallen und geben ihre Energie im *Inertialbereich* an Wirbel mit einer ähnlichen aber kleineren Ausdehnung weiter. Dieser Prozess wiederholt sich solange bis im *Dissipationsbereich* der Einfluss der Viskosität die Energie der Wirbelstrukturen in Wärme verwandelt. Der Energietransfer im Inertialbereich geht mit einer konstanten Rate ϵ vonstatten.

Kolmogorov (1941) konnte auf Richardsons Gedanke aufbauend eine statistische Theorie der Turbulenz entwickeln (siehe auch z.B. Frisch, 1996). Diese trifft mit dimensionsanalytischen Argumenten einige einfache Annahmen über das statistische Strömungsverhalten:

Die *Hypothese der lokalen Isotropie* besagt, dass eine turbulente Strömung mit *genügend großer Reynoldszahl* näherungsweise lokal isotrop und homogen ist, falls der betrachtete Bereich klein genug gewählt wird und nicht in der Nähe eines Randbereichs liegt. Das bedeutet, dass statistische Aussagen invariant gegenüber Rotationen, Spiegelungen oder Verschiebungen sind.

Die *Erste Ähnlichkeitshypothese* geht davon aus, dass für lokal isotrope Turbulenz statistische Aussagen über kleine Skalen ausschließlich durch Viskosität ν und Dissipationsrate ϵ eindeutig bestimmt werden.

Die *Zweite Ähnlichkeitshypothese* schließlich fordert, dass bei unendlich hohen Reynoldszahlen statistische Aussagen alleine durch ϵ bestimmt werden und nicht von ν abhängen.

Mit Hilfe dieser Argumente gelangte Kolmogorov zu einer wichtigen Aussage über die turbulente Energieverteilung in der Skala, dem $k^{-5/3}$ -Gesetz:

$$E(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.40)$$

2.7.1. Energiebilanzgleichung

Es soll ein Bezug hergestellt werden zwischen den phänomenologischen Modellvorstellungen Richardsons zum Energietransport zwischen den Skalen und den Navier-Stokes Gleichungen. **Kármán u. Howarth (1938)** gelang es, für statistische homogene, isotrope und reflexionssymmetrische Strömungen eine Beziehung zwischen den Korrelationsfunktionen zweiter und dritter Ordnung abzuleiten. Diese sind definiert als

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t) \rangle \\ C_{ij,k} &= \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t) u_k(\mathbf{x}', t) \rangle \end{aligned} \quad (2.41)$$

Die Ableitung der Entwicklungsgleichung für C_{ij} beinhaltet das nächst höhere Moment $C_{ij,k}$. Die Ausnutzung der geforderten Symmetrien führt im Endeffekt auf folgende Beziehung, die Kármán-Howarth-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} C_{rr}(r, t) = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 (C_{rrr}(r, t) + 2\nu \frac{\partial}{\partial r} C_{rr}(r, t)) \right) + Q^*(r, t) \quad (2.42)$$

Aufgrund der Symmetrien konnten die Korrelationsfunktionen als Skalare geschrieben werden (**Argyris u. a., 2010**). Q^* ist ein Quellterm, der mit der Wirkung einer Volumenkraft zusammenhängt.

Die Kármán-Howarth-Relation kann dazu verwendet werden, eine Entwicklungsgleichung für den Energietransport in der Skala herzuleiten. Das kommt daher, dass die Autokorrelation Fouriertransformierte zum Energiespektrum ist. Dazu zerlegt man das Geschwindigkeitsfeld in Fouriermoden. Einsetzen in Gl. (2.42) ergibt nach Ausnutzung aller Symmetrien die Bilanzgleichung im k -Raum

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = T(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) + Q(k, t) \quad (2.43)$$

Die *spektrale Energie* hat folgenden Bezug zur spektralen Korrelationsfunktion

$$E(k, t) = 4\pi \sum_l C_{ll}(\mathbf{k}, t) \quad (2.44)$$

und der hier eingeführte *spektrale Energietransfer* hängt mit dem dritten Moment zusammen

$$T(k, t) = 2ik \sum_{l,j} \frac{k_l}{k} C_{lj,j}(\mathbf{k}, t) \quad (2.45)$$

Der Energiefluss durch die Mode k ist

$$\Pi(k) = - \int_0^k dk' T(k') \quad (2.46)$$

Ein positiver Energiefluss entspricht einem Fluss zu größeren Wellenzahlen hin. Es lässt sich ableiten, dass

$$\Pi(\infty) = 0 \quad (2.47)$$

d.h., dass durch den Energiefluss zwischen den Moden Energie weder erzeugt wird noch verloren geht. Energieverlust geschieht ausschließlich durch Dissipation. Außerdem kann

man für den dreidimensionalen Fall zeigen, dass auf einer Skala k_i injizierte Energie ausschließlich in Richtung großer Wellenzahlen fließt, bevor sie auf kleinen Skalen dissipiert wird (siehe z.B. [Vosskuhle \(2009\)](#) für eine schöne Darstellung).

2.7.2. Energiefluss in zwei Dimensionen

Für die zweidimensionale Eulergleichung ohne äußere Kräfte konnte [Fjørtoft \(1953\)](#) durch ein einfaches Argument die Richtung des Energieflusses ableiten. Dazu nahm er an, dass nur die Moden $k_1, k_2 = 2k_1$ und $k_3 = 2k_2$ angeregt sind. In Abschnitt [2.3.1](#) wurde gezeigt, dass für die freie Eulergleichung Energie- und Enstrophieerhaltung gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta E(k_1) + \Delta E(k_2) + \Delta E(k_3) \\ 0 &= k_1^2 \Delta E(k_1) + k_2^2 \Delta E(k_2) + k_3^2 \Delta E(k_3) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Damit gelangt man zu den Relationen

$$\begin{aligned} \Delta E(k_1) &= -\frac{4}{5} \Delta E(k_2) & \Delta E(k_3) &= -\frac{1}{5} \Delta E(k_2) \\ k_1^2 \Delta E(k_1) &= -\frac{1}{5} k_2^2 \Delta E(k_2) & k_3^2 \Delta E(k_3) &= -\frac{4}{5} k_2^2 \Delta E(k_2) \end{aligned}$$

Wenn man nur die Energie betrachtet, die aus der Wellenzahl k_2 heraus fließt, also $\Delta E(k_2) < 0$, so erkennt man, dass sie stärker zur kleineren Wellenzahl k_1 hin fließt als zur größeren Wellenzahl. Mit dem Enstrophiefluss verhält es sich genau umgekehrt. Dieses Verhalten ist gegenteilig zu dem in drei Dimensionen, wo die Energie stärker zu größeren Wellenzahlen fließt.

[Kraichnan \(1967\)](#) konnte zeigen, dass der Energiefluss zu großen Skalen mit dem $k^{-5/3}$ -Spektrum korrespondiert, welches auch in zwei Dimensionen existiert. Zusätzlich gibt es in zwei Dimensionen allerdings auch noch ein k^{-3} -Energiespektrum. Dieses korrespondiert ausschließlich mit dem Enstrophiefluss zu kleinen Skalen.

Der Energiefluss zu großen Skalen hin und das Vorhandensein zweier Energiespektren sind charakteristische Merkmale der inversen Kaskade in der zweidimensionalen Turbulenz. Es wird davon ausgegangen, dass die Clusterbildung von Wirbelstrukturen, oder auch Wirbelkondensation, einen Hauptbeitrag zu diesem Phänomen liefert ([Chen u. a., 2006](#)).

Die inverse Energiekaskade in zwei Dimensionen konnte experimentell erstmals von [Paret u. Tabeling \(1997\)](#) gemessen werden.

3. Das Rotormodell

3.1. Elliptischer Verzug bei der inversen Kaskade

Chen u. a. (2006) haben detaillierte Untersuchungen zur inversen Kaskade durchgeführt bei der sie ein nichtnewtonsches Schergesetz ableiten konnten. Für ein gefiltertes Geschwindigkeitsfeld konnten sie zeigen, dass sich die Scherung $\tau^{(n)}$ nicht proportional zur Spannung $S^{(0)}$ eines großkaligen von außen vorgegebenen Scherfeldes verhält, sondern ein um 45° gedrehtes Scherfeld induziert.

Durch das äußere Scherfeld wird ein kleiner rotations-symmetrischer Wirbel elliptisch verzogen (Abb. 3.1). Der wachsende Wirbel-Randbereich fordert wegen Kelvins Zirkulationstheorem eine Verringerung der Geschwindigkeit um die Vortexgrenzen herum und damit auch zur Verringerung der Energie des Wirbels. Da die Geschwindigkeit ihre Hauptbeiträge entlang der Scherrichtung des Wirbels liefert, verstärkt dieser das großkalige Scherfeld. Dadurch wird die verlorene Energie zu großen Skalen transportiert.

Die weiteren quantitativen Analysen haben ergeben, dass dieser Mechanismus des elliptischen Verzugs einen wesentlichen Beitrag zur inversen Kaskade liefert. Deshalb werden in dieser Arbeit explizit elliptische Wirbelstrukturen untersucht. In dem vorliegenden Kapitel werden ausgehend von der Wirbeltransportgleichung dynamische Gleichungen für elliptische Wirbelstrukturen abgeleitet und es wird ein Modell entwickelt, welches den eben beschriebenen Mechanismus des *Vortex-streching* umsetzt. Dieses sogenannte Rotormodell, bestehend aus elliptischen Wirbelstrukturen wurde in Friedrich u. Friedrich (2011) vorgestellt. Im Anschluss an das vorliegende Kapitel werden numerische Analysen des Modells ausgewertet.

3.2. Entwicklungsgleichung für gaußförmige, isolierte Wirbelstrukturen

Die zweidimensionale, kräftefreie Wirbeltransportgleichung stellt den Ausgangspunkt unserer Analysen dar:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

3.2. Entwicklungsgleichung für gaußförmige, isolierte Wirbelstrukturen

Diese wird in den Fourierraum transformiert:

$$\dot{\omega}(\mathbf{k}, t) - i\mathbf{k} \cdot \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}', t) = -\nu k^2 \omega(\mathbf{k}, t) \quad (3.2)$$

Die Multiplikation $(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla) \omega(\mathbf{x})$ im Realraum wird zur Faltung im Fourierraum. In Gleichung (3.2) ist $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) := \frac{i}{4\pi^2} \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{k}}{k^2} \quad (3.3)$$

wobei der Faktor $\frac{1}{4\pi^2}$ von der Faltung mit $\omega(\mathbf{k})$ stammt. Multipliziert mit $\omega(\mathbf{k})$ ist dies die Fouriertransformierte eines PunktWirbel-Geschwindigkeitsfeldes. Dieser Zusammenhang wird hergestellt durch Anwendung der Rotation auf $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, Verwendung der Graßmann-Identität und anschließende Ausnutzung der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes.

Da wir an der Dynamik einzelner Wirbelstrukturen interessiert sind, wählen wir als Ansatz für die Wirbelstärkeverteilung eine Überlagerung von Vortexstrukturen mit einem Wirbelstärkeprofil $W_j(\mathbf{k}, t)$:

$$\omega(\mathbf{k}, t) = \sum_j \Gamma_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j(t) + W_j(\mathbf{k}, t)} \quad (3.4)$$

Das Wirbelstärkeprofil bestimmt die anfängliche Form der einzelnen Wirbelstrukturen. Für $W_j(\mathbf{k}, t) = 0$ erhält man wieder die bekannte PunktWirbellösung mit $\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_j \Gamma_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_j(t))$ im Realraum. Endliche $W_j(\mathbf{k}, t)$ entsprechen Wirbelstärkeverteilungen mit endlichem Profilabfall.

Mit dem gewählten Ansatz erhält man folgende Gleichung für die zeitliche Entwicklung der Zentren der Wirbelstrukturen:

$$\begin{aligned} & \sum_j \Gamma_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j + W_j(\mathbf{k}, t)} \left[i\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{R}}_j(t) + \dot{W}_j(\mathbf{k}, t) + \nu k^2 \right] \\ &= i\mathbf{k} \cdot \sum_{j,l} \Gamma_j \Gamma_l \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{R}_j + i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}_l} e^{W_j(\mathbf{k}-\mathbf{k}', t) + W_l(\mathbf{k}', t)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Summierung über j wird im Folgenden weggelassen, indem die entsprechenden Summenglieder direkt miteinander identifiziert werden. Dies ist eine zulässige Näherung, wenn die einzelnen Wirbelstrukturen weit voneinander entfernt sind und die Profile eine geringe Überlagerung aufweisen. Man kann dies am Extremfall des PunktWirbels sehen. Dort sind die einzelnen Summenglieder orthogonal zueinander und ergeben, nach Fourier-Transformation, Delta-Distributionen:

$$\int d^2 k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l} = \delta(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l) \quad (3.6)$$

Anders gesehen bedeutet das, dass die Formänderung und Bewegungsänderung des j -ten Wirbels von den Änderungen der anderen Wirbel unabhängig ist. Mit dieser Annahme gelangt man schließlich zur folgenden Evolutionsgleichung:

$$\begin{aligned} & i\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{R}}_j(t) + \dot{W}_j(\mathbf{k}, t) + \nu k^2 \\ &= i\mathbf{k} \cdot \sum_l \Gamma_l \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}_l} e^{W_j(\mathbf{k}-\mathbf{k}', t) + W_l(\mathbf{k}', t) - W_j(\mathbf{k}, t)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Der Abstand zweier Vortexzentren wurde hier definiert als

$$\mathbf{R}_{jl} := \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l \quad (3.8)$$

Die Verschiebung der Vortexstrukturen wird durch die Zentrumspositionen $\dot{\mathbf{R}}_j(t)$ beschrieben, die Formänderung durch die Faktoren $\dot{W}_j(\mathbf{k}, t)$. Diese beiden Prozesse sollen getrennt analysiert werden. Dazu beschränken wir uns auf Wirbel, welche ein gaußsches Profil aufweisen. Der Formfaktor $W_j(\mathbf{k})$ wird dann dargestellt durch

$$W_j(\mathbf{k}, t) = -\frac{1}{2}\mathbf{k}C_j(t)\mathbf{k} \quad (3.9)$$

mit der symmetrischen Matrix $C_j(t)$. Weiterhin wird vereinfachend angenommen, dass die Form für alle Zeiten gaußisch bleibt. Deshalb besitzt auch die zeitliche Ableitung noch ein Gaußprofil:

$$\dot{W}_j(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{k}\dot{C}_j(t)\mathbf{k} \quad (3.10)$$

Dies führt auf folgende Gleichung:

$$i\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{R}}_j(t) - \frac{1}{2}\mathbf{k}\dot{C}_j\mathbf{k} + \nu k^2 = i\mathbf{k} \cdot \sum_l \Gamma_l \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{R}_{jl}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}'(C_j+C_l)\mathbf{k}' - \mathbf{k}C_j\mathbf{k}'} \quad (3.11)$$

Um nun eine zulässige Aufspaltung in eine Wirbeltransportgleichung und eine Wirbelformgleichung zu finden, werden die Formfaktoren im Integral, welche das Punktirbel-Geschwindigkeitsfeld modifizieren, durch Ableitungsoperatoren bezüglich des Vektors \mathbf{R}_{jl} ausgedrückt, welche aus dem Integral gezogen werden:

$$i\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{R}}_j(t) - \frac{1}{2}\mathbf{k}\dot{C}_j\mathbf{k} = -\nu k^2 + i\mathbf{k} \cdot \sum_l \Gamma_l \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{R}_{jl}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}'(C_j+C_l)\mathbf{k}' - \mathbf{k}C_j\mathbf{k}'} \quad (3.12)$$

$$= -\nu k^2 + i\mathbf{k} \cdot \sum_l \Gamma_l e^{\frac{1}{2}\nabla(C_j+C_l)\nabla} e^{i\mathbf{k}C_j\nabla} \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{R}_{jl}} \quad (3.13)$$

$$= -\nu k^2 + i\mathbf{k} \cdot \sum_l \Gamma_l e^{\frac{1}{2}\nabla(C_j+C_l)\nabla} (\cos(\mathbf{k}C_j\nabla) + i \sin(\mathbf{k}C_j\nabla)) \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{R}_{jl}} \quad (3.14)$$

Die Exponentialfunktionen von Ableitungsoperatoren sind dabei als unendliche Reihen zu verstehen. Man berücksichtige, dass das Integral in der letzten Gleichung das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl})$ eines Punktirbels des Abstands \mathbf{R}_{jl} darstellt. Schließlich gelangt man zur Darstellung

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j(t) + \mathbf{k}\dot{C}_j\mathbf{k} = i\mathbf{k} \cdot \sum_l \Gamma_l e^{\frac{1}{2}\nabla C_{jl}\nabla} \cos(\mathbf{k}C_j\nabla) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + 2\mathbf{k} \cdot \sum_l \Gamma_l e^{\frac{1}{2}\nabla C_{jl}\nabla} \sin(\mathbf{k}C_j\nabla) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + 2\nu k^2 \quad (3.15)$$

mit der Definition $C_{jl} := C_j + C_l$. Die Anteile auf beiden Gleichungsseiten können über ihre Lage in der komplexen Ebene einander eindeutig zugeordnet werden: Die erste Zeile

3.2. Entwicklungsgleichung für gaußförmige, isolierte Wirbelstrukturen

auf der rechten Seite ist rein imaginär und entspricht also dem ersten Term $i\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{R}}$ auf der linken Seite. Die zweite Zeile ist rein reell und entspricht dem Term $\mathbf{k} \dot{\mathbf{C}} \mathbf{k}$. Die resultierenden Gleichungen sind

$$\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{R}}_j = \mathbf{k} \cdot \sum_l \Gamma_l e^{\frac{1}{2} \nabla C_{jl} \nabla} \cos(\mathbf{k} C_j \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{k} \dot{\mathbf{C}}_j \mathbf{k} = 2\mathbf{k} \cdot \sum_l \Gamma_l e^{\frac{1}{2} \nabla C_{jl} \nabla} \sin(\mathbf{k} C_j \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + 2\nu k^2 \quad (3.17)$$

Solange die Wirbelstrukturen weit voneinander entfernt sind, wovon hier immer ausgegangen werden soll, können Sinus und Cosinus in erster Näherung durch ihr erstes Taylorreihenglied ersetzt werden. Die Gleichungen vereinfachen sich dann zu

$$\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{R}}_j = \mathbf{k} \cdot \sum_{l \neq j} \Gamma_l e^{\frac{1}{2} \nabla C_{jl} \nabla} \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{k} \dot{\mathbf{C}}_j \mathbf{k} = 2\mathbf{k} \cdot \sum_{l \neq j} \Gamma_l e^{\frac{1}{2} \nabla C_{jl} \nabla} (\mathbf{k} C_j \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + 2\Gamma_j \mathbf{k} \xi_j \mathbf{k} + 2\nu k^2 \quad (3.19)$$

und sind nun invariant unter Wahl linear skalierter \mathbf{k} -Vektoren. Die Summe geht nun nur noch über $l \neq j$, da die hier angenommene Fernfeldnäherung für $\mathbf{R}_{jl} \rightarrow 0$ nicht funktioniert und die PunktWirbel-Geschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{0})$ divergiert. Die Selbstwechselwirkungsterme mit $l = j$ spielen für die Dynamik der Wirbelformen eine wichtige Rolle, können aber in dieser Fernfeldnäherung nicht berechnet werden. Sie werden hier durch die im Hauptachsensystem symmetrische Matrix ξ_j dargestellt.

Für große Abstände \mathbf{R}_{jl} und kleine Wirbelstrukturen C_{jl} kann desgleichen die Exponentialfunktion bis zu quadratischen Termen entwickelt werden, da höhere Gradienten keine Rolle spielen

$$\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{R}}_j = \mathbf{k} \cdot \sum_{l \neq j} \Gamma_l \left(1 + \frac{1}{2} \nabla C_{jl} \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) \quad (3.20)$$

$$\mathbf{k} \dot{\mathbf{C}}_j \mathbf{k} = 2\mathbf{k} \cdot \sum_{l \neq j} \Gamma_l (\mathbf{k} C_j \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + 2\Gamma_j \mathbf{k} \xi_j \mathbf{k} + 2\nu k^2 \quad (3.21)$$

Um die Entwicklung der Form der Ellipsen darzustellen, ist es nötig, ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen: Eine Ellipse wird am einfachsten durch ihre Hauptachsen \mathbf{r} und \mathbf{s} beschrieben, mit den Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos(\varphi) + \mathbf{e}_y \sin(\varphi) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{e}_s = -\mathbf{e}_x \sin(\varphi) + \mathbf{e}_y \cos(\varphi) \quad (3.23)$$

Die Matrix C_j wird in der Basis ihrer normierten Hauptachsen $\{\mathbf{e}_{r,j}, \mathbf{e}_{s,j}\}$ diagonal:

$$C_j = \mathbf{r}_j \mathbf{r}_j^T + \mathbf{s}_j \mathbf{s}_j^T = r^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T + s^2 \mathbf{e}_s \mathbf{e}_s^T \quad (3.24)$$

mit der symmetrischen Ableitung

$$\dot{C}_j = 2r\dot{r}\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T + r^2(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T + \mathbf{e}_r \dot{\mathbf{e}}_r^T) + 2s\dot{s}\mathbf{e}_s \mathbf{e}_s^T + s^2(\mathbf{e}_s \mathbf{e}_s^T + \mathbf{e}_s \dot{\mathbf{e}}_s^T) \quad (3.25)$$

Für die Einheitsvektoren gilt

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_s \quad (3.26)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_s = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r \quad (3.27)$$

und damit

$$\dot{C}_j = 2r\dot{r}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r^T + \dot{\varphi}(r^2 - s^2)\mathbf{e}_s\mathbf{e}_r^T + \dot{\varphi}(r^2 - s^2)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_s^T + 2s\dot{s}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s^T \quad (3.28)$$

$$= \begin{pmatrix} 2r\dot{r} & \dot{\varphi}(r^2 - s^2) \\ \dot{\varphi}(r^2 - s^2) & 2s\dot{s} \end{pmatrix}_{r,s} \quad (3.29)$$

Um die Komponenten von $\dot{\mathbf{R}}$ und \dot{C}_j zu erhalten muss mit geeigneten \mathbf{k} -Testvektoren multipliziert werden. Die Komponenten von C_j im Hauptachsen-Koordinatensystem erhält man am einfachsten durch einsetzen in (3.18) von $\mathbf{k}_r = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{k}_s = \mathbf{e}_s$ und für die Nebendiagonalelemente beispielsweise $\mathbf{k}_+ = \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_s$. Damit gelangt man auf die drei Evolutionsgleichungen

$$\dot{r}_j = (\mathbf{r}_j \cdot \nabla) \sum_{l \neq j} \Gamma_l u_r(\mathbf{R}_{jl}) + \Gamma_j \frac{\xi_j^{rr}}{r_j} + \frac{\nu}{r_j} \quad (3.30)$$

$$\dot{s}_j = (\mathbf{s}_j \cdot \nabla) \sum_{l \neq j} \Gamma_l u_s(\mathbf{R}_{jl}) + \Gamma_j \frac{\xi_j^{ss}}{s_j} + \frac{\nu}{s_j} \quad (3.31)$$

$$\dot{\varphi}_j = \frac{1}{r_j^2 - s_j^2} \left\{ \sum_{l \neq j} \Gamma_l \left(s_j(\mathbf{s}_j \cdot \nabla) u_r(\mathbf{R}_{jl}) + r_j(\mathbf{r}_j \cdot \nabla) u_s(\mathbf{R}_{jl}) \right) + 2\Gamma_j \xi_j^{rs} \right\} \quad (3.32)$$

Die Gleichungen für die Rotorzentren nehmen folgende Form an

$$\dot{\mathbf{R}}_j = \sum_{l \neq j} \Gamma_l \left(1 + \frac{1}{2} \left((\nabla \mathbf{r}_j)^2 + (\nabla \mathbf{r}_l)^2 + (\nabla \mathbf{s}_j)^2 + (\nabla \mathbf{s}_l)^2 \right) \right) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) \quad (3.33)$$

Zusammengekommen bilden (3.30) bis (3.33) die vollständigen Evolutionsgleichungen im Fernfeld für Wirbelstrukturen mit elliptisch-gaußschem Wirbelstärkeprofil.

3.3. Die Rotornäherung

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die vollständige Berechnung der Dynamik von Wirbelstrukturen mit elliptisch-gaußschem Profil relativ aufwändig ist. Deshalb soll in diesem Abschnitt, ein möglichst einfach zugängliches Modell konstruiert werden, welches wesentliche Eigenschaften des uns interessierenden Phänomens abbilden kann.

Wie in Abschnitt 3.1 gezeigt wurde, ist der elliptische Charakter der Wirbelstrukturen elementar für das Auftreten der inversen Kaskade. An dieser Stelle sollen unendlich dünne Ellipsen untersucht werden, welche durch eine nichtverschwindende Hauptachse $\mathbf{r}_j(t)$ beschrieben werden. Die Matrix C_j lässt sich direkt in ortsfesten Koordinaten aufschreiben, da es nun keine Mischterme zwischen \mathbf{r} und \mathbf{s} gibt. Sie vereinfacht sich zu

$$C_j = \mathbf{r}_j \mathbf{r}_j^T = \begin{pmatrix} r_{j,x}^2 & r_{j,x} r_{j,y} \\ r_{j,x} r_{j,y} & r_{j,y}^2 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Die Evolutionsgleichung für die Hauptachsen r_j lässt sich direkt ablesen. Die Gleichungen lauten

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \sum_{l \neq j} \Gamma_l (\mathbf{r}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + 2\Gamma_j \frac{\xi_j}{r_j} \quad (3.35)$$

wobei r_j hier für den Betrag von \mathbf{r}_j steht. Die Viskosität wurde auf $\nu = 0$ gesetzt, da die uns interessierende Energiekaskade auf nichtviskosen Effekten beruht.

Die Evolution der Rotorzentren vereinfacht sich für Rotoren zu

$$\dot{\mathbf{R}}_j = \sum_{l \neq j} \Gamma_l \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + \frac{1}{2} \sum_{l \neq j} \Gamma_l \left((\mathbf{r}_j \cdot \nabla)^2 + (\mathbf{r}_l \cdot \nabla)^2 \right) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) \quad (3.36)$$

3.4. Das Rotormodell

Das Rotormodell von [Friedrich u. Friedrich \(2011\)](#) stellt eine Beziehung der eben abgeleiteten Rotornäherung zu punktwirbelartigen Modellgleichungen her. Ausgezeichnete Punkte stellen dabei die Endpunkte \mathbf{x}_j und \mathbf{y}_j der Rotoren dar. Sie werden im Rotormodell durch Punktwirbel repräsentiert. Deren Entwicklungsgleichungen sind

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \Gamma_j \mathbf{u}(\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j) + \sum_{l \neq j} \Gamma_l \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l) + \mathbf{u}(\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_l) \}, \quad (3.37)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_j = \Gamma_j \mathbf{u}(\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_j) + \sum_{l \neq j} \Gamma_l \{ \mathbf{u}(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_l) + \mathbf{u}(\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_l) \}. \quad (3.38)$$

Die Entwicklungsgleichung für die Rotorgröße $\mathbf{r}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j$ sieht im Rotormodell dann folgendermaßen aus

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_j &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{y}}_j) \\ &= \Gamma_j \mathbf{u}(\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j) + \frac{1}{2} \sum_{l \neq j} \Gamma_l \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l) + \mathbf{u}(\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_l) - \mathbf{u}(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_l) - \mathbf{u}(\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_l) \} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Der Abstand zwischen zwei Rotoren lässt sich im Rotormodell folgendermaßen aus den Punktwirbelbestandteilen \mathbf{x} und \mathbf{y} zusammensetzen

$$\mathbf{R}_{jl} = \frac{1}{2} \{ x_j + y_j - x_l - y_l \} \quad (3.40)$$

Um den Bezug zur Rotornäherung aus vorigem Abschnitt herzustellen, wird das Punktwirbelgeschwindigkeitsfeld anhand seiner Multipolentwicklung mit dem Abstand zwischen zwei Rotoren \mathbf{R}_{jl} und der Rotorhauptachse \mathbf{r}_j in Verbindung gebracht. Beispielhaft wird dies für das Feld $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l)$ zwischen zwei Rotoren bis zur quadratischen Ordnung

getan, eine Näherung die für weit voneinander entfernte Rotoren Gültigkeit besitzt:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{u}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l) \\
 &= \mathbf{u}\left(\mathbf{x}_j + \frac{1}{2}\mathbf{y}_j - \frac{1}{2}\mathbf{y}_j + \frac{1}{2}\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l + \frac{1}{2}\mathbf{x}_l - \frac{1}{2}\mathbf{x}_l - \frac{1}{2}\mathbf{y}_l + \frac{1}{2}\mathbf{y}_l\right) \\
 &= \mathbf{u}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x}_j + \mathbf{y}_j) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_l + \mathbf{y}_l) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_l - \mathbf{y}_l)\right) \\
 &= \mathbf{u}\left(\mathbf{R}_{jl} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)\right) \\
 &\approx \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + \left(\frac{1}{2}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l) \cdot \nabla\right) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l) \cdot \nabla\right)^2 \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Entsprechend ergeben sich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_l) &\approx \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + \left(\frac{1}{2}(\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_l) \cdot \nabla\right) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_l) \cdot \nabla\right)^2 \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) \\
 \mathbf{u}(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_l) &\approx \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) - \left(\frac{1}{2}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l) \cdot \nabla\right) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l) \cdot \nabla\right)^2 \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) \\
 \mathbf{u}(\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_l) &\approx \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) - \left(\frac{1}{2}(\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_l) \cdot \nabla\right) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_l) \cdot \nabla\right)^2 \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl})
 \end{aligned}$$

Damit transformiert Gleichung (3.39) zu

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \Gamma_j \mathbf{u}(\mathbf{r}_j) + \sum_{l \neq j} \Gamma_l \mathbf{r}_j \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) \quad (3.42)$$

wobei das Feld zwischen den Rotoren nicht entwickelt wurde, da dies wegen des kleinen Abstandes nicht möglich ist. Die quadratischen Terme entfallen, da sie in allen Summanden mit gleichem Vorzeichen auftritt.

Die Gleichungen für die Rotorzentren heißen

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{R}}_j &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}_j + \dot{\mathbf{y}}_j) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l \neq j} \Gamma_l (\mathbf{u}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l) + \mathbf{u}(\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_l) + \mathbf{u}(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_l) + \mathbf{u}(\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_l)) \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Mit den obigen Näherungen ergibt sich dann

$$\dot{\mathbf{R}}_j = \sum_{l \neq j} \Gamma_l \left\{ 2\mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) + \frac{1}{4} [(\mathbf{r}_j \cdot \nabla)^2 + (\mathbf{r}_l \cdot \nabla)^2] \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl}) \right\} \quad (3.44)$$

Die Mischterme

$$(\mathbf{r}_j \cdot \nabla)(\mathbf{r}_l \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{R}_{jl})$$

eliminieren sich gegenseitig.

Der Vergleich von (3.44) und (3.42) mit (3.36) und (3.35) offenbart die Ähnlichkeit beider Modelle. Im Fernfeld ergeben sich annähernd identische Bewegungsgleichungen, wenn

man den Selbstechselfirkungsterm ξ_j mit dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(r_j)$ in (3.42) identifiziert. Das Punktwirbel-Rotormodell besitzt den Vorteil, als gewöhnliche Differentialgleichung analytischen und numerischen Studien wesentlich besser zugänglich zu sein.



Abb. 3.2. Skizze eines idealisierten Rotors: Zwei Punktwirbel werden durch eine überdämpfte Feder zusammengehalten

Problematisch an dem Modell ist lediglich, dass die Punktwirbel-Rotoren sehr schnell ihren Rotorcharakter verlieren, indem sie durch Wechselwirkung mit anderen Strukturen von ihrem Partnerwirbel getrennt werden. Dies kann verhindert werden durch einen Kraftterm, der stabilisierend auf die Rotorstruktur wirkt

$$\frac{\gamma}{2}(D_0 - |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i|) \cdot \mathbf{e}_i \quad (3.45)$$

Dabei wurde der gerichtete Abstandsvektor definiert als

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i|} \quad (3.46)$$

Der Term relaxiert die Wirbelpaare mit einer Zeitkonstanten $\frac{2}{\gamma}$ auf einen Gleichgewichtsabstand D_0 . Dies entspricht der Wirkung einer überdämpften Feder (Abb. 3.2). Durch diesen Einfluss einer äußeren Kraft ist das Rotormodell ein nicht-hamiltonsches System. Die Methoden der Gleichgewichtsstatistik können deshalb zu seiner Analyse nicht herangezogen werden.

Die Bewegungsgleichungen für die Wirbelpaare $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ lauten damit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \frac{\gamma}{2}(D_0 - |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i|) \cdot \mathbf{e}_i \\ &+ \Gamma_i \mathbf{u}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i) + \sum_{j \neq i} \Gamma_j \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \mathbf{u}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j) \}, \\ \dot{\mathbf{y}}_i &= -\frac{\gamma}{2}(D_0 - |\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i|) \cdot \mathbf{e}_i \\ &+ \Gamma_i \mathbf{u}(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i) + \sum_{j \neq i} \Gamma_j \{ \mathbf{u}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) + \mathbf{u}(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_j) \}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Von [Friedrich u. Friedrich \(2011\)](#) wurde gezeigt, dass der Kraftterm dazu führt, dass sich zwei Rotoren anziehen, außer für den Fall, dass die Wirbelstärken der Rotoren entgegengesetzt gleiche Vorzeichen besitzen.

4. Statistische Analysen

Im ersten Teil dieser Arbeit in Kapitel 2.7 wurden wichtige Größen zur Beschreibung der inversen Energiekaskade zusammengetragen, darunter Spektrum und Fluss der Energie in der Skala. Außerdem wurden in Abschnitt 2.6.2 Ansätze zur statistischen Behandlung zweidimensionaler turbulenter Strömungen behandelt.

Im dritten Kapitel wurde ein aktuelles Ergebniss zu den Mechanismen der inversen Kaskade vorgestellt und es wurde ein Modell eingeführt, welches diese Prozesse modellieren soll.

Im vorliegenden Teil soll nun anhand der eingeführten statistischen Größen genauer quantifiziert werden, in welchem Umfang das Rotormodell diese Anforderung erfüllen kann. Die Simulation einer großen Anzahl von Rotorstrukturen soll Rückschlüsse auf statistische Eigenschaften des Modells liefern. Zuerst wird die Gesamtenergie des Systems für verschiedene Parameter analysiert. Anschließend wird die Paarkorrelation betrachtet. Schließlich werden spektrale Größen untersucht.

4.1. Clustering (Wirbelkondensation)

Wie bereits in Abschnitt 3.4 erwähnt, wurde für zwei Rotoren durch analytische Rechnung gezeigt, dass im Zeitverlauf eine Annäherung zwischen den beiden Strukturen stattfindet. Hier soll das Phänomen von einer anderen Seite analysiert werden, indem das Clustering¹ einer großen Anzahl von Wirbelstrukturen untersucht wird.

Die Eigenschaften des Rotorsystems werden durch Simulation der Gleichungen (3.47) untersucht. Das bedeutet, dass alle Zirkulationensätze gleich sind. Die Anfangspositionen der Rotoren werden zufällig generiert. Die Rotoren befinden sich im Gleichgewicht, d.h. der Abstand zwischen den Punktwirbelpartnern beträgt D_0 . Die Winkel der Rotorverbindungen sind ebenfalls zufällig gesetzt.

In Abb. 4.1 sind drei Schnappschüsse eines typischen Simulationslaufs dargestellt. Die anfänglich zufällige Wirbelverteilung sammelt sich im Laufe der Zeit in mehreren Clustern jeweils gleicher Wirbelstärke. Das System läuft in einen Endzustand mit einem Vortexdipol, bei dem die Rotoren sich in zwei Clustern angesammelt haben.

Auf der beiliegenden CD finden sich Videos der Simulationen mit verschiedenen Parametern (siehe A). In der simulierten Dynamik fallen einige Eigenschaften auf

- Der Prozess der Clusterbildung findet vor allem im Nahfeld der Wirbel statt. Sind sie noch weit voneinander entfernt, ist fast keine anziehende Wechselwirkung festzustellen. Befinden sich zwei Rotoren in unmittelbarer Nähe zueinander, werden sie

¹Der Begriff *kondensieren* wird synonym gebraucht zu dem eingedeutschten Verb *clustern*.

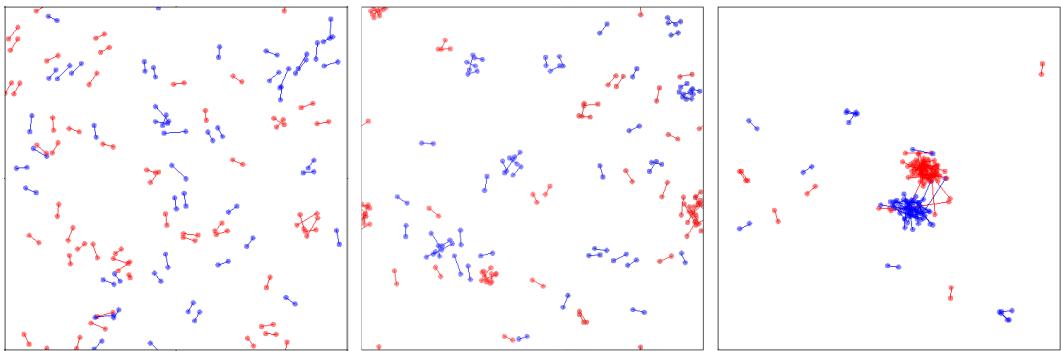


Abb. 4.1. Clusterbildung im Rotormodell zu drei verschiedenen Zeitpunkten; die Farben stehen für die unterschiedlichen Zirkulationsvorzeichen

gedehnt und kondensieren anschließend zu einem Verbund.

- Gleichnamige Wirbel formieren sich auf diese Weise zu Clustern. Im Laufe der Zeit bilden sich mehrere dieser lokalisierten Strukturen. Je nach gewählten Parameter kann das System einem Endzustand entgegenlaufen, bei dem nur noch zwei Wirbelverbände entgegengesetzter Vorzeichen existieren. Es hat sich ein Vortexdipol gebildet. Die derart kondensierten Rotoren erfüllen natürlich nicht mehr die Voraussetzungen der Fernfeldnäherung. Vereinzelt gibt es auch Rotoren, die längere Zeit im Feld eines andersnamigen Clusters gehalten werden.
- In Einzelfällen werden Rotoren sehr stark auseinandergezogen, wobei sie teilweise Durchmesser im Bereich der Feldabmessungen erreichen. In diesem Fall treffen die Prämissen der Fernfeldnäherung ebenfalls nicht mehr zu. Da es sich um einzelne Ereignisse handelt, können sie in der statistischen Betrachtung aber vernachlässigt werden.

[Chertkov u. a. \(2007\)](#) konnten durch direkte Simulation der zweidimensionalen Wirbeltransportgleichungen ein ähnliches Verhalten beobachten. Dabei wurde dem Feld Energie auf kleinen Skalen zugeführt, auf Energieentnahme bei großen Skalen wurde verzichtet. Das System zeigt typische Signaturen zerfallender Turbulenz: Kleine Wirbelstrukturen vereinigen sich zu größeren bis der Endzustand eines Vortexdipols erreicht wird, welcher Abmessungen in der Größenordnung des Systems aufweist. Auf diese Resultate wird später nochmals Bezug genommen.

4.2. Paarkorrelation

Zunächst einmal soll der Kondensationsprozess der Wirbelstrukturen zu Clusterverbünden im Zeitverlauf und abhängig von den Modellparametern genauer quantifiziert werden. Ein geeignetes Maß hierfür stellen die Zweiteilchen-Verteilungsfunktion p und die

Zweiteilchen-Korrelation q dar. Diese sind gegeben als

$$\hat{p}(r) = \langle \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l \rangle = \langle \delta(r - r_{jl}) \rangle_{jl} \quad (4.1)$$

$$\hat{q}(r) = \langle \omega_j(\mathbf{r}) \omega_l(\mathbf{r}) \rangle_{jl,\varphi} = \langle \Gamma_j \Gamma_l \delta(r - r_{jl}) \rangle_{jl} \quad (4.2)$$

Die Funktionen werden über alle Wirbelpaare sowie entweder über ein Ensemble von Feldern oder über die Zeit gemittelt. In unserem Fall soll aus den in Abschnitt 2.6.3 genannten Gründen das Ensemblemittel bevorzugt werden. Für das Rotormodell kommt wegen der nicht erhaltenen Energie ohnehin kein Zeitmittel in Frage. Um die statistische Ausbeute zu erhöhen, werden die beiden Paarfunktionen außerdem über den Winkel gemittelt.

Die Paarfunktionen werden zusätzlich auf gleiche Flächen normiert: Mit größeren Abständen wächst bei gleichverteilten Wirbeln die Anzahl der Wirbelpaare linear an, da sich in einem Kreisring der Breite dr mit größerem Radius entsprechend mehr Wirbel befinden. Die Abhängigkeit wird hier eliminiert indem durch den jeweiligen Abstand r geteilt wird

$$p(r) = \frac{\hat{p}(r)}{r} \quad (4.3)$$

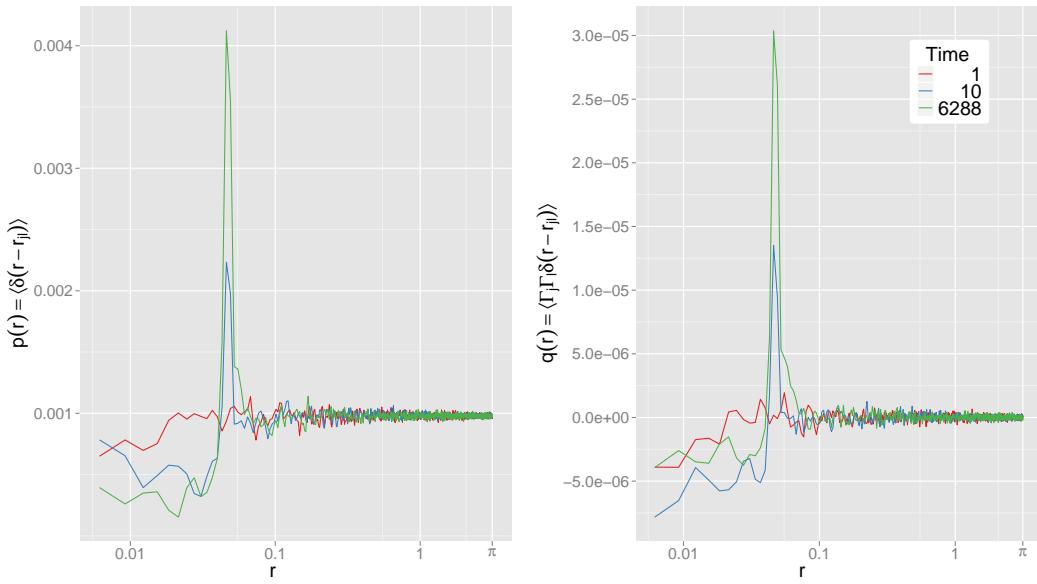
$$q(r) = \frac{\hat{q}(r)}{r}. \quad (4.4)$$

Durch diese Renormierung erhält man ein aussagekräftiges Maß für Abweichungen von einer Gleichverteilung der Wirbelstrukturen, also für Anhäufungen von Wirbelstrukturen.

Die erste Funktion entspricht der Wahrscheinlichkeitsdichte, zwei Wirbel im Abstand r anzutreffen. Die Korrelationsfunktion ermöglicht es, den mittleren Abstand mit den Wirbelstärken in Verbindung zu bringen. Damit lässt sich statistisch erfassen, in welchem Verhältnis zwei Wirbelstärken stehen, wenn sich die Strukturen, in einem bestimmten Abstand zueinander befinden. Da alle Vortizitätsbeträge gleich sind, enthalten die beiden Funktionen zusammen die vollständige statistische Information über Vortexpaare. Mit $\hat{p}(r) \pm \hat{q}(r)$ lässt sich die Wahrscheinlichkeit berechnen, zwei gleiche bzw. entgegengesetzte Wirbel im Abstand r anzutreffen. Es werden alle Wirbelpaare bis zu einem Maximalabstand von $r_{\max} = \pi$ berücksichtigt.

Die Paarkorrelation für PunktWirbel ist in 4.2 gezeigt. Man beachte die logarithmische Skalierung der x -Achse. Die über ein Ensemble von 50 Feldern gemittelte Funktion wurde für verschiedene Zeitpunkte aufgetragen. Der Verlauf für $t = 1$ entspricht demjenigen eines Zufallsfeldes, da die Anfangspositionen der PunktWirbel zufällig gewählt wurden. Er zeigt nahezu konstanten Verlauf, mit kleinen Abweichungen bei kleinen r , welche auf die endliche Mittelung zurückzuführen sind.

Auffälligstes Merkmal ist ein deutlicher Peak beider Paarfunktionen bei $r \approx 0.04$ der im Laufe der Zeit anwächst. Der starke positive Peak korrespondiert mit gleichen Wirbelpaaren bei diesem Abstand. Sie rotieren umeinander, ein Zustand, der offenbar eine besonders hohe Lebensdauer besitzt, wie die erhöhten Beiträgen schließen lassen. Die Ursache für die außerordentliche Stabilität dieses Zustandes ist wiederum mit der Frage der Ergodizität der PunktWirbeldynamik verbunden. Für ein ergodisches System würde man hier – nach unendlich langer Mittelung – einen konstanten Verlauf beider Paarfunktionen erwarten, da sich die Wirbel überall gleichwahrscheinlich befinden können.

Abb. 4.2. Paarkorrelation für 500 PunktWirbel, $\Gamma_V = \pm 0.2$

Bei kleineren Abständen $r < 0.04$ erkennt man eine verminderte Dichte, zusammen mit einer negativen Paarkorrelation.

Onsager hat erkannt, dass die hamiltonsche Energie des Systems eine entscheidende Rolle bei der Clusterbildung einnimmt. In [Weiss u. McWilliams \(1991\)](#) wird dieser Zusammenhang für PunktWirbel mit periodischen Randbedingungen untersucht. Dafür werden ebenfalls die Paarfunktionen untersucht. Für Energien $E < E_0 = 0$ wird eine Anhäufung entgegengesetzter Wirbelstärken bei kleinen Abständen beobachtet. Für $E > E_0$ häufen sich gleiche Wirbelstärken bei kleinen Abständen. Das hier beobachtete Phänomen eines scharfen positiven Peaks der Korrelationsfunktion, tritt bei Weiss in etwas anderer Form auf. Es bedarf noch weiterer Untersuchungen, ob es sich hierbei eventuell um eine Inkonsistenz zwischen den beiden Ergebnissen handelt.

Man muss beachten, dass die Energieabhängigkeit des PunktWirbelsystems in der vorliegenden Arbeit nicht im Detail untersucht wurde, da der Fokus auf dem Rotorsystem lag, wo die Hamiltonsche Energie ihre Bedeutung verliert. Um einen fundierten Vergleich der hiesigen Ergebnisse der PunktWirbel-Korrelationsfunktion mit der Arbeit von Weiss anstellen zu können, müssten diese durch eine energieabhängige Analyse präzisiert werden.

Für Rotoren ändert sich der Verlauf des Paarabstands grundlegend: Im Laufe der Simulation sammeln sich Rotoren gleicher Vorzeichen bei kleinen Abständen. Dies führt zum Anwachsen der Paarabstandsfunktion $p(r)$ bei kleinen Abständen (Abb. 4.3). Die Wirbelkorrelation $q(r)$ zeigt erwartungsgemäß ebenfalls einen positiven Berg. Dieser wird bei größeren Abständen ($r \approx 0.5$) kompensiert und schließlich ins negative verkehrt. Dies ist die Signatur des entgegengesetzten Cluster-Pols, der sich ebenfalls herausgebildet hat.

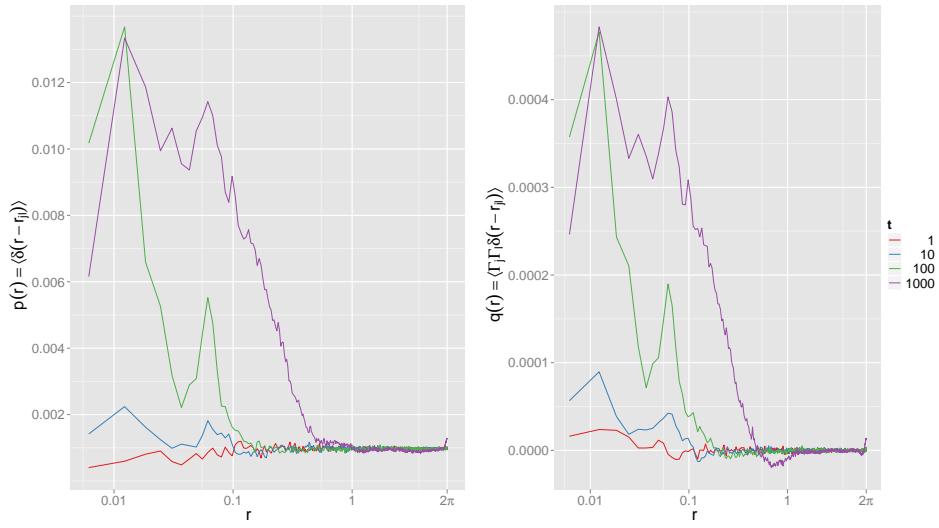


Abb. 4.3. Paarfunktionen für 500 Rotoren, $\Gamma_V = \pm 0.2$, $\gamma_R = 10$, $D_0 = \frac{2\pi}{100}$

Die Mittelung wurde über Wirbelpartner durchgeführt, nicht über einzelne Rotoren. Dies schlägt sich in den Paarfunktionen an einem lokalen Maximum beim Rotordurchmesser ($r = 2\pi/100 \approx 0.06$) nieder.

Anhand der Paarfunktionen lassen sich charakteristische Größen des Rotormodells definieren:

- Der *Clusterradius* ρ_C wird als derjenige Abstand definiert, bei dem $q(r)$ den ersten Nulldurchgang erfährt,

$$\rho_C = \operatorname{sgn}(q(0)) \min \{r | q(r) = 0\}.$$

Er wird positiv definiert, falls $q(0) > 0$ und negativ falls $q(0) < 0$. Der positive Radius entspricht damit einer mittleren Paarung gleich gepolter Rotoren, der negative Radius einer mittleren Paarung unterschiedlich gepolter Rotoren.

- Die *Clustermasse* μ_C wird definiert als das Integral

$$\mu_C = \operatorname{sgn}(q(0)) \int_0^{\rho_C} dr \ p(r),$$

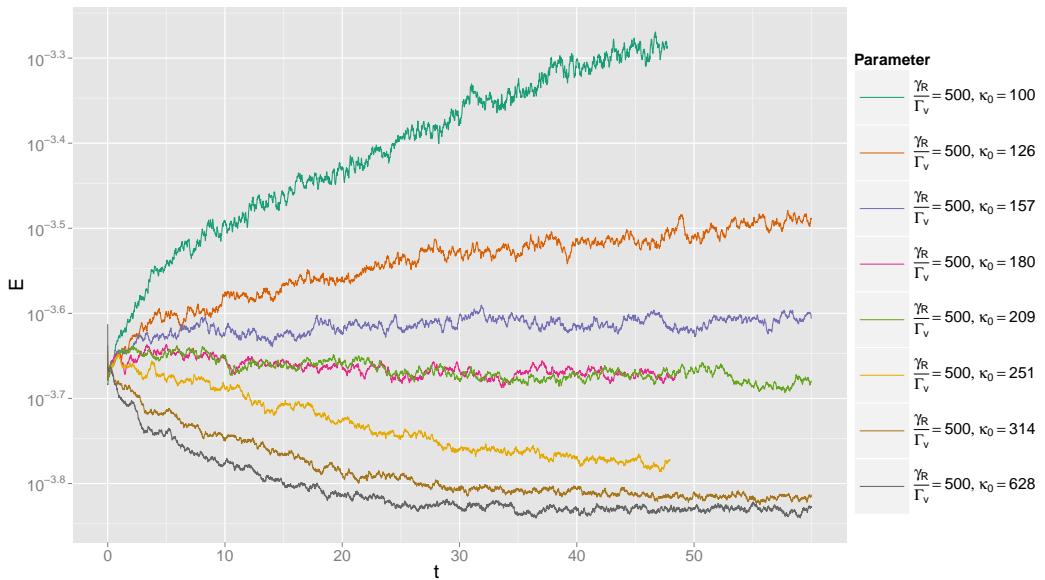
also die Fläche unter der Dichte $p(r)$ bis zum ersten Nulldurchgang. Dies entspricht dem prozentualen Anteil an Rotoren, die in einem Cluster kondensiert sind. Auch der Clustermasse wird das Vorzeichen von $q(0)$ zugeordnet, um anhand des Vorzeichens zwischen kondensierten und nicht-kondensierten Systemen unterscheiden zu können.

Mit Hilfe dieser Größen lässt sich die Kondensation des Systems in Abhängigkeit der Systemparameter $\gamma_R/\Gamma_V, D_0$ quantifizieren. Hierbei wird anstatt des Rotordurchmessers D_0 aus praktischen Gründen oftmals die zugeordnete Wellenzahl $\kappa_0 = 2\pi/D_0$ angegeben.

4.3. Kondensationsschwelle

Abb. 4.4. Energieverläufe ($N_R = 500, N_G = 1024$, Ensemblemittel über 20 Felder)

Ein erster Anhaltspunkt für das Verhalten der Systeme kann auch bei Rotoren durch die Gesamtenergie gegeben werden. Sie wurde hier durch Integration der spektralen Energie erhalten (beachte dazu den späteren Abschnitt 4.4). In den Abbildungen 4.4 und 4.5 ist deren Entwicklung im Zeitverlauf für verschiedene Werte von κ_0 dargestellt.

Abb. 4.5. Energieverläufe ($N_R = 500, N_G = 1024$, Ensemblemittel über 20 Felder)

Man erkennt an den Energieverläufen, dass der Energiezuwachs direkt von dem Verhältnis γ_R/Γ_v bzw. des Rotordurchmessers D_0 abhängt. Kleinere Verhältnisse korrelieren mit schnellerem Energiewachstum.

Bemerkenswert ist, dass die Energie bei kleinen Rotordurchmessern $D_0 = 2\pi/\kappa_0$ gar abnimmt. In den entsprechenden Ortsraum-Simulationen, sieht man, dass bei diesen Parametern tatsächlich keine Kondensation einsetzt, die Rotoren bleiben dauerhaft isoliert. Dies deutet darauf hin, dass es im Parameterraum $\left\{\frac{\gamma_R}{\Gamma_V}, \kappa_0\right\}$ eine Schwelle gibt, welche den Bereich der Rotorkondensation vom Bereich isolierter Vortexstrukturen trennt.

Das gleiche Verhalten erkennt man noch deutlicher am Plot der Paarkorrelation in Abb. 4.6, wo die Abstandsfunktionen für verschiedene Werte von κ_0 gegenübergestellt sind. Die dauerhaft isolierten Systeme weisen eine negative Korrelationsfunktion über weite Bereiche des Abstands auf. Die Funktion des kondensierenden Systems ($\kappa_0 = 126$) zeigt einen ganz anderen Verlauf: Bei kleinen Abständen bleibt im Unterschied zum punktwirbelartigen System ein deutlich positiver Sockel erhalten. Sein Maximum liegt bei dem Rotordurchmesser $D_0 = 0.05$. Die Punktwirbel-Korrelationsfunktion liegt zwischen den beiden Extremen. Sie besitzt nach wie vor das charakteristische Maximum bei $r \approx 0.04$.

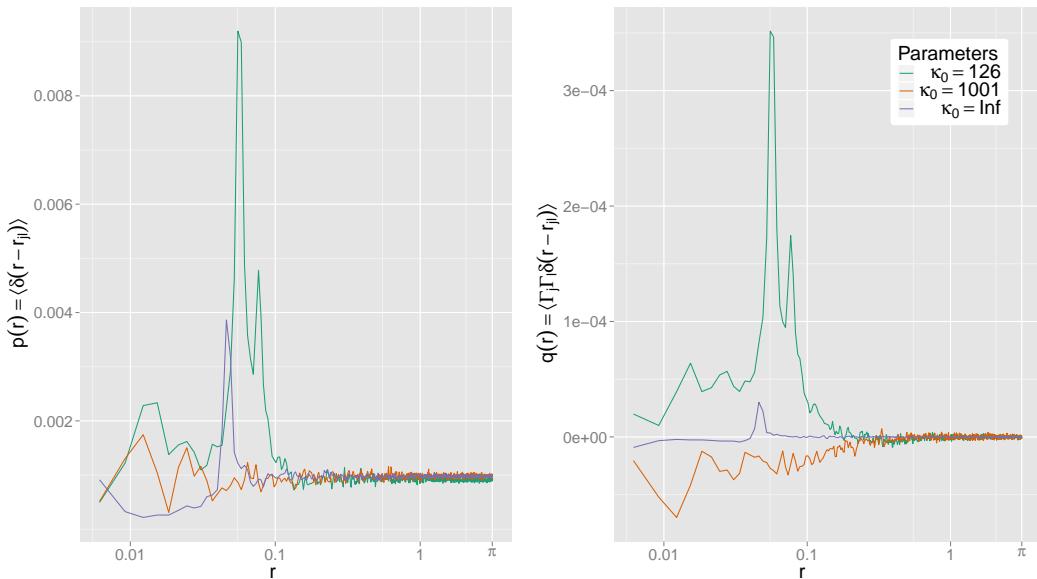


Abb. 4.6. Paarfunktionen für Rotoren mit $\gamma_R/\Gamma_V = 500$ sowie für Punktwirbel ($\kappa_0 = \infty$) zum Zeitpunkt $T = 30$. Deutliche Unterschiede zwischen dem kondensierenden ($\kappa_0 = 126$) und dem isolierenden System ($\kappa_0 = 1001$) sind erkennbar. Zum Vergleich sind die Punktwirbel-Paarfunktionen mit eingezeichnet.

Um die Kondensationsschwelle des Rotormodells genauer zu bestimmen, wurde der Parameterraum systematisch untersucht. Als Ausgangspunkt wurden die Parameterpaare gewählt, die auf Grund ihrer Energieverläufe im Bereich der Schwelle liegen sollten. Erwartungsgemäß setzt bei einer Erhöhung von γ_R/Γ_V auch hier ein Clusterprozess ein. Ausgehend von diesen Werten wurde der Parameterraum in unterschiedlich großen Abständen abgetastet. In Abb. 4.7 sind die untersuchten Messpunkte im Parameterraum eingezeichnet. Für jedes Parameterpaar wurde eine Simulation eines Ensembles von 50 Feldern über 11 Zeiteinheiten durchgeführt.

Die Studie deckt den sinnvollen Parameterbereich ab: Bei der schwächsten untersuchten Bindung γ_R/Γ_V werden die Rotoren durch das Geschwindigkeitsfeld, unabhängig von ihrem Anfangsdurchmesser, sehr weit auseinandergezogen, wobei sie dabei teilweise an die Größe des Feldes heranreichen. Sie vermischen sich dann bereits innerhalb kürzester Zeit, weshalb kleinere Werte nicht mehr interessant sind. Auf der anderen Seite besitzen die größten untersuchten Rotoren ($K = 30$) bereits $1/5$ der Feldgröße. Sie erfüllen damit auf Grund der hohen Rotorendichte sehr schnell nicht mehr die anfangs gesetzte Voraussetzung der isolierten Strukturen. Der interessante Bereich liegt deshalb in der Mitte des hier untersuchten Parameterbereichs.

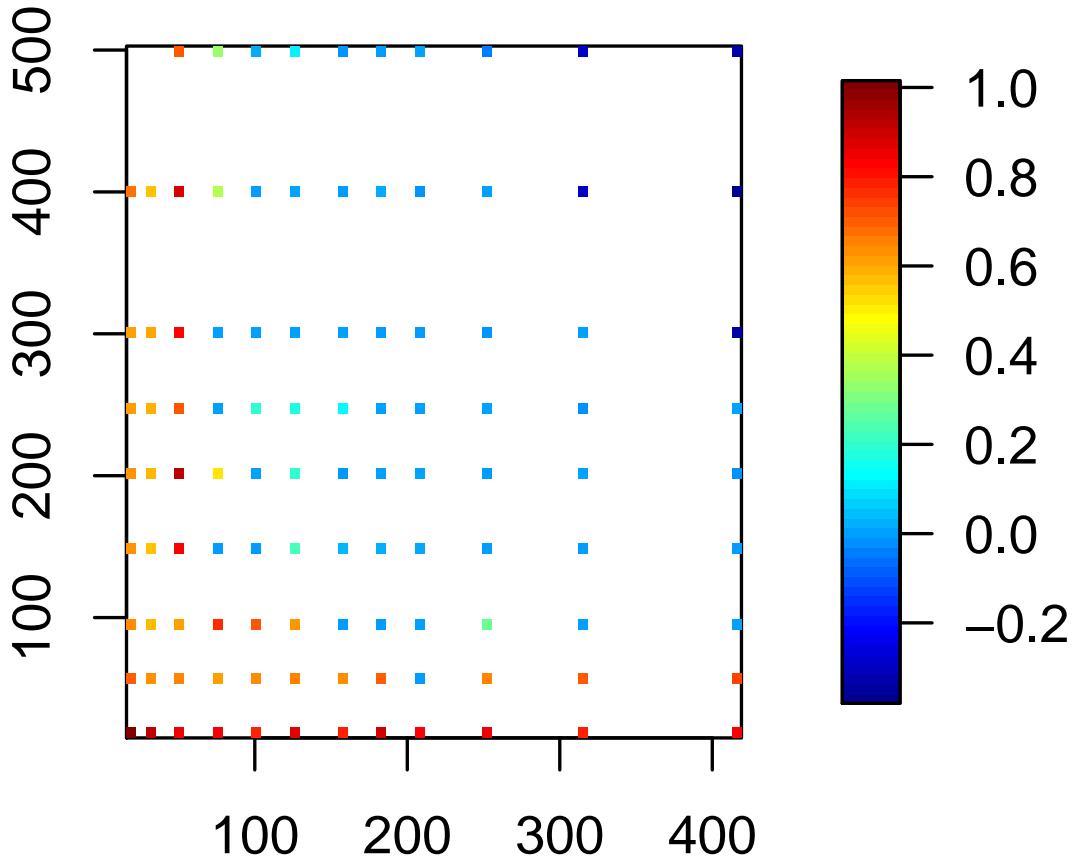


Abb. 4.7. Messpunkte der Parameterstudie (Farbcodiert: Radius zur Zeit $T = 11$). Die y -Achse zeigt γ_R/Γ_V , die x -Achse zeigt $\kappa_0 = \frac{2\pi}{D_0}$

Um einen Eindruck vom Verlauf der Größen im Parameterraum zu erhalten, wurden die Messpunkte interpoliert dargestellt. In den Abbildungen 4.9, 4.8 und 4.10 sind die Parameterplots von Radius, Masse und Energie der Cluster zu sukzessiven Zeitpunkten dargestellt. Man beachte die variierende Skala für die Energieplots. Bei den beiden anderen Plots sind die Skalen für alle Zeitpunkte gleich gewählt. Zu Beginn sind alle Felder zufallsverteilt. Bei $T = 4$ bilden sich die ersten kleinen Cluster in den Regionen kleiner κ_0 -

und γ/Γ -Werte. Im weiteren Verlauf dehnt sich dieser Zustand weiter im Parameterraum. Nach der Zeit $T = 11$ kann man davon ausgehen, dass Kondensation in allen Systemen begonnen hat, falls die Parameter dies zulassen. Das kann man anhand der Energieverläufe 4.4 erkennen. Lediglich die Masse wird im weiteren Verlauf noch anwachsen.

Die Null-Isolinie $\rho_C = 0$ gibt dabei den Grenzverlauf zwischen kondensierenden und isolierenden Systemen wieder. Anhand der Definitionen von ρ_C und μ_C ist klar, dass beide Nulllinien theoretisch zusammenfallen müssen. Dies klappt im Fit nicht immer, wie man bei $T = 11$ sehen kann. Dort bilden sich im Plot für die Clustermasse an der Kondensationsschwelle einzelne Zellen, die Nulllinie stimmt nicht mit der des Radiusplots überein. Dies liegt an der geringen Masse der Clusterstrukturen in Systemen direkt am Übergang zur Kondensation. Diese Clustermassen sind noch sehr gering, um hier eine zuverlässige Grenzlinie zu erhalten müsste man längere Zeitdauern betrachten.

Die physikalisch relevanten Zustände, welche Kondensation zeigen, müssen in unmittelbarer Nachbarschaft zur Null-Isolinie gesucht werden. Die weit entfernten Zustände gehören entweder zu sehr großen Rotoren, oder zu sehr schwach gebundenen Rotoren, welche durch das Feld der anderen Wirbel zu stark gedehnt werden. Die Zustände nahe an der Nulllinie können die Modellvoraussetzung der Fernfeldnäherung über einen akzeptablen Zeitraum erfüllen.

Die physikalisch sinnvoller Parameterwahl kann anhand des Radiusplots auf die beiden Streifen zu

$$\{\kappa_0 < 150 \quad \text{oder} \quad \gamma/\Gamma < 150\} \quad (4.5)$$

beschränkt werden. Untere Grenzbereiche für wohldefinierte Clustersysteme können aus den Parameterplots nichts entnommen werden, da der Übergang dort fließend vonstatten geht. Deshalb sollte bei der Simulation darauf geachtet werden, die Parameter möglichst nahe am Limit aus Gleichung (4.5) zu wählen.

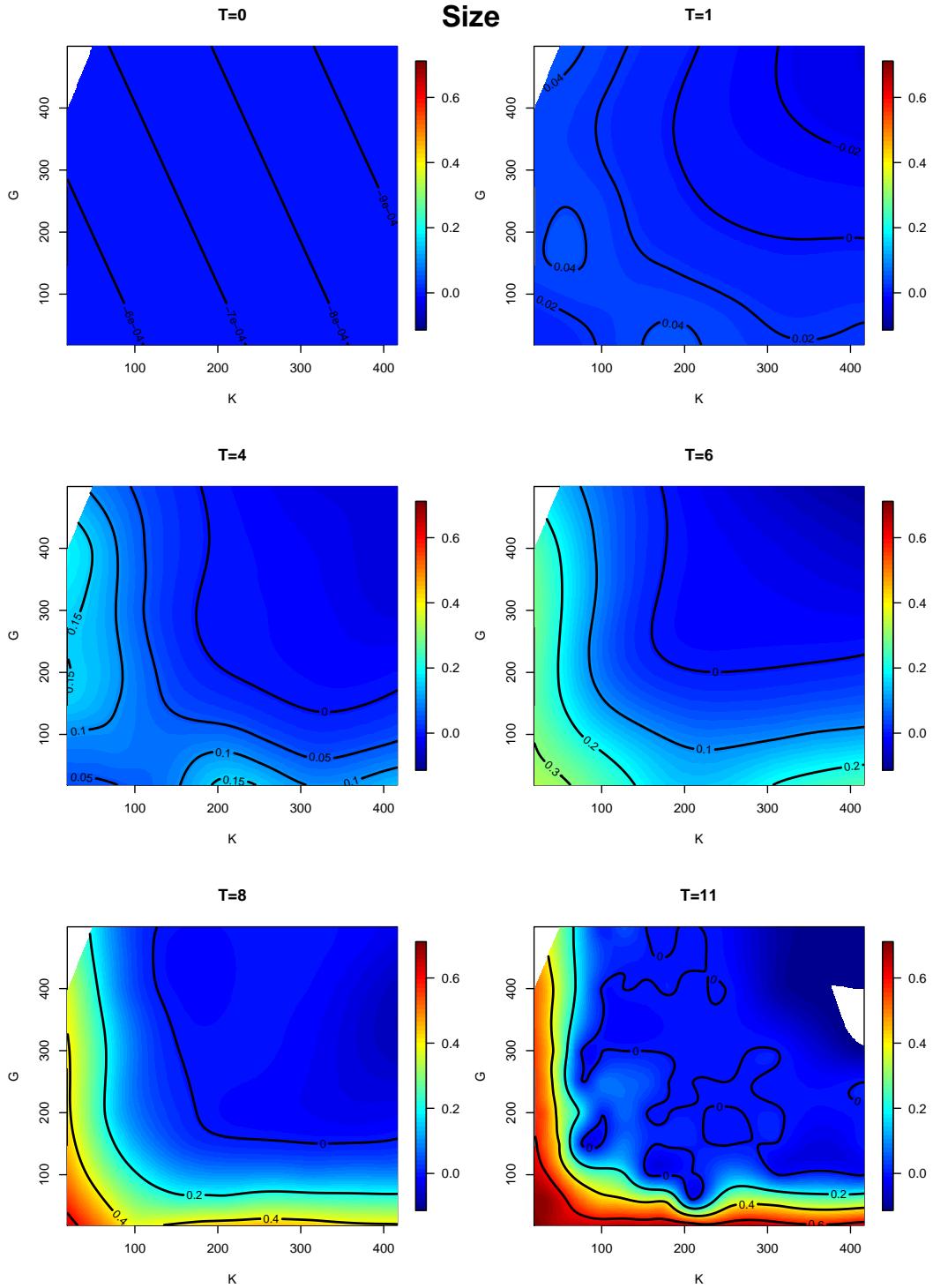


Abb. 4.8. Parameterstudie der Clustermasse im Zeitverlauf; $G = \frac{\gamma_R}{\Gamma_V}, K = \kappa_0$

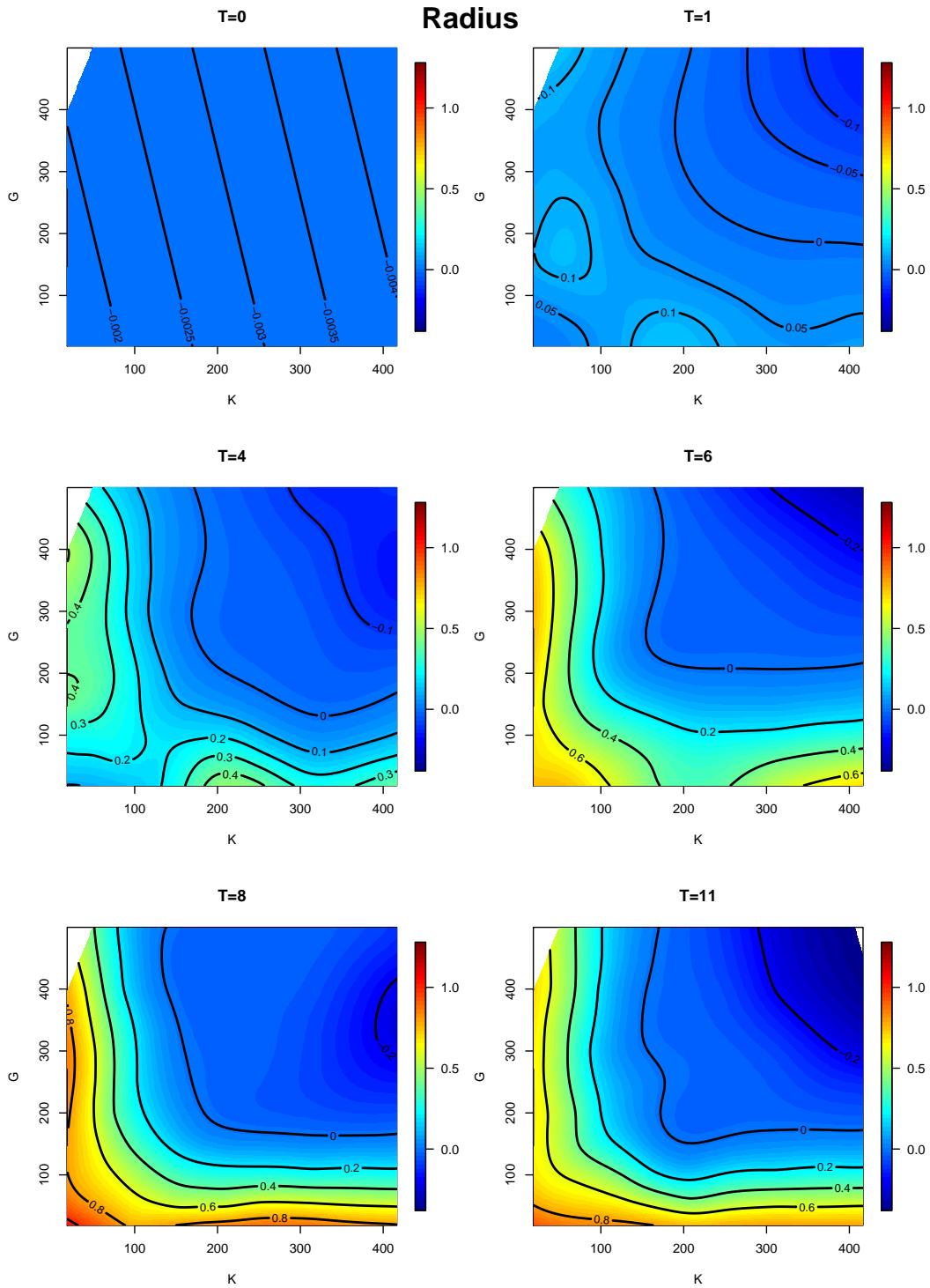


Abb. 4.9. Parameterstudie des Clusterradius' im Zeitverlauf $G = \frac{\gamma^R}{\Gamma_V}, K = \kappa_0$

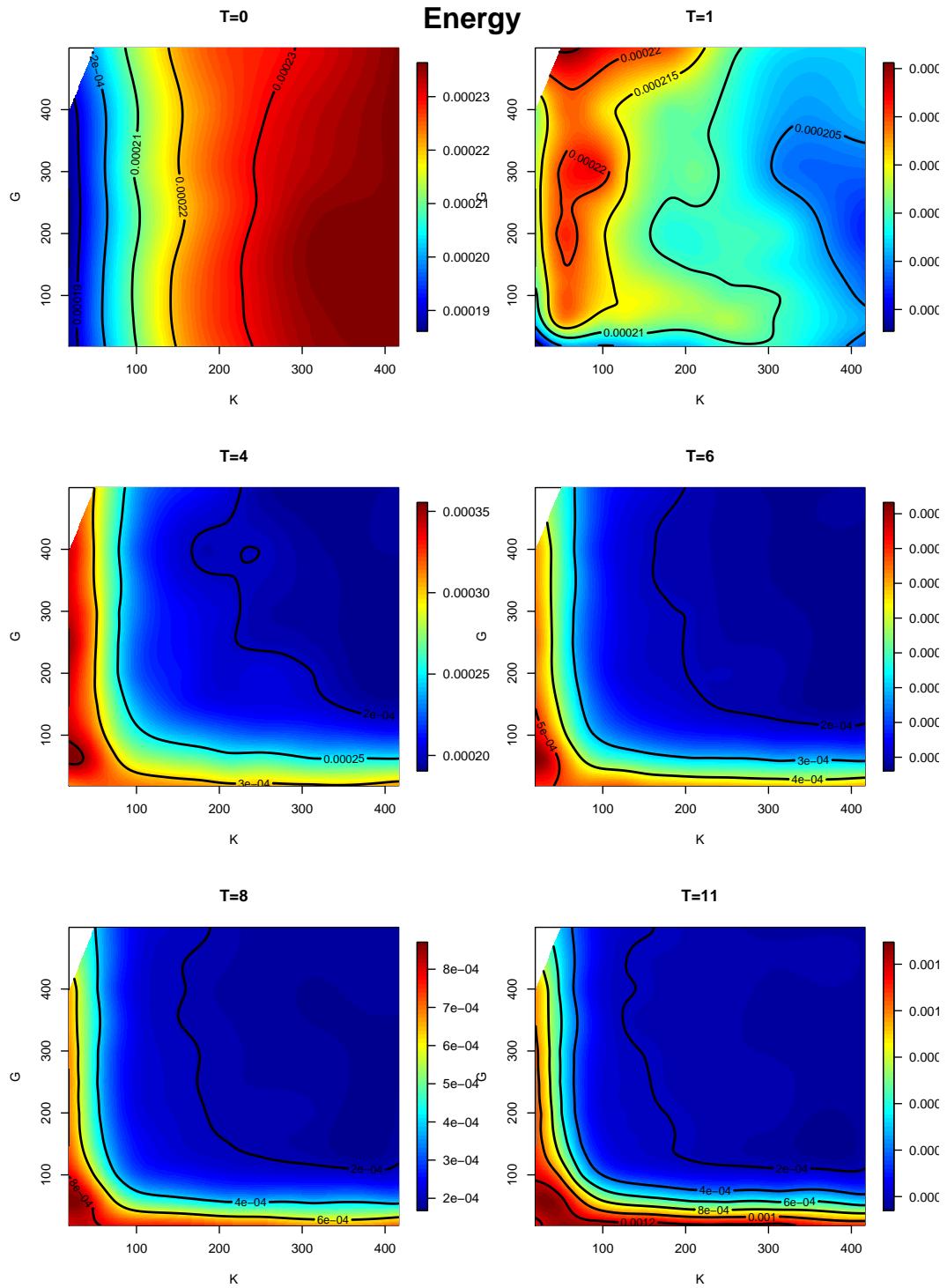


Abb. 4.10. Parameterstudie der Energie im Zeitverlauf $G = \frac{\gamma_R}{\Gamma_V}, K = \kappa_0$ Man beachte die je nach Zeitpunkt unterschiedliche Skala.

4.4. Energiespektrum

In diesem Abschnitt soll das Energiespektrum des Rotormodells untersucht werden. Dabei liegt ein besonderes Augenmerk auf Ähnlichkeiten und Unterschieden zu den Ergebnissen aus direkter numerischer Simulation der Wirbeltransportgleichung. Außerdem wird das Spektrum des Rotormodells mit demjenigen einfacher PunktWirbel verglichen.

In Abschnitt 2.7 dieser Arbeit wurden Ergebnisse zur Energieverteilung in der Skala zusammengetragen. Die turbulente inverse Kaskade weist demnach ein Energiespektrum mit einer $k^{-5/3}$ -Skalierung auf. Ein Modell zur Beschreibung der inversen Kaskade sollte für hohe Auflösungen, d.h. in diesem Fall eine große Anzahl an Wirbelstrukturen und eine gute Diskretisierung, eine ähnliche Skalierung aufweisen.

Die periodischen Randbedingungen lassen sich ausnutzen, um mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation (DFT) in den Fourierraum zu wechseln. Dort sind spektrale Größen wie das Energiespektrum leicht zugänglich. Dazu müssen die Wirbelstrukturen im Ort diskretisiert werden.

Der Ansatz der direkten Wiedereinbettung von lokalisierten Wirbelstrukturen in ein reguläres Gitter wird in der Literatur vielfach verfolgt (z.B. [Yatsuyanagi, 2008](#)). In der vorliegenden Arbeit wird zuerst das Geschwindigkeitsfeld im Ort berechnet und dieses dann diskretisiert. Das bietet den Vorteil, dass das glattere Geschwindigkeitsfeld weniger Diskretisierungsprobleme bereitet als das δ -förmige Wirbelstärkefeld. Allerdings besitzt auch das Geschwindigkeitsfeld im Bereich der PunktWirbel sehr deutliche Sprungstellen, welche numerische Probleme bereiten. Deshalb wurde das Feld mit Hilfe eines Gauß-Filters geglättet (siehe Abschnitt 5.2 für genaue Details hierzu).

Nachdem die Geschwindigkeit im Ortsraum gemäß

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_j^N \Gamma_j \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)|^2}. \quad (4.6)$$

ausgerechnet wurde, wird sie mittels DFT in den Fourierraum transformiert. Das Energiespektrum ist dann durch Winkelintegration gegeben

$$E(k, t) = \frac{1}{2N_V N_G N_C} \int d^2\Omega \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \mathbf{u}^*(\mathbf{k}, t) \quad (4.7)$$

Um verschiedene Systemgrößen miteinander vergleichen zu können, wird das Energiespektrum auf die Wirbelanzahl und die Gittergröße normiert.

4.4.1. Normale PunktWirbel

Zu Vergleichszwecken wurde das Energiespektrum von normalen PunktWirbeln in einem doppelt-periodischem Gebiet untersucht.

Ein exemplarischer Zeitverlauf der integrierten spektralen Energie einer Realisation, welche proportional zur Gesamtenergie des Systems ist, ist in Abb. 4.11 dargestellt. Man sieht, dass das System einige Zeit benötigt, bis es einen Gleichgewichtszustand erreicht hat. Danach weist es weiterhin bedingt durch die Diskretisierung Fluktuationen auf. Als

hamiltonsches System müssten Punktwirbel in periodischen Randbedingungen eine konstante Gesamtenergie aufweisen.

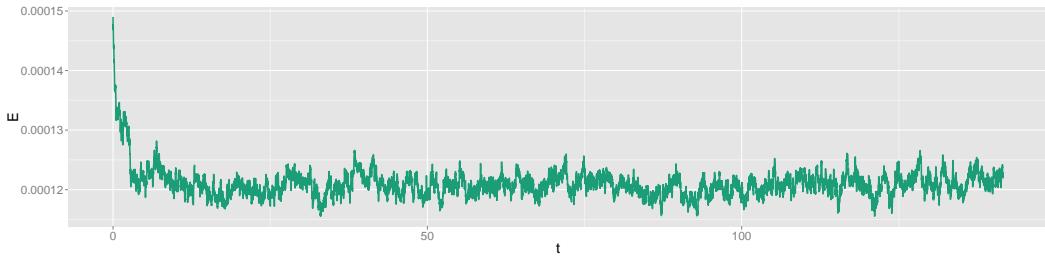


Abb. 4.11. Energieverlauf für gaußsche Geschwindigkeitsprofile

Das dazugehörige Energiespektrum wird in Abb. 4.12 für verschiedene Gitterauflösungen im doppelt logarithmischen Plot gezeigt. Man kann deutlich erkennen, dass es eine konstante negative Steigung annähernd über den gesamten Bereich gibt. Bei großen k wird ein leichter Anstieg sichtbar, welcher mit der Gittergröße mitskaliert. Dieses numerische Artefakt wird in Abschnitt 5.2.1 diskutiert. Abgesehen davon bleibt die Steigung für alle Gittergrößen unverändert.

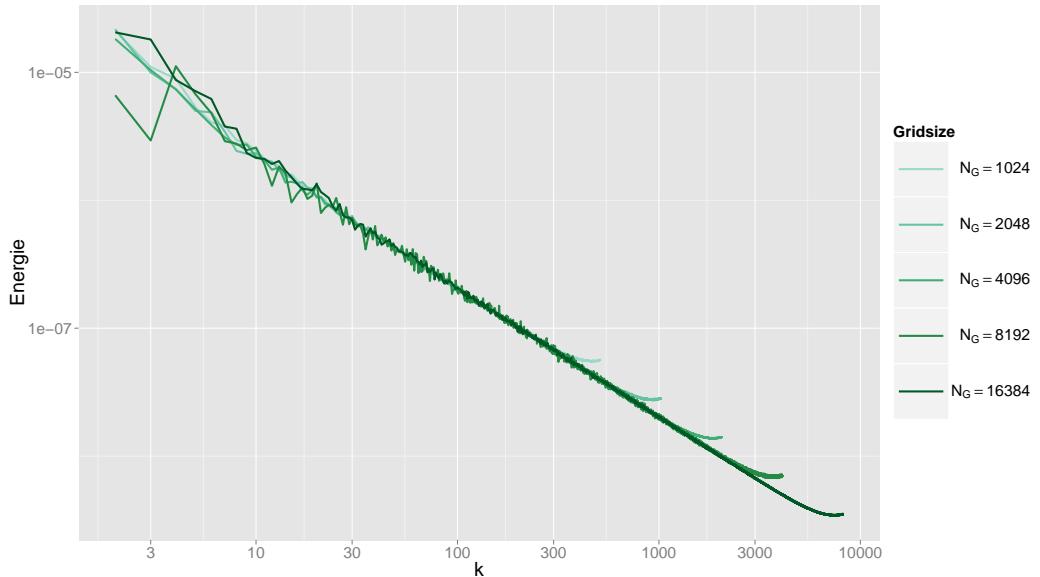


Abb. 4.12. Energiespektrum für normale Punktwirbel (Ensemblemittel)

In Abb. 4.13 sind die Spektren für verschiedene Punktwirbelzahlen zwischen 1 und 20000 aufgetragen. Tatsächlich liegen die Spektren exakt aufeinander, weshalb sie hier der besseren Übersichtlichkeit halber vertikal versetzt dargestellt werden. Augenscheinlich hat die Steigung des Spektrums keine oder eine sehr schwache Abhängigkeit von der

Punktwirbelbelanzahl. Auch durch einen linearen Fit an die Spektren konnte innerhalb der Fehlergrenzen und der simulierbaren Wirbelzahlen keine Änderung mit der Wirbelzahl festgestellt werden. Der Exponent wurde dadurch zu $\alpha = (-1.01 \pm 0.03)$ abgeschätzt. Die Konstanz des Exponenten über einen derart weiten Bereich, deutet auf eine universelle Eigenschaft hin.

Diese lässt sich finden: Die spektrale Geschwindigkeit eines Punktwirbels besitzt nach (3.3) eine $1/k$ -Abhängigkeit. Das Energiespektrum

$$\begin{aligned} E(k) &\propto \int d^2\Omega \mathbf{u}(\mathbf{k})\mathbf{u}^*(\mathbf{k}) \\ &\propto 4\pi \int d\varphi \int dk \mathbf{u}(k, \varphi)\mathbf{u}^*(k, \varphi) \\ &\propto \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (4.8)$$

weist entsprechend nach der Winkelintegration ebenfalls eine $1/k$ -Abhängigkeit auf.

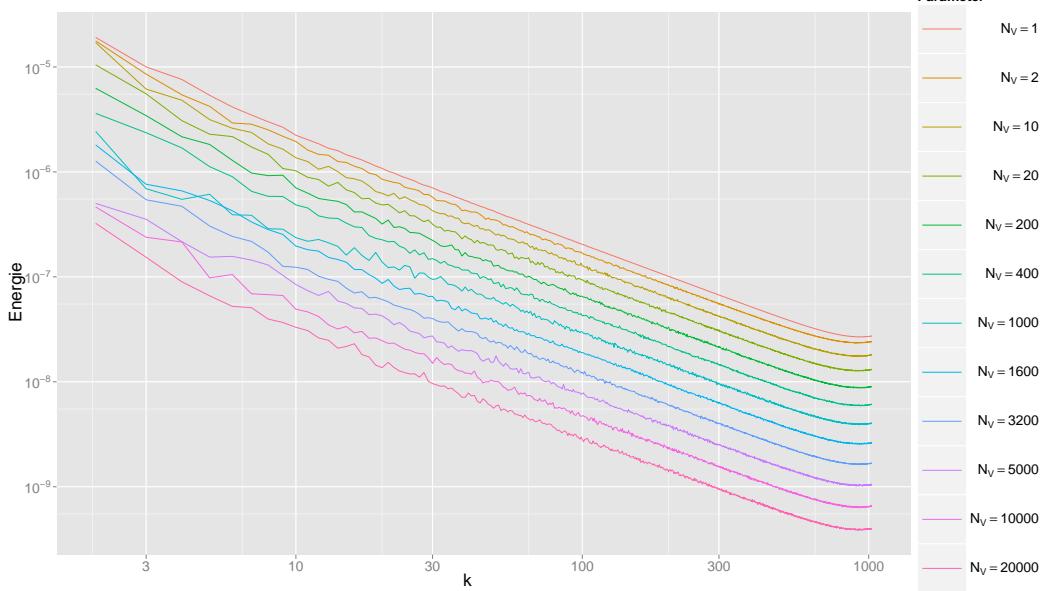


Abb. 4.13. Energiespektren für normale Punktwirbel, abhängig von der Wirbelanzahl ($N_G=2048$)

Die Steigung des Spektrums erweist sich folgerichtig als äußerst robuste Größe. [Yatsuyanagi \(2008\)](#) findet für ein Punktwirbelsystem im Falle positiver Temperatur in zylindrischen Randbedingungen eine Steigung von -1 . Die hier erzielten Ergebnisse sind damit konsistent.

4.4.2. Rotoren

Es soll untersucht werden, inwiefern das Energiespektrum der Rotoren von dem der Punktwirbel abweicht. Der Geschwindigkeitskern ist im Rotormodell unverändert. Deshalb dürfte die $1/k$ -Signatur auch hier noch eine entscheidende Rolle spielen. Dennoch

zeigen sich einige neue Charakteristika, die einen Vergleich der Spektren interessant machen.

In Abb. 4.14 ist ein typisches Spektrum im Verlauf einer Simulation dargestellt. Man sieht hier die wesentlichen Merkmale des Rotorspektrums: Zum einen gibt es Oszillationen auf der Rotor-Größenskala. Zum anderen bildet sich im Laufe der Zeit ein Knick im Spektrum.

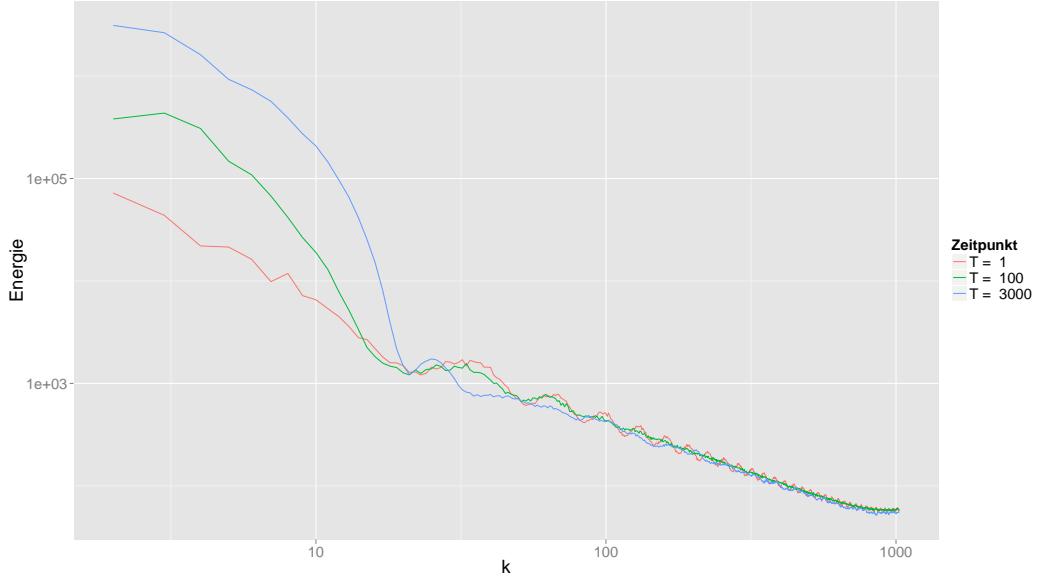


Abb. 4.14. Entwicklung des Energiespektrums

Oszillationen im k -Raum

Das Energiespektrum für Rotoren weißt Oszillationen auf. Die Ursache liegt in der Rotorbindung. Die Wellenlänge der Oszillationen im k -Raum entspricht dem Gleichgewichtsabstand der Rotoren. In Abb. 4.15 und 4.16 sind die Oszillationen abhängig von dem Gleichgewichtsabstand D_0 der Rotoren dargestellt. Die oszillatorische Struktur wird nach Simulationsbeginn sehr schnell geglättet. Dies hat die Ursache, dass die Rotoren anfangs allesamt den gleichen Abstand D_0 besitzen. Nach kurzer Zeit ist das nicht mehr der Fall. Was übrig bleibt ist ein im Laufe der Zeit wachsender Anstieg bei großen Skalen. Dieser wächst am schnellsten für die größten Rotoren. Er korrespondiert mit dem wachsenden Cluster im Ortsraum.

Die Bindungsstärke γ_R hat keine Auswirkungen auf die Wellenlänge der Oszillationen 4.17. Sie bestimmt aber deren Amplitude. Im vorigen Abschnitt in Abb. 4.4 haben wir zudem gesehen, dass der Parameter die Geschwindigkeit beeinflusst, mit der Cluster gebildet werden.

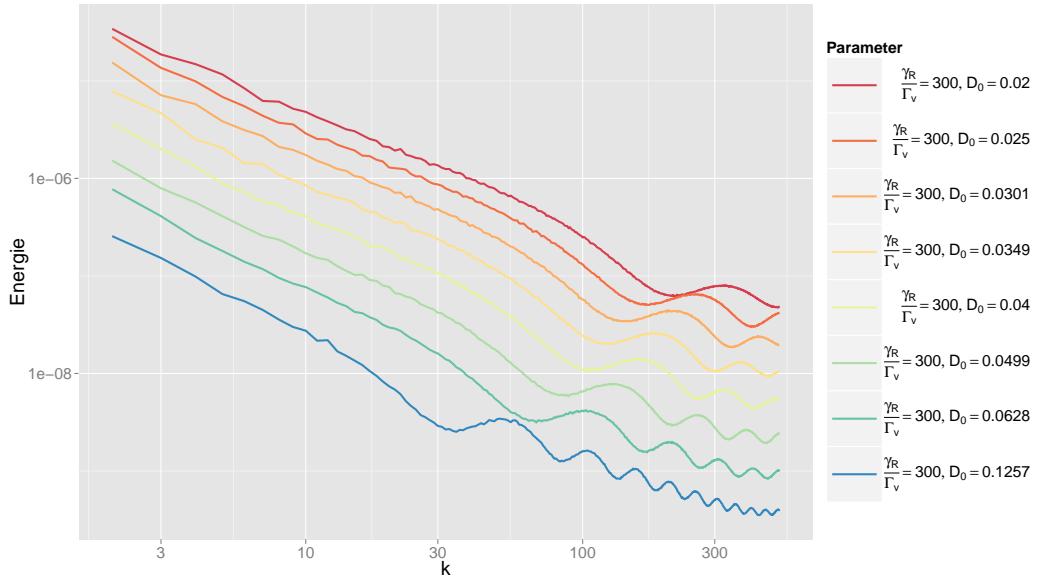


Abb. 4.15. D_0 -Abhängigkeit der Oszillationen des Energiespektrums von Rotoren, $T = 0$

Abknickendes Spektrum

In Abb. 4.14 sieht man, dass sich im Spektrum im Laufe der Zeit ein Knick bei einer Skala k_{knick} ausbildet. Bei Wellenzahlen mit $k < k_{\text{knick}}$ steilt sich das Energiespektrum auf, Energie sammelt sich dort an. Dabei bildet das Spektrum dort zunehmend eine Wölbung aus und es lässt sich keine konstante Steigung mehr ablesen. Die Ausbildung eines großen Clusters im Realraum ist direkt in Zusammenhang zu bringen mit dem Ansammeln der Energie im spektralen Raum.

Die Ansammlung der Energie in großen Skalen bedeutet, dass bis zur vollständigen Ausbildung des Wirbeldipols ein Energiefluss dorthin stattfindet. Dies ist ein zentrales Merkmal der inversen Kaskade. Dennoch sollte dieses Resultat aus mehreren Gründen noch mit Vorsicht betrachtet werden.

Erstens handelt es sich noch nicht um einen stationären Energiefluss, der bei einer anhaltenden inversen Kaskade erwartet wird. Dies ist natürlich nicht weiter verwunderlich, da aufgrund der Simulationsbedingungen auch keine Stationarität zu erwarten ist.

Außerdem steigt die Gesamtenergie im Laufe der Zeit – durch die Rotorbindung wird dem System Energie zugeführt. In (2.47) hatten wir aber gesehen, dass der turbulente Energietransport im Inertialbereich ohne Änderung der Gesamtenergie vonstatten geht.

Schließlich bleiben weite Skalenbereiche, nämlich diejenigen mit $k > k_{\text{knick}}$ unverändert, wenn man von den anfänglichen Oszillationen absieht. Der Anteil des Spektrums bei groeren Wellenzahlen $k > k_{\text{knick}}$ behält die konstante Steigung und wurde für verschiedene Parameterpaare gemessen und hat eine unveränderte Steigung von k^{-1} . Das bedeutet, dass die kleinskalige Energieverteilung durch den zusätzlichen Kraftterm nicht beeinflusst wird.

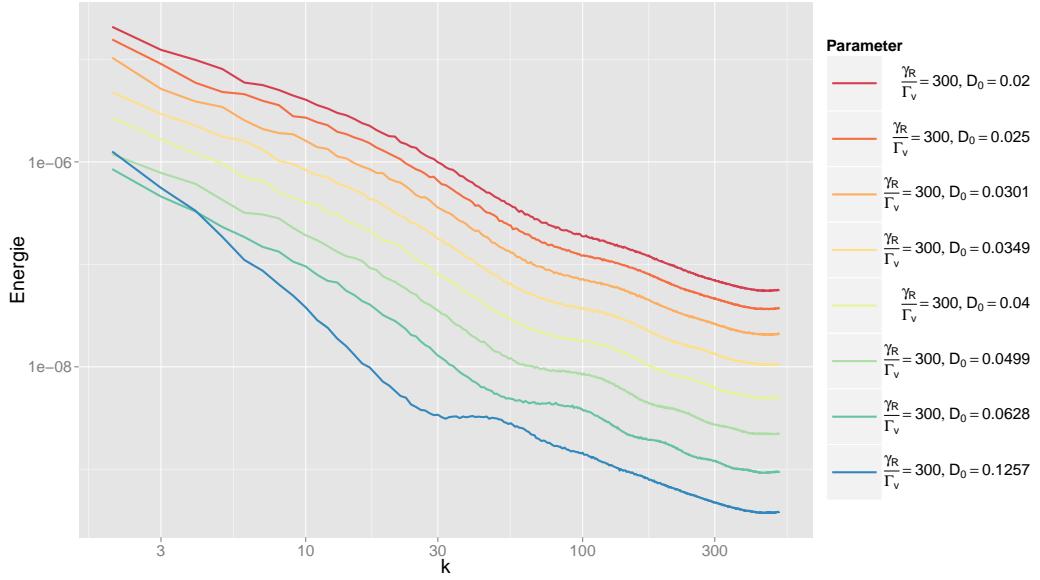


Abb. 4.16. D_0 -Abhängigkeit der Oszillationen des Energiespektrums von Rotoren, $T = 10$

Nicht unerwähnt bleiben soll ein qualitativ ähnliches Ergebnis, welches mit Hilfe von DNS in Chertkov u. a. (2007) erzielt werden konnte. Dort wurde die Entwicklung eines anfänglichen Zufallsfelds simuliert, ohne Energie auf großen Skalen durch einen Reibungsterm aus dem Feld zu nehmen. Das Resultat war die Bildung eines finalen Wirbeldipols. Es ist den Autoren gelungen, durch Subtraktion des kohärenten Spektrumsanteils ein k^{-1} -Spektrum für den fluktuierenden Feldanteil zu berechnen. Dieses Ergebnis befindet sich in Übereinstimmung mit dem hier erzielten Resultat für große k .

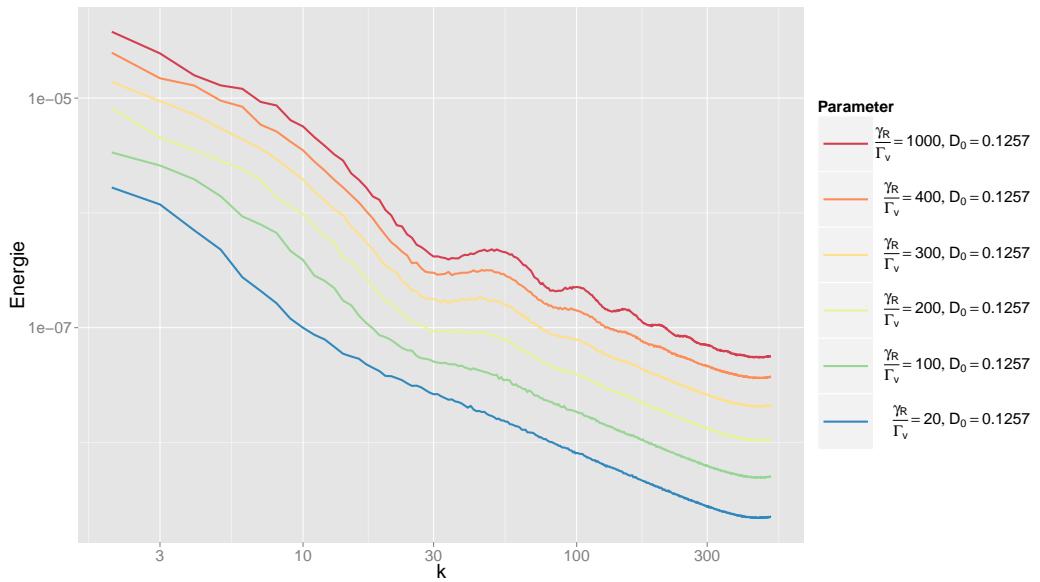


Abb. 4.17. γ_R -Abhängigkeit der Spektren, $T = 0$

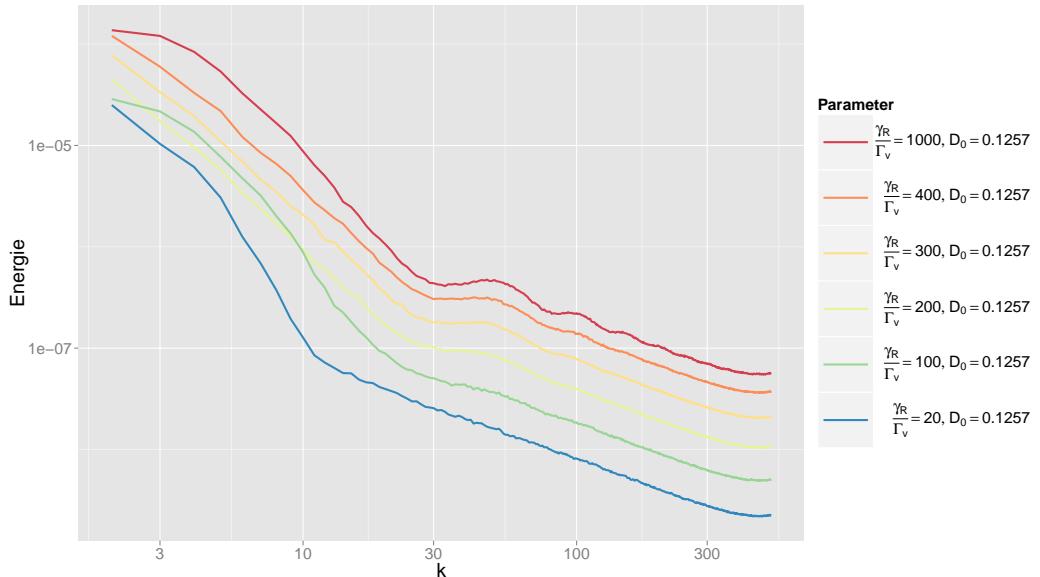


Abb. 4.18. γ_R -Abhängigkeit der Spektren, $T = 10$

5. Numerische Methoden

5.1. Zeitintegration

Da es sich bei dem Rotormodell um ein System außerhalb des Gleichgewichts handelt, variiert die nötige numerische Präzision im Verlauf der Simulation teilweise stark. Anfangs sind die Rotoren weit voneinander entfernt. Wenn sie sich einander annähern, verkleinert sich die benötigte Schrittweite.

Um die nötige Schrittweite an die momentane Situation anpassen zu können, benötigt man eine Kontrollmöglichkeit über die numerischen Fehler. Deshalb wurde die Integration der Bewegungsgleichungen mit der Runge-Kutta-Fehlberg Methode, einer Runge-Kutta-Variante mit adaptiver Schrittweitensteuerung, durchgeführt. Bei dieser Methode wird die Lösung eines Verfahrens vierter Ordnung \mathbf{x}_{n+1} mit derjenigen eines Verfahrens fünfter Ordnung \mathbf{x}_{n+1}^* verglichen. Es handelt sich um eine eingebettete Methode, d.h. es ist so konstruiert, dass das genauere Verfahren alle Schritte des ungenauerer mitnutzen kann, was Rechenzeit spart.

In der Gleichung (2.30) tritt noch eine doppelt-unendliche Summe auf. Sie entspricht der periodischen Fortsetzung des Wirbelfelds in eine Richtung, in diesem Fall in \mathbf{e}_x -Richtung. Diese Reihe konvergiert schnell (Weiss u. McWilliams, 1991). Sie muss für die numerischen Rechnungen natürlich nach endlich vielen Gliedern abgebrochen werden. Dies ist auf Grund der guten Konvergenzeigenschaften der Summe jedoch unproblematisch.

Um durch diesen Summenabbruch keine numerischen Fehler einzuführen, wurde eine an die adaptive Schrittweitensteuerung angelehnte ähnliche Idee verfolgt. Dazu wird eine Simulation mit m Nachbarfeldern mit der nächstgenauerer Simulation, bei der $m+1$ Nachbarfelder berücksichtigt werden, verglichen. Ein gutes Maß für den gemachten Fehler ist die auf den Betrag des aktuellen Feldes skalierte Differenz der beiden Feldänderungen:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{|(\mathbf{x}(t_n) + \dot{\mathbf{x}}_m(t_n)) - (\mathbf{x}(t_n) + \dot{\mathbf{x}}_{m+1}(t_n))|}{|\mathbf{x}(t_n)|} \\ &= \frac{|\dot{\mathbf{x}}_m - \dot{\mathbf{x}}_{m+1}|}{|\mathbf{x}(t_n)|} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^N |\dot{x}_{j,m}(t_n) - \dot{x}_{j,m+1}(t_n)|}{\sum_{j=1}^N |x_j(t_n)|}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Sobald der Fehler die Genauigkeit der Zahlendarstellung auf dem Computer unterschreitet, verliert er seine Bedeutung für die numerische Integration. Diese Bedingung wurde für die hier verwendeten Parametern getestet und ist, bei Zahlendarstellung in doppelter Genauigkeit, bereits zwischen drei und sieben Nachbarfeldern erfüllt, bei einfacher Genauigkeit für drei bis vier Felder.

Die Simulationen wurden auf einen festen Wert von drei Nachbarfeldern eingestellt, da, wie wir in 5.3 sehen werden, kleine Abweichungen von der exakten Lösung ohnehin in Kauf genommen werden müssen.

5.2. Spektrale Berechnungen

Zur Berechnung diverser statistischer Größen ist es oft praktisch, das Wirbelstärkefeld im Ort zu diskretisieren. Damit ist es auf einfache Art möglich, interessante Größen auszurechnen und beispielsweise im Fourieraum zu analysieren. Außerdem lassen sie sich auf einfache Weise mit Ergebnissen aus direkten numerischen Simulationen vergleichen.

Das Geschwindigkeitsfeld ist glatter als das Wirbelstärkefeld. Es lässt sich für ein Punkt-wirbelfeld einfach ausrechnen:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_j^N \Gamma_j \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)|^2} \quad (5.2)$$

mit den Punktwirbeln an den Positionen $\mathbf{x}_j(t)$. Die periodische Fortsetzung der Punktwirbel wurde an dieser Stelle manuell hergestellt, indem das Wirbelfeld auf die acht angrenzenden Nachbarfelder kopiert wurde.

Für numerische Zwecke muss das Geschwindigkeitsfeld auf ein Gitter der Größe $N_G \times N_G$ diskretisiert werden

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{u}_x(t) = \mathbf{u}_{x_1, x_2}(t), \quad (x_1, x_2) \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{N_G - 1} \right\} \quad (5.3)$$

Danach kann es auf Grund der periodischen Randbedingungen mit der diskreten Fourier-transformation (DFT) transformiert werden.

$$\hat{u}_{k_1, k_2}(t) = \sum_{x_1=0}^{N_G-1} \sum_{x_2=0}^{N_G-1} u_{x_1, x_2}(t) e^{-i \frac{2\pi}{N_G} k_1 x_1} e^{-i \frac{2\pi}{N_G} k_2 x_2} \quad (5.4)$$

Das Wirbelstärkefeld wird dann als

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \mathbf{u}(\mathbf{k}) \quad (5.5)$$

berechnet.

5.2.1. Räumliche Diskretisierung von Punktwirbeln

Wie bereits oben erwähnt, kommt es bei der Berechnung des Punktwirbel-Energie-spektrums zu einer numerischen Schwierigkeit: Im Spektrum wird bei großen Wellenzahlen ein Energieanstieg beobachtet. Dieser Anstieg wandert mit steigender Gitterauflösung zu größeren Wellenzahlen mit (Abb. 5.1). Aus dieser Tatsache ist zu schließen, dass es sich hier nicht um einen physikalischen Effekt handelt, sondern ein Artefakt der Diskretisierung sichtbar wird. In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit erörtert, dem Problem zu begegnen.

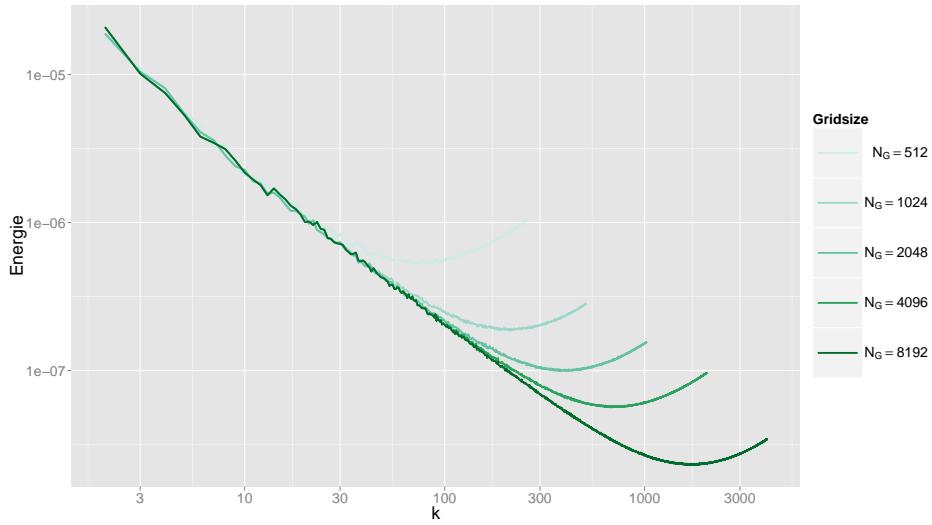


Abb. 5.1. Anstieg des Spektrums bei großen Wellenzahlen

Die Ursache des Anstiegs liegt in diskreten Fouriertransformation mit endlicher Modenanzahl. Es handelt sich um Gibbsche Oszillationen: Das Punktirbel-Geschwindigkeitsfeld divergiert bei $r = 0$. In der direkten Umgebung eines Punktirbels ändert sich das Geschwindigkeitsfeld sehr stark. Auf Grund der Diskretisierung weist die Projektion des Geschwindigkeitsfeldes auf eine Achse dann eine Sprungstelle auf. Im Fourierraum werden höhere Moden angeregt, um die Sprungstelle darzustellen, die im Spektrum als Anstieg bei großen k sichtbar werden.

Um die Auswirkung dieses Diskretisierungsfehlers auf die in dieser Arbeit berechneten Größen zu ermitteln, wurde das Geschwindigkeitsfeld derart modifiziert, dass der Anstieg verschwindet: Das Geschwindigkeitsprofil der Punktirbel wurde durch das Profil eines gaußschen Wirbels ersetzt

$$\mathbf{u}(r) = \frac{1}{2r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{a^2}} \right) \mathbf{e}_\varphi \quad (5.6)$$

wobei das zugehörige Wirbelstärkefeld durch

$$\omega_z(r) = \frac{\Gamma}{a^2} e^{-\frac{r^2}{a^2}} \quad (5.7)$$

gegeben ist.

Ein Vergleich der Geschwindigkeitsfelder ist in 5.2 dargestellt. Man sieht, dass im Fernfeld das Gaußprofil gegen das Punktirbelprofil konvergiert. Während das Punktirbelprofil um $r = 0$ divergiert hat das Gaußprofil dort einen näherungsweise linearen Anstieg und verschwindet bei $r = 0$.

Wie in Abb. 5.1 zu sehen ist, weist ein besser aufgelöstes Spektrum in einem Bereich, wo ein Spektrum mit schlechterer Auflösung bereits ansteigt, weiterhin ein lineares Verhalten auf. Für die Wahl des modifizierten Geschwindigkeitsfeldes sollte also darauf geachtet werden, dass das lineare Verhalten mit korrekter Steigung erhalten bleibt.

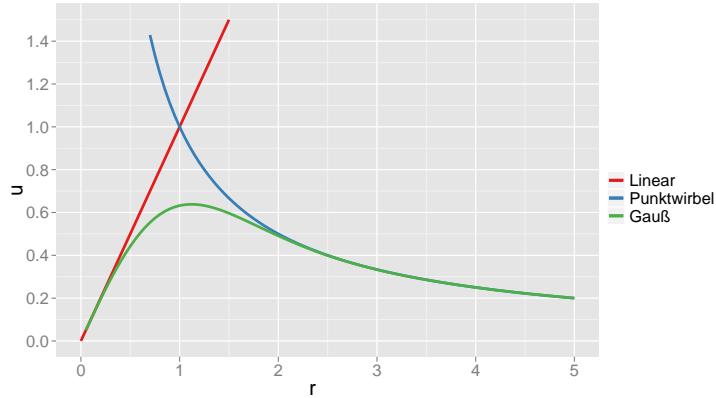


Abb. 5.2. Vergleich der Geschwindigkeitsfelder

Die Auswirkungen der Modifikation des Geschwindigkeitsfeldes sind in Abb. 5.3 für 2048 Gitterpunkte zu sehen. Das obere Spektrum ($\kappa_a = \infty$) gehört zum unmodifizierten Geschwindigkeitsfeld. Je größer a gewählt wird, desto stärker ist die Abflachung bei großen k . Die Breite a wird nun so gewählt, dass gerade noch ein minimaler Anstieg am rechten Rand des Spektrums zu verzeichnen ist ($\kappa_a = 7877$ im Graph). Dadurch ist gewährleistet, dass die kleinen Skalen durch das geglättete Geschwindigkeitsprofil nicht stärker als nötig gedämpft werden. Die optimale Breite wurde für verschiedene Gitterauflösungen abgeschätzt zu

$$a_{\text{opt}} \simeq 0.25 \cdot \frac{L}{N} \quad (5.8)$$

Die entsprechende Wellenzahl $\kappa_a = 2\pi/L$ erfüllt dann das Kriterium

$$\kappa_a \approx 4 \cdot N \quad (5.9)$$

Da die Verteilungsbreite kleiner als die Gitterkonstante ist, ergibt sich, dass die Form der Verteilung nicht durch das Gitter aufgelöst wird. Nur die Ausläufer bei großen r , welche wiederum einem Punktwirbel-Geschwindigkeitsfeld gleichen (siehe Abb. 5.2), werden durch das Gitter aufgelöst und tragen zum Spektrum bei. So ist sichergestellt, dass das Spektrum weiterhin Punktwirbel-Charakteristika aufweist. Die Sprungstellen des diskretisierten Geschwindigkeitsfeldes verschwinden bei Verwendung des Gaußfilters. Der Filter wirkt nur auf kleinen Skalen: Das Energiespektrum (Abb. 5.3) hat im Inertialbereich dieselbe Steigung. Der Anstieg bei hohen k flacht nun erwartungsgemäß ab.

Auch auf die Gesamtenergie hat ein nicht geglättetes Geschwindigkeitsfeld drastische Auswirkungen. In Abb. 5.4 ist der Gesamtenergieverlauf ohne (links) und mit (rechts) Gaußfilter dargestellt. In dem gefilterten Verlauf verschwinden die hohen Energiepeaks, da sie ebenfalls von den divergierenden Geschwindigkeitsfeldern herrühren.

In Abb. 5.5 ist die Energieverteilung für normale Punktwirbel dargestellt. Ohne Gauß-Filter weist die Dichte einen langen Ausläufer bei großen Energiewerten auf. Dieser gehört zu den divergierenden Geschwindigkeitsbeiträgen bei mangelhafter Diskretisierung. Er verschwindet bei Verwendung des Gauß-Filters. Man erhält eine nahezu symmetri-

5.2. Spektrale Berechnungen

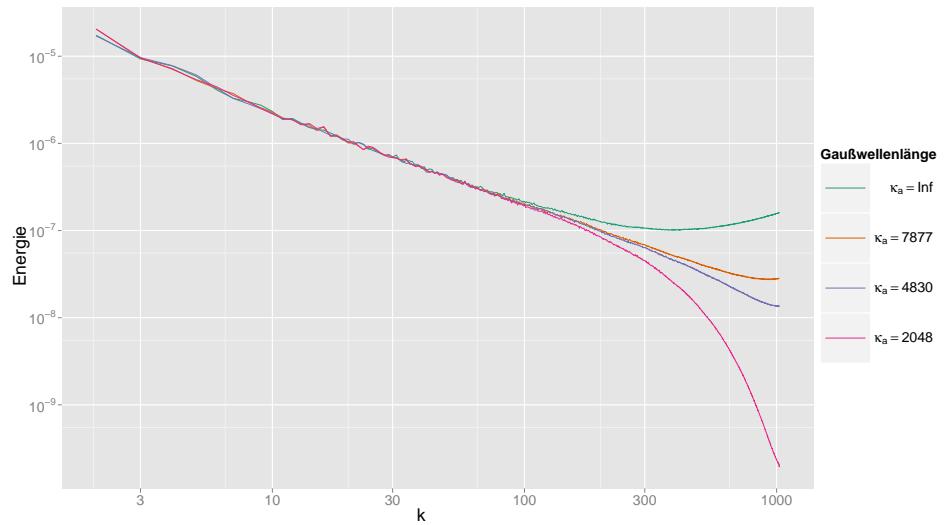


Abb. 5.3. Energiespektren für gaußsche Geschwindigkeitsprofile ($N_G=1024$) Es sind verschiedene Verteilungsbreiten dargestellt.

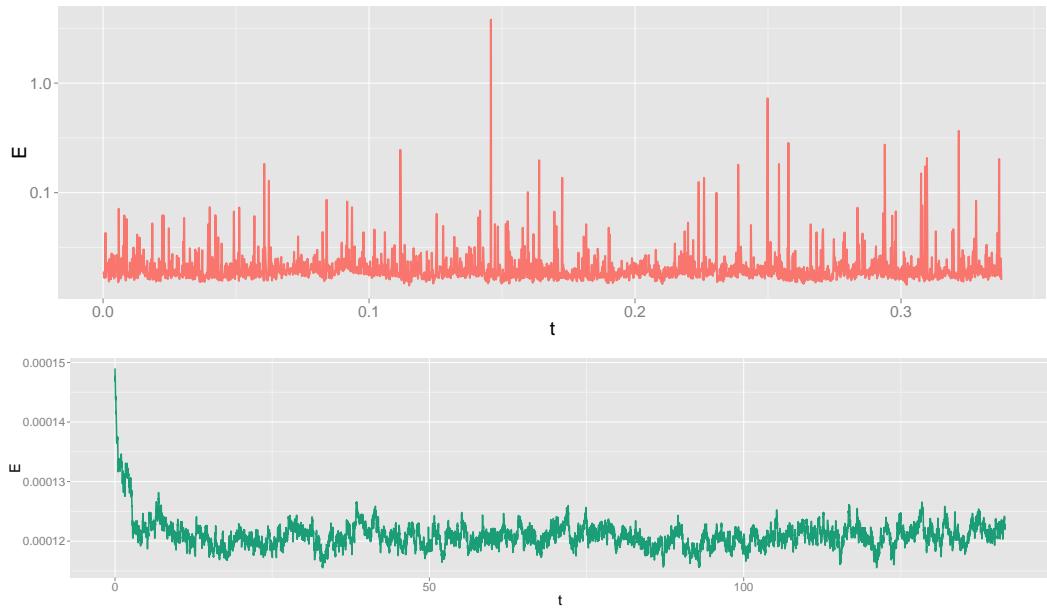


Abb. 5.4. Energieverlauf für normale PunktWirbel: Durch Diskretisierungsfehler ergeben sich Divergenzen beim ungefilterten Geschwindigkeitsfeld. Oben: ohne Gauss-Filter. Unten: mit Gauss-Filter; man beachte die unterschiedlichen Skalierungen der Energie-Achse – oben ist sie logarithmisch, unten linear.

sche Verteilung. Die leichte Asymmetrie dürfte von der nichtstationären Anfangsphase herrühren.

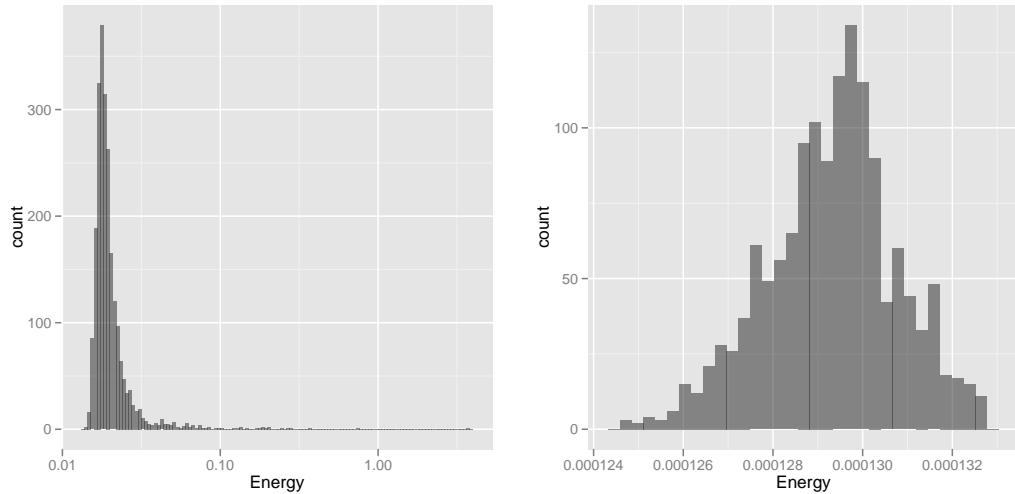


Abb. 5.5. Zustandsdichte ohne (links) und mit Gauß-Filter (rechts)

5.2.2. Check des Geschwindigkeitsfeldes

Sollte das Geschwindigkeitsfeld keine perfekte Periodizität aufweisen, so würde sich dies in Randeffekten bei der DFT bemerkbar machen. Dies wurde überprüft, indem aus einem Wirbelfeld die Geschwindigkeit berechnet, diese dann in den Fourierraum transformiert, dann das Wirbelstärkefeld im Fourierraum berechnet und dieses wieder zurücktransformiert wurde. Das ursprüngliche Punktwirbelfeld stimmt hervorragend mit dem räumlich-diskretisierten Wirbelstärkefeld überein und es sind keine Randeffekte sichtbar (Abb. 5.6). Die Punktwirbel sind zusammen mit dem spektral berechneten Wirbelfeld geplottet, so dass die Übereinstimmung der beiden Felder direkt sichtbar wird. Dazu wurden die Punktwirbelstrukturen mit dem beschriebenen Gaussfilter aufgeweitet, um deren Sichtbarkeit zu verbessern.

Ein kleines numerisches Artefakt tritt mitunter auf (Abb. 5.7): Um die Wirbelstrukturen herum bilden sich kleine Wellenmuster. Die Ursache hiervon liegt wieder an den Gibbsschen Oszillationen: Das Punktwirbel-Geschwindigkeitsfeld divergiert bei $r = 0$. In der direkten Umgebung eines Punktwirbels ändert sich das Geschwindigkeitsfeld sehr stark. Auf Grund der Diskretisierung weist die Projektion des Geschwindigkeitsfeldes auf eine Achse dann eine Sprungstelle auf. Im Fourierraum werden höhere Moden angeregt, um die Sprungstelle darzustellen, die im rücktransformierten Wirbelstärkefeld als Oszillationen sichtbar werden. Bei Verwendung der geglätteten Geschwindigkeitsprofile verschwinden die Oszillationen um die Wirbelstrukturen herum.

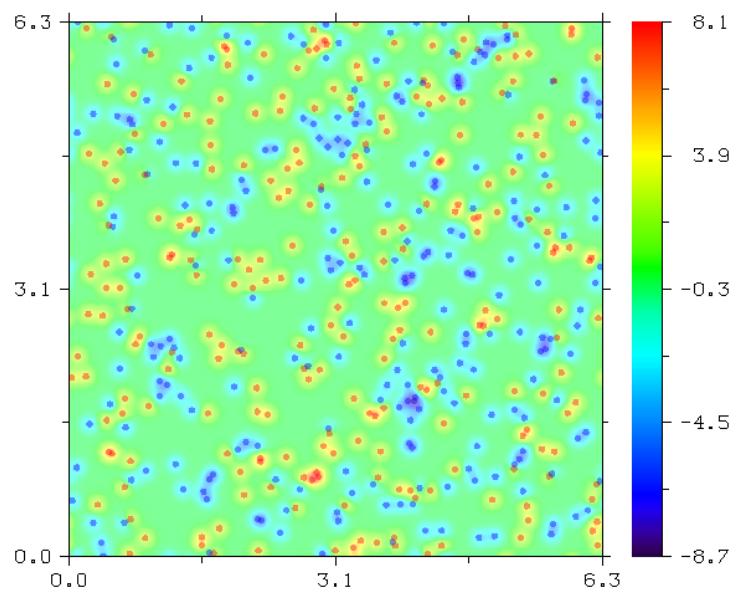


Abb. 5.6. Überprüfung der Diskretisierung: geglättete Geschwindigkeitsprofile

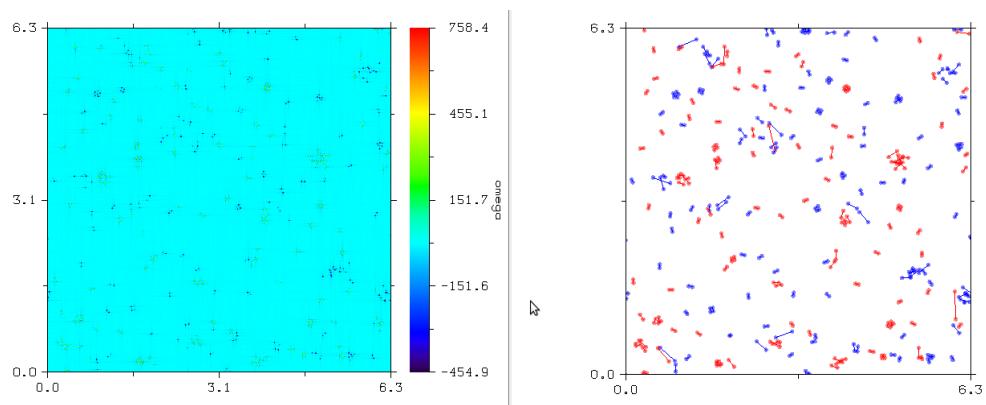


Abb. 5.7. Wirbelstärcefeld: Diskretisierungsfehler

5.3. Beschleunigung der Rechnungen

Der Übergang von der Diskretisierung in der Wirbelstärke zur Diskretisierung im Ort ist numerisch aufwändig. Der Aufwand zur Berechnung der Summe (5.2) steigt quadratisch mit der Anzahl der Gitterpunkt N_G und ebenfalls quadratisch mit der Anzahl der Punktspirale. Dies stellt schnell einen sehr zeitintensiven Problem dar, was selbst auf modernen CPUs für interessante Systemgrößen Simulationen über mehrere Tage erfordert. Dies macht die Suche nach interessanten Parameterbereichen unmöglich.

Dabei sind die Berechnungen für die einzelnen Gitterpunkte völlig unabhängig voneinander und die anfallenden Datenmengen sind überschaubar. Für solche Probleme sind Grafikkarten das Recheninstrument der Wahl.

Deshalb wurden einige Berechnungen auf NVIDIA-Grafikkarten (GeForce GTX480) des PALMA-Clusters der Universität Münster ausgeführt. Aufgrund der guten Parallelisierbarkeit der hier ausgeführten Berechnungen wird im Vergleich zu einer Berechnung auf einer Dualcore CPU eine Geschwindigkeitssteigerung zwischen Faktor 50 und 100 beobachtet.

Bei der Untersuchung sehr vieler Wirbelstrukturen stellt die Zeitintegration eindeutig den aufwändigsten Faktor dar. Deshalb wurde auch sie auf der Grafikkarte berechnet. Dabei stellte sich die Beschränkung auf einfache Präzision der verfügbaren Grafikkarten auf dem PALMA-Cluster als Problem heraus. Sie führt bei sehr kleinen Punktspiraleabständen unter Umständen zu Divergenzen: Der Nenner im Geschwindigkeitsfeld wird zu Null gerundet worauf die Geschwindigkeit dann divergiert. Die betroffenen Punktspirale sind dann für die restliche Simulation verloren.

Dieses numerische Problem wurde hier durch einen Test auf Endlichkeit der Summanden behoben. Im Falle divergierender Summanden im Geschwindigkeits-Kern wurde eine der Wirbelpositionen *vor* der Berechnung des Kerns um einen kleinen Betrag $d \approx 10^{-5}$ verschoben. Die Divergenz verschwindet dann und die Simulation kann normal weiterlaufen.

Einige Größen (z.B. die Zweipunktkorrelation) reagieren empfindlich auf minimale Verschiebung von Punktspiralen. Um den Fehler zu kontrollieren, wurde überprüft, wie oft divergente Terme in der Simulation auftreten. Es hat sich herausgestellt, dass der Fall statistisch sehr selten auftritt (\approx Faktor 10^{-12}). Damit ist gewährleistet, dass dadurch kein Einfluss auf die hier untersuchten Größen genommen wird.

6. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Eignung des Rotormodells als möglicher Ansatz zur Analyse zweidimensionaler Turbulenz untersucht. Spezielles Augenmerk lag dabei auf der inversen Kaskade.

Dafür wurden im ersten Kapitel die für Verständnis und Beschreibung nötigen theoretischen Grundlagen eingeführt. Danach wurden aus den vollen zweidimensionalen Wirbeltransportgleichungen für elliptische Wirbelstrukturen Evolutionsgleichungen hergeleitet. Diese führen zu dem Rotormodell, einem neuen, punktwirbelartigen Modell für zweidimensionale Strömungen. Im Rotormodell kann die Bildung von Wirbelcluster-Strukturen erklärt werden, ein Prozess, der für die Entstehung großskaliger Wirbelstrukturen verantwortlich ist. Dieser Prozess ist eine wichtige Ursache der turbulenten inversen Kaskade.

Um die statistischen Eigenschaften des Rotormodells zu analysieren, wurde eine große Wirbelanzahl numerisch simuliert und mit verschiedenen Methoden untersucht. Dafür wurden periodische Randbedingungen gewählt, um größtmögliche Ähnlichkeit zu direkten Simulationen der vollständigen Wirbeltransportgleichungen zu erhalten. Energie und Paarkorrelationsfunktion wurden für unterschiedliche Parameterbereiche ausgewertet. Wegen der Ähnlichkeit des Modells zu reinen PunktWirbeln wurden die Größen auch für diese ausgewertet und die Ergebnisse miteinander verglichen. Die Untersuchungen zu den Paarfunktionen der beiden Modelle zeigten interessante Charakteristika.

Darüber hinaus besitzen die Paarfunktionen vermutlich deutliche Abhängigkeiten von der Gesamtenergie des Systems, wie frühere Arbeiten zu PunktWirbelsystemen nahelegen. Hier könnte ein Ansatz für weitere Studien liegen.

Im Parameterraum $\{\gamma_R/\Gamma_V, D_0\}$ des Rotormodells konnten Bereiche identifiziert werden, die zu unterschiedlichen Verhaltensweisen des Systems führen. Für das Einsetzen der Wirbelkondensation konnten Schwellparameter ermittelt werden.

Anschließend wurde das Energiespektrum des Rotormodells genauer untersucht. Der Vergleich mit den ebenfalls in dieser Arbeit berechneten Energiespektren des PunktWirbelmodells zeigte deutliche Abweichungen. Das Spektrum weist hingegen qualitative Ähnlichkeit mit einem Literaturergebnis aus direkter numerischer Simulation der Wirbeltransportgleichung auf, welches zerfallende Turbulenz aufweist.

Die Skalierung des PunktWirbelspektrums konnte parameterunabhängig zu k^{-1} bestimmt werden. Das Spektrum des Rotormodells besitzt einen universellen Anteil, welcher ebenfalls ein k^{-1} -Spektrum aufweist und einen nichtuniversellen Anteil bei großen Skalen.

Einige interessante Fragestellungen konnten im Rahmen dieser Arbeit nicht vollständig geklärt werden und bleiben als Aufgabe für zukünftige Forschungsarbeiten. Dazu zählt eine Studie zum spektralen Energiedurchfluss der Rotoren, wodurch man eventuell klareren Aufschluss über die Energieverteilung erhalten könnte, als dies anhand des Energiespek-

trums möglich war.

Eine weitere spannende Fragestellung könnte auch in der Untersuchung der Rotoranziehung in einem großkaligen äußeren Geschwindigkeitsfeld liegen. Die Motivation für das Modell ging vom elliptischen Verzug von Wirbelstrukturen in einem äußeren Spannungsfeld aus und es wäre deshalb folgerichtig, die Auswirkungen eines solchen Feldes zu studieren.

A. Die beiliegende CD

Der gedruckten Ausgabe dieser Arbeit liegt eine CD bei. Sie hat die folgende Struktur:

- `/src` Quellcode des Programms, mit der die Rotorgleichungen simuliert wurde und die physikalischen Größen berechnet wurden. Das Programm benötigt einige Bibliotheken, welche im `Makefile` angegeben sind. Dieses soll auch zum kompilieren verwendet werden.
- `/data` Simulationsrohdaten im HDF5-Format zu der Parameterstudie aus [4.3](#) sowie das verwendete R-Auswertungsskript `analysis.R`.
- `/video` Drei Videos mit verschiedenen Parameterpaaren, welche die Dynamik von 250 Rotoren zeigen.
- `/arbeit` Die Diplomarbeit als PDF-Datei.

Das beiliegende Programm und das Auswertungsskript sollen die Reproduzierbarkeit der erzielten Ergebnisse sichern. Sie können bei Interesse auch beim Autor der Arbeit angefordert werden.

B. Danksagung

Der erste Dank gilt meiner Mutter, die mich in jeder Hinsicht in meinem Studium unterstützt hat.

Professor Friedrich gebührt Dank für die freundliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und seine kompetente und hilfsbereite Betreuung. Auch hat er mich stets ermuntert, vor fachkundigem Publikum über meine Arbeit vorzutragen und mir dadurch den Einstieg als aktives Mitglied in der Wissenschaft erleichtert.

Der Dank für freundliche Aufnahme geht genauso an die ganze Arbeitsgruppe. Hier möchte ich mich besonders Michael Wilczek und Oliver Kamps bedanken, die mir immer, wenn ich Fragen hatte, mit Rat zur Seite standen. In dieser Hinsicht gilt mein Dank auch Markus Blank-Burian, mit dem ich manche physikalische Einsicht teilen konnte. Schließlich spreche ich allen Korrekturlesern meinen Dank aus.

Nicht vergessen möchte ich meine Freundinnen und Freunde, die mich während der Studienzeit begleitet und mein Leben vielfach bereichert haben.

Literaturverzeichnis

- [Argyris u. a. 2010] ARGYRIS, John H. ; FAUST, Gunter ; HAASE, Maria ; FRIEDRICH, Rudolf: *Die Erforschung des Chaos. Eine Einführung in die Theorie nichtlinearer Systeme.* Völlig neu bearb. und erw. 2. Aufl. Heidelberg [u.a.]: Springer, 2010. – ISBN 978-3-540-71071-4
- [Babiano u. a. 1994] BABIANO, A. ; BOFFETTA, G. ; PROVENZALE, A. ; VULPIANI, A.: Chaotic advection in point vortex models and two-dimensional turbulence. In: *Physics of Fluids* 6 (1994), S. 2465
- [Bühler 2002] BÜHLER, O.: Statistical mechanics of strong and weak point vortices in a cylinder. In: *Physics of fluids* 14 (2002), Nr. 7, S. 2139–2149
- [Chen u. a. 2006] CHEN, S. ; ECKE, R.E. ; EYINK, G.L. ; RIVERA, M. ; WAN, M. ; XIAO, Z.: Physical mechanism of the two-dimensional inverse energy cascade. In: *Physical review letters* 96 (2006), Nr. 8, S. 84502
- [Chertkov u. a. 2007] CHERTKOV, M. ; CONNAUGHTON, C. ; KOLOKOLOV, I. ; LEBEDEV, V.: Dynamics of Energy Condensation in Two-Dimensional Turbulence. In: *Phys. Rev. Lett.* 99 (2007), Aug, 084501. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.084501>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.99.084501
- [Fjørtoft 1953] FJØRTOFT, R.: On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for twodimensional, nondivergent flow. In: *Tellus* 5 (1953), Nr. 3, S. 225–230
- [Friedrich u. Friedrich 2011] FRIEDRICH, J. ; FRIEDRICH, R.: Vortex-Model for the Inverse Cascade of 2D-Turbulence. In: *Arxiv preprint arXiv:1111.5808* (2011)
- [Frisch 1996] FRISCH, U.: Turbulence. In: *Turbulence, by Uriel Frisch, pp. 310. ISBN 0521457130. Cambridge, UK: Cambridge University Press, January 1996.* 1 (1996)
- [Kolmogorov 1941] KOLMOGOROV, A.N.: Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* Bd. 32, 1941, S. 15–17
- [Kraichnan 1967] KRAICHNAN, R.H.: Inertial ranges in two-dimensional turbulence. In: *Physics of Fluids* 10 (1967), Nr. 7, S. 1417–1423
- [Kármán u. Howarth 1938] KÁRMÁN, Theodore v. ; HOWARTH, Leslie: On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 164 (1938), Nr. 917, S. 192–215
- [Landau u. a. 1980] LANDAU, L.D. ; LIFSHITZ, E.M. u. a.: Statistical physics. In: *Course of Theoretical Physics* 5 (1980), Nr. Part 1

- [Lundgren u. Pointin 1977] LUNDGREN, TS ; POINTIN, YB: Statistical mechanics of two-dimensional vortices. In: *Journal of statistical physics* 17 (1977), Nr. 5, S. 323–355
- [Newton 2001] NEWTON, P.K.: *The N-vortex problem: analytical techniques*. Bd. 145. Springer Verlag, 2001
- [Onsager 1949] ONSAGER, L.: Statistical hydrodynamics. In: *Il Nuovo Cimento (1943-1954)* 6 (1949), S. 279–287
- [Paret u. Tabeling 1997] PARET, J. ; TABELING, P.: Experimental observation of the two-dimensional inverse energy cascade. In: *Physical review letters* 79 (1997), Nr. 21, S. 4162–4165
- [Pope 2000] POPE, Stephen B.: *Turbulent flows*. 1. publ. Cambridge [u.a.] : Cambridge University Press, 2000. – ISBN 0-521-59125-2 ; 0-521-59886-9. – Includes bibliographical references
- [Richardson 1922] RICHARDSON, Lewis F.: *Weather prediction by numerical process*. Cambridge : Cambridge University Press, 1922. – Original lag Autor nicht vor.
- [Vosskuhle 2009] VOSSKUHLE, M.: *Statistische Analysen zweidimensionaler Turbulenz*, WWU Münster, Diplomarbeit, 2009
- [Weiss u. McWilliams 1991] WEISS, J.B. ; McWILLIAMS, J.C.: Nonergodicity of point vortices. In: *Physics of fluids* 3 (1991), Nr. 5, S. 835–844
- [Yatsuyanagi 2008] YATSUYANAGI, Y.: Massive point-vortex simulation using special-purpose computer, MDGRAPE-3. In: *Journal of Japan Society of Fluid Mechanics* 27 (2008), S. 1–17

C. Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig angefertigt und außer den angegebenen keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, den 01. August 2012

Version 1.1 – Korrekturen eingearbeitet