

# **Lagrange'sche Beschreibung der Rayleigh-Bénard-Instabilität**

**Lagrangian description of the  
Rayleigh-Bénard instability**

Als Bachelorarbeit vorgelegt von

Clemens Willers

Themenstellung und Betreuung durch

Prof. Dr. R. Friedrich

22. Juni 2011

Institut für Theoretische Physik  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Diese Arbeit wäre ohne die Betreuung durch Herrn Prof. Friedrich in dieser Form nicht möglich gewesen. Er hat sehr oft ein offenes Ohr gehabt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1 Aufbau der Arbeit . . . . .	7
<b>2 Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1 Das Rayleigh-Bénard-System . . . . .	9
2.2 Euler'sche Beschreibung . . . . .	11
2.3 Lagrange'sche Beschreibung . . . . .	14
<b>3 Betrachtung der ersten Instabilität</b>	<b>17</b>
3.1 Trajektorien der Fluidteilchen . . . . .	17
3.1.a Differentialgleichungen . . . . .	17
3.1.b Stromfunktion . . . . .	18
3.1.c Entkoppelung der Differentialgleichungen . . . . .	19
3.1.d Harmonische Näherung . . . . .	20
3.1.e Exakte Rechnung . . . . .	22
3.1.f Grenzfälle . . . . .	26
3.2 Anwendung der Lagrange'schen Methode . . . . .	28
3.2.a Reihenentwicklungen . . . . .	28
3.2.b Laplace-Operator . . . . .	30
3.2.c Koeffizientenvergleich . . . . .	31
3.2.d Ansatz für $\theta$ . . . . .	31
3.2.e Lösung von $\theta$ . . . . .	32
<b>4 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>33</b>
<b>A Anhang</b>	<b>35</b>
A.1 Eigenschaften Jacobi'scher Funktionen . . . . .	35
A.2 Koeffizienten der Reihenentwicklung der Lagrange'schen Abbildung . . . . .	35
A.3 Die Funktionen $f_{ij}^k(t)$ des Koeffizientenvergleichs . . . . .	36
<b>B Quellen- und Literaturverzeichnis</b>	<b>37</b>



# 1 Einleitung

Zu den unbestiegenen Gipfeln in der Welt der Physik gehört die Turbulenz. Richard Feynman nannte sie „the most important unsolved problem of classical physics“.

Turbulente Strömungen zeigen Phänomene von einer großen Komplexität, die angesichts des überschaubaren Rahmens der hydrodynamischen Gesetzmäßigkeiten überrascht und oft von Zufall geprägt zu sein scheint. Die Turbulenz ist der Wissenschaft des deterministischen Chaos zuzuordnen. Ihr Verständnis ist bis heute nicht umfassend gelungen.

Im Gegensatz zu vielen anderen Themen der modernen Physik hat das Turbulenzproblem eine alltägliche Gegenwärtigkeit. Es zeigt sich in dem Ausfluss eines Wasserhahns, der Bewegung einer Fahne im Wind oder einer schnellen Flussströmung.

Eng verknüpft mit diesem Bereich ist die Konvektion – eine Fluidströmung, die in einem Schwerefeld durch Temperaturunterschiede angetrieben wird. Sie zeigt sich in einer Vielzahl von Phänomenen, von denen viele der Turbulenz zuzuordnen sind. Erste systematische Experimente fanden hierzu im Jahre 1900 statt, als Henri Bénard den Wärmetransport und hexagonale Strukturbildungen (Bénard-Zellen) in dünnen von unten erhitzen Flüssigkeitsschichten untersuchte [Bénard]. Lord Rayleigh näherte sich der Konvektion im Jahr 1916 erstmals auf theoretische Weise, indem er das Auftreten von rollenförmigen Strömungen beschrieb [Rayleigh].

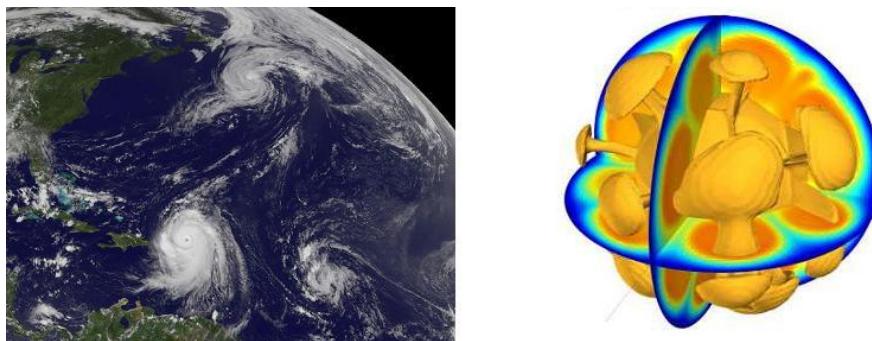


Abbildung 1: Beispiele natürlicher Konvektionsphänomene im sphärischen Rayleigh-Bénard-System der Erde: Links atmosphärische Strömungen, die durch die dabei entstehenden Wolken sichtbar sind [1]; rechts eine Simulation turbulenter Erdmantelkonvektion in Form von Plumes [2].

In dieser Arbeit wird es um das Rayleigh-Bénard-System gehen – ein abstrahiertes Modellsystem, das die grundsätzliche Situation konvektiver Strömung wiedergibt. Darin befindet sich ein Fluid im Schwerefeld zwischen zwei horizontalen Platten. An der unteren Platte wird das Fluid erwärmt, an der oberen gekühlt. Durch die damit einhergehenden Dichteänderungen und das Archimedes'sche Prinzip des Auftriebs kann eine Konvektionsströmung entstehen. Diese erscheint je nach den konkreten Pa-

rametern des Systems durch verschiedene Instabilitäten in unterschiedlichen Formen. Es sind genauso laminare Konvektionsrollen möglich, wie turbulente „Plumes“, die sich pilzförmig ausbreiten.

Die Rayleigh-Bénard-Konvektion ist nicht zu verwechseln mit der Bénard-Marangoni-Konvektion. Die letztere führt durch Effekte der Oberflächenspannung zur Ausbildung der Bénard-Zellen. Da es im Rayleigh-Bénard-System keine freien Oberflächen gibt, ist dieses Phänomen in der Rayleigh-Bénard-Konvektion nicht zu beobachten.

Situationen, wie sie das Rayleigh-Bénard-System beschreibt, sind an vielen Stellen in Natur und Technik zu finden. Im Bereich der Natur spielen sie in der Geophysik eine besonders große Rolle. Die Luftbewegungen in der Atmosphäre und die Bewegungen von Material des Erdinneren sind nur zwei wichtige Beispiele für natürliche Phänomene, die auf Konvektion beruhen. Technische Relevanz hat das Rayleigh-Bénard-System etwa im Bauingenieurwesen, wo es um die Frage nach dem Wärmetransport in Gebäuden geht. Insbesondere dieses Problem des Wärmetransports ist für das turbulente Rayleigh-Bénard-System bis heute völlig ungeklärt.

Die Turbulenz ist der übergeordnete Kontext dieser Arbeit. Jedoch wird sie mit ihr nicht direkt in Berührung kommen. Zentrale Herausforderung wird es an dieser Stelle sein, die rollenförmigen Strömungen der ersten Instabilität des Rayleigh-Bénard-Systems aus einem Lagrange'schen Blickwinkel zu betrachten.

Der Lagrange'sche Ansatz steht in der Hydrodynamik dem Euler'schen gegenüber. Im letzteren geht es um die Beschreibung interessierender Größen als Felder im Hinblick auf das gesamte Fluid. Die Lagrange'sche Betrachtungsweise erfasst die Dynamik des Fluids dagegen entlang der Trajektorien der Fluidteilchen. Dieser Weg wird in den selteneren Fällen gegangen, obwohl er doch intuitiver ist. Strömungsbilder sind über die Bewegung von Teilchen leichter begreifbar. Die Lagrange'sche Herangehensweise entspricht der natürlichen Erfahrensweise von Strömungen – man denke an Rauch oder an in einem Fluss treibende Blätter. Sie könnte letztendlich auch für die Behandlung der Turbulenz, sowohl im Rayleigh-Bénard-System als auch im Allgemeinen, gewinnbringend sein.

Sich auf dem Lagrange'schen Weg ein wenig weiter vorzutasten, ist die Intention dieser Arbeit.

## **1.1 Aufbau der Arbeit**

Nach dieser Einleitung werden in Kapitel 2 zunächst die Grundlagen, auf denen diese Arbeit aufbaut, kurz eingeführt. Dazu wird zuerst in Kapitel 2.1 das Rayleigh-Bénard-System detaillierter beschrieben und erklärt. Anschließend wird die Darstellung dieser physikalischen Situation in der Sprache der Mathematik erläutert – einerseits in der Formulierung des Eulerbildes (Kapitel 2.2), andererseits in der des Lagrange'schen Bildes (Kapitel 2.3).

Darauf folgt die Betrachtung der ersten Instabilität (Kapitel 3). Diese besteht aus zwei Teilen. Erstens werden in Kapitel 3.1 die Trajektorien der Fluidteilchen aus dem Euler'schen Geschwindigkeitsfeld bestimmt und diskutiert. Die Trajektorien liefern die Lagrange'sche Abbildung, die ein zentrales Konzept des Lagrange'schen Bildes ist. Mit der Kenntnis der Lagrange'schen Abbildung wird sich diese Arbeit in einem zweiten Schritt in Kapitel 3.2 der Untersuchung der Lagrange'schen Differentialgleichungen nähern.

Abgeschlossen wird die Arbeit durch eine Zusammenfassung und einen Ausblick in Kapitel 4.



## 2 Grundlagen

### 2.1 Das Rayleigh-Bénard-System

Das Rayleigh-Bénard-System<sup>1</sup> steht für die grundsätzlichste und einfachste Situation von Phänomenen der Konvektion: Ein Fluid befindet sich unter dem Einfluss eines (vertikalen) Schwerkiefeldes zwischen zwei horizontalen Platten. An der unteren Platte wird das Fluid erwärmt, an der oberen gekühlt.

Durch den Fluss von Wärme und den Zusammenhang zwischen Temperatur und Dichte kommt es zu Veränderungen in den Auftriebskräften und damit zu Beschleunigungen des Fluids. Je nach den konkreten Verhältnissen zwischen den Effekten des Auftriebs, der Viskosität und der Wärmeleitung werden diese Beschleunigungen abgeschwächt oder verstärkt (eine quantitative Abschätzung der genauen Verhältnisse ist für den einfachsten Fall in [Guyon] zu finden). Es sind daher je nach den konkreten Systemparametern verschiedene Zustände stabil oder instabil.

Eine Entdimensionalisierung der relevanten Differentialgleichungen zeigt, dass zwei aus den verschiedenen Systemparametern gebildete Kennzahlen ausreichen, um ein Rayleigh-Bénard-System zu charakterisieren (siehe Abschnitt 2.2). Die erste dieser Kennzahlen ist die Prandtl-Zahl. Sie hängt nur von Eigenschaften des Fluids ab. Bei gegebenem Fluid entscheidet daher alleinig die zweite, Rayleigh-Zahl genannte Kennzahl, welche Zustände des Systems stabil sind. Trägt man den Zustand des Systems – gekennzeichnet mittels der Geschwindigkeit der Fluidbewegung – in Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl  $Ra$  in einem Diagramm auf (siehe Abbildung 2), so erhält man verschiedene kritische Rayleigh-Zahlen, die die Übergänge zwischen verschiedenen Zuständen festlegen. Die Übergänge geschehen in Form von Bifurkationen. Die verschiedenen Zustände, die sich vom (zu kleinen Rayleigh-Zahlen gehörenden) Grundzustand unterscheiden, werden als Instabilitäten bezeichnet. Es gibt einen ganzen Zoo von Instabilitäten. Bei hohen Rayleigh-Zahlen verhält sich das System turbulent.

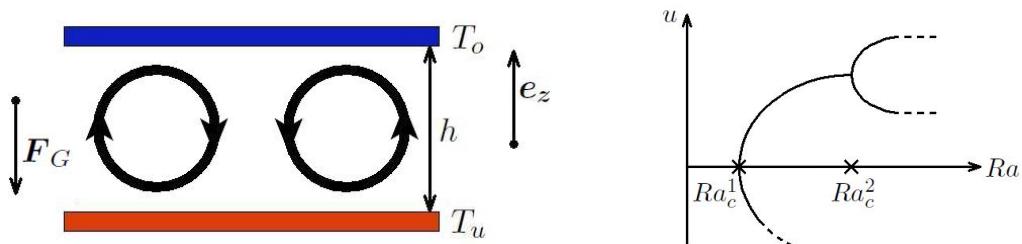


Abbildung 2: Links eine Skizze des Rayleigh-Bénard-Systems. Die Pfeile stellen die Fluidbewegung der ersten Instabilität grob dar. Rechts das Schema der Bifurkationen, die bei einer Veränderung von  $Ra$  auftreten.

<sup>1</sup>Die Inhalte der Abschnitte 2.1 und 2.2 können in den Diplomarbeiten [Lülf] und [Sinhuber] sowie ausführlich in [Argyris] nachgelesen werden. Bezuglich der Grundlagen der Hydrodynamik sind [Feynman], [Greiner], [Guyon] oder [Landau] zu empfehlen.

Gegenstand der Untersuchungen dieser Arbeit ist die erste Instabilität. Die Fluidströmung hat in diesem Zustand eine rollenartige Form (siehe Abbildung 2), mit einer Periodizität in einer Raumrichtung. In der Länge sind die sogenannten Konvektionsrollen unendlich weit ausgedehnt. Das Verhältnis zwischen Breite und Höhe einer Konvektionsrolle kann je nach den Systemparametern unterschiedliche Werte annehmen.

Der Mechanismus, der über die Stabilität des Grundzustandes entscheidet und zur ersten Instabilität führt, kann verstanden werden, wenn man sich überlegt, wie sich zufällige Fluktuationen des Grundzustandes entwickeln. Dieser ist stationär und unbewegt, sodass der einzige ablaufende Prozess die Wärmeleitung ist, die ein lineares, nach oben abfallendes Temperaturprofil erzeugt. Es kann nun Fluktuationen in der Geschwindigkeit, der Temperatur oder der Dichte geben (alle anderen Größen sind mit diesen über thermodynamische Relationen verknüpft). Fluktuationen in Temperatur und Dichte münden letztlich durch thermodynamische Prozesse und die resultierende aus Auftriebs- und Gewichtskraft in Fluktuationen der Geschwindigkeit. Fluktuationen in der horizontalen Geschwindigkeit werden immer durch die viskose Reibung abgeschwächt. Fluktuationen in der vertikalen Geschwindigkeit können zu einer Instabilität führen. Über die Stabilität entscheidet das folgend beschriebene Wechselspiel.

Auf der einen Seite steht die Differenz zwischen der Temperatur eines Fluidelementes, das durch eine Geschwindigkeitsfluktuation an einen höher oder tiefer liegenden Ort gebracht wurde, und der Temperatur der neuen Umgebung. Mit dieser Temperaturdifferenz geht eine Dichtedifferenz einher, die über das Archimedes'sche Prinzip des Auftriebs die Geschwindigkeitsfluktuation verstärkt.

Auf der anderen Seite steht erstens die Wärmeleitfähigkeit – sie gleicht die Temperaturdifferenz aus – und zweitens die Viskosität des Fluids, die dem Auftrieb entgegenwirkt.

Die konkreten Eigenschaften des Systems entscheiden, welcher Effekt bestimmd ist und ob der Grundzustand gegenüber Fluktuationen stabil ist. Im instabilen Fall bilden sich aus zufälligen Fluktuationen die geordneten rollenförmigen Konvektionströmungen.

Der Zustand eines Fluids wird durch fünf Größen eindeutig festgelegt. Diese sind die drei Komponenten der Geschwindigkeit und zwei der thermodynamischen Größen, die über Zustandsgleichungen alle weiteren festlegen. Es werden daher ebenfalls fünf Differentialgleichungen zur Charakterisierung und Lösung des Systems benötigt. Diese können entweder im Euler'schen oder im Lagrange'schen Bild formuliert werden, was in den folgenden beiden Abschnitten beschrieben wird.

Die Randbedingungen sind in beiden Bildern gleichermaßen zu berücksichtigen. Daher werden sie mit ihren verschiedenen Möglichkeiten vorweg diskutiert. Von nun an ist mit der  $z$ -Richtung die vertikale Richtung gemeint.

Erstens sind Randbedingungen an die Temperatur  $T$  zu stellen.

Die Erwärmung bzw. Kühlung des Fluids an den Platten kann auf zwei Weisen geschehen. Zum einen kann die Temperatur an den Platten als konstant vorausgesetzt

werden. Das entspricht sehr gut wärmeleitenden Platten, die mit großen Wärmebändern verbunden sind. Zum anderen kann der Wärmestrom  $\mathbf{J}$  an den Platten festgelegt werden, wenn das System zum Beispiel elektrisch mit konstanter Heizleistung erwärmt wird. Dabei erhält man durch  $\mathbf{J} \sim \nabla T$  feste Werte für die erste Ableitung der Temperatur in  $z$ -Richtung.

Wenn das System seitlich begrenzt ist, ergeben sich weitere Bedingungen. Hier ist an den Seitenwänden eine ideale Isolation – also ein Wärmestrom von Null – denkbar, genauso wie ein lineares Temperaturprofil, das sich aus der Wärmeleitung zwischen den horizontalen Platten ergibt.

Zweitens sind Randbedingungen für die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  zu definieren.

Klar ist, dass die  $z$ -Komponente an den begrenzenden horizontalen Platten Null sein muss. Die Erfahrungen zeigen, dass Fluide darüber hinaus an ihren Begrenzungen haften. Das führt zu der sogenannten *no slip*-Bedingung  $u_x = u_y = 0$ . Wenn die Reibung an den Begrenzungsflächen vernachlässigbar ist, ermöglicht die Annahme spannungsfreier Ränder eine einfachere Lösung. Dabei kann sich das Fluid an den Rändern entlangbewegen, es dürfen dort aber keine Spannungen auftreten. Da die Spannung in einer Richtung proportional zur entsprechenden ersten räumlichen Ableitung ist (siehe [Feynman]), ergibt sich die Bedingung  $\partial_z u_x = \partial_z u_y = 0$ .

Darüber hinaus setzt man gerne eine Periodizität in einer horizontalen Richtung voraus. Das ist mathematisch gut handhabbar und entspricht den Beobachtungen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden konstante Temperaturen an den horizontalen Platten ( $T_u$  an der unteren und  $T_o$  an der oberen Platte), keine Begrenzung in anderen Raumrichtungen, eine horizontale Periodizität und spannungsfreie Ränder vorausgesetzt. Der Plattenabstand sei  $h$ .

## 2.2 Euler'sche Beschreibung

Im Euler'schen Bild beschreibt man den Zustand eines Fluids, indem man die relevanten Größen im Raum des Fluids als – im Allgemeinen zeitabhängige – Felder behandelt. Für das Rayleigh-Bénard-System sind die interessierenden Größen die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$ , die Temperatur  $T$  und der Druck  $p$ . Die Evolutionsgleichungen für die zugehörigen Felder findet man durch Bilanzierungen der Masse, des Impulses und der Energie.

Eine Bilanz der Masse führt bei Massenerhaltung auf die Kontinuitätsgleichung, welche sich im idealisierten Fall eines inkompressiblen Fluids vereinfacht zu

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Aus einer Energiebilanz lässt sich eine Gleichung für die Temperatur herleiten, in der mit  $\kappa$  die Temperaturleitzahl gemeint ist. Diese Gleichung kann auch aus einer Modifikation der Wärmeleitungsgleichung gewonnen werden, wenn man mit  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  die einfache Zeitableitung auf die Situation einer Strömung verallgemeinert.

$$\frac{\partial}{\partial t} T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \Delta T \quad (2)$$

Eine Bilanz der Impulse führt auf die Navier-Stokes-Gleichung. Sie setzt gemäß dem zweiten Newton'schen Gesetz die Beschleunigung von Fluidelementen der Massendichte  $\varrho$  mit den wirkenden Kräften in Beziehung. Die auftretenden Kräfte sind die Kräfte durch den Druck  $p$ , die zur Viskosität  $\eta$  proportionalen Reibungskräfte und die Kraft der Schwerebeschleunigung  $g$ .

$$\varrho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \varrho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} - \varrho g \mathbf{e}_z \quad (3)$$

Es wird nun die Boussinesq-Näherung (nach V. J. Boussinesq) vorgenommen, nach der die Temperaturabhängigkeiten der Parameter  $\kappa$  und  $\eta$  vernachlässigt werden. Auch die Dichte wird als temperaturunabhängig betrachtet. Zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung wird die Dichte dadurch zu einer Konstanten:  $\varrho := \varrho_0$ . Einzig im Term der Schwerkraft wird, was die Konvektion hervorruft, eine Temperaturabhängigkeit der Dichte in linearer Form berücksichtigt:

$$\varrho(T) = \varrho_0(1 - \alpha(T - T_0)), \quad \alpha > 0 \quad (4)$$

Damit lauten die im Eulerbild zu lösenden Differentialgleichungen mit der kinematischen Viskosität  $\nu := \frac{\eta}{\varrho_0}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \Delta T \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\varrho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} - (1 - \alpha(T - T_0)) g \mathbf{e}_z \quad (7)$$

Diese Gleichungen erlauben den stationären, bewegungslosen Grundzustand immer, auch wenn er unter Umständen nicht stabil ist. Unter der Voraussetzung  $\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} T = \frac{\partial}{\partial t} p = 0$  wird Gleichung (5) erfüllt und es folgt aus den Gleichungen (6) und (7):

$$\Delta T = 0 \quad (8)$$

$$\partial_x p = \partial_y p = 0 \quad (9)$$

$$\partial_z p = -\varrho_0 g (1 - \alpha(T - T_0)) \quad (10)$$

Durch die Bedingung konstanter Temperatur an zwei horizontalen Rändern ( $T_u$  bzw.  $T_o$ ) ergibt sich aus (8), dass  $T$  nur von  $z$  abhängen kann. Man erhält schließlich für den Grundzustand explizit:

$$\mathbf{u}_G = 0 \quad (11)$$

$$T_G = T_u - \beta z \quad \text{mit} \quad \beta := \frac{T_u - T_o}{h} > 0 \quad (12)$$

$$p_G = p_0 + \varrho_0 g (\alpha \beta h - 1) z - \frac{1}{2} \varrho_0 g \alpha \beta z^2 \quad (13)$$

Von nun an wird der Zustand des Systems durch die Abweichung von diesem Grundzustand angegeben. Es wird also mit den Größen  $\mathbf{u}$ ,  $\theta$  und  $P$  und dem Zusammenhang

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + \mathbf{u} \quad T = T_G + \theta \quad p = p_G + P \quad (14)$$

gerechnet. Durch Einsetzen in (5), (6) und (7) erhält man die neuen Differentialgleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \kappa \Delta \theta + \beta u_z \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\varrho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} + \alpha g \theta \mathbf{e}_z \quad (17)$$

In einem letzten Schritt nimmt man eine Entdimensionalisierung vor. Man führt die neuen einheitenlosen Größen  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $t'$ ,  $\mathbf{u}'$ ,  $\theta'$  und  $P'$  ein, die über die folgend angegebene Skalierung durch typische Parameter des Systems mit den alten Größen zusammenhängen (die Skalierung ist auch in anderer Form möglich).

$$\begin{aligned} x' \cdot h &= x, & y' \cdot h &= y, & z' \cdot h &= z, & t' \cdot \frac{h^2}{\kappa} &= t \\ \mathbf{u}' \cdot \frac{\kappa}{h} &= \mathbf{u}, & \theta' \cdot \beta h &= \theta, & P' \cdot \frac{\kappa \nu}{h^2} \varrho_0 &= P \end{aligned} \quad (18)$$

Schlussendlich erhält man damit die nachstehenden Differentialgleichungen („Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen“), die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen sind (die Striche werden zur besseren Übersichtlichkeit weggelassen). Sie enthalten, wie oben schon erwähnt, nur zwei Kennzahlen, über die die Eigenschaften des speziellen Systems in die Lösung eingehen: die Prandtl-Zahl  $Pr$  und die Rayleigh-Zahl  $Ra$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \Delta \theta + u_z \quad (20)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \Delta \mathbf{u} + Ra \theta \mathbf{e}_z \quad (21)$$

$$Pr := \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ra := \frac{\alpha \beta g h^4}{\kappa \nu} \quad (22)$$

Die erste Instabilität kann (wie schon 1916 von Lord Rayleigh) durch Lösung dieser Differentialgleichungen mit den oben aufgeführten Randbedingungen analytisch behandelt werden. Eine umfassende Betrachtung würde den Rahmen dieser Arbeit

sprengen. Es wird stattdessen für weitergehende Überlegungen eine Lösung in der einfachen Form

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \xi \begin{pmatrix} -\pi \cos(\pi z) \sin(kx) \\ 0 \\ k \sin(\pi z) \cos(kx) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\xi^2) \quad (23)$$

$$\theta(x, y, z, t) = \xi \frac{k}{k^2 + \pi^2} \sin(\pi z) \cos(kx) + \mathcal{O}(\xi^2) \quad (24)$$

zugrunde gelegt (vgl. [Lülf]). Dadurch wird der rein mathematisch relevante Grenzfall erfasst, dass die Rayleigh-Zahl des Systems genau der ersten kritischen Rayleigh-Zahl entspricht. Diese Vorstellung ist bei genauerer Betrachtung problematisch, soll hier jedoch ausreichen.

Es werden kleine Amplituden  $\xi$  angenommen und alle Terme von höherer als linearer Ordnung in  $\xi$  vernachlässigt. Die Wellenzahl  $k$  sei positiv (ein Vorzeichen wird durch  $\xi$  berücksichtigt), sie hängt durch  $k = \pi/a$  mit der Breite  $a$  der Konvektionsrollen zusammen. Das Koordinatensystem ist so positioniert, wie es in Abbildung 3 zu sehen ist. Die Richtungen der Strömungen sind für eine positive Amplitude  $\xi$  eingezeichnet.

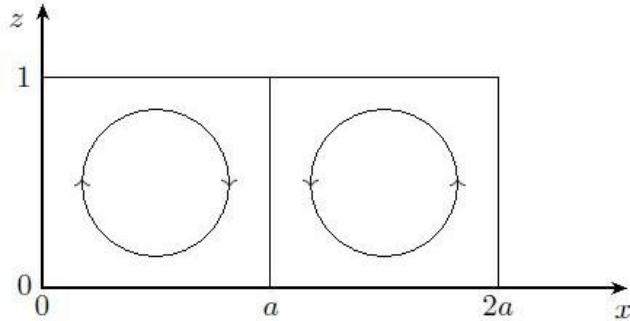


Abbildung 3: Geometrie der hier verwendeten Lösung der ersten Instabilität (Formeln (23) und (24)).

### 2.3 Lagrange'sche Beschreibung

In der Lagrange'schen Beschreibung der Fluidelemente (siehe [Daitche], [Bennett]) werden die Trajektorien der Fluidelemente verwendet, um die Differentialgleichungen aus dem Eulerbild umzuformulieren. Die Trajektorien werden durch die Funktion

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{y}) \quad (25)$$

dargestellt. Sie gibt den Ort  $\mathbf{x}$  des Fluidelementes, das sich zu einem Referenzzeitpunkt am Ort  $\mathbf{y}$  befindet, in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  an. Man kann diesen Zusammenhang

auch als eine Transformation von den Ausgangspunkten  $\mathbf{y}$  der Fluidelemente zu ihren späteren Orten  $\mathbf{x}$  auffassen, wodurch die Lagrange'sche Abbildung  $L$  definiert wird:

$$L : \mathbf{y} \mapsto (\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t) \quad (26)$$

Da die inverse Lagrange'sche Abbildung

$$\bar{L} : \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t) \quad (27)$$

existiert (siehe [Daitche]), ist eine (von der Zeit abhängige) Koordinatentransformation von den Koordinaten  $\mathbf{x}$  des Eulerbildes zu den Lagrange'schen Koordinaten  $\mathbf{y}$  möglich. Danach erhält man eine Größe  $g(\mathbf{x}, t)$  der Fluidynamik in der Form  $\tilde{g}(\mathbf{y}, t)$  (die Tilde kennzeichnet, dass  $\tilde{g}(\mathbf{y}, t)$  eine andere Funktion als  $g(\mathbf{x}, t)$  und nicht  $g(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}}$  ist). Man erfährt damit, wie sich diese Größe in einem durch den Ausgangspunkt  $\mathbf{y}$  ausgezeichneten Fluidelement mit der Zeit, also entlang der entsprechenden Trajektorie, verhält. Dies ist die Idee des Lagrange'schen Ansatzes.

Um die Differentialgleichungen an die Lagrange'schen Koordinaten anzupassen, müssen die Ableitungsoperatoren mit Hilfe der Kettenregel verändert werden. Für die Zeitableitungen gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial}{\partial t} g(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} g(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) g(\mathbf{x}, t). \quad (28)$$

Für Ortsableitungen gilt, wenn man die einzelnen Komponenten der Ortsvektoren durch Indizes unterscheidet und die Einstein'sche Summenkonvention verwendet

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{g}(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \tilde{g}(\mathbf{y}, t). \quad (29)$$

Daraus erhält man für die auftretenden Ableitungsoperatoren im Lagrange'schen Bild:

$$\nabla_L = \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial y_j}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial y_j}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^T \quad (30)$$

$$\Delta_L = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} + \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (31)$$

Die Differentialgleichungen (19), (20) und (21) lauten damit in Lagrange'scher Formulierung:

$$\nabla_L \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\theta}(\mathbf{y}, t) = \Delta_L \tilde{\theta}(\mathbf{y}, t) + \tilde{u}_z(\mathbf{y}, t) \quad (33)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) = -\nabla_L \tilde{P}(\mathbf{y}, t) + \Delta_L \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) + Ra \tilde{\theta}(\mathbf{y}, t) \mathbf{e}_z \quad (34)$$

Das Geschwindigkeitsfeld steht in der folgenden Beziehung zur Lagrange'schen Abbildung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t) \quad (35)$$

Dadurch kann die Funktion  $\tilde{\mathbf{u}}$  mit der Lagrange'schen Abbildung ersetzt und eine vollständige Lösung der Lagrange'schen Differentialgleichungen möglich gemacht werden.

Mit der Relation (35) ist es darüber hinaus möglich, die Trajektorien zu einem bekannten Euler'schen Geschwindigkeitsfeld zu berechnen, womit man die Lagrange'sche Abbildung direkt erhält.

### 3 Betrachtung der ersten Instabilität

#### 3.1 Trajektorien der Fluidteilchen

Es werden im Folgenden die Trajektorien der Fluidteilchen aus dem Euler'schen Geschwindigkeitsfeld der ersten Instabilität bestimmt. Die Ergebnisse werden diskutiert, um die vorliegende physikalische Situation über das Strömungsbild näher kennenzulernen. In Kapitel 3.2 finden die Trajektorien dann in Form der Lagrange'schen Abbildung Verwendung.

##### 3.1.a Differentialgleichungen

Das Euler'sche Geschwindigkeitsfeld, das die Konvektionrollen der ersten Instabilität beschreibt, wird gemäß (23) in der folgenden Form vorausgesetzt:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi\pi \cos(\pi z) \sin(kx) \\ 0 \\ \xi k \sin(\pi z) \cos(kx) \end{pmatrix} \quad (36)$$

Durch  $u_x = \dot{x}$ , etc. erhält man aus (36) unter Verwendung von (35) Differentialgleichungen, mit denen die Trajektorien  $(x(t), y(t), z(t))^T$  hergeleitet werden können. Für diese Rechnungen ist es zweckmäßig, den Ursprung des Koordinatensystems in das Zentrum einer Konvektionsrolle zu legen. Willkürlich wird dafür die Konvektionsrolle gewählt, die sich bei  $0 \leq x \leq a$  befindet. Die Verschiebung des Bezugssystems geschieht durch die Einführung neuer Koordinaten  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  mit der Transformation

$$\tilde{x} = x - a/2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tilde{x} + \frac{\pi}{2k} \quad (37)$$

$$\tilde{y} = y \quad (38)$$

$$\tilde{z} = z - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z = \tilde{z} + \frac{1}{2}. \quad (39)$$

Die Gleichung (36) impliziert, dass  $y$  bzw.  $\tilde{y}$  für jede Trajektorie konstant ist; es liegt eine ebene Strömung vor. Daher erfolgen die weiteren Betrachtungen in den zweidimensionalen Koordinaten  $\tilde{x}$  und  $\tilde{z}$ , wobei die Tilde zur besseren Übersichtlichkeit von nun an weggelassen wird.

Die transformierten Differentialgleichungen für die zwei interessanten Komponenten der Trajektorien  $x(t)$  und  $z(t)$  lauten:

$$\dot{x} = u_x = \xi\pi \sin(\pi z) \cos(kx) \quad (40)$$

$$\dot{z} = u_z = -\xi k \cos(\pi z) \sin(kx) \quad (41)$$

Es ist durch die Form des Geschwindigkeitsfeldes (36) anschaulich klar, dass man zur Bestimmung der Trajektorien jede Konvektionsrolle separat betrachten kann. Durch

die Periodizität des Geschwindigkeitsfeldes behalten die Gleichungen (49) und (50) ihre Form, wenn das Bezugssystem in das Zentrum einer anderen Konvektionsrolle verschoben wird. Einzig der Drehsinn der Strömungen wechselt von Konvektionsrolle zu Konvektionsrolle, was sich durch ein entsprechendes Vorzeichen der Amplitude  $\xi$  berücksichtigen lässt ( $\xi > 0$  ergibt einen mathematisch negativen Drehsinn,  $\xi < 0$  ergibt einen mathematisch positiven Drehsinn). Bei der Diskussion der Gleichungen (49) und (50) kann man sich daher oBdA auf die zentrale Konvektionsrolle – also auf das Gebiet  $G = \{(x, z) | -\frac{a}{2} \leq x \leq +\frac{a}{2}, -\frac{1}{2} \leq z \leq +\frac{1}{2}\}$  – beschränken.

### 3.1.b Stromfunktion

Eine ebene Strömung, wie sie hier vorliegt, kann im inkompressiblen Fall vollständig durch eine Stromfunktion  $\chi(x, z)$  repräsentiert werden (siehe [Greiner]). Der Zusammenhang zwischen  $\chi$  und  $\mathbf{u}$  ist durch

$$u_x = \partial_z \chi, \quad u_z = -\partial_x \chi \quad (42)$$

gegeben, wodurch die Bedingung  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_x u_x + \partial_z u_z = 0$  immer erfüllt ist. Eine alternative Darstellung von (42) in der Form

$$\mathbf{u} = \vec{e}_z \times \nabla \chi \quad (43)$$

zeigt eine wertvolle Eigenschaft der Stromfunktion: Da ihr Gradient immer senkrecht auf den Stromlinien steht, deren Tangenten die Geschwindigkeiten sind, ist sie auf denselben konstant. Diese Eigenschaft kann zur Berechnung der Trajektorien verwendet werden, da diese in einer stationären Strömung, wie sie hier zu finden ist, mit den Stromlinien identisch sind.

Die Stromfunktion ist für das besprochene Problem

$$\chi = -\xi \cos(\pi z) \cos(kx). \quad (44)$$

Auf dem Gebiet  $G$  liegen die Werte für die normierte Stromfunktion  $\tilde{\chi} := -\chi/\xi$  im Intervall  $[0, 1]$ . Für festes  $x = 0$  erhält man aus (44) den Zusammenhang  $\tilde{\chi} = \cos(\pi z)$ . Damit wird klar, dass  $\tilde{\chi}$  den Wert 0 auf der äußersten Stromlinie und den Wert 1 im Zentrum annimmt.

Bevor die Zeitabhängigkeit der Bewegung untersucht wird, kann von  $\chi = \text{const}$  die Form der Bahnkurven abgeleitet werden. Aus (44) folgt für den oberen Zweig (siehe dazu Abbildung 4):

$$z(x) = \frac{1}{\pi} \arccos \left( \frac{\tilde{\chi}}{\cos(kx)} \right) \quad (45)$$

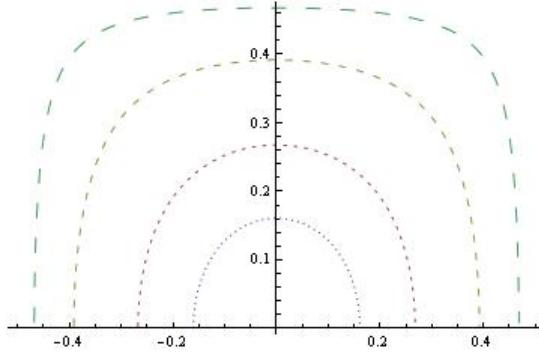


Abbildung 4: Die Trajektorien als Höhenlinien der Stromfunktion für  $a = 1$  und  $\tilde{\chi} = \frac{7}{8}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$  (von innen nach außen).

### 3.1.c Entkoppelung der Differentialgleichungen

Zur Bestimmung der Zeitabhängigkeiten von  $x$  und  $z$  aus den Differentialgleichungen (40) und (41) werden diese zuerst mit Hilfe der Stromfunktion folgendermaßen entkoppelt:

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 &= \xi^2 \pi^2 \sin^2(\pi z) \cos^2(kx) = \xi^2 \pi^2 (1 - \cos^2(\pi z)) \cos^2(kx) \\ &= \xi^2 \pi^2 \left(1 - \frac{\tilde{\chi}^2}{\cos^2(kx)}\right) \cos^2(kx) = \xi^2 \pi^2 (\cos^2(kx) - \tilde{\chi}^2)\end{aligned}\quad (46)$$

Nach einer analogen Behandlung von (41) erhält man das Differentialgleichungspaar

$$\dot{x}^2 = \xi^2 \pi^2 (\cos^2(kx) - \tilde{\chi}^2) \quad (47)$$

$$\dot{z}^2 = \xi^2 k^2 (\cos^2(\pi z) - \tilde{\chi}^2). \quad (48)$$

Unter Verwendung des Additionstheorems  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$  kann dieses wiederum umgeformt werden zu

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{\xi^2 \pi^2}{4} \cos(2kx) = \frac{\xi^2 \pi^2}{4} (1 - 2\tilde{\chi}^2) \quad (49)$$

$$\frac{1}{2} \dot{z}^2 - \frac{\xi^2 k^2}{4} \cos(2\pi z) = \frac{\xi^2 k^2}{4} (1 - 2\tilde{\chi}^2). \quad (50)$$

In dieser Darstellung liegt eine Analogie zur Mechanik von Massenpunkten auf der Hand. Sie soll aufgrund ihrer anschaulichkeit genutzt werden. Dabei wird im Folgenden von Potentialen und Energien gesprochen, die auf die Masse normiert sind.

Stellvertretend für beide Differentialgleichungen wird, wenn beide gleichermaßen zu behandeln sind, die Gleichung (49) für die  $x$ -Komponente diskutiert. Hier liegt eine

Bewegung im Potential  $V(x) = -\frac{\xi^2 \pi^2}{4} \cdot \cos(2kx)$  mit der Energie  $E = \frac{\xi^2 \pi^2}{4}(1 - 2\tilde{\chi}^2)$  vor (siehe Abbildung 5). Der Wert von  $\tilde{\chi}$  wird gemäß Formel (44) durch die Anfangsbedingungen für den Ort ( $x_0$  und  $z_0$ ) festgelegt. Da (40) und (41) einen festen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Ort darstellen, sind keine weiteren Anfangsbedingungen in Betracht zu ziehen.

In dieser Interpretation kann exakt bestätigt werden, was oben nur anschaulich klar war: Nach (44) kann  $\tilde{\chi}$  allgemein nur Werte zwischen  $-1$  und  $1$  annehmen. Daher kann die Energie  $E$  nicht größer werden als die Maxima des Potentials  $V$ , die an den Grenzen zwischen zwei Konvektionsrollen liegen. Folglich ist die Bewegung der Fluidteilchen in dem Potentialtopf einer Konvektionsrolle gefangen und es reicht aus, die Lösungen des Problems auf dem Gebiet einer Konvektionsrolle – konkret auf dem Gebiet  $G$  – zu diskutieren.

Die Bewegungen in einem Potential lassen sich durch ihre Energien klassifizieren. Durch den Zusammenhang zwischen  $E$  und  $\tilde{\chi}$  ist hier – was oben schon benutzt wurde – auch eine Klassifikation durch  $\tilde{\chi}$  möglich. Es lassen sich auf diese Weise unter den möglichen Werten für  $\tilde{\chi}$  auf dem Gebiet  $G$  drei Lösungstypen unterscheiden:

- Zu  $\tilde{\chi} = 1$  gehört die minimale Energie  $E = -\frac{\xi^2 \pi^2}{4}$ . Da diese dem Minimalwert von  $V$  entspricht, ergibt sich die triviale Lösung  $x(t) = 0$ .
- Für  $\tilde{\chi} \in (0, 1)$  ergibt sich eine periodische Schwingung um den Ursprung, die im Folgenden untersucht wird.
- Die Lösung für  $\tilde{\chi} = 0$  bzw. die maximale Energie  $E = \frac{\xi^2 \pi^2}{4}$  wird später als Grenzfall des zweitgenannten Lösungstyps behandelt.

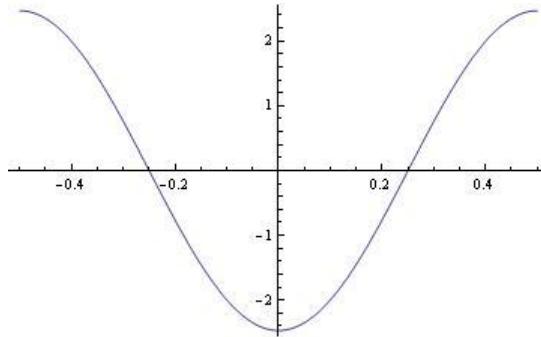


Abbildung 5: Potential  $V(x)$  im Bereich der zentralen Konvektionsrolle für  $\xi = a = 1$ .

### 3.1.d Harmonische Näherung

Man beachte die mathematische Analogie zwischen der hier zu besprechenden Situation und dem Fadenpendel ( $F \sim -\sin x$ ). In jeder Koordinatenrichtung entspricht die Dynamik der Fluidteilchen der eines solchen Pendels. Dabei legen (40) und (41)

eine Amplituden- und Phasenbeziehung fest. Auch hier kann das Potential für kleine Abstände vom Zentrum der Konvektionrolle ( $x, z \ll 1$ ) – also für große Werte von  $\tilde{\chi}$  ( $\tilde{\chi} \approx 1$ ) – harmonisch approximiert werden. Das führt zu folgender Lösung in Gestalt einer ellipsenförmigen Bewegung:

$$x(t) = a\epsilon \sin(\eta(t + t_0)) \quad (51)$$

$$z(t) = \epsilon \cos(\eta(t + t_0)) \quad (52)$$

Dabei ist  $\eta := \xi\pi k$  und  $\epsilon$  die Amplitude der Bewegung. Durch die Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{2}$  zwischen den beiden Koordinaten ist  $z$  maximal für  $x = 0$ . Mit (45) folgt daher für die Amplitude:

$$\epsilon = \frac{1}{\pi} \arccos(\tilde{\chi}) \quad (53)$$

Dieser Ausdruck kann mit  $\arccos(\alpha) \approx \sqrt{2}\sqrt{1 - \alpha}$  für  $\alpha \approx 1$  und  $\cos(\beta) \approx 1 - \frac{1}{2}\beta^2$  für  $\beta \ll 1$  angenähert werden durch

$$\epsilon \approx \sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + z_0^2}. \quad (54)$$

Gleiches erhält man aus der Ellipsengleichung  $\frac{x^2}{a^2\epsilon^2} + \frac{z^2}{\epsilon^2} = 1$ .

Die Phase  $t_0$  erhält man aus den Anfangswerten trivial zum Beispiel durch

$$z_0 = \epsilon \cos(\eta t_0) \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{\eta} \arccos_j \left( \frac{z_0}{\epsilon} \right) \quad (55)$$

Dabei muss der richtige Zweig  $j$  des Arkuskosinus gewählt werden, denn es gibt für einen Wert von  $z_0$  zwei mögliche Phasen. Die richtige Zuordnung kann man vom Vorzeichen von  $x_0$  abhängig machen. Anhand der ellipsenförmigen Bewegung und den Verläufen der jeweiligen Funktionen kann man sich auf anschauliche Weise klar machen, dass für die Phase gilt:

$$t_0 = \text{sign}(x_0) \frac{1}{\eta} \arccos \left( \frac{z_0}{\epsilon} \right) \quad (56)$$

Mit diesen Zusammenhängen kann (nach Umformungen unter Anwendung der Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen, der Symmetrieeigenschaften derselben Funktionen und der Beziehung  $\sin(\arccos(\gamma)) = \sqrt{1 - \gamma^2}$ ) die Lösung in harmonischer Näherung in der folgenden Form dargestellt werden.

$$x(x_0, z_0, t) = x_0 \cos(\eta t) + z_0 a \sin(\eta t) \quad (57)$$

$$z(x_0, z_0, t) = -x_0 \frac{1}{a} \sin(\eta t) + z_0 \cos(\eta t) \quad (58)$$

### 3.1.e Exakte Rechnung

Die exakte Lösung des zweiten Typs kann durch Integration der entsprechenden Differentialgleichungen hergeleitet werden. Man erhält aus (49) durch Umstellen zunächst

$$1 = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{\xi^2\pi^2}{2}(1 - 2\tilde{\chi}^2) + \frac{\xi^2\pi^2}{2}\cos(2kx)}}. \quad (59)$$

Eine Integration über die Zeit  $t$  ergibt

$$\begin{aligned} t + t_0 &= \int \frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{\xi^2\pi^2}{2}(1 - 2\tilde{\chi}^2) + \frac{\xi^2\pi^2}{2}\cos(2kx)}} dt \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\xi^2\pi^2}{2}(1 - 2\tilde{\chi}^2) + \frac{\xi^2\pi^2}{2}\cos(2kx)}} = \sqrt{\frac{2}{\xi^2\pi^2}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{(1 - 2\tilde{\chi}^2) + \cos(2kx')}}. \end{aligned} \quad (60)$$

Die Substitution

$$\sin \varphi' = \frac{\sin kx'}{K} \quad (61)$$

$$\text{mit } K := \sqrt{1 - \tilde{\chi}^2}, \quad \varphi' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (62)$$

überführt nun das Integral durch

$$\cos(2kx') = 1 - 2\sin^2 kx' = 1 - 2K^2 \sin^2 \varphi' \quad (63)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1 - 2\tilde{\chi}^2) + \cos(2kx')} = \sqrt{2K^2 - 2K^2 \sin^2 \varphi'} = \sqrt{2} K \cos \varphi' \quad (64)$$

$$dx' = \frac{1}{k} \frac{K \cos \varphi'}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi'}} d\varphi' \quad (65)$$

in die Normalform eines elliptischen Integrals:

$$t + t_0 = \sqrt{\frac{1}{\xi^2\pi^2 k^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi'}} = \sqrt{\frac{1}{\xi^2\pi^2 k^2}} F[\varphi, K] \quad (66)$$

$F[\varphi, K]$  ist die Funktion, die durch das elliptische Integral zum Modul  $K$  definiert ist. Die Umkehrfunktion wird *Amplitudenfunktion* genannt.

$$F[\varphi, K] = u \Leftrightarrow \operatorname{am}[u, K] = \varphi \quad (67)$$

Per Definition gilt für die Funktion *sinus amplitudinis*, einer *Jacobi'schen Funktion*:

$$\operatorname{sn}[u, K] = \sin \operatorname{am}[u, K] = \sin \varphi \quad (68)$$

Es folgt damit aus (66) zuerst

$$\operatorname{sn} \left[ \sqrt{\xi^2 \pi^2 k^2} (t + t_0), K \right] = \frac{\sin kx}{K} \quad (69)$$

und schließlich (durch die Beschränkung auf die zentrale Konvektionsrolle ist es möglich, den Sinus durch den Hauptzweig des Arkussinus zu invertieren)

$$x(t) = \frac{1}{k} \arcsin \left( \sqrt{1 - \tilde{\chi}^2} \operatorname{sn} \left[ \sqrt{\xi^2 \pi^2 k^2} (t + t_0), \sqrt{1 - \tilde{\chi}^2} \right] \right). \quad (70)$$

In gleicher Weise<sup>2</sup> erhält man

$$z(t) = \frac{1}{\pi} \arcsin \left( \sqrt{1 - \tilde{\chi}^2} \operatorname{sn} \left[ \sqrt{\xi^2 \pi^2 k^2} (t + t'_0), \sqrt{1 - \tilde{\chi}^2} \right] \right). \quad (71)$$

Es muss beachtet werden, dass diese beiden Lösungen durch die Beziehungen (40) bzw. (41) gekoppelt sind. Analog zur harmonischen Näherung und passend zur Erwartung an die Lösung sollte das zu einer festen Phasenbeziehung mit einer Phasendifferenz von einer viertel Periodendauer  $\frac{T}{4}$  führen. Diese Vermutung lässt sich durch Einsetzen in (40) bzw. (41) auch mathematisch exakt verifizieren. Das Vorzeichen der Phasendifferenz entscheidet über den Drehsinn der Strömung. Es folgt durch anschauliche Überlegungen aus den Verläufen der Funktionen  $x(t)$  und  $z(t)$  (qualitativ können diese mit einem Sinus verglichen werden):

$$t'_0 = t_0 + \operatorname{sign}(\xi) \cdot \frac{T}{4} \quad (72)$$

Mit (66) und (61) erhält man für die Periodendauer  $T$  der Bewegung

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{1}{\xi^2 \pi^2 k^2}} F[\hat{\varphi}, K] \quad \text{mit} \quad \sin \hat{\varphi} = \frac{\sin k\hat{x}}{K}. \quad (73)$$

Dabei ist  $\hat{x}$  der größte Wert für  $x$ , der durch  $\hat{x} = \frac{1}{k} \arccos \tilde{\chi}$  gegeben ist (siehe entsprechende Überlegungen für die Amplitude der harmonischen Näherungslösung). Der Ausdruck für  $\hat{\varphi}$  kann mit (62) vereinfacht werden:

$$\sin \hat{\varphi} = \frac{\sin \arccos \tilde{\chi}}{K} = \frac{\sqrt{1 - \tilde{\chi}^2}}{\sqrt{1 - \tilde{\chi}^2}} = 1 \Rightarrow \hat{\varphi} = \frac{\pi}{2} \quad (74)$$

---

<sup>2</sup>Die verwandte Lösungsmethode ist so in physikalischer Literatur zu finden (vgl. [Tabor]). Es ist bei genauem Hinsehen allerdings nicht klar, dass sie zum richtigen Ergebnis führt, denn sie enthält zwei Ungenauigkeiten. Erstens muss  $\dot{x}$  in Formel (59) genau genommen betragsmäßig eingehen. Die Funktion  $t = t(x)$ , die in (60) durch Integration bestimmt wird, ist daher nur für ein Zeitintervall  $I$  gültig, in dem  $\dot{x}$  positiv ist. Zweitens wird bei der Invertierung dieser Funktion nicht darauf geachtet, dass die Definitionsmenge der Umkehrfunktion  $x = x(t)$  (diese ist periodisch!) ebenfalls auf das Intervall  $I$  eingeschränkt werden muss. Es ist anhand der Form des Potentials anschaulich klar, dass die auf  $I$  gültige Lösung zu einer allgemein gültigen periodisch fortgesetzten kann. Da die verwandte Umkehrfunktion ohne Beschränkung der Definitionsmenge mit einer solchen periodischen Fortsetzung identisch ist, ist das Ergebnis am Ende richtig.

Eine mathematisch exakte Betrachtung derartiger Lösungen von Bewegungen in Potentialtopfen ist in [Königsberger] zu finden.

Für die Periodendauer ergibt sich also schließlich

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{1}{\xi^2 \pi^2 k^2}} F \left[ \frac{\pi}{2}, K \right]. \quad (75)$$

Im Gegensatz zur harmonischen Näherung ist  $T$  nicht für alle Trajektorien gleich (siehe Abbildung 6).  $T$  ist umso größer, je weiter außen die Trajektorie in der Konvektionsrolle liegt.

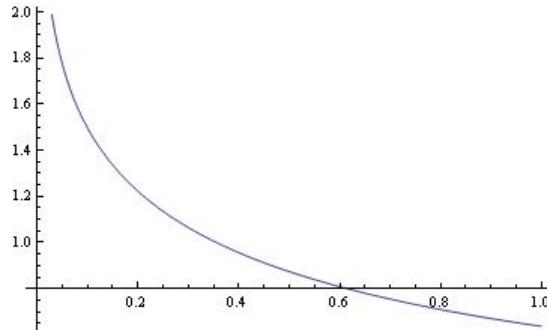


Abbildung 6: Periodendauer der Bewegung der Fluidteilchen in einer Konvektionsrolle in Abhängigkeit von  $\tilde{\chi}$  für  $\xi = a = 1$ .

$\lim_{\tilde{\chi} \rightarrow 0} T = \infty$  führt, wie später gezeigt wird, zu einer asymptotischen Bewegung am äußersten Rand.

Zur Berechnung der Beziehung zwischen der Phase  $t_0$  und den Anfangsbedingungen  $x_0$  und  $z_0$  muss die Funktion  $F_0 := \sqrt{\frac{1}{\xi^2 \pi^2 k^2}} F[\varphi_0, K]$  mit  $\sin \varphi_0 = \frac{\sin kx_0}{K}$  herangezogen werden (siehe Gleichung (66)). Analog zum Fall der harmonischen Näherung gibt es für einen Wert von  $x_0$  zwei mögliche Phasenlagen, welche sich durch das Vorzeichen von  $z_0$  unterscheiden lassen. Da in die Darstellung der exakten Funktionen  $x(t)$  und  $z(t)$  durch die Gleichungen (70) und (71) die Umlaufrichtung noch nicht eingeht, muss hier zusätzlich das Vorzeichen von  $\xi$  berücksichtigt werden. Durch anschauliche Überlegungen anhand der Verläufe der entsprechenden Funktionen (siehe dazu Abbildung 7) findet man die Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} \xi > 0: \quad z_0 > 0: \quad t_0 &= F_0 \\ z_0 < 0: \quad t_0 &= \frac{T}{2} - F_0 \\ \xi < 0: \quad z_0 > 0: \quad t_0 &= \frac{T}{2} - F_0 \\ z_0 < 0: \quad t_0 &= F_0 \end{aligned}$$

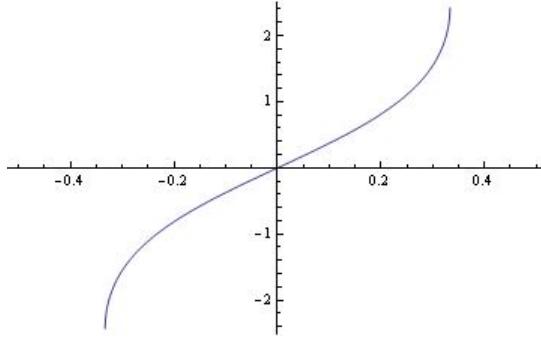


Abbildung 7: Plot der Funktion  $F[\varphi_0, K]$  mit  $\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{\sin kx_0}{K}\right)$  in Abhängigkeit von  $x_0$  für  $\tilde{\chi} = \frac{1}{2}$  und  $a = 1$ , zum Verständnis der Berechnung von  $t_0$ .

Diese führt auf die Formel

$$t_0 = \text{sign}(\xi) \text{sign}(z_0) \sqrt{\frac{1}{\xi^2 \pi^2 k^2}} F[\varphi_0, K] + \frac{T}{4} (1 - \text{sign}(\xi) \text{sign}(z_0)) \quad (76)$$

$$\text{mit } \sin \varphi_0 = \frac{\sin kx_0}{K}. \quad (77)$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke für  $t_0$  und  $t'_0$  in (70) und (71) und Ausnutzen der Beziehung  $\cos(\arcsin(\alpha)) = \sin(\arccos(\alpha)) = \sqrt{1 - \alpha^2}$  sowie der im Anhang (Abschnitt A.1) aufgeführten Eigenschaften Jacobi'scher Funktionen kann die exakte Lösung für die Trajektorien in der folgend angegebenen Form gewonnen werden (es gilt wieder  $K = \sqrt{1 - \tilde{\chi}^2}$  und  $\eta = \xi \pi k$ ).

$$x(x_0, z_0, t) = \frac{1}{k} \arcsin \left( \frac{\sin(\pi z_0) \cos^2(kx_0) \operatorname{sn}[\eta t, K] + \sin(kx_0) \operatorname{cn}[\eta t, K] \operatorname{dn}[\eta t, K]}{1 - \sin^2(kx_0) \operatorname{sn}^2[\eta t, K]} \right) \quad (78)$$

$$z(x_0, z_0, t) = \frac{1}{\pi} \arcsin \left( \frac{\sin(\pi z_0) \operatorname{cn}[\eta t, K] - \sin(kx_0) \operatorname{sn}[\eta t, K] \operatorname{dn}[\eta t, K]}{\operatorname{dn}[\eta t, K] - \sin(\pi z_0) \sin(kx_0) \operatorname{sn}[\eta t, K] \operatorname{cn}[\eta t, K]} \right) \quad (79)$$

Um zu sehen, wie sich die Formen der exakten Trajektorien – im Gegensatz zur harmonischen Näherung – mit steigenden Werten von  $\tilde{\chi}$  von ellipsenförmig zu rechteckig verändern (siehe dazu auch Abbildung 4), sind die Funktionen  $x(t)$  für verschiedene Werte von  $\tilde{\chi}$  in exakter Form und harmonischer Näherung in Abbildung 8 dargestellt.

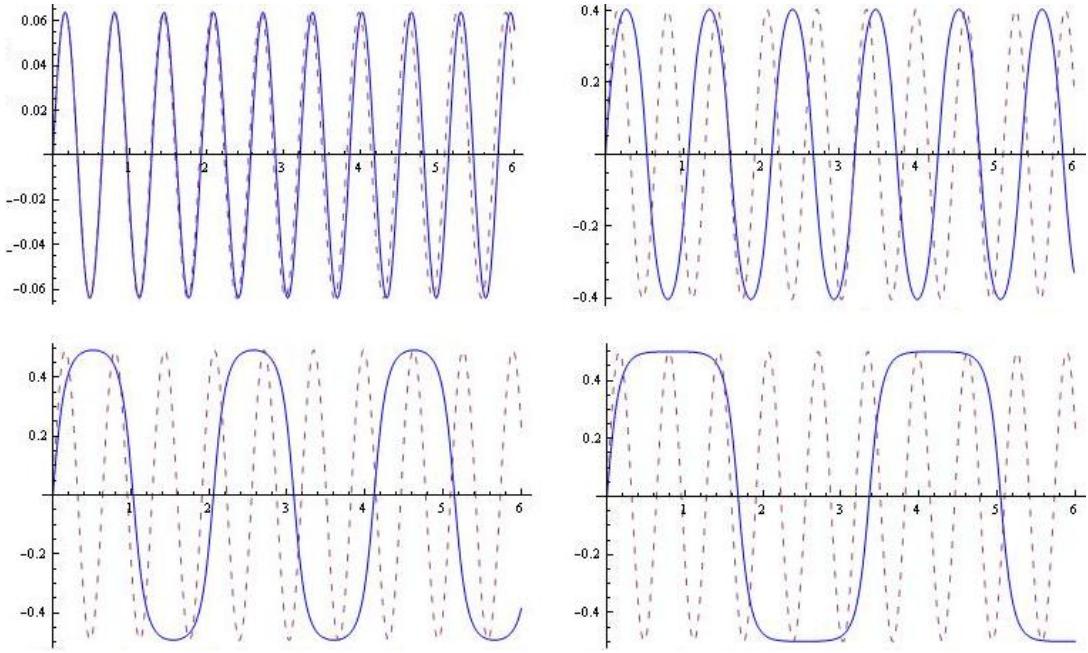


Abbildung 8:  $x(t)$  in exakter Form (durchgezogen) und harmonischer Näherung (gestrichelt) für  $\xi = a = 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $z_0$  gemäß (45) und  $\tilde{\chi} = 0.999, 0.3, 0.025, 0.001$  (in Lesereihenfolge).

### 3.1.f Grenzfälle

Die Lösungen des ersten und dritten Typs sind Grenzfälle der gerade hergeleiteten Lösung, welche hier in der Form von (70) und (71) betrachtet wird.

Für  $\tilde{\chi} = 1$  ergibt sich – dadurch, dass  $\sqrt{1 - \tilde{\chi}^2}$  Null und der Wertebereich des sinus amplitudinis beschränkt ist – wie erwartet die triviale Lösung  $x(t) = z(t) = 0$ .

Für  $\tilde{\chi} = 0$  ist  $K = 1$ . Mit der Beziehung  $\text{sn}[t, 1] = \tanh(t)$  folgt für die Trajektorie im Fall  $t_0 = 0$ :

$$x(t) = \frac{1}{k} \arcsin \left( \tanh \left( \sqrt{\xi^2 \pi^2 k^2} t \right) \right) \quad (80)$$

$$z(t) = \frac{1}{\pi} \arcsin \left( \tanh \left( \sqrt{\xi^2 \pi^2 k^2} \left( t \pm \frac{T}{4} \right) \right) \right) \quad (81)$$

Für  $\tilde{\chi} \rightarrow 0$  geht  $T$  gegen unendlich. Die Funktion  $\arcsin(\tanh(t))$  geht für  $t \rightarrow \pm\infty$  asymptotisch gegen  $\pm\frac{\pi}{2}$ .

Es findet folglich in der durch die Gleichungen (80) und (81) gegebenen Lösung in  $z$ -Richtung keine Bewegung statt. Im Falle eines positiven Phasenvorsprungs von  $z(t)$  gegenüber  $x(t)$  ist  $z(t) = +\frac{1}{2}$ . In der  $x$ -Richtung gibt es eine Bewegung in asymptotischer Form von  $-\frac{\pi}{2k}$  nach  $+\frac{\pi}{2k}$  (siehe Abbildung 9). Zusammengenommen ergibt

sich daraus eine Bewegung der Fluidteilchen am oberen Rand der Konvektionsrolle entlang von der linken Ecke zur rechten.

Im Falle des negativen Phasenvorsprungs ist  $z(t) = -\frac{1}{2}$  und die Bewegung verläuft am unteren Rand entlang (entgegengesetzter Drehsinn der Strömung).

Die Funktionen für die analogen Bewegungen entlang der anderen Seitenränder der Konvektionsrolle erhält man für jeden Drehsinn durch Phasenverschiebungen der Trajektorie vor dem Grenzübergang  $\tilde{\chi} \rightarrow 0$  durch die Wahl von  $t_0 = \frac{T}{4}, \frac{T}{2}$  bzw.  $\frac{3}{4}T$ .

Dies ist intuitiv verständlich und kann formal mit den folgenden zwei Gedanken verstanden werden.

- (i) Aus einem Additionstheorem des sinus amplitudinis (siehe Abschnitt A.1) folgt die Beziehung

$$\operatorname{sn}\left[\sqrt{\xi^2 \pi^2 k^2}\left(t + \frac{T}{2}\right), \sqrt{1 - \tilde{\chi}^2}\right] = -\operatorname{sn}\left[\sqrt{\xi^2 \pi^2 k^2} t, \sqrt{1 - \tilde{\chi}^2}\right]. \quad (82)$$

Da außerdem der  $\arcsin$  eine ungerade Funktion ist, führt eine Phase von  $\frac{T}{2}$  in den Funktionen  $x(t)$  und  $z(t)$  zu einer Umkehrung ihres Vorzeichens.

- (ii) Wegen der festen Phasendifferenz von  $\frac{T}{4}$  zwischen den Funktionen  $x(t)$  und  $z(t)$  führt eine Phasenverschiebung von  $\frac{T}{4}$  zu einer Vertauschung ihrer Rollen. D. h., es ist nach einer solchen Phasenverschiebung und nach dem Grenzübergang  $\tilde{\chi} \rightarrow 0$  jeweils die andere Funktion konstant bzw. beschreibt eine asymptotische Bewegung.

Die zweite Eigenschaft kann wiederholt angewandt werden. Dabei erhalten die Funktionen  $x(t)$  und  $z(t)$  durch die erste Eigenschaft die geeigneten Vorzeichen.

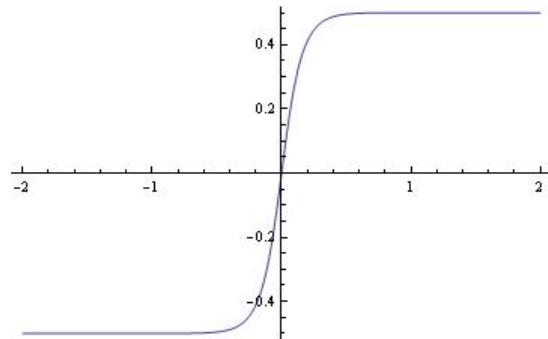


Abbildung 9:  $x(t)$  im Grenzfall  $\tilde{\chi} \rightarrow 1$  mit  $t_0 = 0$  und  $\xi = a = 1$  (siehe (80)).

## 3.2 Anwendung der Lagrange'schen Methode

Dieser zweite Teil der Untersuchungen dieser Arbeit wird sich der Anwendung der Lagrange'schen Methode nähern.

Bei einer umfassenden und reinen Ausführung des Lagrange'schen Ansatzes hätte man kein Vorwissen über die Lagrange'sche Abbildung und müsste zur Lösung der ersten Instabilität alle drei Differentialgleichungen des Rayleigh-Bénard-Systems sowie die Beziehung (35) zwischen Geschwindigkeitsfeld und Lagrange'scher Abbildung heranziehen.

An dieser Stelle hingegen werden die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes verwendet. Mit den Trajektorien ist nun die Lagrange'sche Abbildung bereits bekannt. Dies ermöglicht es, alleinig die Differentialgleichung für die Temperatur (33) zu betrachten, in der – da  $u_z$  durch die Lagrange'sche Abbildung implizit gegeben ist – eben diese Größe nun die einzige Unbekannte ist. Gegenstand der folgenden Diskussion ist demnach die Gleichung (zur besseren Übersichtlichkeit wird im Folgenden die oben verwandte Tilde weggelassen)

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \Delta_L \theta + u_z. \quad (83)$$

### 3.2.a Reihenentwicklungen

Es stellt sich heraus, dass die Lagrange'sche Abbildung im hier besprochenen Fall zu unhandlich für eine exakte Rechnung ist. Bei der Verwendung des Laplace-Operators in Lagrange'scher Form kommen Ableitungen der Lagrange'schen Abbildung nach den Lagrange'schen Koordinaten vor (siehe Abschnitt 3.2.b). Insbesondere das Auftreten der Lagrange'schen Koordinaten im Modul der Jacobi'schen Funktionen führt zu sehr umfangreichen Ausdrücken beim Differenzieren. Es liegt daher nahe, eine Taylorentwicklung der Lagrange'schen Abbildung bezüglich der Lagrange'schen Koordinaten vorzunehmen.

Aus Gründen der Konsistenz werden auch alle anderen Funktionen in Form von Reihenentwicklungen nach den Lagrange'schen Koordinaten behandelt. Man löst das Problem der ersten Instabilität auf diese Weise in einer kleinen Umgebung am Zentrum einer Konvektionsrolle. Da im Eulerbild Lösungen vollständig angegeben werden können, ist zu erwarten, dass die Umgebung, in der die Lagrange'sche Lösung gültig ist, durch Berücksichtigung von immer höheren Ordnungen in den Reihendarstellungen beliebig weit ausgedehnt werden kann, ohne auf Konvergenzprobleme zu stoßen.

Da alle auftretenden Funktionen im Allgemeinen nicht nur von den Lagrange'schen Koordinaten, sondern auch von der Zeit  $t$  abhängen, sind die Koeffizienten der verwendeten Taylorentwicklungen Funktionen von  $t$ .

In dieser Arbeit werden Terme bis zur einschließlich ersten Ordnung in den Lagrange'schen Koordinaten berücksichtigt. Um in der Differentialgleichung (83) alle Terme von dieser Art mit einzubeziehen, müssen Funktionen, die in  $n$ -ter Ableitung nach Lagrange'schen Koordinaten auftreten, bis zur  $(n+1)$ -ten Ordnung entwickelt werden. Bei Produkten von Funktionen werden alle beteiligten Funktionen bis zur ers-

ten Ordnung entwickelt. Die bei der Multiplikation zusätzlich entstehenden höheren Ordnungen werden dann nicht weiter einbezogen.

Es muss darüber hinaus beachtet werden, dass Terme, die proportional zu quadratischen und höheren Potenzen von  $\xi$  sind, nicht berücksichtigt werden dürfen, damit wiederum Konsistenz zur Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes (23) besteht, das der Berechnung der Lagrange'schen Abbildung zugrunde liegt.

Durch die Lagrange'sche Abbildung ist bekannt, dass eine ebene Strömung vorliegt. Daher kann weiterhin zweidimensional gerechnet werden.

**Lagrange'sche Abbildung** Die Funktionen (78) und (79), die die Trajektorien der Fluidteilchen beschreiben, liefern direkt die Lagrange'sche Abbildung.  $x$  und  $z$  sind die Euler'schen Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$ ;  $x_0$  und  $z_0$  die Lagrange'schen Koordinaten  $y_1$  und  $y_2$ . Im Folgenden werden jeweils die zweiten Bezeichnungen für die Koordinaten verwendet.

Die Reihenentwicklung der Lagrange'schen Abbildung muss bis zur maximal dritten Ordnung fortgeführt werden. Aus den Gleichungen (78) und (79) erhält man, dass Koeffizienten zu nullten und zweiten Ordnungen verschwinden. Die nicht verschwindenden sind im Anhang (Abschnitt A.2) angegeben. Es gilt für die Berechnung  $\alpha_{ij} = \partial_{y_1}^i \partial_{y_2}^j x_1$  bzw.  $\beta_{ij} = \partial_{y_1}^i \partial_{y_2}^j x_2$ , jeweils an den Stellen  $y_1 = y_2 = 0$ .

$$x_1 = \alpha_{10} \cdot y_1 + \alpha_{01} \cdot y_2 + \frac{1}{6} \alpha_{30} \cdot y_1^3 + \frac{1}{2} \alpha_{21} \cdot y_1^2 y_2 + \frac{1}{2} \alpha_{12} \cdot y_1 y_2^2 + \frac{1}{6} \alpha_{03} \cdot y_2^3 + \dots \quad (84)$$

$$x_2 = \beta_{10} \cdot y_1 + \beta_{01} \cdot y_2 + \frac{1}{6} \beta_{30} \cdot y_1^3 + \frac{1}{2} \beta_{21} \cdot y_1^2 y_2 + \frac{1}{2} \beta_{12} \cdot y_1 y_2^2 + \frac{1}{6} \beta_{03} \cdot y_2^3 + \dots \quad (85)$$

Eine Entwicklung in erster Ordnung entspricht dem Ergebnis der harmonischen Näherung (Abschnitt 3.1.d).

**Geschwindigkeit** Die Geschwindigkeit  $u_z$  ergibt sich aus  $\dot{x}_2$  und wird bis zur ersten Ordnung entwickelt:

$$u_z = \dot{\beta}_{10} \cdot y_1 + \dot{\beta}_{01} \cdot y_2 + \dots \quad (86)$$

**Temperatur** Die Reihenentwicklung der unbekannten Temperatur  $\theta$  wird bis zur dritten Ordnung benötigt. Es gilt wieder  $\theta_{ij} = \partial_{y_1}^i \partial_{y_2}^j \theta$  an der Stelle  $y_1 = y_2 = 0$ .

$$\begin{aligned} \theta = \theta_{00} &+ \theta_{10} \cdot y_1 + \theta_{01} \cdot y_2 + \frac{1}{2} \theta_{20} \cdot y_1^2 + \theta_{11} \cdot y_1 y_2 + \frac{1}{2} \theta_{02} \cdot y_2^2 \\ &+ \frac{1}{6} \theta_{30} \cdot y_1^3 + \frac{1}{2} \theta_{21} \cdot y_1^2 y_2 + \frac{1}{2} \theta_{12} \cdot y_1 y_2^2 + \frac{1}{6} \theta_{03} \cdot y_2^3 + \dots \quad (87) \end{aligned}$$

### 3.2.b Laplace-Operator

Die partielle Zeitableitung in der Differentialgleichung (83) äußert sich bei Verwendung der Taylorreihen trivial als Zeitableitung der Koeffizienten. Schwieriger ist die Handhabung des Operators

$$\Delta_L = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} + \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (88)$$

(hier gilt die Einstein'sche Summenkonvention) wegen der in den Termen  $\frac{\partial y_m}{\partial x_n}$  und  $\frac{\partial^2 y_m}{\partial x_n^2}$  auftretenden Ableitungen der inversen Lagrange'schen Abbildung  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ . Diese Abbildung ist nicht bekannt und eine Invertierung der bekannten Lagrange'schen Abbildung  $\mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$  ist nicht machbar.

Es kann jedoch ausgenutzt werden, dass die Matrix  $\left( \frac{\partial x_m}{\partial y_n} \right)_{m,n}$  invers zur Matrix  $\left( \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \right)_{m,n}$  ist. Dies kann folgendermaßen eingesehen werden:

$$\left( \frac{\partial x_m}{\partial y_n} \right)_{m,n} \cdot \left( \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \right)_{m,n} = \left( \sum_p \frac{\partial x_m}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial x_n} \right)_{m,n} = \left( \frac{\partial x_m}{\partial x_n} \right)_{m,n} = (\delta_{mn})_{m,n} = \mathbb{1} \quad (89)$$

Im hier diskutierten Fall liegen  $2 \times 2$ -Matrizen vor und die Invertierung folgt dem Schema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (90)$$

Da die Funktionaldeterminante der Lagrange'schen Abbildung gleich Eins ist (siehe [Daitche]), gelten schließlich die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} &= + \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= - \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= - \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}. \end{aligned} \quad (91)$$

Die Terme der Form  $\frac{\partial y_m}{\partial x_n}$  können also mit der bekannten Lagrange'schen Abbildung bestimmt werden. Zur Bestimmung der zweiten Ableitungen  $\frac{\partial^2 y_m}{\partial x_n^2}$  kann die Kettenregel verwendet werden. Man erhält unter Verwendung von (91)

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \frac{\partial^2 x_2}{\partial y_1 \partial y_2} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial y_2^2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 x_2}{\partial y_1 \partial y_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 x_2}{\partial y_2^2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \quad (92)$$

und analoge Ausdrücke für die weiteren zweiten Ableitungen.

### 3.2.c Koeffizientenvergleich

Nun führt man alle relevanten Terme, die in den beschriebenen Formen in der Differentialgleichung (83) auftreten, zusammen. Durch einen Koeffizientenvergleich erhält man bei einer Entwicklung bis zur ersten Ordnung drei Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten  $\theta_{ij}$ . Diese haben die unten dargestellten Formen. Die Funktionen  $f_{ij}^k(t)$  ergeben sich durch die Auswertung des Operators  $\Delta_L$  aus den Koeffizienten  $\alpha_{mn}$  und  $\beta_{mn}$  und sind im Anhang (Abschnitt A.3) angegeben. Dadurch, dass in der Entwicklung der Lagrange'schen Abbildung keine Terme nullter und zweiter Ordnung vorkommen, verkürzen sich die Gleichungen etwas.

$$\text{nullte Ordnung: } \dot{\theta}_{00} = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=2}} f_{ij}^1(t) \cdot \theta_{ij} \quad (93)$$

$$\text{erste Ordnung in } y_1: \dot{\theta}_{10} = \dot{\beta}_{10} + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=1}} f_{ij}^2(t) \cdot \theta_{ij} + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=3, i \neq 0}} f_{ij}^2(t) \cdot \theta_{ij} \quad (94)$$

$$\text{erste Ordnung in } y_2: \dot{\theta}_{01} = \dot{\beta}_{01} + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=1}} f_{ij}^2(t) \cdot \theta_{ij} + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=3, j \neq 0}} f_{ij}^3(t) \cdot \theta_{ij} \quad (95)$$

Dieses Differentialgleichungssystem ist nicht geschlossen. Durch die Ableitungen von  $\theta$  nach  $y_1$  und  $y_2$  in der Differentialgleichung (83) kann man auch durch Berücksichtigung höherer Ordnungen kein geschlossenes Gleichungssystem finden.

Um dieses Problem zu umgehen, kann ein spezieller Ansatz für  $\theta$  verwendet werden, der die Anzahl der Unbekannten reduziert.

### 3.2.d Ansatz für $\theta$

Wenn man an den Mechanismus des Auftriebs denkt, erscheint es stark vereinfachend, aber doch plausibel, einen proportionalen Zusammenhang zwischen  $\theta$  und  $u_z$  anzunehmen. Im Eulerbild kann diese Annahme auf einfache Weise mathematisch unterstützt werden. Aus der Differentialgleichung (20) erhält man bei einer Vernachlässigung quadratischer Terme nämlich die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \Delta \theta + u_z. \quad (96)$$

Diese wird durch  $\theta \sim u_z$  gelöst, da  $u_z$  in der Form von Gleichung (23), die dieser Arbeit zugrunde liegt, nicht explizit von der Zeit abhängt und eine Eigenfunktion des Laplace-Operators ist.

Es wird außerdem ein Koeffizient von nullter Ordnung in den Lagrange'schen Koordinaten frei gelassen. Der Ansatz lautet also

$$\theta = \theta_{00} + \gamma \cdot u_z, \quad (97)$$

wobei  $\gamma$  eine Konstante und  $\theta_{00}$  eine Funktion von  $t$  ist.  $u_z$  ist durch die Lagrange'sche Abbildung bekannt.

### 3.2.e Lösung von $\theta$

Es folgt mit dem Ansatz (97) aus der ersten Gleichung, die der Koeffizientenvergleich lieferte:

$$\dot{\theta}_{00} = 0 \quad (98)$$

Dieses Ergebnis ist sinnvoll, da die durch die Differentialgleichungen vorgegebene Dynamik des Rayleigh-Bénard-Systems – wie die Entdimensionalisierung zeigt – nur von der Temperaturdifferenz zwischen den Rändern abhängt. Eine additive Konstante in der Temperatur – wie sie der Koeffizient  $\theta_{00}$  unter der Bedingung (98) darstellt – ist demnach zuerst beliebig. Erst durch die Vorgabe einer Randbedingung wird sie festgelegt. Da  $\theta$  die Abweichung vom Temperaturfeld des stationären Zustandes ist und die Randbedingungen unabhängig vom Zustand sind, muss  $\theta$  am Rand Null sein. Die gleiche Randbedingung gilt für  $u_z$ . So folgt für  $\theta_{00}$  der Wert

$$\theta_{00} = 0 \quad (99)$$

Aus Gleichung (94) erhält man mit dem Ansatz

$$(\gamma(k^2 + \pi^2) - 1) \cdot \frac{k}{\pi} \eta \cos(\eta t) = 0 \quad (100)$$

und Gleichung (95) führt auf

$$(\gamma(k^2 + \pi^2) - 1) \cdot \eta \sin(\eta t) = 0. \quad (101)$$

Es folgt für  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{k^2 + \pi^2} \quad (102)$$

Damit lautet die hier gewonnene Lösung für das Temperaturfeld:

$$\theta = \frac{1}{k^2 + \pi^2} \cdot u_z \quad (103)$$

Sie steht im Einklang mit der im Eulerbild bekannten Lösung des Problems (siehe (23) und (24)).

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die erste Instabilität des Rayleigh-Bénard-Systems auf eine Lagrange'sche Weise behandelt. Dabei wurde auf eine im Eulerbild bekannte Lösung von einfacher Form zurückgegriffen. Ausgehend vom Euler'schen Geschwindigkeitsfeld wurde die Lagrange'sche Abbildung berechnet. Mit diesem Vorwissen wurde die Lagrange'sche Temperatur mittels der zugehörigen Differentialgleichung betrachtet. Wegen der Unhandlichkeit der Lagrange'schen Abbildung wurde das Problem nach Potenzen der Lagrange'schen Koordinaten entwickelt. Mit einem plausiblen Ansatz konnte die bekannte Euler'sche Lösung der Temperatur bis zur ersten Ordnung der Entwicklung in Lagrange'scher Entsprechung wiedergefunden werden.

Damit hat sich diese Arbeit vorgetastet in die Richtung des Lagrange'schen Ansatzes, der eine seltener gewählte Alternative zum Euler'schen Weg ist. Diese Alternative hat sich in der Anwendung auf das vorliegende Problem als interessant erwiesen und es sind umfangreiche Möglichkeiten für weitere Untersuchungen zu sehen.

Diese betreffen vornehmlich die Kunst, die Unhandlichkeit der Lagrange'sche Abbildung, die die Schwierigkeit der Lagrange'schen Methode ausmacht, zu überlisten oder zu umgehen. An dieser Stelle sind neue Ideen gefragt. Aber auch der in dieser Arbeit begonnene Weg bietet noch Herausforderungen und kann weiter ausgearbeitet werden.

Hier kann man zum einen an der Auswertung der Ergebnisse des Koeffizientenvergleichs ansetzen. Da es die drei vorhandenen Gleichungen erlauben, einen Temperaturansatz mit drei freien zeitabhängigen Parametern zu machen, sind die Möglichkeiten mit dem hier verwendeten Ansatz noch nicht erschöpft. Es kann nach gewinnbringenderen Ansätzen gesucht werden. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch die Frage, auf welche Weise eine Lagrange'sche Entsprechung einer in dieser Arbeit nicht berücksichtigten, stabilisierenden Mode des Euler'schen Temperaturfeldes zu finden ist.

Zum anderen kann die Methode der Entwicklung des Problems nach Potenzen der Lagrange'schen Koordinaten weiter ausgebaut und ausgetestet werden, indem man versucht, mit ihr die erste Instabilität auf einem rein Lagrange'schen Weg – ohne Vorkenntnisse aus dem Eulerbild – zu betrachten. Außerdem kann man sich überlegen, inwieweit es machbar ist, quadratische und höhere Ordnungen trotz der potentiell umfangreicheren Gleichungen zu berücksichtigen, und ob hier für bestimmte Algorithmen der Computer verwendet werden kann. Die Idee, das betrachtete Problem nach Potenzen der Lagrange'schen Koordinaten zu entwickeln, steht erst an ihrem Anfang.



## A Anhang

### A.1 Eigenschaften Jacobi'scher Funktionen

(siehe [Abramowitz], [Bronstein])

$$\operatorname{sn}[x+y, m] = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y + \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}$$

$$\operatorname{cn}[x+y, m] = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{cn} y - \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y \operatorname{dn} y}{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}$$

$$\operatorname{dn}[x+y, m] = \frac{\operatorname{dn} x \operatorname{dn} y - m^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}$$

$$\operatorname{sn}[-x, m] = -\operatorname{sn}[x, m], \quad \operatorname{cn}[-x, m] = \operatorname{cn}[x, m], \quad \operatorname{dn}[-x, m] = \operatorname{dn}[x, m]$$

$$\operatorname{sn}[F[\varphi, m], m] = \sin \varphi, \quad \operatorname{cn}[F[\varphi, m], m] = \cos \varphi, \quad \operatorname{dn}[x, m] = \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sn}^2[x, m]}$$

Für  $\varkappa := F[\frac{\pi}{2}, m]$  gilt:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sn}[0, m] = 0 & \operatorname{cn}[0, m] = 1 & \operatorname{dn}[0, m] = 1 \\ \operatorname{sn}[\varkappa, m] = 1 & \operatorname{cn}[\varkappa, k] = 0 & \operatorname{dn}[\varkappa, m] = \sqrt{1 - m^2} \\ \operatorname{sn}[2\varkappa, m] = 0 & \operatorname{cn}[2\varkappa, m] = -1 & \operatorname{dn}[2\varkappa, m] = 1 \\ \operatorname{sn}[3\varkappa, m] = -1 & \operatorname{cn}[3\varkappa, m] = 0 & \operatorname{dn}[3\varkappa, m] = \sqrt{1 - m^2} \end{array}$$

### A.2 Koeffizienten der Reihenentwicklung der Lagrange'schen Abbildung

$$\begin{array}{ll} \alpha_{10} = \cos(\eta t) & \beta_{10} = -\frac{k}{\pi} \sin(\eta t) \\ \alpha_{01} = \frac{\pi}{k} \sin(\eta t) & \beta_{01} = \cos(\eta t) \\ \alpha_{30} = \frac{k^2}{4} \sin(\eta t) (6\eta t + \sin(2\eta t)) & \beta_{30} = -\frac{k^3}{4\pi} \cos(\eta t) (-6\eta t + \sin(2\eta t)) \\ \alpha_{21} = -\frac{k\pi}{4} \cos(\eta t) (2\eta t + \sin(2\eta t)) & \beta_{21} = -\frac{k^2}{4} \sin(\eta t) (-2\eta t + \sin(2\eta t)) \\ \alpha_{12} = -\frac{\pi^2}{4} \sin(\eta t) (-2\eta t + \sin(2\eta t)) & \beta_{12} = \frac{k\pi}{4} \cos(\eta t) (2\eta t + \sin(2\eta t)) \\ \alpha_{03} = \frac{\pi^3}{4k} \cos(\eta t) (-6\eta t + \sin(2\eta t)) & \beta_{03} = \frac{\pi^2}{4} \sin(\eta t) (6\eta t + \sin(2\eta t)) \end{array}$$

### A.3 Die Funktionen $f_{ij}^k(t)$ des Koeffizientenvergleichs

$$f_{20}^1 = f_{30}^2 = f_{21}^3 = \alpha_{01}^2 + \beta_{01}^2$$

$$= \frac{\pi^2}{k^2} \sin^2(\eta t) + \cos^2(\eta t)$$

$$f_{11}^1 = f_{21}^2 = f_{12}^3 = -2\alpha_{10}\alpha_{01} - 2\beta_{10}\beta_{01}$$

$$= 2 \left( \frac{k}{\pi} - \frac{\pi}{k} \right) \sin(\eta t) \cos(\eta t)$$

$$f_{02}^1 = f_{12}^2 = f_{03}^3 = \alpha_{10}^2 + \beta_{10}^2$$

$$= \frac{k^2}{\pi^2} \sin^2(\eta t) + \cos^2(\eta t)$$

$$f_{10}^2 = \alpha_{21}\alpha_{01} - \alpha_{12}\alpha_{10} + \beta_{21}\beta_{01} - \beta_{12}\beta_{10}$$

$$= (k^2 - \pi^2) \sin(\eta t) \cos(\eta t) \eta t$$

$$f_{01}^2 = \alpha_{21}\alpha_{10} - \alpha_{30}\alpha_{01} + \beta_{21}\beta_{10} - \beta_{30}\beta_{01}$$

$$= - \left( \frac{k^3}{2\pi} + \frac{3k\pi}{2} \right) \sin^2(\eta t) \eta t - \left( \frac{3k^3}{2\pi} + \frac{k\pi}{2} \right) \cos^2(\eta t) \eta t + \left( \frac{k^3}{4\pi} - \frac{k\pi}{4} \right) \sin(2\eta t)$$

$$f_{10}^3 = \alpha_{12}\alpha_{01} - \alpha_{03}\alpha_{10} + \beta_{12}\beta_{01} - \beta_{03}\beta_{10}$$

$$= \left( \frac{\pi^3}{2k} + \frac{3k\pi}{2} \right) \sin^2(\eta t) \eta t + \left( \frac{3\pi^3}{2k} + \frac{k\pi}{2} \right) \cos^2(\eta t) \eta t - \left( \frac{\pi^3}{4k} - \frac{k\pi}{4} \right) \sin(2\eta t)$$

$$f_{01}^3 = \alpha_{12}\alpha_{10} - \alpha_{21}\alpha_{01} + \beta_{12}\beta_{10} - \beta_{21}\beta_{01}$$

$$= (\pi^2 - k^2) \sin(\eta t) \cos(\eta t) \eta t$$

## B Quellen- und Literaturverzeichnis

- [Abramowitz] MILTON ABRAMOWITZ, IRENE A. STEGUN: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [Argyris] JOHN ARGYRIS, GUNTER FAUST, MARIA HAASE: *Die Erforschung des Chaos*. Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1995.
- [Bénard] HENRI BÉNARD (1901). Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. – Méthodes optiques d’observation et d’enregistrement. *J. Phys. Theor. Appl.*, 10 (1), S. 254-266.
- [Bennett] A. BENNETT: *Lagrangian Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- [Bronstein] BRONSTEIN, SEMENDJAJEW, MUSIOL, MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 2000.
- [Daitche] ANTON DAITCHE: *Statistische und geometrische Eigenschaften turbulenter Strömungen*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Dezember 2009.
- [Feynman] RICHARD P. FEYNMAN, ROBERT B. LEIGHTON, MATTHEW SANDS: *Feynman Vorlesungen über Physik, Band II: Elektromagnetismus und Struktur der Materie*. Oldenbourg Verlag, München, 2007.
- [Friedrich] RUDOLF FRIEDRICH: *Windows to Complexity*. Skript zur Rayleigh-Bénard-Konvektion, 2011.
- [Greiner] WALTER GREINER, HORST STOCK: *Hydrodynamik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun, 1991.
- [Guyon] ETIENNE GUYON, JEAN-PIERRE HULIN, LUC PETIT: *Hydrodynamik*. Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.
- [Königsberger] KONRAD KÖNIGSBERGER: *Analysis 1*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Landau] L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ: *Hydrodynamik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
- [Lülf] JOHANNES LÜLF: *Statistische Eigenschaften turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Januar 2011.

- [Rayleigh] LORD RAYLEIGH (1916). On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Philosophical Magazine*, 32 (192), S. 529 - 546.
- [Sinhuber] MICHAEL SINHUBER: *Turbulente Rayleigh-Bénard-Konvektion*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Januar 2011.
- [Tabor] MICHAEL TABOR: *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [1] [http://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/  
image\\_feature\\_1749.html](http://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_1749.html) (April 2011)
- [2] [http://www.uni-muenster.de/Physik.GP/Geodynamik/Forschung/  
SimulationenMantelkonvektion.html](http://www.uni-muenster.de/Physik.GP/Geodynamik/Forschung/SimulationenMantelkonvektion.html) (April 2011)

### **Erklärung zur Bachelorarbeit**

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet sowie Zitate kenntlich gemacht zu haben.

Münster, den 22. Juni 2011