

**Relative Dispersion
Lagrange'scher Teilchen
in der turbulenten
inversen Kaskade**

**Relative dispersion of
Lagrangian particles in the
turbulent inverse cascade**

**Bachelorarbeit
im Rahmen des Studiengangs
Physik (Bachelor of Science)**

Vorgelegt von
Walter Tewes

Ausgegeben und betreut von
Prof. Dr. Rudolf Friedrich
Institut für Theoretische Physik

Münster, Juni 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Aufbau der Arbeit	3
2 Grundlagen	5
2.1 Grundgleichungen	5
2.1.1 Die Navier-Stokes-Gleichung	5
2.1.2 Die Wirbeltransportgleichung	6
2.2 Statistische Beschreibung	7
2.3 Die Richardson-Kaskade und K41	9
2.4 Energietransport und inverse Kaskade	11
2.4.1 Energietransport	11
2.4.2 Die inverse Kaskade	13
2.5 Das Richardson-Gesetz	14
2.5.1 Die Arbeit von Richardson	14
2.5.2 Erweiterungen von Richardsons Theorie	15
3 Statistik der Vortizität in der inversen Kaskade	17
3.1 Die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie	17
3.1.1 Evolutionsgleichung der feinkörnigen pdf	17
3.1.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten	19
3.2 Vortizitätsinkremente	20
4 Lagrange'sche Interpretation	23
4.1 Momente von Ω und r	24
4.2 Longitudinale Geschwindigkeitsinkremente	26
4.2.1 Rechnungen unter Vernachlässigung von η	27
4.2.2 Rechnungen unter Berücksichtigung von η	29
5 Resümee und Ausblick	33
6 Anhang	35

1 Einleitung und Aufbau der Arbeit

Die hier vorliegende Arbeit beschäftigt sich allgemein mit einer statistischen Behandlung zweidimensionaler Turbulenz. Mit einer statistischen Behandlung wird man einer Haupteigenschaft der Turbulenz gerecht, der *intrinsischen Zufälligkeit*¹. Es ist sehr schwierig, Turbulenz im physikalischen Sinne exakt zu definieren. Ein raumzeitlich scheinbar zufälliges Verhalten, welches sich auch ohne stochastische Randbedingungen einstellt, wird jedoch als wichtiger Aspekt von Turbulenz angesehen.

Es stellt sich selbstverständlich die Frage nach dem Zweck der Behandlung zweidimensionaler Turbulenz. Die Untersuchung zweidimensionaler Turbulenz ist keinesfalls von rein akademischem Interesse. So können Ergebnisse zur zweidimensionalen Turbulenz der näherungsweisen Beschreibung von Turbulenzphänomenen z.B. in der Atmosphäre der Erde oder in Ozeanen dienen (vgl. [KM80]). Bei der Behandlung zweidimensionaler Turbulenz handelt es sich auch nicht lediglich um eine Reduktion der Komplexität. Es treten vielmehr, ähnlich wie beim Quanten-Hall-Effekt, bei der Betrachtung eines zweidimensionalen Systems neue Effekte auf (vgl. z.B. Abschnitt 2.4.2 über die inverse Kaskade), welche bei dreidimensionalen Systemen nicht beobachtbar sind.

Im ersten Kapitel der Arbeit sollen einige wichtige Grundlagen für die Beschreibung von Turbulenz aufgeführt werden. Dabei können einzelne Aspekte selbstverständlich nicht immer bis ins Detail erörtert werden. Eingegangen wird zum einen auf die Grundgleichungen, aus denen jene Resultate abgeleitet werden, welche als exakt gelten. Zum anderen werden wichtige phänomenologische Theorien beschrieben, welche sich nicht mathematisch streng ergeben, jedoch zum Teil experimentell bestätigt wurden.

Die dann folgenden Kapitel beziehen sich auf die Arbeit [FVKW10]. Dabei wird zunächst die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie, wie sie in oben genannter Arbeit auftaucht, abgeleitet. Dann werden ohne strenge Ableitung die in [FVKW10] erlangten Ergebnisse für Vortizitätsinkremente und Abstände Lagrange'scher Teilchen aufgeführt.

In Kapitel 4 werden schließlich die zwei Langevin-Gleichungen für das Vortizitätsinkrement und den Abstand unter Verwendung verschiedener Ansätze behandelt.

¹Vgl. hierzu [Tsi09].

2 Grundlagen

2.1 Grundgleichungen

2.1.1 Die Navier-Stokes-Gleichung

Betrachtet man Fluide als Kontinuum, so können zwei verschiedene Beschreibungen bemüht werden¹. Zunächst kann eine Beschreibung mit Hilfe des *Eulerbildes* erfolgen. Dabei betrachtet man relevante Größen der Strömung in einem ortsfesten Koordinatensystem. So erhält man zum Beispiel aus dem Euler'schen Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ mit $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t)$ den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit am ortsfesten Punkt \mathbf{x}_1 . Ist die Geschwindigkeit an diesem Ort konstant, so heißt dies jedoch nicht, dass die Fluidteilchen dort keine Beschleunigung erfahren.

Dieser Sachverhalt wird insbesondere bei der Beschreibung über das *Lagrangebild* deutlich. Hierbei betrachtet man nicht mehr ein ortsfestes Koordinatensystem, sondern wertet die Felder (z.B. das Geschwindigkeitsfeld) an Orten $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ aus. Diese entsprechen der Position eines Teilchens, welches sich zu einem gegebenen Zeitpunkt t_0 am Ort \mathbf{y} befand. Die Geschwindigkeit eines solchen Teilchens ergibt sich dann zu $\mathbf{U}(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t), t)$, ihre Änderung zu

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U}(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t), t) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t), t)}{\partial t} + (\mathbf{U}(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t), t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)}.$$

Die Grundgleichung für die Kontinuumsbeschreibung von Newton'schen inkompressiblen Fluiden ist die *Navier-Stokes-Gleichung*²:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t).$$

Diese Gleichung ergibt sich, wenn man die Gültigkeit des zweiten Newton'schen Gesetzes für jedes Fluidteilchen fordert. Auf der linken Seite der Gleichung steht die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit eines Teilchens, welches sich zum Zeitpunkt t am Ort \mathbf{x} befindet. Auf der rechten Seite sind anschaulich gesprochen die Kräfte (pro Masseneinheit) zu finden, die auf dieses Teilchen wirken.

Bezeichnet man mit L typische Längen- und mit T typische Zeitskalen der Strömung, so können den einzelnen Komponenten der Navier-Stokes-Gleichung entsprechende Einheiten zugeordnet werden.

¹Für die in Abschnitt 2.1.1 und 2.1.2 dargestellten Grundlagen vgl. z.B. [FVKW10] oder [Pop00].

²Bei der Notation der Navier-Stokes-Gleichung ist, ebenso wie bei allen Formeln in dieser Arbeit, die Einstein'sche Summenkonvention zu beachten.

Es handelt sich bei \mathbf{f} um sogenannte *Volumenkräfte* pro Masseneinheit (mit Volumenkräften bezeichnet man äußere Kräfte, unabhängig von der Verformung des Fluids), diese Kräfte haben also die Einheit $[\frac{L}{T^2}]$. Die Größe p ist in dieser Darstellung der Druck pro Volumen- und Masseneinheit, hat also die Einheit $[\frac{1}{L^2 T^2}]$. Durch Reskalieren der Navier-Stokes-Gleichung mit Potenzen der typischen Zeit- und Längenskalen erhält man die einheitenlose Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t).$$

Damit stellt sich die sogenannte *Reynoldszahl* $\text{Re} = \frac{L^2}{T \cdot \nu}$ als einziger Kontrollparameter heraus, Strömungen auf verschiedenen Skalen können also verglichen werden, solange ihre Reynoldszahl übereinstimmt. Die oben geforderte Inkompressibilität lässt sich mathematisch formulieren als:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0,$$

es folgt dann mit dem Reynold'schen Transporttheorem die Erhaltung der Dichte³. Bei der Navier-Stokes-Gleichung handelt es sich, wie man sieht, um eine deterministische, partielle Differentialgleichung. Zwei wichtige Eigenschaften sind jedoch herauszustellen, die dazu führen, dass Lösungen der Gleichung bei großen Reynoldszahlen sensitiv für Anfangsbedingungen sind, woraus sich eine schlechte Vorhersagbarkeit ergibt. Zum einen bezeichnet man die Navier-Stokes-Gleichung als *nichtlokal*, was auf den vom Druck abhängigen Term zurückzuführen ist. Dieser Term bewirkt, dass Änderungen des Geschwindigkeitsfeldes an einem Ort \mathbf{x}_1 nur langsam mit dem Abstand abklingende Änderungen an beliebigen Orten \mathbf{x}_2 des Systems hervorrufen.

Zum anderen enthält die Gleichung, wie man unschwer erkennen kann, mit dem zweiten Summanden der linken Seite einen nichtlinearen Term, den man oft als *advektiven Term* bezeichnet. Die Auswirkungen des nichtlokalen und des advektiven Terms werden umso bedeutender, je geringer der Einfluss des dissipativen Terms $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ist, welcher mit der reziproken Reynoldszahl gewichtet wird.

Da es letztlich der nichtlokale und der nichtlineare Term sind, welche zu starker Sensitivität der Lösungen für Anfangsbedingungen führen (*Chaos*), kann die Reynoldszahl als Maß dafür gesehen werden, wie *turbulent* eine Strömung ist.

2.1.2 Die Wirbeltransportgleichung

Aus der Navier-Stokes-Gleichung ergibt sich durch Rotationsbildung eine weitere wichtige Gleichung zur Beschreibung turbulenter Strömungen (insbesondere zweidimensionaler turbulenter Strömungen):

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \omega_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (2.1)$$

Hier wurde die *Wirbelstärke* bzw. *Vortizität* definiert als

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t),$$

Gleichung (2.1) wird als *Wirbeltransportgleichung* bezeichnet.

³Für das Reynold'sche Transporttheorem siehe z.B. [Alt94].

An dieser Stelle kann eine erste Besonderheit von zweidimensionalen Strömungen mathematisch aufgezeigt werden: Die Vortizität ω steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Ist $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ nun zweidimensional, so verschwinden zwei Komponenten der Vortizität und diese geht effektiv in eine eindimensionale Größe $\omega(\mathbf{x}, t)$ über. Eine direkte Folge dieser Tatsache ist, dass der erste Summand auf der rechten Seite der Wirbeltransportgleichung für alle Orte und Zeiten verschwindet:

$$\omega_3(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{u}(x_1, x_2, t) = 0. \quad (2.2)$$

Der hier verschwindende Summand wird als *Wirbelstreckungsterm* bezeichnet. Für zweidimensionale, nichtviskose Fluide ($\nu = 0$) ohne Antrieb ($\mathbf{f} = 0$) erhält man aus Gleichung (2.1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}, t) + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \omega(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Diese Gleichung besagt in einer Langrange'schen Interpretation, dass die Vortizität entlang der Trajektorie eines Fluidteilchens konstant bleibt. Bei dreidimensionaler Turbulenz kann bei gleichen Bedingungen (nichtviskos, kräftefrei) keine solche allgemeine Aussage getroffen werden.

2.2 Statistische Beschreibung

Auf Grund des oben (Abschnitt 2.1.1) beschriebenen, scheinbar chaotischen Verhaltens von Strömungen bei hohen Reynoldszahlen liegt es nahe, Theorien statistisch zu formulieren. Mathematisch bedeutet dies, dass untersuchte Größen wie das Geschwindigkeitsfeld in Zufallsvariablen übergehen, für die Wahrscheinlichkeitsdichten eingeführt werden können. Auch hier ist wieder ein Unterschied zwischen einer Euler'schen und einer Lagrange'schen Formulierung zu beachten. In der Euler'schen Formulierung betrachtet man, wie oben erwähnt, die Strömung in einem festen Koordinatensystem. Eine Wahrscheinlichkeitsdichte⁴ für eine Größe $A(\mathbf{x}, t)$, die am Ort \mathbf{x} zur Zeit t betrachtet wird (bei A könnte es sich zum Beispiel um die Geschwindigkeit oder die Vortizität handeln) hat also die Form $f_A(a; \mathbf{x}, t)$. Hier ist a eine *Wahrscheinlichkeitsraumvariable*, bei \mathbf{x} und t handelt es sich um *Parameter*. Im Folgenden sollen Wahrscheinlichkeitsraumvariablen und Parameter im Argument von Dichtefunktionen stets durch eine Abtrennung mit einem Semikolon unterschieden werden.

Das n -te Moment der Zufallsvariablen A ist

$$\langle A^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} da f_A(a; \mathbf{x}, t) a^n. \quad (2.4)$$

Man bezeichnet das zweite Moment $\langle A^2 \rangle$ als Erwartungswert von A . Für die vollständige Information über das System muss die Wahrscheinlichkeitsdichte an allen Orten bekannt sein. Betrachtete Zufallsvariablen an verschiedenen Orten sind im Allgemeinen nicht statistisch unabhängig.

⁴Im Folgenden werden Wahrscheinlichkeitsdichten auch als *pdf* für *probability density function* oder *Dichtefunktionen* bezeichnet.

Daher muss für eine statistische Beschreibung der Größen A_1, \dots, A_N an den Orten $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N$ eine im Allgemeinen nicht faktorisierende Verbundswahrscheinlichkeitsdichte $f_N(a_1, \dots, a_N; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)$ definiert werden.

Wie oben beschrieben, kann die scheinbare Zufälligkeit der angenommenen Werte von Größen wie der Geschwindigkeit auf eine Sensitivität für Anfangsbedingungen zurückgeführt werden. Dies motiviert den *Ensemblemittelwert* als *Schätzer* für Erwartungswerte der Form (2.4). Der Ensemblemittelwert ist eine Mittelung einer Größe über alle möglichen Realisierungen, welche sich in ihren Rand- und/oder Anfangsbedingungen unterscheiden. Angewendet wird dieser Mittelwert bei der Auswertung von Daten aus Experimenten oder DNS (**Direkte Numerische Simulation**).

Mit Hilfe der sogenannten *feinkörnigen pdf* lässt sich die Ableitung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung aus der Mittelung über Elementarereignisse beschreiben. Bei einer Messung von A erhält man der Statistik von A folgend ein eindeutiges Messergebnis. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Messergebnis ist dann die eines Elementarergebnisses: $\tilde{f}_A(a) = \delta(a - A)$. Diese feinkörnige pdf ist noch von der Zufallsvariablen A abhängig. Nun lässt sich der Prozess der Mittelung über alle Realisierungen mit Hilfe von (2.4) formalisieren. Man erhält für die tatsächliche pdf über die Definition der Deltafunktion:

$$f_A(a) = \langle \tilde{f}_A(a) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} da' f_A(a') \delta(a - a'). \quad (2.5)$$

Wie sich in späteren Teilen dieser Arbeit herausstellen wird, ist es zum Teil hilfreich, zunächst mit der feinkörnigen pdf zu argumentieren und später Mittelungen durchzuführen, um die tatsächliche Verteilung zu erhalten.

Bei einer Lagrange'schen statistischen Beschreibung möchte man außer den Werten von A auch die Trajektorie $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ eines betrachteten Teilchens statistisch beschreiben. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist daher von der Form $f_{A,\mathbf{X}}(a, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$.

Bei einem Zufallsprozess mit mehreren Zufallsvariablen ist eine interessante Frage, welche pdf einer oder mehrerer Variablen sich ergibt, wenn bestimmten Zufallsvariablen ein fester Wert zugeordnet wird. Diese pdf wird *bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte* genannt und ist beispielsweise für zwei Zufallsvariablen A, B definiert über⁵:

$$f_A(a|B = b) = \frac{f_{A,B}(a, b)}{f_B(b)}. \quad (2.6)$$

Mit dieser Definition der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte kann ein weiterer Satz hergeleitet werden, der in Abschnitt 4.2 eine Rolle spielen wird. Allgemein gilt bei zwei Zufallsvariablen für den Zusammenhang zwischen der Verbundswahrscheinlichkeitsdichte und der Wahrscheinlichkeitsdichte einer einzelnen Zufallsvariablen:

$$f_A(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{A,B}(a, b) db.$$

Setzt man hier nun Gleichung (2.6) ein, so erhält man den Zusammenhang:

$$f_A(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(a|B = b) f_B(b) db. \quad (2.7)$$

Diese Gleichung lässt sich auf beliebig viele Zufallsvariablen erweitern.

⁵Die folgenden Gleichungen sind entnommen aus [Pop00].

2.3 Die Richardson-Kaskade und K41

Eine bedeutende phänomenologische Theorie zur Turbulenz wurde von Richardson in einem 1922 veröffentlichten Artikel [Ric22] geliefert. Dabei wurde keine Ableitung aus der Navier-Stokes-Gleichung durchgeführt, den Überlegungen liegen in erster Linie experimentelle Beobachtungen zu Grunde.

In der sogenannten *Richardson-Kaskade* wird der Turbulenz auf großen Skalen Energie zugeführt. Diese Energie wird durch Zerfall größerer Wirbel in kleinere Wirbel auf immer kleinere Skalen weitergegeben, bis auf den kleinsten Skalen der Einfluss der Viskosität ν derart groß ist, dass die Energie dissipiert wird. Diese Vorstellung von einer Energiekaskade wurde von Kolmogorov in seiner im Folgenden mit *K41* bezeichneten Theorie aufgegriffen und erweitert. Auch bei K41 handelt es sich um eine phänomenologische Theorie, welche nicht formal aus der Navier-Stokes-Gleichung abgeleitet wurde. Zum Verständnis von Kolmogorovs Theorie ist es hilfreich, zunächst Symmetrien von Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung für den Fall zu betrachten, dass Randbedingungen keinen Einfluss nehmen. Der Argumentation von [Fri95] folgend, werden hierzu periodische Randbedingungen angenommen, betrachtet wird ein System mit Seitenlängen L . In diesem Fall sind die Lösungen $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ der Navier-Stokes-Gleichung invariant unter folgenden Operationen⁶:

- Translation : $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \rho$, $\rho \in \mathbb{R}^3$
- Zeitliche Verschiebung : $t \rightarrow t + \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau \geq -t$
- Rotation : $\mathbf{x}, \mathbf{u} \rightarrow U\mathbf{u}, U\mathbf{x}$, $U \in SO(3)$ (nur für $L \rightarrow \infty$)
- Reskalierung : $t, \mathbf{u}, \mathbf{x} \rightarrow \lambda^{1-h}t, \lambda\mathbf{r}, \lambda^h\mathbf{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $h \in \mathbb{R}$.

Als Motivation für Kolmogorovs Theorie kann man nun die Annahme ansehen, dass die oben genannten Symmetrien zwar durch Randbedingungen gebrochen, jedoch auf kleinen Skalen zum Teil in einem statistischen Sinne wiederhergestellt werden. Es wird von Turbulenz ausgegangen, der auf großen Skalen L Energie zugeführt wird, welche dann im Sinne der Richardson-Kaskade sukzessive auf kleinere Skalen übertragen wird, bis sie auf einer Skala η in Wärme dissipiert wird.

Für dieses System stellt Kolmogorov folgende Hypothesen auf⁷:

Hypothese der lokalen Isotropie

Auf hinreichend kleinen Skalen $l \ll L$ und bei hinreichend großen Reynolds-Zahlen $Re \rightarrow \infty$ kann die turbulente Strömung als im statistischen Sinne *isotrop* (rotationsinvariant) und *homogen* (translationsinvariant) angesehen werden.

Erste Ähnlichkeitshypothese

Unter den gleichen Bedingungen wie bei der vorangehenden Hypothese zeigen die Statistiken der Bewegung lediglich eine Abhängigkeit von der mittleren Dissipationsrate ε , der Viskosität ν und der Längenskala l und haben eine universelle Form.

⁶Die Formulierung der Symmetrien ist entnommen aus [Fri95].

⁷Die Hypothesen sind hier frei formuliert. Die Formulierung orientiert sich grundsätzlich an [Pop00].

Zweite Ähnlichkeitshypothese Auf hinreichend kleinen ($l \ll L$) aber auch hinreichend großen Skalen ($l \gg \eta$), stets im Grenzfall $Re \rightarrow \infty$, sind die Statistiken der Bewegung nur abhängig von der mittleren Dissipationsrate ε und der Längenskala l und haben eine universelle Form.

Der Skalenbereich, auf den die Gültigkeit dieser zweiten Ähnlichkeitshypothese eingeschränkt ist, wird als *Inertialbereich* bezeichnet. Hier sind nach der Hypothese die Effekte von Randbedingungen verschwunden, die Dissipation hat jedoch nur einen unwesentlichen Einfluss. Im Skalenbereich mit $l \approx \eta$ spielt, wie oben beschrieben, die Energiedissipation eine entscheidende Rolle, daher wird dieser Skalenbereich als *Dissipationsbereich* bezeichnet.

Dabei sind alle in den Hypothesen vorkommenden statistischen Eigenschaften über ihre Gültigkeit für die N-Punkt Verteilung von Geschwindigkeitsinkrementen

$$v = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{l}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

definiert. Von besonderem Interesse ist die Anwendung der Kolmogorov'schen Hypothesen auf die Statistik der sogenannten *longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente*. Das Euler'sche longitudinale Geschwindigkeitsinkrement δv_{\parallel} ist definiert als:

$$\delta v_{\parallel}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = (\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Betrachtet man nun die longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente im Inertialbereich der vollentwickelten Turbulenz, so ist nach der Hypothese der lokalen Isotropie die Dichtefunktion lediglich abhängig vom Abstand r , sowie von der mittleren Dissipationsrate ε . Unter Anwendung der zweiten Ähnlichkeitshypothese lässt sich nun zeigen, dass die Dichtefunktion von der Form (vgl. hierzu [AFHF10])

$$f(\delta v_{\parallel}; r) = \frac{1}{(r\varepsilon)^{1/3}} g\left(\frac{\delta v_{\parallel}}{(r\varepsilon)^{1/3}}\right) \quad (2.8)$$

ist. Eine Aussage über die funktionale Form von $g(x)$ lässt sich aus den Kolmogorov'schen Hypothesen nicht treffen. Experimentell wurden in dreidimensionaler Turbulenz Abweichungen der Statistiken von Geschwindigkeitsinkrementen von der Form (2.8) gefunden. Dieses Phänomen wird als *Intermittenz* bezeichnet.

Eine weitere Folgerung ist, dass das n -te Moment von δv_{\parallel} , die sogenannte *Strukturfunktion n-ter Ordnung* im Inertialbereich die Skalenabhängigkeit

$$S^n := \langle \delta v_{\parallel}^n \rangle \sim (\varepsilon r)^{n/3}$$

besitzt. Für homogene isotrope Turbulenz lässt sich direkt aus der Navier-Stokes-Gleichung ableiten, dass für die Strukturfunktion dritter Ordnung gilt:

$$S^3(r) = -\frac{4}{5}\varepsilon r.$$

Diese Beziehung wird als $-\frac{4}{5}$ -Gesetz bezeichnet. In diesem Sinne handelt es sich bei der allgemeinen Vorhersage von Kolmogorov über die Strukturfunktionen n -ter Ordnung um eine Extrapolation eines exakten Resultats⁸. Für zweidimensionale Turbulenz (vgl. [Ber99]) ändert sich der Vorfaktor von S^3 und es ist:

$$S^3 = \frac{3}{2}\varepsilon r. \quad (2.9)$$

⁸Der Begriff *Extrapolation* in diesem Zusammenhang wird verwendet in [AFHF10].

2.4 Energietransport und inverse Kaskade

Von großem Interesse bei der Beschreibung von Turbulenz ist, wie man auch an den phänomenologischen Theorien der Richardson-Kaskade und an K41 erkennen kann, der Energietransport. Hier sollen nun Ergebnisse über den Energietransport aufgezeigt werden, die sich aus der Navier-Stokes-Gleichung ergeben. Insbesondere zeigt sich im Bezug auf den Energietransport eine besondere Eigenschaft von zweidimensionaler Turbulenz, es stellt sich hier die sogenannte *inverse Kaskade* ein. Es handelt sich dabei um eine Energiekaskade ähnlich der Richardson-Kaskade, wobei die Energie von kleinen zu großen Skalen transportiert wird. Dies steht in engem Zusammenhang zur in zweidimensionaler Turbulenz erhaltenen *Enstrophie*. Im Folgenden wird stets ein Fluid mit der konstanten Dichte $\rho = 1$ betrachtet.

2.4.1 Energietransport

Die kinetische Energie (pro Volumeneinheit) an einer Stelle \mathbf{x} ergibt sich zu $e_{kin}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t)$. Aus der Navier-Stokes-Gleichung folgt eine Bilanzgleichung für die Energiedichte e_{kin} :⁹

$$\frac{\partial e_{kin}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t). \quad (2.10)$$

Dabei handelt es sich um eine Kontinuitätsgleichung mit einem Quellterm $q(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \epsilon(\mathbf{x}, t)$, der sich aus einem von der Volumenkraft erzeugten Anteil und der *lokalen Energiedissipationsrate* $\epsilon = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$ zusammensetzt.

Betrachtet man nun homogene oder insbesondere homogene isotrope Turbulenz, so ist die gemittelte kinetische Energie pro Einheitsvolumen $E_{kin} = \langle \mathbf{u}^2(t) \rangle$ unabhängig vom Ort und die Transportterme in (2.10) verschwinden im Mittel. Wird keine Energie über eine äußere Kraft erzeugt, so erhält man für die mittlere kinetische Energie die einfache Beziehung

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = -\varepsilon(t),$$

wobei $\varepsilon = \langle \epsilon \rangle$ die mittlere Energiedissipationsrate ist, welche auch in der bereits erläuterten K41-Theorie eine entscheidende Rolle spielt. Die mittlere kinetische Energie ist also für den nichtdissipativen Fall ohne äußere Kräfte eine Erhaltungsgröße. Sowohl im homogenen als auch im nichthomogenen Fall ist die Gesamtenergie des betrachteten Systems unter eben genannten Bedingungen erhalten.

Bei zweidimensionaler Turbulenz lässt sich aus der Wirbeltransportgleichung (2.3) durch Multiplikation mit ω und Mittelung eine weitere Erhaltungsgröße herleiten. Auch für die mittlere Enstrophie pro Einheitsvolumen $\Omega(t) = \langle \omega^2(t) \rangle$ gilt im Fall $\nu = 0$ und $\mathbf{f} = \mathbf{0}$:

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0.$$

⁹Für die folgenden Gleichungen vgl. z.B. [AFHF10] und [Pop00].

Im Folgenden soll nun homogene isotrope Turbulenz angenommen werden, wie sie nach Kolmogorovs Hypothesen im Inertialbereich auftritt.

Unter diesen Bedingungen, bei denen im Mittel kein Energietransport zwischen verschiedenen Orten des Systems stattfindet, ist es interessant, den Energietransport zwischen verschiedenen Skalen zu betrachten. Um wichtige Größen einzuführen seien hier zunächst einige Resultate für den Energietransport zwischen verschiedenen Skalen in der dreidimensionalen Turbulenz aufgeführt. Dabei orientiert sich die Darstellung im Wesentlichen an [Fri95] und [Pop00].

Über eine Darstellung durch Fouriertransformationen können Größen angegeben werden, zu denen nur ein bestimmter Wellenzahlbereich beiträgt. So kann zum Beispiel ξ_K definiert werden als die mittlere Energie der Turbulenz, die sich aus Beiträgen von Skalen $l \leq l_K \sim \frac{1}{K}$ ergibt. Für diese *kumulative Energie* lässt sich eine Bilanzgleichung angeben:

$$\frac{d\xi_K}{dt} = -\Pi_K - 2\nu\Omega_K + F_K. \quad (2.11)$$

Dabei ist Ω_K die *kumulative Enstrophe* von Moden mit $k \leq K$, F_K ist die durch äußere Kräfte injizierte Energie in eben diese Moden und Π_K ist der Energiefloss von Moden mit $k \leq K$ zu Moden mit $k > K$.

Da ξ_K , wie oben beschrieben, die gesamte Energie aller Moden mit $k \leq K$ ist, besteht ein Zusammenhang zu einer sogenannten *spektralen Energiedichte* $E(k)$ über

$$\xi_K = \xi(K) = \int_0^K E(k) dk,$$

womit dann $E(k) = \frac{\partial \xi_k}{\partial k}$ folgt. Ersetzt man in der Bilanzgleichung (2.11) der Nomenklatur wegen K durch k und leitet dann nach k ab, so folgt eine Bilanzgleichung für die spektrale Energiedichte:

$$\frac{\partial E(k)}{\partial k} = T(k) + F(k) - 2\nu k^2 E(k). \quad (2.12)$$

Der Term $T(k) = -\frac{\partial \Pi_k}{\partial k}$ wird als *Energietransfer* bezeichnet und beschreibt genauso wie Π_k den Energietransport zwischen verschiedenen Moden, welcher auf nichtlineare und nichtlokale Effekte zurückzuführen ist. Sowohl bei drei- als auch bei zweidimensionaler Turbulenz kann der Energietransfer mit der longitudinalen Strukturfunktion dritter Ordnung in Verbindung gebracht werden. Falls S^3 verschwindet, findet kein Transfer zwischen verschiedenen Skalen statt. Daher ist die Überprüfung der Endlichkeit von S^3 ein wichtiges Konsistenzkriterium für Modelle, die Geschwindigkeitsinkremente in der inversen Kaskade beschreiben.

Es lässt sich ebenfalls ablesen, dass für die über das Volumen gemittelte Enstrophe $\Omega = \Omega_{K=\infty}$ des Systems gilt:

$$\Omega = \int_0^\infty dk k^2 E(k). \quad (2.13)$$

Mit Hilfe der Theorie K41 findet man, dass innerhalb des oben beschriebenen Inertialbereichs bei dreidimensionaler Turbulenz für die spektrale Energiedichte gilt¹⁰:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad \forall k \in \mathbb{K}.$$

Die Tatsache, dass die spektrale Energiedichte im Fall von homogener und isotroper Turbulenz mit $k^{-5/3}$ skaliert, lässt sich auch exakt aus der Navier-Stokes-Gleichung herleiten. Außerdem erhält man für alle k , welche dem Inertialbereich zuzuordnen sind, im Rahmen der K41 Theorie (also insbesondere nur unter der Bedingung, dass $Re \rightarrow \infty$ im Inertialbereich; vgl. [Fri95]):

$$\Pi_k = \varepsilon.$$

Die Energie, welche auf kleinsten Skalen dissipiert wird, wird also im Inertialbereich von größere auf immer kleinere Strukturen übertragen.

2.4.2 Die inverse Kaskade

Eine andere Situation ergibt sich im Fall zweidimensionaler Turbulenz. Wie gezeigt wurde, verschwindet in diesem Fall der Wirbelstreckungsterm in Gleichung (2.1), was dazu führt, dass bei idealen Flüssigkeiten und homogener Turbulenz die mittlere Enstrophie eine Erhaltungsgröße ist, ebenso wie die Gesamtenstrophe.

Daraus folgt, wie zunächst Fjørtoft an einem einfachen Modell zeigen konnte, dass der Energiefluss bei zweidimensionaler Turbulenz von kleinen Skalen in Richtung großer Skalen verläuft. Die Grundidee hierbei ist die Folgende (vgl. [Kam09]):

Findet ein Energiefluss von $\Delta E_1 > 0$ von einer Mode k_0 in eine etwas größere Mode k_1 statt, so führt dies nach (2.13) zu einer Erhöhung der Enstrophie um $\tilde{k}_1^2 \Delta E_1$ mit $\tilde{k}_1 \in [k_0, k_1]$. Um die Erhaltung der Enstrophie zu gewährleisten, muss diese durch einen Energiefluss $\Delta E_2 < 0$ von k_0 nach $k_2 < k_0$ wieder erniedrigt werden.

Da jedoch gelten muss $\tilde{k}_1^2 \Delta E_1 = -\tilde{k}_2^2 \Delta E_2$ und $\tilde{k}_1^2 > \tilde{k}_2^2$ folgt in der Gesamtbilanz ein Energiefluss zu kleineren Wellenzahlen, also zu größeren Skalen.

In einer auf die Überlegungen von Fjørtoft aufbauenden Arbeit [Kra67] verfeinerte Kraichnan die Theorie der inversen Kaskade weiter. Als System betrachtete Kraichnan den Inertialbereich einer Turbulenz in einer Box mit periodischen Randbedingungen. In seiner Arbeit konnte Kraichnan zeigen, dass für ein solches System zwei spektrale Energiedichten $E(k)$ im Inertialbereich möglich sind. Zum einen besteht die Möglichkeit einer Enstrophiekaskade von niedrigen Moden zu höheren. In diesem Fall ist die Energiekaskade vollständig unterdrückt ($\Pi_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{K}$), für die spektrale Energiedichte folgt

$$E(k) = C\chi^{2/3}k^{-3}.$$

Dabei ist χ , analog zur mittleren Energiedissipationsrate, die mittlere Enstrophiedissipationsrate.

¹⁰ \mathbb{K} sei die Menge aller Wellenzahlen k , die dem Inertialbereich zuzuordnen sind.

Zum anderen besteht die Möglichkeit einer inversen Energiekaskade ($\Pi_k < 0 \forall k \in \mathbb{K}$). In diesem Regime ist die Enstrophiekaskade unterdrückt und die spektrale Energiedichte skaliert nach

$$E(k) = A\varepsilon^{2/3}k^{-5/3},$$

also wie es von der K41-Theorie für den Inertialbereich sowohl für drei- als auch für zweidimensionale Turbulenz vorausgesagt wird.

2.5 Das Richardson-Gesetz

2.5.1 Die Arbeit von Richardson

Eine frühe wichtige Arbeit [Ric26] zu Teilchendispersion in turbulenten Strömungen wurde vom Meteorologen und Physiker Lewis F. Richardson geliefert, der darin eine statistische Theorie für die Dispersion von Teilchenpaaren in der Erdatmosphäre formulierte. Die wesentlichen Aspekte der Argumentation und die Ableitung des sogenannten Richardson-Obukhov-Gesetzes sollen hier kurz aufgezeigt werden.

Die Betrachtung von Teilchenpaaren wird als vorteilhaft gegenüber der Betrachtung von einzelnen Teilchen angesehen. Bei der Betrachtung von Teilchenpaaren werden die Effekte von Wirbeln berücksichtigt, die im gleichen Skalenbereich auftreten wie der Teilchenabstand. Betrachtet man jedoch die Dispersion eines einzelnen Teilchens über einen nicht zu großen Zeitraum, so erkennt man nur die Effekte der molekularen Dispersion. Gemeint mit molekularer Dispersion ist jene Dispersion, die unabhängig von Strömungen durch zufällige Bewegung der Moleküle stattfindet (Brown'sche Bewegung).

Betrachtet werden stets eindimensionale Verteilungen, welche auf die Teilchenzahl normiert sind. Richardson konnte in seiner Arbeit zeigen, dass unter der Annahme, dass die Dichtefunktion $\nu(x, t)$ der Teilchen einem Fick'schen Gesetz gehorcht, dies auch für die Dichtefunktion $q(l, t)$ der Abstände l zwischen zwei Teilchen gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}q(l, t) = F \cdot \frac{\partial^2}{\partial l^2}q(l, t).$$

Dabei ergibt sich der Diffusionskoeffizient F aus dem Koeffizienten der entsprechenden Gleichung für $\nu(x, t)$ nach dem Zusammenhang $F = 2 \cdot K$.

Dieses erste Ergebnis, welches sich unter der Annahme Fick'scher Diffusion ergibt, sollte nun an experimentelle Ergebnisse angepasst werden. Um die beobachteten unterschiedlichen Diffusionsgeschwindigkeiten bei verschiedenen Abständen zu berücksichtigen, führt Richardson einen skalenabhängigen Diffusionskoeffizienten $F(l)$ ein und die Fick'sche Gleichung ändert sich zu:

$$\frac{\partial}{\partial t}q(l, t) = \frac{\partial}{\partial l}F(l)\frac{\partial}{\partial l}q(l, t). \quad (2.14)$$

Eine Ableitung dieses modifizierten Gesetzes wird nicht geliefert, eine Modifikation des Fick'schen Gesetzes durch einen ortsabhängigen Diffusionskoeffizienten würde zu einem falschen Ergebnis führen, da die Diffusionsgeschwindigkeit vom Abstand zweier Teilchen abhängt, jedoch nicht in einer allgemeinen Art und Weise vom Ort.

Die Skalenabhängigkeit des Diffusionskoeffizienten ermittelte Richardson experimentell aus Beobachtungen von Dispersionen auf verschiedenen Skalen. Das Ergebnis war ein Potenzgesetz:

$$F(l) = \epsilon \cdot l^{2/3}.$$

Dabei ist ϵ in diesem Fall ein auf nicht zu großen Skalenbereichen konstanter Faktor der Größenordnung $\epsilon = 0,4\text{cm}^{2/3}/\text{sec}$. Die Gleichung, welche nach Einsetzen dieses Resultats in (2.14) folgt, entspricht formal einer bereits von Fourier behandelten Gleichung zur Wärmeleitung in einem homogenen Festkörper. Die Lösung für den Fall, dass die Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ an einem Punkt lokalisiert sind (die Dichtefunktion $q(l)$ entspricht also zu $t = 0$ einem δ -Peak) lautet:

$$q(l,t) = A \cdot \left(\frac{4t\epsilon}{9} \right)^{-3/2} \cdot e^{\frac{-9l^2/3}{4t\epsilon}}.$$

Dabei ist A eine Konstante, welche sich aus der Anzahl der Teilchen ergibt. Bildet man das zweite zentrale Moment dieser Dichtefunktion, so erhält man für den zeitlichen Verlauf des mittleren quadratischen Abstands zweier Teilchen:

$$\langle l^2(t) \rangle = \frac{140}{243} \epsilon^3 \cdot t^3. \quad (2.15)$$

Damit verläuft die Diffusion von Teilchen in Turbulenz nach Richardson *superdiffusiv*, dass heißt der relative Abstand zweier Teilchen ändert sich im Mittel schneller als linear in der Zeit.

An dieser Stelle soll noch kurz auf die experimentelle Gewinnung der Diffusionskoeffizienten $F(l)$ für unterschiedliche l eingegangen werden. Richardson ermittelte $F(l)$ mit dem Zusammenhang $F(l) = 2K$ aus dem Koeffizienten K , welcher im Fick'schen Gesetz für die Dichtefunktion ν auftritt. Außerdem setzte er für die entsprechende Skala $l = \sigma$, wobei σ^2 die Varianz der Verteilung $\nu(x,t)$ ist. Die Annahme $F(l) = 2K$ ist im Prinzip nur für konstante F gültig. Sie erweist sich bei Untersuchung mit dem oben aufgezeigten Ergebnis für die Varianz (2.15) als selbstkonsistent.

2.5.2 Erweiterungen von Richardsons Theorie

Zunächst kann die von Richardson für eindimensionale Diffusion abgeleitete Gleichung (2.14) auf eine pdf $\rho(\mathbf{r},t)$ für den Abstand zweier Teilchen im dreidimensionalen Raum übertragen werden. Im Fall isotroper Turbulenz gilt dann (siehe zum Beispiel [BS02]):

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 K(r) \rho(\mathbf{r},t).$$

Im Folgenden wird nun die Teilchendispersion im Inertialbereich der vollentwickelten Turbulenz im Sinne von K41 betrachtet. Obukhov folgerte für die Dispersion in diesem Bereich, dass der Diffusionskoeffizient auf Grund der zweiten Ähnlichkeitshypothese nur von der mittleren Energiedissipationsrate ε und von r abhängen darf¹¹. Da $K(r)$ außerdem dimensionslos ist, folgt aus einer Dimensionsanalyse

$$K(r) = k_0 \varepsilon^{1/3} r^{4/3}$$

und somit ein Skalierungsverhalten des Diffusionskoeffizienten, welches Richardsons Ergebnis stützt.

¹¹Vgl. [BS02].

Mit dem von Obukhov hergeleiteten Koeffizienten folgt die gleiche Zeitabhängigkeit des mittleren Abstands zweier Teilchen wie in 2.15, weshalb der Zusammenhang

$$\langle r^2 \rangle \sim t^3$$

oft als Richardson-Obukhov-Gesetz (z.B. in [Bak08]) bezeichnet wird. Weitere Überlegungen zur Teilchendispersion wurden von Batchelor angestellt, der genauso wie Richardson eine Diffusionsgleichung mit nichtkonstantem Diffusionskoeffizienten annahm. Batchelor nimmt in seiner Theorie jedoch einen Diffusionskoeffizienten $D(t) \sim t^2$ an, welcher von der Zeit abhängt¹². Damit ergibt sich an Stelle von (2.14) die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial q(l)}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 q(l)}{\partial l^2}.$$

Mit einer δ -Verteilung als Anfangsbedingung erhält man hier als Lösung eine Gauß'sche Dichtefunktion $q(l)$ ¹³.

¹²Vgl. [Bak08]

¹³Eine experimentelle Untersuchung, die für zweidimensionale Turbulenz durchgeführt wurde [JPT98], stützt die nicht Gauß'sche Verteilung, wie sie von Richardson hergeleitet wurde.

3 Statistik der Vortizität in der inversen Kaskade

Da sich die weiteren Teile dieser Arbeit auf Resultate in [FVKW10] beziehen, soll als Grundlage für explizit ausgeführte Ableitungen die dort betrachtete zweidimensionale Wirbeltransportgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\omega(\mathbf{x}, t) = L(-\Delta_{\mathbf{x}})\omega(\mathbf{x}, t) + F_1(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

dienen. Im Wesentlichen entspricht diese der Gleichung (2.1), hier wurde jedoch der Dissipationsterm durch den Operator $L(-\Delta_{\mathbf{x}})$ ersetzt, welcher für Dissipation auf großen Skalen sorgt. Dies führt dazu, dass die Energie, welche durch den Kraftterm F_1 , auf kleinen Skalen in das System injiziert wird, auf großen Skalen dissipiert wird. Daraus ergibt sich der Aufbau einer inversen Kaskade mit einem Inertialbereich, in dem der Energiedissipationsfluss konstant ist (vgl. Abschnitt 2.4.2).

3.1 Die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie

In diesem Abschnitt soll die statistische Behandlung der zweidimensionalen Wirbeltransportgleichung (2.1) im Sinne der sogenannten *Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie* dargestellt werden¹. Um ein System statistisch zu beschreiben, wird die Verbundswahrscheinlichkeitsdichte $f(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)$ der Vortizität $\omega(\mathbf{x}_i)$ an N verschiedenen Punkten \mathbf{x}_i $i = 1, \dots, N$ betrachtet. Beim Übergang zum Kontinuum ($N \rightarrow \infty$) wäre hiermit die Turbulenz vollständig beschrieben, jedoch ist die Kenntnis von f an endlich vielen Punkten bereits ein befriedigendes Ergebnis.

3.1.1 Evolutionsgleichung der feinkörnigen pdf

In Abschnitt 2.2 wurde eine eindimensionale pdf gleichgesetzt mit dem Ensemblemittelwert über die feinkörnige pdf der Zufallsvariablen. Im mehrdimensionalen Fall, also insbesondere für die betrachtete pdf $f(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)$, kann eine Darstellung über die feinkörnige pdf in analoger Weise geschehen:

$$f(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = \left\langle \prod_{i=1}^N \delta(\omega(\mathbf{x}_i) - \omega_i) \right\rangle =: \langle \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \rangle.$$

¹Die Ableitungen sind in ähnlicher Form auch in [Voß09] für eine Ein- und Zwei-Punkt pdf der Vortizität zu finden. Grundlage für die Ableitung ist die Arbeit [Lun67]. Hier soll eine in [FVKW10] aufgeführte Entwicklungsgleichung für eine N -Punkt pdf explizit hergeleitet werden.

Auch hier kann man als Begründung ansehen, dass, bei Ersetzen des Ensemblemittelwertes durch einen Erwartungswert, nach den Eigenschaften der δ -Funktion tatsächlich gilt:

$$f(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N d\omega'_i \delta(\omega'_i - \omega_i) f(\{\omega'_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t).$$

Es kann nun eine Evolutionsgleichung für die feinkörnige pdf gefunden werden. Betrachtet man zunächst eine eindimensionale pdf, also $\tilde{f}(\omega_1; \mathbf{x}_1, t) = \delta(\omega(\mathbf{x}_1, t) - \omega_1)$, so gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}(\omega_1; \mathbf{x}_1, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \delta(\omega(\mathbf{x}_1, t) - \omega_1) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{f}(\omega_1; \mathbf{x}_1, t)}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}_1, t) \right) \frac{\partial}{\partial \omega_1} \delta(\omega(\mathbf{x}_1, t) - \omega_1) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{f}(\omega_1; \mathbf{x}_1, t)}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}_1, t) \right) \frac{\partial}{\partial \omega_1} \tilde{f}(\omega_1; \mathbf{x}_1, t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass für die Dirac'sche Deltafunktion gilt:

$$\frac{\partial}{\partial b} \delta(a - b) = - \frac{\partial}{\partial a} \delta(a - b).$$

Möchte man den Zusammenhang (3.2) auf eine N-Punkt feinkörnige pdf verallgemeinern, so erhält man analog:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) &= - \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}_i, t) \right) \frac{\partial}{\partial \omega_i} \right] \prod_{i=1}^N \delta(\omega(\mathbf{x}_i, t) - \omega_i) \\ &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left[\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}_i, t) \right] \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

In dieser Darstellung von $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)$ tauchen zeitliche Ableitungen der Vortizität auf ($\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}_i, t)$), welche der Wirbeltransportgleichung genügen müssen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}_i, t) = -\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} \omega(\mathbf{x}_i, t) + L(-\Delta_{\mathbf{x}_i}) \omega(\mathbf{x}_i, t) + F(\mathbf{x}_i, t).$$

Es folgt dann für die Evolutionsgleichung (3.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \omega_i} [\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} (\omega(\mathbf{x}_i, t)) - L(-\Delta_{\mathbf{x}_i})(\omega(\mathbf{x}_i)) - F(\mathbf{x}_i)] \prod_{i=1}^N \delta(\omega(\mathbf{x}_i, t) - \omega_i). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Auch für den Gradienten der feinkörnigen pdf gilt völlig analog zu Gleichung (3.2):

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) &= \nabla_{\mathbf{x}_i} \prod_{i=1}^N \delta(\omega(\mathbf{x}_i, t) - \omega_i) \\ \Leftrightarrow \nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) &= - \frac{\partial}{\partial \omega_i} [\nabla_{\mathbf{x}_i} (\omega(\mathbf{x}_i, t))] \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t). \end{aligned}$$

Diese Gleichheit gilt insbesondere also für jede Komponente des Gradienten und lässt sich somit in Gleichung (3.4) identifizieren. Man erhält dann schließlich:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) - \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial \omega_i} \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} (\omega(\mathbf{x}_i, t)) \right] \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) + \left[\sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) \right] \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \\
 &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \omega_i} [L(-\Delta_{\mathbf{x}_i})(\omega(\mathbf{x}_i, t)) + F(\mathbf{x}_i, t)] \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Hier wurde in der zweiten Zeile die Gleichheit der beiden Operatoren

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla$$

ausgenutzt, welche, wie man einfach sieht, auf Grund der Inkompressibilität ($\frac{\partial}{\partial x_i} u_i(\mathbf{x}, t) = 0$) gilt. Nun kann der Ensemblemittelwert der gesamten Evolutionsgleichung (3.5) gebildet werden, um so eine Gleichung für die pdf $f(\cdot)$ zu ermitteln. Dabei vertauscht der Ensemblemittelwert mit allen in (3.5) auftretenden Ableitungen. Als weiteres Zwischenergebnis liefert die Bildung des Ensemblemittelwerts (hier wird die Abkürzung $\tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = \tilde{f}(\cdot)$ verwendet):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} f(\cdot) + \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_i} \cdot \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) \tilde{f}(\cdot) \rangle \\
 &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left[\langle L(-\Delta_{\mathbf{x}_i}) \omega(\mathbf{x}_i, t) \tilde{f}(\cdot) \rangle + \langle F(\mathbf{x}_i, t) \tilde{f}(\cdot) \rangle \right].
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Hier erkennt man eine Manifestation des *Schließungsproblems* der Turbulenz: Die auftretenden Erwartungswerte können nicht aus der Wirbeltransportgleichung bzw. Navier-Stokes-Gleichung ermittelt werden.

Einen Fortschritt erreicht man, wie im Folgenden gezeigt werden soll, durch das Einführen bedingter Erwartungswerte, welche dann aus DNS-Daten geschätzt werden können.

3.1.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Allgemein wurden bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten bereits in Abschnitt 2.2 eingeführt. Einer Herleitung von [Pop00] folgend soll nun gezeigt werden, in welchem Zusammenhang bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten mit den in Gleichung (3.6) auftauchenden, nicht geschlossenen Mittelwerten stehen.

Man betrachtet dabei eine allgemeine Zufallsvariable $A(\mathbf{x}, t)$ (vektorwertig oder skalar) und die oben auftretende feinkörnige pdf für die Vortizitäten.

Der Ensemblemittelwert wird durch den mathematischen Mittelwert ersetzt:

$$\begin{aligned}\langle A(\mathbf{x}, t) \prod_{i=1}^N \delta(\omega(\mathbf{x}_i, t) - \omega_i) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N d\omega'_i \delta(\omega'_i - \omega_i) p(a, \{\omega'_i\}; t) a da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(a, \{\omega_i\}) a da.\end{aligned}$$

Nun kann die Verbundswahrscheinlichkeitsdichte über die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit faktorisiert werden, und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\langle A(\mathbf{x}, t) \tilde{f}(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} p(a | \{\omega(\mathbf{x}_i, t)\} = \{\omega_i\}) a da f(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \\ &= \langle A(\mathbf{x}, t) | \{\omega(\mathbf{x}_i, t)\} = \{\omega_i\} \rangle f(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t).\end{aligned}\quad (3.7)$$

Hier taucht ein *bedingter Erwartungswert* auf, der definiert ist durch:

$$\langle A | B = b \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(a | B = b) a da.$$

Die Relation (3.7) kann jetzt für alle in Gleichung (3.6) auftretenden Mittelwerte ausgenutzt werden, woraus sich eine Evolutionsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(\cdot)$ ergibt. Es wird die Abkürzung $\langle A(\mathbf{x}, t) | \{\omega(\mathbf{x}_i, t)\} = \{\omega_i\} \rangle = \langle A(\mathbf{x}, t) | \{\omega_i\} \rangle$ verwendet:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_i} \cdot \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) | \{\omega_i\} \rangle \right] f(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \\ &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \omega_i} [\langle L(-\Delta_{\mathbf{x}_i}) \omega(\mathbf{x}_i, t) | \{\omega_i\} \rangle + \langle F(\mathbf{x}_i, t) | \{\omega_i\} \rangle] f(\{\omega_i\}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t).\end{aligned}\quad (3.8)$$

3.2 Vortizitätsinkremente

Die im vorherigen Abschnitt hergeleitete Gleichung wird nun in [FVKW10] für die Vortizität an zwei Orten $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ formuliert. Des Weiteren beschränkt sich die Betrachtung nun auf homogene und isotrope Turbulenz (also auf den Inertialbereich der inversen Kaskade). Die Forderung nach Isotropie und Homogenität führt zu

$$f(\omega_1, \omega_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = f(\omega_1, \omega_2; r, t).$$

Dies bedeutet, dass die Verbundswahrscheinlichkeitsdichte nicht mehr von den Orten \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 abhängt (Homogenität) und ebensowenig von der Orientierung der Orte zueinander (Isotropie). Lediglich eine Abhängigkeit vom Abstand der Orte ($r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$) bleibt bestehen.

Im stationären Fall nimmt dann Gleichung (3.8) die Form

$$[\nabla_{\mathbf{x}_1} \cdot \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) | \{\omega_i\} \rangle + \nabla_{\mathbf{x}_1} \cdot \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) | \{\omega_i\} \rangle] f(\omega_1, \omega_2; r) = \quad (3.9)$$

$$[\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, \omega_1, \omega_2)] f(\omega_1, \omega_2; r) = - \left[\frac{\partial}{\partial \omega_1} \mu(r, \omega_1, \omega_2) + \frac{\partial}{\partial \omega_2} \mu(r, \omega_1, \omega_2) \right] f(\omega_1, \omega_2; r) \quad (3.10)$$

an. Hierbei wurde ausgenutzt, dass für die Gradienten der Zusammenhang $\nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{x}_1} = -\nabla_{\mathbf{x}_1}$ gilt. Außerdem wurde die Differenz $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \omega_1, \omega_2)$ zwischen den bedingten Mittelwerten der Geschwindigkeit eingeführt. Die Summe zwischen bedingtem Mittelwert des Kraft- und des Dissipationsterms wurde in der Größe μ zusammengefasst, welche nur vom Abstand der beiden ortsfesten Punkte abhängt.

Schließlich kann ein Übergang zur Statistik von Vortizitätsinkrementen $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ durchgeführt werden. Aus Gleichung (3.10) erhält man unter Ausnutzung der Isotropie²:

$$\frac{\partial}{\partial r} V_r(r, \Omega) H(\Omega, r) = - \frac{\partial}{\partial \Omega} \mu(r, \Omega) H(\Omega, r).$$

Dabei ist $H(\Omega)$ bis auf einen von der Skala r abhängigen Vorfaktor die Dichtefunktion des Vortizitätsinkrements. V_r ergibt sich aus der radialen Komponente der oben eingeführten Größe \mathbf{v} . Diese partielle Differentialgleichung geht nun entlang sogenannter Charakteristiken im $\Omega - r$ -Raum in eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Zeit über. Die Bewegungsgleichungen dieser Charakteristiken können angegeben werden zu:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V_r(r, \Omega), \\ \dot{\Omega} &= \mu(r, \Omega). \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, können die bedingten Mittelwerte $V_r(r, \Omega)$ und $\mu(r, \Omega)$ nicht direkt aus der Navier-Stokes-Gleichung abgeleitet werden. Aus DNS-Daten kann eine Abhängigkeit dieser beiden Größen von dem Vortizitätsinkrement Ω bestimmt werden. Man erhält so:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= g(r) [\Omega^2 - \langle \Omega(r, t)^2 \rangle], \\ \dot{\Omega} &= \mu(r) \Omega. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dabei ist $g(r)$ eine in r oszillierende Funktion, deren Amplitude mit steigendem Abstand r abklingt.

²Für Details der Ableitung von den folgenden Ergebnissen sei auf [FVKW10] verwiesen.

4 Lagrange'sche Interpretation

Obwohl die Bewegungsgleichungen der Charakteristiken (3.11) sich aus einer Euler'schen statistischen Beschreibung (Beschreibung in einem ortsfesten Koordinatensystem) ergeben, können sie auch in einem Lagrange'schen Sinne interpretiert werden. In dieser Interpretation beschreiben die Gleichungen (3.11) eine einzelne Realisierung der zeitlichen Entwicklung des Abstands und des Vortizitätsinkrementes zweier Lagrange'scher Teilchen.

Im Rahmen einer statistischen Beschreibung sollte sich auch für diesen Prozess eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ergeben, die Bewegungsgleichungen für eine einzelne Realisierung können also nicht deterministisch sein. Aus dieser Überlegung ergibt sich der Ansatz, sowohl die bedingten Mittelwerte der Geschwindigkeitsinkremente als auch die bedingten Mittelwerte der Vortizitätsinkremente in einen stochastischen und einen deterministischen Anteil zu zerlegen. Zusätzlich motiviert wird dieser Ansatz dadurch, dass in Gleichung (3.1) eine stochastische und in der Zeit δ -korrelierte Kraft F_1 auftritt. Bei der Zerlegung folgt der deterministische Anteil dem zuvor ermittelten Skalierungsverhalten mit Ω .

$$\dot{r} = G(r) \left[\Omega^2 - \langle \Omega(r, t)^2 \rangle \right] + \eta(t), \quad (4.1)$$

$$\dot{\Omega} = -\gamma(r)\Omega + F(t). \quad (4.2)$$

Solche stochastischen Bewegungsgleichungen werden als *Langevin-Gleichungen* bezeichnet. Der nicht deterministische Anteil der Gleichung wird durch die stochastischen Kräfte η, F modelliert. Für jeden Zeitpunkt t sind diese Kräfte gaußverteilte Zufallsvariablen, außerdem sind die Kräfte δ -korreliert in der Zeit. Es gilt

$$\langle F(t_1)F(t_2) \rangle = Q(r)\delta(t_1 - t_2), \quad (4.3)$$

$$\langle \eta(t_1)\eta(t_2) \rangle = C(r)\delta(t_1 - t_2). \quad (4.4)$$

Insbesondere bedeutet dies, dass die Varianz der Zufallskräfte sich mit dem Abstand r ändert. Während Gleichung (4.1) mit Gleichung (4.2) gekoppelt ist, kann die Gleichung für die Vortizitätsinkremente mit der Näherung, dass γ und Q in r konstant sind, unabhängig von der Gleichung für den Abstand behandelt werden. Bei Gleichung (4.2) handelt es sich um die Langevin-Gleichung, welche in ihrer bekanntesten Anwendung eine einzelne Realisierung der Brown'schen Bewegung beschreibt.

Im Folgenden sollen zwei Ansätze verfolgt werden, die beiden Gleichungen zu behandeln. Zum einen kann unter Vernachlässigung der stochastischen Kraft η , versucht werden, die Momente der Zufallsgrößen r und Ω analytisch zu bestimmen. Zum anderen kann unter Verwendung der stationären Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche sich für Ω ergibt, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für $\dot{r} =: V$ bestimmt werden. Dabei wird der Abstand r als Parameter behandelt. Der erste Ansatz ist von großem Interesse, da bei der Berechnung des zweiten Moments von r im Rahmen der Lagrange'schen Interpretation ein Abgleich mit dem Richardson-Gesetz durchgeführt werden kann. Wie sich herausstellen wird, sind die Berechnungen dieser Momente jedoch sehr aufwendig.

4.1 Momente von Ω und r

Zunächst soll der Ansatz verfolgt werden, die Momente von Ω und r direkt aus den Langevin-Gleichungen zu berechnen. Dabei wird die Vereinfachung durchgeführt, dass die stochastische Kraft η in der Langevin-Gleichung für r vernachlässigt wird. Somit ergibt sich das stochastische Verhalten von r lediglich aus der Kopplung an die Langevin-Gleichung für Ω . Als weitere Näherung werden hier der dämpfende Faktor γ und die Kraft F als vom Abstand r unabhängig angenommen. Da die Funktion $G(r)$ im Wesentlichen unbekannt ist (sie ergibt sich aus der als oszillierend bestimmten Funktion $g(r)$ durch Subtraktion eines als stochastisch angenommenen Anteils), wird zunächst eine Substitution durchgeführt. Eine neue Variable ξ wird definiert, für die gilt:

$$\dot{\xi} = \frac{\dot{r}}{G(r)} \Rightarrow \xi = \int_0^r \frac{1}{G(r')} dr'.$$

Das zweite Moment $\langle \Omega(r, t)^2 \rangle$ wird durch $\langle \Omega(r, t)^2 \rangle = \frac{Q}{2\gamma}$ approximiert und damit, wie später gezeigt wird, durch den Wert, gegen den $\langle \Omega(r, t)^2 \rangle$ für große Zeiten strebt. Die im Folgenden behandelten Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \Omega - \frac{Q}{2\gamma} \\ \dot{\Omega} &= -\gamma\Omega + F.\end{aligned}$$

Diese DGLn können zunächst völlig analog zu deterministischen DGLn mit der Methode der *Variation der Konstanten* gelöst werden. Man erhält die beiden Lösungen:

$$\xi(t) = -\frac{Q}{2\gamma}t + \int_0^t \Omega^2(t') dt' + \xi(0) \quad (4.5)$$

$$\Omega(t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} F(t') dt' + \Omega(0). \quad (4.6)$$

Die Anfangswerte $\Omega(0)$ und $\xi(0)$ werden nun als verschwindend angenommen. Um die Momente der Variablen ξ zu erhalten, müssen Momente der Variablen Ω bekannt sein. Hierfür sind wiederum die Momente der stochastischen Kraft $F(t)$ von Interesse, insbesondere auch Mittelungen von Produkten der Kraft zu verschiedenen Zeiten. Auf Grund der Eigenschaft (4.4) der Kraft F und der Tatsache, dass diese einer Gaußverteilung genügt, erhält man für die Korrelationen (vgl. [Ris84]):

$$\langle F(t_1) \dots F(t_n) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ Q^m \sum_P \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{2m-1} - t_{2m}) & \text{für } n = 2m, m \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Dabei wird über alle Permutationen der Zeitpunkte t_i , welche zu einer Veränderung führen, summiert. Dies sind alle Permutationen, mit Ausnahme derer, die gegenüber einer anderen Anordnung nur Zeiten t_i innerhalb einer δ -Funktion oder die gesamten

Argumente zweier δ -Funktionen vertauschen. Insgesamt wird also über $N = \frac{n!}{2^m m!}$ Permutationen summiert. Die Momente von Ω werden nun berechnet, indem die jeweilige Potenz der Lösung (4.6) gebildet und die Mittelung in die auftretenden Integrale hineingezogen wird (dies ist auf Grund der Linearität der Mittelung möglich). So sieht man, dass das erste Moment von Ω identisch verschwindet

$$\langle \Omega(t) \rangle = \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \langle F(t') \rangle dt' = 0. \quad (4.8)$$

Für die geraden Momente von Ω (ungemischt, d.h. gemitteltes Produkt von Vortizitätsinkrementen zum gleichen Zeitpunkt) erhält man allgemein ¹($n = 2m$):

$$\langle \Omega^n(t) \rangle = \frac{(n)!}{2^m m!} \left(\frac{Q}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \right)^m. \quad (4.9)$$

An dieser Gleichung ist zu sehen, dass tatsächlich das zweite Moment $\langle \Omega(t)^2 \rangle = \left(\frac{Q}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \right)$ für große Zeiten t gegen den Wert $\langle \Omega^2 \rangle = \frac{Q}{2\gamma}$ relaxiert. Mit Kenntnis des zweiten Moments von Ω kann nun direkt das erste Moment von ξ notiert werden:

$$\langle \xi(t) \rangle = -\frac{Q}{2\gamma} t + \int_0^t \langle \Omega^2(t') \rangle dt' = -\frac{Q}{4\gamma^2} (1 - e^{-2\gamma t}).$$

Für die Berechnung des $2m$ -ten Moments von ξ muss die Größe $\langle \Omega^2(t_1) \dots \Omega^2(t_m) \rangle$ bekannt sein. Die Berechnung dieser Größe ist nicht trivial. Für $\langle \Omega^2(t_1) \Omega^2(t_2) \rangle$ lässt sich errechnen:

$$\langle \Omega^2(t_1) \Omega^2(t_2) \rangle = \dots \quad (4.10)$$

$$\frac{Q^2}{4\gamma^2} \left\{ 1 + 3e^{-2\gamma(t_1+t_2)} - e^{-2\gamma t_1} - e^{-2\gamma t_2} + 2e^{-2\gamma|t_1-t_2|} - 4e^{-\gamma|t_1-t_2|+t_1+t_2} \right\}. \quad (4.11)$$

Dies ist in die Gleichung

$$\langle \xi^2(t) \rangle = \int_0^t \int_0^{t'} \langle \Omega^2(t'_1) \Omega^2(t'_2) \rangle dt'_1 dt'_2 - \frac{Q}{\gamma} t \int_0^t \langle \Omega^2(t') \rangle dt' + \frac{Q^2}{4\gamma^2} t^2$$

einzusetzen. Wie man erkennt, wird bereits der Term für das zweite Moment von ξ sehr umfangreich. Um auf Momente von r schließen zu können, müssen jedoch auf Grund des nicht trivialen Zusammenhangs (4.5) alle Momente von ξ bzw. die gesamte Dichtefunktion von ξ bekannt sein. Dieser Weg wurde nicht weiter verfolgt.

¹Für detaillierte Rechnungen sei hier auf den Anhang verwiesen.

4.2 Longitudinale Geschwindigkeitsinkremente

Ein weiterer Ansatz zur Behandlung der Langevin-Gleichungen (4.2) ist die Behandlung von $\dot{r} =: V$ als Zufallsvariable, welche durch ihren Zusammenhang mit der Zufallsvariablen Ω definiert ist. Dabei werden weiterhin die Rechnungen mit den Näherungen $\gamma(r) = \gamma$ sowie $Q(r) = Q$ durchgeführt. Die Größe V kann mit dem in Abschnitt 2.3 eingeführten Euler'schen longitudinalen Geschwindigkeitsinkrement identifiziert werden:

$$r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| + \mathbf{u}(\mathbf{x}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_2} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = \frac{1}{r} (\mathbf{r} \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_2))).$$

Anhand der Statistik des longitudinalen Geschwindigkeitsinkrementes können Bedingungen an die weitestgehend unbekannte Funktion $G(r)$ unter Annahme der Gültigkeit des $\frac{3}{2}$ -Gesetzes² gestellt werden. Zu diesem Zweck wird das dritte Moment von V (Strukturfunktion 3. Ordnung) berechnet. Ein wie vom $\frac{3}{2}$ -Gesetz gefordertes endliches drittes Moment äußert sich im Verlauf der Dichtefunktion in Form einer Asymmetrie und ist wie bereits erwähnt ausschlaggebend für den Energietransport in der Kaskade.

Mathematisch wird die Asymmetrie einer Dichtefunktion durch die mit steigender Asymmetrie wachsende Maßzahl der *Schiefe* (auch *skewness*) beschrieben. Diese ist für eine Zufallsvariable A mit verschwindendem Erwartungswert definiert als (vgl. [Vos00]):

$$S_k = \frac{\langle A^3 \rangle}{(\langle A^2 \rangle)^{3/2}}. \quad (4.12)$$

Darüber hinaus können Bedingungen an $\sqrt{C(r)}$ und $G(r)$ ermittelt werden, unter denen die Dichtefunktionen konsistent mit der Vorhersage (2.8) sind, welche sich aus den Kolmogorov'schen Hypothesen ergibt.

Das Ergebnis (4.9) für die Momente von Ω bleibt gültig. Für große Zeiten verschwindet der exponentielle Anteil der Momente von Ω . Berechnet man aus den Momenten die charakteristische Funktion von Ω und aus dieser wiederum die Dichtefunktion, so erhält man für große Zeiten die stationäre Verteilung (vgl. [Ris84]):

$$f_\Omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\Omega^2\rangle}} e^{-\frac{\omega^2}{2\langle\Omega^2\rangle}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi Q}} e^{-\frac{\gamma\omega^2}{Q}}.$$

Dabei handelt es sich also um eine Gaußverteilung mit der Varianz $\langle\Omega^2\rangle = \frac{Q}{2\gamma}$. Skaliert man die Zufallsvariable Ω mit dem Kehrwert der Standardabweichung, so ergibt sich eine neue Zufallsvariable, welche standardnormalverteilt ist. Das Quadrat dieser Zufallsvariablen folgt demnach der sogenannten χ_1^2 -Verteilung (vgl. [Bro08]) und es gilt für $\Theta := \frac{2\gamma}{Q}\Omega^2$:

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{\theta}{2}} & \theta > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.13)$$

²Mit $\frac{3}{2}$ -Gesetz ist der Zusammenhang (2.9) gemeint. Der Begriff $\frac{3}{2}$ -Gesetz wird zum Beispiel in [Ber99] verwendet.

Mit dieser Substitution erhält man als Gleichung für die zu untersuchende Zufallsvariable V :

$$V = G(r) \left[\langle \Omega^2 \rangle \Theta - \langle \Omega^2 \rangle \right] + \sqrt{C(r)} \eta. \quad (4.14)$$

4.2.1 Rechnungen unter Vernachlässigung von η

Zunächst kann die Dichtefunktion von V unter Vernachlässigung der stochastischen Kraft η berechnet werden. Dabei wird die in Abschnitt (2.2) hergeleitete Formel (2.7) verwendet:

$$f_V(v) = \int_0^\infty f_V(v|\Theta = \theta) f_\Theta(\theta) d\theta.$$

Nun ist der von V für den Fall $\Theta = \theta$ angenommene Wert durch Gleichung (4.14) eindeutig festgelegt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_V(v|\Theta = \theta)$ entspricht also der eines Elementarereignisses und es gilt:

$$\begin{aligned} f_V(v|\Theta = \theta) &= \delta \left(v - G(r) \left[\langle \Omega^2 \rangle \theta - \langle \Omega^2 \rangle \right] \right) \\ \Rightarrow f_V(v) &= \int_0^\infty \delta \left(v - G(r) \left[\langle \Omega^2 \rangle \theta - \langle \Omega^2 \rangle \right] \right) f_\Theta(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dieses Integral lässt sich nun explizit auswerten, wobei die Eigenschaft (z.B. [Nol07])

$$\delta(h(x)) = \sum_i \frac{1}{|h'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (4.16)$$

der Dirac'schen Deltafunktion ausgenutzt wird. Dabei bezeichnet x_i eine einfache Nullstelle von $h(x)$. Im Fall von (4.15) sind also die Nullstellen von $h(\theta) = v - G(r) [\langle \Omega^2 \rangle \theta - \langle \Omega^2 \rangle]$ zu bestimmen. Gleichung (4.15) geht dann in

$$f_V(v) = \int_0^\infty \frac{1}{|G(r)\langle \Omega^2 \rangle|} \delta(\theta - \theta_1) f_\Theta(\theta) d\theta \quad (4.17)$$

über, wobei $\theta_1 = 1 + \frac{v}{\langle \Omega^2 \rangle G(r)}$ ist. Ist $G(r) > 0$ so verschwindet das Integral (4.17) für $v < -G(r)\langle \Omega^2 \rangle$, ist $G(r) < 0$ verschwindet das Integral für $v > -G(r)\langle \Omega^2 \rangle$. Für $G(r) > 0$ folgt für die Dichtefunktion von V :³

$$f_V(v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2\pi\langle \Omega^2 \rangle}} \frac{1}{|G(r)|} \sqrt{\frac{1}{\langle \Omega^2 \rangle + \frac{v}{G(r)}}} e^{-\frac{1}{2\langle \Omega^2 \rangle} (\langle \Omega^2 \rangle + \frac{v}{G(r)})} & v \geq -G(r)\langle \Omega^2 \rangle \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.18)$$

Die Normierung dieser Dichtefunktion ergibt sich bei korrekter Rechnung direkt aus dem Ansatz (4.15), kann jedoch in diesem Fall sehr einfach durch Substitution überprüft werden. Die Dichtefunktion ist des Weiteren deutlich asymmetrisch, was sich aus dem einfachen Grund ergibt, dass sie für $v < -G(r)\langle \Omega^2 \rangle$ verschwindet.

³Für $G(r) < 0$ gilt Analoges mit entsprechend angepasstem Definitionsbereich.

Wie man erkennt, ist die Dichtefunktion $f_V(v)$ *selbstähnlich* in r . Man bezeichnet eine Funktion $f(x, y)$ als selbstähnlich in x (vgl. [Pop00]), wenn zwei Skalierungsfunktionen $\delta(x)$ und $h(x)$ gefunden werden können, sodass

$$\frac{f(\xi, x)}{h(x)} = \tilde{f}(\xi), \quad \xi = \frac{y}{\delta(x)}.$$

Um dies für $f_V(v)$ zu zeigen, skaliert man die gesamte Dichtefunktion mit $|G(r)|$ und führt außerdem die skalierte Geschwindigkeit $u = v/G(r)$ ein. So erhält man für den Bereich $u \geq -\langle \Omega^2 \rangle$ eine skalierte Dichtefunktion der Geschwindigkeitsinkremente, welche unabhängig von dem Abstand r ist:

$$\hat{f}_U(u) = f_V(v) \cdot |G(r)| = \sqrt{\frac{1}{2\pi\langle \Omega^2 \rangle}} \sqrt{\frac{1}{\langle \Omega^2 \rangle + u}} e^{-\frac{1}{2\langle \Omega^2 \rangle}(\langle \Omega^2 \rangle + u)}.$$

Diese Dichtefunktion hängt weiterhin von dem Parameter $\langle \Omega^2 \rangle$ ab. Der Verlauf der Dichtefunktion für verschiedene Werte von $\langle \Omega^2 \rangle$ ist in Abbildung 4.1 aufgetragen.

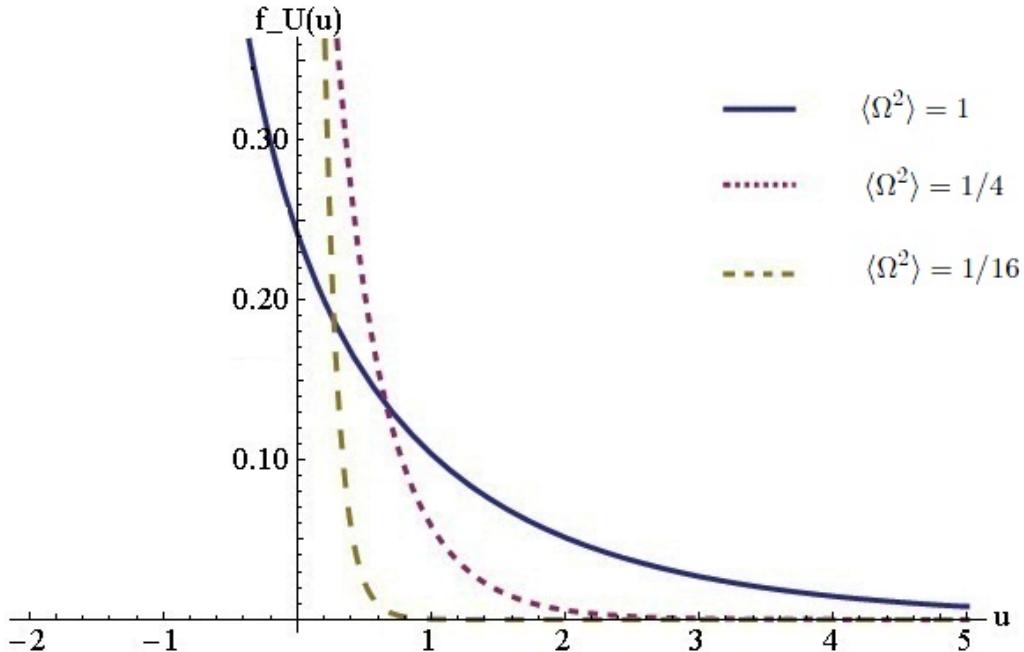


Abbildung 4.1: Skalierte Dichtefunktion unter Vernachlässigung von η für verschiedene Werte von $\langle \Omega^2 \rangle$.

Wie man unschwer erkennt, ist das longitudinale Geschwindigkeitsinkrement V umso determinierter, je kleiner die Varianz des Vortizitätsinkrements ist.

Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass die Stochastizität des Geschwindigkeitsinkrements V lediglich durch die stochastische Kraft in der DGL (4.2) für die Vortizitätsinkremente Ω hervorgerufen wird. In dieser DGL ist wiederum die Größe $\langle \Omega^2 \rangle = \frac{Q}{2\gamma}$ ein Maß für das Verhältnis von stochastischer zu dissipativer Komponente.

Im Grenzfall $\langle \Omega^2 \rangle \rightarrow 0$ strebt sowohl die stationäre Verteilung von Ω als auch die Verteilung von V gegen eine δ -Distribution.

Das erste Moment von V verschwindet identisch, dies ergibt sich auch direkt aus der Beziehung (4.14) unter Vernachlässigung von η :

$$\langle V \rangle = \langle G(r) [\langle \Omega^2 \rangle \Theta - \langle \Omega^2 \rangle] \rangle \quad (4.19)$$

$$= G(r) [\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega^2 \rangle] \equiv 0. \quad (4.20)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass $\langle \Theta \rangle = 1$ gilt. Analog lässt sich auch das zweite und dritte Moment von V berechnen und man erhält für die Strukturfunktion 2. und 3. Ordnung:

$$S^2 = \langle V^2 \rangle = 2 G^2(r) \langle \Omega^2 \rangle^2$$

$$S^3 = \langle V^3 \rangle = 8 G^3(r) \langle \Omega^2 \rangle^3.$$

Nach Gleichung (2.9) sollte S^3 linear in r sein. Daraus ergibt sich als Forderung für die Funktion $G(r)$:

$$G(r) \sim r^{1/3}. \quad (4.21)$$

Es folgt dann direkt aus der Definition von V der allgemeine Zusammenhang

$$S^n \sim r^{n/3}.$$

Schließlich ist festzustellen, dass auch die Dichtefunktion von der sich aus den Kolmogorov'schen Hypothesen ergebenden Form (2.8) ist, falls $G(r) \sim (\varepsilon r)^{1/3}$ gilt:

$$f_V(v) = \frac{1}{(r\varepsilon)^{1/3}} h\left(\frac{v}{(r\varepsilon)^{1/3}}\right). \quad (4.22)$$

4.2.2 Rechnungen unter Berücksichtigung von η

Nun soll die Dichtefunktion ermittelt werden, die sich für die longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente mit der Definition (4.14) ergibt. Dabei ist η als standardnormalverteilte Zufallsvariable anzusehen, über $\sqrt{C(r)}$ wird die skalenabhängige Varianz dieser Zufallsvariablen modelliert. Aus Symmetriegründen ist die Statistik von V unabhängig vom Vorzeichen von $\sqrt{C(r)}$. Es wird daher o.B.d.A. angenommen, dass $\sqrt{C(r)} > 0$. Die Dichtefunktion von V erhält man über die Beziehung

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \delta\left(v - G(r) [\langle \Omega^2 \rangle \theta - \langle \Omega^2 \rangle] - \sqrt{C(r)} \eta\right) f_{\Theta, \eta}(\theta, \eta) d\theta d\eta.$$

Dabei steht $f_{\Theta, \eta}$ für die Verbundswahrscheinlichkeitsdichte der beiden Zufallsvariablen Θ und η . Da weiterhin die DGL für die Vortizitätsinkremente entkoppelt ist, kann die Zufallsvariable Ω bzw. Θ als stochastisch unabhängig von η behandelt werden. Damit faktorisiert $f_{\Theta, \eta}$ und es gilt:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \delta\left(v - G(r) [\langle \Omega^2 \rangle \theta - \langle \Omega^2 \rangle] - \sqrt{C(r)} \eta\right) f_{\Theta}(\theta) f_{\eta}(\eta) d\theta d\eta.$$

Sieht man nun analog zum vorherigen Vorgehen das Argument der δ -Distribution als Funktion von η an, so folgt wiederum unter Ausnutzung der Eigenschaft (4.16) und nach Einsetzen der Dichtefunktionen:

$$f_V(v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{C(r)}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{\eta_1^2}{2}} e^{-\frac{\theta}{2}} d\theta, \quad (4.23)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{C(r)}}(v - G(r)\langle\Omega^2\rangle(\theta - 1)). \quad (4.24)$$

Dieses Integral kann auf ein Integral der Form

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\beta x^2 - \gamma x} = \frac{1}{(2\beta)^{1/4}} \sqrt{\pi} e^{\frac{\gamma^2}{8\beta}} D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right), \quad \beta > 0 \quad (4.25)$$

zurückgeführt werden. Die Identität ist entnommen aus [Gra94], die Konstante β ist im Fall von (4.24) mit $\beta = \frac{G(r)^2\langle\Omega^2\rangle^2}{2C(r)}$ zu identifizieren, womit die Bedingung $\beta > 0$ erfüllt ist. Die Funktion $D_{-\frac{1}{2}}(x)$ wird als *parabolische Zylinderfunktion*⁴ bezeichnet, eine übliche Notation für dieselbe Funktion ist auch:

$$U(0, x) = D_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Unter Verwendung von (4.25) folgt dann für die Dichtefunktion:

$$\begin{aligned} f_V(v) = & \\ & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi\langle\Omega^2\rangle|G(r)|\sqrt{C(r)}}} \cdot \exp\left(\frac{1}{4C(r)} \left(\frac{C(r)}{2|G(r)|\langle\Omega^2\rangle} - \text{sgn}(G(r))(v + G(r)\langle\Omega^2\rangle)\right)^2\right) \\ & \cdot \exp\left(-\frac{(v + G(r)\langle\Omega^2\rangle)^2}{2C(r)}\right) \cdot D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{C(r)}} \left(\frac{C(r)}{2|G(r)|\langle\Omega^2\rangle} - \text{sgn}(G(r))(v + G(r)\langle\Omega^2\rangle)\right)\right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dabei steht $\text{sgn}(G(r)) = \frac{G(r)}{|G(r)|}$ für das Vorzeichen der Funktion $G(r)$. Unter der Bedingung $\sqrt{C(r)} \sim G(r)$ ist auch die Dichtefunktion (4.26) selbstähnlich in r . Zur Diskussion und graphischen Darstellung der Dichtefunktion soll nun der Spezialfall $\sqrt{C(r)} = G(r)$ betrachtet werden, also insbesondere der Fall $G(r) > 0$. Wie auch die Dichtefunktion (4.15) kann die Dichtefunktion (4.26) mit $|G(r)|$ reskaliert werden. Für die skalierte Geschwindigkeit $u = \frac{v}{G(r)}$ ergibt sich die Statistik:

$$\begin{aligned} \hat{f}_U(u) = f_V(v) \cdot |G(r)| = & \\ & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi\langle\Omega^2\rangle}} \cdot \exp\left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\langle\Omega^2\rangle} - (u + \langle\Omega^2\rangle)\right)^2\right) \\ & \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(u + \langle\Omega^2\rangle)^2\right) \cdot D_{-\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2\langle\Omega^2\rangle} - (u + \langle\Omega^2\rangle)\right)\right). \end{aligned}$$

⁴Definition und Wertetabellen der parabolische Zylinderfunktion sind zu finden in [AS64].

In Abbildung (4.2) ist die Dichtefunktion für verschiedene Werte von $\langle \Omega^2 \rangle$ aufgetragen. Deutlich ist die Asymmetrie bei allen Parametern zu erkennen. Qualitativ ist zu sehen, dass die Asymmetrie mit wachsendem $\langle \Omega^2 \rangle$ zunimmt. Dies erweist sich als konsistent mit der Definition (4.12) der Maßzahl S_k und den im Folgenden berechneten Momenten (4.28).

Außerdem ist erkennbar, dass die Dichtefunktion für sehr kleine $\langle \Omega^2 \rangle$ gegen die Standardnormalverteilung strebt. Dies ist mathematisch einerseits an der Definition der skalierten Zufallsvariable U ersichtlich:

$$\lim_{\langle \Omega^2 \rangle \rightarrow 0} U = \lim_{\langle \Omega^2 \rangle \rightarrow 0} V/G(r) = \eta,$$

andererseits ebenfalls an der Dichtefunktion $f_U(u)$ abzulesen (dies ist wiederum eine Konsistenzprüfung für die errechnete Dichtefunktion):

$$\lim_{\langle \Omega^2 \rangle \rightarrow 0} \hat{f}_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a} \cdot \exp\left(\frac{1}{4}a^2\right) D_{-\frac{1}{2}}(a)\right)}_{=1}.$$

Hier wurde die Substitution $a = \frac{1}{2\langle \Omega^2 \rangle}$ verwendet. Für detailliertere Berechnung des Grenzwertes sei hier auf eine analoge Rechnung zur Normierung der Dichtefunktion verwiesen, welche im Anhang zu finden ist.

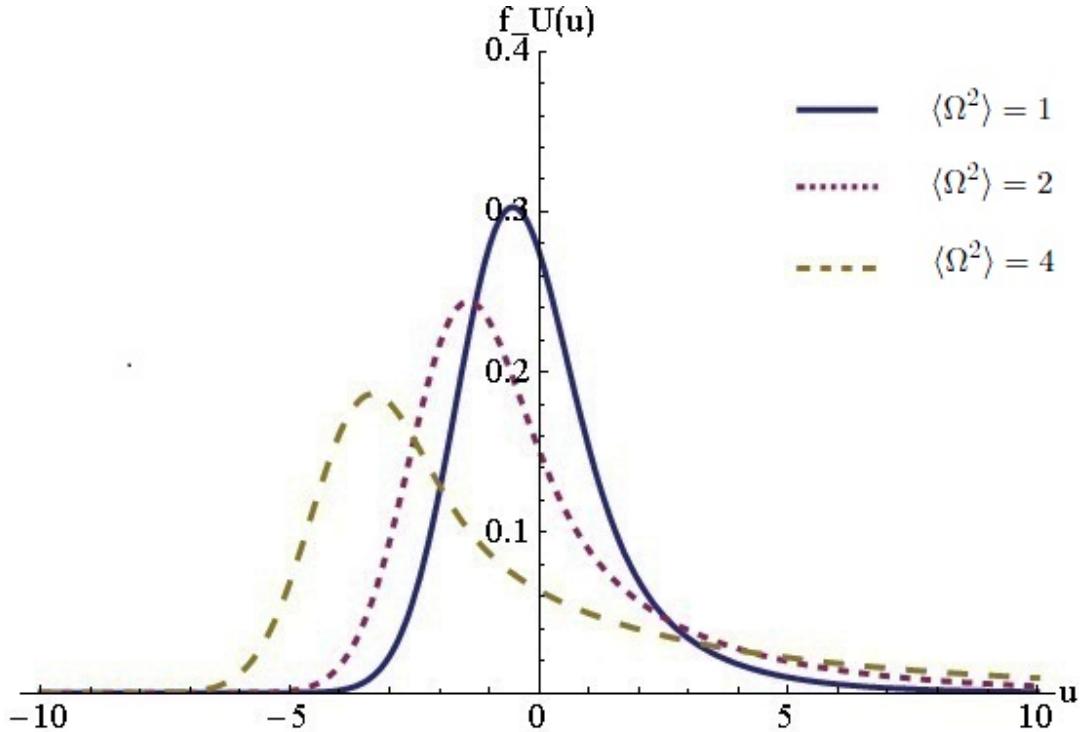


Abbildung 4.2: Skalierte Dichtefunktion unter Berücksichtigung von η für verschiedene Werte von $\langle \Omega^2 \rangle$.

Auch für die Zufallsvariable V unter Berücksichtigung von η lässt sich das zweite und dritte Moment direkt aus der Definition (4.14) berechnen⁵:

$$S^2(r) = 2 G^2(r) \langle \Omega^2 \rangle^2 + C(r) \quad (4.27)$$

$$S^3(r) = \langle V^3 \rangle = 8 G^3(r) \langle \Omega^2 \rangle^3. \quad (4.28)$$

Auch hier folgt aus dem $\frac{3}{2}$ -Gesetz und S^3 , dass die Funktion $G(r)$ die Abhängigkeit

$$G(r) \sim r^{1/3}$$

aufweisen sollte. Fordert man außerdem die Gültigkeit der Kolmogorov'schen Vorhersagen für alle Strukturfunktionen, so folgt zusätzlich

$$\sqrt{C(r)} \sim (\varepsilon r)^{1/3}.$$

Für diesen Fall ist auch $G(r) \sim \sqrt{C(r)}$ und es ergibt sich unter der weiteren Forderung $G(r) \sim (\varepsilon r)^{1/3}$, wie man leicht an der Dichtefunktion (4.26) ablesen kann, wiederum eine Dichtefunktion der Form (4.22).

⁵Detaillierte Rechnungen sind im Anhang zu finden.

5 Resümee und Ausblick

Aus einem Schließungsansatz der Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie für Vortizitätsinkremente über die Einführung von bedingten Wahrscheinlichkeiten wurden in [FVKW10] charakteristische Gleichungen für den Abstand r und das Vortizitätsinkrement Ω abgeleitet. Die Form dieser Gleichungen wurde zum Teil aus der Bildung von bedingten Mittelwerten mit Hilfe von DNS-Daten ermittelt. In einer Lagrange'schen Interpretation wurden diese Gleichungen in [FVKW10] in Langevin-Gleichungen für den Abstand und das Vortizitätsinkrement zweier Lagrange'scher Teilchen im Inertialbereich der vollentwickelten 2D Turbulenz überführt. Diese Langevin-Gleichungen wurden nun in der vorliegenden Arbeit mit zwei verschiedenen Ansätzen behandelt. Ein Problem bestand darin, dass die Funktion $G(r)$ unbekannt war. Aufgrund dieser Unkenntnis konnten die Langevin-Gleichungen nicht direkt gelöst werden.

Zunächst wurde der Ansatz gemacht, die Momente einer neuen Zufallsvariablen ξ aus den Langevin-Gleichungen zu berechnen. Dabei ist ξ über $G(r)$ mit r verknüpft, die Langevin-Gleichung von ξ weist keine explizite Abhängigkeit von r auf. Ziel sollte es hier sein, über die Momente von ξ eine Dichtefunktion bzw. Momente des Abstands r zu ermitteln. Das Modell kann dann einer Konsistenzprüfung mit dem Richardson-Gesetz unterzogen werden. Die Berechnung der Momente von ξ stellte sich als sehr umfangreich heraus, eine Aussage über die Momente von r ist im Prinzip erst nach Kenntnis aller Momente von ξ möglich. Dieser Weg wurde nicht weiter verfolgt.

Als weiterer Ansatz wurde nun die Zufallsvariable V , welche mit dem Euler'schen longitudinalen Geschwindigkeitsinkrement zu identifizieren ist, eingeführt. Für diese Zufallsvariable konnten unter gewissen Annahmen für zwei verschiedene Modelle (ohne und mit stochastischer Kraft in der Definition von V) die Dichtefunktion sowie die Momente berechnet werden.

Die sich ergebenden Verteilungen waren in keinem Fall gaußförmig, womit eine notwendige Bedingung für den Energietransfer erfüllt ist. Für die Konsistenz des Modells mit dem $\frac{3}{2}$ -Gesetz für die Strukturfunktion S^3 ergab sich in beiden Fällen die Forderung $G(r) \sim r^{1/3}$. Diese Forderung kann als notwendige Bedingung für die Konsistenz des Modells mit der Navier-Stokes-Gleichung angesehen werden. Für beide Definitionen von V konnten außerdem Bedingungen gefunden werden, unter denen die Dichtefunktion die selbstähnliche Form annimmt, welche aus den Kolmogorov'schen Hypothesen folgt.

In einem weiteren Schritt wäre zu prüfen, inwiefern die Form $G(r) \sim r^{1/3}$ sich ebenfalls aus DNS-Daten ergibt. Auch die Dichtefunktion des Euler'schen longitudinalen Geschwindigkeitsinkrements könnte mit einer aus DNS-Daten ermittelten Statistik verglichen werden. Mit den Annahmen $G(r) \sim r^{1/3}$ und $\sqrt{C(r)} \sim r^{1/3}$ lassen sich die ursprünglichen Langevin-Gleichungen simulieren. So kann zum Beispiel die zeitliche Entwicklung des zweiten Moments $\langle r^2(t) \rangle$ durch eine Mittelung über hinreichend viele Realisierungen ermittelt und mit dem Richardson-Gesetz verglichen werden. Grundsätzlich ist es auch möglich, den Ansatz der Berechnung von Momenten der Variablen ξ weiter zu verfolgen.

6 Anhang

Berechnung der Momente von $\Omega(t)$: Nach (4.6) und (4.7) gilt

$$\begin{aligned}\langle \Omega^{2m}(t) \rangle &= \int_0^t \dots \int_0^t e^{-\gamma(2mt-t'_1-\dots-t'_{2m})} \langle F(t'_1) \dots F(t'_{2m}) \rangle dt'_1 \dots dt'_{2m} \\ &= \frac{(2m)!}{2^m m!} \left(\iint_0^t Q e^{-\gamma(2t-t'_1-t'_2)} \delta(t'_1 - t'_2) dt'_1 dt'_2 \right)^m \\ &= \frac{(2m)!}{2^m m!} \left(Q \int_0^t e^{-(2\gamma-2t'_1)} dt'_1 \right)^m = \frac{(2m)!}{2^m m!} \left(\frac{Q}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \right)^m.\end{aligned}$$

Das gemischte Moment $\langle \Omega^2(t_1) \Omega^2(t_2) \rangle$ ergibt sich zu:

$$\langle \Omega^2(t_1) \Omega^2(t_2) \rangle = Q^2 \iint_0^{t_1} \iint_0^{t_2} e^{-\gamma(2t_1+2t_2-t'_1-t''_1-t'_2-t''_2)} \langle F(t'_1) F(t''_1) F(t'_2) F(t''_2) \rangle dt'_1 dt''_1 dt'_2 dt''_2.$$

Mit der Korrelation der gaußverteilten Kräfte (4.7) und dem Integral (vgl. auch [Ris84])

$$\iint_0^{t_1} \iint_0^{t_2} e^{-\gamma(t_1+t_2-t'_1-t'_2)} \delta(t'_1 - t'_2) dt'_1 dt'_2 = \frac{1}{2\gamma} (e^{-\gamma|t_1-t_2|} - e^{-\gamma(t_1+t_2)})$$

folgt dann (4.11).

Berechnung der Momente von V : Die Momente von V können direkt aus der Definition der Zufallsvariablen abgeleitet werden. Dabei wird die zweite und dritte Potenz von V gebildet. Außerdem kann ausgenutzt werden, dass für die gaußverteilten Zufallsvariablen gilt (vgl. [Ris84]):

$$\langle \Omega^{2m} \rangle = \frac{(2m)!}{2^m m!} (\langle \Omega^2 \rangle)^m \quad (6.1)$$

$$\langle \eta \rangle = 0. \quad (6.2)$$

Damit folgt für das zweite Moment¹:

$$\begin{aligned}\langle V^2 \rangle &= \langle C(r)\eta^2 + G^2(r)\langle \Omega^2 \rangle^2 + G^2(r)\Omega^4 - 2G(r)\langle \Omega^2 \rangle^2 \rangle \\ &= 2G^2(r)\langle \Omega^2 \rangle^2 + C(r).\end{aligned}$$

¹In den folgenden Rechnungen wurden unter Ausnutzung von (6.2) Summanden mit ungeraden Potenzen von η vernachlässigt.

Ebenfalls unter Ausnutzung der Linearität der Mittelung ergibt sich das 3. Moment zu:

$$\begin{aligned}\langle V^3 \rangle &= \langle -3C(r)G(r)\eta^2\langle \Omega^2 \rangle + 3C(r)G(r)\eta^2\Omega^2 - G^3(r)\langle \Omega^2 \rangle^3 \\ &\quad + 3G^3(r)\langle \Omega^2 \rangle^2\Omega^2 - 3G^3(r)\langle \Omega^2 \rangle\Omega^4 + G^3(r)\Omega^6 \rangle \\ &= -G^3(r)\langle \Omega^2 \rangle^3 + 3G^3(r)\langle \Omega^2 \rangle^3 - 9G^3(r)\langle \Omega^2 \rangle^3 + 15G^3(r)\langle \Omega^2 \rangle^3 \\ &= 8G^3(r)\langle \Omega^2 \rangle^3.\end{aligned}$$

Die Momente unter Vernachlässigung von η ergeben sich jeweils, indem $C = 0$ gesetzt wird.

Überprüfung der Normierung von (4.26):

$$\begin{aligned}A &= \int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)dv \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\sqrt{C(r)}}{|G(r)|\langle \Omega^2 \rangle}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\sqrt{c}}{2|G|\langle \Omega^2 \rangle}\right)^2\right) \exp\left(\frac{1}{4}\alpha^2\right) D_{-\frac{1}{2}}(\alpha)d\alpha.\end{aligned}$$

Nach [Gra94] gilt für $0 < \mu < 1$:

$$A(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2\mu}(\alpha - y)^2\right) \exp\left(\frac{1}{4}\alpha^2\right) D_{-\frac{1}{2}}(\alpha)d\alpha = y^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{4}y^2\right) D_{-\frac{1}{2}}(y).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{\frac{\sqrt{C(r)}}{2|G|\langle \Omega^2 \rangle}} \lim_{\mu \rightarrow 1} \left((1-\mu)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{1}{4}\frac{C(r)}{(1-\mu)4G^2(r)\langle \Omega^2 \rangle^2}\right) D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{C(r)}}{\sqrt{1-\mu}2|G(r)|\langle \Omega^2 \rangle}\right) \right) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\beta} \exp\left(\frac{1}{4}\beta^2\right) D_{-\frac{1}{2}}(\beta) \right).\end{aligned}$$

Es wurde die Substitution $\beta = \frac{\sqrt{C(r)}}{\sqrt{1-\mu}2|G(r)|\langle \Omega^2 \rangle}$ durchgeführt. Für die parabolische Zylinderfunktion gibt es nach [AS64] die asymptotische Reihenentwicklung für große x :

$$D_{-\frac{1}{2}} \underset{asympt.}{=} \exp\left(-\frac{1}{4}x^2\right) \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{3}{8x^2} + \dots\right).$$

Damit folgt

$$A = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\beta} \exp\left(\frac{1}{4}\beta^2\right) D_{-\frac{1}{2}}(\beta) \right) = 1.$$

Literaturverzeichnis

- [AS64] M. Abramowitz, I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1964
- [Alt94] J. Altenbach: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, 1994
- [AFHF10] J. Argyris, G. Faust, M. Haase, R. Friedrich: *Die Erforschung des Chaos. Eine Einführung in die Theorie nichtlinearer Systeme*. 2. Auflage Springer, 2010
- [Bau04] A. Baule: *Nichtmarkovsche Modelle für die Lagrange'sche Teilchenstatistik turbulenter Strömungen*. Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik Münster, 2004
- [Bak08] O. G. Bakunin: *Turbulence and Diffusion. Skaling Versus Equations*. Springer, 2008
- [Ber99] D. Bernard: *On The Three Point Velocity Correlation Function in 2d Forced Turbulence*. Physical Review E **60** (1999), Nr. 5 6184-6187 DOI: 10.1103/PhysRevE.60.6184
- [BS02] G. Boffetta, I. M. Sokolov: *Relative Dispersion in Fully Developed Turbulence: The Richardson's Law and Intermittency Corrections*. Physical Review Letters **88** (2002), Nr.9 094501-1-4 DOI:10.1103/PhysRevLett.88.094501
- [Bro08] I.N. Bronstein: *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Auflage, Harri Deutsch, 2008
- [Eng95] A. Engel: *Stochastik*. 1. Auflage Klett, 1995
- [Fri95] U. Frisch: *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press 1995
- [FVKW10] R. Friedrich, M. Voßkuhle, O. Kamps, M. Wilczek: *Two-Point Vorticity Statistics in the Inverse Turbulent Cascade*. Hinterlegt auf arXiv:1012.3356v1 [physics.flu-dyn]
- [Gra94] I. S. Gradshteyn: *Table of integrals, series, and products*. 5. Auflage Academic Press, 1994
- [Hak83] H. Haken: *Synergetik. Eine Einführung*. Zweite Auflage Springer, 1983
- [JPT98] M.-C. Jullien, J. Paret, P. Tabeling: *Richardson Pair Dispersion in Two-Dimensional Turbulence*. Physical Review Letters **82** (1998) Nr.14 2872-2875 PAC: 47.27.Qb, 05.40.Fb
- [Kam09] O. Kamps: *Lagrange'sche Statistik in turbulenten Strömungen*. Inauguraldisertation, Institut für Theoretische Physik Münster, 2009
- [KL07] H. Knöpfel, M. Löwe: *Stochastik- Struktur im Zufall*. Oldenbourg, 2007

- [Kra67] R. H. Kraichnan: *Inertial Ranges in Two Dimensional Turbulence*. Physics of Fluids **10** (1967), Nr.7 1417-1423 DOI:10.1063/1.1762301
- [KM80] R. H. Kraichnan, D. Montgomery: *Two-dimensional Turbulence*. Reports on Progress in Physics **43** (1980), 547-619 DOI:10.1088/0034-4885/43/5/001
- [LL71] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band VI Hydrodynamik*. Akademie Verlag, 1971
- [Lun67] T. S. Lundgren: *Distribution Functions in the Statistical Theory of Turbulence*. Physics of Fluids, **10** (1967), 969-975 DOI:10.1063/1.1762249
- [Nol07] W. Nolting: *Grundkurs Theoretische Physik 3 Elektrodynamik*. 8. Auflage Springer, 2007
- [Pop00] S. B. Pope: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000
- [Qia86] J. Qian: *Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence*. Physics of Fluids **29** (1986) 3608-3611
- [Ric22] L. F. Richardson: *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, 1922 (zitiert nach [Pop00])
- [Ric26] L. F. Richardson: *Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph*. Proceedings of the Royal Society of London Series A **110** (1926) Nr.756, 709-737 Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/94463>.
- [Vof09] M. Voßkuhle: *Statistische Analysen zweidimensionaler Turbulenz*. Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik Münster, 2009
- [Ris84] H. Risken: *The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications*. Springer 1984
- [SC09] J. P. Salazar, L. R. Collins: *Two-Particle Dispersion in Isotropic Turbulent Flows*. Annual Review of Fluid Mechanics **41** (2009), Nr.1 405-432
- [Fal01] G. Falkovich et al.: *Particles and fields in fluid turbulence*. Review of Modern Physics **73** (2001), 913-975 DOI:10.1103/RevModPhys.73.913
- [Sch10] T. Schmitz: *Dispersion passiver Partikel in der dreidimensionalen Turbulenz*. Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik Münster, 2010
- [Tsi09] A. Tsinober: *An Informal Conceptual Introduction to Turbulence*. 2. Auflage Springer, 2009
- [Vos00] W. Voß: *Taschenbuch der Statistik*. Fachbuchverlag Leipzig, 2000

Ich erkläre hiermit, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet, sowie Zitate kenntlich gemacht zu haben.

Münster, den 22. Juni 2011.