

Analyse großskaliger Winde bei der turbulenten Rayleigh-Bénard Konvektion

Analysis of large scale circulation in turbulent Rayleigh-Bénard convection

Autor: Alexander Kraft

Münster, 24. Juni 2011

Als Bachelorarbeit vorgelegt

Institut für Theoretische Physik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Grundgleichungen des Rayleigh-Bénard-Systems	3
2.2	Die Boussinesq-Approximation	3
2.3	Entdimensionalisierung	4
2.4	Randbedingungen	5
2.5	Vorstellung der Simulation	5
3	Basismoden und Detektion von Reversals	8
3.1	Analytische Basismoden	8
3.2	Empirische Basismoden	11
4	Vergleich und Analyse der Basismoden	13
4.1	Tiefpass-Filterung	13
4.1.1	Ungerade empirische Mode	13
4.1.2	Gerade empirische Mode	14
4.2	Hochpass-Filterung	17
4.2.1	Ungerade empirische Mode	17
4.2.2	Gerade empirische Mode	18
4.3	Fazit	18
5	Analyse des Datensatzes	21
5.1	Zeitliche Entwicklung der Amplituden	21
5.2	Betrachtung im Phasenraum	23
6	Zusammenfassung und Ausblick	26
7	Anhang	27
	Abbildungsverzeichnis	27
	Literaturverzeichnis	28

1 Einleitung

Turbulente Strömungen stellen, wegen der Nichtlinearität und Nichtlokalität des Problems, eine nicht vollständig verstandene Fragestellung der Hydrodynamik dar. Sie sind Gegenstand aktiver Forschung und ein genaueres Verständnis kann in der Praxis zur Optimierung technischer Ausrüstung genutzt werden. Beispielsweise ermöglicht ein genaues Verständnis der Turbulenz eine Senkung des Treibstoffverbrauchs von Flugzeugen oder ein effizientes Design zu entwickelnder Verbrennungsmotoren und Windkraftanlagen. Darüber hinaus ist die Kenntnis der Eigenschaften turbulenter Strömungen auch von allgemeinem Interesse. Eine im Voraus bekannte Richtung der Ausbreitung von Aschewolken nach Vulkanausbrüchen käme nicht nur im Ausland festsitzenden Urlaubern und Geschäftsleuten zugute, sondern würde so mancher Fluggesellschaft ein Vermögen einbringen. Des weiteren ist anzuführen, dass nicht erkannte oder nicht verstandene Turbulenz im Flugverkehr eine ernst zu nehmende Gefahr darstellt.

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit soll das Verhalten eines Fluids betrachtet werden, das in einem abgeschlossenen Volumen unter Einwirkung von Gravitation und in Kontakt mit einer unteren heizenden und einer oberen kühlenden Platte steht. Dieses sogenannte Rayleigh-Bénard-System kann strukturierte Strömungen in Form von Konvektionszellen ausbilden. Diese Konvektionszellen lassen sich als meta-stabiler Zustand auffassen, deren Form und Orientierung sich unter gewissen Umständen umstrukturiert. Die Analyse großskaliger Strömungen¹ soll im Mittelpunkt dieser Bachelorarbeit stehen und näher beleuchtet werden. Dazu wird ein Datensatz einer zweidimensionalen Rayleigh-Bénard-Simulation (im Folgenden „numerische Daten“) ausgewertet, der mit dem entwickelten Programm der Diplomarbeit von J. Lülff [Lül11] erzeugt wurde. Zur Analyse der Dynamik werden zwei Basis-Systeme aufgestellt und eine numerische Projektion der Simulationsdaten auf die jeweilige Basis durchgeführt. Die sich ergebenden Amplituden der Basisprojektion geben Aufschluss über die Richtung und Ausprägung der jeweiligen Mode. Ein Vorzeichenwechsel der Amplitude, die der großskaligen Strömung zugeordnet ist, deutet dabei auf einen stattfindenden Reversal² hin. Mit dieser Methodik wird der Datensatz im Zeit- und Phasenraum betrachtet, um Strukturen in der Organisation des Systems und Reversals näher zu untersuchen. Desweiteren werden beide Basis-Systeme miteinander verglichen.

In Kapitel 2 wird das hydrodynamische Problem des Rayleigh-Bénard-Systems vorgestellt. Es werden die Grundgleichungen angeführt, einige Vereinfachungen und die Simulation, die dieser Arbeit zugrunde liegt, vorgestellt.

In Kapitel 3 wird das Kernelement des in dieser Arbeit entwickelten Programms dargestellt. Hier werden zwei Basismodensysteme und die Modenzerlegung vorgestellt, die den numerischen Auswertungen zugrunde liegen.

Kapitel 4 enthält den Vergleich der beiden definierten Basismodensysteme. Mithilfe eines Tief- und Hochpass-Filters werden Einblicke in das charakteristische Strömungsverhalten des Systems ermöglicht.

¹Die großskaligen Strömungen werden auch Winde genannt.

²Ein Reversal ist eine Umorientierung der großskaligen Strömung. Die Strömungsrichtung wechselt vom Uhrzeigersinn in den Gegen-Uhrzeigersinn oder umgekehrt.

In Kapitel 5 wird die in Kapitel 3 vorgestellte Methode genutzt, um die Dynamik des Systems im Zeit- und Phasenraum auflösen zu können.

Kapitel 6 stellt eine Zusammenfassung der gewonnen Erkenntnisse dar und führt noch zu untersuchende Aspekte der Rayleigh-Bénard-Konvektion auf.

2 Grundlagen

Dieses Kapitel stellt die Grundlagen der Beschreibung eines Fluids im Rayleigh-Bénard-Systems vor. Es wird von einer kartesischen Geometrie ausgegangen.

2.1 Grundgleichungen des Rayleigh-Bénard-Systems

Die Beschreibung des Rayleigh-Bénard-Systems liefert ein System gekoppelter, nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen. Die sogenannten Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \alpha g T(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_z \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t) = \kappa \Delta T(\mathbf{x}, t) \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.1c)$$

Die beschriebenen Größen sind das vektorwertige Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, das skalare Temperaturfeld $T(\mathbf{x}, t)$ und das skalare Druckfeld $p(\mathbf{x}, t)$, die vom vektorwertigen Ort $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und der Zeit t abhängen. Der Vektor \mathbf{e}_z ist der Einheitsvektor in vertikaler, zur Gravitationskraft antiparalleler Richtung. Zusätzlich hängen die Gleichungen von folgenden physikalischen Parametern ab:

- ν : kinematische Viskosität
- α : Wärmeausdehnungskoeffizient
- g : Erdbeschleunigung
- κ : Wärmediffusivität.

Die Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen lassen sich als Impuls- (2.1a), Energie- (2.1b) und Massenerhaltung (2.1c) auffassen.

Gleichung (2.1a) ist die um den Term $\alpha g T(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_z$ erweiterte Navier-Stokes-Gleichung und entspricht der zeitlichen Entwicklung der Impulse für ein Kontinuum. Diese Erweiterung erzeugt eine Kopplung zwischen Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld und sorgt somit für einen temperaturabhängigen Auftrieb. Die Beiträge des sogenannten advektiven Terms $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ und des Druckgradienten $-\nabla p(\mathbf{x}, t)$ führen zur Komplexität der mathematischen und physikalischen Analyse und der Phänomene der Hydrodynamik.

Gleichung (2.1b) ist die Advektions-Diffusionsgleichung des Temperaturfeldes. Gleichung (2.1c) folgt aus der Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Fluid mit der Bedingung $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ für die Dichte ρ .

Für eine genaue Herleitung sei auf gängige Lehrbücher wie [Cha81] oder [Hak83] verwiesen.

2.2 Die Boussinesq-Approximation

Zur Vereinfachungen der Grundgleichungen wird die Variation der Dichte ρ als klein angenommen. Sie wird somit als

$$\rho = \begin{cases} \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) & \text{im Kraftterm: } \alpha g T(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_z \\ \rho_0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.2)$$

approximiert und wurde in der Herleitung von Gleichung (2.1) einbezogen. Die Bezugstemperatur T_0 ist die Temperatur, für die die Materialkonstanten angegeben werden. Die Temperatur T ist nicht als Temperatur auf der Kelvin-Skala mit absolutem Tiefpunkt $T = 0$ K zu sehen, sondern als Temperaturabweichung von der Bezugstemperatur T_0 . Eine negative Temperatur bezeichnet in diesem Rahmen Temperaturen unterhalb von T_0 . Die Temperaturabhängigkeit der Materialkonstanten wird vernachlässigt. Diese von V. J. Boussinesq [Bou03] eingeführte Näherung gibt zusammen mit den Veröffentlichungen von A. Oberbeck [Obe79] den Gleichungen ihren hier benutzten Namen.

2.3 Entdimensionalisierung

Der Grundgedanke der Entdimensionalisierung ist, dass Größen in Vielfachen von systemeigenen Größen ausgedrückt werden. Durch eine Entdimensionalisierung der Form

$$\frac{1}{h} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \quad \text{und} \quad h \nabla \rightarrow \nabla \quad \text{und} \quad h^2 \Delta \rightarrow \Delta \quad (2.3a)$$

$$\frac{1}{\delta T} T \rightarrow T \quad (2.3b)$$

$$\frac{\kappa}{h^2} t \rightarrow t \quad \text{und} \quad \frac{h^2}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.3c)$$

$$\frac{h}{\kappa} \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} \quad (2.3d)$$

$$\frac{h^2}{\kappa^2} p \rightarrow p \quad (2.3e)$$

kann die effektive Anzahl der Parameter der Grundgleichungen (2.1) reduziert werden. Dabei werden Längenangaben in Vielfachen der Systemhöhe h und Temperaturen in Vielfachen der Temperaturdifferenz zwischen unterer und oberer Platte, der größten Temperaturdifferenz δT angegeben. Als Referenzzeit wird die Zeitdauer $\frac{h^2}{\kappa}$ einer Störungsübertragung von unterer zu oberer Platte durch reine Konduktion gewählt. Die Referenzgeschwindigkeit $\frac{\kappa}{h}$ ist die Geschwindigkeit der Übertragung durch Konduktion und ergibt sich unmittelbar aus der Festlegung der Referenzwerte zur Entdimensionalisierung der Zeit und Länge. Der Druck wird in Vielfachen von $\frac{\kappa^2}{h^2}$ angegeben. Die dimensionslose Form der Grundgleichungen (2.1) ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = & -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \text{Pr} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ & + \text{Pr} \text{Ra} T(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t) = \Delta T(\mathbf{x}, t) \quad (2.4b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad . \quad (2.4c)$$

Die Material- und Systemparameter können zu zwei dimensionslosen Parametern, der Prandtl-Zahl Pr und der Rayleigh-Zahl Ra , zusammengefasst werden. Sie sind folgendermaßen definiert:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} \quad , \quad \text{Ra} = \frac{\alpha g \delta T h^3}{\nu \kappa} \quad . \quad (2.5)$$

Im Rahmen der Boussinesq-Näherung ist die Prandtl-Zahl eindeutig durch die Angabe des verwendeten Fluids und seiner Materialkonstanten ν und κ gegeben. Die Rayleigh-Zahl kann durch Variation von anliegender Temperaturdifferenz δT oder Plattenabstand h des Rayleigh-Bénard-Versuchs über große Skalenbereiche variiert werden.

Da eine numerische Betrachtung unendlich ausgedehnter Systeme nicht möglich ist, folgt unmittelbar eine endliche Ausdehnung in horizontaler Richtung und die Definition eines geometrieabhängigen Seitenverhältnisses Γ . Das Seitenverhältnis einer kartesischen Geometrie kann als Quotient von Breite und Höhe des Simulationsvolumens definiert werden.

2.4 Randbedingungen

Die Geschwindigkeit \mathbf{u} des Fluids soll an den Wänden des Simulationsgebietes Ω sogenannte *no slip*-Randbedingungen erfüllen:

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \quad . \quad (2.6)$$

Die Temperatur soll *Dirichlet*-Randbedingungen

$$T(x, y, z = 0, t) = \frac{\delta T}{2} \quad , \quad T(x, y, z = h, t) = -\frac{\delta T}{2} \quad (2.7)$$

an den Wänden in horizontaler Richtung und *von Neumann*-Randbedingungen

$$\nabla T \cdot \mathbf{n}|_{x=0, x=\Gamma \cdot h} = 0 \quad \mathbf{n}: \text{Normalenvektor} \quad (2.8)$$

in vertikaler Richtung erfüllen. In entdimensionalisierter Form lauten die Randbedingungen

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.9)$$

und

$$T(x, y, z = 0, t) = \frac{1}{2} \quad , \quad T(x, y, z = 1, t) = -\frac{1}{2} \quad , \quad \nabla T \cdot \mathbf{n}|_{x=0, x=1} = 0. \quad (2.10)$$

Eine andere Art von Randbedingungen stellen die spannungsfreien Ränder dar. An spannungsfreien Rändern haftet das Fluid nicht und für die Geschwindigkeit in entdimensionalisierter Form gilt für alle Zeiten am Ort $z = 0$ und $z = 1$

$$u_z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0. \quad (2.11)$$

Unter Vernachlässigung der Oberflächenspannung treten spannungsfreie Ränder an der Oberfläche von Flüssigkeiten auf. Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wird nicht weiter auf spannungsfreie Ränder eingegangen, sondern *no slip*-Randbedingungen angenommen.

2.5 Vorstellung der Simulation

Es soll kurz auf die betrachtete Simulation [Lül11] eingegangen werden. In [Lül11] wird ein Fluid im zweidimensionalen Rayleigh-Bénard-System mit wärmeisolierenden Seitenwänden simuliert. Das System ist so skaliert, dass für die

horizontale Komponente $x \in [0, L_x]$ und $z \in [0, L_z]$ gelten soll. Mit $L_x = L_z = 2\pi$ liegt ein quadratisches Simulationsvolumen mit Seitenverhältnis $\Gamma = 1$ vor. Zu Simulationsbeginn befindet sich das Fluid in Ruhe. Die systemcharakterisierenden Parameter sind die Prandtl-Zahl Pr und die Rayleighzahl Ra . Sie wurden als

$$Pr = 3, \quad Ra = 5 \cdot 10^7 \quad (2.12)$$

gewählt, da gemäß [SNS⁺10] für diese Parameter Reversals zu erwarten sind. Die Simulation ist eine Direkte Numerische Simulation (DNS) der Grundgleichungen mit der ein Datensatz generiert wurde, anhand dessen die Eigenschaften des Systems untersucht werden. Die Zeit wurde in Schritten von $dt = 10^{-3}$ diskretisiert und das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld alle 0.2 herausgeschrieben.

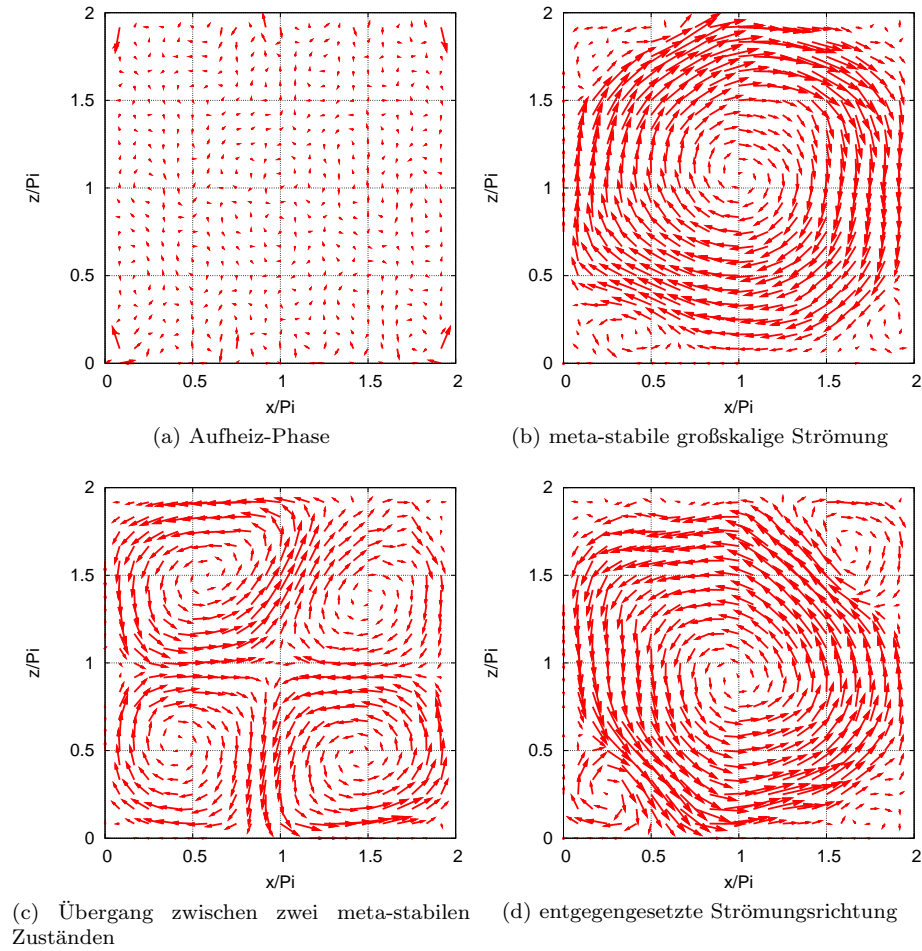


Abbildung 2.1: Strömungsbilder typischer Zustände des Systems

Abbildung 2.1 stellt einige typische Zustände des Systems exemplarisch dar. Da das Fluid zu Simulationsbeginn in Ruhe ist, muss eine großskalige Strömung erst aufgebaut werden. Dies wird durch den sogenannten Aufheizvorgang (Abb. 2.1a) erzeugt und liefert anfangs noch keine geordnete Struktur. In Abbildung 2.1b

ist eine großskalige Strömung aufgebaut worden. Ein Umordnungsprozess wie in Abbildung 2.1c erzeugt eine Umorientierung der großskaligen Strömung (siehe Abb. 2.1d). In Abbildung 2.1d sind die sogenannten Eckrollen (unten links und oben rechts) besonders deutlich zu sehen. Ihre Orientierung ist hier entgegengesetzt zur großskaligen Strömung.

3 Basismoden und Detektion von Reversals

In diesem Kapitel erfolgt die numerische Auswertung des Datensatzes der Diplomarbeit [Lül11]. Im Folgenden wird auf Methoden eingegangen, die einen Einblick in das Verhalten des Systems liefern. Die numerischen Daten sind durch Auswertung des Datensatzes erzeugt worden und wurden mit Gnuplot visualisiert.

Zur Detektion von Reversals wird eine orthonormierte Basis gewählt, in der alle Geschwindigkeits-Konfigurationen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ eines zweidimensionalen Systems darstellbar sein sollen. Es ist möglich eine Basis zu wählen, bei der die Basisvektoren gerade oder ungerade gegenüber Spiegelung an der Mittelsenkrechten sind. Für die Basisvektoren sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden: Entweder kann ein orthogonales Basissystem analytisch vorgegeben oder empirisch generiert werden. In beiden Fällen liefert eine Projektion der numerischen Daten auf die Basis Amplituden, die den Zustand des Systems charakterisieren. Denkbar ist, dass mit einem Reversal ein Vorzeichenwechsel³ einhergeht, der es ermöglichen würde Reversals zu finden und ihre zeitlichen Verlauf während der Umstrukturierung näher zu beleuchten.

3.1 Analytische Basismoden

Da im vorliegenden numerischen Experiment eine quadratische Geometrie vorliegt, wird eine angepasste Darstellung ähnlich zu [PWB⁺11] gewählt. Ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(x, z, t)$ soll folgendermaßen durch eine orthonormierte Basis φ_n mit Normierungskonstante \mathcal{N} und Fensterparameter $c = 10^{-3}$ dargestellt werden:

$$\mathbf{u}(x, z, t) = \sum_n \xi_n(t) \varphi_n(x, z) + R \quad (3.1)$$

$$\varphi_n(x, z) = \mathcal{N} \cdot (x(L_x - x) \cdot z(L_z - z))^c \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(n\pi \frac{x}{L_x}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{L_z}\right) \\ \cos\left(n\pi \frac{x}{L_x}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{L_z}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Das Residuum R stellt den Anteil dar, der nicht durch die Moden φ_n aufgelöst werden konnte. Die Amplitude ξ_n gibt die Ausprägung der Mode φ_n im Strömungsbild an. Sie ergeben sich durch das Skalarprodukt zu:

$$\xi_n(t) = \langle \varphi_n(x, z) | \mathbf{u}(x, z, t) \rangle = \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} \mathbf{u}(x, z, t) \varphi_n(x, z) dx dz \quad (3.3)$$

Da das Skalarprodukt numerisch errechnet wird, ergibt sich eine Diskretisierung der Größen x , z und t zu x_i , z_j und t_k . Es wird somit folgendes Skalarprodukt ausgewertet:

$$\xi_n(t_k) = \frac{L_x L_z}{N_x N_z} \sum_i \sum_j \varphi_n(x_i, z_j) \mathbf{u}(x_i, z_j, t_k) \quad (3.4)$$

³Der Vorzeichenwechsel findet in derjenigen Amplitude statt, die mit der Stärke und Richtung der großskaligen Strömung gekoppelt ist.

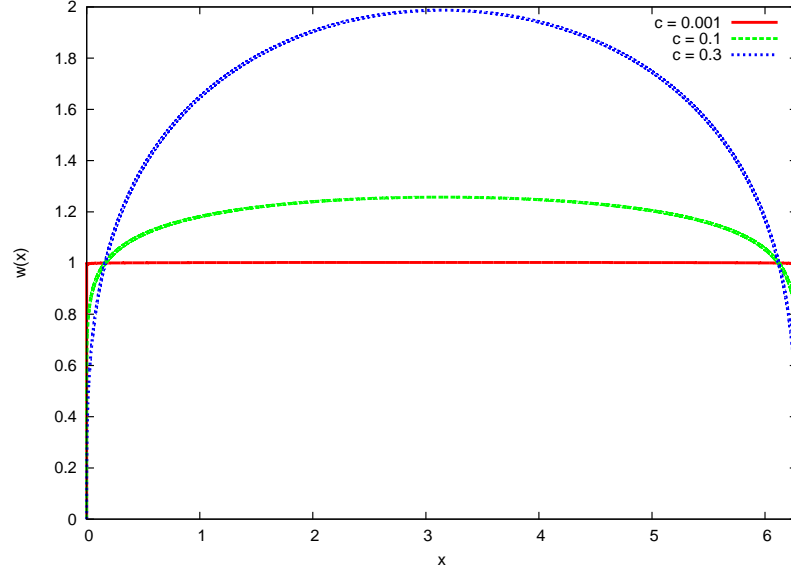


Abbildung 3.1: Fensterfunktion für $c = 0.001, 0.1, 0.3$. Die Fensterfunktion erzwingt, dass die Geschwindigkeit am Rand $x = 0$ und $x = 2\pi$ verschwindet. Für größere Werte c tritt eine stärkere Gewichtung der Innenbereiche auf. Die Abweichung der Fensterfunktion von der Rechteck-Funktion (die um π zentriert ist) nimmt für kleine Werte c ab.

Dabei wird eine äquidistante Diskretisierung in N_x (N_z) Teilbereiche für die horizontale (vertikale) Ortskoordinate angenommen.

Um *no slip*-Randbedingungen zu erreichen, enthalten die Basismoden eine stetige Fensterfunktion, die dafür sorgt, dass die Geschwindigkeit am Rand verschwindet. Die Fensterfunktion für eine Komponente $w(x) = (x(L_x - x))^c$ ist in Abbildung 3.1 exemplarisch für einige Werte c dargestellt. Hervorzuheben ist, dass die Basisvektoren Eigenfunktionen⁴ des Laplace-Operators, aber nicht Lösungen der Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen [PWB⁺11] sind. Diese Abweichung soll in Kapitel 4 für kleine n näher betrachtet werden. Die ersten drei Basismoden φ_1, φ_2 und φ_3 sollen nun explizit angegeben und visualisiert wer-

⁴Strenggenommen sind nur die Basisvektoren ohne Fensterfunktion Eigenfunktionen des Laplace-Operators. Da sie, bis auf den Randbereich, eine Multiplikation mit Faktor 1 darstellt, ist der dadurch gemachte Fehler klein gegenüber den anderen Approximationen.

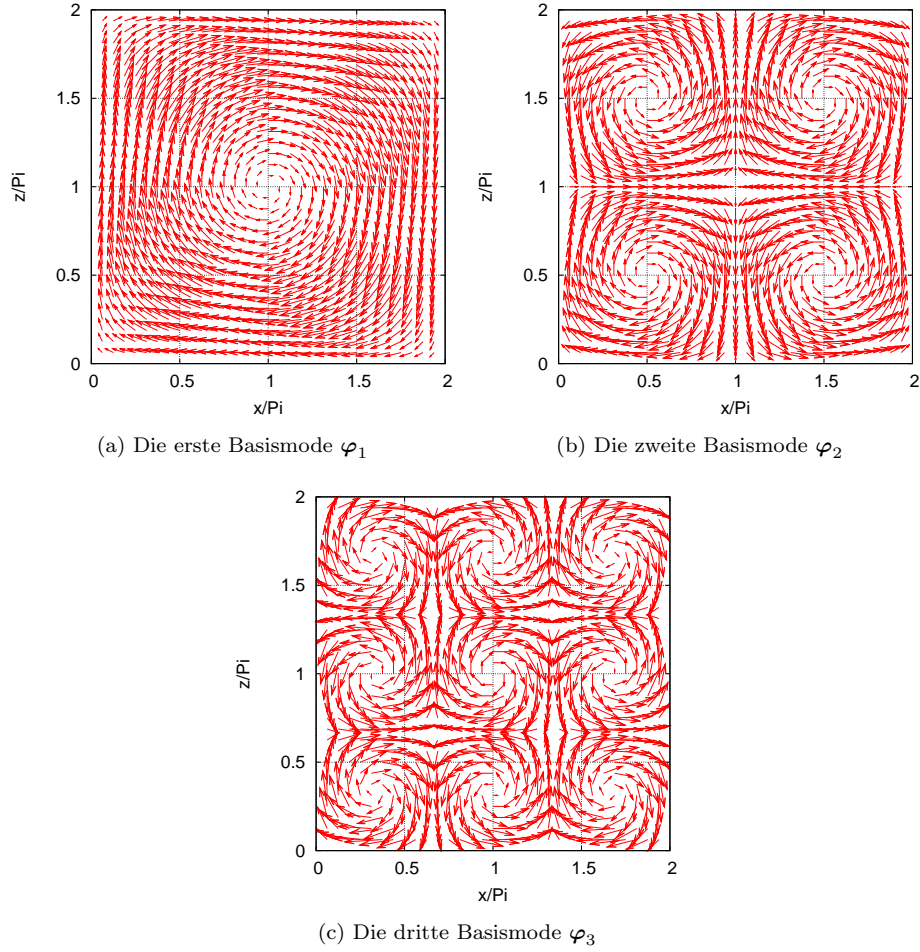


Abbildung 3.2: Die ersten drei Basismoden für $N_x = N_z = 32$ Zwischenstellen.

den. Sie werden durch

$$\varphi_1 = \mathcal{N} \cdot (x(L_x - x) \cdot z(L_z - z))^c \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\frac{z}{2}) \sin(\frac{x}{2}) \\ \sin(\frac{z}{2}) \cos(\frac{x}{2}) \end{pmatrix} \quad (3.5a)$$

$$\varphi_2 = \mathcal{N} \cdot (x(L_x - x) \cdot z(L_z - z))^c \cdot \begin{pmatrix} -\cos(z) \sin(x) \\ \sin(z) \cos(x) \end{pmatrix} \quad (3.5b)$$

$$\varphi_3 = \mathcal{N} \cdot (x(L_x - x) \cdot z(L_z - z))^c \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\frac{3}{2}z) \sin(\frac{3}{2}x) \\ \sin(\frac{3}{2}z) \cos(\frac{3}{2}x) \end{pmatrix} \quad (3.5c)$$

beschrieben. Die erste Basismode ist ungerade bezüglich Spiegelung an der Mittelsenkrechten bei $x = \frac{L_x}{2}$ und lässt sich als großskalige Strömung interpretieren. Sie ist in Abbildung 3.2a dargestellt. Die zweite Basismode ist gerade bezüglich Spiegelung. Sie ist in Abbildung 3.2b visualisiert. Die dritte Basismode φ_3 ist in Abbildung 3.2c visualisiert und ist ungerade bezüglich Spiegelung. Die dritte Basismode kann als Beitrag der Eckrollen interpretiert werden. Die Bedeutung des Vorzeichens von ξ_n soll nun am Beispiel der ungeraden Mode φ_1 näher un-

tersucht werden. Hervorzuheben ist, dass die Basismode φ_1 in Abbildung 3.2a eine Konvektion darstellt, in der der Teilchenstrom in mathematisch negativer Richtung strömt. Liefert nun eine Projektion eines gegebenen Geschwindigkeitsvektorfeldes $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ auf φ_1 eine positive Amplitude ξ_1 , so kann auf eine großskalige Konvektion in mathematisch negativer Richtung geschlussfolgert werden. Eine negative Amplitude bedeutet im Umkehrschluss eine Strömung in entgegengesetzter Richtung.

3.2 Empirische Basismoden

Für die empirischen Basismoden ψ_{odd} , ψ_{even} wird nicht die Form der Basismoden, sondern die Konstruktionsregeln vorgegeben.

$$\tilde{\psi}_{\text{odd}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_x(x, z, t) + u_x(L_x - x, z, t) \\ u_z(x, z, t) - u_z(L_x - x, z, t) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\tilde{\psi}_{\text{even}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_x(x, z, t) - u_x(L_x - x, z, t) \\ u_z(x, z, t) + u_z(L_x - x, z, t) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Die Basismoden werden aus dem Rayleigh-Bénard-System so extrahiert, dass per Definition eine gerade und eine ungerade Basismode bezüglich Spiegelung entsteht. Für eine aussagekräftige empirische Mode muss über einen repräsentativen Bereich nach Abschluss der Aufheizphase gemittelt werden, der eine gleiche Konvektionsrichtung aufweist. Im Folgenden werden die auf Eins normierten Mittelungen über $\tilde{\psi}_{\text{odd}}$ und $\tilde{\psi}_{\text{even}}$ als ψ_{odd} und ψ_{even} bezeichnet. Die Zerlegung eines Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{u} in die Amplituden ξ_{odd} und ξ_{even} wird analog zu Gleichung (3.4) über das diskrete Skalarprodukt erreicht.

Eine Mittelung kann beispielsweise zwischen zwei Reversals oder über größere Teile des Datensatzes erfolgen. Als Auswahlkriterium kann die analytische Projektion genutzt werden, um so über Bereiche zu mitteln, deren Amplitude ξ_1 (großskalige Strömung) positiv (negativ) ist. Mit Vorgriff auf Kapitel 5 sei an dieser Stelle nur gesagt, dass die empirischen Moden über einen repräsentativen Zeitraum nahezu stationärer Strömung gemittelt wurden. ψ_{odd} und ψ_{even} sind in den Abbildungen 3.3 und 3.4 visualisiert. In Abbildung 3.3 ist eine großskalige Strömung im Uhrzeigersinn erkennbar, die mit kleineren Konvektionsrollen in den Ecken überlagert ist, die entgegen dem Uhrzeigersinn rotieren. Auf den ersten Blick könnte man annehmen, dass es sich hierbei um eine einfache Überlagerung der analytischen φ_1 - und φ_3 -Basismode handelt. Eine genaue Analyse wird in Kapitel 4 durchgeführt. Ein Vergleich zwischen den Abbildungen 3.4 und 3.2b zeigt einen dominanten Anteil von φ_2 in ψ_{even} . Es ist zu erkennen, dass die Mittelpunkte der Strudel bei ψ_{even} weiter außen liegen als bei der analytischen Basismode φ_2 .

Ein erster Vergleich zwischen empirischen und analytischen Moden zeigt, dass die Abweichung der angegebenen analytischen Basisfunktionen als Eigenfunktionen des Laplace-Operators von der formal korrekten, jedoch nicht bekannten, Lösungen der Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen für kleine Ordnungen n klein sind. Der Frage, welche Ordnung als „klein“ angesehen werden kann, soll nun nachgegangen werden.

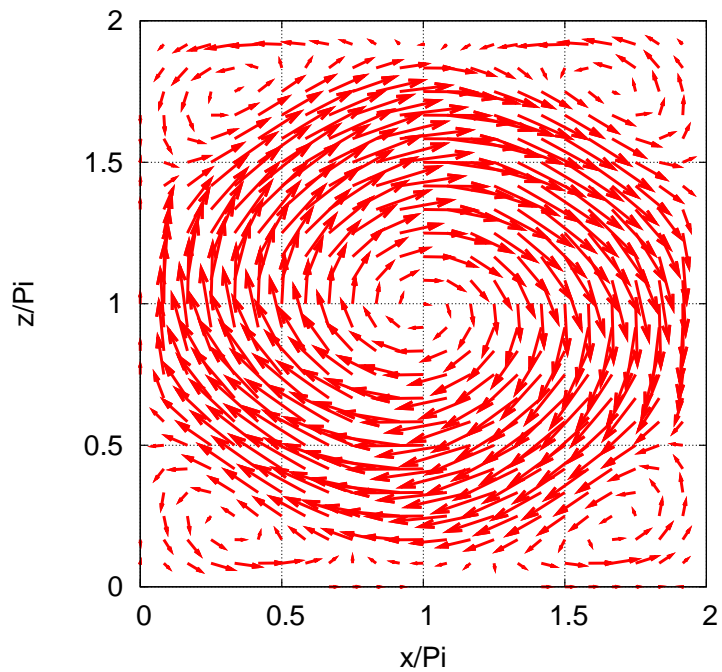


Abbildung 3.3: Die gemittelte ungerade empirische Basismode ψ_{odd} .

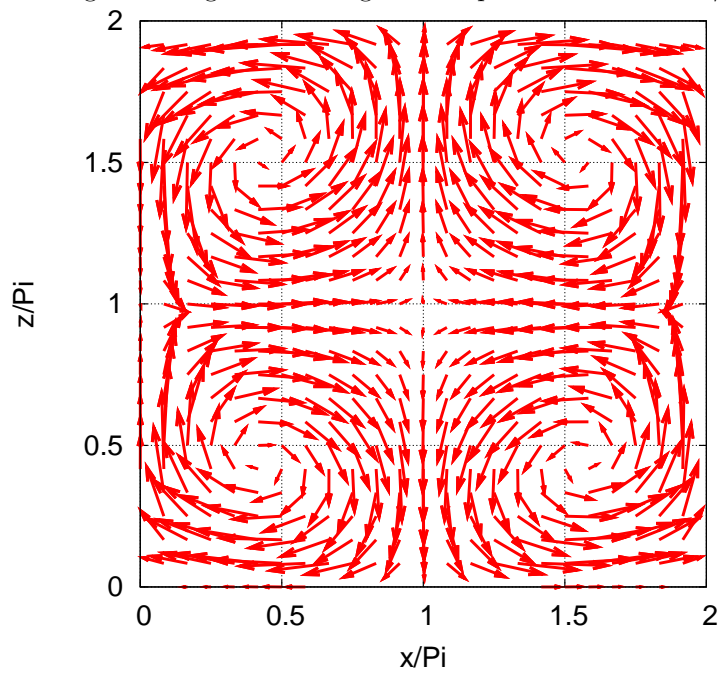


Abbildung 3.4: Die gemittelte gerade empirische Basismode ψ_{even} .

4 Vergleich und Analyse der Basismoden

Da die empirischen Moden ausschließlich durch die Konstruktionsregeln charakterisiert sind, werden in ψ_{even} alle geraden Strömungsanteile und in ψ_{odd} alle ungeraden Strömungsanteile erfasst. Der Vorteil ist, dass auch die Form a priori nicht bekannter Strömungsanteile erfasst werden kann, die nicht zwangsläufig durch Linearkombinationen der angegebenen analytischen Basisvektoren konstruiert werden können, sodass die Approximation ab einer Ordnung n abgebrochen werden kann. Im Folgenden sollen ψ_{odd} und ψ_{even} mit einem Tief- beziehungsweise Hochpass-Filter bearbeitet werden. Aus Symmetrieüberlegungen ist ersichtlich, dass in der empirischen geraden Mode keine ungeraden analytischen Basismoden analysiert werden müssen und umgekehrt. Die entsprechenden Amplituden ξ_n verschwinden.

4.1 Tiefpass-Filterung

Ein Tiefpass $\text{TP}_m(\mathbf{u})$ der Ordnung m einer Strömungskonfiguration $\mathbf{u}(x, z, t)$ lässt sich als Orthogonalprojektion auf die analytischen Basismoden $\varphi_1 \dots \varphi_m$ darstellen:

$$\text{TP}_m(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^m \xi_n(t) \varphi_n(x, z) = \sum_{n=1}^m \langle \varphi_n(x, z) | \mathbf{u}(x, z, t) \rangle \varphi_n(x, z) \quad . \quad (4.1)$$

Dadurch werden Strömungsanteile analytischer Basismoden bis zur Ordnung m aufgelöst, wenn vorausgesetzt wird, dass die Abweichung φ_n von den korrekten Eigenmoden der Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen klein ist. Die Ordnung m des Tiefpasses soll nun schrittweise erhöht werden, um eine Approximation des Strömungsbildes durch die niedrigeren Moden zu erhalten. Dieses Verfahren gibt somit eine qualitative Auskunft, bis zu welcher Ordnung m Strömungsanteile berücksichtigt werden müssen, um die Strömung in guter Näherung erfassen zu können.

An dieser Stelle soll betont werden, dass $\xi_n \cdot \varphi_n = \langle \varphi_n | \mathbf{u} \rangle \varphi_n$ eine Orthogonalprojektion darstellt. Das heißt: Ist in \mathbf{u} ein vernachlässigbarer Strömungsanteil durch φ_n gegeben, so ist $\xi_n \approx 0$. Eine Tiefpassfilterung soll nun für $\mathbf{u} = \psi_{\text{odd}}$ und $\mathbf{u} = \psi_{\text{even}}$ durchgeführt werden.

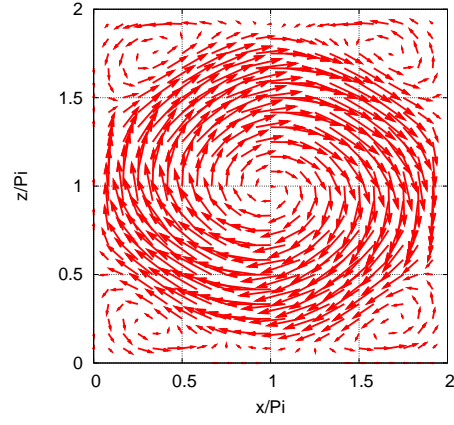
4.1.1 Ungerade empirische Mode

Die Tiefpass-Filterung für die ungerade empirische Mode ist in Abbildung 4.1 dargestellt. In Abbildung 4.1a ist zum direkten Vergleich ψ_{odd} dargestellt. Abbildung 4.1b stellt eine Approximation von ψ_{odd} durch den ersten analytischen Basisvektor φ_1 dar. Dadurch wird die großskalige Strömung zwar aufgelöst, dennoch gibt es einen Unterschied in der Stärke der Strömung im Innenbereich und die Eckrollen sind noch nicht erkennbar. Die Umlaufrichtung der Eckrollen ist entgegengesetzt zur Konvektion im Innenbereich. Durch die Mitberücksichtigung der Eckrollen sollte eine Abflachung der ansonsten runden großskaligen Konvektion im Innenbereich resultieren, wie sie in der empirischen Basismode zu sehen ist. Durch Hinzunahme der φ_3 -Mode in Abbildung 4.1c wird diese Abflachung zwar erreicht, jedoch ist keine erkennbare Ausprägung der Eckrollen

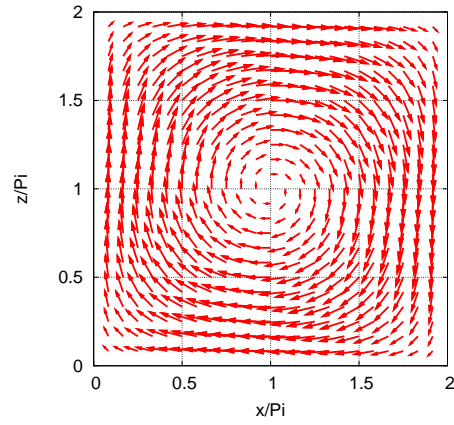
zu sehen. Dies deutet darauf hin, dass die gemittelte ungerade empirisch Basismode ψ_{odd} nicht zufriedenstellend als Überlagerung von φ_1 und φ_3 realisiert werden kann. Auf die Frage, ob eine bessere Approximation durch Mitberücksichtigung höherer analytischer Basismoden erreicht werden kann, wird in der Hochpass-Filterung eingegangen.

4.1.2 Gerade empirische Mode

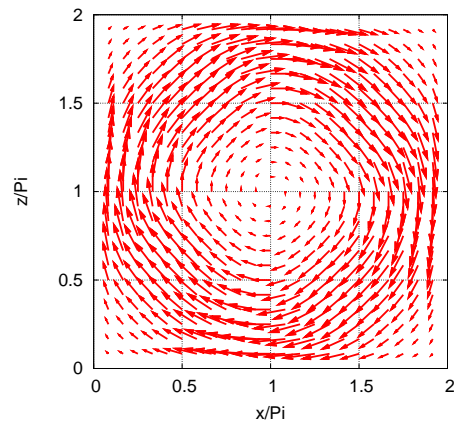
Die Tiefpass-Filterung für die gerade empirische Mode ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Zum direkten Vergleich ist ψ_{even} in Abbildung 4.2a dargestellt. Abbildung 4.2b stellt eine zufriedenstellende Approximation durch φ_2 dar. Eine Mitberücksichtigung der φ_4 -Mode liefert aufgrund der schwachen Ausprägung (ξ_4 klein) einen vernachlässigbaren Beitrag. Die Mittelpunkte der Strudel der empirischen geraden Basismode liegen leicht weiter außen als bei der φ_2 -Mode. Aufgrund dieser geringen Abweichungen kann geschlussfolgert werden, dass die empirische gerade Mode im Wesentlichen der analytischen zweiten Basismode φ_2 entspricht.



(a) ψ_{odd}

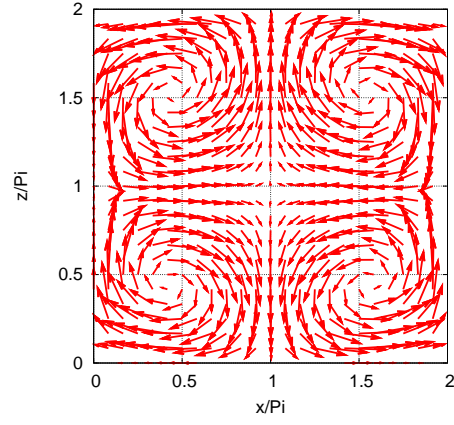


(b) $\text{TP}_1(\psi_{\text{odd}})$

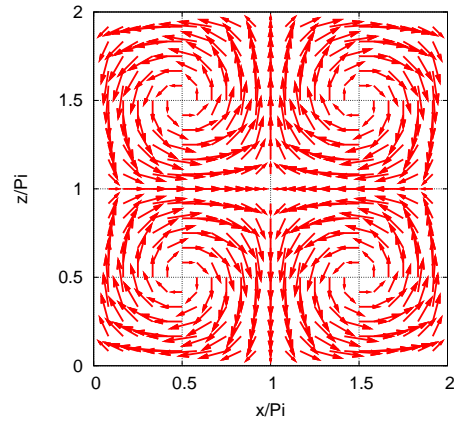


(c) $\text{TP}_3(\psi_{\text{odd}})$

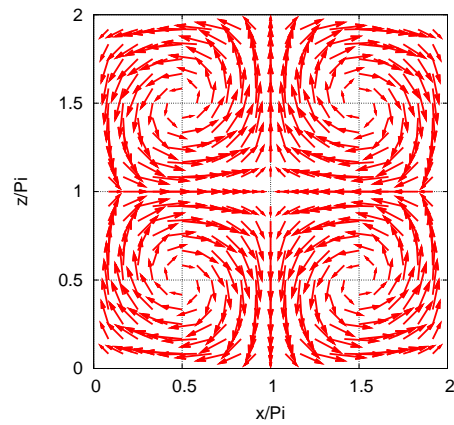
Abbildung 4.1: Tiefpass-Filterung für die ungerade empirische Basismode ψ_{odd}



(a) ψ_{even}



(b) $\text{TP}_2(\psi_{\text{even}})$



(c) $\text{TP}_4(\psi_{\text{even}})$

Abbildung 4.2: Tiefpass-Filterung für die gerade empirische Basismode ψ_{even}

4.2 Hochpass-Filterung

Ein Hochpass $\text{HP}_m(\mathbf{u})$ der Ordnung m eines Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}(x, z, t)$, bei dem niedrigere analytische Basismoden $\varphi_1 \dots \varphi_m$ nicht mitbetrachtet werden sollen, lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \text{HP}_m(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}(x, z, t) - \sum_{n=1}^m \xi_n(t) \varphi_n(x, z) \\ &= \mathbf{u}(x, z, t) - \sum_{n=1}^m \langle \varphi_n(x, z) | \mathbf{u}(x, z, t) \rangle \varphi_n(x, z) \quad . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nimmt man an, dass die angegebenen analytischen Basisvektoren φ_n für kleine n näherungsweise Lösungen der Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen sind, so ergeben sich aufgrund der Hochpass-Filterung die geometrischen Formen höherer Strömungsanteile. Anschaulich gesprochen wird bei dieser Art der Hochpass-Filterung schrittweise die jeweils noch enthaltene tiefste Basismode φ_m herausgefiltert. Dies stellt nur solange ein sinnvolles Verfahren dar, wie die Basismode die als nächstes herausgefiltert wird noch erkennbar ist. Ist im hochpassgefilterten Strömungsbild die nächst höhere Basismode φ_{m+1} noch erkennbar, so kann geschlussfolgert werden, dass die Abweichung der analytischen Basismode φ_{m+1} von der wahren Eigenmode der Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen vernachlässigbar klein ist. Auf diese Weise kann qualitativ eine Ordnung n der „verhältnismäßig gut gewählten“ Basismoden $\varphi_1 \dots \varphi_n$ abgeschätzt werden, indem ein Vergleich der Ähnlichkeit zwischen hochpassgefiltertem Strömungsbild und analytischen Moden gezogen wird.

4.2.1 Ungerade empirische Mode

Die Hochpass-Filterung für die ungerade empirische Mode ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Abbildung 4.3a stellt ψ_{odd} zum direkten Vergleich dar. In Abbildung 4.3b wurde der durch die erste Basismode φ_1 bedingte Strömungsanteil herausgefiltert. Dadurch ist eine elliptische Konvektion im Innenbereich zu sehen, die darauf hindeutet, dass eine großskalige Konvektion nicht ausschließlich durch die angegebene erste analytische Basismode φ_1 gegeben sein kann. Entweder lässt sich daraus schließen, dass die geometrische Form der ersten Basismode variiert werden muss, um eine stärkere und lokalisiertere großskalige Strömung im Innenbereich zu erreichen, oder es sind weitere Moden an einer großskaligen Strömung beteiligt, deren Form und Beitrag nicht näher bekannt ist. In Abbildung 4.3b sind außerdem die Eckrollen noch deutlich zu erkennen. Sie sollen als Beitrag der φ_3 -Mode interpretiert werden und im nächsten Schritt herausgefiltert werden.

Abbildung 4.3c stellt ψ_{odd} nach Abzug der Beiträge durch die Basismoden φ_1 und φ_3 dar. Nach Abzug der Mode φ_3 sind keine Eckrollen mehr erkennbar. Es sind drei übereinander liegende Konvektionsrollen erkennbar, die jeweils entgegengesetzte Konvektionsrichtungen aufweisen.

Die Regelmäßigkeit und Struktur des hochpassgefilterten Strömungsbildes kann nur spekulativ begründet werden. Einerseits ist denkbar, dass sich dieses Strömungsbild als Artefakt der Behandlung mit den Quasi-Eigenmoden φ_n ergibt

und eine Hochpass-Filterung mit den korrekten Eigenmoden der Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen Strömungsbilder anderer Struktur aufweisen würde. Zum Anderen kann die Existenz der Strömungsstrukturen in Abbildung 4.3c an dieser Stelle auch nicht ausgeschlossen werden.

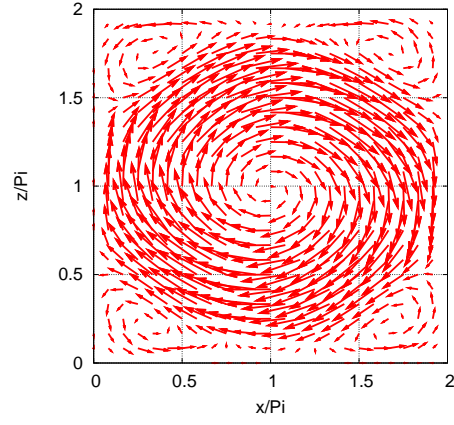
4.2.2 Gerade empirische Mode

Die Hochpass-Filterung für die gerade empirische Mode ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Abbildung 4.4a stellt ψ_{even} zum direkten Vergleich dar. Der Anteil der analytischen Basismode φ_2 ist deutlich zu erkennen.

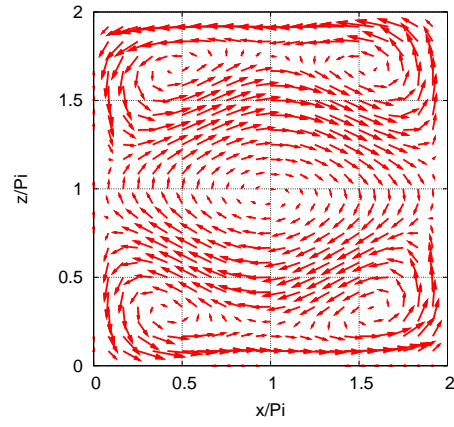
In Abbildung 4.4b wurde der durch die zweite Basismode φ_2 bedingte Strömungsanteil herausgefiltert. Eine Aufteilung des quadratischen Simulationsvolumens in vier kleinere Quadrate ist erkennbar und ist Grund zur Annahme, dass die nächst höhere gerade Basismode signifikant anders aussieht als die analytische Basismode φ_4 . Aufgrund dieser Abweichung lässt sich erklären, warum Abbildung 4.4c (das Strömungsbild mit herausgefiltertem φ_4 -Anteil) nahezu keine Veränderung zu Abbildung 4.4b aufweist. Geht man davon aus, dass die Basismoden dominant von unten besetzt sind (also $\xi_2 \geq \dots \geq \xi_{2m}, m \in \mathbb{N}$ gilt), so wäre in 4.4b die Form der korrekten Basismode vierter (allgemein: $2m$ -ter) Ordnung der Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen gegeben.

4.3 Fazit

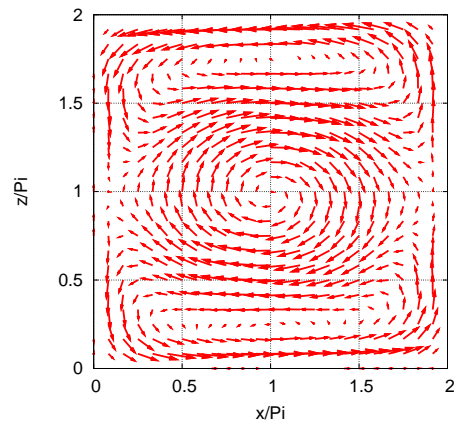
In diesem Kapitel wurden die empirischen Basismoden mithilfe der Tief- und Hochpass-Filterung in analytische Basismoden zerlegt. Es zeigt sich, dass die Abweichung der angegebenen analytischen Basismoden von den korrekten, jedoch nicht näher bekannten, Basismoden der Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen für Ordnungen $n > 3$ nicht vernachlässigbar ist. Eine analytische Beschreibung der empirisch geraden Mode nach Abzug der φ_2 -Mode aus Abbildung 4.4b könnte eine „gut gewählte“ Basismode vierter Ordnung sein, deren Abweichung von den korrekten Eigenmoden der Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen klein ist. Die Kernaussage dieses Kapitels ist, dass die Basismoden φ_1 und φ_2 in guter Näherung und φ_3 in grober Näherung Eigenmoden des Rayleigh-Bénard-Systems darstellen. Eine Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}(x, z, t)$ in diese Moden liefert somit einen Einblick in die Dynamik des Systems.



(a) ψ_{odd}

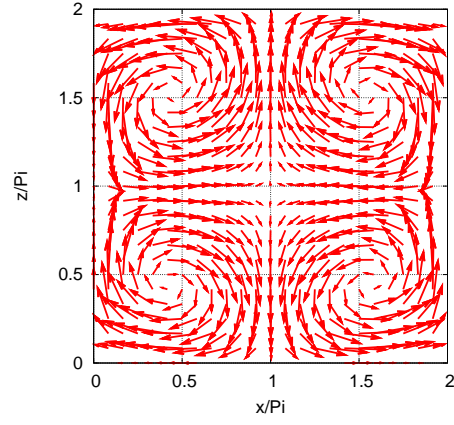


(b) $\text{HP}_1(\psi_{\text{odd}})$

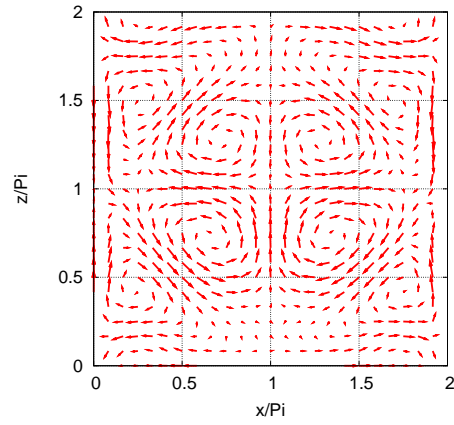


(c) $\text{HP}_3(\psi_{\text{odd}})$

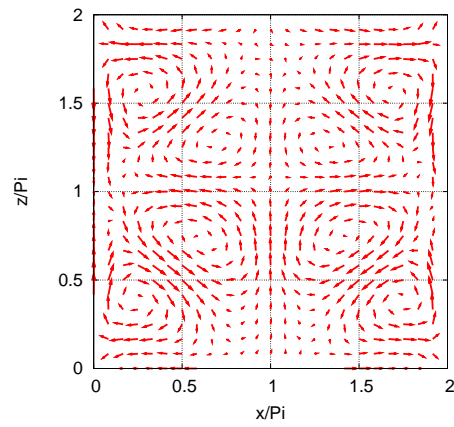
Abbildung 4.3: Hochpass-Filterung für die ungerade empirische Basismode ψ_{odd}



(a) ψ_{even}



(b) $\text{HP}_2(\psi_{\text{even}})$



(c) $\text{HP}_4(\psi_{\text{even}})$

Abbildung 4.4: Hochpass-Filterung für die gerade empirische Basismode ψ_{even}

5 Analyse des Datensatzes

In diesem Kapitel soll die Dynamik des Systems betrachtet und analysiert werden. Dazu wird folgendermaßen vorgegangen: Die Geschwindigkeitsfelder \mathbf{u} der Simulation [Lül11] werden in Amplituden ξ_n , ξ_{odd} und ξ_{even} analytischer und empirischer Basismoden zerlegt und werden als Zeitreihe und im Phasenraum visualisiert und ermöglichen somit einen Einblick in die Dynamik des Systems. Aus Kapitel 4 lässt sich entnehmen, dass die Zerlegung für $n = 1, 2, 3$ vorzunehmen ist. Die Interpretation der Amplituden $\xi_{1,2,3}$ ermöglicht es repräsentative Zeiträume stationärer Strömung⁵ zu identifizieren, aus denen die empirischen Moden extrahiert werden können.

5.1 Zeitliche Entwicklung der Amplituden

Die zeitliche Entwicklung der Amplituden ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 ist in Abbildung 5.1a dargestellt. ξ_1 weist mehrere Umorientierungen der großskaligen Zirkulation auf. Die Amplitude ξ_2 ist überwiegend positiv, also weist φ_2 überwiegend die Orientierung wie in Abbildung 3.2b auf. Es scheint, als würde eine Umorientierung von ξ_1 mit einer anwachsenden Amplitude ξ_2 korrelieren. Ein Vergleich von ξ_1 und ξ_2 suggeriert eine Umorientierung von ξ_1 , sobald ξ_2 einen Schwellenwert überschreitet. Denkbar ist, dass dieser Schwellenwert von ξ_1 , der Geometrie und weiteren nicht näher bekannten Größen abhängig ist. Die Amplitude ξ_3 hat immer das entgegengesetzte Vorzeichen von ξ_1 .

Die zeitliche Entwicklung von ξ_{even} und ξ_{odd} in Abbildung 5.1b hat in guter Näherung den gleichen Verlauf wie ξ_1 und ξ_2 . Die Abweichung der Kurven ist durch die strukturelle Abweichung der zugrunde liegenden Basismoden gegeben. Beide Basissysteme spiegeln somit die selbe Dynamik des Systems wider. Die empirischen Basismoden ψ_{odd} und ψ_{even} wurden als Mittelungen aus dem Bereich $900 \leq t \leq 1000$ extrahiert.

⁵Gemeint sind Zeitfenster, in denen keine Umstrukturierung des Systems von einem metastabilen in einen anderen metastabilen oder instabilen Zustand stattfindet.

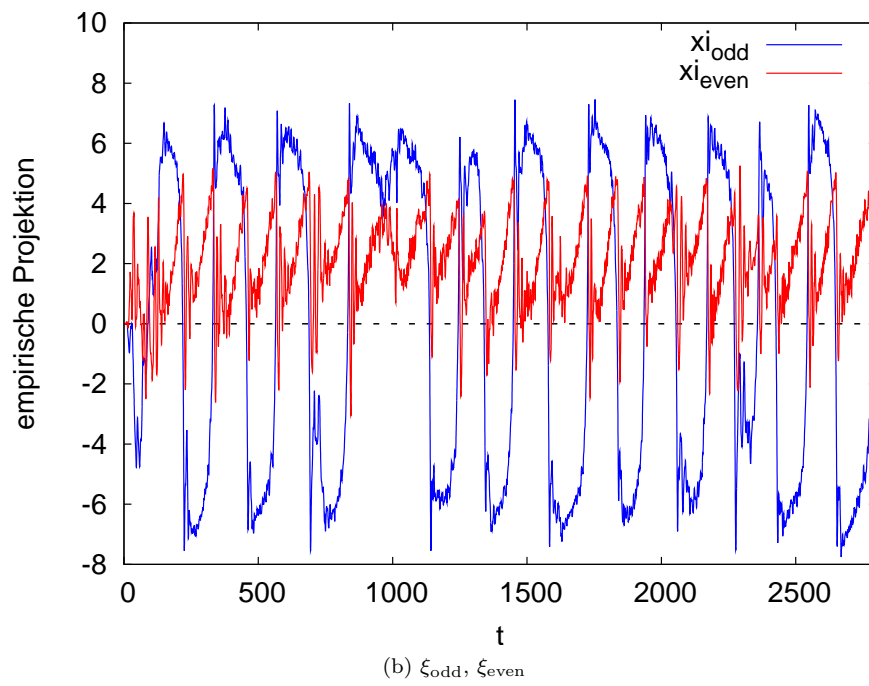
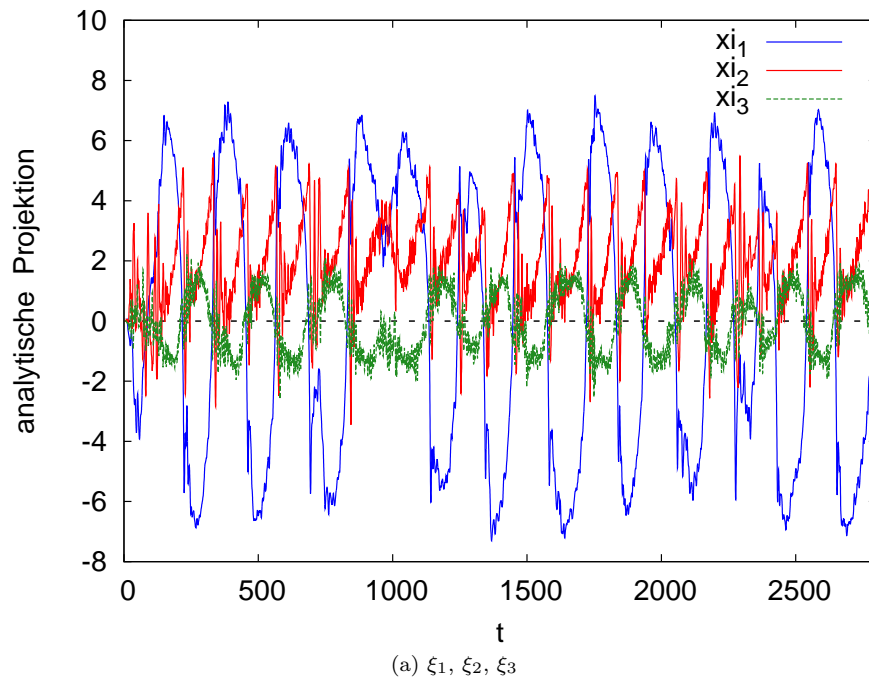


Abbildung 5.1: Zeitliche Entwicklung der Amplituden

5.2 Betrachtung im Phasenraum

Eine Betrachtung im (ξ_3, ξ_1) -Phasenraum in Abbildung 5.2b bestätigt eine starke Korrelation der durch φ_1 und φ_3 gegebenen Strömungsanteile. Dies verfestigt die Interpretation der φ_3 -Mode als Eckrollen, deren Orientierung entgegengesetzt zur großskaligen Strömung ist. Das (ξ_3, ξ_2) -Phasenraumdiagramm in Abbildung 5.2a weist keine erkennbare Korrelation auf. Die (ξ_2, ξ_1) - und $(\xi_{\text{even}}, \xi_{\text{odd}})$ -Phasenraumdiagramme in den Abbildungen 5.2c und 5.2d („empirischer Phasenraum“) spiegeln die selbe Dynamik des Systems wider. Die strukturelle Abweichung der Abbildungen 5.2c und 5.2d ist auf eine Abweichung der angegebenen analytischen Basismoden φ_1, φ_2 von den empirischen Basismoden zurückzuführen. Des Weiteren fließen in Abbildung 5.2d jeweils alle geraden beziehungsweise ungeraden Modenanteile ein, während in Abbildung 5.2c nur die φ_1 - und φ_2 -Anteile aufgelöst werden. Der empirische Phasenraum soll nun

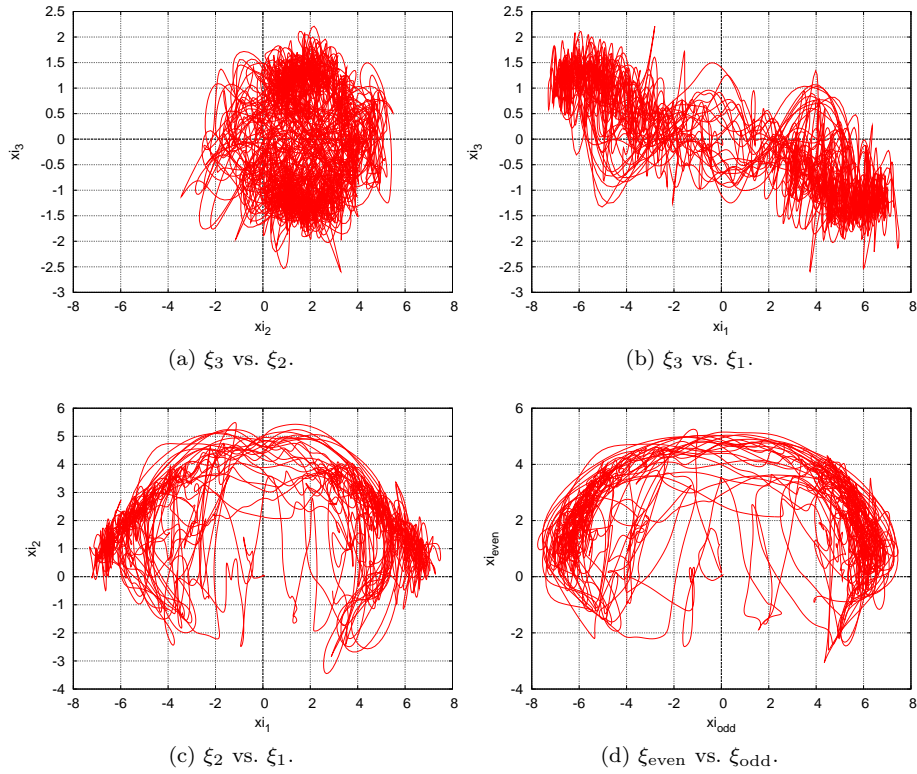


Abbildung 5.2: Dynamik des Systems im Phasenraum

genauer untersucht werden. Der Phasenraum spannt ein Gebiet auf, dass im Folgenden als Schalenstruktur bezeichnet werden soll. Ein Wechsel des Vorzeichens von ξ_{odd} stellt eine Umentorierung der großskaligen Strömung (Reversal) im System dar. Im Phasenraum ist ein Reversal als Übergang von einer zur anderen Seite der Schalenstruktur zu identifizieren.

Von K. Ritter [Rit11] wurde ein analytisches Modell zur Berechnung des Phasenraums ξ_{even} gegen ξ_{odd} entwickelt, dessen Phasenraum in Abbildung 5.3 visualisiert wurde. Die Pfeile geben dabei an, in welche Richtung sich ein Punkt

$(\xi_{\text{odd}}, \xi_{\text{even}})$ im Phasenraum zeitlich entwickelt. Ein Vergleich des Innenbereichs

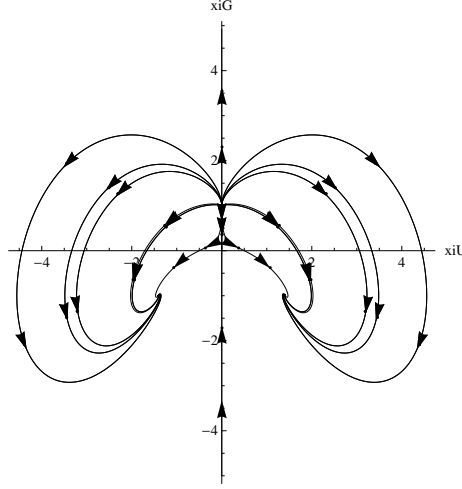


Abbildung 5.3: analytische Berechnung des Phasenraums[Rit11]

von Abbildung 5.3 mit Abbildung 5.2d zeigt, dass die numerisch berechnete Schalenstruktur im Phasenraum unter gewissen Bedingungen analytisch herleitbar ist. Abbildung 5.3 beschreibt eine Organisation des Systems in zwei stabile Fixpunkte, in die die Systemkonfiguration $(\xi_{\text{odd}}, \xi_{\text{even}})$ ⁶ gedrängt wird. Eventuelle Umlappprozesse können auf diese Weise jedoch nicht beschrieben werden. Es kann vermutet werden, dass die Richtung der Pfeile unter Variation bisher unbekannter Parameter umklappt und das System von den ehemals stabilen Fixpunkten zur $\xi_{\text{odd}} = 0$ -Achse gedrängt wird. Eine erneute Umorientierung der Pfeile würde das System in den jeweils anderen Fixpunkt zwingen und so ein Reversal hervorrufen. Dieser Ansatz ist jedoch rein spekulativ und es kann an dieser Stelle kein Grund für eine Umorientierung der Pfeile angeführt werden.

⁶In [Rit11] wurde die Notation ξ_u (ξ_g) für die ungerade (gerade) Amplitude benutzt.

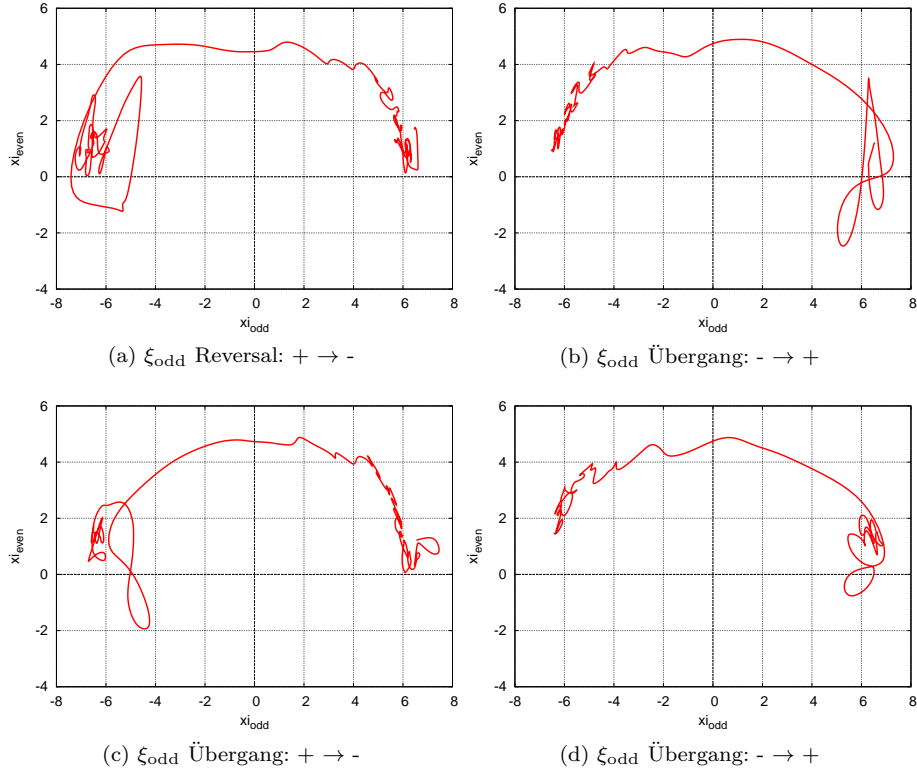


Abbildung 5.4: Dynamik des Systems im Phasenraum

Abbildung 5.4 stellt vier aufeinanderfolgende Reversals (mit Umgebung) im Phasenraum dar. Der Phasenraum in Abbildung 5.4a stellt die Dynamik des Systems ab dem Zeitpunkt $t = 1500$ dar. Die Zeiträume sind so gewählt, dass immer die Bereiche von einer Mitte zwischen zwei Reversals (siehe Amplituden im Zeitraum 5.2d) zur nächsten Mitte zweier Reversals dargestellt werden. Es findet somit ein nahtloser Übergang zwischen den einzelnen Phasenräumen in Abbildung 5.4 statt. Als Basis wurden die empirischen Basismoden gewählt. In Abbildung 5.4 findet sich ein weiteres Indiz dafür, dass ein Reversal dann auftritt, wenn ξ_{even} einen gewissen Schwellenwert überschreitet. Nimmt man an, dass die genaue Form der Umklappprozesse durch statistische Prozesse „ausgeschmiert“ wird, so kann vermutet werden, dass alle Umklappprozess in Abbildung 5.4 im Mittel gleich verlaufen. Eine genaue Analyse könnte durch eine numerische Mittelung über mehrere Umklappprozesse und Systemkonfigurationen⁷ erfolgen. Ein solche Analyse würde hier jedoch den Rahmen sprengen und soll in dieser Arbeit nicht weiter vertieft werden.

⁷Die Umklappprozesse müssten für verschiedene Prandtl- und Rayleigh-Zahlen diskutiert und verglichen werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wurde die zweidimensionale Rayleigh-Bénard-Konvektion eines Fluids im kartesischen Gebiet Ω untersucht. Für die Geschwindigkeit wurden *no slip*-Randbedingungen an allen Wänden und für die Temperatur *Dirichlet*-Randbedingungen an oberer und unterer Platte und *von Neumann*-Randbedingungen an den Seitenwänden gefordert. Zur Analyse großskaliger Winde wurde ein analytisches und ein empirisches Basissystem eingeführt und diese miteinander verglichen. Aus der Tiefpassfilterung konnte abgeleitet werden, dass die analytischen Basismoden φ_1 und φ_2 in guter Näherung und φ_3 in grober Näherung Lösungen der Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen darstellen. Die analytischen Moden φ_n der Ordnungen $n \geq 4$ stellen keine zufriedenstellende Approximation der korrekten Lösungen dar. Mithilfe der Hochpass-Filterung könnte die geometrische Form der Strömungsanteile höherer Ordnung gegeben sein. Es ist möglich, dass Abbildung 4.4b, die Hochpassfilterung der empirischen geraden Mode, die korrekte Basismode vierter oder höherer gerader Ordnung enthält. Aus der Hochpassfilterung der empirischen ungeraden Mode kann qualitativ geschlossen werden, dass eine großskalige Strömung mit Eckrollen nicht auf triviale Weise als Überlagerung einer großen Konvektionszelle mit mehreren kleinen Konvektionszellen dargestellt werden kann. Die Existenz der hochpassgefilterten Strömungsanteile sollte im Rahmen weiterer Simulationen oder Experimente genauer untersucht und Gemeinsamkeiten verschiedener Szenarien näher beleuchtet werden.

Eine Darstellung der Dynamik des Systems als Zeitreihe deutet daraufhin, dass die großskalige Strömung dominant ungerade Anteile bezüglich Spiegelung aufweist, da nur die Amplitude der ungeraden Strömungsanteile ξ_{odd} ihr Vorzeichen bei einem Reversal wechselt. Die Amplitude der geraden Strömungsanteile ξ_{even} weist überwiegend ein positives Vorzeichen auf. Es wurden mehrere Indizien gefunden, die auf eine Umstrukturierung der großskaligen Strömung hindeuten, sobald ξ_{even} einen Schwellenwert überschreitet. Desweiteren wurde bestätigt, dass die Orientierung der Eckrollen stets entgegengesetzt zur Orientierung der großskaligen Strömung ist.

Im Phasenraum konnte eine Organisation des Systems in einer Schalenstruktur beobachtet werden, die sich auch analytisch herleiten lässt. Eine Darstellung von vier aufeinander folgenden Reversals im Phasenraum liefert Grund zur Annahme, dass ein Umklappprozess im Mittel gleich abläuft, dieser jedoch durch statistische Prozesse „ausgeschmiert“ wird. Durch eine Mittelung vieler Reversals im Phasenraum könnte eine solche Annahme näher untersucht werden, um ein besseres Verständnis von Umklappprozessen zu erhalten.

7 Anhang

Der Quellcode des entwickelten Programms findet sich auf der beiliegenden CD. Der C++-Quellcode wurde in der Entwicklungsumgebung Microsoft Visual Studio 2008 geschrieben.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Strömungsbilder typischer Zustände des Systems	6
3.1	Fensterfunktion für $c = 0.001, 0.1, 0.3$	9
3.2	Die ersten drei Basismoden für $N_x = N_z = 32$ Zwischenstellen. . .	10
3.3	Die gemittelte ungerade empirische Basismode ψ_{odd}	12
3.4	Die gemittelte gerade empirische Basismode ψ_{even}	12
4.1	Tiefpass-Filterung für die ungerade empirische Basismode ψ_{odd} .	15
4.2	Tiefpass-Filterung für die gerade empirische Basismode ψ_{even} . .	16
4.3	Hochpass-Filterung für die ungerade empirische Basismode ψ_{odd} .	19
4.4	Hochpass-Filterung für die gerade empirische Basismode ψ_{even} .	20
5.1	Zeitliche Entwicklung der Amplituden	22
5.2	Dynamik des Systems im Phasenraum	23
5.3	analytische Berechnung des Phasenraums[Rit11]	24
5.4	Dynamik des Systems im Phasenraum	25

Literatur

- [Bou03] J. Boussinesq. *Theorie analytique de la chaleur* vol. 2. *Gauthier-Villars, Paris*, page 172, 1903.
- [Cha81] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover Publications, New York, 1981.
- [Hak83] H. Haken. *Synergetics: Introduction and advanced topics*. Springer Verlag, 1983.
- [Lül11] J. Lülff. Statistische Eigenschaften turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2011.
- [Obe79] A. Oberbeck. Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. *Annalen der Physik*, 243(6):271–292, 1879.
- [PWB⁺11] K. Petschel, M. Wilczek, M. Breuer, R. Friedrich, and U. Hansen. Statistical analysis of global wind dynamics in vigorous Rayleigh-Bénard convection. *In preparation*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2011.
- [Rit11] K. Ritter. Großskalige Winde bei der turbulenten Rayleigh-Bénard-Konvektion. Bachelorarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2011.

- [SNS⁺10] K. Sugiyama, R. Ni, R.J.A.M. Stevens, T.S. Chan, S.Q. Zhou, H.D. Xi, C. Sun, S. Grossmann, K.Q. Xia, and D. Lohse. Flow reversals in thermally driven turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 105(3):34503, 2010.

Erklärung zur Bachelorarbeit

Hiermit versichere ich, Alexander Kraft, dass diese Arbeit selbstständig verfasst wurde und außer den ausgewiesenen Hilfsmitteln und Quellen keine weiteren verwendet wurden.

Münster, 24. Juni 2011