

**Berthold Stegemerten**

**Zur Thermodynamik eines  
attraktiven hyperbolischen Streusystems**

**1995**







Theoretische Physik

**Zur Thermodynamik eines  
attraktiven hyperbolischen  
Streusystems**

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
Berthold Stegemerten  
aus Bad Bentheim  
- 1995 -

Dekan: Prof. Dr. F.-K. Holtmeier

Erster Gutachter: Prof. Dr. P. Eckelt

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. K. Blum

Tag der mündlichen Prüfungen: 04. und 06.07.1995

Tag der Promotion: 06.07.1995

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Das System</b>	<b>8</b>
1.1 Herleitung der Abbildung . . . . .	8
1.2 Beispiele klassischer Ablenkfunktionen . . . . .	12
1.3 Modellablenkfunktionen . . . . .	15
1.3.1 Modellablenkfunktion für die Regenbogenstreuung . . . . .	17
1.3.2 Modellablenkfunktion für die Orbitingstreuung . . . . .	18
<b>2 Die Streuung</b>	<b>20</b>
2.1 Streuvariablen und Streuabbildung . . . . .	20
2.2 Numerische Ergebnisse . . . . .	22
2.2.1 Die Streuabbildung . . . . .	22
2.2.2 Die Entweichrate . . . . .	29
<b>3 Chaos und Hyperbolizität</b>	<b>35</b>
3.1 Zur Definition von Chaos . . . . .	35
3.2 Kontraktions- und Expansionseigenschaften von $F$ . . . . .	37
3.3 Hyperbolizität der invarianten Menge . . . . .	40
3.3.1 Transformation von $\Lambda$ nach $\Lambda_G$ . . . . .	44
3.3.2 Hyperbolizität von $\Lambda_G$ . . . . .	45
3.3.3 Hyperbolizität von $\Lambda$ . . . . .	48

<b>4 Symbolische Dynamik</b>	<b>52</b>
4.1 Topologie der invarianten Menge . . . . .	52
4.2 Symbolische Dynamik für das nichtreduzierte System . . . . .	55
4.3 Symbolische Dynamik für das reduzierte System . . . . .	59
4.4 Symbolische Dynamik für das Orbiting–Modell . . . . .	60
4.5 Beschneiden des Symbolbaumes . . . . .	63
4.6 Fundamentale periodische Orbits . . . . .	67
4.7 Strukturstabilität . . . . .	69
4.8 Der Parameterbereich $2 < k < \infty$ . . . . .	71
4.9 Verhalten bei Erhöhung der Muldenzahl . . . . .	72
<b>5 Bifurkationen</b>	<b>76</b>
5.1 Existenz der invarianten Menge . . . . .	76
5.2 Parameterabhängigkeit der invarianten Menge . . . . .	79
5.2.1 Energieabhängigkeit ( $k$ –Abhängigkeit) . . . . .	79
5.2.2 Abhängigkeit von $R_0$ . . . . .	82
5.3 Erklärung der Streuergebnisse . . . . .	83
<b>6 Charakterisierung dynamischer Systeme</b>	<b>87</b>
6.1 Die fraktale Dimension . . . . .	88
6.1.1 Die Hausdorff–Dimension . . . . .	88
6.1.2 Die Kapazität . . . . .	90
6.2 Das natürliche Maß . . . . .	92
6.3 Zur Definition eines Singularitäten–Spektrums . . . . .	92
6.4 Informationsmaße und Dimensionen . . . . .	94
6.4.1 Die Shannon–Information . . . . .	94
6.4.2 Die Rényi–Information . . . . .	95
6.4.3 Rényi–Dimensionen . . . . .	96
6.4.4 Das $f(\alpha)$ –Spektrum . . . . .	97
6.5 Verallgemeinerte Dimensionen $D_q$ . . . . .	100
6.6 Verallgemeinerte Entropien $K_q$ . . . . .	100

6.6.1	Die Kolmogorov–Sinai–Entropie . . . . .	101
6.6.2	Definition von $K_q$ . . . . .	102
6.6.3	Unterschied zwischen verallgemeinerten Dimensionen und verallgemeinerten Entropien . . . . .	103
6.7	Verallgemeinerte Lyapunov–Exponenten $\lambda_q$ . . . . .	104
6.7.1	Der Lyapunov–Exponent einer Trajektorie . . . . .	104
6.7.2	Definition von $\lambda_q$ . . . . .	104
<b>7</b>	<b>Thermodynamik der invarianten Menge</b>	<b>106</b>
7.1	Spinketten und Symbolische Dynamik . . . . .	106
7.1.1	Das eindimensionale Potts–Modell . . . . .	106
7.1.2	Beziehung zwischen Spinketten und Symbolischer Dynamik . . . . .	107
7.2	Zur Definition der freien Energie . . . . .	108
7.2.1	Prinzip der beschränkten Variation . . . . .	110
7.2.2	Partielle Dimensionen . . . . .	111
7.3	Die Entropiefunktion . . . . .	112
7.4	Das bedingt invariante Maß . . . . .	114
7.5	Die freie Energie und die Größen $D_q$ , $K_q$ und $\lambda_q$ . . . . .	116
7.5.1	Beziehung zwischen $\beta F(\beta)$ und $D_q$ . . . . .	116
7.5.2	Beziehung zwischen $\beta F(\beta)$ und $K_q$ . . . . .	118
7.5.3	Beziehung zwischen $\beta F(\beta)$ und $\lambda_q$ . . . . .	120
7.6	Numerische Ergebnisse . . . . .	123
7.6.1	Phasenübergänge . . . . .	127
7.6.2	$k$ –Abhängigkeit der thermodynamischen Potentiale . .	128
7.7	Marginale Stabilität — ein Ausblick . . . . .	133
7.8	Die dynamische Zeta–Funktion . . . . .	136
7.8.1	Die Fugazitätsentwicklung . . . . .	137
7.8.2	Entwicklung nach irreduziblen Orbits . . . . .	138
7.8.3	Numerische Methode zur Bestimmung periodischer Orbits . . . . .	140
7.9	Bestimmung der Entweichrate mit Hilfe der Zeta–Funktion . .	141

<b>Schluß</b>	<b>144</b>
<b>A Lösung des inversen Streuproblems</b>	<b>146</b>
<b>B Zur Hyperbolizität des Troll–Smilansky–Modells</b>	<b>149</b>
<b>C Symmetrische periodische Orbits</b>	<b>152</b>
<b>D Beispiele periodischer Orbits</b>	<b>154</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>158</b>

# Einleitung

Die nichtlineare Dynamik oder auch “Chaostheorie“ hat sich in den letzten Jahren als eigenständiger interdisziplinärer Wissenschaftszweig etabliert. Die Ursprünge der Theorie liegen in der Mathematik. In den sechziger und siebziger Jahren ist ihre besondere Relevanz auch für physikalische Fragestellungen immer deutlicher hervorgetreten. Seitdem sind viele der erzielten Ergebnisse dieser Disziplin auf die wechselseitigen Einflüsse von Mathematik und Physik zurückzuführen. In diesem Zwischenbereich ist auch die vorliegende Arbeit anzusiedeln.

Die bisher vorwiegend angewandten Methoden zur analytischen Behandlung dynamischer Systeme basieren auf der Störungstheorie integrabler Systeme. Ausgehend von einem solchen System, versucht man, die wesentlichen Phasenraumstrukturen nach dem Eintreten einer Störung mit Hilfe von z. B. adiabatischen Konstanten der Bewegung zu beschreiben [Arn89]. Dieses Vorgehen erweist sich als sehr erfolgreich, wenn der Phasenraum von regulären Strukturen dominiert wird. Sind dagegen die chaotischen Bereiche dominant, versagen diese störungstheoretischen Ansätze.

Der Erfolg der Störungstheorie für integrale Regionen des Phasenraums legt nun für nichtintegrable Bereiche folgende Strategie nahe. Man versucht zunächst, “rein chaotische“ Systeme zu verstehen und anschließend in Analogie eine Störungstheorie zu entwickeln. Anfang der siebziger Jahre wurden die notwendigen exakten mathematischen Definitionen für “rein chaotische“ Systeme und darauf aufbauende Theorien entwickelt [Bow75, Rue78]. Da diese Theorien formalen Charakter besitzen, wurde deren Relevanz für konkrete physikalische Problemstellungen zunächst nicht beachtet. Erst Mitte der achtziger Jahre erkannte man, daß die in der mathematischen Theorie entwickelten Charakteristika physikalisch meßbare Größen darstellen [Hal+86]. Seither ist es von besonderem Interesse, physikalische Modellsysteme zu entwickeln, die den strengen Voraussetzungen der mathematischen Theorie genügen. Im Hinblick auf Hamilton–Systeme bilden disulative Billards den Schwerpunkt bisheriger Untersuchungen. Die defokussierende Wirkung konvexer, reflektierender Wände ist die wesentliche Ursache dafür, daß jede Trajektorie in einem solchen System instabil ist und keine regulären Gebiete im Phasenraum auftreten können. Attraktive Wechselwirkungsbereiche erscheinen dagegen aufgrund ihrer fokussierenden und damit stabilisierenden

Wirkung zunächst als wenig geeignet.

Im ersten Teil dieser Arbeit (Kapitel 1–5) stelle ich ein offenes Hamilton–System vor, dessen Potential aus attraktiven Teilbereichen zusammengesetzt ist und das unter bestimmten Voraussetzungen das oben erwähnte “reine Chaos“ aufweist. Die Destabilisierung der Trajektorien erfolgt in diesem Fall durch Überfokussierung. Der zweite Teil dieser Arbeit (Kapitel 6 und 7) beschäftigt sich mit Größen, die der Charakterisierung dynamischer Systeme dienen. Es werden Konzepte, die von verschiedenen Autoren in einer Vielzahl von Arbeiten seit Mitte der achtziger Jahre veröffentlicht worden sind, zusammenfassend dargestellt. Darüber hinaus werden die Verbindungen und Zusammenhänge zwischen diesen Konzepten herausgearbeitet. Das im ersten Teil eingeführte Modellsystem dient dabei als Beispiel, anhand dessen die wesentlichen Aspekte verdeutlicht werden.

Konkret wird in Kapitel 1 das Modellsystem eingeführt. Kapitel 2 hat die Streuung an diesem System zum Thema. Die Ergebnisse von numerisch simulierten Streuexperimenten werden vorgestellt. Die Kapitel 3 und 4 sind von zentraler Bedeutung. In Kapitel 3 wird zunächst “reines Chaos“ im Sinne von DEVANEY präzisiert [Dev89]. Im Mittelpunkt steht dabei der Begriff der hyperbolischen invarianten Menge. Mit analytischen Methoden werden Bedingungen hergeleitet, die die Hyperbolizität des Modellsystems implizieren. Es gibt bisher nur wenige Systeme, für die man die Hyperbolizität im strengen mathematischen Sinne nachweisen kann. Aus diesem Grund wird hier der Schwerpunkt auf die mathematische, formale Beweisführung gelegt. Die vorgestellte Beweistechnik hat Bedeutung über die in dieser Arbeit betrachtete Systemklasse hinaus. Sie ist auf andere Systeme übertragbar. Exemplarisch wird dies in Anhang B für das Troll–Smilansky–Modell vorgeführt. Die noch offene Frage bezüglich der Hyperbolizität dieses Modells ist damit beantwortet [TroSmi89]. Hyperbolizität ist die wesentliche Voraussetzung für die Existenz einer vollständigen Symbolischen Dynamik. In Kapitel 4 wird für einige Spezialfälle der in dieser Arbeit vorgestellten Modellsysteme gezeigt, wie eine solche vollständige Symbolische Dynamik eingeführt werden kann. Kapitel 5 beschäftigt sich mit den Auswirkungen von Parameteränderungen, d. h. insbesondere Störungen des Systems. Es wird gezeigt, wie reguläre Strukturen im Phasenraum des Modellsystems auftreten können. Darüber hinaus werden die Streuergebnisse in Zusammenhang mit der bis dahin entwickelten Theorie gebracht. Nach diesem Kapitel gibt es eine Zäsur. Die Kapitel 6 und 7 dienen der Vorstellung von Konzepten zur Charakterisierung dynamischer Systeme. Für die exakten Definitionen der diskutierten Größen und für den Nachweis ihrer Existenz ist ein umfangreicher mathematischer Formalismus erforderlich. Der Schwerpunkt dieser Kapitel liegt nicht in der Diskussion dieser mathematischen Details. Vielmehr werden die hinter den verschiedenen mathematischen Begriffen stehenden Ideen so herausgearbeitet und formuliert, daß auf einfache Weise eine Verbindung zu den aus der Physik bekannten Thermodynamik hergestellt werden kann. Anhand des Modellsystems wird

dann dargestellt, wie man mit Hilfe thermodynamischer Begriffe dynamische Systeme beschreiben kann. Die in den Kapiteln 3 und 4 erzielten Ergebnisse stellen dabei sicher, daß die notwendigen mathematischen Voraussetzungen erfüllt sind. Abschließend werden die numerisch bestimmten thermodynamischen Potentiale des Modellsystems und ihre Parameterabhängigkeit diskutiert.

# Kapitel 1

## Das System

In dieser Arbeit untersuche ich die ebene Streuung eines Teilchens an  $N$  Zentralpotentialen  $v(r)$ . Diese seien mit ihren Zentren auf den Ecken eines regelmäßigen  $N$ -Ecks mit Mittelpunkt im Ursprung angeordnet. Die Reichweite von  $v$  sei endlich und definiere im folgenden den Längenmaßstab. Eine der Ecken des  $N$ -Ecks liege auf der  $x$ -Achse. Bei dem dazu gehörenden Potential beginnend, werden die Potentiale im mathematisch positiven Sinn von 0 bis  $N - 1$  indiziert. Der Umkreisradius des  $N$ -Ecks werde mit  $R_0$  bezeichnet und sei so groß gewählt, daß sich die Bereiche, in denen die Kraft von 0 verschieden ist, nicht überlappen. Mit  $\Phi_0 = 2\pi/N$  und  $\mathbf{R}_i = R_0(\cos(i\Phi_0), \sin(i\Phi_0))$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ , erhält man somit für das Streupotential

$$V(\mathbf{R}) = \sum_{i=0}^{N-1} v(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|). \quad (1.1)$$

Dieses Potential besitzt  $C_{Nv}$ -Symmetrie [Ham62]. Eine Skizze der Systemgeometrie für den Fall  $N = 3$  ist in Abbildung 1.1 gegeben.

Für eine feste Energie  $E$  wird die Wirkung von  $v$  auf das zu streuende Teilchen durch die Ablenkfunktion  $\Theta(l)$  beschrieben [Chi74]:

$$\Theta(l) = \pi - 2l \int_{\bar{r}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - v(r)) - \frac{l^2}{r^2}}}, \quad (1.2)$$

wobei  $\bar{r}$  die größte Nullstelle des Nenners, d. h. der äußere klassische Umkehrpunkt ist. Man beachte, daß aufgrund der Zeitumkehrsymmetrie  $\Theta(l) = -\Theta(-l)$  gilt. Mit Hilfe von  $\Theta(l)$  läßt sich die Streuung am Potential (1.1) durch eine Abbildung beschreiben, die ich nun vorstelle.

### 1.1 Herleitung der Abbildung

Zur Herleitung der Abbildung setze ich im folgenden  $m = 1$ . Nachdem Massen- und Längeneinheit damit festgelegt sind, wird die Zeiteinheit wie

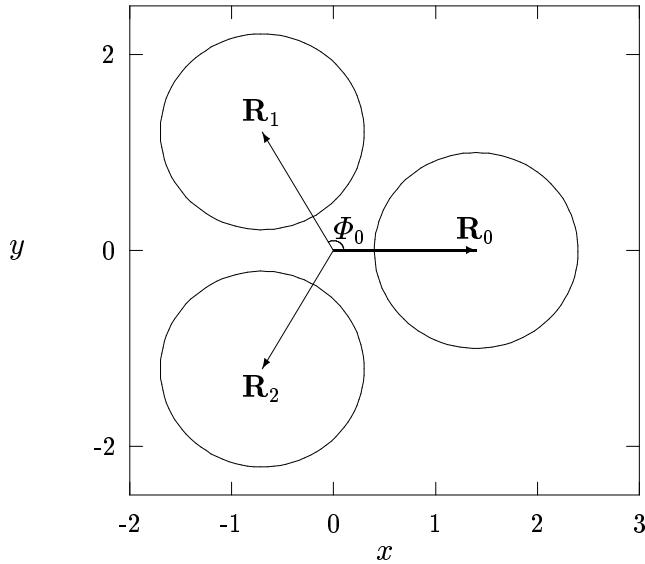


Abbildung 1.1: Skizze des Potentials  $V(\mathbf{R})$  für den Fall  $N = 3$  und  $R_0 = 1.4$ . Die Kreise haben den Radius 1 und markieren die Reichweite des Potentials  $v$ .

folgt skaliert

$$t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2E}} t \quad . \quad (1.3)$$

Außerhalb der Reichweite von  $v$  gilt dann für den Impuls:

$$|\mathbf{p}| = 1. \quad (1.4)$$

Der Betrag des Drehimpulses ist ferner gleich dem Stoßparameter. Die Bewegung für Drehimpulsbeträge größer als 1 ist also frei.

Eine Änderung der Energie ist nach der Skalierung (1.3) gleichbedeutend mit einer Änderung der Zeiteinheit. Damit die explizite Energieabhängigkeit der Dynamik deutlicher hervortritt, werde ich im folgenden nicht von Änderungen der Zeiteinheit, sondern von Änderungen der Energie  $E$  sprechen. Dabei ist dann (1.3) zu berücksichtigen.

Das Teilchen verlässt das Potential  $i$  im Punkt  $\mathbf{R}_i$  mit dem Impuls  $\mathbf{p}$ . Ich bezeichne den Winkel zwischen  $\mathbf{R}_i$  und  $\mathbf{p}$  mit  $\beta_i$  und den Drehimpuls bezüglich  $\mathbf{R}_i$  mit  $l_i$ . Wenn das Teilchen als nächstes den Bereich  $j$  besucht, ist sein Einfallswinkel bezüglich  $\mathbf{R}_j$  durch  $\beta_j - (j - i)\Phi_0$  gegeben. Die Streuung an  $v$  bewirkt nun eine Änderung um  $-\Theta(l_j)$ . Nach dem Streuprozess erhält man daher

$$\beta_j = \beta_i - (j - i)\Phi_0 - \Theta(l_j). \quad (1.5)$$

Der Drehimpuls bezüglich  $\mathbf{R}_j$  ist bei diesem Streuereignis eine Erhaltungsgröße. Er ist gegeben durch

$$\begin{aligned} l_j &= [(\mathbf{R} - \mathbf{R}_j) \times \mathbf{p}]_z \\ &= [(\mathbf{R} - \mathbf{R}_i) \times \mathbf{p}]_z + [(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) \times \mathbf{p}]_z \\ &= l_i + 2R_0 \sin\left(\frac{j-i}{2}\Phi_0\right) \cos\left(\beta_i - \frac{j-i}{2}\Phi_0\right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß das Teilchen Bereich  $j$  besucht, ist

$$|l_j| \leq 1. \quad (1.7)$$

Ferner muß der Radialimpuls bezüglich  $\mathbf{R}_j$  negativ sein

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_j) = \sqrt{1 - l_i^2} - 2 \sin\left(\frac{j-i}{2}\Phi_0\right) \sin\left(\beta_i - \frac{j-i}{2}\Phi_0\right) < 0. \quad (1.8)$$

Wenn  $R_0$  so groß gewählt ist, daß auf jeder Geraden höchstens zwei Streupotentiale  $v$  liegen, sind diese beiden Bedingungen auch hinreichend. Im folgenden werde ich mich auf diesen Fall beschränken.

Nach den obigen Betrachtungen hat man die Dynamik des Systems auf eine diskrete Abbildung reduziert. Ein Tripel  $(\beta_i, l_i, i)$ , das bei Vorgabe positiven Radialimpulses,  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}_i > 0$ , den Zustand des Systems eindeutig bestimmt, wird auf das Tripel  $(\beta_j, l_j, j)$  bei positivem Radialimpuls bezüglich  $\mathbf{R}_j$  abgebildet. Bis auf die trivialen Trajektorien, die keinen Wechselwirkungsbereich aufsuchen, wird die Streudynamik des zugrunde liegenden physikalischen Systems vollständig durch diese Abbildung erfaßt. So sind (nichttriviale) einlaufende Trajektorien durch Tripel gegeben, die kein Urbild haben, auslaufende Trajektorien durch Tripel, die kein Bild haben. Die Bewegung innerhalb des Wechselwirkungsbereiches wird durch Iteration dieser *Poincaré-Abbildung* beschrieben.

Die Abbildung hängt nur von der Differenz  $j - i$  der Indizes der beteiligten Potentiale  $v$  ab. Dies spiegelt die  $C_N$ -Symmetrie des Systems wieder. Ich reduziere das Problem bezüglich dieser Symmetrie, indem ich  $i = 0$  setze. Das entspricht nach jedem Streuprozeß an einem Potential  $v$  mit Zentrum in  $\mathbf{R}_j$  einer Drehung um  $-j\Phi_0$ .

Das bisher Diskutierte zusammenfassend, erhält man die zweidimensionale Abbildung

$$F : \quad \beta' = \beta - j\Phi_0 - \Theta(l') \quad (1.9a)$$

$$l' = l + 2R_0 \sin\left(\frac{j}{2}\Phi_0\right) \cos\left(\beta - \frac{j}{2}\Phi_0\right). \quad (1.9b)$$

Solange es ein  $j \in \{1, \dots, N-1\}$  gibt, so daß die Bedingungen

$$|l'| \leq 1 \quad (1.9c)$$

und

$$\sqrt{1-l^2} - 2 \sin\left(\frac{j}{2}\Phi_0\right) \sin\left(\beta - \frac{j}{2}\Phi_0\right) < 0 \quad (1.9d)$$

erfüllt sind, wird  $F$  iteriert. Wenn eine der Bedingungen (1.9c) oder (1.9d) nicht erfüllt werden kann, hat das Teilchen den Wechselwirkungsbereich von  $V$  verlassen und kehrt nicht mehr zurück.

Aufgrund ihrer besonderen Bedeutung in dieser Arbeit gebe ich an dieser Stelle die Abbildung für das aus  $N = 2$  Potentialen  $v$  bestehende System noch einmal explizit an:

$$F : \quad \beta' = \beta - \pi - \Theta(l') \quad (1.10a)$$

$$l' = l + 2R_0 \sin \beta . \quad (1.10b)$$

Zusammen mit den beiden Bedingungen

$$|l| \leq 1 \quad (1.10c)$$

und

$$\sqrt{1-l^2} + 2 \cos \beta < 0 \quad (1.10d)$$

beschreibt diese Abbildung ein Streusystem bestehend aus zwei Zentralpotentialen mit Zentren auf der  $x$ -Achse bei  $\pm R_0$ . Für die numerischen Beispielrechnungen bezüglich des Systems (1.10) wird der Abstand der Zentren durch  $R_0 = 1.1$  festgelegt.

Formal ist der Bildbereich der Abbildung (1.9) durch  $S^1 \times \mathbb{R}$  gegeben. Was die Iteration von  $F$  betrifft, so erzwingt die Bedingung (1.9c) eine Einschränkung auf das  $l$ -Intervall  $[-1, 1]$ . Daher betrachte ich den Zylinder

$$\Gamma = S^1 \times [-1, 1]. \quad (1.11)$$

im folgenden als den Phasenraum des Systems.

Man rechnet leicht nach, daß  $\det DF = 1$  und  $F$  damit flächenerhaltend ist. Die Abbildung  $F$  lässt sich ferner schreiben als Produkt der Involutionen

$$\beta' = \pi - \beta + j\Phi_0 \quad (1.12a)$$

$$I_0 : \quad l' = l + 2R_0 \sin\left(\frac{j}{2}\Phi_0\right) \cos\left(\beta - \frac{j}{2}\Phi_0\right) \quad (1.12b)$$

und

$$I_1 : \quad \beta' = \pi - \beta - \Theta(l) \quad (1.13a)$$

$$l' = l, \quad (1.13b)$$

d. h.  $F = I_1 \circ I_0$ . Geometrisch ist  $I_0$  im wesentlichen ein ‘‘Kick’’ in der Drehimpulsvariablen, dessen Ursache im Wechsel des Koordinatensystems liegt.  $I_1$  beschreibt einen  $l$ -abhängigen ‘‘Twist’’ in der Winkelvariablen. Da  $I_1$  den

Drehimpuls konstant lässt, ist für die Frage des Verbleibs im Wechselwirkungsbereich ausschließlich  $I_0$  verantwortlich.

Das System ist bisher nur bezüglich  $C_N$  symmetriereduziert. Die verbleibende Spiegelsymmetrie äußert sich in der Invarianz von (1.9) unter

$$(\beta, l, j) \longmapsto (-\beta, -l, N - j). \quad (1.14)$$

Die Reduzierung bezüglich dieser Symmetrie wird sich im Hinblick auf Fragestellungen der Symbolischen Dynamik (Kapitel 4) und der Auswertung dynamischer Zeta-Funktionen (Kapitel 7) als nützlich erweisen. Konkret erfolgt eine Reduzierung mittels (1.14) dadurch, daß man jedesmal, wenn die  $l$ -Komponente einer Trajektorie des Systems (1.9) negativ wird, die Transformation (1.14) anwendet. Der Phasenraum besteht in diesem Fall aus dem Zylinder

$$\Gamma_{red} = S^1 \times [0, 1]. \quad (1.15)$$

Das so mittels (1.14) transformierte System wird im folgenden als *reduziertes System* bezeichnet.

Für eine konkrete Anwendung der Abbildung  $F$  ist die Bestimmung der Ablenkfunktion notwendig. Im folgenden Abschnitt werden Beispiele klassischer Ablenkfunktionen vorgestellt.

## 1.2 Beispiele klassischer Ablenkfunktionen

Bei einem Streuexperiment ist es in der Regel nicht notwendig, eine Trajektorie im Detail zu verfolgen. Der Einfluß des Targets wird erst nach dem Streuprozeß beobachtet, daher sind nur Größen wie z. B. die Verzögerungszeit oder der Ablenkinkel von Interesse. Die Diskussion der Ablenkfunktion für zentrale symmetrische Potentiale bildet den Schwerpunkt dieses Abschnitts und ist in groben Zügen [Chi74] entnommen.

Wesentliche Merkmale der Ablenkfunktion können mit Hilfe des Effektivpotentials

$$v_{eff}(r) = v(r) + \frac{l^2}{2r^2} \quad (1.16)$$

erklärt werden. Zunächst diskutiere ich rein attraktive und rein repulsive Wechselwirkungen.

Als Beispiel einer rein attraktiven Wechselwirkung betrachte ich ein *Woods-Saxon-Potential*:

$$v(r) = -\frac{v_0}{1 + e^{(\frac{r-r_0}{a})}}. \quad (1.17)$$

Für verschiedene Drehimpulse sind die Effektivpotentiale in Abbildung 1.2 dargestellt. Insbesondere ist  $v(r)$  selbst gezeigt, das dem Effektivpotential für

$l = 0$  entspricht. Das Verhältnis von Potentialwert auf dem Rand  $r = 1$  zur Topftiefe ist bei den gewählten Potentialparametern von der Größenordnung  $10^{-5}$ . Für  $r > 1$  kann man daher die Bewegung in guter Näherung als frei betrachten.

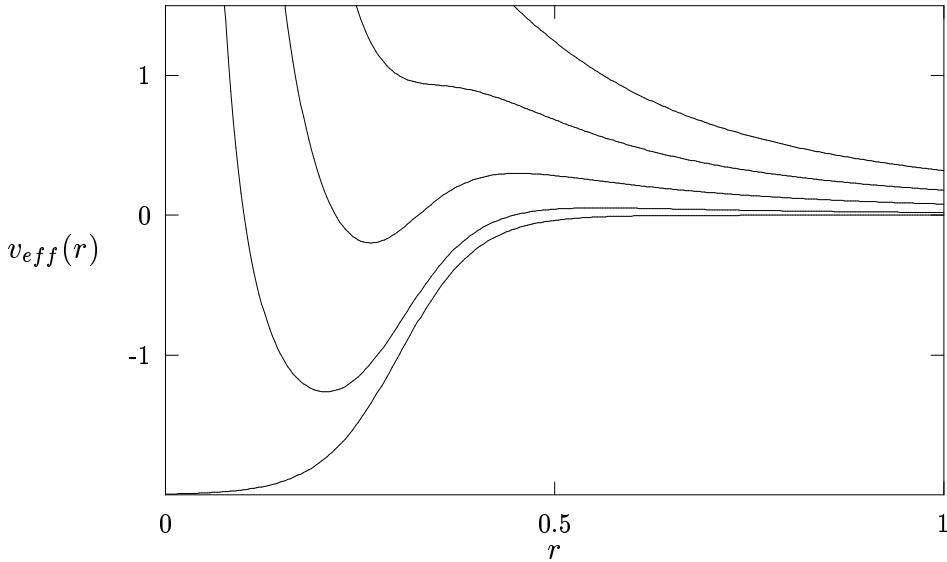


Abbildung 1.2: Effektivpotential der Woods–Saxon–Wechselwirkung. Die konkreten Potentialparameter sind durch  $v_0 = 2$ ,  $r_0 = 0.3$  und  $a = 0.05$  gegeben. Von unten nach oben sind die Graphen der Effektivpotentiale für die Drehimpulse  $l = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  dargestellt.

Bei konstanter Energie bewirkt eine Erhöhung des Drehimpulses, daß der klassische Umkehrpunkt, der die Grenze des erlaubten Potentialbereiches markiert, nach außen wandert. Der Ablenkinkel für größere Drehimpulse wird durch die langreichweiten Anteile des Potentials bestimmt. Da die Ablenkfunktion für attraktive Potentiale negativ ist und da sowohl für Drehimpulswerte  $l \approx 0$  als auch für sehr große  $l$  die Ablenkung sehr klein ist ( $\Theta \approx 0$ ), folgt, daß  $\Theta(l)$  ein Minimum oder eine Singularität besitzen muß. Im Falle eines Minimums spricht man von *Regenbogenstreuung*. Der minimale Ablenkinkel wird als *Regenbogenwinkel* bezeichnet. Liegt eine Singularität vor, so nennt man diese *Orbitingsingularität*. Sie korrespondiert einem Einfang des Teilchens und tritt auf, wenn die Energie einem Maximum von  $v_{eff}(r)$  entspricht. Ein solches Maximum ergibt sich für Energien unterhalb einer kritischen Energie, die durch den Sattelpunkt im Effektivpotential gegeben ist. Der Nenner im Integranden von (1.2) hat dann eine doppelte Nullstelle und führt zu einer Singularität von  $\Theta(l)$ .

In der Sprache der nichtlinearen Dynamik lässt sich dieses Phänomen auch anders formulieren. Ein lokales Maximum von  $v_{eff}(r)$  impliziert die Existenz

eines instabilen Fixpunktes, der im Ortsraum einer Kreisbahn entspricht. Die stabile Mannigfaltigkeit dieses Fixpunktes erstreckt sich über den Fluß bis in den asymptotischen Bereich. Eine Trajektorie mit einer Anfangsbedingung auf dieser stabilen Mannigfaltigkeit nähert sich im Ortsraum asymptotisch der Kreisbahn an. Dabei wächst der Betrag des Ablenkwinkels über alle Grenzen.

In dem Energiebereich, in dem Orbiting möglich ist, findet man auch eine gebundene Bewegung. Für geeignete Drehimpulse, die größer als der Orbitingdrehimpuls sind, ist der klassisch erlaubte Bereich durch ein lokales Maximum im Effektivpotential in zwei voneinander getrennte Gebiete aufgeteilt. In dem Bereich mit kleineren  $r$ -Werten ist die Bewegung gebunden.

Für das Woods–Saxon–Potential sind Ablenkfunctionen für verschiedene Energien in Abbildung 1.3 gezeigt.

Abbildung 1.3(a) zeigt Ablenkfunctionen für Energien oberhalb der Orbitingschwelle, Abbildung 1.3(b) zeigt ein Beispiel mit einer Orbitingsingularität.

Für rein repulsive Wechselwirkungen ist die Ablenkfunktion positiv. Ein Beispiel für eine solche Wechselwirkung ist die *Harte Scheibe*. Das Potential ist gegeben durch

$$v(r) = \begin{cases} \infty & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}. \quad (1.18)$$

Eingesetzt in (1.2) erhält man für die Ablenkfunktion:

$$\Theta(l) = 2 \arccos l. \quad (1.19)$$

Sie ist unabhängig von der Energie. Im Gegensatz zum attraktiven Fall erfolgt hier für  $l = 0$  eine Rückwärtsstreuung, d. h.  $\Theta = \pi$  (Abbildung 1.4). Diese Ablenkfunktion kann man als einen Prototypen für repulsive Wechselwirkungen ansehen.

Der Vollständigkeit halber führe ich mit dem *Lennard–Jones–Potential* noch ein Beispiel für ein nichtmonotones Potential an:

$$v(r) = v_0 \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right). \quad (1.20)$$

Das Lennard–Jones Potential setzt sich aus einem repulsiven ( $\sim r^{-12}$ ) und einem attraktiven Anteil zusammen ( $\sim -r^{-6}$ ). Ablenkfunctionen für verschiedene Energien oberhalb der Orbitingschwelle und die Parameterwerte  $v_0 = 5$  und  $r_0 = 0.3$  sind in Abbildung 1.5 dargestellt. Da die Darstellung einer Orbitingsingularität für dieses Potential im Vergleich zu Abbildung 1.3(b) nichts wesentlich Neues erbringt, verzichte ich hier auf eine solche.

Um den numerischen Aufwand so gering wie möglich zu halten, stelle ich nun im Hinblick auf die in dieser Arbeit betrachtete Systemklasse geeignete Näherungen vor. Hier sind in erster Linie Ablenkfunctionen von Interesse, die zu Potentialen mit attraktiven Bereichen gehören.

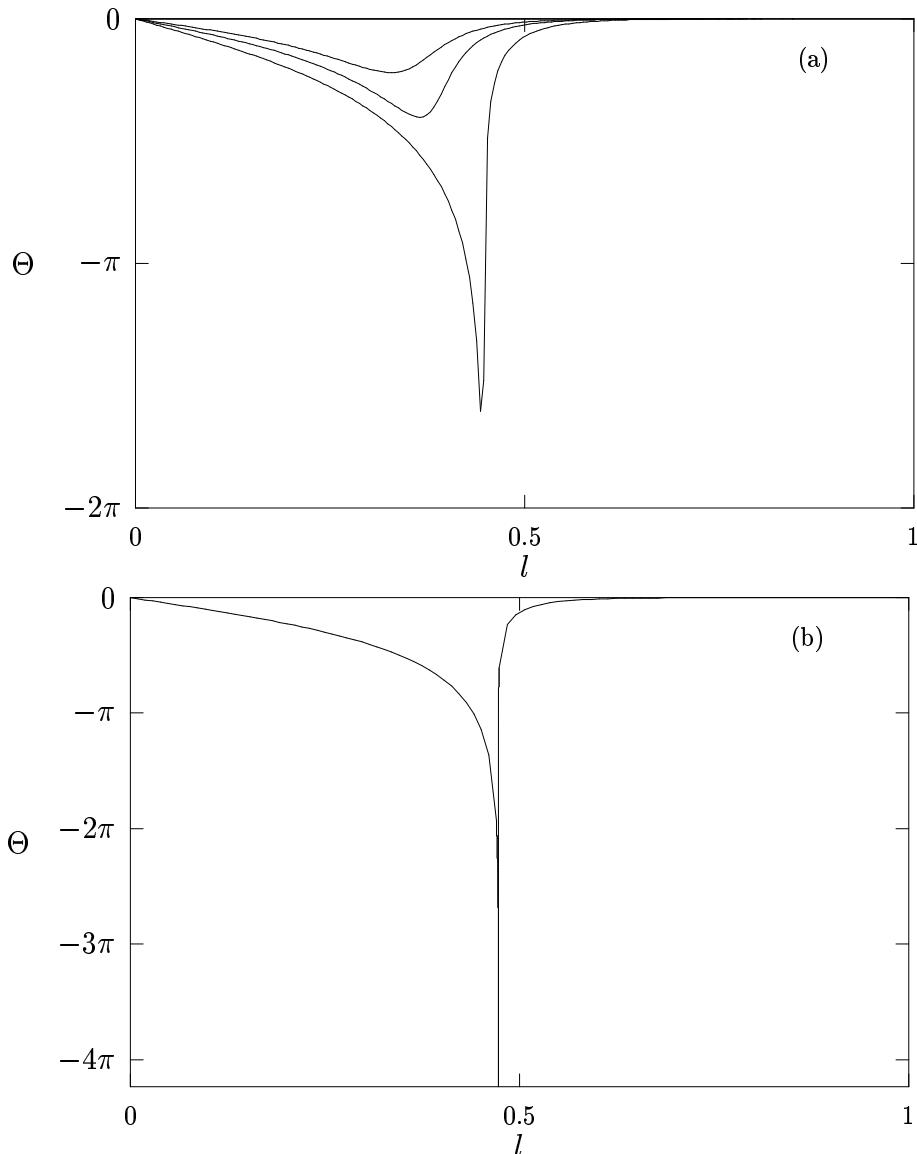


Abbildung 1.3: Ablenkfunktionen des Woods–Saxon–Potentials (Parameter wie in Abbildung 1.2): (a) Von oben nach unten entsprechen die Ablenkfunktionen den Energien  $E = 3, 1.5, 0.8$ , (b) Orbitingsingularität für  $E = 0.6$ .

### 1.3 Modellablenkfunktionen

Ist die Ablenkung sehr klein, so erfolgt die Bewegung des Teilchens im Ortsraum näherungsweise auf einer Geraden. Für die in Abschnitt 1.1 beschriebenen Systeme gilt, daß auf einer Geraden höchstens zwei Potentiale  $v$  liegen. Eine Trajektorie mit einem Drehimpuls  $l$ , der zu einer kleinen Ablenkung führt, verläßt demnach den Wechselwirkungsbereich entweder in positiver oder in negativer Zeit. Für reine Muldenpotentiale ist eine gebundene Bewe-

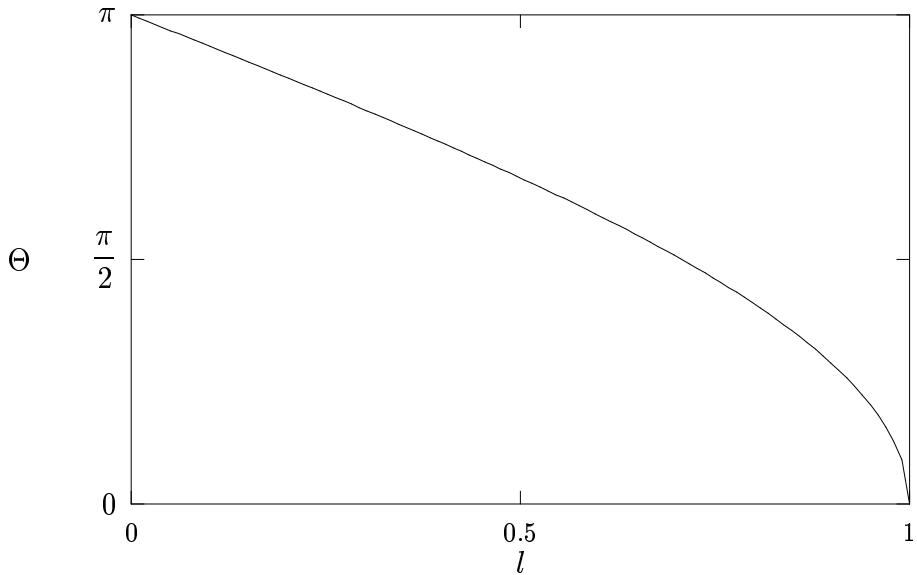


Abbildung 1.4: Ablenkfunktion der Harten Scheibe.

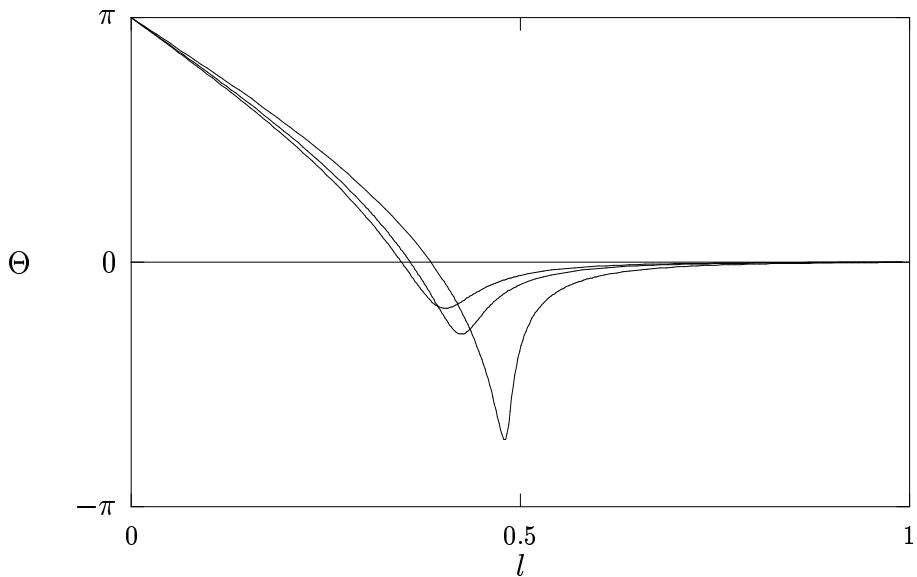


Abbildung 1.5: Ablenkfunktionen des Lennard–Jones–Potentials; bezogen auf den jeweils minimalen  $\Theta$ –Wert, sind von unten nach oben die Ablenkfunktionen für die Energien  $E = 1.5, 3, 4.5$  dargestellt.

gung daher nur möglich, falls  $l$  vom Betrage her weder in der Nähe von 0 noch von 1 liegt.

### 1.3.1 Modellablenkfunktion für die Regenbogenstreuung

Unter der Voraussetzung, daß keine Orbitingstreuung auftritt, ist die Projektion einer möglichen Menge lokalisierter Orbits auf die  $l$ -Achse des Phasenraumes  $\Gamma$  um den Regenbogendrehimpuls  $l_R$  lokalisiert. Ist man an Eigenschaften dieser Menge oder an Streutrajektorien, die sich für längere Zeit im Wechselwirkungsbereich aufhalten, interessiert, so läßt sich die Ablenkfunktion durch eine Funktion mit quadratischem Minimum approximieren. Als Modellablenkfunktion für Muldenpotentiale wähle ich

$$\Theta(l) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{2}k(l^3 - l)\pi & , \quad |l| \leq 1 \\ 0 & , \quad |l| > 1, \end{cases} \quad (1.21)$$

wobei  $k > 0$  ist. Diese Ablenkfunktion erfüllt die aus der Zeitumkehrsymmetrie resultierende Bedingung  $\Theta(l) = -\Theta(-l)$ . Der Regenbogendrehimpuls ist durch  $l_R = 1/\sqrt{3}$ , das Minimum von  $\Theta$ , d. h. der Regenbogenwinkel ist durch  $-k\pi$  gegeben.

Betrachtet man die Abbildungen 1.3(a) und 1.5, so erkennt man, daß je niedriger die Energie ist, desto negativer der Wert des Regenbogenwinkels ist. Daraus ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen der Energie und dem Parameter  $k$ : Eine Erniedrigung der Energie entspricht einer Erhöhung von  $k$ , eine Erhöhung der Energie entspricht einer Erniedrigung von  $k$ . Die Energieabhängigkeit der Streuung an den Beispieldpotentialen in Abschnitt 1.2 läßt sich somit direkt auf die  $k$ -Abhängigkeit des Modells (1.9) übertragen. Vor dem Hintergrund dieses Zusammenhangs werde ich im folgenden sowohl von Energie- als auch von  $k$ -Abhängigkeit sprechen.

Die Vorgabe einer Ablenkfunktion liefert zunächst keine Informationen über das dazugehörige Muldenpotential. Für die Diskussion der Abbildung  $F$  ist diese auch nicht erforderlich. Im Hinblick auf eine Symbolische Dynamik, wird es sich jedoch als hilfreich herausstellen, Trajektorien des Meldensystems im Ortsraum darzustellen. Dazu ist dann die Lösung des inversen Streuproblems notwendig, d. h. die Rekonstruktion des Potentials aus der Ablenkfunktion. Im Anhang A wird gezeigt, wie diese Aufgabe für die Ablenkfunktion (1.21) gelöst wird. Mit Methoden aus der Streutheorie wird ein analytischer Ausdruck für das Potential hergeleitet. Es gilt:

**Satz 1** Eine Lösung des inversen Streuproblems für die Ablenkfunktion (1.21) ist durch das Potential  $v(r)$  gegeben, das für  $r > 1$  identisch 0 ist und im Bereich  $r \leq 1$  durch die Parameterdarstellung

$$(r(\gamma), v(\gamma)) = \left( \gamma e^{-\sqrt{3}k(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{2} \left( 1 - e^{2\sqrt{3}k(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right) \quad (1.22)$$

mit  $\gamma \in [0, 1]$  gegeben ist.

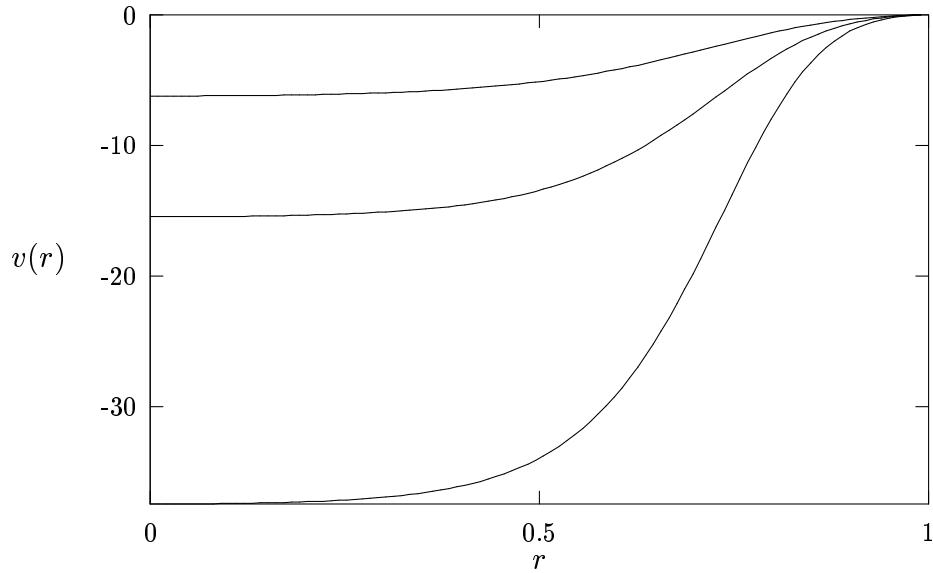


Abbildung 1.6: Muldenpotentiale der Modellablenkfunktion für die Regenbogenstreuung (1.21). Von oben nach unten sind die Potentiale  $v(r)$  für  $k = 0.75, 1.0, 1.25$  dargestellt.

Das Potential  $v(r)$  ist stetig differenzierbar. Für einige  $k$ -Werte ist es in Abbildung 1.6 dargestellt. Als Funktion von  $k$  fällt das Minimum der Mulden (1.22) monoton.

Betrachtet man die Ablenkfunktionen des Woods–Saxon–Potentials (Abbildung 1.3), so liegt der Regenbogenwinkel für den Energierbereich von  $\infty$  bis 0.8 zwischen 0 und  $-2\pi$ . In dem vergleichsweise kleinen Energierbereich von 0.8 bis 0.6 fällt er dann bis auf  $-\infty$ . Bezeichnet man die kritische Orbitingenergie mit  $E_{krit}$ , so kann man zeigen, daß der Regenbogenwinkel für  $E > E_{krit}$  in der Nähe der Orbitingschwelle proportional zu  $(E - E_{krit})^{-\frac{1}{2}}$  abfällt [Gre+75]. Da vom Standpunkt eines möglichen Experimentes die Energieabhängigkeit gering sein sollte, lege ich den Schwerpunkt der Betrachtungen zunächst auf den erstgenannten Energierbereich, was  $k$ -Werten zwischen 0 und 2 entspricht. In Kapitel 4 wird dann gezeigt, wie die Kenntnis der Dynamik in diesem Parameterbereich Aussagen über die Dynamik für  $k > 2$  erlaubt.

### 1.3.2 Modellablenkfunktion für die Orbitingstreuung

Liegt die Energie unterhalb der Orbitingschwelle, so befinden sich die für eine invariante Menge relevanten Drehimpulswerte in einem Bereich um den Orbitingdrehimpuls. Die Orbitingsingularität ist logarithmischer Natur, da der Nenner in Integranden von (1.2) eine doppelte Nullstelle hat. In der Nähe

der Singularität ist eine geeignete Approximation gegeben durch ([Chi74] Seite 16):

$$\Theta(l) = \begin{cases} 2C \ln\left(\frac{l_{Orb}-l}{l_{Orb}}\right) & , \quad 0 \leq l < l_{Orb} \\ C \ln\left(\frac{l-l_{Orb}}{l_{Orb}}\right) & , \quad l_{Orb} < l \leq 1 \\ 0 & , \quad l > 1. \end{cases} \quad (1.23)$$

Die Konstante  $C$  ist im wesentlichen durch die Krümmung des Effektivpotentials im Maximum gegeben. In konkreten numerischen Rechnungen setze ich in dieser Arbeit  $C = 10$  und  $l_{Orb} = 0.5$ .

Da die Ablenkfunktionen (1.21) und (1.23) die Streuung an rein attraktiven Zentralpotentialen, d. h. reinen Potentialmulden, modellieren, bezeichne ich das System (1.9) in Verbindung mit (1.21) und (1.23) im folgenden als Mulden-System. Je nachdem ob eine Energie oberhalb oder unterhalb der Orbitingschwelle betrachtet wird, ist (1.21) bzw. (1.23) als Ablenkfunktion zu wählen.

Nach der Diskussion der Modellablenkfunktionen wende ich mich nun der Streuung zu.

# Kapitel 2

## Die Streuung

Da man Informationen über physikalische Systeme oft durch Streuexperimente gewinnt, beschreibe ich in diesem Kapitel die numerischen Ergebnisse der Streuung am Potential (1.1).

Konkret betrachte ich hier das Zwei–Mulden–System. Es wird sowohl in einem Energiebereich oberhalb als auch unterhalb der Orbitingschwelle diskutiert. Die Parameter sind dabei so gewählt, daß sie einerseits einen Einblick in die Vielfalt der Dynamik gestatten und dadurch die Komplexität des Systems deutlich machen. Andererseits stellen sie einen geeigneten Ausgangspunkt für die Diskussion der lokalisierten Bewegung dar, die ein zentrales Thema dieser Arbeit ist und mit deren Hilfe unter anderem die hier vorgestellten Streuergebnisse erklärt werden können.

### 2.1 Streuvariablen und Streuabbildung

In diesem Abschnitt werden geeignete Streuvariablen definiert, d. h. Variablen, die asymptotisch konstant sind und den Zustand des Systems eindeutig festlegen.

Seien  $(R, \Phi)$  ebene Polarkoordinaten. Bezeichnet man mit  $P$  den Radialimpuls und mit  $L$  den Drehimpuls bezüglich des Ursprungs, dann läßt sich das System (1.9) als Hamilton–System auffassen mit der Hamilton–Funktion:

$$H(R, \Phi, P, L) = \frac{P^2}{2} + \frac{L^2}{2R^2} + V(R, \Phi). \quad (2.1)$$

Für  $R \rightarrow \infty$  gehen sowohl  $V$  als auch das Zentrifugalpotential  $L^2/(2R^2)$  gegen 0. Die Hamilton–Funktion besteht im asymptotischen Bereich nur aus dem Radialanteil der kinetischen Energie. Somit ist nicht nur  $L$  asymptotisch konstant, sondern auch  $\Phi$ , was die eindeutige Definition von “In– und Out–Richtungen“ erlaubt.

Da die Energie  $E$  eine Konstante ist, lässt sich das Problem reduzieren, indem man  $E$  als Teil des Variablenatzes wählt. Für diese Reduktion benötigt man eine zur Energie konjugierte Größe  $\tau$ , die asymptotisch konstant ist und die zusammen mit  $E$  das Paar  $(R, P)$  ersetzt. Für Potentiale, die schneller als  $R^{-1}$  abfallen, also insbesondere für Potentiale mit endlicher Reichweite, ist eine geeignete Wahl:

$$\tau = t - \frac{R}{P} . \quad (2.2)$$

Das Streuproblem besteht nun in der Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen mit einem vollständigen Satz von asymptotischen *In-Größen* als Anfangsbedingung. Nachdem die Trajektorie den Wechselwirkungsbereich verlassen hat, erhält man dann einen entsprechenden Satz von asymptotischen *Out-Größen*. Dies definiert die sogenannte *Streuabbildung*, die jedem Tupel  $(\Phi_{in}, \tau_{in}, L_{in}; E)$  genau ein Tupel  $(\Phi_{out}, \tau_{out}, L_{out}; E)$  zuordnet.

Bei der hier vorliegenden Variablenwahl kann man mit der reduzierten Wirkung

$$S_{red} = - \int_{t_{in}}^{t_{out}} (R(t)\dot{P}(t) + \Phi(t)\dot{L}(t)) dt \quad (2.3)$$

eine erzeugende Funktion für die Streuabbildung angeben. Die reduzierte Wirkung unterscheidet sich von der Wirkung durch den Term  $RP + \Phi L|_{t_{in}}^{t_{out}}$ . Sie ist im Gegensatz zur Wirkung asymptotisch konstant, da aufgrund der asymptotischen Konstanz von  $P$  und  $L$  die entsprechenden Zeitableitungen in (2.3) verschwinden. Die reduzierte Wirkung ist ein Funktional der Trajektorie. Da diese durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt ist, kann man  $S_{red}$  auch als Funktion der Anfangsbedingungen auffassen. Die Angabe von Anfangsbedingungen ist nicht die einzige Möglichkeit, eine Trajektorie festzulegen. Durch eine Menge konsistenter Randbedingungen ist sie ebenfalls eindeutig bestimmt. Man kann daher z. B. den Winkel  $\Phi_{in}$  durch den asymptotischen Drehimpuls  $L_{out}$  ersetzen. Eine elementare, aber längliche Rechnung ergibt dann [Smi92]:

$$\frac{\partial S_{red}}{\partial L_{in}} = \Phi_{in} \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial S_{red}}{\partial L_{out}} = -\Phi_{out} \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial S_{red}}{\partial E} = (t_{out} - t_{in}) - \left( \frac{R_{out}}{P_{out}} - \frac{R_{in}}{P_{in}} \right) = \tau_{out} - \tau_{in} . \quad (2.4c)$$

Dies macht die Bedeutung von  $S_{red}$  als erzeugende Funktion der Streuabbildung deutlich. Die Zeit  $\Delta\tau = \tau_{out} - \tau_{in}$  ist die Verzögerungszeit, die durch die Wechselwirkung bedingt ist. Sie entspricht der Differenz zwischen der Zeit  $t_{out} - t_{in}$ , die wirklich verstreicht, um von  $R_{in}$  nach  $R_{out}$  zu gelangen, und der Zeit, die man benötigt, um von  $R_{in}$  bei freier Bewegung mit Impuls  $P_{in}$  nach  $R = 0$  und von dort bei freier Bewegung mit Impuls  $P_{out}$  nach  $R_{out}$  zu gelangen.

Da die Anzahl  $n$  der Streuereignisse an den Potentialen  $v(r)$  ein Maß für die Zeit ist, die ein Teilchen im Wechselwirkungsbereich verbringt, werde ich im folgenden  $n$  als Verzögerungszeit auffassen und entsprechend bezeichnen. Da der Wertebereich durch die natürlichen Zahlen gegeben ist, entspricht diese Vorgehensweise einer Diskretisierung von  $\Delta\tau$ . Sie erfolgt aus zwei Gründen. Zum einen müßte man für die exakte Bestimmung von  $\Delta\tau$  die Verzögerungszeit für die Streuung am Potential  $v(r)$  kennen. Die Ablenkfunktion  $\Theta(l)$  liefert diese Information nicht direkt. Zum anderen ist die Diskretisierung einer Streugröße in besonderer Weise dazu geeignet, Strukturen der Singularitätenmenge, d. h. der Menge der Anfangsbedingungen mit unendlicher Verzögerungszeit, zu untersuchen. Wie in den folgenden Kapiteln erörtert wird, spielt diese Singularitätenmenge eine wesentliche Rolle. Man beachte, daß durch die Diskretisierung der Verzögerungszeit über die Lage der Singularitäten in der Streuabbildung keine Information verloren geht.

## 2.2 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt diskutiere ich numerisch simulierte Streuexperimente. Für die Berechnung einer Streutrajektorie wird bei Vorgabe eines vollständigen Satzes von In–Größen zunächst eine Transformation auf die Koordinaten  $(\beta, l)$  durchgeführt. Anschließend wird die Abbildung  $F$  solange iteriert, bis die Bedingung (1.10c) oder die Bedingung (1.10d) nicht mehr erfüllt ist. Durch Rücktransformation erhält man dann die asymptotischen Out–Größen.

### 2.2.1 Die Streuabbildung

Zunächst betrachte ich eine Energie oberhalb der Orbitingschwelle. Die Abbildungen 2.1, 2.2(a) und 2.3(a) zeigen  $L_{out}$ ,  $\Phi_{out}$  und  $n$  als Funktionen von  $L_{in}$  für das Zwei–Mulden–System mit  $k = 0.2$ ,  $k = 1.08$  bzw.  $k = 1.9$ . Als In–Richtung ist  $\Phi_{in} = 1.2\pi$  gewählt. Für  $k = 0.2$  ist die Streuung regulär, es treten keine Singularitäten auf. Die Out–Größen  $\Phi_{out}$  und  $L_{out}$  sind stetige Funktionen der In–Größe<sup>1</sup>. Im Gegensatz dazu stellt man für  $k = 1.08$  und  $k = 1.9$  starke Fluktuationen der Out–Größen fest.

In den Abbildungen 2.2(b),(c),(d) und 2.3(b),(c),(d) sind sukzessive Vergrößerungen von Details aus den Abbildungen 2.2(a) und 2.3(a) zu sehen. Die Details sind in der jeweils vorangehenden Abbildung durch gepunktete Geraden markiert. Man beachte, daß die Länge des  $n$ –Intervalls jeweils für alle Darstellungen (a) bis (d) dieselbe ist. Der untere Randwert des Intervalls wächst jedoch bei jedem Schritt um 1.

---

<sup>1</sup>Entsprechendes gilt für  $\tau_{out}$ . Aufgrund der Diskretisierung ist dies bei Angabe von  $n$  allerdings nicht erkennbar.

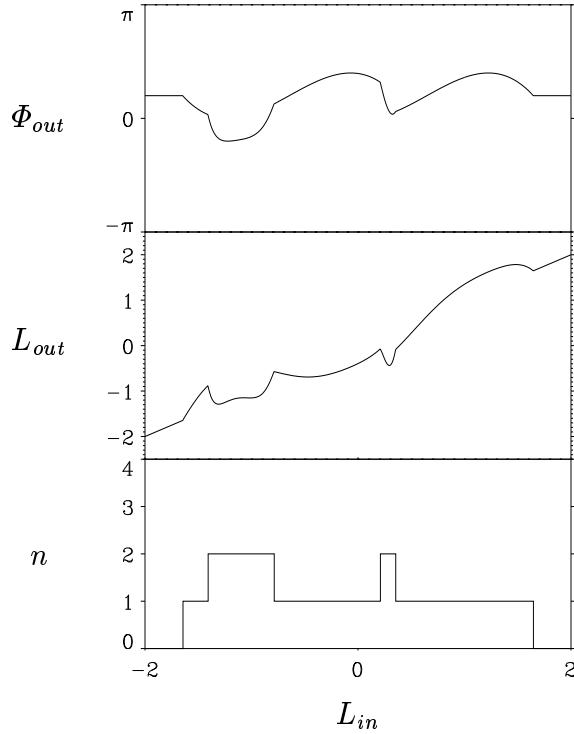


Abbildung 2.1: Streufunktionen des Zwei–Mulden–Systems für  $k = 0.2$ .

Wenn man zu höheren  $n$ –Werten übergeht, erkennt man auf allen Skalen Singularitäten. Diese Singularitäten bzw. die stetigen Bereiche zwischen ihnen zeigen eine hierarchische Gliederung. Man erkennt eine zwei– bzw. viergliedrige Organisation für die Parameter  $k = 1.08$  und  $k = 1.9$ . Ein Intervall mit Anfangsbedingungen von Trajektorien, die mindestens  $n$  mal eine Potentialmulde besuchen, enthält zwei bzw. vier disjunkte Intervalle mit Anfangsbedingungen von Trajektorien, die mindestens  $(n + 1)$ –mal eine Potentialmulde besuchen. Diese Aussagen sind an dieser Stelle natürlich nur im Rahmen der endlichen numerischen Genauigkeit gültig. Der strenge Beweis erfolgt in den Kapiteln 3, 4 und 5. Dort wird auch erklärt, warum die erzielten Ergebnisse unabhängig von der Wahl der In–Richtung sind und warum man eine Umgebung einer beliebigen Singularität herausgreifen kann und sich an der Organisationsstruktur beim Übergang zu größeren  $n$ –Werten nichts ändert.

Eine ähnlich einfach zu beschreibende Organisation der Streufunktionen ist nicht immer gegeben. Als Beispiele hierfür sei auf die Abbildungen 2.4 und 2.5 verwiesen, die die Verzögerungszeit  $n$  für  $k = 1.26$  sowie die Vergrößerungen einiger Details zeigen.

In Abbildung 2.4 sind sukzessive die am weitesten rechts liegenden Intervalle mit Verzögerungszeit größer oder gleich  $n$ ,  $n = 2, 3, 4$ , vergrößert

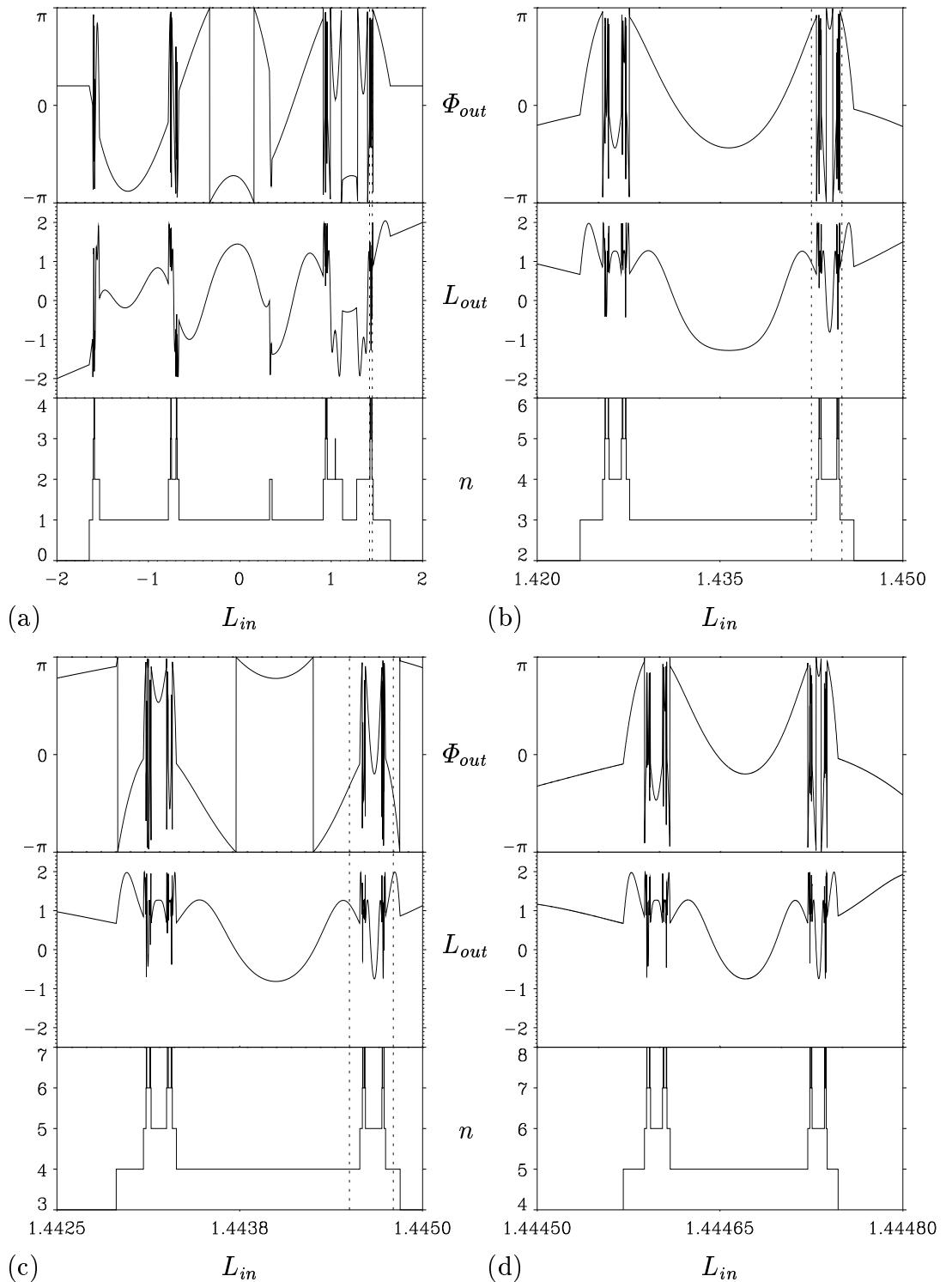
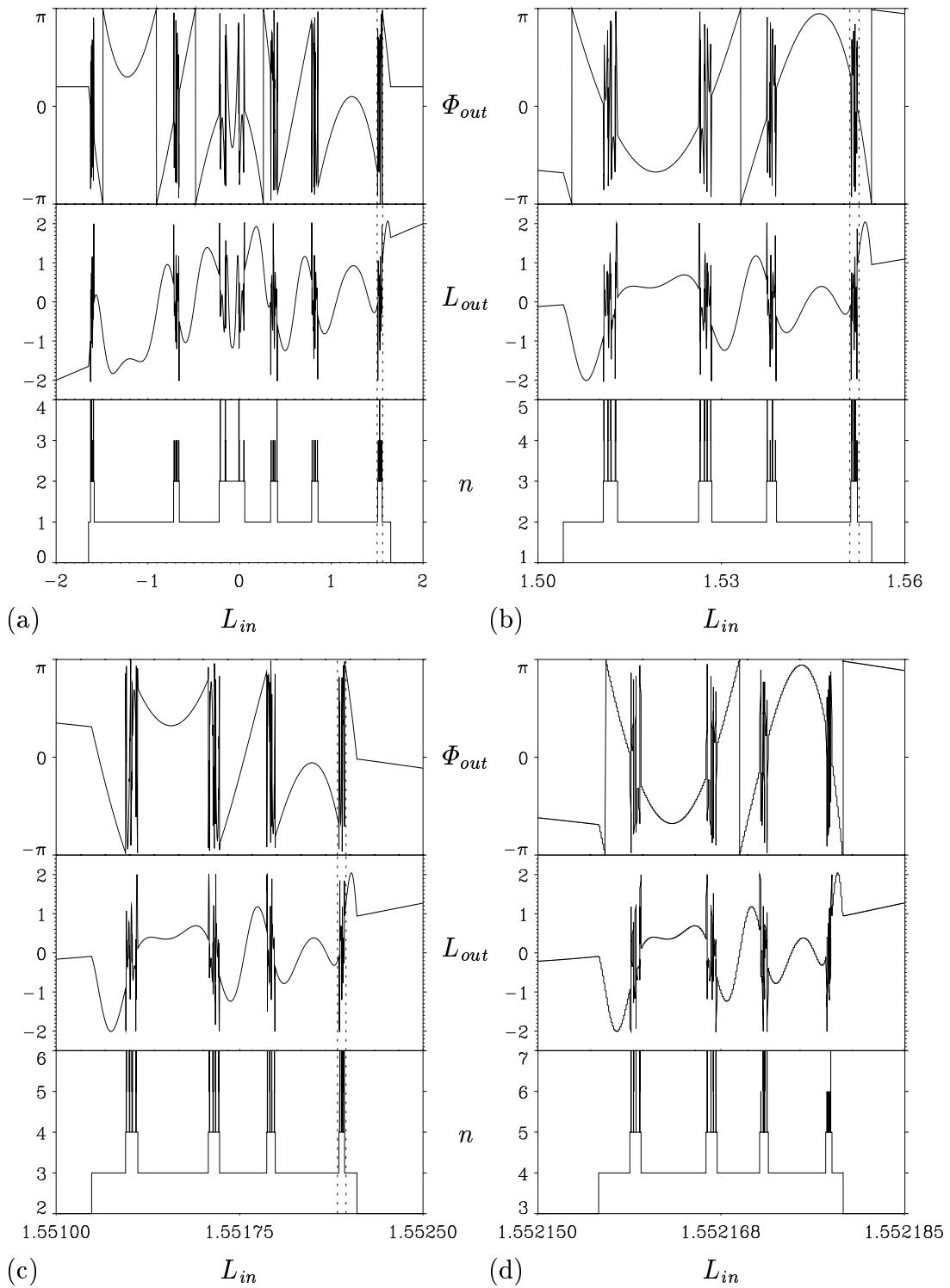


Abbildung 2.2: Streufunktionen des Zwei–Mulden–Systems mit  $k = 1.08$ . Die markierten Bereiche werden in der jeweils folgenden Abbildung vergrößert dargestellt.

Abbildung 2.3: Wie Abbildung 2.2, jedoch für  $k = 1.9$ .

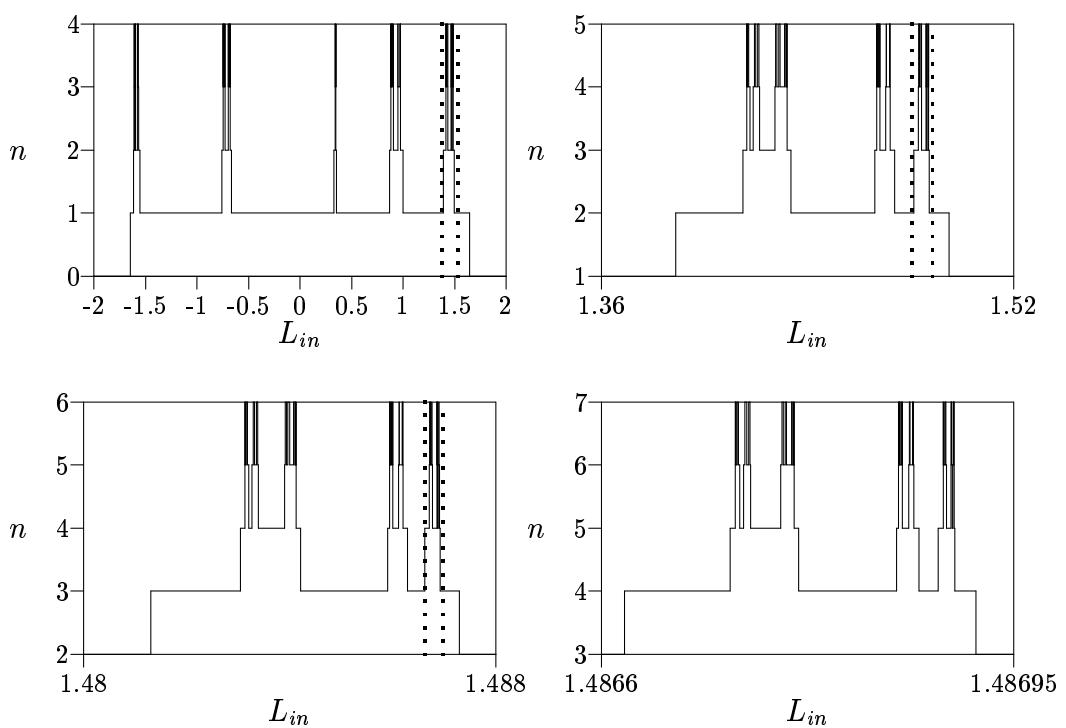


Abbildung 2.4: Verzögerungszeit des Zwei–Mulden–Systems für  $k = 1.26$ . Eine Umgebung der jeweils am weitesten rechts liegenden Singularität wird vergrößert dargestellt.

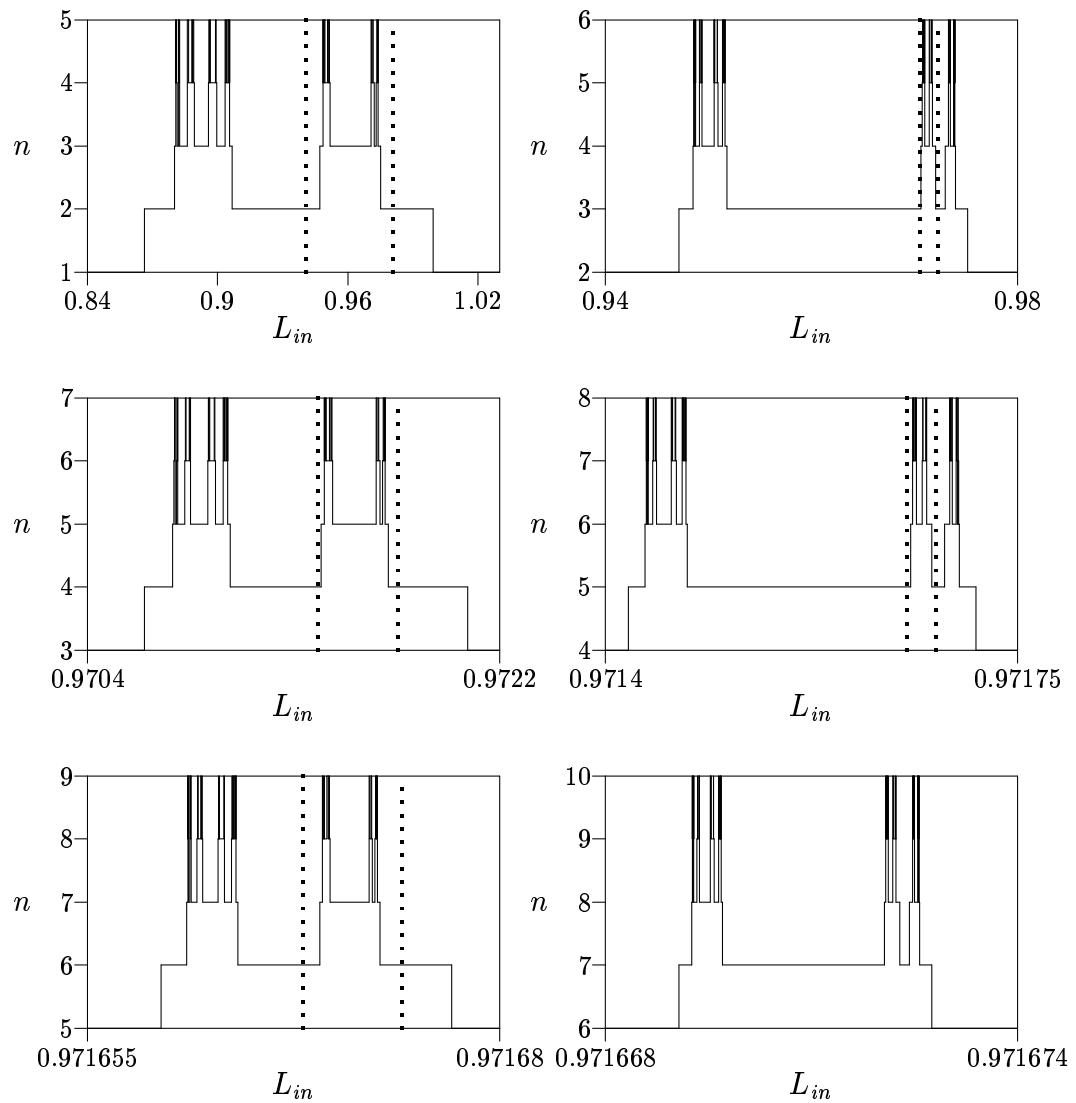


Abbildung 2.5: Wie Abbildung 2.4, jedoch wird, ausgehend von einem Intervall des Niveaus  $n$ , abwechselnd eine Umgebung des am weitesten rechts liegenden bzw. des links daneben liegenden Intervalls vom Niveau  $n + 1$  vergrößert dargestellt.

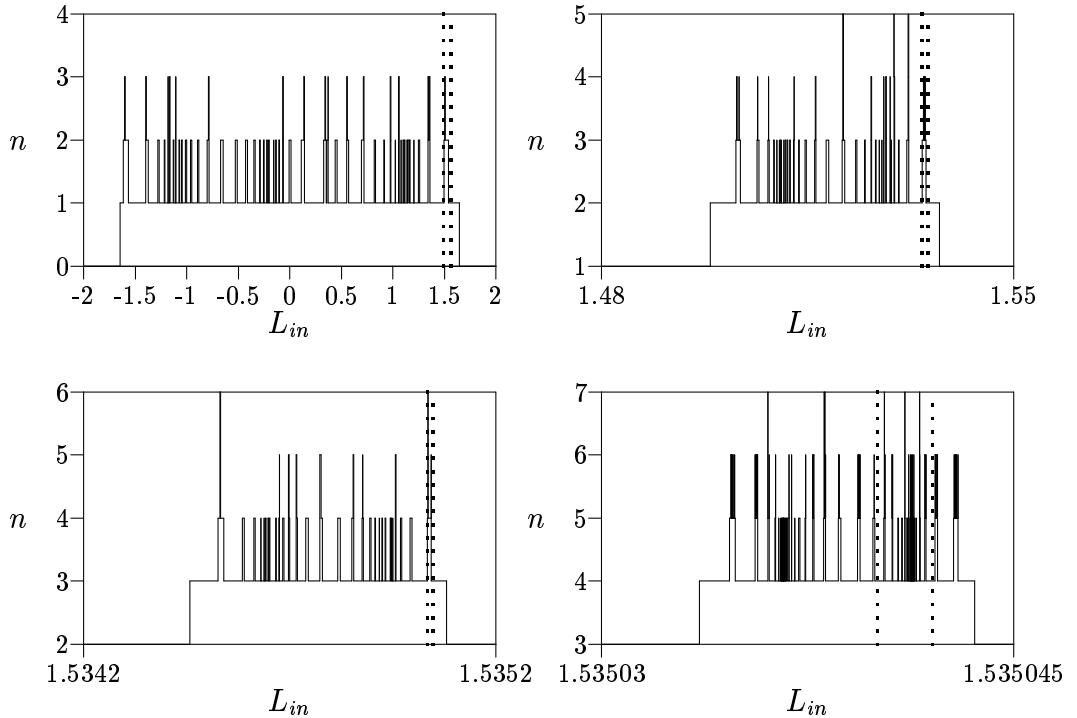


Abbildung 2.6: Verzögerungszeit des Zwei–Mulden–Systems mit der Orbiting–Modellablenkfunktion.

dargestellt. Die Organisationsstruktur scheint dreigliedrig zu sein. Abbildung 2.5 zeigt jedoch, daß dieses Ergebnis nicht global gültig ist, sondern von der Wahl des vergrößerten Intervalls abhängt. Mit  $n = 2$  beginnend zeigen die Vergrößerungen, daß ein Intervall mit Verzögerungszeit  $n$  abwechselnd zwei oder drei Intervalle mit Verzögerungszeit  $n + 1$  enthält. So findet man erst beim Übergang von  $n$  nach  $n + 2$  dieselbe Anordnung wieder. Dies läßt zwar auf eine hierarchische Ordnung schließen. Die Regeln sind allerdings komplizierter als für die Parameterwerte  $k = 1.08$  und  $k = 1.9$ .

Ich betrachte nun eine Situation, in der die Energie unterhalb der Orbitingschwelle liegt. Die Resultate des Streuprozesses mit der Orbiting–Modellablenkfunktion (1.23) sind in Abbildung 2.6 dargestellt. Man erkennt auf jeder Vergrößerungsstufe, daß ein Intervall vom Niveau  $n$  sehr viele Intervalle vom Niveau  $n + 1$  enthält, die in zwei Bereichen im Inneren dieses Intervalls konzentriert liegen. Abbildung 2.7 zeigt zwei sukzessive Vergrößerungen des markierten Bereiches im letzten Teilbild von Abbildung 2.6. Im Gegensatz zu den bisherigen Detailbetrachtungen ist in diesem Fall die Verzögerungszeit konstant, d. h. die Vergrößerungen finden auf einem konstanten Niveau  $n$  statt. Dabei wird angedeutet, daß sich unendlich viele disjunkte Intervalle vom Niveau  $n + 1$  in einem Intervall vom Niveau  $n$  befinden. Diese Intervalle häufen sich von beiden Seiten gegen einen  $L_{in}$ –Wert im Inneren des Intervalls vom Niveau  $n$ .

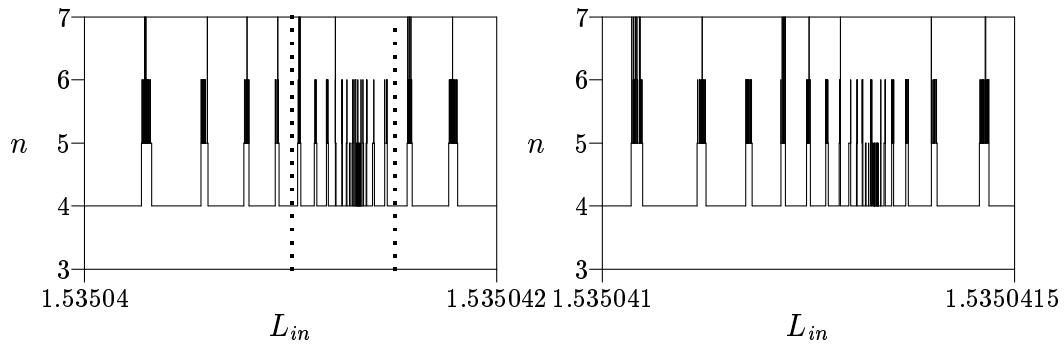


Abbildung 2.7: Wie Abbildung 2.6, die Vergrößerung erfolgt jedoch auf konstantem  $n$ -Niveau ( $n = 4$ ).

Als Beispiel für einen Parameterwert, für den keine hierarchische Gliederung in obiger Form zu entdecken ist, gebe ich  $k = 1.005$  an. In den bisherigen Fällen enthielt jedes Intervall vom Niveau  $n$  mindestens zwei disjunkte Intervalle vom Niveau  $n + 1$ . Wie Abbildung 2.8 zeigt, ist eine ähnliche Aufspaltung beim Übergang zu höheren  $n$ -Werten hier nicht festzustellen. Über u. U. lange  $n$ -Intervalle enthält ein Intervall vom Niveau  $n$  nur ein Intervall vom Niveau  $n + 1$ . Entsprechend sind feine Strukturen erst bei vergleichsweise hohen  $n$ -Werten zu beobachten. Die Abbildung 2.8 zeigt, daß es zwar auf allen Skalen Singularitäten zu geben scheint, die Art der Organisation ist aber — zumindest für die hier gezeigten  $n$ -Werte und die hier betrachteten Vergrößerungen — nicht offensichtlich.

Abschließend gehe ich kurz auf die Streuergebnisse für das Drei-Mulden-System ein. Ich beschränke mich darauf, Parameterwerte anzugeben, für die die Hierarchie der Streuabbildung einfach zu beschreiben ist, und verzichte auf explizite Darstellungen der Streufunktionen. Man erhält für  $k = 0.9$  eine zwei- und für  $k = 1.9$  eine achtgliedrige Struktur. Es gibt auch Parameterbereiche, in denen die Streufunktionen ein vergleichbares Verhalten zeigen wie für das Zwei-Mulden-System mit  $k = 1.005$  oder  $k = 1.26$ . Da sich keine wesentlichen qualitativen Unterschiede zeigen, verzichte ich auf eine detailliertere Vorstellung.

Bevor ich auf die Erklärung der hier gewonnenen Ergebnisse eingehe, diskutiere ich die sogenannte Entweichrate.

### 2.2.2 Die Entweichrate

Ich definiere die *Entweichrate* (engl. escape rate) an dieser Stelle operativ, indem ich den Streuversuch zur Bestimmung dieser Größe beschreibe. Bei vorgegebener Energie und In-Richtung wird zur Zeit  $t = 0$  ein Ensemble von  $N_0$  Teilchen ( $N_0 \gg 1$ ), das bezüglich des In-Drehimpulses gleichver-

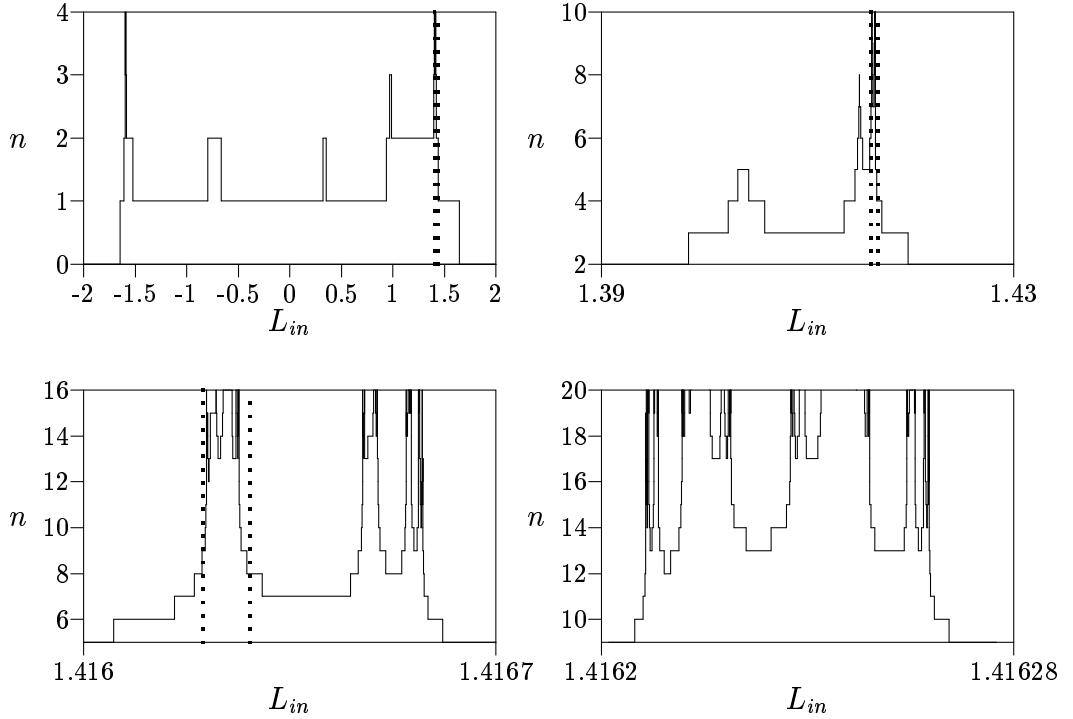


Abbildung 2.8: Verzögerungszeit des Zwei–Mulden–Systems mit  $k = 1.005$ .

teilt ist, auf das Target geschossen. Es stellt sich dann die Frage: Wieviele Teilchen  $N(t)$  befinden sich zur Zeit  $t$  noch im Wechselwirkungsbereich? Die Entweichrate  $\kappa$  ist in diesem Zusammenhang über folgende Proportionalität definiert:

$$N(t) \sim e^{-\kappa t}, \quad (2.5)$$

wobei sowohl  $N(t)$  als auch  $t$  sehr groß sein sollen. Es wird also nur eine Aussage über das asymptotische Zeitverhalten des Ensembles gemacht. Mit  $1/\kappa$  ist die mittlere Lebensdauer einer Streutrajektorie im Wechselwirkungsbereich gegeben. Bei Verwendung der diskretisierten Zeit definiert man  $\kappa$  entsprechend:

$$N(n) \sim e^{-\kappa n}. \quad (2.6)$$

In diesem Unterabschnitt beschränke ich die Diskussion auf den Energiebereich oberhalb der Orbitingschwelle und auf Parameterwerte, für die in Abschnitt 2.2.1 ein komplexes Streuverhalten festgestellt wurde. Für  $k = 1.08$ ,  $k = 1.26$  und  $k = 1.9$  zeigt die Abbildung 2.9 die Zeitentwicklung jeweils eines Ensembles, das aus  $N_0 = 10^6$  Teilchen besteht. Es ergibt sich ein exponentieller Zusammenhang zwischen  $N$  und  $n$ . Aus den Steigungen der dargestellten Ausgleichsgeraden erhält man als Entweichraten  $\kappa = 1.3$ ,  $1.1$  bzw.  $2$ . Ich gehe an dieser Stelle nicht näher auf eine Diskussion der numerisch gewonnenen Daten ein, da in Kapitel 7 eine sehr viel effizientere Methode dargestellt wird,

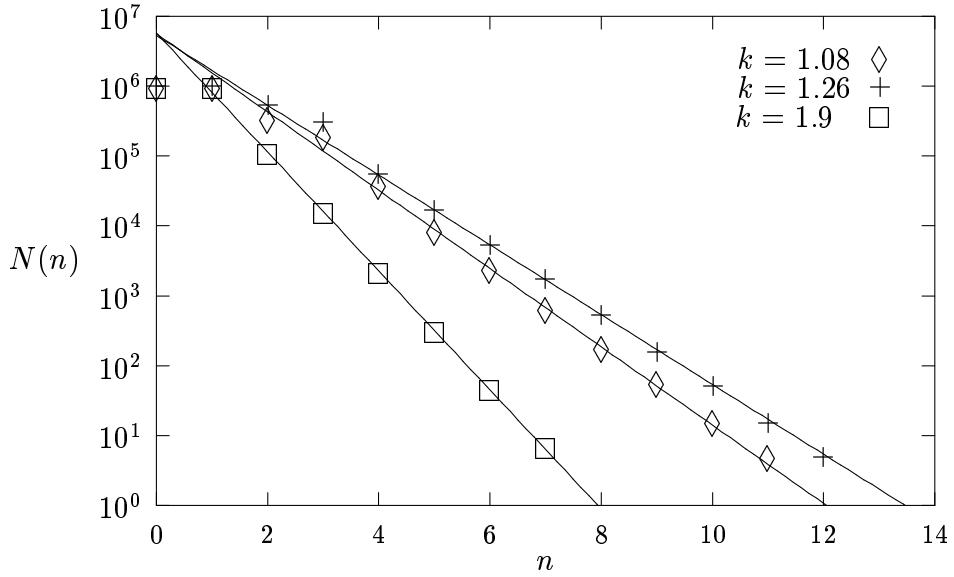


Abbildung 2.9:  $N(n)$  für das Zwei-Mulden-System zu verschiedenen  $k$ -Werten.

die wesentlich genauere Ergebnisse liefert. Man kann die hier angegebenen Werte aber durchaus als eine erste gute Abschätzung auffassen.

Bei der Betrachtung der Entweichraten ergibt sich als bemerkenswertes Resultat eine nichtmonotone Abhängigkeit von  $k$  bzw. von der Energie. Da der Wechselwirkungsbereich nur aus anziehenden Bereichen besteht, hätte man intuitiv annehmen können, daß die Entweichrate bei Erniedrigung der Energie bzw. Erhöhung von  $k$  kleiner wird. Die Ergebnisse für die exemplarisch gewählten Parameterwerte  $k = 1.08$ ,  $k = 1.26$  und  $k = 1.9$  zeigen jedoch ein anderes Verhalten:

$$\kappa(k = 1.9) > \kappa(k = 1.08) > \kappa(k = 1.26) . \quad (2.7)$$

In Abbildung 2.10 ist die Entwicklung eines Ensembles für  $k = 1.005$  dargestellt. Abbildung 2.10(a) zeigt, daß die funktionale Abhängigkeit  $N(n)$  nicht exponentieller Natur ist. In doppeltlogarithmischer Darstellung erhält man für große  $n$ -Werte ( $n > 10$ ) eine Gerade (Abbildung 2.10(b)), was auf eine algebraische Abhängigkeit schließen läßt, d. h.

$$N(n) \sim n^{-\alpha} . \quad (2.8)$$

Für große  $n$  ist der führende Term der Entweichrate daher gegeben durch:

$$\kappa = \alpha \frac{\ln n}{n} . \quad (2.9)$$

Beim Übergang  $n \rightarrow \infty$  wird die Entweichrate somit formal null und die mittlere Lebensdauer entsprechend unendlich. Es scheint daher angebracht,

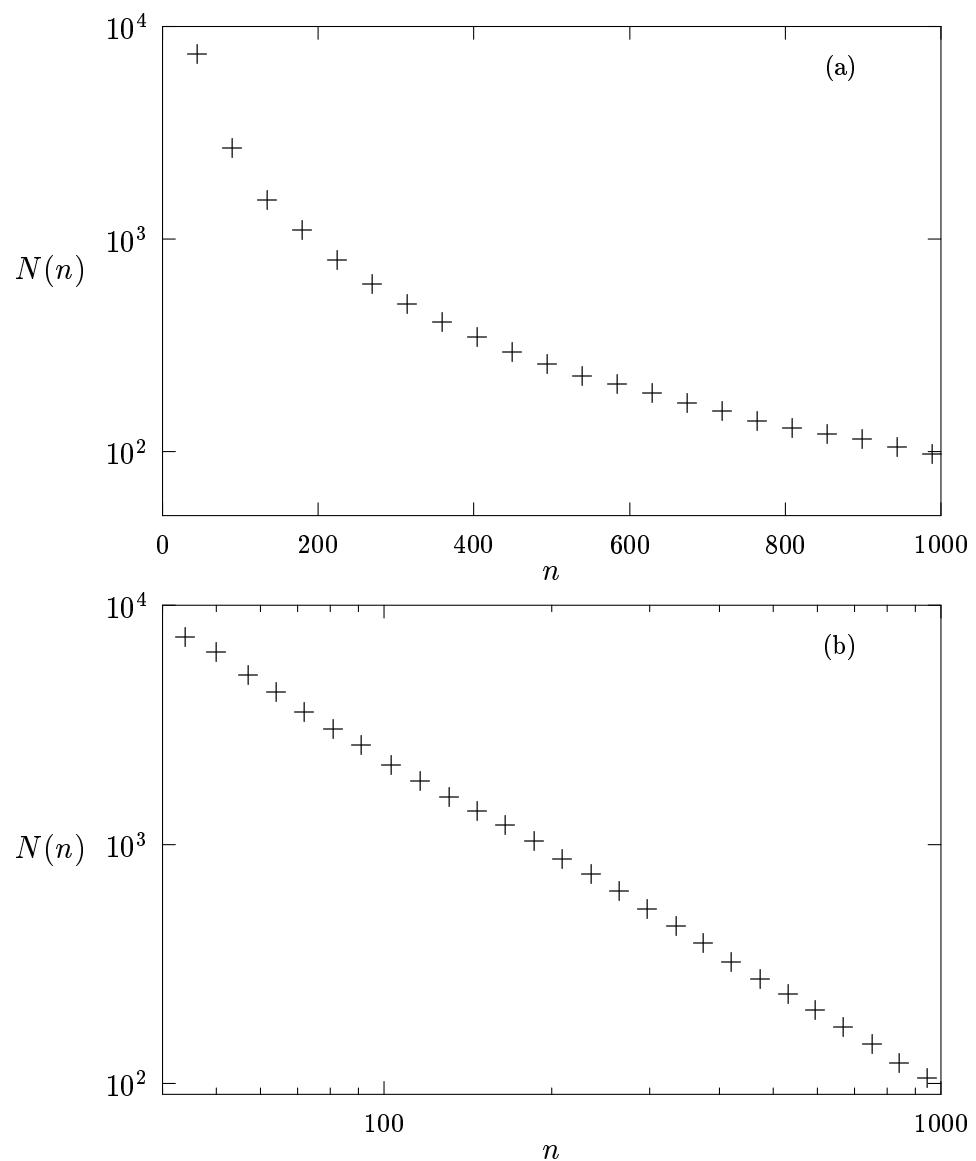


Abbildung 2.10:  $N(n)$  für das Zwei–Mulden–System mit  $k = 1.005$  (a) ein–fachlogarithmische (b) doppeltlogarithmische Darstellung.

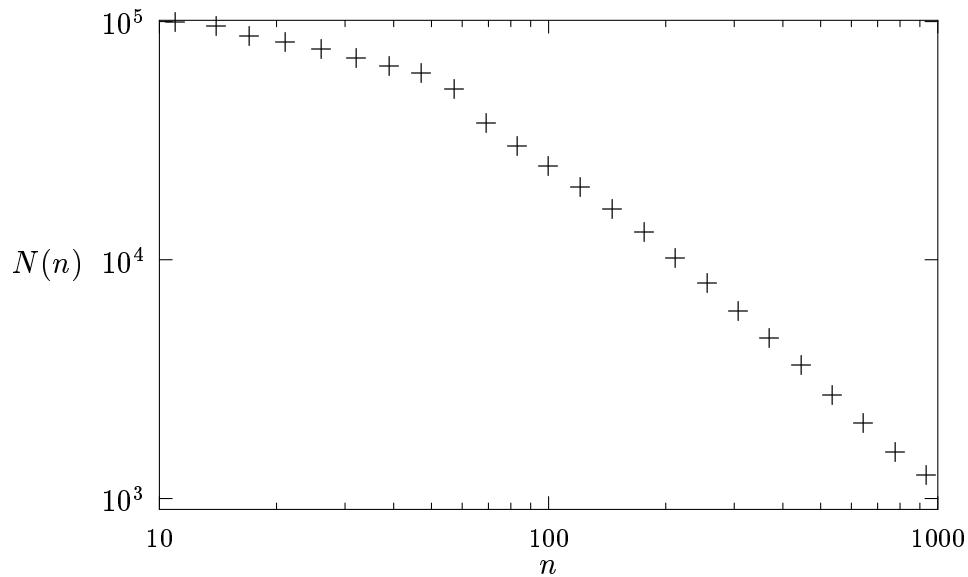


Abbildung 2.11: Die Funktion  $N(n)$  mit  $k = 1.009916$  in doppeltlogarithmischer Darstellung.

neben der Entweichrate auch den Exponenten  $\alpha$  als eine charakterisierende Größe aufzufassen. Im Gegensatz zu  $\kappa$  ist  $\alpha$  aber i. a. nicht asymptotisch konstant, sondern ändert sich mit der Länge des betrachteten Zeitintervalls. Ein Beispiel, wo dies schon für relativ kleine  $n$  deutlich wird, ist mit  $k = 1.009916$  gegeben. Für diesen Parameterwert zeigt Abbildung 2.11 die Funktion  $N(n)$  im  $n$ -Intervall  $[10, 1000]$  in doppeltlogarithmischer Darstellung. Für  $n > 100$  erkennt man ein algebraisches Verhalten von  $N(n)$ , und die Angabe eines entsprechenden Exponenten  $\alpha$  scheint möglich. Es gibt jedoch unterschiedliche Intervalle mit unterschiedlichen Exponenten. Die Abbildung 2.12 macht dies deutlich, indem sie den Grenzbereiche zweier solcher Intervalle zeigt. Es wird das  $n$ -Intervall  $[500, 1100]$  dargestellt. Man erkennt einen ‘‘Knick’’ im Graphen von  $N(n)$ , der einer Änderung des Exponenten  $\alpha$  entspricht. Geht man zu höheren  $n$ -Werten über, so stellt man i. a. weitere Exponenten fest, die auf einem bestimmten Zeitintervall Gültigkeit besitzen. Trotz der Betrachtung eines großen Zeitraumes ist die Angabe von  $\alpha$  somit nur in Verbindung mit der Angabe eines Zeitintervalls sinnvoll. Ob es einen asymptotisch kontanten Wert gibt, ist im Rahmen der numerischen Genauigkeit nicht festzustellen.

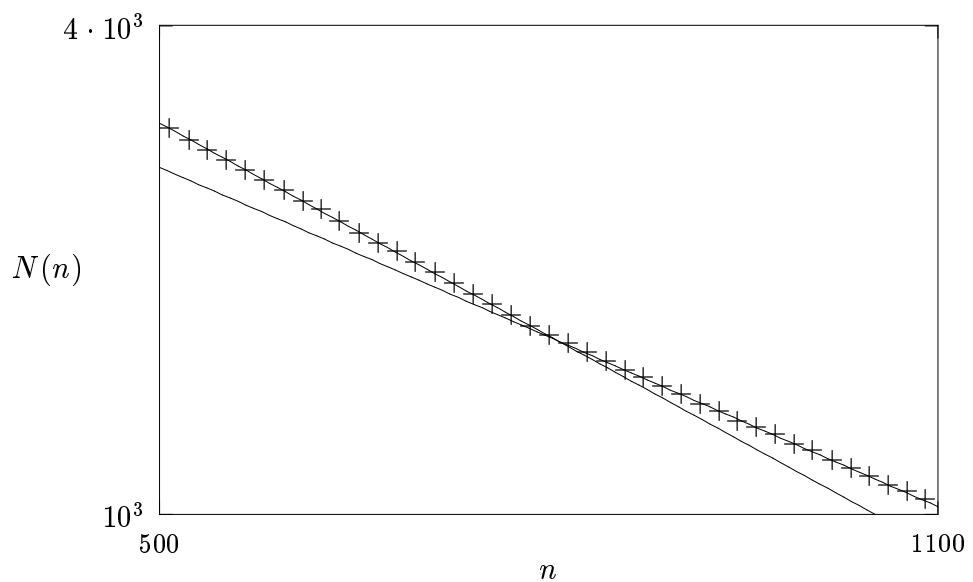


Abbildung 2.12: Die Funktion  $N(n)$  mit  $k = 1.009916$  im  $n$ -Intervall  $[500, 1100]$  in doppeltlogarithmischer Darstellung. Die Geraden dienen der Verdeutlichung, daß sich der Exponent  $\alpha$  ändert.

# Kapitel 3

## Chaos und Hyperbolizität

Da es verschiedene Definitionen des Begriffes *Chaos* gibt, gebe ich im ersten Abschnitt dieses Kapitels zunächst die Definition an, die in dieser Arbeit verwendet wird. In den folgenden Abschnitten und im anschließenden Kapitel 4 wird dann gezeigt, unter welchen Umständen das System (1.9) chaotisch ist und mit Hilfe einer *Symbolischen Dynamik* beschrieben werden kann.

Für einige Begriffe, die in den Abschnitten 3.2 und 3.3 verwendet werden, gebe ich die formalen mathematischen Definitionen nicht an, da diese den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden. In vielen Fällen sind sie — zumindest was die Anschauung betrifft — selbsterklärend wie z. B. “vertikale“ oder “horizontale Kurve“. Im Hinblick auf die exakten Definitionen verweise ich auf die Literatur, z. B. [Mos73, GucHol86, Wig88, Dev89].

Anhand des Zwei–Mulden–Systems beschreibe ich in Abschnitt 3.2 die Kontraktions– und Expansionseigenschaften von  $F$ . Der Abschnitt 3.3 beschäftigt sich mit dem Begriff der *Hyperbolizität*. Dieser Begriff spielt eine zentrale Rolle in der Theorie der dynamischen Systeme. Die Hyperbolizität ist z. B. eine entscheidende Voraussetzung dafür, eine global exakte Symbolische Dynamik einführen zu können (siehe auch Kapitel 4). In diesem Abschnitt werden Bedingungen hergeleitet, unter denen das System (1.9) hyperbolisch ist. Da bisher nur für sehr wenige Modellsysteme die Hyperbolizität nachgewiesen werden konnte und da die mathematischen Details aufwendig sind, gehe ich in diesem Abschnitt näher auf die technischen und formalen Einzelheiten ein.

### 3.1 Zur Definition von Chaos

In der mehr mathematisch orientierten Literatur findet man oftmals eine Definition des Begriffes Chaos, die auf Begriffe und Konzepte aus der Maßtheorie zurückgreift [Rue78] (siehe auch Kapitel 6 und 7). In der physikalisch geprägten Literatur ist dagegen in erster Linie die Topologie als Ausgangspunkt vorzufinden. In dieser Arbeit gehe ich ebenfalls von einer topologischen

Beschreibung aus, die auf DEVANEY zurückgeht [Dev89, GucHol86, Wig88]. Man benötigt zunächst die Definitionen der topologischen Transitivität und der sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Sei  $V \subset \mathbb{R}^n$ ; eine Abbildung  $f : V \rightarrow V$  heißt *topologisch transitiv*, wenn für jedes Paar offener Mengen  $U, W \subset V$  ein  $m > 0$  existiert, so daß  $f^m(U) \cap W \neq \emptyset$  ist<sup>1</sup>.

$f$  heißt *sensitiv abhängig von den Anfangsbedingungen*, wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, so daß für alle  $p \in V$  und jede Umgebung  $U$  von  $p$  ein  $q \in U$  sowie ein  $m > 0$  existiert mit  $|f^m(p) - f^m(q)| > \delta$ .

Damit läßt sich nun “Chaos“ definieren:

**Definition 1** Sei  $V \subset \mathbb{R}^n$ ; eine Abbildung  $f : V \rightarrow V$  heißt *chaotisch* auf  $V$ , wenn gilt:

1.  $f$  ist sensitiv abhängig von den Anfangsbedingungen.
2.  $f$  ist topologisch transitiv.
3. Die periodischen Punkte von  $f$  liegen dicht in  $V$ .

Aufgrund von Punkt 1 ist das Verhalten eines chaotischen Systems also nicht vorhersagbar. Punkt 2 besagt, daß man ein chaotisches System nicht in zwei Teile zerlegen kann, die dynamisch nicht miteinander in Verbindung stehen. Der Punkt 3 fordert schließlich, daß es überall inmitten dieser irregulären Strukturen in Form der periodischen Orbits ein reguläres Element gibt.

Beschränkt man sich auf den für diese Arbeit relevanten Fall  $n = 2$ , so folgt direkt aus der Definition, daß in einem chaotischen System kein stabiler Orbit auftreten kann. Die damit verbundenen KAM–Tori stellen unüberwindliche Phasenraumbarrieren dar, welche die topologische Transitivität ausschließen würden.

In der Regel koexistieren reguläre, d. h. KAM–Torus–dominierte und irregulär–chaotische Gebiete im Phasenraum eines Systems. Man bezeichnet ein System daher oftmals schon als chaotisch, wenn der Phasenraum neben regulären Bereichen eine unter der Dynamik invariante Teilmenge enthält, auf der die Bedingungen von Definition 1 erfüllt sind. In diesem weiter gefaßten Sinn ist Chaos dann eine generische Eigenschaft [Mos73]. Diese Form von Chaos wird auch als “weich“ bezeichnet, während man bei Abwesenheit regulärer Strukturen von “hartem“ Chaos spricht [Gut92]. Man beachte, daß diese Begriffe keine Definitionen im streng mathematischen Sinne sind.

---

<sup>1</sup>Man beachte, daß ein in  $V$  dicht liegender Orbit die topologische Transitivität impliziert.

Ein System, das der Definition 1 genügt, kann man in gewissem Sinne auch als “rein chaotisch” bezeichnen. Die Bedeutung derartiger Systeme ist vergleichbar mit der integrablen Systemen. Diese beiden Systemklassen stellen zwei Extreme dar, von denen ausgehend man die “dazwischenliegenden” generischen Systeme untersuchen kann. Dementsprechend hat die Suche nach rein chaotischen Systemen eine ähnliche Bedeutung wie die Suche nach integrierten Systemen.

Die Bedingungen der Definition 1 im konkreten Fall nachzuweisen ist allerdings nicht einfach. Bis zu diesem Zeitpunkt hat man z. B. noch kein glattes gebundenes System gefunden, das die geforderten Kriterien erfüllt. Lange Zeit galten das anisotrope Kepler–Problem und das sogenannte  $x^2y^2$ –Potential als mögliche Kandidaten. Mit Hilfe numerischer Verfahren konnten jedoch in beiden Fällen Regionen stabiler Bewegung entdeckt werden [Bro85, DahRus92]. Im Falle ungebundener Systeme gibt es einige wenige Beispiele, für die man Chaos im Sinne von Definition 1 nachweisen konnte. In erster Linie handelt es sich dabei um Systeme aus dem Bereich der Potentialstreuung. Zu nennen sind Harte–Scheiben– [Eck87, Han93] und damit eng verwandte Hügelpotentiale [JunSch87a, JunRic90], sowie ein einfaches Gravitationsbillard [Hén88].

In den nächsten Abschnitten und in Kapitel 4 wird gezeigt, daß das System (1.9) in bestimmten Parameterbereichen chaotisch im Sinn von Definition 1 ist. Zuerst wird die Geometrie der Abbildung diskutiert.

## 3.2 Kontraktions– und Expansionseigenschaften von $F$

In diesem Abschnitt beschreibe ich geometrisch die Wirkung von  $F$  auf bestimmte Mengen im Phasenraumzylinder.

Zunächst definiere ich die Mengen aller Anfangsbedingungen in  $\Gamma$ , die unter mindestens  $n$  Iterationen von  $F$  bzw.  $F^{-1}$  in  $\Gamma$  bleiben, bevor sie entweichen:

$$\Lambda_-^n = \bigcap_{j=0}^n F^{-j}(\Gamma) \quad (3.1)$$

$$\Lambda_+^n = \bigcap_{j=0}^n F^j(\Gamma). \quad (3.2)$$

$\Lambda_-^n$  besteht also aus Punkten mit mindestens  $n$  weiteren Punkten in der Zukunft und  $\Lambda_+^n$  aus Punkten mit mindestens  $n$  weiteren Punkten in der Vergangenheit. Man beachte die Relation  $\Lambda_{\pm}^{n+1} \subset \Lambda_{\pm}^n$ . Eine für das Folgende wesentliche Rolle spielt die *invariante Menge*  $\Lambda$  von  $F$ , die definiert ist durch

$$F^n(\Lambda) \subset \Lambda \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Definiert man  $\Lambda_{\pm}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{\pm}^n$ , so beschreibt der Schnitt von  $\Lambda_{+}^{\infty}$  und  $\Lambda_{-}^{\infty}$  die Punkte, die für alle Zeiten in  $\Gamma$  bleiben, also die invariante Menge  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \Lambda_{+}^{\infty} \cap \Lambda_{-}^{\infty}. \quad (3.4)$$

Als Beispielsystem wird für die folgenden Betrachtungen das Zwei-Mulden-System mit  $k = 1.9$  verwendet. Die Mengen  $\Lambda_{-}^1$  und  $\Lambda_{+}^1$  sind in der Abbildung 3.1 dargestellt.  $\Lambda_{-}^1$  ist der vertikale Streifen,  $\Lambda_{+}^1$  der parabelförmige Streifen.<sup>2</sup>

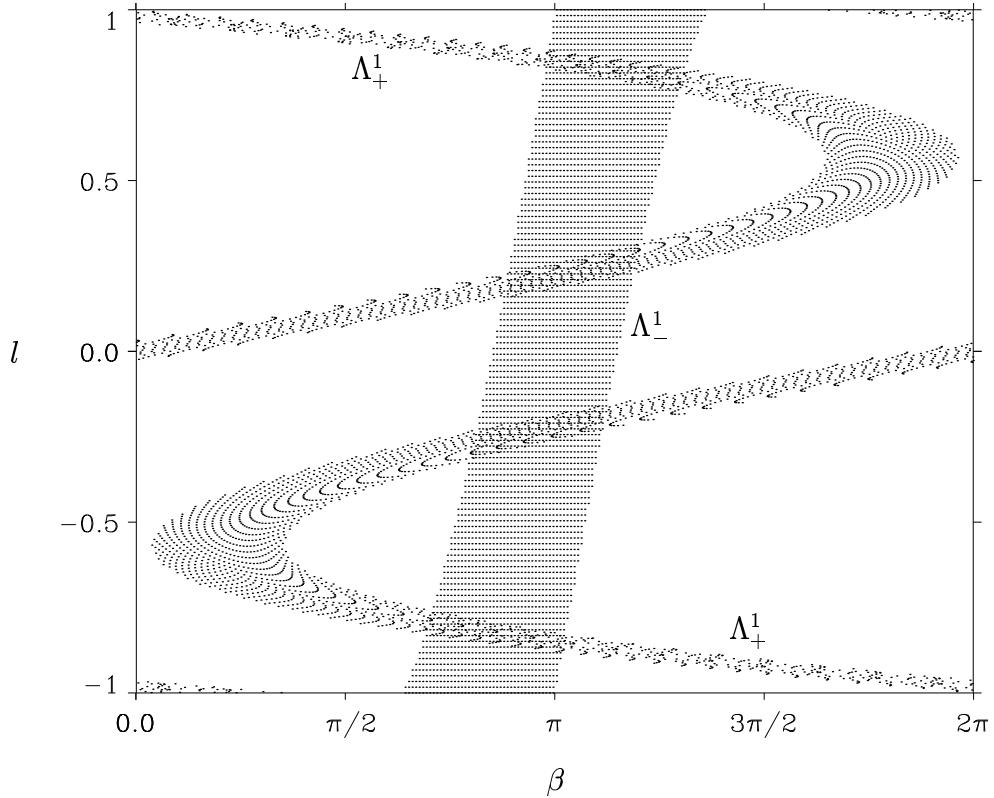


Abbildung 3.1: Die Mengen  $\Lambda_{-}^1$  und  $\Lambda_{+}^1$  für das Zwei-Mulden-System mit den Parametern  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.9$ .

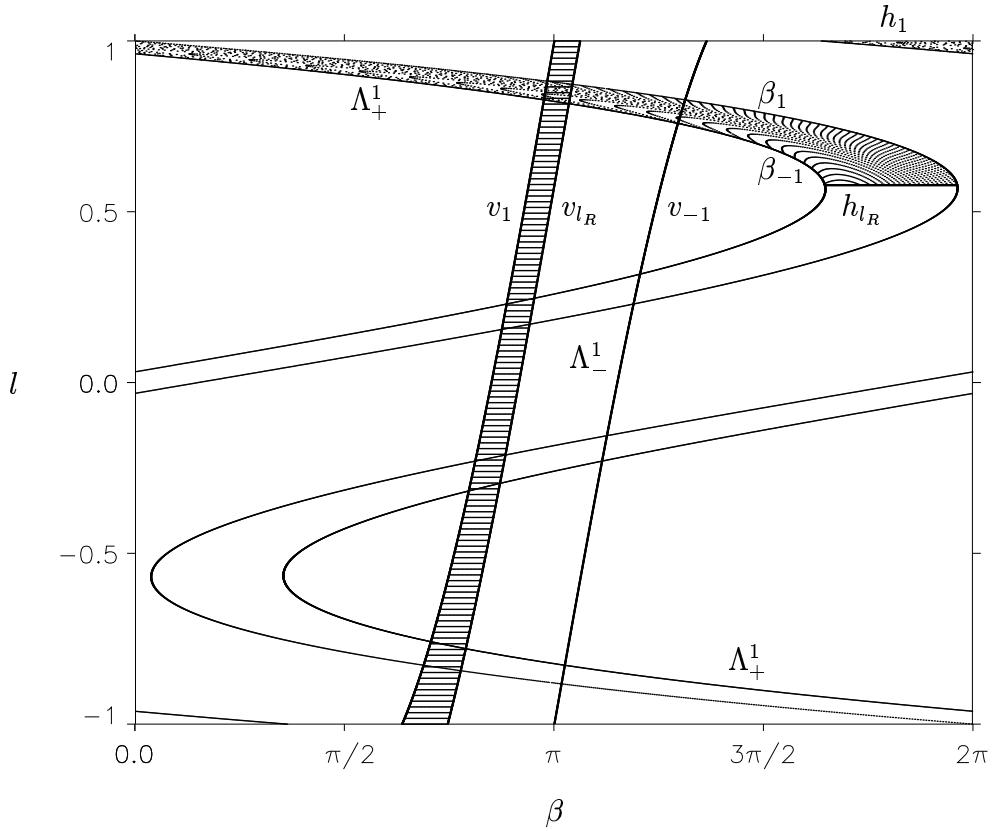
Anhand von Abbildung 3.2 beschreibe ich nun die Expansions- und Kontraktions-eigenschaften von  $F$ . Zu diesem Zweck definiere ich vertikale Kurven  $v_c$  mittels

$$l + 2R_0 \sin \beta = c, \quad c \in [-1, 1]. \quad (3.5)$$

Nach (1.10b) werden diese Kurven abgebildet auf Kurven  $h_c$ , die durch den Schnitt von  $l = c$  mit  $\Lambda_{+}^1$  definiert sind. Man beachte, daß die überabzähl-

---

<sup>2</sup>Man beachte, daß der Phasenraum ein Zylinder ist und  $\Lambda_{+}^1$  nicht aus zwei disjunkten Teilen besteht, sondern zusammenhängend ist.

Abbildung 3.2: Zur Geometrie der Abbildung  $F$ .

baren Scharen von Kurven  $v_c$  und  $h_c$ ,  $c \in [-1, 1]$ , jeweils eine Blätterung der Mengen  $\Lambda_-^1$  bzw.  $\Lambda_+^1$  darstellen.

Aufgrund der Systemgeometrie gilt  $\beta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ . Für eine Kurve in  $\Lambda_-^1$  mit  $l = c$  folgt also mit (1.10b):

$$\beta = \pi - \arcsin \left( \frac{l' - c}{2R_0} \right). \quad (3.6)$$

Eingesetzt in (1.10a) erhält man folgende Parametrisierung der Bildkurve in  $\Lambda_+^1$ :

$$\beta_c(l') = -\arcsin \left( \frac{l' - c}{2R_0} \right) - \Theta(l'). \quad (3.7)$$

Ein vertikaler Streifen, der durch  $v_1$  und die durch den Regenbogendrehimpuls  $l_R$  definierte Kurve  $v_{l_R}$  sowie entsprechende Linienelemente mit  $l = -1$  und  $l = 1$  gegeben ist, wird also auf einen horizontal ausgerichteten Streifen abgebildet, der durch  $h_1$ ,  $h_{l_R}$  und durch die Kurven  $\beta_{-1}(l)$  und  $\beta_1(l)$ ,  $l \in [l_R, 1]$ , definiert ist. Betrachtet man die Längen sich entsprechender Bild- und Urbildkurven, so beobachtet man — grob gesagt — Kontraktion in vertikaler und Expansion in horizontaler Richtung. Entsprechende

Kontraktions– und Expansionseigenschaften erhält man bei Betrachtung der vertikalen Streifen, die durch Kurven  $v_c$  mit  $(c = l_R, c = 0)$ ,  $(c = 0, c = -l_R)$  und  $(c = -l_R, c = -1)$  definiert sind.<sup>3</sup>

Erhöht man die Zahl der Mulden, so bleiben die groben Kontraktions– und Expansionsrichtungen dieselben. Man kann dies analog zu obigen Betrachtungen zeigen. Als wesentlicher Unterschied ist in den Definitionen der Kurven der Index der besuchten Potentialmulde zu berücksichtigen. Ich verzichte hier aber auf die technischen Details und gebe eine alternative Erklärung, die auf das bisher Gezeigte zurückgreift. Abbildung 3.3 zeigt die Mengen  $\Lambda_-^1$  und  $\Lambda_+^1$  für das Drei–Mulden–System mit  $R_0 = 1.4$  und  $k = 1.9$ .  $\Lambda_-^1$  besteht in diesem Fall aus zwei disjunkten vertikalen Streifen, die jeweils einer der beiden Potentialmulden entspricht, die als nächstes besucht werden können. Im Fall von  $N$  Mulden erhält man entsprechend  $N - 1$  disjunkte Streifen. Beschränkt man sich auf einen dieser Streifen, so entspricht dies der Festlegung der Mulde, die als nächstes aufgesucht wird. Da die verschiedenen Potentiale  $v(r)$  nicht überlappen und daher unabhängig voneinander betrachtet werden können, erhält man dadurch ein System aus zwei Mulden. Bis auf eine eventuelle Verschiebung der Mengen  $\Lambda_-^1$  und  $\Lambda_+^1$  im Winkelbereich sind somit die oben gewonnenen Ergebnisse im Hinblick auf Kontraktions– und Expansionseigenschaften direkt übertragbar.

Wählt man eine andere Ablenkfunktion, so beeinflußt dies nur die Gestalt der Menge  $\Lambda_+^1$ . Da die Abbildung  $I_0$  (siehe (1.12)) für Entweichen bzw. Nichtentweichen aus dem Wechselwirkungsbereich verantwortlich ist und da  $\Theta$  in  $I_0$  nicht eingeht, wird  $\Lambda_-^1$  ausschließlich durch die Systemgeometrie bestimmt. Das Bild von  $\Lambda_-^1$ , nämlich  $\Lambda_+^1$ , hängt dagegen wesentlich von  $\Theta$  ab und ist demnach je nach Ablenkfunktion individuell zu untersuchen.

### 3.3 Hyperbolizität der invarianten Menge

Der Begriff der hyperbolischen Menge steht im Zentrum der Theorie dynamischer Systeme. Die Existenz einer solchen Menge in einem Hamilton–System ist zwar generisch, jedoch bildet sie i. a. nur ein Teilsystem. Es gibt darüber hinaus reguläre Strukturen, die wesentliche Aspekte der Dynamik bestimmen können.

In diesem Abschnitt werden Voraussetzungen bestimmt, unter denen das System (1.9) hyperbolisch ist. Zunächst gebe ich die mathematisch exakte Definition einer hyperbolisch invarianten Menge an ([Wig88] Seite 145, [Dev89] Seite 236).

---

<sup>3</sup>An dieser Stelle sei angemerkt, daß die Falten von  $\Lambda_+^1$  nicht exakt bei  $\pm l_R$  liegen, sondern durch die Extremwerte der Kurven in der Kurvenschar (3.7) gegeben sind. Diese Extremwerte bilden zwei Kurven in  $\Lambda_+^1$ , eine mit positivem und eine mit negativem  $l$ . Als Kurvenparameter kann in beiden Fällen  $c$  aufgefaßt werden.

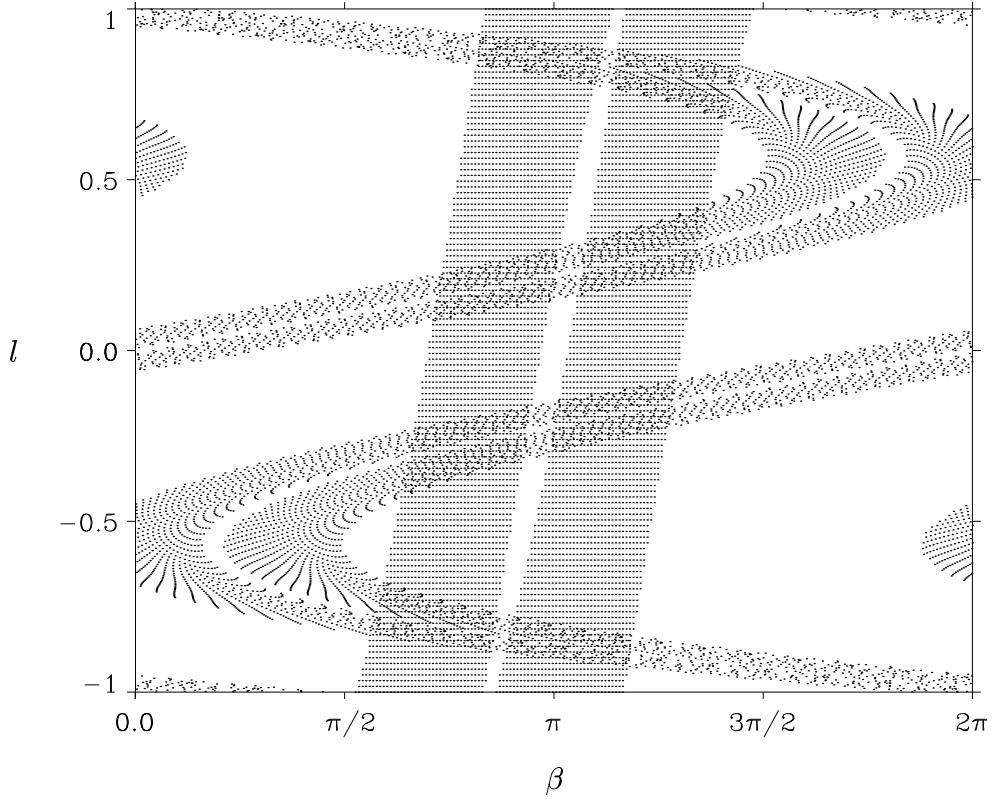


Abbildung 3.3: Die Mengen  $\Lambda_-^1$  (vertikale Streifen) und  $\Lambda_+^1$  (parabelförmige Streifen) für das Drei–Mulden–System mit den Parametern  $R_0 = 1.4$  und  $k = 1.9$ .

**Definition 2** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus,  $r \geq 1$ , und  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  sei eine abgeschlossene Menge, die invariant unter  $f$  ist.  $\Lambda$  heißt hyperbolische Menge, wenn für alle  $p \in \Lambda$  eine Aufspaltung  $\mathbb{R}^2 = E_p^s \oplus E_p^u$  existiert, so daß gilt:

1.

$$\begin{aligned} Df(p) \cdot E_p^s &= E_{f(p)}^s \\ Df(p) \cdot E_p^u &= E_{f(p)}^u. \end{aligned} \quad (3.8)$$

2. Es gibt eine reelle Zahl  $\gamma$  mit  $0 < \gamma < 1$ , so daß

$$\begin{aligned} \text{für } \xi_p \in E_p^s \text{ gilt: } |Df(p)\xi_p| &\leq \gamma |\xi_p| \\ \text{für } \eta_p \in E_p^u \text{ gilt: } |Df^{-1}(p)\eta_p| &\leq \gamma |\eta_p|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.  $E_p^s$  und  $E_p^u$  ändern sich stetig mit  $p$ .

Ein wesentlicher Aspekt in dieser Definition ist die Unabhängigkeit der Konstanten  $\gamma$  vom Punkt  $p$ . In diesem Zusammenhang wird daher von

gleichmäßiger Hyperbolizität gesprochen. Man beachte, daß Orbits, deren Startpunkte in Richtung  $E_p^s$  ( $E_p^u$ ) nahe bei  $p$  liegen, in positiver (negativer) Zeit exponentiell gegen den Orbit von  $p$  konvergieren. Man kann diese Definition daher als eine Verallgemeinerung des Begriffs des hyperbolischen Fixpunktes auffassen. Ähnlich wie dort sind auch hier Rückschlüsse auf die Dynamik von  $F$  möglich, obwohl in der Definition nur Bedingungen an das linearisierte System gestellt werden. So gibt es in jedem Punkt einer hyperbolischen Menge entsprechend stabile und instabile invariante Mannigfaltigkeiten [Hir+77].

Die Bedingungen der Definition 2 für ein konkretes Beispiel nachzuweisen, ist sehr schwierig. Es gibt eine äquivalente Formulierung der Hyperbolizität, die auf NEWHOUSE und PALIS zurückgeht und leichter zu verifizieren ist [NewPal73]. Als Vorbereitung benötigt man den Begriff des *Sektors* oder *Kegels*. Wie in obiger Definition sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus,  $r \geq 1$ , und  $\Lambda$  sei eine abgeschlossene Menge, die invariant unter  $f$  ist.  $\mathbb{R}^2 = E_p^S \oplus E_p^U$  sei eine Zerlegung von  $\mathbb{R}^2$  für  $p \in \Lambda$ , und  $\epsilon$  sei eine positive reelle Zahl. Der  $\epsilon$ -Kegel  $S_\epsilon^u(p)$  ist definiert durch

$$S_\epsilon^u(p) = \left\{ (\xi_p, \eta_p) \in E_p^S \oplus E_p^U \mid |\xi_p| \leq \epsilon |\eta_p| \right\}. \quad (3.10)$$

Entsprechend erhält man einen  $\epsilon$ -Kegel  $S_\epsilon^s(p)$  durch

$$S_\epsilon^s(p) = \left\{ (\xi_p, \eta_p) \in E_p^S \oplus E_p^U \mid |\eta_p| \leq \epsilon |\xi_p| \right\}. \quad (3.11)$$

Es gilt nun

**Satz 2** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus,  $r \geq 1$ , und  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  sei eine kompakte Menge, die invariant unter  $f$  ist.  $\Lambda$  ist hyperbolisch, wenn es beschränkte, positive Funktionen ohne Nullstellen  $\epsilon^U, \epsilon^S : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, wenn es ferner eine natürliche Zahl  $n$  und Konstanten  $C > 0, \nu > 1$  gibt und wenn für alle  $p \in \Lambda$  eine Aufspaltung  $\mathbb{R}^2 = E_p^S \oplus E_p^U$  existiert, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle  $p \in \Lambda$  gilt:

$$\begin{aligned} Df^n(p) \cdot S_{\epsilon^U(p)}^u(p) &\subset S_{\epsilon^U(f^n(p))}^u(f^n(p)) \\ Df^{-n}(p) \cdot S_{\epsilon^S(p)}^s(p) &\subset S_{\epsilon^S(f^{-n}(p))}^s(f^{-n}(p)) \end{aligned} \quad . \quad (3.12a)$$

2.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \zeta_p \in S_{\epsilon^U(p)}^u(p), \text{ dann ist } |Df^n(p)\zeta_p| &\geq C\nu^n|\zeta_p| \quad . \\ \text{Sei } \zeta_p \in S_{\epsilon^S(p)}^s(p), \text{ dann ist } |Df^{-n}(p)\zeta_p| &\geq C\nu^n|\zeta_p| \quad . \end{aligned} \quad (3.12b)$$

Dieser Satz besagt, daß man für den Nachweis der Hyperbolizität Sektorbündel (Kegelfelder)  $S^u = \cup_{p \in \Lambda} S_{\epsilon^u(p)}^u(p)$  und  $S^s = \cup_{p \in \Lambda} S_{\epsilon^s(p)}^s(p)$  finden muß, die invariant unter  $Df$  bzw.  $Df^{-1}$  sind und auf denen die Anwendung dieser Abbildungen eine (echte) Verlängerung von Vektoren bewirkt. Ich gebe den Beweis nicht komplett an, sondern stelle nur die entscheidende Idee vor. Die technischen Details sind in [NewPal73] zu finden<sup>4</sup>. Abbildung 3.4 zeigt schematisch die wesentliche Idee des Beweises. Unter den Vorausset-

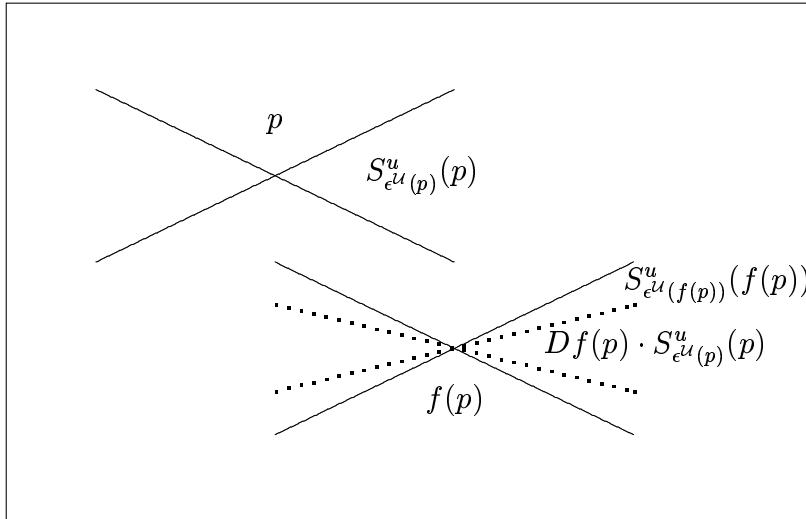


Abbildung 3.4: Zum Beweis von Satz 1.

zungen des Satzes wird z. B. ein Sektor  $S^u$  im Punkt  $p$  unter  $Df$  in den Sektor im Punkt  $f(p)$  abgebildet. Dabei wird der ursprüngliche Sektor unter der Abbildung „schmäler“. Unter Iteration von  $Df$  erhält man immer „schmalere“ Sektoren, die sich — rein anschaulich — zu einer eindeutigen Geraden „zusammenziehen“. Man erhält so in jedem Punkt  $p$  der invarianten Menge eine wohldefinierte Gerade, die dann  $E_p^u$  wie in Definition 2 entspricht.

Obwohl es einfacher ist, die Voraussetzungen von Satz 2 nachzuweisen, als direkt die definierenden Eigenschaften einer hyperbolischen Menge aus Definition 2 zu verifizieren, gestaltet sich die Anwendung des Satzes in der Praxis immer noch schwierig. So konnte bisher nur für sehr einfache Modellsysteme die Hyperbolizität gezeigt werden. DEVANEY und NITECKI haben z. B. für die Hénon–Abbildung [Hén76] in einem bestimmten Parameterbereich invasive Sektorbündel mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert und damit die Hyperbolizität nachweisen können [DevNit79].

Ich leite nun mit Hilfe von Satz 2 Bedingungen her, die die Hyperbolizität des Systems (1.9) implizieren. Um zu einer möglichst allgemeingültigen Formulierung der Ergebnisse zu gelangen, setze ich für die Ablenkfunktion lediglich

---

<sup>4</sup>Satz 2 ist eine Spezialisierung des in [NewPal73] erzielten allgemeineren Resultats. Diese Spezialisierung ist für die in dieser Arbeit betrachteten Systeme ausreichend.

voraus, daß sie in einer Umgebung der Projektion der invarianten Menge auf die  $l$ -Achse stetig differenzierbar ist. Die invariante Menge wird ferner als nichtleer angenommen.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird zunächst das System (1.10) behandelt. Die Verallgemeinerung der Ergebnisse auf beliebige Systeme des Typs (1.9) wird daran anschließend diskutiert.

Zunächst wird eine Koordinatentransformation durchgeführt (Unterabschnitt 3.3.1). In den neuen Koordinaten werden dann Voraussetzungen formuliert, unter denen der Satz 2 anwendbar ist (Unterabschnitt 3.3.2). Die Rücktransformation liefert dann Bedingungen für die Hyperbolizität von  $\Lambda$  (Unterabschnitt 3.3.3).

### 3.3.1 Transformation von $\Lambda$ nach $\Lambda_G$

Zur Vereinfachung der folgenden Formeln führt man in (1.10) zunächst eine Transformation der Winkelvariablen durch:

$$\alpha = \beta + \pi. \quad (3.13)$$

Die Abbildung  $F$  ist dann gegeben durch

$$F : \begin{aligned} \alpha' &= \alpha - \pi - \Theta(l') \\ l' &= l - 2R_0 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Aufgrund der Systemgeometrie liegen die  $\beta$ -Werte von Punkten in  $\Lambda_-^1$  im Inneren des  $\beta$ -Intervalls  $[\pi/2, 3\pi/2]$ . Folglich gilt für die  $\alpha$ -Werte einer Trajektorie in  $\Lambda_-^1$ :

$$-\pi/2 < \alpha < \pi/2 \quad (3.15)$$

Insbesondere haben alle Punkte aus  $\Lambda$  diese Eigenschaft. Läßt man nur solche  $\alpha$ -Werte zu, so ist die Bedingung (1.10d) automatisch erfüllt, wie eine kurze Rechnung oder die Anschauung zeigen.

Man betrachte nun die differenzierbare Transformation

$$T : \begin{aligned} x &= l \\ y &= l - 2R_0 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$T$  bildet  $\Lambda_-^1$  in das Quadrat  $Q = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$  ab. Die  $x$ -Koordinate entspricht dem alten Drehimpuls, die  $y$ -Koordinate dem Drehimpuls nach dem nächsten Streuvorgang an einem Potential  $v$ . Die Transformation  $T$  faßt somit zwei Punkte eines Orbits in  $\Lambda$  zu einem Punkt in  $Q$  zusammen. Die Umkehrabbildung ist durch

$$T^{-1} : \begin{aligned} \alpha &= \arcsin\left(\frac{x-y}{2R_0}\right) \\ l &= x \end{aligned} \quad (3.17)$$

gegeben. Da für alle  $(x, y) \in Q$  die Ungleichung  $|x - y| \leq 2 < 2R_0$  gilt, ist  $T^{-1}$  auf ganz  $Q$  definiert. Da  $T^{-1}$  ferner  $Q$  in  $\Lambda_-^1$  abbildet, ist die Transformation  $T$  ein Diffeomorphismus auf  $\Lambda_-^1$ .

Mittels  $T$  geht die Abbildung  $F$  über in die Abbildung:

$$G : \quad \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= y - 2R_0 \sin \left( \arcsin \left( \frac{x-y}{2R_0} \right) - \pi - \Theta(y) \right). \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$(3.18b)$$

Man beachte, daß  $T$  die invariante Menge von  $F$  in  $\Gamma$  i. a. nur injektiv in die invariante Menge von  $G$  in  $Q$  abbildet. Dies ist darauf zurückzuführen, daß u. U. nicht jeder Punkt eines  $G$ -Orbits in  $Q$  die wegen (3.15) geforderte Bedingung

$$\alpha'(x, y) = \arcsin \left( \frac{x-y}{2R_0} \right) - \pi - \Theta(y) \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \quad (3.19)$$

erfüllt. Aus diesem Grund kann es  $G$ -Orbits in  $Q$  geben, die keinem  $F$ -Orbit in  $\Gamma$  entsprechen. Falls nun allerdings ein Punkt  $p$  in  $Q$  unter der Iteration von  $G$  in  $Q$  bleibt und jede Iterierte der Bedingung (3.19) genügt, so gilt

$$F^n(T^{-1}(p)) = T^{-1}(G^n(p)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.20)$$

und damit ist  $T^{-1}(p) \in \Lambda$ .

Bezeichnet man mit  $\Lambda_G$  die  $G$ -invariante Menge von  $Q$ , deren Punkte unter allen Iterierten von  $G$  der Bedingung (3.19) genügen, so ist damit gezeigt, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{F} & \Lambda \\ T \downarrow & & \uparrow T^{-1} \\ \Lambda_G & \xrightarrow{G} & \Lambda_G \end{array} \quad (3.21)$$

kommutiert und das System (3.14) auf  $\Lambda$  damit insbesondere topologisch konjugiert ist zur Abbildung  $G$  auf  $\Lambda_G$ .

### 3.3.2 Hyperbolizität von $\Lambda_G$

Ich leite nun eine Bedingung her, unter der  $\Lambda_G$  hyperbolisch ist. Es gilt der

**Satz 3** *Gibt es ein  $0 < \epsilon < 1$ , so daß für alle  $(x, y) \in \Lambda_G$  die Ungleichung*

$$\frac{1 + \left| 2R_0 \cos \alpha'(x, y) \frac{\partial \alpha'(x, y)}{\partial x} \right|}{\left| 1 - 2R_0 \cos \alpha'(x, y) \frac{\partial \alpha'(x, y)}{\partial y} \right|} < \epsilon \quad (3.22)$$

*erfüllt ist, dann ist  $\Lambda_G$  eine hyperbolische Menge.*

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Hilfe von Satz 2. Um ihn anwenden zu können, benötigt man die Ableitungen  $DG$  und  $DG^{-1}$ :

$$DG|_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2R_0 \cos(\alpha'(x,y))\alpha'_x(x,y) & 1 - 2R_0 \cos(\alpha'(x,y))\alpha'_y(x,y) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

bzw.

$$DG^{-1}|_{G(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1 - 2R_0 \cos(\alpha'(x,y))\alpha'_y(x,y)}{2R_0 \cos(\alpha'(x,y))\alpha'_x(x,y)} & \frac{-1}{2R_0 \cos(\alpha'(x,y))\alpha'_x(x,y)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

mit

$$\alpha'_x(x,y) = \frac{\partial \alpha'(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2R_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x-y}{2R_0}\right)^2}} \quad (3.25)$$

und

$$\alpha'_y(x,y) = \frac{\partial \alpha'(x,y)}{\partial y} = \frac{-1}{2R_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x-y}{2R_0}\right)^2}} - \Theta'(y). \quad (3.26)$$

Ziel der anschließenden Ausführungen ist es, für jeden Punkt in  $\Lambda_G$  die Invarianz der Sektoren

$$S_\epsilon^u = \{(\xi, \eta) | |\xi| \leq \epsilon |\eta|\}, \quad (3.27a)$$

$$S_\epsilon^s = \{(\xi, \eta) | |\eta| \leq \epsilon |\xi|\} \quad (3.27b)$$

unter  $DG$  bzw. unter  $DG^{-1}$  zu zeigen sowie die für die Anwendung von Satz 2 notwendigen Expansionseigenschaften nachzuweisen. Es ist zu beachten, daß die Definition der Kegel (3.27) unabhängig vom jeweiligen Punkt in  $\Lambda_G$  ist.

Man nutzt nun aus, daß die Ableitungen in einer Koordinate eine einfache Gestalt haben. Die  $\xi$ -Koordinate eines Bildpunktes unter  $DG$  ist die ursprüngliche  $\eta$ -Koordinate. Analog wird unter  $DG^{-1}$  die alte  $\xi$ -Koordinate zur neuen  $\eta$ -Koordinate.

Um die Rechnungen übersichtlicher gestalten zu können, definiere ich

$$H_1(x,y) = 1 - 2R_0 \cos(\alpha'(x,y))\alpha'_y(x,y) \quad (3.28)$$

$$H_2(x,y) = -2R_0 \cos(\alpha'(x,y))\alpha'_x(x,y). \quad (3.29)$$

Die Voraussetzung von Satz 3 lässt sich damit wie folgt ausdrücken:

$$\frac{1 + |H_2|}{|H_1|} < \epsilon. \quad (3.30)$$

Sei nun  $(\xi_0, \eta_0) \in S_\epsilon^u$ , und sei  $(\xi_1, \eta_1) = DG(\xi_0, \eta_0)$ . Zunächst wird gezeigt, daß die  $\eta$ -Komponente unter  $DG$  um mindestens den Faktor  $1/\epsilon$  verlängert wird:

$$\begin{aligned} |\eta_1| &= |H_2\xi_0 + H_1\eta_0| \\ &\geq |H_1||\eta_0| - |H_2||\xi_0|. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Da nach Voraussetzung  $|\eta_0| \geq |\xi_0|/\epsilon$  ist, ergibt sich

$$|\eta_1| \geq (|H_1| - \frac{1}{\epsilon}|H_2|)|\eta_0|. \quad (3.32)$$

Mit (3.30) läßt sich der Klammerausdruck auf der rechten Seite abschätzen, und man erhält

$$|\eta_1| > \frac{1}{\epsilon}|\eta_0|. \quad (3.33)$$

Da nun  $\xi_1 = \eta_0$  ist, ergibt sich

$$|\eta_1| > \frac{1}{\epsilon}|\xi_1| \quad (3.34)$$

und somit  $(\xi_1, \eta_1) \in S_\epsilon^u$ . Die Invarianzeigenschaft ist damit nachgewiesen.

Die Norm von  $(\xi_1, \eta_1)$  läßt sich nun mit Hilfe von (3.33) und der Voraussetzung  $(\xi_0, \eta_0) \in S_\epsilon^u$ , d. h.  $|\xi_0| \leq \epsilon|\eta_0| = \epsilon|\xi_1|$ , abschätzen:

$$|(\xi_1, \eta_1)| \geq \frac{1}{\epsilon} |(\xi_0, \eta_0)|. \quad (3.35)$$

Damit ist gezeigt, daß  $S_\epsilon^u$  invariant unter  $DG$  ist und daß die Länge eines Vektors in  $S_\epsilon^u$  unter  $DG$  um mindestens den Faktor  $1/\epsilon$  verlängert wird.

Für  $S_\epsilon^s$  und  $DG^{-1}$  geht man nun entsprechend vor. Sei also  $(\xi_0, \eta_0) \in S_\epsilon^s$  und sei  $(\xi_1, \eta_1) = DG^{-1}(\xi_0, \eta_0)$ . In diesem Fall erhält man

$$\begin{aligned} |\xi_1| &= \left| \frac{-H_1}{H_2}\xi_0 + \frac{1}{H_2}\eta_0 \right| \\ &\geq \left| \frac{H_1}{H_2} \right| |\xi_0| - \left| \frac{1}{H_2} \right| |\eta_0|, \end{aligned} \quad (3.36)$$

und da  $\epsilon|\xi_0| \geq |\eta_0|$  ist, folgt

$$|\xi_1| \geq \left( \left| \frac{H_1}{H_2} \right| - \left| \frac{\epsilon}{H_2} \right| \right) |\xi_0|. \quad (3.37)$$

Wegen  $\epsilon < 1$  folgt mit (3.30):

$$\left( \left| \frac{H_1}{H_2} \right| - \left| \frac{\epsilon}{H_2} \right| \right) > \left( \left| \frac{H_1}{H_2} \right| - \left| \frac{1}{\epsilon H_2} \right| \right) > \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.38)$$

Damit erhält man

$$|\xi_1| \geq \frac{1}{\epsilon} |\xi_0|. \quad (3.39)$$

Weil  $\eta_1 = \xi_0$  ist, gilt:

$$|\xi_1| \geq \frac{1}{\epsilon} |\eta_1|, \quad (3.40)$$

also ist  $(\xi_1, \eta_1) \in S_\epsilon^s$ . Damit ist die Invarianzeigenschaft nachgewiesen. Es bleibt noch das Expansionskriterium nachzuweisen. Diese folgt direkt aus (3.39) und der Voraussetzung  $|\eta_0| \leq \epsilon |\xi_0| = \epsilon |\eta_1|$ :

$$|(\xi_1, \eta_1)| \geq \frac{1}{\epsilon} |(\xi_0, \eta_0)| \quad (3.41)$$

Mit  $f = G$  sowie  $\epsilon^S(p) = \epsilon^U(p) = \epsilon$  und  $n = 1$ ,  $C = 1$ ,  $\nu = 1/\epsilon$  sind die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt, und damit ist der Satz 3 bewiesen<sup>5</sup>.

### 3.3.3 Hyperbolizität von $\Lambda$

Drückt man die Bedingung des Satzes 4 in den ursprünglichen Koordinaten  $(\beta, l)$  aus, so gelangt man zum wesentlichen Ergebnis dieses Abschnitts.

**Satz 4** *Gibt es ein  $0 < \epsilon < 1$ , so daß alle Punkte  $(\beta, l) \in \Lambda$ , für die  $\Theta'(l') \geq 0$  ist, die Bedingung*

$$R_0 \Theta'(l') > \left( \frac{\epsilon - 1}{2\epsilon} \right) \left( \frac{1}{\cos \beta'} + \frac{1}{\cos \beta} \right) \quad (3.42)$$

*und alle Punkte, für die  $\Theta'(l') < 0$  ist, die Bedingung*

$$R_0 \Theta'(l') < \left( \frac{\epsilon + 1}{2\epsilon} \right) \left( \frac{1}{\cos \beta'} + \frac{1}{\cos \beta} \right) \quad (3.43)$$

*erfüllen, so ist die invariante Menge des Systems (1.10) hyperbolisch.*

Beweis: Zunächst drückt man  $\alpha'_x$  und  $\alpha'_y$  als Funktionen von  $\alpha$  und  $l$  aus. Man erhält mit (3.25), (3.26) und (3.17):

$$\begin{aligned} \alpha'_x(\alpha, l) &= \frac{1}{2R_0 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \\ &= \frac{1}{2R_0 |\cos \alpha|} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\alpha'_y(\alpha, l) = \frac{-1}{2R_0 |\cos \alpha|} - \Theta'(l'). \quad (3.45)$$

---

<sup>5</sup>Der zweite Teil des Beweises, der die Invarianz von  $S_\epsilon^s$  unter  $DG^{-1}$  zum Thema hat, ist alternativ auch mit Hilfe der Involution  $I_0$  und unter zusätzlicher Berücksichtigung der Invarianz von  $S_\epsilon^u$  unter  $DG$  durchzuführen. Definiert man  $J_0 = TI_0T^{-1}$ , so gilt:  $DJ_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Aus  $G^{-1} = J_0 G J_0$  folgt  $DG^{-1}|_{(x,y)} = DJ_0 DG|_{J_0(x,y)} DJ_0$ . Wegen  $DJ_0 S_\epsilon^s = S_\epsilon^u$  ergibt sich damit sofort:  $DG^{-1} S_\epsilon^s \subset S_\epsilon^s$ .

Für die linke Seite von (3.22) ergibt sich damit:

$$\frac{1 + \left| 2R_0 \cos \alpha' \frac{\partial \alpha'(x, y)}{\partial x} \right|}{\left| 1 - 2R_0 \cos \alpha' (x, y) \frac{\partial \alpha'(x, y)}{\partial y} \right|} = \frac{1 + \left| \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} \right|}{\left| 1 + \frac{\cos \alpha'}{|\cos \alpha|} + 2R_0 \cos \alpha' \Theta'(l') \right|}. \quad (3.46)$$

Falls dieser Ausdruck für alle  $(\alpha, l) \in \Lambda$  kleiner als  $\epsilon$  ist, sind die Bedingungen des Satzes 3 erfüllt. Man beachte, daß  $\alpha, \alpha' \in ]-\pi/2, \pi/2[$  und daher  $\cos \alpha > 0$  und  $\cos \alpha' > 0$  sind. Die Menge  $\Lambda$  ist demnach hyperbolisch, wenn gilt:

$$1 + \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} < \epsilon \left| 1 + \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} + 2R_0 \Theta'(l') \cos \alpha' \right|. \quad (3.47)$$

Für  $\Theta'(l') > 0$  ist diese Ungleichung genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$1 + \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} < \epsilon \left( 1 + \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} + 2R_0 \Theta'(l') \cos \alpha' \right), \quad (3.48)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$R_0 \Theta'(l') > \left( \frac{1 - \epsilon}{2\epsilon} \right) \left( \frac{1}{\cos \alpha'} + \frac{1}{\cos \alpha} \right). \quad (3.49)$$

Falls  $\Theta'(l') < 0$  ist, so ist (3.47) genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$1 + \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} + 2R_0 \Theta'(l') \cos \alpha' < -\frac{1}{\epsilon} \left( 1 + \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} \right). \quad (3.50)$$

Dies ist nun äquivalent zu der Bedingung

$$R_0 \Theta'(l') < -\left( \frac{\epsilon + 1}{2\epsilon} \right) \left( \frac{1}{\cos \alpha'} + \frac{1}{\cos \alpha} \right). \quad (3.51)$$

Mit (3.13) erhält man schließlich aus (3.49) und (3.51) die Ungleichungen (3.42) und (3.43). Damit ist der Satz bewiesen.

Gröbere Abschätzungen als die für die Anwendung von Satz 4 geforderten führen auf eine in der Praxis leichter zu verifizierende Bedingung.

**Satz 5** *Die invariante Menge des Systems (1.10) ist hyperbolisch, wenn gilt:*

$$\min_{(\beta, l) \in \Lambda} (R_0 |\Theta'(l)|) > \max_{(\beta, l) \in \Lambda} \left( \frac{-2}{\cos \beta} \right). \quad (3.52)$$

Beweis: Die Ausdrücke auf der linken und rechten Seite von (3.52) sind definiert, da  $\Lambda$  kompakt ist und die stetigen Funktionen  $R_0 |\Theta'(l)|$  und  $-2/\cos \beta$

somit ihre Extremwerte auf  $\Lambda$  annehmen. Falls (3.52) erfüllt ist, gibt es ein  $\iota > 1$  mit

$$\min_{(\beta,l) \in \Lambda} (R_0 |\Theta'(l)|) > \iota \max_{(\beta,l) \in \Lambda} \left( \frac{-2}{\cos \beta} \right). \quad (3.53)$$

Mit  $\epsilon = 1/(2\iota - 1)$  gilt  $0 < \epsilon < 1$ . Damit erhält man für alle  $(\beta, l) \in \Lambda$ :

$$\begin{aligned} R_0 |\Theta'(l')| &\geq \min_{(\beta,l) \in \Lambda} (R_0 |\Theta'(l)|) \\ &> \iota \max_{(\beta,l) \in \Lambda} \left( \frac{-2}{\cos \beta} \right) \\ &\geq -\frac{1+\epsilon}{2\epsilon} \left( \frac{1}{\cos \beta'} + \frac{1}{\cos \beta} \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Weil  $(1-\epsilon) < (1+\epsilon)$  ist, folgt mit Satz 4 die Behauptung.

Dieser Satz ist deshalb sehr leicht anzuwenden, weil auf beiden Seiten der zu verifizierenden Ungleichung Funktionen nur jeweils einer Koordinate stehen. Es genügt daher, die Projektionen von  $\Lambda$  auf die Koordinatenachsen zu betrachten.

Für das Zwei–Mulden–System mit  $k = 1.9$  erkennt man, daß der Betrag der  $l$ –Koordinate von Punkten in  $\Lambda$  entweder größer als 0.7 oder kleiner als 0.35 ist (vgl. Abbildung 3.2). Ferner liegt die  $\beta$ –Koordinate in dem Intervall  $[0.6\pi, 1.4\pi]$ . Mit  $1.1|\Theta'(\pm 0.35)| = 10.78\dots$ ,  $1.1|\Theta'(\pm 0.7)| = 8.01\dots$  und  $-2/\cos(0.6\pi) = -2/\cos(1.4\pi) = 6.47\dots$  erhält man:

$$\min_{(\beta,l) \in \Lambda} (R_0 |\Theta'(l)|) \geq 8.01 > 6.48 \geq \max_{(\beta,l) \in \Lambda} \left( \frac{-2}{\cos \beta} \right). \quad (3.55)$$

Das Zwei–Mulden–System ist in diesem Fall also hyperbolisch.

Vor dem Hintergrund, daß in einer hyperbolischen Menge jeder Orbit instabil ist, läßt sich die Bedingung (3.52) in gewissem Rahmen anschaulich interpretieren. Eine Differenz im Winkel  $\beta$  beim Verlassen einer Mulde führt mit wachsendem  $R_0$  zu einer wachsenden Differenz in der Drehimpulskomponente bzgl. des Zentrums der nächsten Mulde. Die Winkeldifferenz zweier benachbarter Trajektorien, die vor dem Streuprozeß an einem Potential  $v$  den gleichen Einfallsinkel haben, wird durch  $|\Theta'|$  bestimmt. Je größer  $R_0$  und  $|\Theta'|$  sind, desto instabiler sind daher die Orbits in dem System.

Nachdem eine Bedingung für die Hyperbolizität des Systems bestehend aus zwei Mulden hergeleitet worden ist, gebe ich nun die Verallgemeinerung für das System (1.9) mit beliebigem  $N$  an. Es gilt der Satz:

**Satz 6** *Die invariante Menge des Systems 1.9 ist hyperbolisch, wenn gilt:*

$$\min_{(\beta,l) \in \Lambda} (R_0 |\Theta'(l)|) > \max_{\substack{(\beta,l) \in \Lambda, \\ j \in \{1, \dots, N-1\}}} \left( \frac{2}{\sin \frac{j\pi}{N} \sin \left( \beta - \frac{j\pi}{N} \right)} \right). \quad (3.56)$$

Der Beweis erfolgt analog zu dem von Satz 5 und wird im folgenden kurz skizziert. Sinnvollerweise schreibt man Gleichung (1.9b) in der Form:

$$l' = l - 2R_0 \sin\left(\frac{j}{2}\Phi_0\right) \sin\left(\beta - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{j}{2}\Phi_0\right)\right). \quad (3.57)$$

Aus der Systemgeometrie folgt, daß das Argument der zweiten Sinusfunktion,  $\beta - (\pi + j\Phi_0)/2$ , im Intervall  $]\pi/2, 3\pi/2[$  liegt. Nach der Transformation (3.13) liegt der Winkel  $\alpha + (\pi - j\Phi_0)/2$  dann entsprechend in dem Intervall  $]-\pi/2, \pi/2[$ . Dieser Ausdruck spielt im folgenden dieselbe Rolle wie oben  $\alpha$ . Man beachte, daß die Transformation  $T$  (3.16) jetzt  $j$ -abhängig ist und die Abbildung  $G$  (3.18) darüber hinaus auch noch vom Index  $i$  des übernächsten Potentials  $v$  abhängt, das besucht wird. Geht man dann mit den richtigen Ersetzungen analog zu oben vor, so erhält man das Pendant zu Satz 4, indem man formal  $\cos \beta'$  durch  $\sin(i\Phi_0/2) \cos(\beta' + (\pi - i\Phi_0)/2)$  und  $\cos \beta$  durch  $\sin(j\Phi_0/2) \cos(\beta + (\pi - j\Phi_0)/2)$  ersetzt. Daraus folgt dann Satz 6.

Mit der hier vorgestellten Technik wird in Anhang B die noch offene Frage der Hyperbolizität des Troll–Smilansky–Modells beantwortet [TroSmi89].

# Kapitel 4

## Symbolische Dynamik

In diesem Kapitel wird diskutiert, unter welchen Umständen das Mulden–System mit Hilfe einer vollständigen *Symbolischen Dynamik* beschrieben werden kann. D. h. es werden Bedingungen hergeleitet, die die topologische Äquivalenz zwischen der Dynamik von  $F$  auf  $\Lambda$  und der Dynamik einer *Shift–Abbildung* auf einem Folgenraum implizieren.

Zunächst wird exemplarisch anhand des Zwei–Mulden–Systems die Topologie der invarianten Menge diskutiert. Es wird dabei dargestellt, wie die Hyperbolizität die erwähnte topologische Äquivalenz zu einem Folgenraum und zugehöriger Shift–Abbildung zur Folge hat. Die übrigen Abschnitte dieses Kapitels haben dann die Symbolische Dynamik für die unterschiedlichen Parameterbereiche und für die unterschiedlichen Modellablenkfunktionen zum Thema. Dabei wird auch der Unterschied zwischen dem reduzierten und dem nichtreduzierten System herausgearbeitet. Ferner wird der Übergang zu  $N > 2$  diskutiert.

### 4.1 Topologie der invarianten Menge

Wie schon in Abschnitt 3.3.1 erwähnt, liegen aufgrund der Systemgeometrie die  $\beta$ –Werte von Punkten in  $\Lambda_-^1$  im Inneren des  $\beta$ –Intervall  $[\pi/2, 3\pi/2]$ . Folglich liegen auch die  $\beta$ –Werte aller Punkte aus  $\Lambda$  in dem  $\beta$ –Intervall  $[\pi/2, 3\pi/2]$ . Mit  $\overline{\Gamma} = [\pi/2, 3\pi/2] \times [-1, 1]$  gilt damit:

$$\Lambda \subset \overline{\Gamma}. \quad (4.1)$$

Definiert man nun Mengen  $\overline{\Lambda}_\pm^n$  bezüglich  $\overline{\Gamma}$  analog zu den Mengen  $\Lambda_\pm^n$  bezüglich  $\Gamma$ , so gilt:

$$\Lambda = \overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_-^\infty \cap \overline{\Lambda}_+^\infty. \quad (4.2)$$

Als Beispiel wird nun wiederum das Zwei–Mulden–System mit  $k = 1.9$  behandelt. Die Mengen  $\overline{\Lambda}_-^1$  und  $\overline{\Lambda}_+^1$  sind in Abbildung 4.1 dargestellt (vgl.

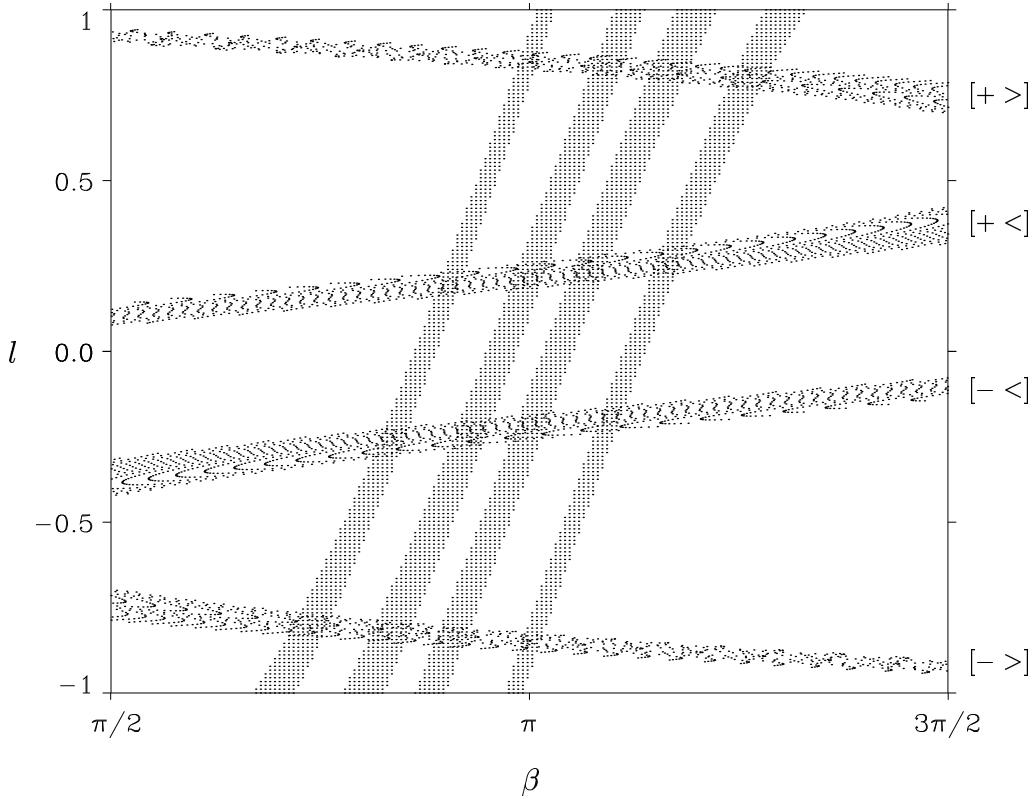


Abbildung 4.1:  $\overline{\Lambda}_-^1$  (vertikale Streifen) und  $\overline{\Lambda}_+^1$  (horizontale Streifen) für  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.9$ .

Abbildung 3.1). Man erkennt vier disjunkte vertikale und vier disjunkte horizontale Streifen. Zusammen mit den Betrachtungen aus Abschnitt 3.2, ergibt sich somit die Topologie einer Hufeisenabbildung [Sma65]. Die vertikalen Ränder der vertikalen Streifen werden auf die vertikalen Ränder der horizontalen Streifen abgebildet. Entsprechend werden die horizontalen Ränder der vertikalen Streifen auf die horizontalen Ränder der horizontalen Streifen abgebildet. Darüber hinaus besteht das Bild einer jeden horizontalen Linie in  $\overline{\Gamma}$  aus vier disjunkten horizontalen Linien. Das Bild eines beliebigen horizontalen Streifens, der in  $\overline{\Lambda}_+^1$  enthalten ist, setzt sich somit aus vier disjunkten horizontalen Streifen zusammen. Analog erhält man für das Urbild eines vertikalen Streifens, der in  $\overline{\Lambda}_-^1$  enthalten ist, vier disjunkte vertikale Streifen.

Mit Hilfe einer Standardtechnik [Mos73, Wig88] können nun Punkte in  $\Lambda$  durch bi-infinite Folgen kodiert werden. Die Folgenglieder stammen aus einer Menge von vier Symbolen, dem sogenannten *Alphabet*. Als Symbole verwende ich  $[+ >]$ ,  $[+ <]$ ,  $[- <]$  und  $[- >]$ , wobei  $+$  bzw.  $-$  das Vorzeichen von  $l$  wiedergeben und  $>$  bzw.  $<$  durch den Regenbogendrehimpuls  $l_R = 1/\sqrt{3} = 0.577\dots$  gemäß  $|l| > l_R$  oder  $|l| < l_R$  festgelegt sind. Damit lässt sich jedem horizontalen Streifen von  $\overline{\Lambda}_+^1$  eindeutig ein Symbol zuweisen (siehe Abbildung 4.1). Einem Punkt  $p$  in  $\Lambda$  wird nun eine bi-infinite Folge, bestehend aus diesen

Symbolen, zugeordnet, wobei an  $m$ -ter Stelle,  $m \in \mathbb{Z}$ , das Symbol des horizontalen Streifens steht, in dem sich  $F^m(p)$  befindet. Man beachte, daß jede Symbolfolge einem Schnitt von ineinander geschachtelten, abgeschlossenen Mengen korrespondiert. Da dieser Schnitt nicht leer ist, bedeutet dies, daß die Abbildung von  $\Lambda$  in den Folgenraum surjektiv ist. Die Anwendung von  $F$  auf einen Punkt  $p$  in  $\Lambda$  entspricht per definitionem der Anwendung der Shift–Abbildung auf die zu  $p$  gehörende Symbolfolge, d. h. das  $m$ -te Symbol der Folge von  $F(p)$  ist durch das  $(m+1)$ -te Symbol der Folge von  $p$  gegeben. Man kann ferner zeigen, daß die Abbildung von  $\Lambda$  in den Folgenraum stetig ist. Der mathematische Nachweis dieser Aussagen ist Standard und in der Literatur zu finden ([Wig88] Seite 106ff). Eine sehr viel schwierigere Aufgabe ist es, die Injektivität der Abbildung zu beweisen. Das entscheidende Problem ist es dabei zu zeigen, daß die Breite der jeweiligen Streifen von  $\overline{\Lambda}_-$  und  $\overline{\Lambda}_+$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 geht. In diesem Fall besteht  $\overline{\Lambda}^\infty$  dann aus vertikalen und  $\overline{\Lambda}_+$  aus horizontalen Kurven. Jede horizontale Kurve schneidet jede vertikale in genau einem Punkt, der dann ein-eindeutig eine bi-infinite Symbolfolge definiert. Die Injektivität der Abbildung folgt nun aus der Hyperbolizität. Für den formal exakten Beweis verweise ich wiederum auf die Literatur [Mos73, DevNit79]. Ich gebe hier nur ein Argument, das die Gültigkeit dieser Aussage deutlich macht. Sei  $p$  ein Punkt der invarianten Menge. Eine Umgebung  $U$  von  $p$  erfährt unter  $F^n$  eine Stauchung in Richtung der stabilen Mannigfaltigkeit von  $p$  und eine Streckung in Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit. Ist  $q$  ein Punkt in der stabilen Mannigfaltigkeit von  $p$ , so geht der Abstand zwischen den Punkten  $F^n(q)$  und  $F^n(p)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0. Für  $n \rightarrow \infty$  geht die Ausdehnung des Bildes der Umgebung  $U$  in Richtung der stabilen Mannigfaltigkeit von  $F^n(p)$  damit ebenfalls gegen 0. Entsprechendes gilt bei Betrachtung der instabilen Mannigfaltigkeit und  $F^{-n}$ . Da  $p$  ein beliebiger Punkt aus der invarianten Menge ist, folgt daraus, daß die horizontalen Streifen  $\overline{\Lambda}_+$  in Richtung der stabilen Mannigfaltigkeit kontrahiert werden und ihre Breite für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 geht. Entsprechendes gilt für  $\overline{\Lambda}_-$  in Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit.

Eine Überdeckung von  $\Lambda$  durch abgeschlossene Mengen, die sich höchstens in Randpunkten schneiden, wird auch als *Zerlegung* bezeichnet. Ein Beispiel ist durch die 16 Mengen gegeben, aus denen sich  $\overline{\Lambda}_-^1 \cap \overline{\Lambda}_+^1$  zusammensetzt (siehe Abbildung 4.1). Die Schnitte der Bilder und Urbilder der einzelnen Mengen der Zerlegung unter  $F^n$ ,  $n \geq 1$ , bilden erneut Zerlegungen. In dem betrachteten Beispiel sind diese durch  $\overline{\Lambda}_-^n \cap \overline{\Lambda}_+^n$  gegeben. Auf diese Weise erhält man aus jeder Zerlegung über die Dynamik weitere Zerlegungen. Falls der Durchmesser jeder Menge in so erzeugten Überdeckungen für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 geht, ist eine sogenannte *erzeugende Zerlegung* gegeben. Diese bildet auf natürliche Weise eine Überdeckung, die sich der invarianten Menge “optimal” anpaßt. Genau wie die invariante Menge sind auch erzeugende Zerlegungen über die Dynamik definiert, was sie gegenüber anderen Überdeckungen auszeichnet.

Es wurde bisher gezeigt, daß durch  $\overline{\Lambda}_-^1 \cap \overline{\Lambda}_+^1$  eine erzeugende Zerlegung defi-

niert wird<sup>1</sup>.

## 4.2 Symbolische Dynamik für das nichtreduzierte System

Bezeichnet man mit  $\sigma$  die Shift–Abbildung auf einem Folgenraum sowie mit  $h$  den Homöomorphismus von  $\Lambda$  in diesen Folgenraum, so kann man die Ergebnisse der Abschnitte 3.3 und 4.1 im Hinblick auf das Zwei–Mulden–System wie folgt zusammenfassen:

*Mit*

$$\Sigma^4 = \left\{ (\dots s_{-n} \dots s_{-1}, s_0 s_1 \dots s_n \dots) \mid s_i \in \{[+>], [+<], [-<], [->]\} \text{ für alle } i \in \mathbb{Z} \right\} \quad (4.3)$$

ist für das Zwei–Mulden–System mit den Parametern  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.9$  das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{F} & \Lambda \\ h \downarrow & & \uparrow h^{-1} \\ \Sigma^4 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma^4 \end{array} \quad (4.4)$$

Die topologische Konjugiertheit von  $F$  auf  $\Lambda$  zur Shift–Abbildung auf  $\Sigma^4$  hat weitreichende Konsequenzen ([Wig88] Seite 94ff). Es folgt z. B. daß  $\Lambda$  eine Cantor–Menge ist, d. h.  $\Lambda$  ist kompakt, jeder Punkt in  $\Lambda$  ist Häufungspunkt von Punkten in  $\Lambda$ , und das Innere von  $\Lambda$  ist leer ([GucHol86] Seite 229). Ferner gibt es abzählbar unendlich viele periodische und überabzählbar unendlich viele aperiodische Orbits in  $\Sigma^4$  und damit auch in  $\Lambda$ . Als wesentlichen Aspekt kann man darüber hinaus für  $\sigma$  und  $\Sigma^4$  alle Kriterien der Definition 1 nachweisen. Damit ist dann gezeigt, daß das Zwei–Mulden–System für die gewählten Parameterwerte im strengen Sinne chaotisch ist!

Der Fall  $k = 1.08$  muß mit geringfügig mehr Aufwand behandelt werden als der Fall  $k = 1.9$ . In Abbildung 4.2 sind die Mengen  $\Lambda_-^2$  und  $\Lambda_+^2$  dargestellt. Der linke keilförmige Streifen wird unter  $F^2$  auf den parabelförmig deformierten Streifen abgebildet, dessen eine Grenze auf der Linie  $l = 1$  liegt. Entsprechend wird der rechte keilförmige Streifen unter  $F^2$  auf den parabelförmig deformierten Streifen abgebildet, dessen eine Grenze auf der Linie  $l = -1$  liegt. Man erkennt, daß der rechte (linke) keilförmige Streifen mit dem Bild des linken (rechten) keilförmigen Streifens keine gemeinsamen Punkte

---

<sup>1</sup>Allgemein kann man zeigen, daß für kompakte hyperbolische invariante Mengen eine erzeugende Zerlegung existiert [Wal82].

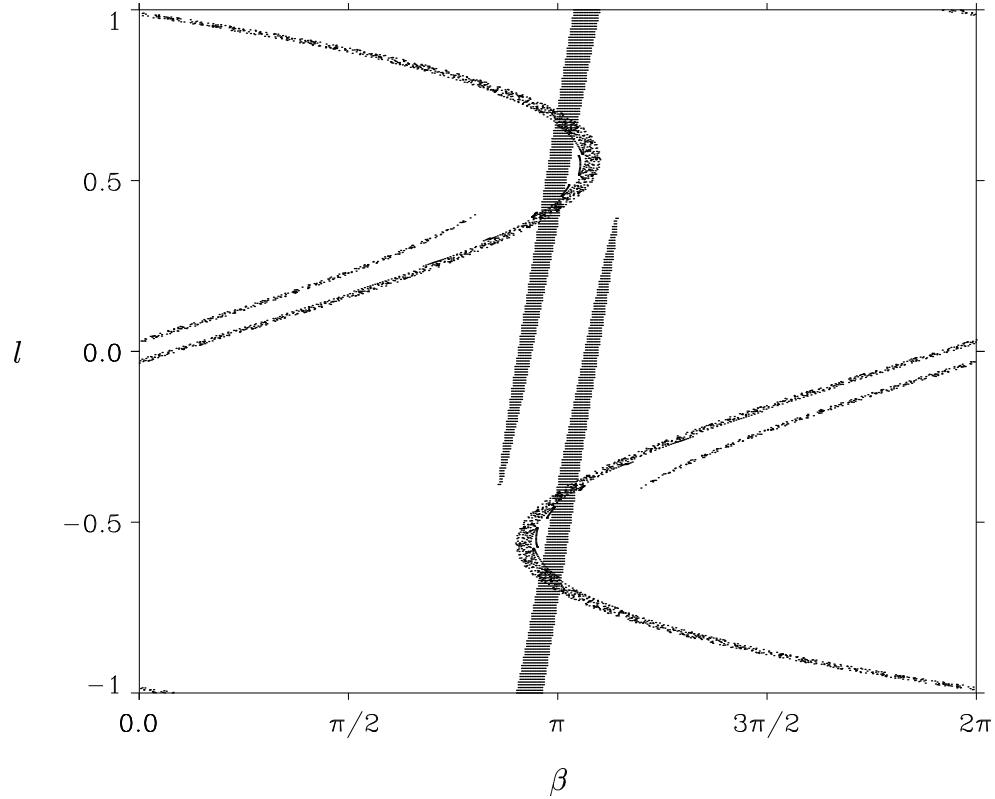


Abbildung 4.2:  $\Lambda_-^2$  (keilförmige Streifen) und  $\Lambda_+^2$  (parabelförmige Streifen) für das Zwei–Mulden–System mit  $R_0 = 1$ . und  $k = 1.08$ .

besitzt, d. h. der obere Teil von  $\Lambda$  mit  $l > 0$  ist mit dem unteren Teil von  $\Lambda$  mit  $l < 0$  dynamisch nicht verbunden. Eine Trajektorie in  $\Lambda$  mit positivem (negativem) Drehimpuls hat für alle Zeiten einen positiven (negativen) Drehimpuls. Da der obere und der untere Teil von  $\Gamma$  über die Symmetrie (1.14) miteinander verbunden sind, beschränke ich mich im folgenden auf den Bereich  $l > 0$ . Wie in Abbildung 4.3 dargestellt, definiert das  $l$ –Intervall  $[0.35, 0.75]$  einen Teil von  $\Gamma$ , in dem  $\Lambda$  enthalten ist.  $\overline{\Gamma}$  wird nun als der Schnitt dieses Teils mit seinem Urbild definiert. Das Urbild ist dabei nach (1.10b) durch die vertikalen Kurven  $v_{0.35}$  und  $v_{0.75}$  (siehe (3.5)) bestimmt. Nach Konstruktion ist  $\Lambda$  in  $\overline{\Gamma}$  enthalten. Abbildung 4.4 zeigt die bezüglich  $\overline{\Gamma}$  definierten Mengen  $\overline{\Lambda}_-$  und  $\overline{\Lambda}_+$ .  $\overline{\Lambda}_-$  besteht aus zwei vertikalen und  $\overline{\Lambda}_+$  aus zwei horizontalen Streifen. Mit den Betrachtungen aus den Abschnitten 3.2 und 4.1 erhält man nun die topologische Situation einer Hufeisenabbildung mit zwei Symbolen. Als Symbole eignen sich hier  $>$  und  $<$  entsprechend  $l > l_R$  und  $l < l_R$ .

Die Projektion der invarianten Menge auf die  $\beta$ –Achse ist in dem Intervall  $[0.95\pi, 1.07\pi]$  enthalten. Es gibt ferner keinen Punkt in  $\Lambda$  mit einer  $l$ –Komponente in dem Intervall  $[0.35, 0.75]$ . Da  $1.1|\Theta'(0.35)| = 5.57\dots$ ,  $1.1|\Theta'(0.75)| = 6.06\dots$  und  $-2/\cos(0.93\pi) = -2/\cos(1.07\pi) = 2.04\dots$  ist,

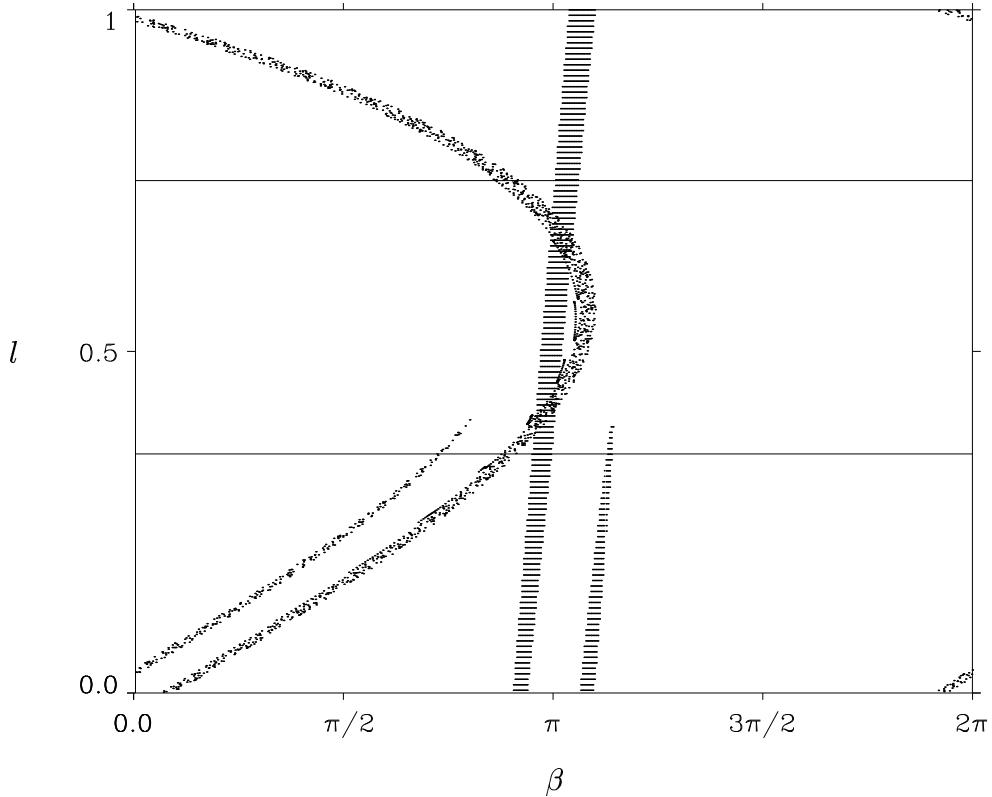


Abbildung 4.3: Der Teil von Abbildung 4.2 mit  $l \geq 0$ . Die horizontalen Linien entsprechen Punkten mit konstantem  $l = 0.35$  bzw.  $l = 0.75$ .

gilt:

$$\inf_{(\beta,l) \in \Lambda} (R_0 |\Theta'(l)|) \geq 5.57 > 2.05 \geq \sup_{(\beta,l) \in \Lambda} \left( \frac{-2}{\cos \beta} \right). \quad (4.5)$$

Nach Satz 5 ist demnach das Zwei–Mulden–System für  $k = 1.08$  ebenfalls hyperbolisch.

Da für die eindeutige Festlegung einer Trajektorie in  $\Lambda$  zusätzlich zu einer Symbolfolge bestehend aus den Symbolen  $>$  und  $<$  auch noch eine Information über das Vorzeichen von  $l$  benötigt wird, ist die Dynamik von  $F$  auf  $\Lambda$  *nicht* topologisch konjugiert zur Shift–Abbildung auf dem Folgenraum mit zwei Symbolen.

Eine Symbolische Dynamik für das nichtreduzierte System lässt sich mit Hilfe einer sogenannten *Übergangsmatrix*, d. h. einer quadratischen Matrix, deren Einträge entweder 0 oder 1 sind, formulieren. Eine  $N \times N$ –Übergangsmatrix  $A$  definiert wie folgt eine Teilmenge des Folgenraumes  $\Sigma^N$  mit  $N$  Symbolen:

$$\Sigma_A^N = \{ (\dots s_{-n} \dots s_{-1}, s_0 s_1 \dots s_n \dots) \in \Sigma^N \mid A_{s_i, s_{i+1}} = 1 \text{ für alle } i \in \mathbb{Z} \}. \quad (4.6)$$

Man beachte, daß  $\Sigma^N = \Sigma_A^N$  ist, falls alle Einträge in  $A$  aus Einsen bestehen.

Wie für  $k = 1.9$  wählt man nun als Symbole  $[+>]$ ,  $[+<]$ ,  $[-<]$  und  $[->]$ , die in dieser Reihenfolge die Spalten und Zeilen der  $4 \times 4$ -Matrix  $A$  indizieren. Es gilt dann:

*Das Zwei-Mulden-System mit den Parameterwerten  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.08$  ist topologisch konjugiert zur Shift-Abbildung auf dem Folgenraum  $\Sigma_A^4$ , wobei der Folgenraum  $\Sigma^4$  durch (4.3) und die Übergangsmatrix  $A$  durch*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

gegeben ist.

Da nach (4.7) ein Vorzeichenwechsel nicht möglich ist, ist die Shift-Abbildung auf  $\Sigma_A^4$  nicht topologisch transitiv. Demnach ist die Shift-Abbildung auf  $\Sigma_A^4$  und damit auch  $F$  auf  $\Lambda$  im strengen Sinn nicht chaotisch. Wie oben gezeigt, lassen sich aber  $\Sigma_A^4$  bzw.  $\Lambda$  in zwei invarianten Teilmengen zerlegen, die, wie jetzt erläutert wird, die strengen Chaoskriterien erfüllen.

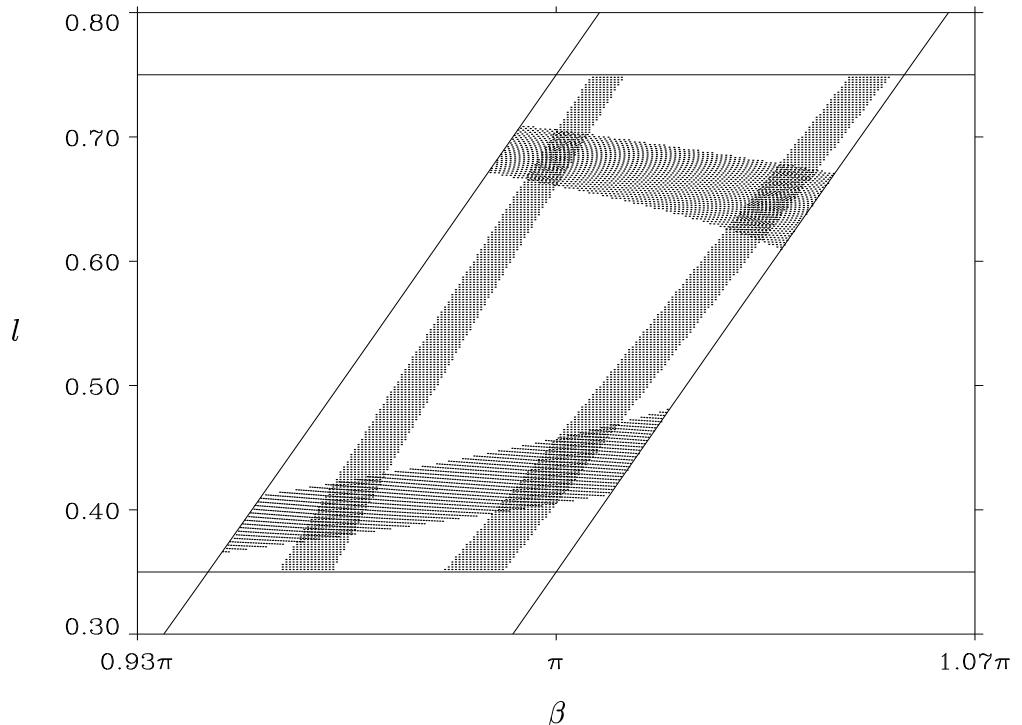


Abbildung 4.4:  $\bar{\Gamma}$  und die Mengen  $\bar{\Lambda}_-^1$  (vertikale Streifen) und  $\bar{\Lambda}_+^1$  (horizontale Streifen) für  $k = 1.08$ .

## 4.3 Symbolische Dynamik für das reduzierte System

Für  $k = 1.08$  werden die beiden dynamisch nicht verbundenen Teile von  $\Lambda$  mittels (1.14) identifiziert. Die Dynamik in  $\Gamma_{red}$  erhält man daher durch Einschränkung der Dynamik in  $\Gamma$ . Daraus folgt, daß die Dynamik des reduzierten Systems topologisch konjugiert ist zur Dynamik auf dem Raum  $\Sigma^2$  aller bi-infiniten Folgen bestehend aus den Symbolen  $>$  und  $<$ . Man erhält als Ergebnis:

*Die invariante Menge des reduzierten Zwei-Mulden-Systems mit den Parameterwerten  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.08$  ist topologisch konjugiert zur Shift-Abbildung auf dem Folgenraum*

$$\Sigma^2 = \left\{ (\dots s_{-n} \dots s_{-1}, s_0 s_1 \dots s_n \dots) \mid s_i \in \{>, <\} \text{ für alle } i \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (4.8)$$

Ich diskutiere nun den Fall  $k = 1.9$ . Da nach Reduzierung mittels (1.14) ausschließlich Drehimpulsbeträge und keine Vorzeichen als Unterscheidungsmerkmale dienen, werden die Orbits  $(\overline{[+>]})$  und  $(\overline{[->]})$  sowie  $(\overline{[+<]})$  und  $(\overline{[-<]})$  identifiziert<sup>2</sup>. Somit entsprechen die vier Fixpunkte von  $F$  in  $\Gamma$  nur noch zwei Fixpunkten im reduzierten System. Da für  $k = 1.9$  ein Wechsel des Drehimpulsvorzeichens möglich ist, erhält man die Dynamik in  $\Gamma_{red}$  nicht wie für  $k = 1.08$  durch Einschränkung der Dynamik in  $\Gamma$ . Man hat in diesem Fall Buch darüber zu führen, wann beim Verfolgen einer Trajektorie die Transformation (1.14) angewendet werden muß. Zu diesem Zweck führe ich die zusätzlichen Symbole  $=$  und  $\neq$  ein, die dokumentieren, ob beim Verfolgen einer Trajektorie das Drehimpulsvorzeichen gleich bleibt oder ob ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Falls (1.14) angewendet wird, wird dies also durch  $\neq$  festgehalten, falls nicht, durch  $=$ . Der Orbit  $(\overline{[=>]})$  im reduzierten System beschreibt somit sowohl den Orbit  $(\overline{[+>]})$  als auch den Orbit  $(\overline{[->]})$ . Entsprechendes gilt für  $(\overline{[=<]})$  und die Orbits  $(\overline{[+<]})$  und  $(\overline{[-<]})$ . Man kann jeder Symbolfolge  $s$  aus den Symbolen  $[+>]$ ,  $[+<]$ ,  $[->]$  und  $[-<]$  genau eine Symbolfolge  $s'$  aus den Symbolen  $[=>]$ ,  $[=<]$ ,  $[>]$  und  $[<]$  zuordnen. Dies gilt jedoch nicht umgekehrt, denn wechselt man in jedem Symbol von  $s$  das Vorzeichen, so wird dieser Symbolfolge ebenfalls  $s'$  zugeordnet. Die beschriebene Abbildung ist  $2 : 1$ . Dies beschreibt den Verlust der Information über das Drehimpulsvorzeichen im reduzierten System. Man beachte, daß sich die Periode periodischer Orbits beim Übergang zu den neuen Symbolen ändern kann. Dies liegt daran, daß die Symbole  $=$  oder  $\neq$  eine relative Änderung beschreiben und zu ihrer Festlegung daher zwei aufeinander folgende

---

<sup>2</sup>Der Querstrich über einem Symbol oder einer endlichen Symbolfolge beschreibt die periodische Fortsetzung des Symbols bzw. der Folge sowohl in positiver als auch in negativer Zeit.

Punkte einer Trajektorie benötigt werden. So entsprechen z. B. die zweiperiodischen Orbits ( $\overline{[+>]}[->]$ ) und ( $\overline{[+<]}[-<]$ ) den einperiodischen Orbits ( $\overline{[\neq>]}$ ) und ( $\overline{[\neq<]}$ ).

Als Ergebnis bleibt festzuhalten:

*Die invariante Menge des reduzierten Zwei–Mulden–Systems mit den Parameterwerten  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.9$  ist topologisch konjugiert zur Shift–Abbildung auf dem Folgenraum*

$$\Sigma^4 = \left\{ (\dots s_{-n} \dots s_{-1}, s_0 s_1 \dots s_n \dots) \mid s_i \in \{[=>], [= <], [\neq >], [\neq <]\} \text{ für alle } i \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (4.9)$$

Damit ist gezeigt, wie das Zwei–Mulden–System für  $k = 1.08$  und für  $k = 1.9$  sowohl im nichtreduzierten als auch im reduzierten Fall mit Hilfe einer vollständigen Symbolischen Dynamik beschrieben werden kann.

## 4.4 Symbolische Dynamik für das Orbiting–Modell

In diesem Abschnitt wird der Fall einer Energie unterhalb der Orbitingschwelle behandelt. Für das Zwei–Mulden–System mit der Orbiting–Ablenkfunktion (1.23) sind die Mengen  $\Lambda_-^1$  und  $\Lambda_+^1$  in Abbildung 4.5 dargestellt. Zur Erklärung der Geometrie betrachtet man zunächst den Bereich in  $\Lambda_-^1$ , der durch die Kurven  $v_{c'}$  mit  $c' \in [l_{Orb}, 1]$  definiert ist (siehe (3.5)). Dies entspricht einem vertikalen Streifen in  $\Lambda_-^1$ , den ich im folgenden mit  $S$  bezeichne<sup>3</sup>. Eine Kurve mit  $l = c$  in  $S$  wird, wie in Abschnitt 3.2 gezeigt, auf die durch (3.7) gegebene Kurve  $\beta_c(l')$  in  $\Lambda_+^1$  abgebildet. Nähert man sich auf der Kurve  $l = c$  dem rechten Rand des Streifens  $S$ , nämlich  $v_{l_{Orb}}$ , so geht  $l'$  gegen  $l_{Orb}$ . Da  $\lim_{l' \rightarrow l_{Orb}} \Theta(l') = -\infty$  und da  $\arcsin\left(\frac{l_{Orb}-c}{2R_0}\right)$  endlich ist, gilt wegen (3.7):

$$\lim_{l' \rightarrow l_{Orb}} \beta_c(l') = \infty. \quad (4.10)$$

Weil  $\beta$  eine Winkelvariable ist, bedeutet dies, daß die Kurve  $l = c$  unter der Abbildung  $F$  unendlich oft um den Zylinder “gewickelt” wird und dabei gegen die Kurve  $l = l_{Orb}$  konvergiert. Da die Kurven  $l = c$  eine Blätterung von  $S$  darstellen, gilt entsprechendes für die Bildkurven und das Bild von  $S$ . Dies erklärt die Gestalt der Menge  $\Lambda_+^1$  in dem Bereich  $l > l_{Orb}$  und mittels (1.14) auch in dem Bereich  $l < -l_{Orb}$ . Für  $\Lambda_+^1$  in den Bereichen  $0 < l < l_{Orb}$

---

<sup>3</sup>Da  $\Lambda_-^1$  und die Kurven  $v_{c'}$  unabhängig von der Ablenkfunktion sind, kann zur Veranschaulichung wiederum Abbildung 3.2 herangezogen werden. Man hat dort lediglich  $l_R$  durch  $l_{Orb}$  zu ersetzen.

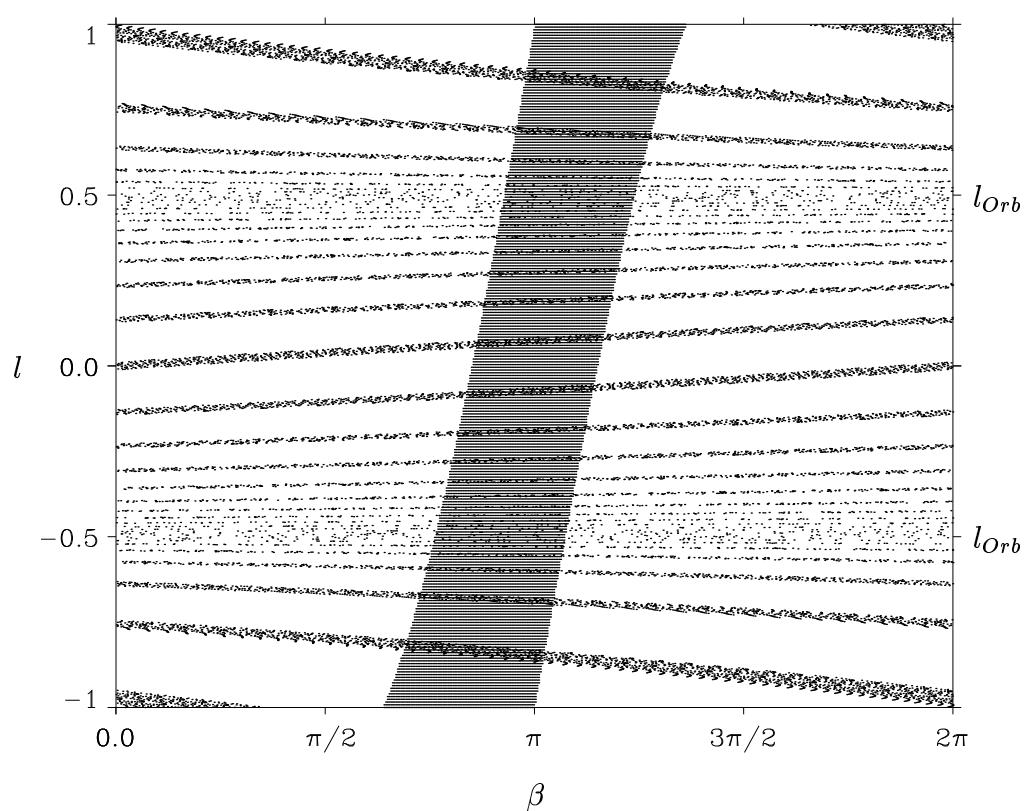


Abbildung 4.5: Die Mengen  $\Lambda_-^1$  (vertikale Streifen) und  $\Lambda_+^1$  (horizontale Streifen) für das Zwei-Mulden-System mit  $R_0 = 1.1$  und der Orbiting-Ablenkfunktion mit  $C = 10$ .

und  $-l_{Orb} < l < 0$  erkennt man nach analoger Vorgehensweise ebenfalls eine Häufung horizontaler Streifen gegen  $l_{Orb}$  bzw.  $-l_{Orb}$ . Man beachte, daß dieses Ergebnis unabhängig vom konkreten  $R_0$ -Wert ist.

Eine symbolische Beschreibung des Systems erhält man nun analog zu den bisher behandelten Fällen, indem man alle — in diesem Fall unendlich viele — horizontalen Streifen geeignet indiziert. Zu diesem Zweck führe ich zusätzlich zu den Symbolen für das Zwei-Mulden-System mit  $k = 1.9$  ein Symbol  $m$  ein, das definiert ist durch:

$$m = \left[ \frac{|\Theta(l')|}{2\pi} \right] , \quad (4.11)$$

wobei  $[x]$  die größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $x$  ist. Wenn man im Bereich  $l_{Orb} < l \leq 1$ , beim obersten Streifen mit 0 beginnend, nach unten durchnumeriert, beschreibt  $m$  somit den  $m$ -ten Streifen. Entsprechendes gilt für den Bereich  $0 \leq l < l_R$ , wobei die Indizierung hier beim untersten Streifen beginnt. Für den Teil von  $\Gamma$  mit  $l < 0$  erhält man die symbolische Beschreibung durch Spiegelung mittels (1.14). Man beachte, daß diese Vorgehensweise sowohl eine Symbolische Dynamik für das reduzierte als auch für das nichtreduzierte System liefert. Ich formuliere hier nur das Ergebnis für das nichtreduzierte System.

*Die invariante Menge des nichtreduzierten Zwei-Mulden-Systems mit der Orbiting-Ablenkfunktion ist topologisch konjugiert zur Shift-Abbildung auf dem Folgenraum*

$$\begin{aligned} \Sigma^\infty &= \left\{ (\dots s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots) \mid \right. \\ &\quad \left. s_i \in \{ [+ > m], [+ < m], [- > m], [- < m] \} \text{ für alle } i \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

An dieser Stelle taucht jedoch ein Problem auf, das in den bisherigen Fällen nicht auftrat. Aus mathematischer Sicht besteht die Schwierigkeit darin, daß der Folgenraum (4.12) und damit auch die invariante Menge von  $F$  nicht mehr kompakt sind. Dies folgt z. B. aus der Darstellung von (4.12) als unendliches Produkt von Folgenräumen des Typs (4.3). Da Satz 2 die Kompaktheit von  $\Lambda$  voraussetzt, ist er zunächst gar nicht anwendbar. MOSER hat jedoch gezeigt, wie die Voraussetzungen von Satz 2 auch im Fall von abzählbar unendlich vielen horizontalen bzw. vertikalen Streifen eine hyperbolische Struktur für  $\Lambda$  zur Folge haben, so daß das formulierte Ergebnis seine Gültigkeit behält [Mos73].

Mit dem mathematischen Problem ist direkt ein physikalisches Problem verknüpft. Es gibt Trajektorien, die ein endliches  $n$  haben, aber den Wechselwirkungsbereich nicht mehr verlassen! Eine Trajektorie, deren Drehimpuls  $l$  unter der Dynamik zu einem Zeitpunkt  $n$  den Wert  $l_{Orb}$  annimmt, wird von

einer Mulde  $v(r)$  eingefangen. Sie bleibt daher im Wechselwirkungsbereich gebunden. Eine Anfangsbedingung  $p$  zu einer solchen Trajektorie gehört aber *nicht* zur invarianten Menge von  $F$ , da  $F^{n+1}(p)$  nicht definiert ist. Bezogen auf  $\Lambda$  handelt es sich bei  $p$  um die Anfangsbedingung einer Entweichtrajektorie, bezogen auf die Streuung am Potential (1.1) um die Anfangsbedingung einer Einfangtrajektorie. Ziel der folgenden Überlegungen ist die symbolische Beschreibung dieser Trajektorien.

Als weitere Symbole führe ich  $+\infty$  und  $-\infty$  ein, die die horizontalen Kurven  $l = \pm l_{Orb}$  indizieren. Man betrachtet nun die Folgen

$$s = (\pm\infty, s_{\alpha+1} \dots s_{\omega-1}, \pm\infty) \quad , \quad (4.13)$$

$s_i \in \{[+ > m], [+ < m], [- > m], [- < m]\}$  mit  $i \in \{\alpha + 1, \dots, \omega - 1\}$ , wobei  $\alpha$  und  $\omega$  ganze Zahlen sind mit  $\alpha \leq 0$  und  $\omega \geq 1$ . Der Fall  $\alpha = 0$  und  $\omega = 1$  entspricht den Folgen  $(\pm\infty, \pm\infty)$ . Für  $\alpha = -\infty$  und  $\omega = \infty$  erhält man Elemente aus der invarianten Menge von  $F$ . Die Menge aller Elemente des Typs (4.13) bezeichne ich mit  $\bar{\Sigma}^\infty$ . Da im folgenden die Metrik nicht explizit benötigt wird, verweise ich für die Einführung einer solchen auf die Literatur ([Wig88] Seite 106ff). Die Shift–Abbildung ist nun nicht mehr auf ganz  $\bar{\Sigma}^\infty$  definiert. Der Definitionsbereich der Shift–Abbildung  $\bar{\sigma}$  auf diesem Raum, die formal genau so definiert ist wie vorher, ist gegeben durch

$$D(\bar{\sigma}) = \{s \in \bar{\Sigma}^\infty \mid s_0 \neq \pm\infty\} \quad . \quad (4.14)$$

Als Bildbereich erhält man

$$B(\bar{\sigma}) = \{s \in \bar{\Sigma}^\infty \mid s_{-1} \neq \pm\infty\} \quad . \quad (4.15)$$

Bezeichnet man mit  $\bar{h}^{-1}$  die Erweiterung des Homöomorphismus  $h^{-1}$  von  $\Sigma^\infty$  auf  $\bar{\Sigma}^\infty$ , so gilt:

$$\bar{h}^{-1} \circ \bar{\sigma} = F \circ \bar{h}^{-1} \Big|_{D(\bar{\sigma})} \quad . \quad (4.16)$$

Mathematisch ist die Einführung der Symbole  $+\infty$  und  $-\infty$  nichts anderes als eine Kompaktifizierung. Die Menge  $\bar{h}^{-1}(\bar{\Sigma}^\infty)$  ist zwar kompakt, jedoch nicht mehr invariant unter  $F$ . Die zusätzlichen neuen Symbolfolgen (4.13) beschreiben genau die Trajektorien, die im Hinblick auf  $\Lambda$  für positive oder negative Zeiten entweichen, jedoch im Wechselwirkungsbereich gebunden bleiben.

## 4.5 Beschneiden des Symbolbaumes

Für  $k = 1.9$  besteht  $\bar{\Lambda}_-^n$  aus  $4^n$  vertikalen und  $\bar{\Lambda}_+^n$  aus  $4^n$  horizontalen Streifen (siehe Abbildung 4.1 für  $n = 1$ ). Alle Punkte in einem  $\bar{\Lambda}_-^n$ -Streifen haben mindestens  $n$  konsekutive Bildpunkte und können durch dieselbe Folge von

Tabelle 4.1: Schematische Darstellung der Menge  $\overline{\Lambda}_-^2 \cap \overline{\Lambda}_+^2$  für das Zwei-Mulden-System mit  $k = 1.9$ . Die für  $k = 1.26$  verbotenen Symbolfolgen sind durch \* gekennzeichnet.

$n$  Symbolen beschrieben werden. Jeder  $\overline{\Lambda}^n$ -Streifen lässt sich also durch  $n$  Symbole in der Form  $(.s_0 \dots s_{n-1})$  beschreiben. Entsprechend ist ein  $\overline{\Lambda}_+^n$ -Streifen durch  $(s_{-n} \dots s_{-1})$  eindeutig bestimmt.

Für  $k = 1.9$  bestehen  $\overline{\Lambda}_{\pm}^2$  aus jeweils 16 Streifen. In Tabelle 4.1 sind  $\overline{\Lambda}_-$  und  $\overline{\Lambda}_+$  samt den dazu gehörenden Symbolfolgen für das nichtreduzierte System schematisch dargestellt. Die vertikalen  $\overline{\Lambda}_-$ -Streifen sind durch die Spalten, die horizontalen  $\overline{\Lambda}_+$ -Streifen durch die Zeilen der Tabelle gegeben. Die Symbolfolge für einen  $\overline{\Lambda}_-$ -Streifen erhält man durch Anhängen des Symbols in der zweiten Kopfzeile an das in der ersten. Entsprechend erhält man die Symbolfolge für einen  $\overline{\Lambda}_+$ -Streifen durch Voranstellen des Symbols in der vorletzten Spalte vor das in der letzten. Man beachte, daß sich die Reihenfolge der innen stehenden Symbole beim Auftreten einer “Falte” umkehrt.

Die Symbolische Dynamik erlaubt es, die Orbits eines Systems in einer Baumstruktur anzugeben. Nach einem gegebenen Symbol gibt es je nach Anzahl der möglichen verschiedenen Folgesymbole eine entsprechende Anzahl von „Zweigen“. Für  $k = 1.9$  gibt es z. B. nach jedem Symbol vier Zweige. In diesem Zusammenhang spricht man auch von einem *Symbolbaum*.

Das Zwei-Mulden-System mit  $k = 1.26$  ist nun ein Beispiel für ein sogenanntes *Beschneiden des Symbolbaumes* (engl. pruning). Abbildung 4.6 zeigt in Teil (a)  $\Lambda_-^1$  und  $\Lambda_+^1$  und in Teil (b) die Mengen  $\overline{\Lambda}_-^2$  und  $\overline{\Lambda}_+^2$  bezüglich des Phasenraumbereiches  $\overline{\Gamma}$ , der über das  $\beta$ -Intervall  $[\pi/2, 3\pi/2]$  definiert ist (vgl. Abschnitt 4.1). In Abbildung 4.6(b) erkennt man, daß für  $k = 1.26$  die horizontalen (vertikalen) Streifen nicht mehr alle vertikalen (horizontalen) Streifen schneiden. Im Hinblick auf das Zwei-Mulden-System mit  $k = 1.9$  bedeutet dies, daß nicht mehr alle Symbolfolgen realisiert werden können. In Tabelle 4.1 sind diejenigen Schnitte von  $\overline{\Lambda}_-^2$ -Streifen mit  $\overline{\Lambda}_+^2$ -Streifen, die für  $k = 1.26$  im Gegensatz zu  $k = 1.9$  leer sind, durch \* gekennzeichnet. Aus der ersten Zeile, in der ein \* auftritt, erhält man folgende, nicht zu realisierende Reihenfolgen von Symbolen:

$$\begin{aligned} &[- <][+ >].[- <][- >] \\ &[- <][+ >].[- <][- <] \\ &[- <][+ >].[- <][+ <] \\ &[- <][+ >].[- <][+ >] \\ &[- <][+ >].[- >][- >] \quad (4.17) \\ &[- <][+ >].[- >][- <] \\ &[- <][+ >].[- >][+ <] \\ &[- <][+ >].[- >][+ >] \end{aligned} .$$

In einer Symbolfolge ist somit nach den drei Symbolen  $[- <][+ >].[- <]$  bzw.  $[- <][+ >].[- >]$  kein weiteres Symbol erlaubt. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß jede Symbolfolge, in der Symbole in einer der beiden Konstellationen  $\dots[- <][+ >][- <]\dots$  oder  $\dots[- <][+ >][- >]\dots$  auftreten, verboten ist. Nach  $\dots[- <][+ >]$  sind also nicht mehr alle Zweige möglich, was anschaulich einem Beschneiden des Symbolbaumes entspricht.

Berücksichtigt man die übrigen kritischen Zeilen in Tabelle 4.1, so erhält man zusammenfassend folgende 16 verbotenen Symbolreihenfolgen:

$$\begin{aligned} &\dots[- <][+ >][- <]\dots, \quad \dots[- <][+ >][- >]\dots, \\ &\dots[- >][+ >][- <]\dots, \quad \dots[- >][+ >][- >]\dots, \\ &\dots[- >][+ <][- <]\dots, \quad \dots[- >][+ <][- >]\dots, \\ &\dots[- <][+ <][- <]\dots, \quad \dots[- <][+ <][- >]\dots, \\ &\dots[+ <][- <][+ >]\dots, \quad \dots[+ <][- <][+ <]\dots, \quad (4.18) \\ &\dots[+ >][- <][+ >]\dots, \quad \dots[+ >][- <][+ <]\dots, \\ &\dots[+ >][- >][+ >]\dots, \quad \dots[+ >][- >][+ <]\dots, \\ &\dots[+ <][- >][+ >]\dots, \quad \dots[+ <][- >][+ <]\dots. \end{aligned}$$

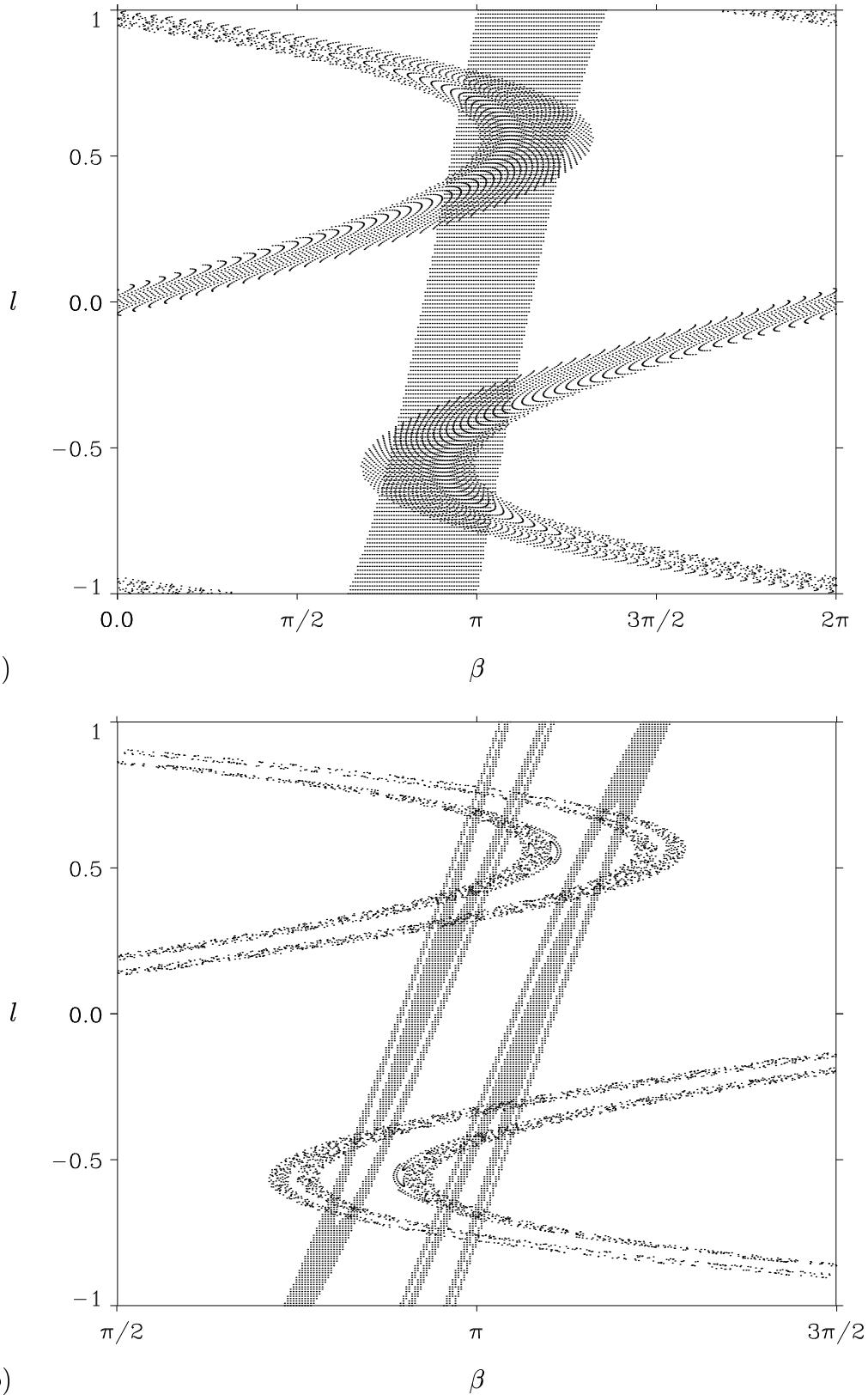


Abbildung 4.6: Das Zwei–Mulden–System mit  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.26$ : (a)  $\Lambda_-^1$  und  $\Lambda_+^1$ , (b)  $\overline{\Lambda}_-^2$  und  $\overline{\Lambda}_+^2$ .

Da nur die mit \* gekennzeichneten Schnitte vertikaler und horizontaler Streifen leer sind, sind alle übrigen Symbolfolgen möglich. Das nichtreduzierte System ist daher topologisch konjugiert zur Shift–Abbildung auf dem Folgenraum  $\Sigma^4$  wie er für  $k = 1.9$  definiert ist, vermindert um die durch (4.18) definierten Symbolfolgen. Eine Menge von Regeln, die eine unter der Shift–Abbildung invariante Teilmenge eines Folgenraumes definiert, wird auch als *Grammatik* bezeichnet.

Für das reduzierte System lässt sich die Grammatik kompakter formulieren. Übersetzt man die in (4.18) angegebenen Symbolfolgen in die entsprechenden Symbolfolgen des reduzierten Systems, so erhält man:

$$\begin{aligned} \dots & [\neq<][\neq>] \dots \\ \dots & [\neq>][\neq<] \dots \\ \dots & [\neq>][\neq>] \dots \\ \dots & [\neq<][\neq<] \dots \end{aligned} \quad (4.19)$$

Es bleiben also nur noch vier Regeln übrig, die sich mit Hilfe einer Übergangsmatrix darstellen lassen. Indiziert man Zeilen und Spalten in der Übergangsmatrix in der Reihenfolge [=>], [=<], [≠<], [≠>], so erhält man:

*Das reduzierte Zwei–Mulden–System mit den Parameterwerten  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.26$  ist topologisch konjugiert zur Shift–Abbildung auf dem Folgenraum  $\Sigma_A^4$ , wobei der Folgenraum  $\Sigma^4$  durch (4.9) und die Übergangsmatrix  $A$  durch*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

gegeben ist.

Man kann zeigen, daß die Shift–Abbildung auf einem Folgenraum  $\Sigma_A^N$  im strengen Sinn chaotisch ist, falls  $A$  irreduzibel ist, d. h. falls es eine natürliche Zahl  $m > 0$  gibt, so daß für alle  $i, j$  mit  $1 \leq i, j \leq N$  die Bedingung  $(A^m)_{ij} \neq 0$  erfüllt ist ([Wig88] Seite 103ff). Da die Matrix (4.20) diese Bedingung für  $m = 2$  erfüllt, ist das Zwei–Mulden–System mit  $k = 1.26$  chaotisch.

## 4.6 Fundamentale periodische Orbits

Es gibt eine alternative Möglichkeit, eine Symbolische Dynamik einzuführen, nämlich mit Hilfe *fundamentaler periodischer Orbits*. Nach der Diskussion in Kapitel 1 entsprechen periodische Punkte der Abbildung  $F$  periodischen Orbits im Mulden–System. Ich betrachte zunächst das Zwei–Mulden–System mit  $k = 1.9$ . Die Orbits  $(\overline{+>})$ ,  $(\overline{->})$ ,  $(\overline{+<})$  und  $(\overline{-<})$  sind im Konfigurationsraum in Abbildung 4.7(a) dargestellt. Je nachdem ob die dargestellten

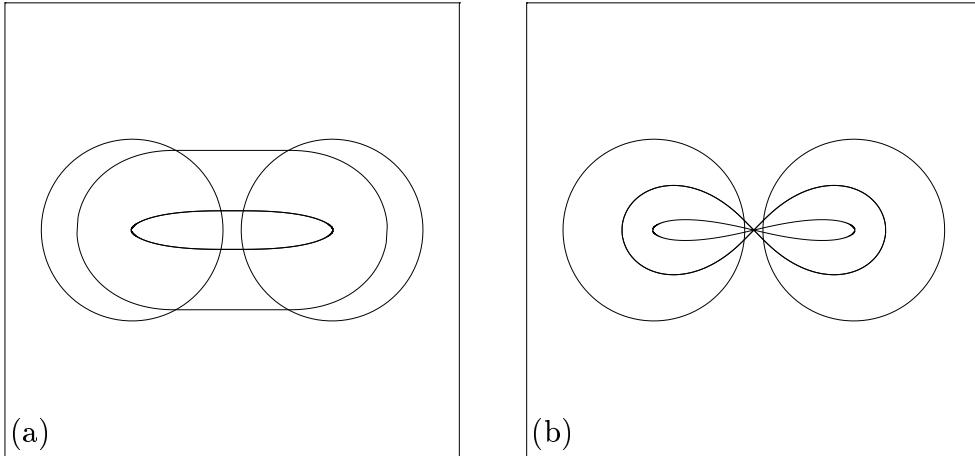


Abbildung 4.7: Die fundamentalen Orbits des Zwei–Mulden–Systems mit  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.9$  im Konfigurationsraum: (a) Ringorbits, (b) 8–förmige Orbits.

Kurven gegen oder im Uhrzeigersinn durchlaufen werden, entspricht dies den Fixpunkten mit  $l > 0$  bzw.  $l < 0$ , d. h. den Symbole  $+/-$ . Die äußeren Kurven sind dabei diejenigen mit dem Drehimpulsbetrag größer als  $l_R$  (Symbol  $>$ ), die inneren diejenigen mit dem Drehimpulsbetrag kleiner als  $l_R$  (Symbol  $<$ ). Aufgrund ihrer Form bezeichne ich diese vier Orbits im folgenden als *Ringorbits*. Man beachte, daß die Ringorbits nur deshalb zu Fixpunkten von  $F$  gehören, weil in die Definition (1.10) von  $F$  eine Symmetriereduzierung bezüglich der  $C_2$ –Symmetrie eingegangen ist. Ohne diese Symmetriereduzierung entsprächen die Ringorbits zwei–periodischen Punkten.

Wie in Abschnitt 4.3 diskutiert, ist im reduzierten System die Richtung, in der die Ringorbits durchlaufen werden, unerheblich. Sie repräsentieren daher nur zwei Fixpunkte, nämlich  $(\overline{=>})$  und  $(\overline{=<})$ . Die Orbits, die zu den beiden Fixpunkten  $(\overline{\neq>})$  und  $(\overline{\neq<})$  gehören, sind in Abbildung 4.7(b) dargestellt. Diese Orbits, die im nichtreduzierten System zwei–periodisch sind und vier zwei–periodische Punkte repräsentieren, bezeichne ich im folgenden als *8–förmige Orbits*.

Im nichtreduzierten System bilden die vier Ringorbits, im reduzierten die beiden Ringorbits zusammen mit den beiden 8–förmigen Orbits die sogenannten fundamentalen Orbits. Aus ihnen läßt sich jeder Orbit des Systems „zusammensetzen“. Man kann damit u. a. die topologische Struktur von Bahnkurven im Ortsraum konstruieren, wenn die Symbolfolge vorgegeben ist. Die Symbole  $[=>]$  und  $[=<]$  entsprechen jeweils einem „halben“ Ring–Orbit mit  $l$  größer bzw. kleiner als  $l_R$ . Analog entsprechen  $[\neq>]$  und  $[\neq<]$  jeweils „halben“ 8–förmigen Orbits. Beispiele sind in Anhang D zu finden.

Für  $k = 1.08$  und  $k = 1.26$  betrachte ich nun ausschließlich das reduzierte System. Im Falle  $k = 1.08$  ist ein Vorzeichenwechsel der Drehimpulskoordinate nicht möglich. Die beiden Ringorbits bilden hier die fundamentalen Orbits.

Da sich im Vergleich zu den Ringorbits für  $k = 1.9$  an der Topologie der Bahnkurven nichts ändert, verzichte ich auf eine Darstellung. Ist  $k = 1.26$ , so läßt sich nicht mehr jeder Orbit aus einperiodischen Orbits „zusammensetzen“. Die einzigen einperiodischen Orbits sind die Ringorbits. Im Gegensatz zu  $k = 1.08$  ist hier jedoch ein Vorzeichenwechsel der Drehimpulskomponente möglich. Da dieser durch die Ringorbits nicht realisiert werden kann, gehören neben den beiden Ringorbits zusätzlich die zwei-periodischen Orbits  $(\overline{[= <] \neq <}), (\overline{[= <] \neq >}), (\overline{[= >] \neq <} \text{ und } (\overline{[= >] \neq >})$  zur Menge der fundamentalen Orbits. Aus der Diskussion in Abschnitt 4.5 folgt, daß sich jeder andere Orbit des Systems aus diesen sechs Orbits „zusammensetzen“ läßt. Die fundamentalen zwei-periodischen Orbits sind in Abbildung 4.8 dargestellt. Man beachte, daß die Projektionen der Orbits  $(\overline{[= <] \neq >})$  und  $(\overline{[= >] \neq <})$  in den Ortsraum identisch sind. Sie unterscheiden sich lediglich in der Umlaufrichtung.

## 4.7 Strukturstabilität

In diesem Abschnitt seien die Parameter so gewählt, daß das System (1.10) hyperbolisch ist.

Im Gegensatz zu integrabilen Systemen sind hyperbolische Systeme strukturstabil. Eine kleine Störung des Systems führt auf ein topologisch konjugiertes System. Aus physikalischer Sicht sind für das Zwei–Mulden–System Deformationen des zugrunde liegenden Muldenpotentials von besonderem Interesse. Für die Diskussion der Stabilität gegenüber solchen Störungen ist eine Unterscheidung bezüglich der Energie notwendig.

Zunächst betrachte ich eine Energie oberhalb der Orbitingschwelle. In diesem Fall ist eine gebundene Bewegung in einer Mulde nicht möglich. Unter einer kleinen Störung bleibt diese Eigenschaft erhalten. Der Einfang einer Trajektorie ist deshalb ausgeschlossen. Die Ablenkfunktion ist somit auch nach der Störung stetig und besitzt keine Singularitäten. Dies bedeutet, daß eine kleine Störung des Muldenpotentials eine kleine Störung der Abbildung (1.10) zur Folge hat. Da diese strukturstabil ist, ist das gestörte System topologisch konjugiert zum ursprünglichen.

Befindet sich die Energie unterhalb der Orbitingschwelle, so findet man im Inneren einer Mulde eine entartete Situation vor. Das Ausbilden eines lokalen Maximums in  $v_{eff}(r)$  impliziert für die Maximum–Energie neben einem instabilen Fixpunkt auch die Existenz eines homoklinen Orbits. Eine Störung von  $v(r)$  führt nun i. a. zu transversalen Schnitten von instabiler und stabiler Mannigfaltigkeit des hyperbolischen Fixpunktes im gestörten System. Damit verbunden ist die Entstehung einer chaotischen invarianten Menge. Die Streuung an einer einzelnen Mulde ist daher schon chaotisch. Insbesondere finden sich in der Ablenkfunktion auf allen Skalen Singularitäten. Eine

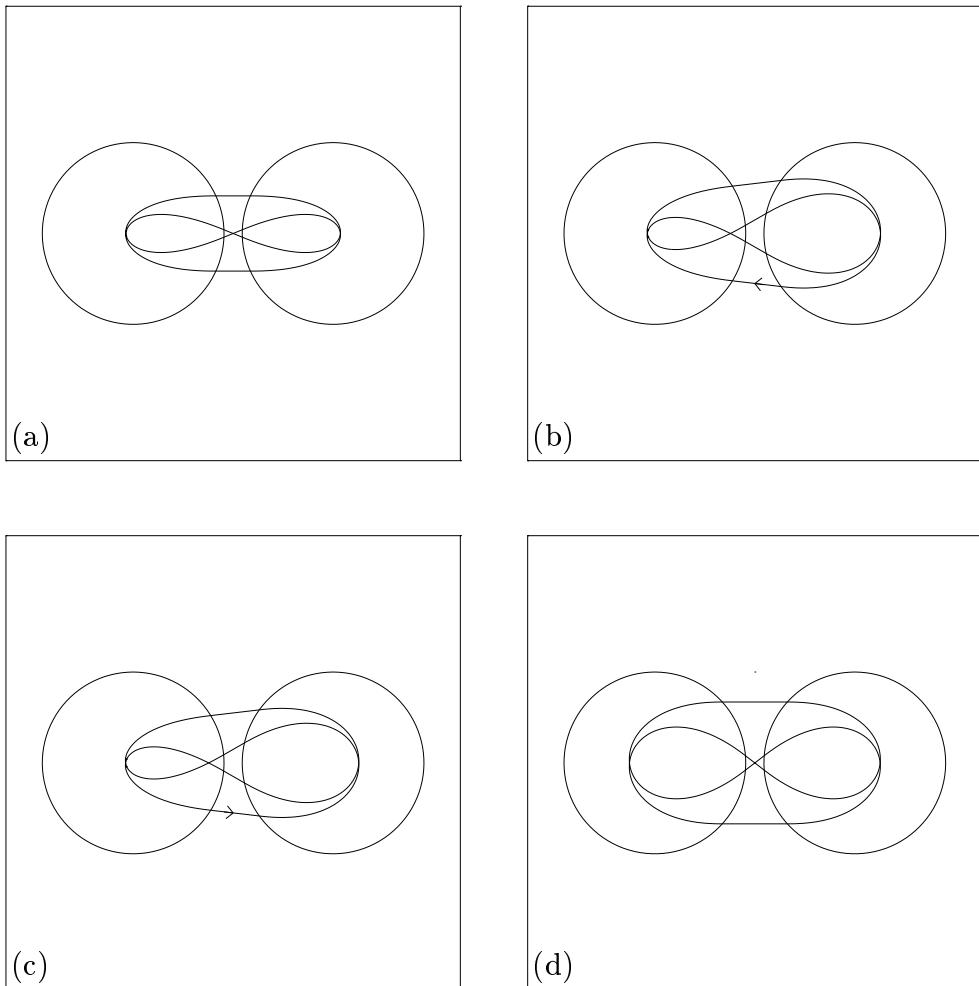


Abbildung 4.8: Die fundamentalen zwei-periodischen Orbits (a) ( $\overline{[= <] \neq <]}$ ), (b) ( $\overline{[= <] \neq >]}$ ), (c) ( $\overline{[= >] \neq <]}$ ) und (d) ( $\overline{[= >] \neq >]}$ ) des Zwei-Mulden-Systems mit  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.26$ . In (b) und (c) deutet der Pfeil die Umlaufrichtung an.

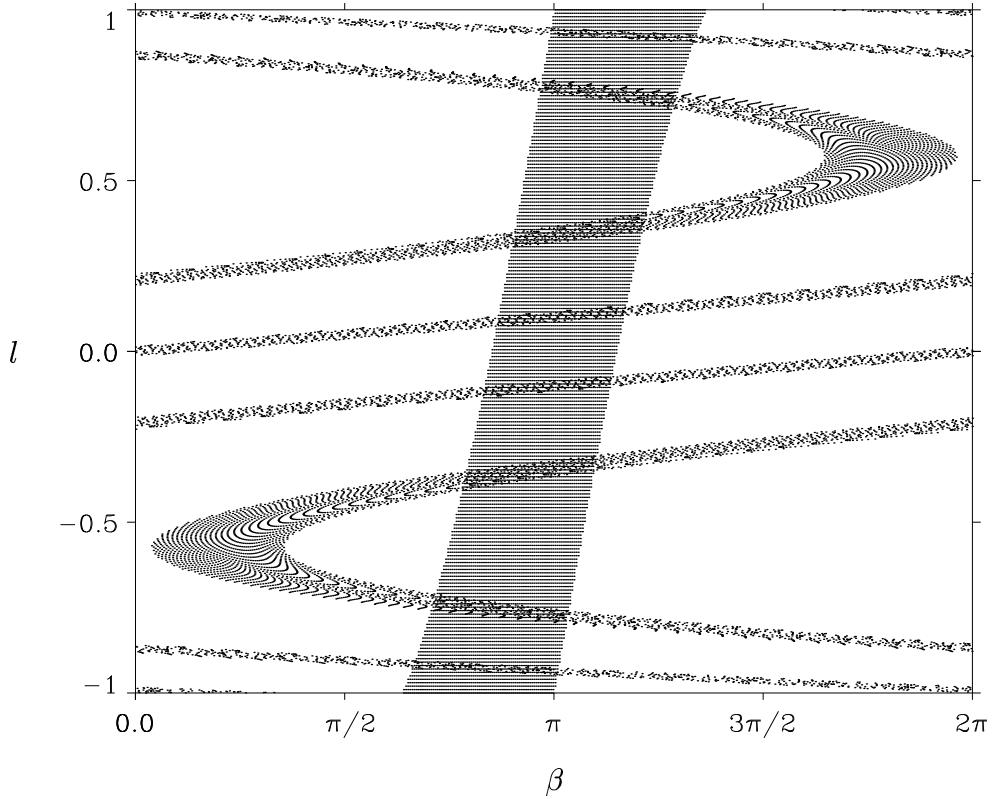


Abbildung 4.9:  $\overline{\Lambda}_-^1$  und  $\overline{\Lambda}_+^1$  für  $R_0 = 1.1$  und  $k = 3.9$ .

kleine Störung des Muldenpotentials führt somit zu einer qualitativ anderen Dynamik, insbesondere ist das gestörte System nicht mehr topologisch konjugiert zum ursprünglichen System.

## 4.8 Der Parameterbereich $2 < k < \infty$

Bevor ich auf die Symbolische Dynamik für ein System mit mehr als zwei Mulden eingehe, diskutiere ich die Situation für den vergleichsweise kleinen Energiebereich oberhalb der Orbitingschwelle, der den Parameterwerten  $2 < k < \infty$  entspricht (siehe Kapitel 1.3). Mit den bisherigen Ergebnissen ist es möglich, in bestimmten Fällen auch für diesen Parameterbereich eine vollständige Symbolische Dynamik anzugeben.

Man erhält das Alphabet durch Einschränkung des Alphabets, das für das Orbiting-Modell verwendet wurde. Da die Ablenkfunktion beschränkt ist, gibt es nach (4.11) nur endlich viele  $m$ -Werte. Ich betrachte zunächst  $k$ -Werte des Typs  $k = (2n + 1) + 0.9$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $n \geq 1$ . In diesem Fall gilt dann  $m \leq n$ . Man beachte, daß der konstante Term 0.9 dafür sorgt, daß die beiden “Falten” von  $\Lambda_+^1$  außerhalb von  $\Lambda_-^1$  liegen. Die Zahl  $n$  gibt an, wie

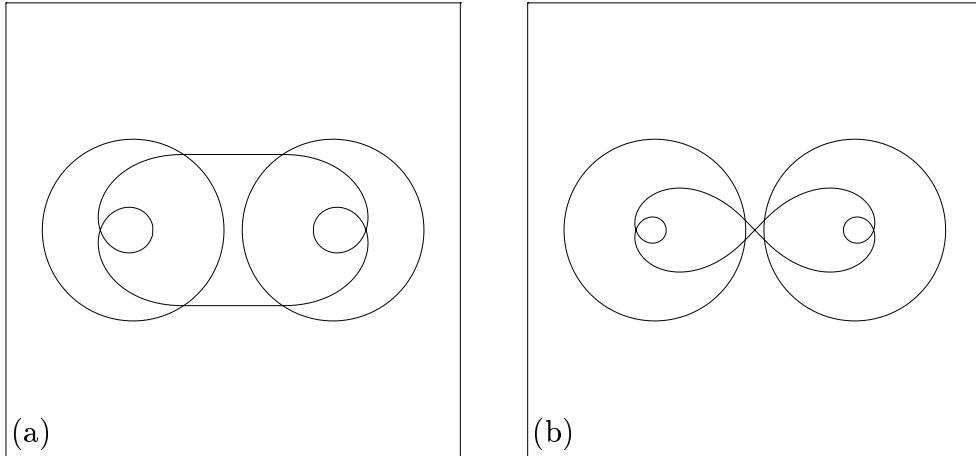


Abbildung 4.10: Zwei fundamentale Orbits des Zwei–Mulden–Systems mit  $R_0 = 1.1$  und  $k = 3.9$ : (a) [=> 1], (b) [≠> 1].

oft der parabelförmige Streifen  $\Lambda_+^1$  um den Phasenraumzylinder “gewickelt” wird (siehe Abbildung 4.9 für  $n = 1$ ). Jede “Wicklung“ liefert 4 neue Orbittypen. Das bedeutet, daß das Zwei–Mulden System topologisch konjugiert ist zu einer Shift–Abbildung auf einem Folgenraum mit  $4(n + 1)$  Symbolen. Im Ortsraum lassen sich die neu hinzugekommenen fundamentalen Orbits aus den bisherigen konstruieren. Die Zahl  $m$  beschreibt nämlich die Anzahl der Umläufe, die das Teilchen im Inneren einer Mulde um den Muldenmittelpunkt vollzieht, bevor es die Mulde wieder verläßt. Die fundamentalen Orbits ergeben sich demnach aus den bisherigen Ringorbits und 8–förmigen Orbits, indem man innerhalb einer Mulde eine entsprechende Anzahl von Umläufen hinzufügt. Für  $n = 1$  sind in Abbildung 4.10 exemplarisch zwei der neu hinzugekommenen fundamentalen Orbits dargestellt.

Ich vermute, daß es  $k$ –Werte um  $k = (2n + 1) + 0.08$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $n \geq 1$ , gibt, für die ebenfalls eine vollständige symbolische Dynamik existiert. Das Alphabet besteht dann aus  $4n + 2$  Symbolen. Im Gegensatz zu den Ring–Orbits können die 8–förmigen Orbits mit  $n$  Umläufen im Inneren einer Mulde hier noch nicht realisiert werden. Das Problem für diese Parameterwerte ist der Nachweis der Hyperbolizität, da die “Falte” von  $\Lambda_+^1$  im Inneren von  $\Lambda_-^1$  liegt. Es ist ein ähnliches Vorgehen wie im Fall  $k = 1.08$  erforderlich. Da eine Vorstellung dieses Verfahrens qualitativ nichts Neues ergibt, verzichte ich hier darauf.

## 4.9 Verhalten bei Erhöhung der Muldenzahl

Wie in Abschnitt 3.2 dargelegt, besteht  $\Lambda_-^1$  im Falle von drei Mulden aus zwei disjunkten vertikalen Streifen. Jeder Streifen entspricht einer der beiden möglichen Mulden, die als nächstes besucht werden können. Mit einem

analogen Vorgehen wie im Fall von zwei Mulden läßt sich die Hyperbolizität nachweisen. Ich verzichte hier auf die Darstellung der Details.

Die Einführung einer Symbolischen Dynamik erfolgt wieder durch Einschränkung auf bestimmte Phasenraumbereiche. Für  $R_0 = 1.4$  und  $k = 1.9$  ist erneut der Phasenraumbereich  $\bar{\Gamma}$ , der durch das  $\beta$ -Intervall  $[\pi/2, 3\pi/2]$  definiert ist, geeignet. In Abbildung 4.11 sind  $\bar{\Lambda}_-^1$  und  $\bar{\Lambda}_+^1$  dargestellt, die jeweils aus 8 vertikalen bzw. horizontalen Streifen bestehen. Daraus folgt die topologischen

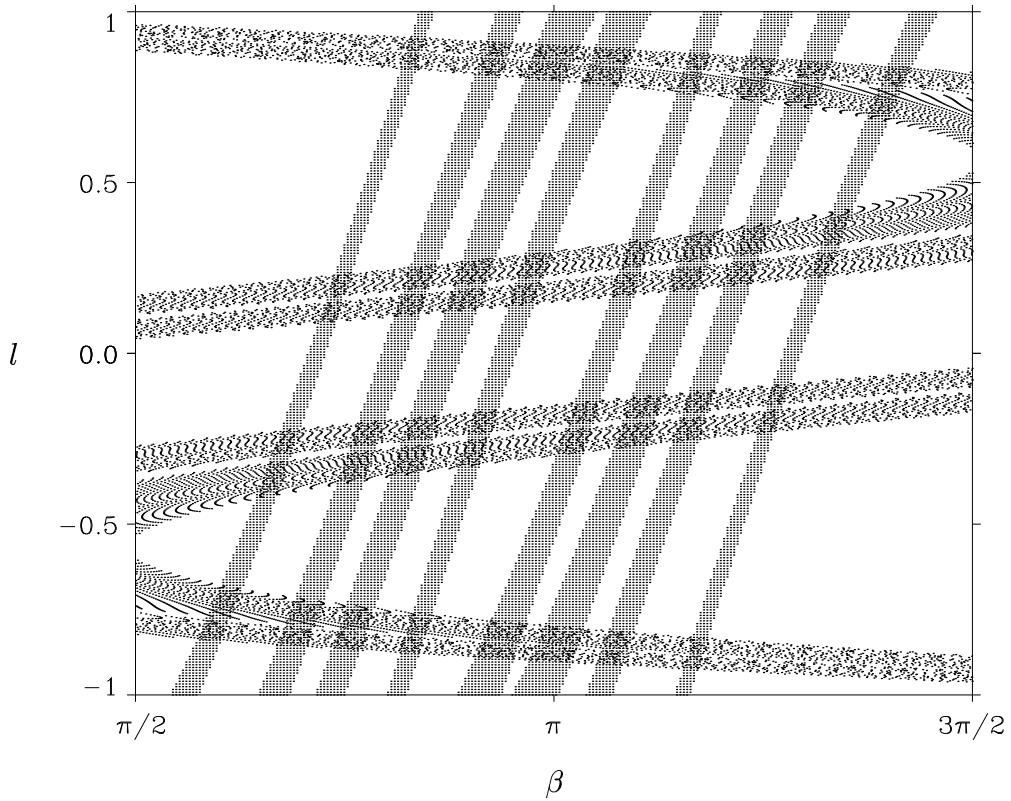


Abbildung 4.11:  $\bar{\Lambda}_-^1$  (vertikale Streifen) und  $\bar{\Lambda}_+^1$  (horizontale Streifen) für das Drei-Mulden-System mit  $R_0 = 1.4$  und  $k = 1.9$ .

Äquivalenz zu einer Shift-Abbildung auf einem Folgenraum mit 8 Symbolen. Die fundamentalen Orbits des reduzierten Systems, die zu den 8 Fixpunkten gehören, sind in Abbildung 4.12 dargestellt. Es ist dabei zu beachten, daß die 8-förmigen Orbits, die nur zwei der drei Mulden besuchen, im Drei-Mulden-System im Gegensatz zum Zwei-Mulden-System nicht mehr symmetrisch bezüglich einer reversiblen Symmetrie sind. Dies ist der Grund, warum hier bezüglich der Umlaufrichtung unterschieden werden muß und die 8-förmigen Orbits im reduzierten Drei-Mulden-System 4 Fixpunkten entsprechen.

Ohne den expliziten Nachweis zu erbringen, gebe ich für  $R_0 = 1.4$  mit  $k = 0.9$  einen  $k$ -Wert an, für den das reduzierte Drei-Mulden-System topologisch

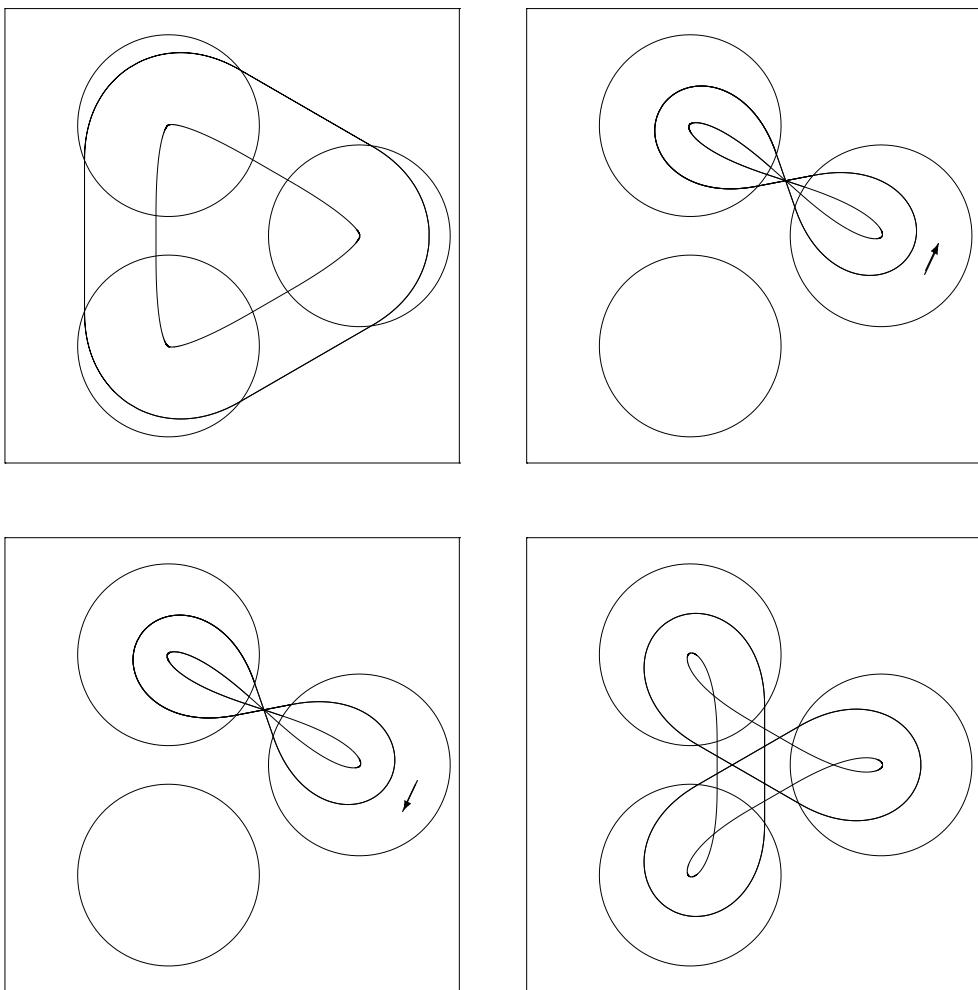


Abbildung 4.12: Die acht fundamentalen Orbits des reduzierten Drei-Mulden-Systems mit  $R_0 = 1.4$  und  $k = 1.9$ . Die Pfeile in den Darstellungen der 8-förmigen Orbits deuten die Umlaufrichtung an.

konjugiert ist zu einer Shift–Abbildung auf einem Folgenraum mit zwei Symbolen. Ein Beweis dieser Aussage ist entsprechend dem Fall von zwei Mulden möglich. Die beiden fundamentalen Orbits sind wiederum durch die beiden Ringorbits gegeben, die die Zentren der drei Mulden umlaufen.

Diese Überlegungen lassen für ein  $N$ –Mulden–System folgendes Resultat erwarten. Es gibt  $k$ –Werte im Bereich  $k < 2$ , für die das System topologisch konjugiert ist zu einer Shift–Abbildung auf einem Folgenraum mit  $4(N - 1)$  Symbolen. Diese Behauptung ist deshalb plausibel, weil  $\overline{\Lambda}_-^1$  aus  $N - 1$  vertikalen Streifen besteht, die Festlegung eines dieser Streifen der Festlegung des nächsten Wechselwirkungsbereiches entspricht und dieser — wie die Diskussion des Zwei–Mulden–Systems gezeigt hat — auf vier verschiedene Arten aufgesucht werden kann. Ebenso sind  $k$ –Werte zu erwarten, für die das System topologisch konjugiert zu einer Shift–Abbildung auf einem Folgenraum mit zwei Symbolen ist. Diese Situation tritt dann auf, wenn eine Trajektorie, die von Mulde  $j - 1$  kommt, von Mulde  $j$  höchstens soweit abgelenkt werden kann, daß sie außer Mulde  $j + 1$  keine andere aufsuchen kann. In diesem Fall sind nur die beiden Ringorbits möglich, die die Zentren aller Mulden umlaufen.

# Kapitel 5

## Bifurkationen

In diesem Kapitel wird die Parameterabhängigkeit des Mulden–Systems diskutiert. Zunächst wird in Abschnitt 5.1 eine Bedingung hergeleitet, unter der eine nichtleere invariante Menge existiert. Der Abschnitt 5.2 hat dann die Abhängigkeit der invarianten Menge von  $k$  und von  $R_0$  zum Thema. Mit Hilfe der erzielten Ergebnisse werden in Abschnitt 5.3 die Streuresultate aus Kapitel 2 erklärt.

### 5.1 Existenz der invarianten Menge

In diesem Abschnitt diskutiere ich die Voraussetzung für die Existenz einer nichtleeren invarianten Menge. Zunächst wird das Zwei–Mulden–System behandelt. Es wird gezeigt, daß  $\Lambda$  nicht leer ist, sobald das Potential  $v$  in der Lage ist, das Teilchen in dieselbe Richtung zurückzustreuen, aus der es gekommen ist. Konkret gilt der

**Satz 7** *Die invariante Menge des Zwei–Mulden–Systems ist genau dann nicht leer, wenn das Minimum der Ablenkfunktion kleiner oder gleich  $-\pi$  ist.*

Beweis: Zunächst zeige ich, daß ein Ablenkinkel  $\Theta(l) \leq -\pi$  die Existenz eines Fixpunktes impliziert. Man kann dies direkt mit Hilfe der Abbildung (1.10) nachweisen, oder man betrachtet dazu den Schnitt der Fixpunktmengen der Involutionen  $I_0$  (1.12) und  $I_1$  (1.13) (siehe Anhang C). Ich wähle hier die zweite Möglichkeit. Für  $I_0$  ist die Fixpunktmenge  $\mathcal{R}_0$  durch folgende eindimensionale Mannigfaltigkeit gegeben:

$$\beta = \pi \quad . \quad (5.1)$$

Für  $I_1$  erhält man die eindimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{R}_1$ , die durch

$$\beta = \frac{1}{2}(\pi - \Theta(l)) \quad (5.2)$$

definiert ist. Der Schnitt dieser beiden Mengen ist nicht leer, falls es ein  $l$  gibt mit  $\Theta(l) = -\pi$ ; d. h. in diesem Fall gibt es einen Fixpunkt der Abbildung  $F$  (siehe Anhang C). Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes folgt, daß ein Fixpunkt existiert, sobald das Minimum der Ablenkfunktion kleiner oder gleich  $-\pi$  ist. Daraus folgt insbesondere, daß die invariante Menge nicht leer ist.

Unter der Voraussetzung  $\Theta(l) > -\pi$  zeige ich nun, daß die invariante Menge  $\Lambda_G$  der Abbildung (3.18) leer ist, woraus dann wegen (3.21)  $\Lambda = \emptyset$  folgt. Da  $G$  invariant ist unter der Transformation<sup>1</sup>

$$(x, y) \mapsto (-x, -y) , \quad (5.3)$$

genügt es nachzuweisen, daß jeder Punkt in der Menge

$$Q_0 = \{(x, y) \in Q \mid y \geq -x\} \quad (5.4)$$

unter einer Iterierten von  $G$  das Quadrat  $Q$  verläßt.

Der Nachweis dieser Aussage erfolgt indirekt. Sei also  $Q_0 \cap \Lambda_G \neq \emptyset$ .  $Q_0$  wird dann wie folgt in zwei Teilmengen zerlegt:

$$Q_1 = \{(x, y) \in Q_0 \mid y \geq 0, y \geq x\} \quad (5.5)$$

$$Q_2 = \{(x, y) \in Q_0 \mid x \geq 0, y \leq x\} \quad (5.6)$$

Es wird nun gezeigt, daß sowohl  $Q_1 \cap \Lambda_G$  als auch  $Q_2 \cap \Lambda_G$  leer ist. Wegen  $Q_0 \cap \Lambda_G = (Q_1 \cap \Lambda_G) \cup (Q_2 \cap \Lambda_G)$  ist dann auch  $Q_0 \cap \Lambda_G$  leer, was einen Widerspruch zur Annahme bedeutet. Zuerst wird  $Q_1$  betrachtet. Es gilt:

1.

$$G(Q_1 \cap \Lambda_G) \subset Q_1 \cap \Lambda_G . \quad (5.7)$$

2. Es gibt ein  $\varepsilon > 0$ , so daß für alle  $(x, y) \in Q_1 \cap \Lambda_G$  gilt:

$$y' > y + \varepsilon . \quad (5.8)$$

Man beachte, daß diese beiden Punkte die Gleichung  $Q_1 \cap \Lambda_G = \emptyset$  implizieren. Ist nämlich  $(x, y) \in Q_1 \cap \Lambda_G$ , so liegen alle Bildpunkte von  $(x, y)$  nach (5.7) ebenfalls in  $Q_1 \cap \Lambda_G$ , und wegen (5.8) gibt es dann ein  $n > 0$ , so daß  $y + n\varepsilon > 1$  ist. Daraus folgt, daß die  $y$ -Komponente von  $G^n(x, y)$  größer als 1 ist und damit  $G^n(x, y) \notin Q$ . Das wäre ein Widerspruch zu  $(x, y) \in \Lambda_G$ .

Es bleiben also noch die Beziehungen (5.7) und (5.8) zu begründen, um zu zeigen, daß  $Q_1 \cap \Lambda_G$  leer ist. (5.7) folgt aus (5.8), (3.18) und (3.19). Wegen  $\Theta(0) = 0$  folgt aus (3.19), daß die Achse  $y = 0$  nicht zur invarianten Menge gehört. Aus diesem Grund genügt es, Punkte mit  $y > 0$  zu betrachten. Für diese ist  $y'$  nach (5.8) ebenfalls größer als 0, und mit (3.18) ist  $x' = y$ , woraus

---

<sup>1</sup>Diese Transformation entspricht der Transformation (1.14).

wiederum mit Hilfe von (5.8)  $y' > x'$  folgt. Damit ist dann  $(x', y') \in Q_1$ . Also ist noch (5.8) zu beweisen. Für einen Punkt  $(x, y)$  aus  $Q_1 \cap \Lambda_G$  ist  $x - y \leq 0$  und damit:

$$\arcsin\left(\frac{x-y}{2R_0}\right) \in [-\frac{\pi}{2}, 0]. \quad (5.9)$$

Da  $y \geq 0$  ist, ist  $\Theta(y) \leq 0$ . Mit der Voraussetzung gilt daher:

$$0 \geq \Theta(y) \geq \Theta_R > -\pi \quad , \quad (5.10)$$

wobei  $\Theta_R$  den Regenbogenwinkel bezeichnet. Nimmt man nun an, daß  $\Theta(y)$  in dem Intervall  $[-\pi/2, 0]$  liegt, so erfüllt der Punkt  $(x, y)$  wegen

$$\alpha'(x, y) = \arcsin\left(\frac{x-y}{2R_0}\right) - \pi - \Theta(y) \bmod 2\pi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \quad (5.11)$$

nicht die Bedingung (3.19) und gehört damit nicht zu  $\Lambda_G$ . Also ist  $\Theta(y)$  aus dem Intervall  $]\Theta_R, -\pi/2[$ . Deshalb liegen sowohl  $-\pi - \Theta(y)$  als auch  $\alpha'(x, y)$  in dem Intervall  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Die Sinusfunktion ist auf diesem Intervall monoton wachsend, daher folgt mit (5.9):

$$\sin \alpha' = \sin\left(\arcsin\left(\frac{x-y}{2R_0}\right) - \pi - \Theta(y)\right) \leq \sin(-\pi - \Theta(y)) \quad . \quad (5.12)$$

Da  $\Theta_R > -\pi$  ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $-2R_0 \sin \Theta_R > \varepsilon$ . Für die  $y$ -Koordinate des Bildpunktes von  $(x, y)$  erhält man dann mit (3.18):

$$\begin{aligned} y' &= y - 2R_0 \sin(\alpha') \\ &\geq y - 2R_0 \sin(-\pi - \Theta(y)) \\ &\geq y - 2R_0 \sin \Theta_R \\ &> y + \varepsilon \quad . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Damit ist bewiesen, daß  $Q_1 \cap \Lambda_G$  leer ist. Um zu zeigen, daß  $Q_2 \cap \Lambda_G$  ebenfalls leer ist, betrachtet man die Umkehrabbildung von  $G$ :

$$G^{-1} : \quad x' = x - 2R_0 \sin\left(\arcsin\left(\frac{y-x}{2R_0}\right) - \pi - \Theta(x)\right) \quad (5.14a)$$

$$y = x \quad . \quad (5.14b)$$

Man beachte, daß  $G^{-1}$  formal durch Vertauschung von  $x$  und  $y$  bzw.  $x'$  und  $y'$  aus  $G$  hervorgeht. Da die Definition von  $Q_2$  ebenfalls durch formale Vertauschung von  $x$  und  $y$  aus der Definition von  $Q_1$  hervorgeht, kann man nun mit der gleichen Argumentation wie oben zeigen:

1.

$$G^{-1}(Q_2 \cap \Lambda_G) \subset Q_2 \cap \Lambda_G, \quad (5.15)$$

2. Es gibt ein  $\varepsilon > 0$ , so daß für alle  $(x, y) \in Q_2 \cap \Lambda_G$  gilt:

$$x' > x + \varepsilon \quad . \quad (5.16)$$

Man muß dabei berücksichtigen, daß für das Argument der Sinusfunktion in (5.14a)

$$\arcsin\left(\frac{y-x}{2R_0}\right) - \pi - \Theta(x) = -\arcsin\left(\frac{x'-y'}{2R_0}\right) \quad (5.17)$$

gilt und der Ausdruck auf der rechten Seite nach der Diskussion im Abschnitt 3.3.1 im Intervall  $]-\pi/2, \pi/2[$  liegt.

Also sind sowohl  $Q_1 \cap \Lambda_G$  als auch  $Q_2 \cap \Lambda_G$  leere Mengen. Damit ist der Satz bewiesen.

Erhöht man die Zahl  $N$  der Mulden, so ist die invariante Menge genau dann nicht leer, wenn das Minimum der Ablenkfunktion kleiner als  $-2\pi/N$  ist. Der Beweis ist analog zum Beweis für das Zwei–Mulden–System zu führen. Da jedoch die Indizes beteiligter Potentiale  $v$  berücksichtigt werden müssen, ist die Notation wesentlich aufwendiger, weshalb ich auf eine Darstellung verzichte. Ich merke nur an, daß eine Ablenkung  $\Theta_R = -2\pi/N$  durch jede der  $N$  Mulden die Existenz eines Ringorbits impliziert.

## 5.2 Parameterabhängigkeit der invarianten Menge

In diesem Abschnitt wird am Beispiel des Zwei–Mulden–Systems die  $k$ – und  $R_0$ –Abhängigkeit der invarianten Menge diskutiert. Es wird begründet, warum bei einem beliebig gewählten  $R_0$  die Variation von  $k$  ausreicht, um alle topologischen Aspekte des Systems zu erfassen.

### 5.2.1 Energieabhängigkeit ( $k$ –Abhängigkeit)

Für  $k < 1.0$  gibt es nach Satz 7 keine lokalisierten Orbits. Abbildung 5.1 zeigt  $\mathcal{R}_0$  und  $\mathcal{R}_1$  für  $k = 1.005$ . In zwei Sattel–Zentrum–Bifurkationen sind bei  $k = 1.0$  in der oberen und unteren Phasenraumhälfte, d. h. in den Phasenraumbereichen mit  $l > 0$  bzw.  $l < 0$ , jeweils ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt entstanden. Die Betrachtung der Eigenwerte von  $DF$  in diesen Fixpunkten zeigt, daß diejenigen mit dem kleineren Drehimpulsbetrag stabil sind, während die anderen instabil sind. Die Fixpunkte gleichen Stabilitäts-  
typs sind über die Zeitumkehr miteinander verbunden und können mittels (1.14) ineinander transformiert werden. Die entstandenen Fixpunkte entsprechen den Ringorbits (siehe Abbildung 4.7(a)). Erhöht man  $k$ , so werden die inneren Ringorbits, d. h. diejenigen mit dem kleineren Drehimpulsbetrag, in einer Periodenverdopplung bei  $k = 1.020 \dots$  instabil. Vergrößert man  $k$  weiter, so folgt eine komplette Periodenverdopplungskaskade. Da das System, wie in Kapitel 3 gezeigt, für  $k = 1.08$  hyperbolisch ist, ist die Kaskade bei

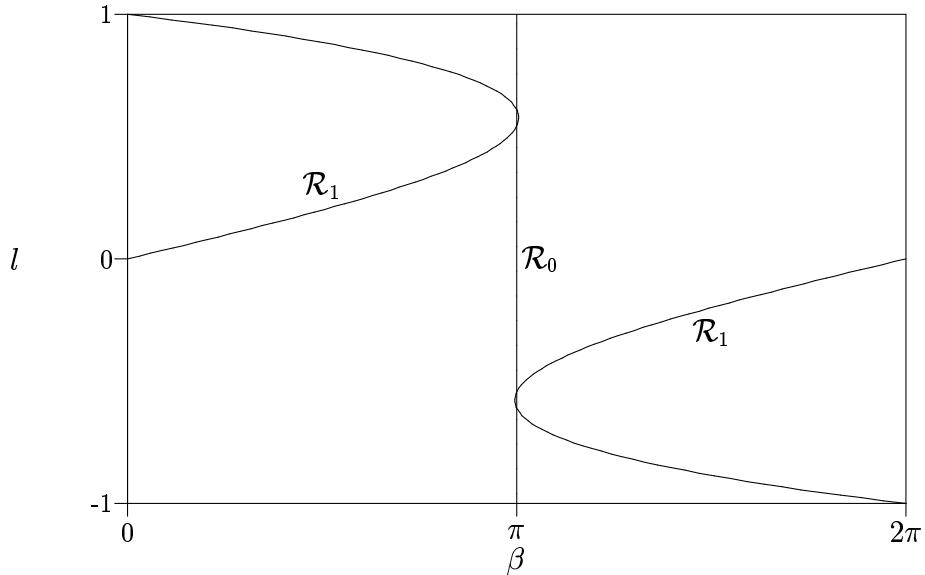


Abbildung 5.1: Die Fixpunktmengen  $\mathcal{R}_0$  und  $\mathcal{R}_1$  für das Zwei–Mulden–System mit  $k = 1.005$  und  $R_0 = 1.1$ .

diesem Parameterwert abgeschlossen. Der kritische Wert der Periodenverdopplungen ist allerdings kleiner. Aufgrund der Strukturstabilität liegt der Wert  $k = 1.08$  im Inneren eines offenen  $k$ –Intervalls, das dadurch definiert ist, daß die zugehörigen invarianten Mengen hyperbolisch sind und durch ein binäres Alphabet beschrieben werden können.

Für  $k = 1.1415$  sind die numerisch bestimmten stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten der invarianten Menge in Abbildung 5.2(a) dargestellt. Die Abbildung macht deutlich, daß es einen Parameterwert gibt, für den sich der Abschluß der stabilen Mannigfaltigkeit des einen Teiles der beiden zuvor dynamisch nicht verbundenen Teile von  $\Lambda$  und der Abschluß der instabilen Mannigfaltigkeit des anderen Teiles berühren. Für diesen Parameterwert ist eine dynamische Verbindung hergestellt. Während für kleinere  $k$ –Werte das Vorzeichen von  $l$  unter der Dynamik erhalten blieb, ist jetzt ein Vorzeichenwechsel möglich. Dieses Phänomen, die dynamische Kopplung zuvor dynamisch unabhängiger System, wird auch als *Krise* bezeichnet [LaiGre94]. Man beachte, daß nach der dynamischen Verbindung überabzählbar viele neue Orbits entstehen, nämlich solche, deren Drehimpuls  $l$  unter der Dynamik das Vorzeichen wechselt. Erhöht man  $k$  weiter, so entstehen in heteroklinen Tangentenbifurkationen mehr und mehr lokalisierte Orbits. Wie Abbildung 5.2(b) zeigt, ist dieses Szenario für  $k = 1.42$  beendet. An der Topologie der invarianten Menge ändert sich bei Erhöhung von  $k$  bis  $k = 2$  nichts mehr. Insbesondere bedeutet dies, daß man  $k = 1.9$  als Vertreter dieses Bereiches ansehen kann. Entsprechend ist das System nun topologisch konjugiert zu einer Shift–Abbildung auf einem Folgenraum mit vier Symbolen.

In dem Parameterbereich  $1.1415 < k < 1.42$  gibt es Parameterintervalle,

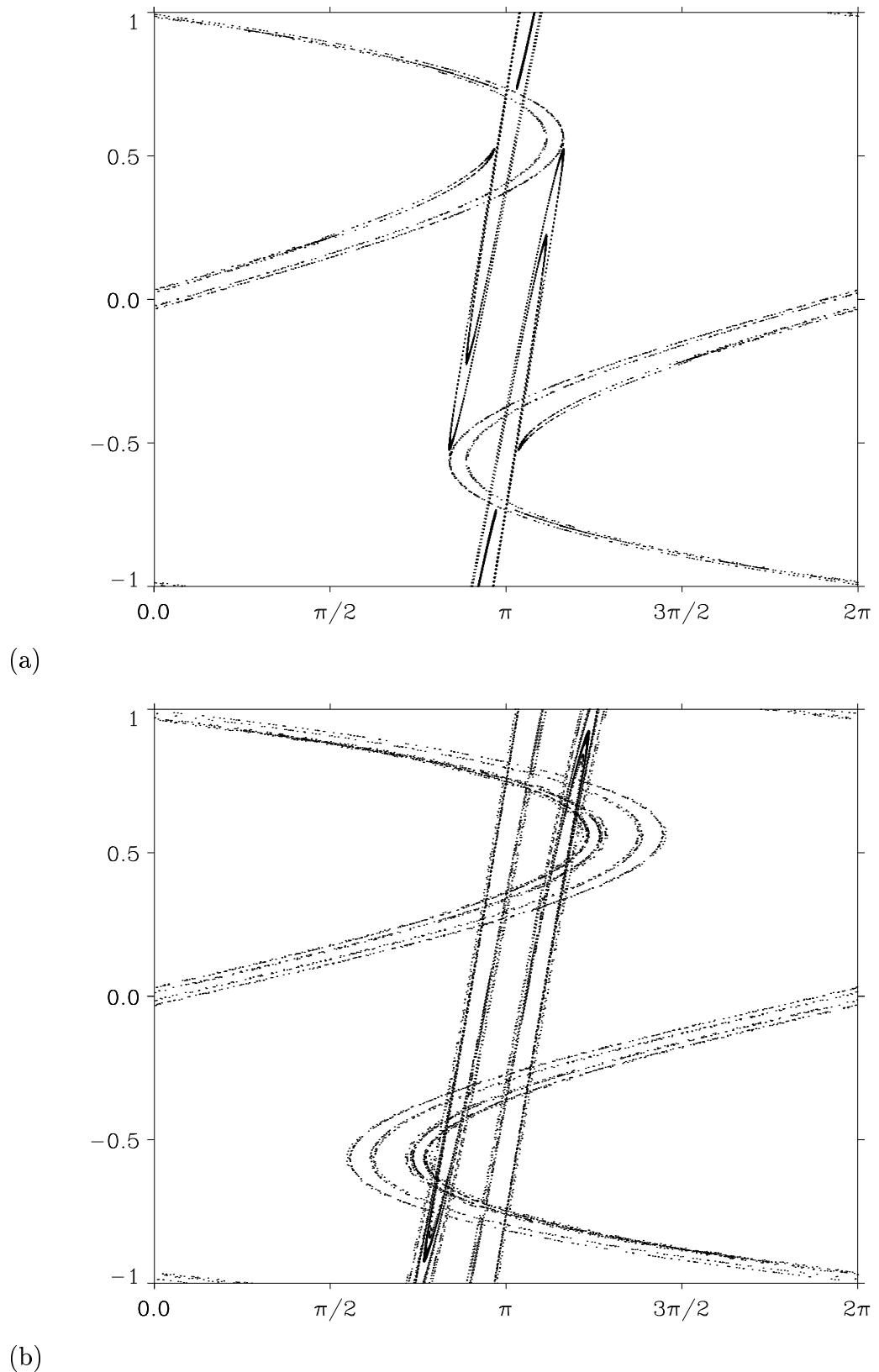


Abbildung 5.2: Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten der invarianten Menge für: (a)  $k = 1.1415$ , (b)  $k = 1.42$ .

in denen das System hyperbolisch ist. Dies folgt aus einer geometrischen Interpretation der Bedingung (3.52) und der Diskussion in Kapitel 4: Gibt es ein  $n$ , so daß die "Falten" von  $\Lambda_+^n$  genügend weit in die Lücken zwischen den Streifen von  $\Lambda_-^n$  fallen, so ist das System hyperbolisch und läßt sich mit Hilfe einer Symbolischen Dynamik beschreiben, der ein endliches Alphabet und eine endliche Grammatik zugrunde liegen. Je größer  $n$  gewählt werden muß, desto komplexer werden dabei die zu berücksichtigenden Regeln. Ein Prinzip zur Herleitung dieser Regeln ist anhand des (einfachsten) Beispiels  $k = 1.26$  in Abschnitt 4.5 vorgestellt worden.

Zum Schluß dieses Abschnittes gebe ich den minimalen  $k$ -Wert an, für den ein 8-förmiger Orbit existiert. Ein solcher Orbit ist definiert durch die Bedingung

$$F(\beta, l) = (-\beta, -l) \quad . \quad (5.18)$$

Aus (1.10) und (1.21) folgt:

$$k(l) = -\frac{\arccos\left(-\frac{l}{R_0}\right)}{3\sqrt{3}\pi(l^3 - l)} \quad . \quad (5.19)$$

Für  $R_0 = 1.1$  ergibt sich nach Einsetzen der numerisch bestimmten Nullstelle  $l = 0.5197\dots$  von  $dk/dl$  der Wert  $k = 1.3325\dots$ . Betrachtet man die Stabilität der 8-förmigen Orbits nach ihrer Entstehung, so sind im Gegensatz zu den Ringorbits die äußeren stabil und die inneren instabil.

### 5.2.2 Abhängigkeit von $R_0$

Je größer der Abstand zwischen den Potentialmulden ist, desto kleiner ist der Winkelbereich  $\beta$ , der zu einer gebundenen Bewegung führen kann. Ein Anwachsen von  $R_0$  impliziert daher ein Schmälerwerden der Streifen in  $\Lambda_-^n$  und damit auch der Streifen in  $\Lambda_+^n$ . Dabei ist es möglich, daß bei vorgegebenen  $k$  neue, lokalisierte Orbits entstehen. Aus (5.19) folgt z. B., daß das minimale  $k$  für die Existenz eines 8-förmigen Orbits eine monoton fallende Funktion von  $R_0$  ist. Es ist jedoch zu beachten, daß bei vorgegebenem  $k$  durch Variation von  $R_0$  nicht alle Möglichkeiten im Hinblick auf die Topologie von Orbits realisiert werden können. Wie in Abschnitt 5.1 gezeigt, ist z. B. die Existenz einer nichttrivialen invarianten Menge unabhängig von  $R_0$ . Als weiteres Beispiel sei erwähnt, daß für  $k < 2$  unabhängig vom Wert von  $R_0$  im Inneren einer Mulde kein vollständiger Umlauf um das Zentrum möglich ist. Im Gegensatz dazu lassen sich durch Variation von  $k$  bei beliebigem, aber festem  $R_0$  alle Orbittypen realisieren. Da die Variation von  $R_0$  somit aus topologischer Sicht keine Strukturen liefert, die nicht auch durch Variation von  $k$  erzielt werden können, verzichte ich auf eine detailliertere quantitative Analyse der  $R_0$ -Abhängigkeit.

## 5.3 Erklärung der Streuergebnisse

Mit der Kenntnis der lokalisierten Bewegung ist nun eine Erklärung der Streudaten möglich. Die Rückführung von Streuergebnissen auf Eigenschaften der lokalisierten Bewegung geht auf JUNG und SCHOLZ zurück [JunSch87a, JunSch87b]. Sie erklären die Singularitäten der Streuabbildung analog zur Orbiting–Streuung mit Hilfe von Einfangprozessen. Die stabilen Mannigfaltigkeiten der lokalisierten Orbits einer chaotischen invarianten Menge reichen über den Hamiltonschen Fluß bis in den asymptotischen Bereich. Startet ein Teilchen mit einer Anfangsbedingung auf der stabilen Mannigfaltigkeit eines lokalisierten Orbits, so wird es vom Target eingefangen, indem sich seine Trajektorie asymptotisch der des lokalisierten Orbits annähert.

Die konkrete Erklärung der Streudaten aus Kapitel 2 erhält man wie folgt. In einem Streuversuch wird ein Ensemble von Streutrajektorien durch eine eindimensionale Mannigfaltigkeit von Anfangsbedingungen im asymptotischen Bereich festgelegt. Über den Hamiltonschen Fluß wird diese Mannigfaltigkeit in den Wechselwirkungsbereich transportiert. Dadurch erhält man eine eindimensionale Mannigfaltigkeit von Anfangsbedingungen im Phasenraumzylinder  $\Gamma$ . Eine komplexe Streuung, d. h. eine Verzögerungszeit  $n \geq 1$ , erhält man, falls diese Mannigfaltigkeit  $\Lambda_-^1$  schneidet. Falls für ein  $n_0 \geq 1$  die vertikalen Streifen in  $\Lambda_-^{n_0}$  transversal geschnitten werden, so werden auch alle  $\Lambda_-^n$ -Streifen für alle  $n > n_0$  geschnitten, da  $\Lambda_-^{n+1} \subset \Lambda_-^n$ . Dadurch spiegelt sich die hierarchische Organisation der  $\Lambda_-^n$  bzgl.  $n$  in der Verzögerungszeit wider. Für  $k = 1.08$  und  $k = 1.9$  erklärt dies die zwei– bzw. viergliedrige Struktur, da in jedem  $\Lambda_-^n$ -Streifen zwei bzw. vier  $\Lambda_-^{n+1}$ -Streifen enthalten sind. Ebenso lassen sich für das Orbiting–Modell die unendlich vielen Intervalle vom Niveau  $n + 1$  in einem Intervall vom Niveau  $n$  erklären. Für  $k = 1.26$  taucht allerdings ein Problem auf. Nach der in Kapitel 4 beschriebenen Symbolischen Dynamik können auf ein Symbol = vier verschiedene und auf ein Symbol  $\neq$  zwei verschiedene Symbole folgen. Das bedeutet, daß in einem Intervall vom Niveau  $n$  vier oder zwei Intervalle vom Niveau  $n + 1$  enthalten sein können, aber auf keinen Fall drei wie in den Abbildungen 2.4 und 2.5. Die Auflösung dieses vermeintlichen Widerspruchs liegt in der Festlegung des Ordnungsparameters  $n$ . Die Anzahl der Besuche einer Mulde ist zur Unterscheidung qualitativ verschiedener Streutrajektorien, d. h. Streutrajektorien mit unterschiedlichen endlichen Symbolfolgen, nicht geeignet. Dazu bedarf es eines genaueren Kriteriums. Man muß in Fällen, in denen der Symbolbaum beschnitten ist, i. a. auf die exakten Definitionen für die Symbolfolgen zurückgreifen, um Trajektorien unterscheiden zu können. Abbildung 5.3 verdeutlicht die Problematik exemplarisch anhand von Bahnkurven im Ortsraum. In 5.3(a) sind Streuorbits für  $k = 1.9$  dargestellt, die zu Intervallen mit den endlichen Symbolfolgen  $([+]>)[->][->]$ ,  $([+]>)[-<]$  und  $([+]>)[-<][-<]$  gehören. Die Orbits zu den Folgen  $([+]>)[->][->]$  und  $([+]>)[-<][-<]$  entsprechen jeweils einer Grenze der ihnen zuzuordnenden  $L_{in}$ -Intervalle. Man

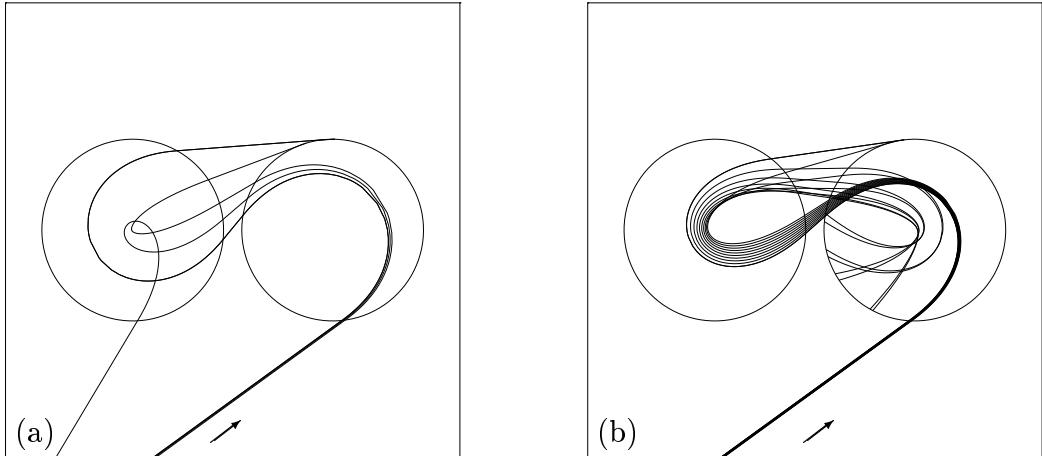


Abbildung 5.3: Streuorbits im Ortsraum; der Pfeil markiert die In–Richtung.  
(a)  $k = 1.9$ , (b)  $k = 1.26$ .

erkennt, daß zwischen den Anfangsbedingungen zu diesen Orbits, die drei Mulden besuchen, eine Anfangsbedingung existiert, dessen Orbit nur zwei Mulden besucht. Damit ist  $n$  als Unterscheidungsmerkmal qualitativ unterschiedlicher Orbits geeignet. Im Gegensatz dazu gibt es für  $k = 1.26$  zwischen den Intervallen zu  $([+ >][- >][- >])$  und  $([+ >][- <][- <])$  keine Anfangsbedingung eines nur zwei Mulden besuchenden Orbits. Die Abbildung 5.3(b) zeigt 8 Streutrajektorien mit Anfangsbedingungen, die gleichmäßig zwischen den Anfangsbedingungen der entsprechenden Grenzorbits verteilt sind. Man erkennt, daß alle Orbits mindestens drei Mulden besuchen. Aus diesem Grund ist  $n$  für eine Unterscheidung nicht geeignet. Dies ist ein Beispiel dafür, welche Bedeutung der Wahl der Streuvariablen zukommt und daß diese Wahl bei der Interpretation von Streudaten im Hinblick auf eine Symbolische Dynamik berücksichtigt werden muß.

Das algebraische Entweichverhalten für  $k = 1.005$  (Abbildung 2.10) ist auf den zu einem inneren Ringorbit gehörenden KAM–Bereich zurückzuführen. Trajektorien, die in die Nähe eines Torus gelangen, bleiben dort für lange Zeit “kleben” (engl. “stickiness of tori” [GraKan85]). Für den Wechsel im Exponenten  $\alpha$  im Falle  $k = 1.009916$  (Abbildung 2.12) ist eine komplexe Torusstruktur im Phasenraum verantwortlich [Lai+92b, Lai+92c]. Abbildung 5.4(a) zeigt einen Ausschnitt des Phasenraumzyinders um den stabilen Fixpunkt. Dargestellt ist das Phasenporträt einer Entweichtrajektorie. Bei genauerem Hinsehen erkennt man im oberen Teil der Abbildung zwischen den beiden “Ausbuchtungen” zwei Bereiche, in denen die Trajektorienpunkte unterschiedlich dicht liegen. Die Grenze zwischen diesen Bereichen wird durch die “Trümmer” eines Torus gebildet, der im Vergleich zu kleineren  $k$ –Werten gerade aufgebrochen ist<sup>2</sup>. Es ist bekannt, daß Cantori, die direkt nach dem

---

<sup>2</sup>Dieses Aufbrechen in Abhängigkeit von  $k$  wird auch als *Phasenraummetamorphose* bezeichnet.

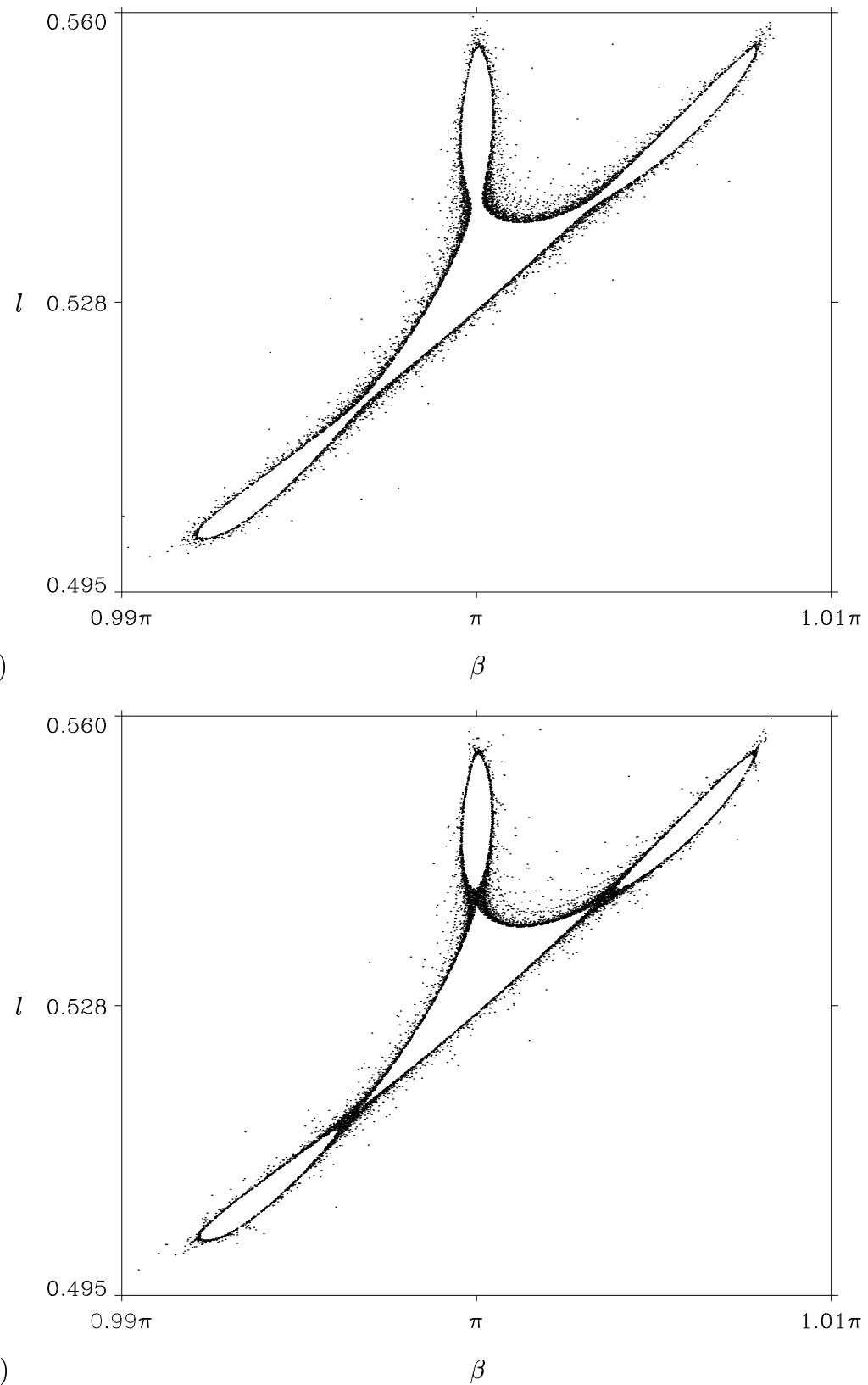


Abbildung 5.4: Phasenporträts jeweils einer Trajektorie mit den Anfangsbedingungen (a)  $(\beta, l) = (0.9998\pi, 0.538)$ , (b)  $(\beta, l) = (0.99982\pi, 0.538)$ .

Aufbrechen eines KAM–Torus entstehen, teildurchlässige Phasenraumbarrieren darstellen [Mac+84]. Streutrajektorien, die in das Innere eines Cantorus eintreten, zeigen daher ein anderes Entweichverhalten als Trajektorien, die außerhalb bleiben. Eine Struktur von ineinander geschachtelten Phasenraumbarrieren führt dann zu einer entsprechenden Zahl von Entweichexponenten  $\alpha$ . Konkret entspricht der weniger dichte Bereich in Abbildung 5.4(a) den Entweichexponenten, der sich aus Abbildung 2.12 für  $n > 1000$  ergibt. Der am dichtesten gefüllte Bereich wird typischerweise nur von Trajektorien mit einer Verzögerungszeit  $n > 10^4$  erreicht. Abbildung 5.4(b) zeigt, daß es einen weiteren, bezogen auf den stabilen Fixpunkt weiter innen liegenden Bereich gibt, der zu noch größeren Verzögerungszeiten führt, falls eine Streutrajektorie in ihn vordringt.

Es bleibt festzuhalten, daß die Angabe eines Exponenten  $\alpha$  in einem Hamilton–System mit weichem Chaos nur mit der gleichzeitigen Angabe eines Zeitintervalls sinnvoll zu sein scheint. Ob es einen asymptotischen Exponenten gibt, ist eine offene Frage. In Kapitel 7 wird gezeigt, daß im Gegensatz dazu in hyperbolischen Systemen die Entweichrate eine asymptotische Größe darstellt, die schon bei Betrachtung kurzer Zeitintervalle sehr genau bestimmt werden kann.

# Kapitel 6

## Charakterisierung dynamischer Systeme

Im Rahmen der betrachteten Systemklasse sind die bisherigen Ergebnisse unabhängig von der Wahl des speziellen Muldenpotentials gültig. Im Zwei-Mulden-System gibt es z. B. immer einen Energiebereich, in dem die Dynamik topologisch konjugiert zu einer Shift-Abbildung auf einem Folgenraum mit 4 Symbolen ist. Daher sind Kriterien wünschenswert, die eine Unterscheidung von invarianten Mengen ermöglichen, die durch eine äquivalente Symbolische Dynamik beschrieben werden können.

Die in diesem Kapitel beschriebenen Konzepte zur Charakterisierung dynamischer Systeme sind auf eine Vielzahl verschiedener physikalischer Systeme und Fragestellungen anwendbar. Ich verweise auf [Tél90] und die dort aufgeführten Referenzen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränke ich mich — falls nicht ausdrücklich anders erwähnt — auf das Zwei-Mulden-System und stelle die zu definierenden Begriffe anhand dieses Beispiels vor.

Das Kapitel ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt 6.1 wird als erstes Kriterium zur Klassifizierung eines Systems die *fraktale Dimension* diskutiert. Da es unterschiedliche Definitionen für diesen Begriff gibt, stelle ich in Abschnitt 6.1 zunächst die beiden aus meiner Sicht wichtigsten vor.

Die Angabe der fraktalen Dimension ist allerdings i. a. nicht ausreichend, um ein dynamisches System vollständig zu charakterisieren. Es gibt aus physikalischer Sicht unterschiedliche Systeme, deren fraktale Dimensionen übereinstimmen. Es sind daher weitere charakteristische Größen wünschenswert. Für deren Definition spielt das *natürliche Maß*, das in Abschnitt 6.2 besprochen wird, eine entscheidende Rolle. Im Anschluß daran wird im Abschnitt 6.3 die Definition eines Spektrums von Singularitäten motiviert. Es wird ein Konzept erörtert, wie sich mit Hilfe eines Maßes bestimmte Teilmengen der invarianten Menge und deren fraktale Dimensionen erschließen lassen. Die folgenden Abschnitte dienen der weiteren Ausführung der in Abschnitt 6.3

vorgestellten Idee. Zunächst werden in Abschnitt 6.4 *Informationsmaße* diskutiert, mit deren Hilfe dann eine Verallgemeinerung des in Abschnitt 6.1 vorgestellten Dimensionsbegriffes möglich ist. Der Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Dimensionen und dem Spektrum von Singularitäten wird dargestellt.

Die Erörterungen der Abschnitte 6.3 und 6.4 basieren auf gewissen Grundannahmen, die in Sonderfällen nicht erfüllt sind. Der vorläufige Verzicht auf eine allgemeingültigen Formulierung bietet den Vorteil, daß die Ideen der einzelnen Begriffe leichter diskutiert werden können und nicht durch technische Details in den Hintergrund gedrängt werden. In Abschnitt 6.5 werden die *verallgemeinerten Dimensionen*  $D_q$  und das *Singularitäten-Spektrum*  $f(\alpha)$  dann auf eine aus mathematische Sicht zufriedenstellende Weise definiert.

Während die verallgemeinerten Dimensionen räumliche Strukturen charakterisieren, sind die in Abschnitt 6.6 beschriebenen *verallgemeinerten Entropien*  $K_q$  Größen zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des dynamischen Systems. In Abschnitt 6.7 werden abschließend *verallgemeinerte Lyapunov-Exponenten*  $\lambda_q$  besprochen, die es erlauben, Aussagen über lokale Expansionsraten zu machen.

## 6.1 Die fraktale Dimension

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Größen *Hausdorff-Dimension* und *Kapazität* charakterisieren die Geometrie der invarianten Menge. Sie stellen jeweils eine Verallgemeinerung des üblichen Dimensionsbegriffes dar [Fal90].

### 6.1.1 Die Hausdorff-Dimension

Die Hausdorff-Dimension oder auch Hausdorff-Besicowitch-Dimension lässt sich mit Hilfe des sogenannten Hausdorff-Maßes definieren. Diesem Maß wende ich mich zunächst zu. Sei  $M$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Eine  $\delta$ -Überdeckung  $\{U_i\}$  von  $M$  ist eine Überdeckung, für die für alle  $i$  aus einer abzählbaren Indexmenge gilt:

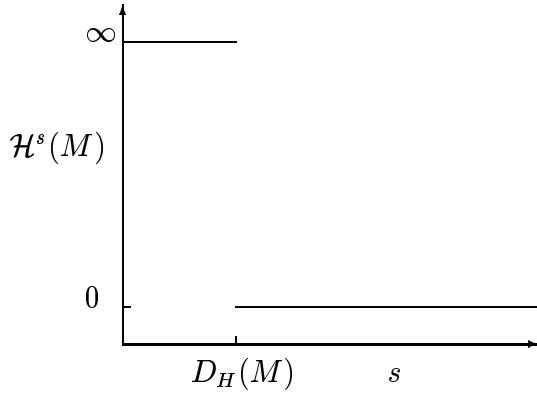
$$|U_i| = \sup \{|x - y| : x, y \in U_i\} < \delta . \quad (6.1)$$

Mit

$$\mathcal{H}_\delta^s(M) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ ist } \delta\text{-Überdeckung von } M \right\} \quad (6.2)$$

ist das  $s$ -dimensionale Hausdorff-Maß dann gegeben durch:

$$\mathcal{H}^s(M) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(M) . \quad (6.3)$$

Abbildung 6.1: Der Graph von  $\mathcal{H}^s(M)$ .

Man kann zeigen, daß  $\mathcal{H}^s$  alle Eigenschaften eines Maßes erfüllt [Fal90]. Betrachtet man ein  $\delta < 1$ , so folgt aus der Definition (6.2), daß  $\mathcal{H}_\delta^s(M)$  als Funktion von  $s$  monoton fallend ist. Sei nun  $t > s$  und  $\{U_i\}$  eine  $\delta$ -Überdeckung von  $M$ ; dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s . \quad (6.4)$$

Über die Betrachtung des Infimums erhält man:

$$\mathcal{H}_\delta^t(M) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(M) . \quad (6.5)$$

Vollzieht man nun den Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0$ , so folgt aus  $\mathcal{H}^s(M) < \infty$  das Verschwinden von  $\mathcal{H}^t(M)$ . Der Graph von  $\mathcal{H}^s(M)$  hat somit eine Gestalt wie in Abbildung 6.1 skizziert. Es gibt einen kritischen Wert von  $s$ , an dem  $\mathcal{H}^s(M)$  von 0 auf  $\infty$  „springt“. Dieser Wert wird als *Hausdorff-Dimension*  $D_H(M)$  von  $M$  bezeichnet. Formal gilt:

$$D_H(M) = \inf \{s : \mathcal{H}^s(M) = 0\} . \quad (6.6)$$

An der Stelle  $s = D_H(M)$  nimmt  $\mathcal{H}^s(M)$  abhängig von  $M$  einen Wert zwischen 0 und  $\infty$  an.

Eine Menge, deren Hausdorff-Dimension größer als ihre topologische Dimension ist, wird auch als *fraktale Menge* oder als *Fraktal* bezeichnet<sup>1</sup>.

Die Hausdorff-Dimension ist eine Verallgemeinerung des üblichen Dimensionsbegriffes. Man kann zeigen, daß das  $n$ -dimensionale Hausdorff-Maß einer

<sup>1</sup>Ich gehe hier nicht weiter auf die mathematische Definition der topologischen Dimension ein, sondern gebe nur an, daß sie immer ganzzahlig ist und eine Menge in  $\mathbb{R}^n$  genau dann die topologische Dimension  $n$  hat, wenn sie eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  enthält [Fal90]. Die topologische Dimension gibt also an, aus welchen „Bestandteilen“ die fraktale Menge zusammengesetzt ist (Punkte, Geraden etc.).

beschränkten offenen Menge in  $\mathbb{R}^n$  bis auf eine multiplikative Konstante dem  $n$ -dimensionalen Lebesgue-Maß entspricht, d. h. dem üblichen  $n$ -dimensionalen Volumen. Für eine solche Menge ist das  $n$ -dimensionale Hausdorff-Maß damit endlich, und die Hausdorff-Dimension ist nach (6.6) entsprechend  $n$ .<sup>2</sup>

Ein wesentlicher Aspekt ist das Transformationsverhalten. Die Hausdorff-Dimension ist invariant unter bi-Lipschitz-Transformationen, d. h. Transformationen  $T$ , für die gilt:

$$c_1|x - y| \leq |T(x) - T(y)| \leq c_2|x - y| \quad , \quad (6.7)$$

mit  $0 < c_1 < c_2 < \infty$ . Dies bedeutet, daß zwei Mengen mit unterschiedlicher Hausdorff-Dimension nicht durch eine bi-Lipschitz-Transformation ineinander überführt werden können. Aus der Definition (6.7) folgt direkt, daß bi-Lipschitz-Transformationen stetig sind. Damit stellt die Hausdorff-Dimension ein Kriterium zur Unterscheidung von Mengen dar, die durch einen Homöomorphismus ineinander abgebildet werden können. Insbesondere ist die Hausdorff-Dimension ein Merkmal zur Unterscheidung topologisch konjugierter dynamischer Systeme.

Ein Beleg dafür, daß die Angabe der Hausdorff-Dimension zur vollständigen Klassifizierung nicht ausreicht, ist durch die folgende Eigenschaft gegeben. Aus der Definition (6.6) folgt direkt, daß für zwei Mengen  $M_1$  und  $M_2$  gilt:

$$D_H(M_1 \cup M_2) = \max \{D_H(M_1), D_H(M_2)\} . \quad (6.8)$$

Die Hausdorff-Dimension wird durch das Hinzufügen oder Wegnehmen von Mengen kleinerer Dimension nicht beeinflußt. Dies bedeutet insbesondere, daß die Hausdorff-Dimension keine Aussagen darüber macht, ob eine fraktale Menge als Vereinigung von verschiedenen fraktalen Mengen unterschiedlicher Dimension aufgefaßt werden kann.

In der Regel ist die Berechnung der Hausdorff-Dimension schwierig. Aus diesem Grund wird häufig ein anderer Dimensionsbegriff verwendet, der eine vergleichsweise einfache numerische Bestimmung zuläßt, jedoch aus mathematischer Sicht mit einem Defizit behaftet ist.

### 6.1.2 Die Kapazität

Die Kapazität wird oftmals auch als ‘‘Box-Counting-Dimension’’ bezeichnet. Sie ist nur für beschränkte Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  definiert. Grundlage dieses Begriffes sind ‘‘Messungen auf einer Skala  $\epsilon$ ’’. Für jedes  $\epsilon > 0$  vermißt man eine Menge in einer Weise, die Strukturen von einer Größe kleiner als  $\epsilon$  vernachläßigt. Die Dimension erhält man dann durch den Übergang  $\epsilon \rightarrow 0$ . Konkret überdeckt man zur Dimensionsbestimmung eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$

---

<sup>2</sup>Dieses Ergebnis läßt sich auf beliebige offenen Mengen in  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern [Fal90].

mit einem Gitter aus  $n$ -dimensionalen Würfeln der Kantenlänge  $\epsilon$ . Die Anzahl der Würfel, die zur Überdeckung von  $M$  benötigt wird, bezeichnet man mit  $N_\epsilon(M)$ . Gilt nun

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon(M)}{-\ln \epsilon} = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon(M)}{-\ln \epsilon} , \quad (6.9)$$

so ist die *Kapazität* von  $M$  definiert durch:

$$D_K(M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon(M)}{-\ln \epsilon} . \quad (6.10)$$

Umgeformt bedeutet dies:

$$N_\epsilon(M) \sim \epsilon^{-D_K(M)} . \quad (6.11)$$

In der Praxis wird die Gleichung (6.9) oftmals nicht verifiziert, sondern lediglich der Exponent aus (6.11) für einen möglichst großen Bereich von  $\ln \epsilon$  bestimmt. Da zur Bestimmung der Kapazität weder Überdeckungen aus unendlich vielen Mengen variabler Größe berücksichtigt werden müssen, noch die Bildung eines Infimums vorzunehmen ist, ist sie im Vergleich zur Hausdorff-Dimension wesentlich einfacher zu bestimmen.

Kann man voraussetzen, daß das Infimum auf der rechten Seite von (6.2) für ein Gitter aus Würfeln der Kantenlänge  $\epsilon = \delta$  angenommen wird und daß  $\mathcal{H}^s(M)$  für  $s = D_H(M)$  endlich ist, so folgt für kleine  $\epsilon$ :  $N(\epsilon)\epsilon^{D_H(M)} \sim 1$ . Also sind Hausdorff-Dimension und Kapazität in diesem Fall gleich.

Der Begriff Kapazität besitzt jedoch ein Defizit. In der Definition geht man implizit von endlichen Überdeckungen mit Würfeln der Kantenlänge  $\epsilon$  aus. Da man ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit abgeschlossenen Würfeln überdecken kann, folgt:

$$D_K(M) = D_K(\overline{M}) , \quad (6.12)$$

wobei  $\overline{M}$  den Abschluß von  $M$  symbolisiert. Diese Eigenschaft der Kapazität impliziert einen problematischen Effekt. So folgt z. B. aus (6.12), daß die rationalen Zahlen im Einheitsintervall die Kapazität 1 haben. Dies macht den wesentlichen Nachteil der Kapazität im Vergleich zur Hausdorff-Dimension deutlich. Die Kapazität einer “kleinen“ abzählbaren Menge kann gleich der Kapazität einer offenen Menge sein. Im Gegensatz zur Kapazität ist die Hausdorff-Dimension einer abzählbaren Menge wie erwünscht immer 0.

Da jedoch in vielen Fällen Hausdorff-Dimension und Kapazität übereinstimmen — letztere aber wie oben beschrieben sehr viel leichter zu bestimmen ist — wird in vielen Fällen die Kapazität als Grundlage der Dimensionsbestimmung herangezogen.

## 6.2 Das natürliche Maß

Die fraktale Dimension beschreibt ausschließlich eine geometrische Eigenschaft. Die invariante Menge eines dynamischen Systems ist aus physikalischer Sicht jedoch nicht nur ein geometrisches Objekt. Auf der invarianten Menge „passiert“ etwas. Auf einer komplizierten Menge findet eine komplizierte Dynamik statt. Die Definition von Größen, die sowohl die Menge als auch die Dynamik auf ihr charakterisieren, stehen im Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen. Ausgangspunkt sind Konzepte aus der Maßtheorie. Man untersucht dabei die invariante Menge mit Hilfe eines unter der Dynamik invarianten Maßes, d. h. einer stationären Verteilung. Eine Verbindung zwischen Maß und Längenskalen liefert dann sowohl detaillierte Information über daß Maß als auch über die Geometrie der invarianten Menge.

Das im Zusammenhang mit dieser Arbeit bedeutendste invariante Maß ist das sogenannte *natürliche Maß*  $\mu$ . Es beschreibt die Häufigkeit, mit der Trajektorien eines Ensembles die verschiedenen Gebiete in der invarianten Menge aufsuchen. Eine Möglichkeit, das natürliche Maß zu erhalten, stelle ich nun kurz vor. Das Verfahren ist in [KanGra85] dargestellt.

Man überdecke die invariante Menge  $\Lambda$  durch ein Gitter aus Würfeln mit der Kantenlänge  $\epsilon \ll 1$ . Die Anzahl der Würfel, die dazu benötigt wird, bezeichne ich mit  $N(\epsilon)$ . Jeder Würfel lässt sich somit durch eine natürliche Zahl  $i \in \{1, \dots, N(\epsilon)\}$  indizieren. Man betrachtet nun ein Ensemble von Trajektorien, die sich für lange Zeit in der Nähe der invarianten Menge aufhalten. Ist  $N$  die Gesamtzahl der Trajektorienpunkte des Ensembles und  $N_i \gg 1$  die Anzahl der Punkte im Würfel  $i$ , so erhält man eine Näherung des natürlichen Maßes  $\mu$  durch:

$$p_i = \frac{N_i}{N} , \quad (6.13)$$

d. h. es gilt:

$$p_i = \int_{\text{Würfel } i} d\mu(x) . \quad (6.14)$$

## 6.3 Zur Definition eines Singularitäten–Spektrums

Zur Motivation beschreibe ich zunächst die Situation im Phasenraum, ohne dabei auf mathematische Schwierigkeiten einzugehen. Betrachtet man das natürliche Maß auf seinem Träger  $\Lambda$ , so ergibt sich u. U. eine äußerst komplexe Struktur. Geht man davon aus, daß  $\Lambda$  hyperbolisch und damit eine Cantor–Menge ist, so setzt sich die natürliche Verteilung anschaulich aus „diskreten,  $\delta$ –Peak–artigen Singularitäten“ zusammen. Gegen jede dieser Singularitäten häufen sich andere. Es stellt sich die Frage, wie ein solch kompliziertes Objekt geeignet charakterisiert werden kann.

Die grundsätzliche Strategie zur Beantwortung dieser Frage ist aus der Thermodynamik bekannt. Aus physikalischer Sicht ist es wenig sinnvoll und aus praktischer Sicht i. a. nicht möglich, die exakte Zeitentwicklung eines Systems mit sehr vielen Freiheitsgraden zu bestimmen. Man betrachtet im Gegensatz dazu geeignete Mittelwerte, die alle physikalisch relevante Information enthalten. Ähnlich ist man hier nicht an der exakten Gestalt des Maßes, sondern nur an bestimmten Mittelwerten interessiert.

Zur Vereinfachung der Darstellung verwende ich die Notation des Abschnitts 6.2. Wesentlich ist die Einführung einer lokalen Größe  $\alpha_i(\epsilon)$  für jeden Index  $i$  [Hal+86]:

$$\alpha_i(\epsilon) = \frac{\ln p_i}{\ln \epsilon} . \quad (6.15)$$

Diese Größe stellt im Würfel  $i$  eine Beziehung zwischen dem Maß  $\mu$  und der Kantenlänge  $\epsilon$  des Würfels her. Je nach betrachteter Region kann  $\alpha_i$  dabei unterschiedliche Werte annehmen. In einem Gebiet, in dem das Maß groß ist, ist entsprechend auch  $\alpha_i$  groß. Anschaulich ausgedrückt beschreibt  $\alpha_i$  wie “dicht gedrängt“ die “Singularitäten“ der Verteilung in einem bestimmten Gebiet liegen. Wohl aus diesem Grund wird  $\alpha_i$  auch als “Crowding–Index“ bezeichnet.

Der Punkt  $z \in \Lambda$  sei nun die Schnittmenge einer Folge von ineinander geschachtelten Würfeln, deren Kantenlänge gegen 0 geht. Jeder dieser Würfel sei Teil einer Überdeckung, die bei entsprechender Verkleinerung der Kantenlänge entsteht. Der Index dieser Würfel sei jeweils  $i$ . Im folgenden geht man davon aus, daß der Limes

$$\alpha(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_i(\epsilon) \quad (6.16)$$

für alle  $z$  existiert.  $\alpha(z)$  wird als *lokaler Skalenexponent* bezeichnet. Ist  $\alpha(z)$  eine nichtkonstante Funktion und  $\Lambda$  ein Fraktal, so wird das Paar  $\Lambda$  und  $\mu$  auch als *Multifraktal* bezeichnet [BecSch93]. Die Funktion  $\alpha(z)$  erlaubt es in diesem Fall, die invariante Menge in (echte) Teilmengen einzuteilen, indem man Punkte mit identischen Skalenexponenten zusammenfaßt. Mit  $f(\alpha)$  wird dann die Hausdorff–Dimension dieser Teilmenge bezeichnet.

Die Idee zur Beantwortung der oben gestellten Frage nach der Charakterisierung des dynamischen Systems läßt sich somit wie folgt formulieren: Man stellt mit Hilfe des Skalenexponenten eine Beziehung zwischen Maß und Längenskala her und erhält darüber sowohl differenzierte Aussagen über das Maß (“Singularitätenstärken”  $\alpha$ ) als auch über den Träger (Teilmengen der Dimension  $f(\alpha)$ ). Man faßt die invariante Menge als eine Menge auf, die sich aus ineinander “verwobenen” Mengen der Dimensionen  $f(\alpha)$  zusammensetzt. Auf diesen Mengen hat die Verteilung “Singularitäten“ mit einem Exponenten  $\alpha$ .

Es wird sich zeigen, daß  $f(\alpha)$  in vielen Fällen eine *stetige* Funktion ist und somit hervorragend zur Charakterisierung geeignet ist. Man kann in diesem

Fall einem dynamischen System überabzählbar viele Größen des Typs Dimension und entsprechend überabzählbar viele Skalenexponenten zuordnen. Dies bedeutet ein sehr viel differenzierteres Kriterium als die alleinige Angabe der fraktalen Dimension des Trägers. Es ist jedoch zu beachten, daß die Funktion  $f(\alpha)$  nicht die vollständige Information über das System beinhaltet. So ist das Maß  $\mu$  nicht aus der Kenntnis von  $f(\alpha)$  herleitbar. Es sind z. B. keine Aussagen über die Verteilung an einer bestimmten vorgegebenen Stelle im Phasenraum möglich.

Die Funktion  $f(\alpha)$  wird auch als  $f(\alpha)$ -*Kurve* oder  $f(\alpha)$ -*Spektrum* oder auch als *Singularitäten-Spektrum* bezeichnet. Der Begriff Spektrum deutet dabei an, daß der Abschluß des  $\alpha$ -Bereiches, in dem  $f(\alpha)$  größer als 0 ist, alle Skalenexponenten der Singularitäten des Systems beschreibt.

Aufgabe ist es nun, das hier skizzierte Konzept formal darzustellen und praktische Methoden zur Bestimmung von  $f(\alpha)$  zu entwickeln. Zu diesem Zweck hat man sich zunächst mit dem Begriff der Information zu beschäftigen. Damit lassen sich verallgemeinerte Dimensionen einführen, über die man dann das Singularitäten-Spektrum bestimmen kann.

## 6.4 Informationsmaße und Dimensionen

In diesem Abschnitt diskutiere ich Möglichkeiten, Information quantitativ zu erfassen. Genauer geht es darum, ein Maß für das Wissen zu definieren, das ein Beobachter im Hinblick auf das Eintreten eines Ereignisses besitzt, wenn er außer der Wahrscheinlichkeitsverteilung nichts weiteres über das zugrunde liegende System weiß [BecSch93]. Mit Hilfe eines Informationsmaßes ist es möglich, Verteilungen bezüglich ihres “Vorhersagevermögens” zu unterscheiden.

Die hier vorgestellten Konzepte sind auf beliebige invariante Wahrscheinlichkeitsverteilungen anwendbar. Als Wahrscheinlichkeitsverteilung wähle ich im folgenden die natürliche Verteilung auf der invarianten Menge.

Ähnlich wie bei der Diskussion der Hausdorff-Dimension und der Kapazität spielt die Wahl der Überdeckung der invarianten Menge eine Rolle. Ich diskutiere zunächst den aus mathematischer Sicht problematischen Fall einer Überdeckung mit Würfeln gleicher Kantenlänge. Im nächsten Abschnitt 6.5 gehe ich dann auf die mathematisch “korrekte” Definition ein.

### 6.4.1 Die Shannon-Information

Ausgangspunkt ist die Approximation des natürlichen Maßes wie in Abschnitt 6.2 beschrieben. Die *Shannon-Information* ist dann wie folgt defi-

niert:

$$I = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i . \quad (6.17)$$

Die Shannon–Information ist eindeutig aus den sogenannten *Khinchin–Axiomen* herleitbar, die notwendige Eigenschaften eines Informationsmaßes festlegen [Khi57]. Sie kann als ein Maß für das Wissen aufgefaßt werden, das die Verteilung  $p_i$  im Hinblick auf die Frage beinhaltet, welches Ereignis  $i$  als nächstes eintritt. Die Shannon–Information ist per definitionem kleiner oder gleich 0. Die negative Shannon–Information ist die sogenannte *Shannon–Entropie*. Sie quantifiziert das fehlende Wissen, das benötigt wird, um mit Sicherheit den Index  $i$  vorhersagen zu können.

Das Maximum der Shannon–Information, d. h. optimales Wissen, ist durch die Verteilung  $p_i = \delta_{ij}$  gegeben. Die Trajektorie befindet sich mit Sicherheit im Würfel  $j$ . In diesem Fall gilt  $I = 0$ . Das Minimum nimmt die Shannon–Information für die Gleichverteilung an<sup>3</sup>. Mit  $p_i = 1/N(\epsilon)$  folgt dann  $I = -\ln N(\epsilon)$ . In diesem Fall kann man die möglichen Ereignisse nicht unterscheiden, und das Wissen über das Eintreten eines bestimmten Ereignisses ist folglich minimal.

Ich beschreibe nun eine Verallgemeinerung der Shannon–Information, die für die Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffes von zentraler Bedeutung ist.

### 6.4.2 Die Rényi–Information

Die *Rényi–Information der Ordnung  $q$*  ist wie folgt definiert:

$$I_q = \frac{1}{q-1} \ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q , \quad (6.18)$$

wobei  $q$  ein beliebiger reeller Parameter ist. Es wird davon ausgegangen, daß alle  $p_i$  von 0 verschieden sind, so daß  $I_q$  auch für negative  $q$  definiert ist<sup>4</sup>.

Die Bedeutung der Rényi–Information für die Behandlung dynamischer Systeme wurde zuerst von HENTSCHEL und PROCACCIA erkannt [HenPro83].

Bei Variation von  $q$  tragen die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Würfel mit unterschiedlichem Gewicht zur Summe auf der rechten Seite von (6.18)

---

<sup>3</sup>Zum Beweis dieser Aussage hat man das Minimum der rechten Seite von (6.17) unter der Nebenbedingung  $\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i = 1$  zu bestimmen. Eine Behandlung mit Hilfe Lagrange–scher Multiplikatoren liefert dann das gewünschte Ergebnis.

<sup>4</sup>An dieser Stelle auf den informationstheoretischen Hintergrund der Definition (6.18) einzugehen, würde zu weit führen. Ich erwähne nur, daß bei einer Abschwächung eines der Khinchin–Axiome neben der Shannon–Information auch die Rényi–Informationen die Axiome erfüllen. Für eine weitergehende Diskussion verweise ich auf die Literatur [Khi57, BecSch93].

bei. Für negative  $q$  erhalten z. B. Würfel mit kleinem  $p_i$  ein relativ stärkeres Gewicht als für positive  $q$ . Mit Hilfe des Maßes ist es so durch Variation von  $q$  möglich, bestimmte Teilmengen des Trägers hervorzuheben. Dies wird in den Unterabschnitten 6.4.3 und 6.4.4 konkretisiert. Zunächst gehe ich auf die Rényi–Information für zwei spezielle  $q$ –Werte ein.

Setzt man  $q = 0$ , so gilt:

$$I_0 = -\ln N(\epsilon) \quad , \quad (6.19)$$

d. h.  $|I_0|$  wächst logarithmisch mit der Zahl der Würfel mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit.

Zur Bestimmung von  $I_1$  betrachtet man zunächst die Entwicklung:

$$\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \exp((q-1) \ln p_i) \quad (6.20)$$

$$= \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i (1 + (q-1) \ln p_i) + O((q-1)^2) \quad . \quad (6.21)$$

Wegen  $\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i = 1$  folgt:

$$\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q = 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i + O((q-1)^2) \quad . \quad (6.22)$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in die rechte Seite von (6.18) und Entwicklung der Logarithmusfunktion führt dann im Limes  $q \rightarrow 1$  auf die Gleichung:

$$\lim_{q \rightarrow 1} I_q = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i \quad . \quad (6.23)$$

$I_1$  ist somit die Shannon–Information.

Da  $I_0$  der minimalen Shannon–Information entspricht, gilt  $I_0 \leq I_1$ . Dieses Ergebnis lässt sich verallgemeinern. Für  $q' \geq q$  gilt allgemein:

$$I_{q'} \geq I_q \quad . \quad (6.24)$$

Ein Beweis dieser Aussage ist z. B. in [BecSch93] zu finden.

### 6.4.3 Rényi–Dimensionen

Die Definition der Rényi–Information enthält implizit die Kantenlänge  $\epsilon$  der überdeckenden Würfel. Beim Übergang  $\epsilon \rightarrow 0$  divergiert der Ausdruck (6.18) in der Regel. Die sogenannten *Rényi–Dimensionen der Ordnung  $q$*  [HenPro83]:

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I_q}{\ln \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \epsilon} \frac{1}{q-1} \ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q \quad (6.25)$$

bleiben dagegen i. a. endlich. Sie ist ein Maß dafür, wie die Rényi–Information  $I_q$  bei Verkleinerung der Kantenlänge  $\epsilon$  zunimmt. Überträgt man die Beziehung (6.24), so folgt, daß  $D_q$  als Funktion von  $q$  monoton fallend ist:

$$D_{q'} \leq D_q \quad (6.26)$$

für  $q' \geq q$ . Wichtige Spezialfälle der Rényi–Dimensionen sind durch die Parameterwerte  $q = 0$  und  $q = 1$  gegeben. Für  $q = 0$  entspricht die Rényi–Dimension der Kapazität. Aus (6.25) und (6.19) folgt nämlich:

$$\begin{aligned} D_0 &= -\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon} \\ &= D_K . \end{aligned} \quad (6.27)$$

Für den Fall  $q = 1$  folgt aus (6.23) und der Definition (6.25):

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \epsilon} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i . \quad (6.28)$$

$D_1$  wird als *Informationsdimension* bezeichnet. Sie beschreibt, wie die Shannon–Information bei Vergrößerung der Auflösung zunimmt. Ist die fraktale Dimension größer als die Informationsdimension, so wird das zugrunde liegende Maß auch als *fraktales Maß* bezeichnet [Far82, Tél88].

Neben  $D_0$  und  $D_1$  sind die verallgemeinerten Dimensionen  $D_{-\infty}$  und  $D_{+\infty}$  von Interesse. Sie beschreiben nämlich das Skalenverhalten der Phasenraumregionen, in denen das Maß am dünnsten bzw. am dichtesten liegt.

#### 6.4.4 Das $f(\alpha)$ –Spektrum

In diesem Unterabschnitt wird gezeigt, wie man aus der Kenntnis der Rényi–Dimensionen die  $f(\alpha)$ –Kurve erhält. Zur Vereinfachung der folgenden Formeln definiert man:

$$\chi(q) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q . \quad (6.29)$$

Man drückt nun  $\chi$  mit Hilfe des Skalenexponenten  $\alpha$  aus. Da  $f(\alpha)$  per definitionem die Dimension der Menge der Punkte mit einem Skalenexponenten  $\alpha$  ist, ist die Anzahl der Würfel mit einem Skalenexponenten in dem Bereich zwischen  $\alpha$  und  $\alpha + d\alpha$  durch  $\rho(\alpha)\epsilon^{-f(\alpha)} d\alpha$  gegeben, wobei  $\rho(\alpha)$  eine geeignete (beschränkte) Dichte ist. Anstelle der Summation über  $i$ , ist nun auch eine Integration über  $\alpha$  möglich. Berücksichtigt man die Definition (6.15) des Skalenexponenten  $\alpha$ , so läßt sich  $\chi$  wie folgt ausdrücken:

$$\chi(q) = \int \rho(\alpha) \epsilon^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha . \quad (6.30)$$

Beim Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  wird das Integral durch den Wert von  $\alpha$  dominiert, für den der Exponent  $q\alpha - f(\alpha)$  minimal wird (Sattelpunkt-Methode). Dies liefert für vorgegebenes  $q$  ein bestimmtes  $\alpha(q)$ , das unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit von  $f(\alpha)$  durch folgende Bedingungen gegeben ist:

$$\frac{d}{d\alpha} (q\alpha - f(\alpha)) \Big|_{\alpha=\alpha(q)} = 0 \quad (6.31a)$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} (q\alpha - f(\alpha)) \Big|_{\alpha=\alpha(q)} > 0 . \quad (6.31b)$$

Anders ausgedrückt bedeutet dies:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha(q)} = q \quad (6.32a)$$

$$\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha(q)} < 0 . \quad (6.32b)$$

Mit

$$\frac{\ln \chi(q)}{\ln \epsilon} = q\alpha(q) - f(\alpha(q)) + O\left(\frac{1}{\ln \epsilon}\right) \quad (6.33)$$

folgt aus (6.25) eine Beziehung zwischen  $D_q$  und  $f(\alpha)$ :

$$(q-1)D_q = q\alpha(q) - f(\alpha(q)) . \quad (6.34)$$

Wegen (6.32a) bedeutet dies:  $(q-1)D_q$  ist die *Legendre-Transformierte* von  $f(\alpha)$ . Die Kenntnis von  $f(\alpha)$  liefert somit  $D_q$ , und umgekehrt erhält man aus der Kenntnis von  $D_q$  mittels

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq}(q-1)D_q \quad (6.35)$$

und (6.34) die  $f(\alpha)$ -Kurve.  $D_q$  und  $f(\alpha)$  sind also äquivalente Charakterisierungen der invarianten Menge. Setzt man die Differenzierbarkeit nicht voraus, kann man das Ergebnis in folgender Form schreiben:

$$(q-1)D_q = \min_{\alpha} \{q\alpha - f(\alpha)\} \quad (6.36)$$

$$f(\alpha) = \min_q \{q\alpha - (q-1)D_q\} . \quad (6.37)$$

In die Rényi-Dimensionen gehen nur die Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  und die Würfellänge  $\epsilon$  ein. Da diese vergleichsweise einfach zu bestimmen sind, ist damit eine praktische Möglichkeit gegeben, über  $D_q$  die  $f(\alpha)$ -Kurve zu berechnen.

Ich betrachte nun zwei spezielle  $\alpha$ -Werte, die den  $q$ -Werten 0 und 1 entsprechen. Aus (6.32) folgt zusammen mit (6.34), daß das Maximum der  $f(\alpha)$ -Kurve durch  $D_0$ , d. h. durch die Kapazität gegeben ist. Aus (6.35) und (6.34) erhält man nach kurzer Rechnung:

$$\alpha(1) = D_1 = f(\alpha(1)) \quad . \quad (6.38)$$

Berücksichtigt man  $df(\alpha(1))/d\alpha = 1$ , so bedeutet dies, daß die  $f(\alpha)$ -Kurve im  $\alpha-f(\alpha)$ -Diagramm die Diagonale im Punkt  $(D_1, D_1)$  berührt.

Zur Verdeutlichung diskutiere ich als einfaches Beispiel das Maß, das durch die Dichte

$$\rho(x) = \tilde{\alpha} x^{\tilde{\alpha}-1} \quad , \quad 0 < \tilde{\alpha} < 1, \quad (6.39)$$

auf dem Einheitsintervall gegeben ist. Man unterteilt das Einheitsintervall in Teilintervalle der Länge  $\epsilon < 1$ . Bis auf das Maß des Intervalls, das die 0 enthält, ist das Maß jedes anderen Intervalles proportional zur Länge  $\epsilon$ . Es gibt  $\epsilon^{-1} - 1 \approx \epsilon^{-1}$  Intervalle dieses Typs. Das Maß des Intervalls, in dem 0 liegt, ist durch  $\epsilon^{\tilde{\alpha}}$  gegeben. Setzt man die auftretenden Proportionalitätskonstanten<sup>5</sup> gleich 1, so ergibt sich für die Rényi-Dimensionen aus (6.25):

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln((\epsilon^{-1}\epsilon^q + \epsilon^{\tilde{\alpha}q})}{\ln \epsilon} \quad . \quad (6.40)$$

Daraus folgt:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \min \{q-1, \tilde{\alpha}q\} \quad . \quad (6.41)$$

Da die Informationsdimension  $D_1 = 1$  gleich der fraktalen Dimension  $D_0 = 1$  ist, liegt insbesondere kein fraktales Maß vor.

Die Legendre-Transformation von (6.41) liefert für  $q > 1/(1-\tilde{\alpha})$  die Werte  $\alpha = \tilde{\alpha}$  und  $f(\tilde{\alpha}) = 0$ . Für  $q < 1/(1-\tilde{\alpha})$  ergibt sich  $\alpha = 1$  und  $f(\alpha) = 1$ . Das Singularitäten-Spektrum besteht also aus zwei Punkten, die der ‘‘Singularität’’ der ‘‘Stärke’’  $\tilde{\alpha}$  auf einer Menge der Dimension 0 und ‘‘Singularitäten’’ der ‘‘Stärke’’ 1 auf einer Menge der Dimension 1 — d. h. Stetigkeit der Dichte — entsprechen.

Beispiele komplizierterer Singularitäten-Spektren, die sich aus überabzählbar vielen Skalenexponenten  $\alpha$  und entsprechenden Dimensionen  $f(\alpha)$  zusammensetzen, werden in Kapitel 7 diskutiert (siehe z. B. Abbildung 7.3 auf Seite 119).

---

<sup>5</sup>Die formale Begründung für dieses Vorgehen erfolgt in Kapitel 7.

## 6.5 Verallgemeinerte Dimensionen $D_q$

Genau wie der Begriff Kapazität sind die Rényi–Dimensionen  $D_q$  mit Problemen verbunden<sup>6</sup>. Entsprechend ist die Definition, Herleitung und Interpretation des  $f(\alpha)$ –Spektrums im Hinblick auf einige Sonderfälle problematisch. Um diese Schwierigkeit zu beheben, geht man ähnlich wie im Fall der Hausdorff–Dimension vor und betrachtet Überdeckungen mit eventuell unendlich vielen Mengen variabler Größe. Dies liefert eine aus mathematischer Sicht zufriedenstellende Definition der im folgenden als *verallgemeinerte Dimensionen* bezeichneten Größen  $D_q$ . Man definiert die  $f(\alpha)$ –Kurve dann als Legendre–Transformierte der verallgemeinerten Dimensionen. Mit Ausnahme einiger Sonderfälle ist die in den Abschnitten 6.3 und 6.4.4 vorgestellte Interpretation dann weiterhin gültig.

Ausgangspunkt ist nun eine disjunkte  $\delta$ –Überdeckung  $\{U_i\}$ . Sei  $l_i = |U_i|$  und  $p_i$  die zu  $U_i$  gehörende Wahrscheinlichkeit. Man definiert [Hal+86]:

$$Z_D(q, \tau, \delta) = \begin{cases} \inf_{\{U_i\}} \sum_i \frac{p_i^q}{l_i^\tau} & \text{für } q \leq 1, \tau \leq 0, \\ \sup_{\{U_i\}} \sum_i \frac{p_i^q}{l_i^\tau} & \text{für } q > 1, \tau > 0. \end{cases} \quad (6.42)$$

Definiert man ferner

$$Z_D(q, \tau) = \lim_{\delta \rightarrow 0} Z_D(q, \tau, \delta) \quad , \quad (6.43)$$

so ist  $Z_D(q, \tau)$  eine monoton wachsende Funktion von  $\tau$  und eine monoton fallende Funktion von  $q$ . Eine ähnliche Argumentation wie bei der Definition der Hausdorff–Dimension liefert eine eindeutige Funktion  $\tau(q)$ , für die gilt:

$$Z_D(q, \tau) = \begin{cases} 0 & , \quad \tau < \tau(q) \\ \infty & , \quad \tau > \tau(q). \end{cases} \quad (6.44)$$

Die verallgemeinerten Dimensionen  $D_q$  erhält man nun aus der Beziehung:

$$\tau(q) = (q - 1)D_q \quad . \quad (6.45)$$

Die  $f(\alpha)$ –Kurve ergibt sich dann als Legendre–Transformierte von  $\tau(q)$ . Man beachte, daß  $D_0$  nun die Hausdorff–Dimension ist.

## 6.6 Verallgemeinerte Entropien $K_q$

Bisher wurden rein statische Aspekte des dynamischen Systems diskutiert. In diesem Abschnitt wird der Schwerpunkt auf die Dynamik gelegt. Grundlage ist dabei eine Symbolische Dynamik, wie sie in Kapitel 4 beispielsweise

---

<sup>6</sup>Ist z. B. das überdeckende Gitter so gewählt, daß bestimmte Würfel ein von 0 verschiedenes, aber sehr kleines Maß besitzen, so divergiert u. U. die Summe auf der rechten Seite von (6.25) für negative  $q$  [Gra+88].

für die in dieser Arbeit betrachteten Mulden–Systeme entwickelt wurde. Im allgemeinen betrachtet man eine Zerlegung des Phasenraumes in disjunkte Mengen  $M_s$  und ordnet einer Trajektorie  $z_0, z_1, \dots$  entsprechend  $z_i \in M_{s_i}$  eine Symbolfolge  $(s_0 s_1 \dots)$  zu. Die Zerlegung bezeichne ich im folgenden mit  $\{M\}$ .

Ähnlich wie in Abschnitt 6.2 ist der Ausgangspunkt nun ein Ensemble von Trajektorien, die für lange Zeit auf oder in der Nähe der invarianten Menge verbleiben. Man registriert in diesem Fall jedoch nicht wie in Abschnitt 6.2 die Häufigkeit, mit der bestimmte Phasenraumregionen aufgesucht werden, sondern betrachtet die Häufigkeit des Auftretens bestimmter endlicher Symbolfolgen  $(s_0 \dots s_{n-1})$  der Länge  $n$ . Dies liefert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p(s_0 \dots s_{n-1})$ , die nicht auf dem Phasenraum, sondern auf der Menge aller endlichen Symbolfolgen definiert ist. Für  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich daraus eine Verteilung, die auf der Menge aller Orbits in der invarianten Menge definiert ist und somit die Dynamik des Systems charakterisiert.

### 6.6.1 Die Kolmogorov–Sinai–Entropie

Als quantitatives Maß für die Information, die in der Verteilung  $p(s_0, \dots, s_{n-1})$  enthalten ist, betrachtet man wiederum die Shannon–Information dieser Verteilung:

$$I(\{M\}, n) = \sum_{s_0 \dots s_{n-1}} p(s_0 \dots s_{n-1}) \ln p(s_0 \dots s_{n-1}) \quad . \quad (6.46)$$

Diese Größe hängt von der Zerlegung  $\{M\}$  und von der Zeit  $n$  ab<sup>7</sup>. Im folgenden betrachte ich die sogenannte *dynamische Shannon–Entropie*, die durch die negative Shannon–Information (6.46) gegeben ist:

$$H(\{M\}, n) = -I(\{M\}, n) \quad . \quad (6.47)$$

Die dynamische Shannon–Entropie ist ein Maß für das Wissen, das fehlt, um bei gegebener Verteilung  $p(s_0 \dots s_{n-1})$  mit Sicherheit die Symbolfolge der Länge  $n$  vorhersagen zu können. Man ist an der Asymptotik von  $H(\{M\}, n)$  für große Zeiten  $n$  interessiert. Da  $H$  für  $n \rightarrow \infty$  i. a. divergiert, betrachtet man die sogenannte *dynamische Shannon–Entropie pro Zeit*

$$H(\{M\}) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{s_0 \dots s_{n-1}} p(s_0 \dots s_{n-1}) \ln p(s_0 \dots s_{n-1}) \quad , \quad (6.48)$$

die endlich ist. Der Ausdruck  $H(\{M\}, n+1) - H(\{M\}, n)$  quantifiziert das Wissen, das fehlt, um das  $(n+1)$ –te Symbol vorhersagen zu können, wenn

---

<sup>7</sup>Im allgemeinen hängt  $I$  noch von der Wahl des Ensembles ab, mit Hilfe dessen man die Häufigkeiten bestimmt hat. Ich gehe hier per Konstruktion davon aus, daß das Ausgangensemple gemäß dem natürlichen Maß verteilt ist.

die vorausgehenden  $n$  Symbole bekannt sind. Unter der Voraussetzung, daß  $H(\{M\}, 1)$  endlich ist, gilt:

$$H(\{M\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(\{M\}, i+1) - H(\{M\}, i) \quad . \quad (6.49)$$

Man kann die dynamische Shannon–Entropie pro Zeit somit als Informationsverlust pro Zeitschritt interpretieren.

Durch Supremumbildung über alle Zerlegungen  $\{M\}$  erhält man eine das System charakterisierende Zahl:

$$h = \sup_{\{M\}} H(\{M\}) \quad . \quad (6.50)$$

Diese Größe wird als *Kolmogorov–Sinai–Entropie (KS–Entropie)* bezeichnet. Sie wird oftmals zur Definition von Chaos herangezogen: Ein dynamisches System ist genau dann chaotisch, wenn die KS–Entropie größer als 0 ist. Diese Definition ist insofern gerechtfertigt, als bei positiver KS–Entropie die sichere Vorhersage des nächsten Symbols nicht mehr möglich ist. Je größer  $h$  ist, desto unsicherer wird dabei die Vorhersage des nächsten Symbols<sup>8</sup>.

Die Supremumbildung in (6.50) ist i. a. eine schwer zu lösende Aufgabe. Ist jedoch eine erzeugende Zerlegung gegeben, wie z. B. die in Kapitel 4 für das Mulden–System vorgestellte, so wird das Supremum für diese Zerlegung angenommen.

### 6.6.2 Definition von $K_q$

Analog zum Verfahren bei der Einführung verallgemeinerter Dimensionen, führt man nun verallgemeinerte Entropien ein. Zunächst beschränkt man sich auf erlaubte Symbolfolgen bei vorgegebener Zerlegung  $\{M\}$ . Die Anzahl der erlaubten Symbolfolgen der Länge  $n$  sei durch  $W(n)$  gegeben. Zur Vereinfachung der Formeln werden alle Folgen mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit mit einem Index  $i \in \{1, \dots, W(n)\}$  versehen. Die zur  $i$ –ten Folge  $(s_0 \dots s_{n-1})$  gehörende Wahrscheinlichkeit ist dann gegeben durch:

$$p_i^{(n)} = p(s_0 \dots s_{n-1}) \quad . \quad (6.51)$$

Als Rényi–Information der Ordnung  $q$  der Verteilung  $p_i^{(n)}$  ergibt sich nach (6.18):

$$I_q = \frac{1}{q-1} \ln \sum_{i=1}^{W(n)} (p_i^{(n)})^q \quad . \quad (6.52)$$

---

<sup>8</sup>Man beachte, daß hier im Gegensatz zur Definition 1 das Maß explizit in die Definition von Chaos eingeht. Dies ist der Grund, warum bei Zulassung beliebiger invariante Maße ein Vergleich beider Chaosdefinitionen nicht möglich ist. Legt man das natürliche Maß zugrunde, so sind für die in dieser Arbeit vorgestellten hyperbolischen Mulden–Systeme beide Definitionen gleichbedeutend (siehe auch Kapitel 7).

Der Parameter  $q$  erlaubt hier eine Variation in der Gewichtung unterschiedlicher Symbolfolgen.

Analog zur Vorgehensweise in Unterabschnitt 6.6.1 definiert man *verallgemeinerte Entropien der Ordnung  $q$* :

$$K_q = \sup_{\{M\}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{W(n)} (p_i^{(n)})^q . \quad (6.53)$$

Als wichtige Spezialfälle betrachte ich wiederum die Parameterwerte  $q = 0$  und  $q = 1$ . Für  $q = 0$  erhält man aus (6.53) für eine erzeugende Zerlegung wegen  $\sum_{i=1}^{W(n)} (p_i^{(n)})^0 = W(n)$  für große  $n$ :

$$W(n) \sim e^{K_0 n} . \quad (6.54)$$

Die *topologische Entropie  $K_0$*  beschreibt also das Wachstum der Anzahl erlaubter Symbolfolgen der Länge  $n$  mit  $n$ . Der Parameterwert  $q = 1$  ist ähnlich zu behandeln wie im Fall der verallgemeinerten Dimensionen (siehe 6.4.2 und 6.4.3). Mit Hilfe der entsprechenden Beziehung (6.23) folgt:

$$K_1 = h. \quad (6.55)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, daß man durch analoges Vorgehen wie beim Übergang von den verallgemeinerten Dimensionen  $D_q$  zum Singularitäten-Spektrum  $f(\alpha)$  entsprechend aus den  $K_q$  ein “dynamisches Singularitäten-Spektrum” erhalten kann [EckPro86]. Da dies aber im folgenden nicht benötigt wird, verweise ich für eine weitergehende Diskussion auf die Literatur.

### 6.6.3 Unterschied zwischen verallgemeinerten Dimensionen und verallgemeinerten Entropien

Im Fall der verallgemeinerten Dimensionen betrachtet man das Skalenverhalten der in (6.42) definierten Funktion  $Z_D(q, \tau, \delta)$  im Limes “unendlich feiner Auflösung”, d. h.  $\delta \rightarrow 0$ . Die Funktion  $Z_D(q, \tau, \delta)$  ist dabei eine Größe, in die die statische Verteilung eingeht. Zur Bestimmung der verallgemeinerten Entropien geht man dagegen von einer Überdeckung aus, deren Mengen einen von 0 verschiedenen Durchmesser besitzen. Man betrachtet dann das Skalenverhalten von  $-I_q$  im Hinblick auf die Zeit und nicht im Hinblick auf eine räumliche Größe. In diesem Sinn bilden die verallgemeinerten Dimensionen eine die räumlichen, statischen Eigenschaften des dynamischen Systems charakterisierende Größe, die verallgemeinerten Entropien beschreiben dagegen zeitliche, dynamische Eigenschaften. Die Dimensionen charakterisieren den Phasenraum, die Entropien den Raum der Trajektorien.

## 6.7 Verallgemeinerte Lyapunov–Exponenten $\lambda_q$

In diesem Abschnitt wird die zeitliche Entwicklung eines lokalisierten kleinen Phasenraumvolumens betrachtet. In hyperbolischen Systemen gibt es kontrahierende und expandierende Richtungen. Diese sorgen dafür, daß Phasenraumbereiche unter der Dynamik in komplizierter Weise deformiert werden können. Mittlere Expansions– und Kontraktionsraten werden durch Lyapunov–Exponenten quantitativ beschrieben.

### 6.7.1 Der Lyapunov–Exponent einer Trajektorie

Die Entwicklung eines infinitesimalen Volumens um einen Phasenraumpunkt  $x$  unter der Dynamik von  $F$  wird durch die linearisierte Abbildung beschrieben. Aus diesem Grund wird die Entwicklung eines Vektors im Tangentialraum untersucht.

Ist  $a_i(n, x)$  der Eigenwert der linearisierten Abbildung  $DF^n(x)$  zur Eigenrichtung  $i$ , so ist der *Lyapunov–Exponent*  $\lambda_i(x)$  gegeben durch:

$$\lambda_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |a_i(n, x)| . \quad (6.56)$$

Je nachdem, ob  $\lambda_i$  größer oder kleiner als 0 ist, wird die mittlere Expansions– bzw. Kontraktionsrate in Richtung des  $i$ –ten Eigenvektors von  $DF^n(x)$  beschrieben.

Ein generischer Vektor aus dem Tangentialraum hat nichtverschwindende Komponenten in alle Eigenrichtungen. Unter der Dynamik von  $DF^n(x)$  wird daher für große  $n$  das Verhalten dieses Vektors durch den größten Lyapunov–Exponenten bestimmt. Aus diesem Grund spielt er eine dominierende Rolle und wird oftmals auch als *der* Lyapunov–Exponent der Trajektorie bezeichnet. Er beschreibt die Rate, mit der ein infinitesimales Volumen unter der Dynamik “in die Breite gezogen” wird.

### 6.7.2 Definition von $\lambda_q$

Im folgenden gehe ich Einfachheitshalber davon aus, daß in dem System nur eine expandierende Richtung vorhanden ist. Den Lyapunov–Exponenten einer Trajektorie mit Anfangsbedingung  $x$  bezeichne ich mit  $\lambda(x)$ . Der Lyapunov–Exponent der Abbildung  $F$  ist dann durch die mittlere Expansionsrate bezüglich des natürlichen Maßes gegeben:

$$\lambda = \int \lambda(x) d\mu(x) . \quad (6.57)$$

Ähnlich wie bei der Einführung verallgemeinerter Dimensionen und Entropien führt man einen Parameter  $q$  ein, der eine unterschiedliche Gewichtung lokaler Expansionsraten erlaubt. Den größten Eigenwert von  $DF^n(x)$  bezeichne ich im folgenden mit  $a(n, x)$ . Man definiert dann die *verallgemeinerten Lyapunov–Exponenten* [Fuj83]:

$$\lambda_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{qn} \ln \int a(n, x)^q d\mu(x) . \quad (6.58)$$

Man beachte, daß der Parameter  $q$  in diesem Fall im Gegensatz zu den Definitionen von  $D_q$  und  $K_q$  nicht als Exponent des Maßes auftaucht. Nichtsdestotrotz erlaubt die Variation von  $q$  hier ebenfalls die unterschiedliche Gewichtung verschiedener lokaler Expansionsraten, wobei jedoch die Mittelung über die natürliche Verteilung berücksichtigt werden muß. In den Grenzübergängen  $q \rightarrow \infty$  und  $q \rightarrow -\infty$  wird das Integral (6.58) durch den größten bzw. kleinsten Lyapunov–Exponenten dominiert, der im System möglich ist. So beschreibt das Intervall  $[\lambda_{-\infty}, \lambda_{+\infty}]$  das Spektrum möglicher lokaler Expansionsraten.

Die verallgemeinerten Lyapunov–Exponenten sind in ähnlicher Weise Verallgemeinerungen des üblichen Begriffes wie die verallgemeinerten Dimensionen und Entropien Verallgemeinerungen der Hausdorff–Dimension bzw. der KS–Entropie sind. Man kann entsprechend durch Entwicklung des Integranden in (6.58) zeigen:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \lambda_q = \lambda . \quad (6.59)$$

# Kapitel 7

## Thermodynamik der invarianten Menge

Die in Kapitel 6 diskutierten Mittelwerte zur Charakterisierung dynamischer Systeme werden in diesem Kapitel für das Zwei–Mulden–System besprochen. Zuvor gehe ich jedoch näher auf den Zusammenhang zwischen Statistischer Physik und Thermodynamik auf der einen Seite und der Theorie dynamischer Systeme auf der anderen Seite ein. An dieser Stelle sei erwähnt, daß während der Fertigstellung dieser Arbeit eine Monographie zu diesem Thema erschienen ist [BecSch93]. Im Gegensatz zu den dort in erster Linie behandelten eindimensionalen Systemen, lege ich das Hauptaugenmerk jedoch auf zweidimensionale Systeme. Daraus ergeben sich weitergehende Probleme. Darüber hinaus werden hier Schwerpunkte anders gesetzt und einzelne Aspekte detaillierter diskutiert als in zitierten Monographie.

### 7.1 Spinketten und Symbolische Dynamik

Die Schlüsselbeobachtung, die zum *thermodynamischen Formalismus* dynamischer Systeme führt, ist die Verbindung zwischen Symbolfolgen von Orbits und Mikrozuständen von eindimensionalen Spinketten. Man interpretiert ein Element aus einem Folgenraum, dem ein Alphabet mit  $m$  Symbolen zugrunde liegt, als Mikrozustand eines Potts–Modells  $m$ –ter Ordnung.

#### 7.1.1 Das eindimensionale Potts–Modell

Im Potts–Modell  $m$ –ter Ordnung werden Spins betrachtet, die  $m$  verschiedene diskrete Werte annehmen können. Im Falle  $m = 2$  entspricht das Potts–Modell dem Ising–Modell. Zur vollständigen Definition eines Spinmodells ist neben den möglichen Zuständen der einzelnen Spins noch die Wechselwirkung zwischen den Spins festzulegen.

Man betrachtet nun eine eindimensionale Spinkette. Für  $n$  Spins lässt sich dann jede Spinkonfiguration durch ein  $n$ -Tupel  $(s_0, \dots, s_{n-1})$  beschreiben, in dem die  $s_i$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , jeweils einen der  $m$  möglichen Zustände symbolisieren. Die Wechselwirkung lässt sich implizit durch eine Hamilton-Funktion  $H_n(s_0, \dots, s_{n-1})$  definieren, die jeder Spinkonfiguration eine Energie  $E_n = H_n(s_0, \dots, s_{n-1})$  zuordnet.

Aus der Statistischen Physik ist bekannt, daß in einem kanonischen Ensemble die Funktion  $H_n$  die Wahrscheinlichkeit  $p_n(s_0, \dots, s_{n-1})$  bestimmt, den Mikrozustand  $(s_0, \dots, s_{n-1})$  zu beobachten. Mit  $\beta = (k_B T)^{-1}$ , wobei  $k_B$  die Boltzmann-Konstante und  $T$  die Temperatur bezeichnet, gilt:

$$p_n(s_0, \dots, s_{n-1}) = \frac{1}{Z_n(\beta)} e^{-\beta H_n(s_0, \dots, s_{n-1})} ; \quad (7.1)$$

die Zustandssumme  $Z_n(\beta)$  ist dabei gegeben durch:

$$Z_n(\beta) = \sum_{s_0, \dots, s_{n-1}} e^{-\beta H_n(s_0, \dots, s_{n-1})} . \quad (7.2)$$

Im Sinne der Statistischen Physik ist ein Spinmodell gelöst, falls man im thermodynamischen Limes einen Ausdruck für die *freie Energie* (pro Spin)  $F(\beta)$  angeben kann:

$$F(\beta) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta n} \ln Z_n(\beta) . \quad (7.3)$$

Man beachte, daß die Funktion  $F(\beta)$  i. a. von Kopplungskonstanten abhängt, die die Wechselwirkung beschreiben und die über die Hamilton-Funktionen  $H_n$  in die rechte Seite von (7.3) eingehen.

### 7.1.2 Beziehung zwischen Spinketten und Symbolischer Dynamik

Ist die Symbolische Dynamik eines dynamischen Systems bekannt und besteht das Alphabet aus  $m$  Buchstaben, so interpretiert man eine Symbolfolge als Mikrozustand eines eindimensionalen Potts-Modells  $m$ -ter Ordnung. Aus der Definition folgt, daß die Zeitentwicklung des dynamischen Systems der Translation im Gitter des Potts-Modells entspricht. Eine stationäre Verteilung korrespondiert daher einer Translationsinvarianz der Hamiltonfunktion  $H_n$ .

Aus Sicht des dynamischen Systems sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $p_{1|n}(s_n | s_0, \dots, s_{n-1})$  von Interesse, die angeben mit welcher Wahrscheinlichkeit auf eine vorgegebene Symbolfolge  $(s_0 \dots s_{n-1})$  das Symbol  $s_n$  folgt. Es gilt:

$$p_{n+1}(s_0 \dots s_n) = p_{1|n}(s_n | s_0 \dots s_{n-1}) p_n(s_0 \dots s_{n-1}) . \quad (7.4)$$

In der Situation der Spinkette erhält man mit Hilfe von (7.1):

$$p_{1|n}(s_n | s_0, \dots, s_{n-1}) = \frac{p_{n+1}(s_0, \dots, s_n)}{p_n(s_0, \dots, s_{n-1})} \quad (7.5)$$

$$= \frac{Z_n(\beta)}{Z_{n+1}(\beta)} e^{-\beta(H_{n+1}(s_0, \dots, s_n) - H_n(s_0, \dots, s_{n-1}))} . \quad (7.6)$$

Der Ausdruck  $H_{n+1}(s_0, \dots, s_n) - H_n(s_0, \dots, s_{n-1})$  ist nun nichts anderes als die Wechselwirkungsenergie des Spins  $s_n$  mit der Spinkonfiguration  $(s_0, \dots, s_{n-1})$ . Das bedeutet also, daß die bedingten Wahrscheinlichkeiten auf der Seite des dynamischen Systems Wechselwirkungsenergien auf der Seite der Spinkette entsprechen.

## 7.2 Zur Definition der freien Energie

Ich beschränke mich nun auf Hamilton–Systeme mit zwei Freiheitsgraden. Die Grundlage bildet das Zwei–Mulden–System, anhand dessen ich die Konzepte vorstelle. Die wesentlichen Aspekte der folgenden Diskussion sind aus [KovTél90, Tél90] entnommen.

Zur exemplarischen Veranschaulichung der anschließenden Betrachtungen ist die Abbildung 4.1 nützlich. Die Menge  $\overline{\Lambda}_-^n$  besteht aus endlich vielen vertikalen Streifen, die zu Anfangsbedingungen von Trajektorien gehören, die mindestens für  $n$  Iterationen in  $\overline{\Gamma}$  bleiben (siehe Abschnitt 4.1). Jeder dieser Streifen in  $\overline{\Lambda}_-^n$  entspricht Trajektorien, die jeweils in ihren ersten  $n$  Symbolen übereinstimmen. Ein Streifen in  $\overline{\Lambda}_-^n$  ist also eindeutig durch ein  $n$ –Tupel  $(s_0 s_1 \dots s_{n-1})$  von Symbolen aus dem zugrunde liegenden Alphabet bestimmt. Mit  $W(n)$  wird die Anzahl dieser Streifen, d. h. die Anzahl der erlaubten Symbolfolgen der Länge  $n$ , bezeichnet. Zur Unterscheidung führe ich einen Index  $i \in \{1, \dots, W(n)\}$  ein, so daß jeder Streifen eindeutig durch  $\overline{\Lambda}_{-i}^n$  bestimmt ist.

Die Schnittpunkte einer stetig differenzierbaren horizontalen Kurve mit der Menge  $\overline{\Lambda}_-^\infty$  bilden nach der Diskussion in Kapitel 4 eine Cantor–Menge, die ich mit  $C$  bezeichne. Betrachtet man nun die Schnitte der horizontalen Kurve mit den Streifen  $\overline{\Lambda}_{-i}^n$ , so erhält man eine natürliche Überdeckung von  $C$ . Die Länge des Kurvenstückes in  $\overline{\Lambda}_{-i}^n$  wird mit  $l_i^{(n)}$  bezeichnet.

Im Sinne des thermodynamischen Formalismus assoziiert man nun mit einer Symbolfolge  $(s_0 s_1 \dots s_{n-1})$  die Spinkette  $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ . Die Energie der Spinkette wird durch

$$E_i = -\frac{1}{n} \ln l_i^{(n)} \quad (7.7)$$

festgelegt [Koh88, BohRan87], wobei  $l_i^{(n)}$  die zur Symbolfolge  $(s_0 s_1 \dots s_{n-1})$  gehörende Länge ist. Einfachheitshalber verzichte ich auf eine explizite Kennzeichnung der  $n$ –Abhängigkeit von  $E_i$ . Dies ist insofern gerechtfertigt, als

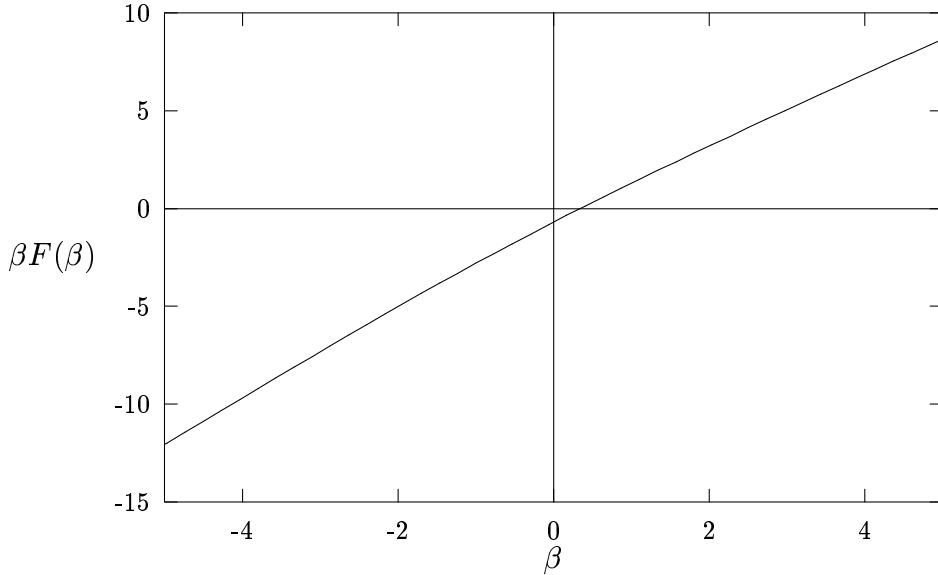


Abbildung 7.1: Die Funktion  $\beta F(\beta)$  des Zwei–Mulden–Systems für  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.08$ .

sehr große  $n$  vorausgesetzt werden und im Limes  $n \rightarrow \infty$  die Energie  $n$ –unabhängig ist. Für große  $n$  folgt aus (7.2) und (7.3):

$$Z_n(\beta) = \sum_{i=1}^{W(n)} \left( l_i^{(n)} \right)^\beta \sim e^{-\beta F(\beta)n} . \quad (7.8)$$

Aus historischen Gründen wird in der mathematischen Literatur die Größe  $-\beta F(\beta)$  auch als *topologischer Druck* bezeichnet.

Die freie Energie (pro Symbol) erhält man vergleichsweise einfach. Man mißt Längen von Kurvenstücken aufeinanderfolgender  $n$ –Werten und wertet die entsprechenden Zustandssummen aus. Aus (7.8) folgt dann:

$$\beta F(\beta) = \ln \frac{Z_n(\beta)}{Z_{n+1}(\beta)} . \quad (7.9)$$

Als Beispiel ist in Abbildung 7.1 die Funktion  $\beta F(\beta)$  des Zwei–Mulden–Systems für  $k = 1.08$  dargestellt. Die Funktion besitzt nur eine schwache Krümmung. Man beachte, daß  $\beta F(\beta)$  für  $\beta \rightarrow -\infty$  durch die kleinsten und für  $\beta \rightarrow \infty$  durch die größten Längen  $l_i^{(n)}$  dominiert wird.

Ich gehe nun auf spezielle  $\beta$ –Werte ein. Betrachtet man ein Ensemble von Trajektorien, deren Anfangsbedingungen gleichmäßig auf der Kurve  $C$  verteilt sind, so ist die Gesamtlänge der Kurvenstücke vom Niveau  $n$  proportional zur Anzahl der Teilchen, die den Wechselwirkungsbereich nach  $n$  Iterationen

noch nicht verlassen haben. Die rechte Seite von (7.9) ergibt somit für  $\beta = 1$  die Entweichrate  $\kappa$ :

$$F(1) = \kappa \quad . \quad (7.10)$$

Setzt man in (7.8)  $\beta = 0$ , so folgt mit (6.54):

$$\beta F(\beta)|_{\beta=0} = -K_0 \quad . \quad (7.11)$$

Neben der Entweichrate und der topologischen Entropie lässt sich eine weitere Größe direkt aus der Funktion  $\beta F(\beta)$  ablesen. Ist  $\beta F(\beta) < 0$  so geht der Wert der Zustandssumme in (7.8) im thermodynamischen Limes  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$ . Ist andererseits  $\beta F(\beta) > 0$ , so erhält man für die Zustandssumme den Wert 0. Da für große  $n$  die Kurvenstücke in den Streifen  $\bar{\Lambda}_{-i}^n$  eine “optimale” Überdeckung der Menge der Streusingularitäten bilden, folgt aus (7.8) und (6.6) [Bow75, Rue78]:

$$F(D_H(C)) = 0 \quad . \quad (7.12)$$

Diese Beziehung ist auch unter dem Namen *Bowen–Ruelle–Formel* bekannt.

### 7.2.1 Prinzip der beschränkten Variation

Der Wert der Summe auf der rechten Seite von (7.8) ist abhängig von der Wahl der konkreten Kurve, die zur Bestimmung der Längen  $l_i^{(n)}$  herangezogen wird. In diesem Unterabschnitt wird erörtert, warum das Skalenverhalten, d. h. die Funktion  $\beta F(\beta)$ , *unabhängig* von der betrachteten horizontalen Kurve ist.

Die Längen  $\bar{l}_i^{(n)}$  einer weiteren horizontalen Kurve lassen sich für alle  $n$  und  $i$  mit Hilfe der ursprünglichen Längen ausdrücken:

$$\bar{l}_i^{(n)} = c_i^{(n)} l_i^{(n)} \quad , \quad (7.13)$$

wobei die  $c_i^{(n)}$  geeignete Konstanten sind. Aufgrund der Hyperbolizität sind diese Konstanten beschränkt<sup>1</sup>[Bow75]. Es gibt also Konstanten  $c_<$  und  $c_>$ , so daß für alle  $n$  und  $i$  die Beziehung  $0 < c_< \leq c_i^{(n)} \leq c_> < \infty$  gilt. Damit folgt:

$$c_< \sum_i l_i^{(n)} \leq \sum_i c_i^{(n)} l_i^{(n)} \leq c_> \sum_i l_i^{(n)} \quad . \quad (7.14)$$

Die Bildung des Logarithmus und Dividieren durch  $n$  führt auf die Ungleichungen:

$$\frac{\ln c_<}{n} + \frac{1}{n} \ln \sum_i l_i^{(n)} \leq \frac{1}{n} \ln \sum_i \bar{l}_i^{(n)} \leq \frac{\ln c_>}{n} + \frac{1}{n} \ln \sum_i l_i^{(n)} \quad . \quad (7.15)$$

---

<sup>1</sup>Die Hyperbolizität sorgt dafür, daß die vertikalen Streifen  $\bar{\Lambda}_{-i}^n$  für wachsendes  $n$  unabhängig von der vertikalen Position mit einer bestimmten Rate schmäler werden. Daraus ergeben sich dann Schranken für die  $c_i^{(n)}$ .

Im thermodynamischen Limes verschwinden die Terme  $\ln c_{<}/n$  und  $\ln c_{>}/n$ . Aus der Definition (7.8) folgt damit direkt, daß die freie Energie unabhängig von der Wahl der horizontalen Kurve ist, mit der die Zustandssumme berechnet wird. Als horizontale Kurve zur Bestimmung der Längen  $l_i^{(n)}$  eignet sich insbesondere eine zu einem Streuexperiment gehörende Kurve.

Das geschilderte Verfahren findet man in der Literatur allgemeiner unter dem Namen *Prinzip der beschränkten Variation* [BohRan87].

### 7.2.2 Partielle Dimensionen

Durch die Bedingung (7.12) erhält man die fraktale Dimension der Menge  $C$ , man ist jedoch an der fraktalen Dimension von  $\Lambda$  interessiert. Wie sich diese aus  $D_H(C)$  ergibt wird nun dargestellt. Man betrachtet dazu *partielle Dimensionen*, die die Dimensionen einer Menge in verschiedenen, linear unabhängigen Raumrichtungen des euklidischen Raumes wiedergeben [EckRue85].

Die stabile Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$  ist nach der Diskussion in Kapitel 4 durch die vertikalen Kurven in  $\overline{\Lambda}_-^\infty$  gegeben. Da die Dimension von Kurven 1 ist, erhält man in vertikaler Richtung für die partielle Dimension der stabilen Mannigfaltigkeit den Wert 1. Eine horizontale Kurve in Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit schneidet jede Kurve aus  $\overline{\Lambda}_-^\infty$  transversal. Die partielle Dimension der invarianten Menge in Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit, die ich mit  $D_H^{(1)}$  bezeichne, ist durch die Dimension dieser Schnittmenge gegeben. Man kann die stabile Mannigfaltigkeit lokal als ein Produkt aus eindimensionaler Mannigfaltigkeit und Cantor-Menge auffassen. Ähnlich wie beim kartesischen Produkt von Vektorräumen erhält man die Dimension der stabilen Mannigfaltigkeit nun als Summe der partiellen Dimensionen:

$$D_H(\overline{\Lambda}_-^\infty) = 1 + D_H^{(1)} . \quad (7.16)$$

Bezeichnet man in Analogie die Dimension der Schnittmenge von  $\overline{\Lambda}_+^\infty$  mit einer vertikalen Kurve mit  $D_H^{(2)}$ , so folgt entsprechend:

$$D_H(\overline{\Lambda}_+^\infty) = 1 + D_H^{(2)} . \quad (7.17)$$

Die partiellen Dimensionen der invarianten Menge sind nach obiger Diskussion in instabiler Richtung durch  $D_H^{(1)}$  und in stabiler Richtung durch  $D_H^{(2)}$  gegeben. Als Dimension von  $\Lambda$  ergibt sich daraus:

$$D_H(\Lambda) = D_H(\overline{\Lambda}_+^\infty \cap \overline{\Lambda}_-^\infty) = D_H^{(1)} + D_H^{(2)} . \quad (7.18)$$

Dies macht den Charakter von  $\Lambda$  als “Doppelfraktal“ deutlich.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß die stabile Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$  unter  $I_0$  (siehe (1.12)) auf die instabile Mannigfaltigkeit abgebildet wird. Daher gilt:

$$D_H(\overline{\Lambda}_-^\infty) = D_H(\overline{\Lambda}_+^\infty) , \quad (7.19)$$

woraus folgt:

$$D_H^{(1)} = D_H^{(2)} \quad . \quad (7.20)$$

Für die Bestimmung der fraktalen Dimension genügt es also, eine der partiellen Dimensionen zu bestimmen. Nach den Erläuterungen aus Abschnitt 5.3 ist dies mit Hilfe der Streudaten möglich. Irreguläre Streuung tritt genau dann auf, wenn die eindimensionale Mannigfaltigkeit asymptotischer Anfangsbedingungen einer Mannigfaltigkeit in  $\bar{\Gamma}$  entspricht, die Kurven in  $\bar{\Lambda}_-$  transversal schneidet. Im Falle irregulärer Streuung erhält man so eine horizontale Kurve, wie sie oben zur Bestimmung von  $D_H^{(1)}$  herangezogen wurde. Der Schnittpunkt einer solchen Kurve mit einer Kurve aus  $\bar{\Lambda}_-$  entspricht dann einer Streusingularität.  $D_H^{(1)}$  ist somit durch die Dimension der Menge der Streusingularitäten gegeben.

Im Hinblick auf die Beziehung (7.12) bedeutet dies, daß man aus der freien Energie nicht nur die partielle Dimension in Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit, sondern mit  $D_H(\Lambda) = 2D_H(C)$  auch die Dimension von  $\Lambda$  erhält.

### 7.3 Die Entropiefunktion

Aus der Definition (7.7) folgt, daß die Energie ein Maß dafür ist, wie schnell die Längen  $l_i^{(n)}$  mit wachsendem  $n$  kleiner werden. Für größer werdendes  $n$  gibt es i. a. mehr und mehr Indizes  $i$ , die über (7.7) einer vorgegebenen Energie  $E$  entsprechen. Die Anzahl dieser verschiedenen Indizes bezeichne ich mit  $W(n, E)$ . Die Entropiefunktion  $S(E)$  ist dann wie folgt definiert [Koh88, BohRan87]:

$$W(n, E) \sim e^{S(E)n} \quad . \quad (7.21)$$

Die Funktion  $S(E)$  charakterisiert somit die Verteilung der Längenskalen der zugrundeliegenden Menge. Man kann durch analoges Vorgehen wie beim Übergang von den verallgemeinerten Dimensionen  $D_q$  zur  $f(\alpha)$ -Kurve mit Hilfe der Sattelpunkt-Methode zeigen, daß  $S(E)$  und  $\beta F(\beta)$  Legendre-Transformierte sind, d. h.:

$$F = E - \beta^{-1} S \quad (7.22a)$$

$$\frac{dS}{dE} = \beta \quad . \quad (7.22b)$$

Setzt man die Thermodynamik von Spinketten voraus, so folgt (7.22) direkt aus der in Abschnitt 7.1.2 besprochenen Beziehung zwischen Spinketten und Symbolischer Dynamik. In diesem Fall bilden (7.8) und (7.21) nichts anderes als eine *kanonische* bzw. *mikrokanonische* Beschreibung des Spinsystems. Im thermodynamischen Limes sind diese Ensembles äquivalent, und konsequenterweise sind  $S(E)$  und  $\beta F(\beta)$  Legendre-Transformierte. Die Entropie-Energie-Funktion für das Zwei-Mulden-System mit  $k = 1.08$  ist in Abbildung 7.2 dargestellt. Aus (7.22) folgt mit (7.11), daß das Maximum von

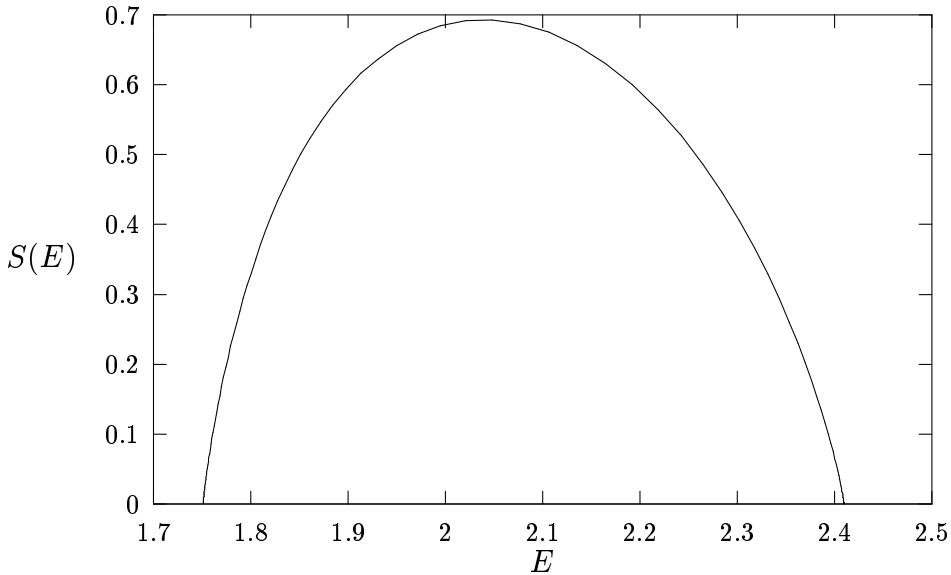


Abbildung 7.2: Die Entropie–Energie–Funktion des Zwei–Mulden–Systems für  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.08$ .

$S(E)$  durch  $K_0$  gegeben ist. Man erkennt, daß es ein endliches Energienintervall  $[E_{\min}, E_{\max}]$  gibt, in dem die Entropie größer oder gleich 0 ist. Es gibt somit ein endliches Intervall von Längenskalen, das man direkt aus der Entropie–Energie–Funktion ablesen kann.  $E_{\min}$  entspricht der kleinsten,  $E_{\max}$  der größten Rate, mit der Längen  $l_i^{(n)}$  mit wachsendem  $n$  kleiner werden.

Für große  $n$  wird die Breite der Streifen  $\bar{\Lambda}_i^n$  beliebig klein. Das Verhalten von Punkten, die im Schnitt eines solchen Streifens mit einer horizontalen Kurve liegen, unter  $F^n$  kann somit durch die linearisierte Abbildung  $DF^n$  beschrieben werden. Eine beliebige horizontale Kurve in  $\bar{\Lambda}_i^n$  der Länge  $l_i^{(n)}$  wird unter  $F^n$  auf eine horizontale Kurve abgebildet, deren Länge im wesentlichen durch die Breite von  $\bar{\Gamma}$  gegeben ist. Auf jeden Fall ist die Länge der Bildkurve aufgrund der Kompaktheit von  $\bar{\Gamma}$  für alle  $i$  und  $n$  beschränkt. Da das Verhalten von  $DF^n$  in Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit durch den größten Eigenwert von  $DF^n$  bestimmt wird, bedeutet dies, daß das Produkt aus größtem Eigenwert und  $l_i^{(n)}$  unabhängig von  $i$  und  $n$  beschränkt ist. Ein Vergleich von (6.56) und (7.7) zeigt dann, daß man die Energie  $E$  als lokalen Lyapunov–Exponenten auffassen kann. Das Intervall  $[E_{\min}, E_{\max}]$  läßt sich somit auch als das Spektrum aller lokalen Lyapunov–Exponenten interpretieren.

In Tabelle 7.1 sind die für ein dynamisches System definierten thermodynamischen Größen zusammen mit ihrer Bedeutung für Spinketten dargestellt.

dynamisches System	Spinkette
$n$	Zahl der Spins
Symbolfolge $(s_0 \dots s_{n-1})$	Mikrozustand
$\beta$	$1/k_B T$
$(l_i^{(n)})^\beta = e^{-\beta E_i n}$	Boltzmann-Faktor
$\sum_{i=0}^{W(n)} (l_i^{(n)})^\beta$	Zustandssumme
$E$	Energie pro Spin (Makrozustand)
$W$	Zahl der Mikrozustände
$S$	Entropie pro Spin (Makrozustand)
$F$	freie Energie pro Spin (Makrozustand)

Tabelle 7.1: Zur Analogie zwischen dynamischen Systemen und der Thermo-dynamik von Spinketten.

## 7.4 Das bedingt invariante Maß

In die Definition der freien Energie gehen ausschließlich Längen ein. In der Regel macht die Funktion  $\beta F(\beta)$  somit nur eine Aussage über geometrische Eigenschaften von  $\Lambda$ . Ist das System hyperbolisch, läßt sich eine einfache Beziehung zwischen natürlichem Maß und Längenskalen herleiten.

Zu diesem Zweck diskutiere ich das *bedingt invariante Maß* (engl. conditionally invariant measure), das auf der instabilen Mannigfaltigkeit der invarianten Menge definiert ist. Es beschreibt, wie Trajektorien eine Umgebung der invarianten Menge verlassen. Eine mögliche Umgebung ist z. B. durch  $\overline{\Gamma}$  gegeben. Man betrachtet zunächst die bedingte Wahrscheinlichkeit, mit der die verschiedenen Bereiche von  $\overline{\Gamma}$  von einem Ensemble von Trajektorien besucht werden, die mindestens  $n$  sukzessive Urbilder in  $\overline{\Gamma}$  haben. Genau die Punkte in  $\overline{\Lambda}_+^n$  erfüllen diese Bedingung. Die Verteilung erhält man, indem man von einem gleichmäßig verteilten Ensemble von Anfangsbedingungen in  $\overline{\Lambda}_-$  ausgeht und die Bilder der vertikalen Streifen  $\overline{\Lambda}_{-i}^n$  unter  $F^n$ , also die horizontalen Streifen  $\overline{\Lambda}_{+i}^n$  und die resultierende Verteilung dort betrachtet. Man beachte, daß eine Teilmenge, die schon unter der nächsten Iteration  $\overline{\Gamma}$  verläßt, ein von 0 verschiedenes Maß besitzen kann. Neben den Punkten in  $\overline{\Lambda}_- \cap \overline{\Lambda}_+^n$  werden auch die Punkte berücksichtigt, die die "Löcher" in  $\overline{\Lambda}_+^n$  zwischen den Streifen  $\overline{\Lambda}_{-i}^n$  "ausfüllen". Das bedingt invariante Maß erhält man nun durch den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ . Wie aus der Konstruktion hervorgeht, ist es auf  $\overline{\Lambda}_+^\infty$  definiert.

In den Streifen  $\overline{\Lambda}_{+i}^n$  ist die Dichte des Maßes, das sich aus der gleichmäßigen Verteilung in  $\overline{\Lambda}_{-i}^n$  unter Anwendung von  $F^n$  ergibt, i. a. nicht konstant. Die Dichte ist aber stetig. Wesentlich ist es nun, daß diese Stetigkeit auch im Limes  $n \rightarrow \infty$  erhalten bleibt. Für hyperbolische, zweidimensionale Abbil-

dungen kann man allgemein zeigen, daß die Dichte des bedingt invarianten Maßes stetig ist [SzéTél86, Tél87, Tél90, KovTél90]. Ich verzichte an dieser Stelle auf die detaillierte Darstellung der Argumentation, die zu dieser Schlußfolgerung führt, da dies zuviel Raum einnehmen würde<sup>2</sup>.

Ich möchte an dieser Stelle nur das Argument darstellen, warum die gleichmäßige Hyperbolizität für die Stetigkeit von entscheidender Bedeutung ist. Man betrachtet dazu ein Verfahren zur Ermittlung des bedingt invarianten Maßes, das von einem gleichmäßig verteilten Ensemble von Anfangsbedingungen in  $\bar{\Gamma}$  ausgeht. Approximationen des bedingt invarianten Maß ergeben sich dann mit wachsendem  $n$  durch die Verteilungen in den Streifen  $F^n(\bar{\Lambda}_-^n)$ . Geht man von einem endlichen Ensemble aus, so gibt es aufgrund der von 0 verschiedenen Entweichrate ein endliches  $n$ , für das keine Trajektorie mehr im System verweilt. Man kann dieses Problem beheben, indem man nach jeder Iteration der Abbildung die gleiche Anzahl von Trajektorien, die  $\bar{\Gamma}$  verlassen haben, in das System zurückführt. Formal geschieht dies dadurch, daß man in jedem Bereich von  $\bar{\Gamma}$  die dort vorhandene Anzahl von Ensembletrajektorien mit  $e^\kappa$  multipliziert. So entsteht eine stationäre Verteilung, die in den Streifen  $\bar{\Lambda}_{+i}^n$  konzentriert ist und das bedingt invariante Maß approximiert. Betrachtet man einen bestimmten vorgegebenen Phasenraumbereich, so können Ensemblepunkte zum einen über die stabile Mannigfaltigkeit und zum anderen über die Multiplikation mit  $e^\kappa$  in diesen Bereich gelangen. Singularitäten in der Dichte des Maßes bilden sich genau an den Stellen aus, an denen dieses Verfahren zu einer Akkumulation von Trajektorien führt. Die gleichmäßige Hyperbolizität stellt nun sicher, daß in jedem Punkt der instabilen Mannigfaltigkeit unter Anwendung der Abbildung effektiv Trajektorien weggeführt werden. Dies geschieht mit einer Mindestrate, die implizit durch  $\gamma$  (siehe Definition 2) gegeben ist. Im Limes  $n \rightarrow \infty$  kann sich so in einem gleichmäßig hyperbolischen System an jeder Stelle der instabilen Mannigfaltigkeit ein endlicher Wert der Dichte einstellen.

Man beachte, daß hier die Eigenschaft  $\gamma < 1$  von entscheidender Bedeutung ist. Eine lokale ‘‘Expansionsrate’’ 1 führt zu einer Singularität in der Dichte des bedingt invarianten Maßes.

Ich gehe nun auf den Zusammenhang zwischen natürlichem und bedingt invariantem Maß ein. Für  $n \rightarrow \infty$  entsprechen Trajektorien zu Anfangsbedingungen in  $\bar{\Lambda}_{-i}^n$  langlebigen Transienten, d. h. die bedingt invariante Verteilung approximiert in den Schnitten  $\bar{\Lambda}_{+j}^n \cap \bar{\Lambda}_{-i}^n$  das natürliche Maß. Das bedeutet, daß das natürliche Maß eines Streifens  $\bar{\Lambda}_{+j}^n$  gleich dem bedingt invarianten Maß dieses Streifens ist. Man erhält somit das natürliche Maß aus dem bedingt invarianten Maß durch Einschränkung auf die vertikalen Streifen  $\bar{\Lambda}_{-i}^n$

---

<sup>2</sup>Im wesentlichen zeigt man, daß die Dynamik auf der instabilen Mannigfaltigkeit einer zweidimensionalen hyperbolischen Abbildung äquivalent ist mit der Dynamik einer expansiven eindimensionalen Abbildung. Für letztere läßt sich die Stetigkeit der Dichte mit Hilfe einer verallgemeinerten Frobenius–Perron–Theorie nachweisen. Details sind in der zitierten Literatur zu finden.

und entsprechende Renormierung. Da das bedingt invariante Maß in  $\overline{\Lambda}_{+j}^n$  stetig ist, ist das Maß von  $\overline{\Lambda}_{+j}^n \cap \overline{\Lambda}_{-i}^n$  proportional zur Breite von  $\overline{\Lambda}_{-i}^n$ :

$$\mu^{(n)}(\overline{\Lambda}_{+j}^n \cap \overline{\Lambda}_{-i}^n) = \frac{c_{ji}^{(n)} l_i^{(n)}}{\sum_{k=1}^{W(n)} c_{jk}^{(n)} l_k^{(n)}} . \quad (7.23)$$

Der Index in  $\mu^{(n)}$  soll verdeutlichen, daß es sich um die Approximation des natürlichen Maßes auf dem Niveau  $n$  einer erzeugenden Zerlegung und nicht um das exakte natürliche Maß handelt. Wegen der Kompaktheit von  $\overline{\Gamma}$  sind die Proportionalitätskonstanten  $c_{ji}^{(n)}$  durch von  $i$ ,  $j$  und  $n$  unabhängige Konstanten beschränkt. Aufgrund des Prinzips der beschränkten Variation läßt sich der Nenner des rechts stehenden Ausdrucks daher durch die Entweichrate ausdrücken. Für große  $n$  erhält man für das natürliche Maß:

$$\mu(\overline{\Lambda}_{+j}^n \cap \overline{\Lambda}_{-i}^n) \sim e^{\kappa n} l_i^{(n)} . \quad (7.24)$$

Damit ist eine Beziehung zwischen Längenskalen und natürlichem Maß hergestellt. Eine solche Beziehung ist Voraussetzung, um die in Kapitel 6 eingeführten Mittelwerte bezüglich des natürlichen Maßes mit Hilfe der freien Energie beschreiben zu können. Dies geschieht im folgenden Abschnitt.

## 7.5 Die freie Energie und die Größen $D_q$ , $K_q$ und $\lambda_q$

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich die Spektren  $D_q$ ,  $K_q$  und  $\lambda_q$  aus der freien Energie herleiten lassen. Man kann damit durch Messung von Längen nicht nur charakteristische Größen der Geometrie der invarianten Menge sondern auch charakteristische Größen der stationären Verteilung und der Dynamik bestimmen!

### 7.5.1 Beziehung zwischen $\beta F(\beta)$ und $D_q$

Analog zum Vorgehen in Abschnitt 7.2.2 führt man zunächst partielle verallgemeinerte Dimensionen  $D_q^{(1)}$  und  $D_q^{(2)}$  in Richtung der instabilen bzw. stabilen Richtung ein, deren Summe dann  $D_q$  liefert. Aufgrund der reversiblen Symmetrie  $I_0$  gilt analog zu (7.20) die Gleichung  $D_q^{(1)} = D_q^{(2)}$ , so daß die Bestimmung einer partiellen Dimension zur Angabe von  $D_q$  ausreicht.

Im folgenden wird dargelegt, wie sich  $D_q^{(1)}$  mit Hilfe der freien Energie ermitteln läßt. Zu diesem Zweck leitet man eine Beziehung zwischen (6.42) und der Zustandssumme (7.8) her. Aufgrund des Prinzips der beschränkten

Variation kann man Proportionalitätskonstanten gleich 1 setzen, so daß sich für geeignetes  $\delta$  mit (7.24) ergibt:

$$Z_D(q, \tau, \delta) = \sum_i \frac{e^{\kappa q n} (l_i^{(n)})^q}{(l_i^{(n)})^\tau} = e^{\kappa q n} \sum_i (l_i^{(n)})^{q-\tau} . \quad (7.25)$$

Das Supremum bzw. Infimum für die unterschiedlichen  $(q, \tau)$ -Bereiche in (6.42) wird hier angenommen, da eine erzeugende Zerlegung vorliegt. Der Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0$  entspricht nun  $n \rightarrow \infty$ . Dies ist eine wesentliche Eigenschaft einer erzeugenden Zerlegung. Der Übergang zu unendlich langen Zeiten impliziert das Verschwinden der Durchmesser der überdeckenden Mengen.

Nach der Definition (6.44) ist  $\tau(q)$  durch die ‘‘Sprungstelle‘‘ gegeben, an der der Wert von  $Z_D(q, \tau)$  von 0 auf  $\infty$  wechselt. Für große, aber endliche  $n$  ist diese Stelle durch die Forderung  $Z_D(q, \tau) = O(1)$  gegeben. Aus (7.8) und (6.45) folgt dann:

$$\beta F(\beta)|_{\beta=q-(q-1)D_q^{(1)}} - \kappa q = 0 . \quad (7.26)$$

Dies ist eine implizite Gleichung zur Bestimmung von  $D_q^{(1)}$ . Führt man eine Legendre–Transformation durch, so erhält man eine explizite Beziehung zwischen dem Singularitäten–Spektrum  $f^{(1)}(\alpha^{(1)})$  in Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit und der Entropie  $S(E)$ . Diese Beziehung wird nun hergeleitet.

Differenzieren der Gleichung (7.26) nach  $q$  liefert:

$$\left. \frac{d\beta F(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=q-(q-1)D_q^{(1)}} = \frac{\kappa}{1 - \frac{d}{dq}(q-1)D_q^{(1)}} . \quad (7.27)$$

Mit  $(d/d\beta)\beta F(\beta) = E$  (vgl. (7.22)) und (6.35) folgt daraus:

$$E = \frac{\kappa}{1 - \alpha^{(1)}} . \quad (7.28)$$

Es gibt somit eine (1:1)–Beziehung zwischen den Skalenexponenten  $\alpha^{(1)}$  und den lokalen Expansionsraten  $E$ . Mit dieser Gleichung und der Beziehung (6.34) erhält man ferner:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\alpha^{(1)}) &= \left(1 - \frac{\kappa}{E}\right) q - (q-1)D_q^{(1)} \\ &= q - (q-1)D_q^{(1)} - \frac{\kappa q}{E} \end{aligned} \quad (7.29)$$

Wegen (7.26) ist dies gleichbedeutend mit

$$f^{(1)}(\alpha^{(1)}) = \beta - \frac{\beta F(\beta)}{E} . \quad (7.30)$$

Auf der rechten Seite steht bis auf den Faktor  $1/E$  die Legendre–Transformierte der freien Energie (vgl. (7.22)). Damit ergibt sich als Resultat:

$$f^{(1)}(\alpha^{(1)}) = \frac{S(E)}{E} \Big|_{E=\frac{\kappa}{1-\alpha^{(1)}}} . \quad (7.31)$$

Die mit Hilfe der freien Energie für das Zwei–Mulden–System mit  $k = 1.08$  berechneten Spektren  $D_q^{(1)}$  und  $f^{(1)}(\alpha^{(1)})$  sind in Abbildung 7.3 dargestellt. In einem endlichen Intervall  $[\alpha_{\min}^{(1)}, \alpha_{\max}^{(1)}]$  ist  $f^{(1)}(\alpha^{(1)})$  größer oder gleich 0. Außerhalb dieses Intervalls ist der Wert von  $f^{(1)}(\alpha^{(1)})$  formal  $-\infty$ .  $\alpha_{\min}^{(1)}$  ist der Exponent, der das Skalenverhalten des Maßes in den Gebieten des Trägers beschreibt, in denen es am “dichtesten” liegt. Entsprechend beschreibt  $\alpha_{\max}^{(1)}$  das Verhalten in den Gebieten, in denen das Maß am “dünnsten” liegt. In beiden Fällen ist in diesem Beispiel die Dimension der Gebiete 0. Das Maximum der  $f^{(1)}(\alpha^{(1)})$ –Kurve gibt nach (6.32) und (6.34) die fraktale Dimension des Trägers an. Der Punkt, an dem der Graph die Winkelhalbierende berührt, ist nach (6.38) durch die Informationsdimension gegeben.

### 7.5.2 Beziehung zwischen $\beta F(\beta)$ und $K_q$

In der Diskussion in Kapitel 4 wurde erörtert, daß mit einem Streifen  $\bar{\Lambda}_{-i}^n$  eindeutig eine Symbolfolge der Länge  $n$  verbunden ist. Trajektorien mit Anfangsbedingungen in  $\bar{\Lambda}_{-i}^n$  stimmen in ihren ersten  $n$  Symbolen überein. Die Wahrscheinlichkeit, einen Trajektorienpunkt in einem Streifen  $\bar{\Lambda}_{-i}^n$  vorzufinden, ist somit gleich der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der zu diesem Streifen gehörenden Symbolfolge. Also sind die in Abschnitt 6.6 eingeführten  $p_i^{(n)}$  ebenfalls proportional zu  $e^{\kappa n} l_i^{(n)}$ . Mit einer analogen Argumentation wie in Unterabschnitt 7.5.1 erhält man aus der Definition (6.53) für  $K_q$  den Ausdruck:

$$K_q = \frac{q}{q-1} (F(q) - \kappa) . \quad (7.32)$$

Abbildung 7.4 zeigt als Beispiel die verallgemeinerten Entropien für das Zwei–Mulden–System mit  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.08$ .

Wegen  $\kappa = F(1)$  folgt im Limes  $q \rightarrow 1$  aus (7.32):

$$K_1 = \frac{d}{d\beta} F(\beta) \Big|_{\beta=1} . \quad (7.33)$$

Die KS–Entropie ergibt sich somit aus der Ableitung von  $F(\beta)$  (nicht  $\beta F(\beta)$ !) an der Stelle  $\beta = 1$ .

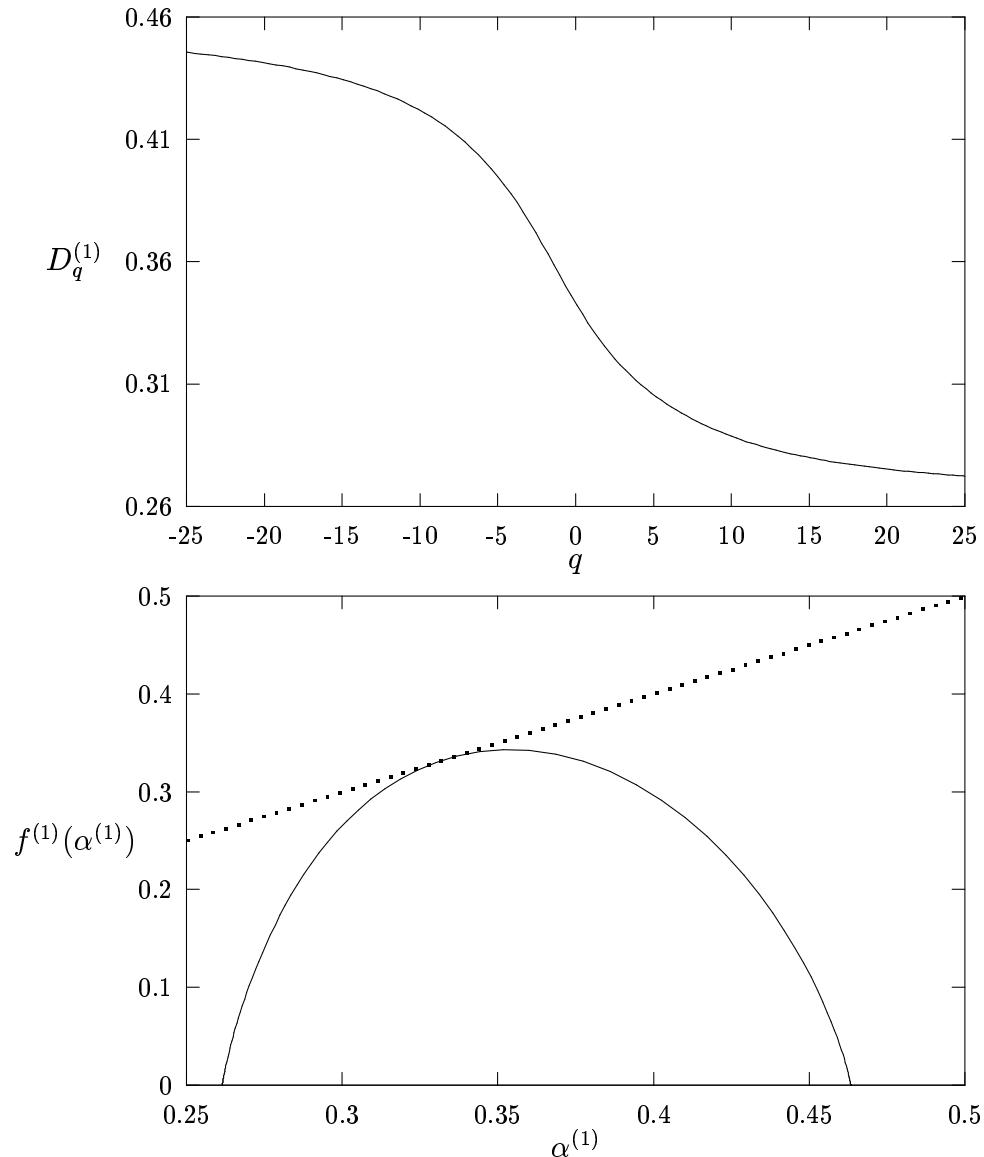


Abbildung 7.3: Verallgemeinerte Dimensionen  $D_q^{(1)}$  und Singularitäten-Spektrum  $f^{(1)}(\alpha^{(1)})$  für das Zwei-Mulden-System mit  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.08$ . Im unteren Diagramm ist zusätzlich der Graph von  $f^{(1)} = \alpha^{(1)}$  dargestellt.

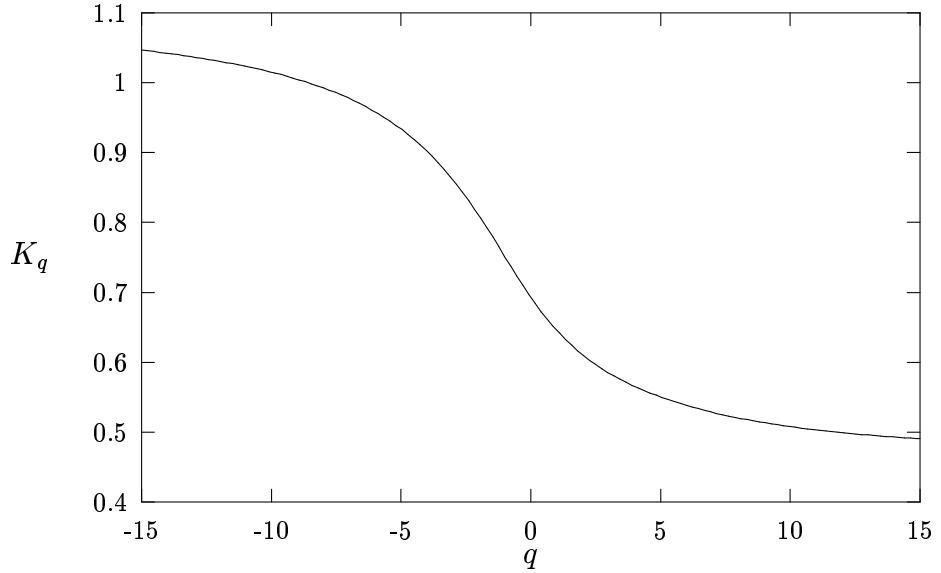


Abbildung 7.4: Verallgemeinerte Entropien des Zwei–Mulden–Systems für  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.08$ .

### 7.5.3 Beziehung zwischen $\beta F(\beta)$ und $\lambda_q$

Im Falle einer erzeugenden Zerlegung lassen sich die verallgemeinerten Lyapunov–Exponenten in einer zu (6.58) äquivalenten Weise einführen ([BecSch93] Seite 164ff). Wie in Abschnitt 7.3 diskutiert, sind die Längen  $l_i^{(n)}$  für große  $n$  proportional zu den inversen Eigenwerten der Abbildung  $DF^n$  in Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten  $p_i^{(n)}$  und aufgrund des Prinzips der beschränkten Variation lässt sich (6.58) damit wie folgt ausdrücken:

$$\lambda_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{qn} \ln \sum_i p_i^{(n)} (l_i^{(n)})^{-q} . \quad (7.34)$$

Die Proportionalität von  $p_i^{(n)}$  und  $e^{\kappa n} l_i^{(n)}$  liefert dann:

$$\lambda_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{qn} \ln e^{\kappa n} \sum_i (l_i^{(n)})^{1-q} , \quad (7.35)$$

woraus mit (7.8) folgt:

$$\lambda_q = \frac{1}{q} (\kappa - (1-q)F(1-q)) . \quad (7.36)$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Lyapunov–Exponenten und der freien Energie hergestellt. Abbildung 7.5 zeigt als Beispiel die verallgemeinerten Lyapunov–Exponenten für das Zwei–Mulden–System mit  $k = 1.08$ .

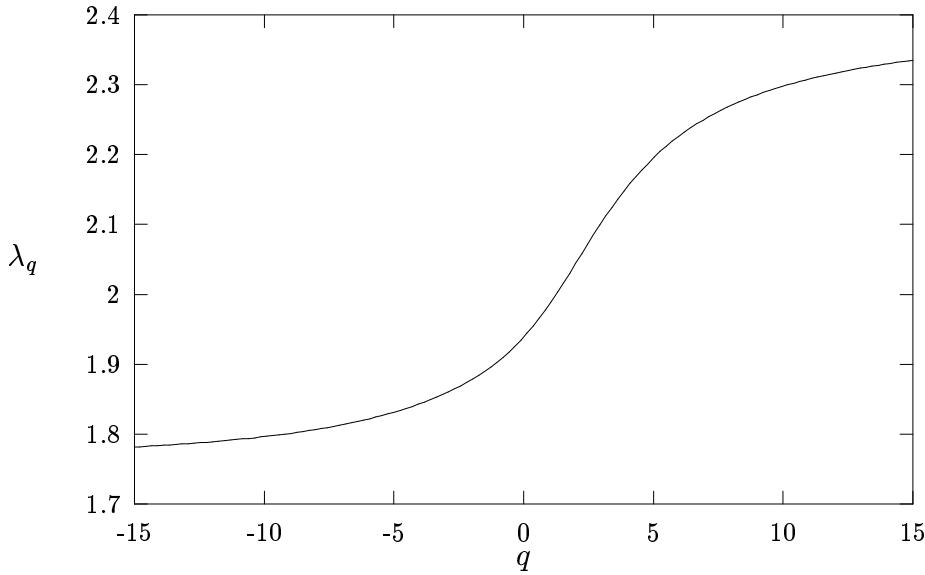


Abbildung 7.5: Verallgemeinerte Lyapunov–Exponenten des Zwei–Mullen–Systems für  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.08$ .

Im Limes  $q \rightarrow 0$  erhält man den mittleren Lyapunov–Exponenten der invarianten Menge:

$$\lambda = \lim_{q \rightarrow 0} \left( \frac{\kappa - F(1-q)}{q} + F(1-q) \right). \quad (7.37)$$

Wegen  $\kappa = F(1)$  ergibt sich daraus:

$$\lambda = \kappa + \left. \frac{d}{d\beta} F(\beta) \right|_{\beta=1} \quad (7.38)$$

oder anders ausgedrückt:

$$\lambda = \left. \frac{d}{d\beta} \beta F(\beta) \right|_{\beta=1}. \quad (7.39)$$

Das Intervall  $[\lambda_\infty, \lambda_{-\infty}]$  gibt das Spektrum der möglichen Lyapunov–Exponenten wieder. Ist man an diesem Spektrum interessiert, so ist es günstiger, statt  $\lambda_q$  die  $S(E)$ –Funktion zu betrachten und daraus das Intervall  $[E_{min}, E_{max}]$  zu bestimmen. Dies liefert genauere Ergebnisse, was auf die implizit durchgeführte Legendre–Transformation zurückzuführen ist.

Die bisherige Diskussion in diesem Kapitel hat gezeigt, daß alle in Kapitel 6 eingeführten Größen aus der freien Energie herleitbar sind. Die Resultate sind in Tabelle 7.2 zusammengefaßt.

Entweichrate	$\beta F(\beta) _{\beta=1} = \kappa$
Hausdorff–Dimension	$\beta F(\beta) _{\beta=D_0^{(1)}} = 0$
Topologische Entropie	$-\beta F(\beta) _{\beta=0} = K_0$
Lyapunov–Exponent	$(d/d\beta)\beta F(\beta) _{\beta=1} = \lambda$
Verallgemeinerte Dimensionen	$\beta F(\beta) _{\beta=q-(q-1)D_q^{(1)}} = \kappa q$
Singularitäten–Spektrum	$f^{(1)}(\alpha^{(1)}) = \frac{S(E)}{E} \Big _{E=\frac{\kappa}{1-\alpha^{(1)}}}$
Verallgemeinerte Entropien	$K_q = \frac{q}{q-1} (F(q) - \kappa)$
Verallgemeinerte Lyapunov–Exponenten	$\lambda_q = \frac{1}{q} (\kappa - (1-q)F(1-q))$

Tabelle 7.2: Beziehungen zwischen  $\beta F(\beta)$  bzw.  $S(E)$  und den Spektren  $D_q$ ,  $f(\alpha)$ ,  $K_q$  und  $\lambda_q$ .

Man ist nun in der Lage, Beziehungen zwischen einzelnen charakteristischen Größen herzuleiten. Mit (7.33) und (7.38) ergibt sich ein Zusammenhang zwischen KS–Entropie, Entweichrate und Lyapunov–Exponent:

$$\kappa = \lambda - K_1 \quad . \quad (7.40)$$

Besteht die invasive Menge aus nur einem instabilen Orbit, wie z. B. im System aus zwei harten Scheiben, so ist die Entweichrate durch den Lyapunov–Exponenten dieses Orbits gegeben. Gleichung (7.40) besagt dann, daß ‘‘Chaos’’, d. h.  $K_1 > 0$ , für eine Verlängerung der Verweildauer im Wechselwirkungsbereich sorgt.

Die Beziehung

$$\lambda(1 - D_1^{(1)}) = \kappa \quad , \quad (7.41)$$

die zuerst von KANTZ und GRASSBERGER [KanGra85] als Vermutung formuliert wurde, lässt sich nun ebenfalls herleiten [Tél90]. Man betrachtet zu diesem Zweck die Gleichung (7.27). Für  $q = 1$  folgt daraus:

$$\frac{d\beta F(\beta)}{d\beta} \Big|_{\beta=1} (1 - D_1^{(1)}) = \kappa \quad . \quad (7.42)$$

Mit (7.39) erhält man (7.41).

Berücksichtigt man (7.40) so erhält man einen Zusammenhang zwischen Informationsdimension, KS–Entropie und Lyapunov–Exponent:

$$K_1 = \lambda D_1^{(1)} \quad . \quad (7.43)$$

Diese Gleichung erlaubt eine informationstheoretische Interpretation. Die Informationsdimension ist ein Maß dafür, wie die Shannon–Information der natürlichen Verteilung bei Vergrößerung der Auflösung zunimmt (siehe Unterabschnitt 6.4.3). Legt man eine feiner werdende erzeugende Zerlegung zugrunde, so kann man jeden Schritt in der Verfeinerung als Berücksichtigung eines weiteren Symbols auffassen. In diesem Sinne gibt die Informationsdimension den Informationsgewinn pro Symbol an. Vollzieht man den Grenzübergang zu unendlich feiner Auflösung, so kann man die Informationsdimension als eine Informationsdichte, d. h. Information pro Symbol interpretieren. Im Gegensatz dazu gibt die KS–Entropie den Informationsverlust pro Zeitschritt, d. h. den Informationsverlust pro Zeit und pro Symbol an (siehe Abschnitt 6.6.1). Sie ist somit als eine Entropieflußdichte oder äquivalent als negative Informationsflußdichte aufzufassen. Konsequenterweise beschreibt der Lyapunov–Exponent die Geschwindigkeit, mit der die Information bzw. die Entropie im System “fließt”<sup>3</sup>.

## 7.6 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die thermodynamischen Potentiale  $\beta F(\beta)$  und  $S(E)$  des Zwei–Mulden–Systems für ausgewählte Parameterwerte diskutiert. Die freie Energie wird gemäß der in Abschnitt 7.2 beschriebenen Methode bestimmt. Dabei werden für die Kurve  $l = 0$  in  $\Gamma$  die Längen  $l_i^{(n)}$  numerisch berechnet. Über eine Legendre–Transformation ergibt sich daraus die Entropie–Energie–Funktion. Ich beschränke mich hier auf die Darstellung der freien Energie und der Entropie. Die übrigen charakteristischen Größen erhält man entsprechend obiger Diskussion. Für das Zwei–Mulden–System mit den Parametern  $k = 1.08, 1.26$  und  $1.9$  sind die Funktionen in Abbildung 7.6 und 7.7 dargestellt. Für  $k = 1.08$  wurde die freie Energie dabei aus den Längen zu  $n = 11$  und  $n = 10$  bestimmt, für  $k = 1.26$  aus den Längen zu  $n = 8$  und  $n = 7$  und für  $k = 1.9$  aus den Längen zu  $n = 6$  und  $n = 5$  (vgl. (7.9)).

In der Tabelle 7.3 sind die Werte einiger charakteristischer Größen angegeben. In der ersten Spalte sind jeweils die Niveaus der Längen angegeben, aus denen die freie Energie berechnet wurde:  $\beta F(\beta) = \ln(Z_{n_1}/Z_{n_2})$  (vgl. (7.9)). Die zweite Spalte gibt an, wieviele unterschiedliche Intervalle zu den jeweiligen Niveaus existieren. Ferner sind die Entweichrate, die (partielle) Hausdorff–Dimension, die topologische Entropie und der Lyapunov–Exponent angegeben.

---

<sup>3</sup>Für weitere Interpretationen im Sinne der Informationstheorie verweise ich auf die Literatur [KanGra85, Gra86].

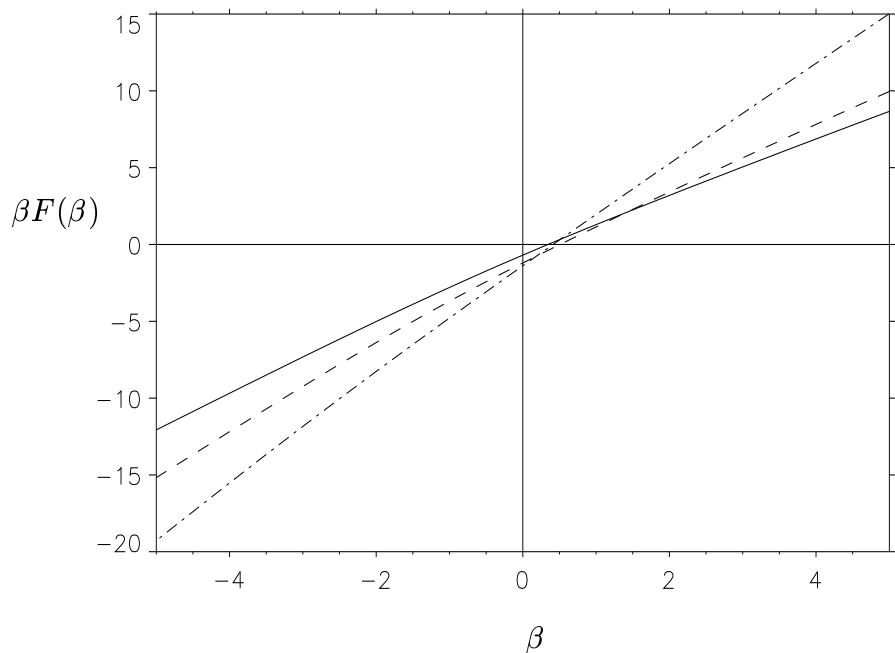


Abbildung 7.6:  $\beta F(\beta)$  für das Zwei–Mulden–System mit  $R_0 = 1.1$ . Bezogen auf den linken Rand sind von oben nach unten die Graphen für  $k = 1.08$ ,  $k = 1.26$  und  $k = 1.9$  dargestellt.

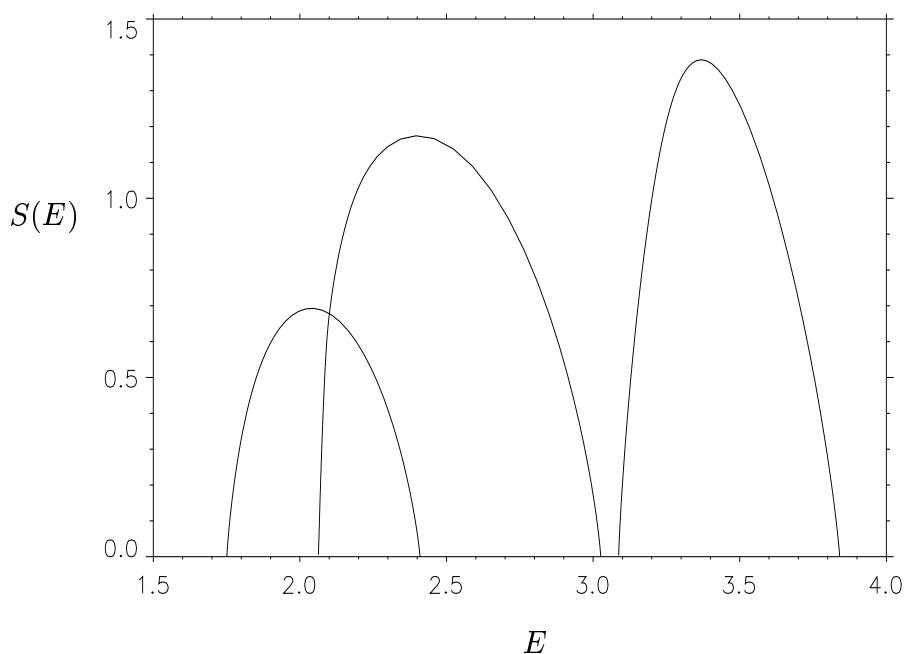


Abbildung 7.7:  $S(E)$  für das Zwei–Mulden–System mit  $R_0 = 1.1$ . Von links nach rechts gehören die Kurven zu den Parametern  $k = 1.08$ ,  $1.26$  und  $1.9$ .

$k = 1.08$					
$n_1, n_2$	$W(n_1), W(n_2)$	$\kappa$	$D_0^{(1)}$	$K_0$	$\lambda$
7,8	16,32	1.289557	0.343201	0.693147	1.929693
8,9	32,64	1.294149	0.343062	0.693147	1.941778
9,10	64,128	1.292883	0.343082	0.693147	1.938442
10,11	128,256	1.293237	0.343082	0.693147	1.938876

$k = 1.26$					
$n_1, n_2$	$W(n_1), W(n_2)$	$\kappa$	$D_0^{(1)}$	$K_0$	$\lambda$
4,5	21,68	1.151982	0.498558	1.174985	2.279038
5,6	68,220	1.146095	0.498120	1.174120	2.252481
6,7	220,712	1.147266	0.498139	1.174387	2.256681
7,8	712,2304	1.146473	0.498157	1.174324	2.255026

$k = 1.9$					
$n_1, n_2$	$W(n_1), W(n_2)$	$\kappa$	$D_0^{(1)}$	$K_0$	$\lambda$
2,3	4,16	1.958405	0.412892	1.386294	3.323346
3,4	16,64	1.958279	0.412802	1.386294	3.322758
4,5	64,256	1.958276	0.412802	1.386294	3.322743
5,6	256,1024	1.958276	0.412802	1.386294	3.322742

Tabelle 7.3: Charakteristische Größen des Zwei–Mulden–Systems mit  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.08$ ,  $k = 1.26$  und  $k = 1.9$ .

Für  $k = 1.9$  ist für alle angegebenen Größen eine sehr schnelle Konvergenz festzustellen. Die Methode liefert schon nach wenigen Schritten sehr genaue Ergebnisse. Für  $k = 1.08$  und  $k = 1.26$  ist die Konvergenz für die Entweichrate und für den Lyapunov–Exponenten langsamer. Eine Erklärung für dieses Verhalten ist in der Wahl des “Ordnungsparameters”  $n$  zu finden. Wie in Kapitel 4 erörtert, reicht die Angabe der Anzahl besuchter Potentialtöpfe i. a. nicht aus, um qualitativ verschiedene Trajektorien zu unterscheiden. Wählt man die Umgebung der invarianten Menge, die der Entscheidung über Entweichen bzw. Nichtentweichen zugrunde liegt, kleiner, so sind bessere Ergebnisse zu erzielen. Dies ist für  $k = 1.08$  auf einfache Weise möglich. Als  $\bar{\Gamma}$  eignet sich der durch das  $l$ –Intervall  $[0.35, 0.75]$  definierte Phasenraumbereich (vgl. Abbildung 4.4). Da der obere und untere Teil von  $\Gamma$  dynamisch nicht verbunden sind, kann man sich auf positive  $l$ –Werte beschränken. Die Ergebnisse sind in Tabelle 7.4 dargestellt. Die ersten beiden Spalten zeigen im Vergleich zu den ersten beiden Spalten für  $k = 1.08$  in Tabelle 7.3, daß für gleiche  $n$ –Werte mehr Intervalle existieren. Für die Entweichrate bedeutet

$n_1, n_2$	$W(n_1), W(n_2)$	$\kappa$	$D_0^{(1)}$	$K_0$	$\lambda$
5,6	16,32	1.293297	0.343075	0.693147	1.939106
6,7	32,64	1.293121	0.343083	0.693147	1.938660
7,8	64,128	1.293169	0.343082	0.693147	1.938808
8,9	128,256	1.293155	0.343082	0.693147	1.938757
9,10	256,512	1.293159	0.343082	0.693147	1.938773

Tabelle 7.4: Charakteristische Größen des Zwei–Mulden–Systems für  $k = 1.08$ . Grundlage der Berechnung ist ein Teil des Phasenraumes und nicht der ganze Phasenraum (siehe Text).

dieses Vorgehen zum Beispiel, daß eine Trajektorie als auslaufend identifiziert werden kann, obwohl sie u. U. noch weitere Potentialmulden besucht. Aus diesem Grunde ergeben sich genauere Werte. Prinzipiell ist für  $k = 1.26$  ein analoges Vorgehen möglich. Da die Definition eines geeigneten Phasenraumbereiches aufwendiger ist<sup>4</sup>, jedoch nichts wesentlich Neues liefert, verzichte ich hier darauf. Es bleibt festzuhalten, daß man bei gleichem  $n$ –Niveau umso genauere Ergebnisse erzielt, je genauer man die invariante Menge im Phasenraum lokalisieren kann, d. h. je kleiner die Umgebung der invarianten Menge gewählt werden kann, die der Definiton der Längen  $l_i^{(n)}$  zugrunde gelegt wird.

Die numerischen Resultate für die topologische Entropie verdienen eine gesonderte Betrachtung. Während für die anderen Größen mit wachsendem  $n$  eine wachsende Konvergenz festzustellen ist, ändert sich die topologische Entropie in den Fällen  $k = 1.08$  und  $k = 1.9$  mit wachsendem  $n$  nicht. Die topologische Entropie gibt an, mit welcher Rate die Anzahl der erlaubten Symbolfolgen der Länge  $n$  mit  $n$  anwächst. Anders ausgedrückt beschreibt  $K_0$  die Rate, mit der die Anzahl der periodischen Orbits mit der Periode wächst. Aufgrund der einfachen hierarchischen Gliederung erhält man für  $k = 1.08$  und  $k = 1.9$  sofort die exakten Werte  $K_0 = \ln 2 = 0.693147\dots$  bzw.  $K_0 = \ln 4 = 1.386294\dots$ . Für  $k = 1.26$  ist die Angabe der topologischen Entropie dagegen nicht direkt möglich. Hier ändert sich der numerisch erzielte Wert für die unterschiedlichen  $n$ –Niveaus entsprechend. Den exakten Wert der topologischen Entropie erhält man aus der Übergangsmatrix  $A$  (siehe (4.7)). Man betrachtet dazu die  $n$ –ten Potenzen  $A^n$ . Ein  $n$ –periodischer Orbit  $(\overline{s_0 \dots s_{n-1}})$  existiert genau dann, wenn das Produkt  $A_{s_0 s_1} A_{s_1 s_2} \dots A_{s_{n-2} s_{n-1}} A_{s_{n-1} s_0}$  den Wert 1 ergibt. Die Summe über alle Produkte dieses Typs liefert somit die Anzahl der  $n$ –periodischen Orbits. Diese Summe ist aber durch die Spur von  $A^n$  gegeben. Es gilt also:

$$e^{K_0 n} \sim \text{Sp}(A^n) . \quad (7.44)$$

---

<sup>4</sup>Da der obere und untere Teil von  $\Gamma$  dynamisch verbunden sind, kann man sich nicht auf eine Phasenraumhälfte beschränken. Man müßte einen nicht zusammenhängenden Teil des Phasenraumes betrachten, um wesentlich bessere Ergebnisse zu erzielen.

Für große  $n$  wird der Wert von  $\text{Sp}(A^n)$  durch den größten Eigenwert von  $A$  dominiert, so daß sich  $K_0$  aus dem natürlichen Logarithmus dieses Eigenwertes ergibt. Im Fall  $k = 1.26$  bedeutet dies:  $K_0 = \ln(1 + \sqrt{5}) = 1.174359 \dots$ . Der numerisch erzielte Wert steht in sehr gutem Einklang mit dem theoretischen, was als Bestätigung für die Überlegungen in Kapitel 4 hinsichtlich der Topologie des Systems angesehen werden kann.

Bevor ich auf die  $k$ -Abhängigkeit der thermodynamischen Potentiale eingehe, diskutiere ich das Phänomen eines Phasenüberganges.

### 7.6.1 Phasenübergänge

Wesentliche Voraussetzung für die expliziten Beziehungen zwischen der freien Energie und den verallgemeinerten Dimensionen und Entropien ist die Hyperbolizität. Sie ist für die Stetigkeit des bedingt invarianten Maßes und damit letztlich für die Beziehung zwischen Längenskalen und natürlichem Maß verantwortlich. Liegt z. B. ein KAM-Torus vor, so ist das System nicht mehr hyperbolisch, und diese Beziehung hat i. a. keine Gültigkeit mehr. Verallgemeinerte Dimensionen und Entropien sind nun nicht mehr auf einfache Weise aus der freien Energie herzuleiten.

Da die freie Energie geometrische Aspekte der invarianten Menge beschreibt und da sie im Gegensatz zu den Dimensionen und Entropien vergleichsweise einfach zu bestimmen ist, spielt sie als charakteristische Größe jedoch auch im nichthyperbolischen Fall eine Rolle. Ich diskutiere nun die qualitative Gestalt von  $\beta F(\beta)$ .

Die Kurve, die zur Bestimmung der freien Energie benötigt wird, sei so gewählt, daß sie einen KAM-Torus schneidet. Für  $n \rightarrow \infty$  geht die Länge  $l_j^{(n)}$ , die zu dem KAM-Torus gehört, aufgrund des endlichen Durchmessers des Torus gegen einen von 0 verschiedenen endlichen Wert. Für  $\beta \rightarrow \infty$  wird die Zustandssumme daher durch diese Länge dominiert. Konkret gilt für große  $n$  und  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \beta F(\beta) &= \ln \frac{Z_n(\beta)}{Z_{n+1}(\beta)} \\ &\approx \ln \frac{(l_j^{(n)})^\beta}{(l_j^{(n+1)})^\beta} . \end{aligned} \quad (7.45)$$

Da das Argument des Logarithmus gegen 1 geht, verschwindet  $\beta F(\beta)$  für  $\beta \rightarrow \infty$ . Man beachte, daß es für dieses Ergebnis nicht notwendig ist, daß die Längen  $l_j^{(n)}$  gegen einen endlichen Wert konvergieren. Es ist ausreichend, wenn sie langsamer als exponentiell mit  $n$  kleiner werden. Der Einfachheit halber gehe ich jedoch weiterhin von der Existenz eines KAM-Torus und den damit verbundenen endlichen Längen aus.

	k=1.08	k=1.26	k=1.9
Entweichrate $\kappa$	1.29315	1.14	1.958276
Hausdorff–Dimension $D_H^{(1)}$	0.343082	0.4981	0.412802
Topologische Entropie $K_0$	0.693147	1.1743	1.386294
Lyapunov–Exponent $\lambda$	1.9387	2.25	3.32274

Tabelle 7.5: Charakteristische Größen des Zwei–Mulden–Systems.

Weil das Kurvenstück im Inneren des KAM–Torus für alle  $n$  die Dimension 1 besitzt, ist die partielle Dimension  $D_H^{(1)}$  der invarianten Menge aufgrund von (6.8) ebenfalls 1. Aus (7.12) folgt damit, daß die freie Energie für  $\beta = 1$  verschwindet. Auf ähnliche Weise, wie in Abschnitt 6.4.4 gezeigt wurde, daß  $f(\alpha)$  eine konkave Funktion ist (6.32b), läßt sich zeigen, daß  $\beta F(\beta)$  monoton wachsend ist [BecSch93]. Aus dem Verschwinden von  $\beta F(\beta)$  für  $\beta = 1$  und für  $\beta \rightarrow \infty$  folgt damit, daß  $\beta F(\beta)$  für alle  $\beta \geq 1$  identisch 0 ist. Aus diesen Überlegungen folgt wegen  $F(1) = \kappa$  insbesondere das Verschwinden der Entweichrate (vgl. auch Kapitel 2).

Für  $\beta < 1$  ist  $\beta F(\beta)$  kleiner als 0. Dies folgt daraus, daß die Hausdorff–Dimension durch den  $\beta$ –Wert gegeben ist, an dem sich das asymptotische Verhalten von  $e^{-\beta F(\beta)n}$  ändert [Bre+94].

Man kann dieses Verhalten der freien Energie als Phasenübergang interpretieren [JenBoh87]. Für große Werte der inversen Temperatur  $\beta$  dominieren die groben Strukturen — in diesem Fall die KAM–Tori — das Verhalten. Für  $\beta$ –Werte kleiner als 1 dominieren plötzlich die feineren Strukturen, die durch den chaotischen Anteil der Dynamik gegeben sind. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von regulärer und hyperbolischer Phase.

Diese Überlegungen zur Gestalt der freien Energie sind numerisch schwer nachzuweisen. Ein Phasenübergang bildet sich nur im thermodynamischen Limes  $n \rightarrow \infty$  aus [Bre+94]. Mit Hilfe dieser Überlegungen zur qualitativen Gestalt der freien Energie im nichthyperbolischen Fall lassen sich aber einige der folgenden numerischen Resultate erklären.

### 7.6.2 $k$ –Abhängigkeit der thermodynamischen Potentiale

Um die Abhängigkeit von  $k$  diskutieren zu können, sind in der Tabelle 7.5 noch einmal einige der numerisch bestimmten Größen zusammengefaßt. Es sind soviele Dezimalstellen angegeben, wie beim Übergang vom zweithöchsten betrachteten ( $n_1, n_2$ )–Niveau zum höchsten in den Tabellen 7.3 bzw. 7.4 konstant bleiben.

Die topologische Entropie wächst bei Erhöhung von  $k$  monoton. Dies folgt aus der Diskussion in Kapitel 5. Da bei Erhöhung von  $k$  nur neue mögliche Orbits entstehen, aber keine verloren gehen können, kann konsequenterweise die topologische Entropie nicht kleiner werden.

Das nicht monotone Verhalten der Entweichrate und der Hausdorff–Dimension in Abhängigkeit von  $k$  lässt sich aus thermodynamischer Sicht in direkten Zusammenhang mit Phasenübergängen bringen.

Für das Zwei–Mulden–System wächst im Parameterbereich zwischen  $k = 1.14$  und  $k = 1.42$  die topologische Entropie von  $\ln 2$  auf  $\ln 4$  (siehe Unterabschnitt 5.2.1). Neue Orbits entstehen in Sattel–Zentrum–Bifurkationen. Insbesondere entstehen dabei stabile Orbits, die für das Verschwinden von  $\beta F(\beta)$  für  $\beta \geq 1$  sorgen. Da stabile Orbits auf stetige Weise instabil werden — die Lyapunov–Exponenten bestehender Orbits hängen stetig von  $k$  ab — ändert sich unter der Voraussetzung, daß keine neuen Orbits entstehen, auch die freie Energie stetig mit  $k$ . Anschaulich bedeutet dies, daß  $\beta F(\beta)$ , kurz nachdem alle Orbits instabil geworden sind, die  $\beta$ –Achse in der Nähe von 1 schneidet und für  $\beta > 1$  eine von 0 verschiedene aber sehr kleine Steigung besitzt. Daraus folgt, daß die partielle Hausdorff–Dimension  $D_0^{(1)}$  sehr groß, d. h. in der Nähe von 1 ist und daß die Entweichrate sehr klein ist. Ist eine weitere  $k$ –Änderung mit einem Wachsen der Lyapunov–Exponenten verbunden, so wächst die Steigung von  $\beta F(\beta)$  im Bereich positiver  $\beta F(\beta)$ –Werte weiter an.

Mit Hilfe dieses Szenarios lässt sich nun erklären, warum die Entweichrate für  $k = 1.26$  kleiner als z. B. für  $k = 1.08$  ist. Die Ursache liegt in der vergleichsweise “gerade erst gewonnenen Hyperbolizität”. Abbildung 7.8 zeigt die aus den Niveaus  $n_1 = 5$  und  $n_2 = 6$  berechneten freien Energien für die Parameterwerte  $k = 1.22$ ,  $k = 1.24$  und  $k = 1.26$ . Mit den Methoden der Kapitel 3 und 4 lässt sich zeigen, daß die Systeme zu diesen Parameterwerten hyperbolisch und zueinander topologisch konjugiert sind, d. h. die Dynamik ist topologisch äquivalent zur Shift–Abbildung auf dem Folgenraum  $\Sigma_A^4$  (siehe Seite 67). Die Konvergenz der numerischen Werte für  $k = 1.24$  ist von ähnlicher Qualität wie die für  $k = 1.26$ , für  $k = 1.22$  ist sie schlechter. Die Konvergenz reicht aber in jedem Fall aus, um das qualitative Verhalten der freien Energie wiederzugeben. Abbildung 7.8 zeigt für positive  $\beta F(\beta)$ –Werte das oben angesprochene Wachsen von  $\beta F(\beta)$  mit  $k$ . Ein vergleichbares Verhalten der freien Energie tritt immer dann auf, wenn die Falten der instabilen Mannigfaltigkeit so weit in die Löcher zwischen den vertikalen Kurven der stabilen Mannigfaltigkeit fallen, daß das System hyperbolisch wird. Solange keine neuen Orbits entstehen, d. h. solange die topologische Entropie konstant bleibt, wächst dann z. B. die Entweichrate bei 0 beginnend stetig an. Nach den Ergebnissen in Unterabschnitt 5.2.1 tritt dieses Szenario auf komplizierte Weise in vielen Parameterbereichen auf. Aus diesem Grund hängen die thermodynamischen Größen, die  $\beta$ –Werten größer oder gleich 1 entsprechen, in sehr komplexer Weise von  $k$  ab.

Dieses Szenario erklärt nicht nur die nichtmonotone Abhängigkeit der Entweichrate und der Hausdorff–Dimension von  $k$ . Es wird darüber hinaus deutlich, daß der Lyapunov–Exponent als Ableitung von  $\beta F(\beta)$  an der Stelle  $\beta = 1$  (siehe (7.39)) ebenfalls in nichtmonotoner Weise von  $k$  abhängt und somit das Verhalten bezüglich der exemplarisch gewählten Parameterwerte in Tabelle 7.5 nicht wie im Fall der topologischen Entropie zu verallgemeinern ist.

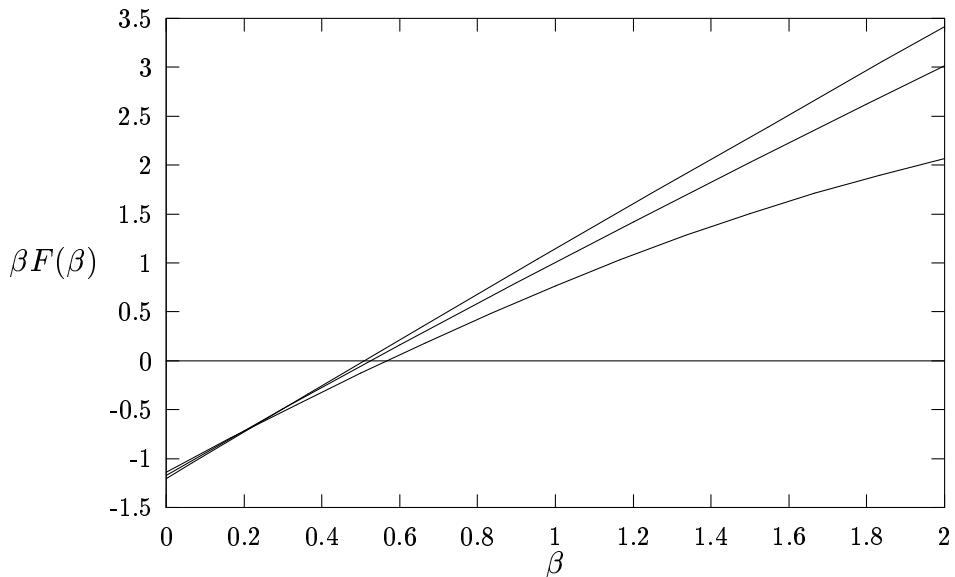


Abbildung 7.8:  $\beta F(\beta)$  für das Zwei–Mulden–System mit  $R_0 = 1.1$ . Bezogen auf den rechten Rand sind von unten nach oben die Funktionen für  $k = 1.22$ , 1.24 und 1.26 dargestellt.

An dieser Stelle merke ich an, daß numerische Bestimmungen z. B. der fraktalen Dimension mit Hilfe von “Box–Counting–Methoden“ wegen der schlechten Konvergenz in kritischen Parameterbereichen mit einem großen Fehler behaftet sind. Sie bedürfen daher einer kritischen Interpretation [LaiGre94].

Aufgrund der nichtmonotonen Abhängigkeit erlauben die Angaben der Hausdorff–Dimension, der Entweichrate und des Lyapunov–Exponenten keine Rückschlüsse auf den zugrunde liegenden  $k$ –Wert. In diesem Zusammenhang scheint es daher angebracht, statt dieser Größen die topologische Entropie zu betrachten, die wegen ihres monotonen Verhaltens Rückschlüsse zumindest auf ein  $k$ –Intervall zuläßt.

Ich diskutiere nun das Spektrum lokaler Lyapunov–Exponenten, das durch das Energieintervall  $[E_{min}, E_{max}]$  gegeben ist. Dafür reicht die Betrachtung der periodischen Orbits aus. Das ist darauf zurückzuführen, daß die peri-

Symbolfolge	k=1.08	k=1.26	k=1.9
([= <])	1.751063	2.5138526	3.313300
([= >])	2.409670	3.0261784	3.840933
([ ≠ <])			3.224179
([ ≠ >])			3.087044
([= <][ ≠ <])		2.136113	
([= <][ ≠ >])		2.191629	
([= >][ ≠ <])		2.191629	
([= >][ ≠ >])		2.185749	

Tabelle 7.6: Lyapunov–Exponenten der fundamentalen Orbits des Zwei–Mulden–Systems für  $k = 1.08$  und  $k = 1.9$ .

odischen Orbits in der invarianten Menge dicht liegen und ihre Lyapunov–Exponenten somit alle im System möglichen Lyapunov–Exponenten beliebig genau wiedergeben. Betrachtet man die  $S(E)$ –Kurven in Abbildung 7.7, so erkennt man, daß sowohl  $S(E_{min}) = 0$  als auch  $S(E_{max}) = 0$  ist. Das bedeutet, es gibt unabhängig von der Periode eine konstante Anzahl von periodischen Orbits, die den jeweils kleinsten bzw. größten Lyapunov–Exponenten besitzen (vgl. (7.21)). Für die aufgeführten Parameterwerte lassen sich diese Orbits direkt angeben. Im Falle  $k = 1.08$  sind dies der innere und der äußere Ringorbit, im Falle  $k = 1.9$  der äußere 8–förmige und der äußere Ringorbit (siehe Abbildung 4.7). Die numerischen Werte der Lyapunov–Exponenten aller fundamentalen Orbits sind in Tabelle 7.6 zusammengefaßt. Für  $k = 1.08$  und  $k = 1.9$  stimmen der minimale und der maximale Lyapunov–Exponent sehr gut mit den Werten  $E_{min}$  und  $E_{max}$  aus Abbildung 7.7 überein. Für  $k = 1.26$  entspricht der Lyapunov–Exponent des äußeren Ringorbits wiederum  $E_{max}$ . Der Orbit, der die untere Grenze  $E_{min}$  bestimmt, ist jedoch nicht durch einen fundamentalen Orbit gegeben. Der minimale Lyapunov–Exponent aller periodischen Orbits bis zur Periode 7 ist durch 2.069440 gegeben. Der Orbit ist im reduzierten System dreiperiodisch und seine Symbolfolge ist ( $\overline{[= <][= >][ ≠ >]}$ ) (siehe Abbildung 7.9(a)).

Zum Schluß dieses Abschnitts gehe ich auf den Einfluß von Phasenübergängen auf die  $S(E)$ –Funktion ein. Ist ein stabiler Orbit vorhanden, so ist damit ein lokaler Lyapunov–Exponent 0 verbunden. Als Konsequenz ergibt sich  $E_{min} = 0$ . Formal folgt dies daraus, daß die Energie durch die Ableitung von  $\beta F(\beta)$  gegeben ist (vgl. (7.22)) und diese für  $\beta > 1$  verschwindet. Der Prozeß des “Hyperbolischwerdens” äußert sich dann darin, daß  $E_{min}$  zu größeren  $E$ –Werten verschoben wird. Abbildung 7.10 zeigt die Entropie–Energie–Funktion für  $k = 1.22$ ,  $k = 1.24$  und  $k = 1.26$ . Man erkennt das beschriebene Verhalten.

Darüber hinaus ist in Abbildung 7.10 festzustellen, daß  $E_{min}$  in viel stärkerem

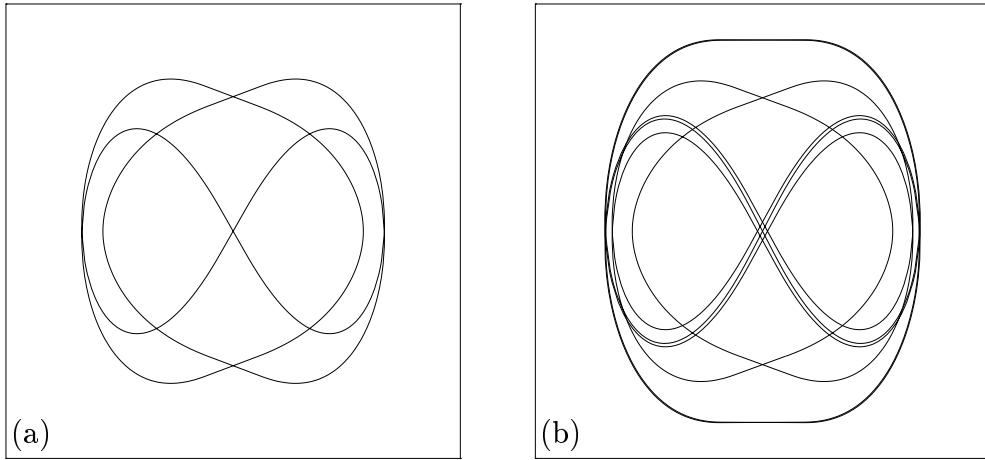
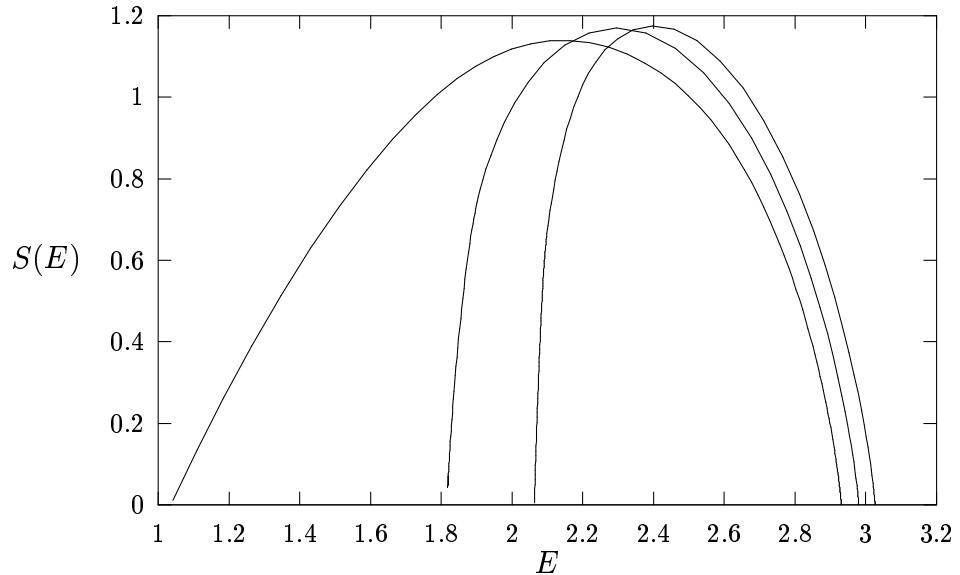


Abbildung 7.9:

Die Orbits (a) ( $[= <][= >][\neq >]$ ) und (b) ( $[= <][= >][\neq >][= >][\neq >][= >][\neq >]$ ) im Zwei-Mulden-System mit  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.26$ .

Abbildung 7.10:  $S(E)$  für das Zwei-Mulden-System mit  $R_0 = 1.1$ . Von links nach rechts gehören die Kurven zu den Parametern  $k = 1.22, 1.24$  und  $1.26$ .

Maße von  $k$  abhängt als  $E_{max}$ . In den Kapiteln 3, 4 und 5 wurde gezeigt, daß es ein ganzes  $k$ -Intervall gibt, in dem das System topologisch konjugiert zur Shift-Abbildung auf dem Folgenraum  $\Sigma_A^4$  ist (siehe (4.7)). Die Parameterwerte  $k = 1.22, 1.24$  und  $1.26$  liegen sämtlich in diesem Intervall. Für diesen Parameterbereich ist  $E_{max}$  durch den Lyapunov-Exponenten des äußeren

Ringorbits gegeben. Der Orbit, der für  $E_{min}$  verantwortlich ist, ist im Gegensatz dazu abhängig von  $k$ . So ist z. B. im Gegensatz zu  $k = 1.24$  und  $k = 1.26$  für  $k = 1.22$  die minimale Energie  $E_{min}$  nicht durch den Lyapunov–Exponenten von  $(\overline{[= <][= >][\neq >]})$ , sondern durch den Lyapunov–Exponenten von  $(\overline{[= <][= >][\neq >][= >][\neq >]})$  gegeben. Geht man in dem relevanten  $k$ –Intervall zu kleineren  $k$ –Werten über, so scheinen sukzessive die höherperiodischen Orbits des Typs  $(\overline{[= <][= >][\neq >][= >][\neq >] \dots [= >][\neq >]})$  für den kleinsten Lyapunov–Exponenten verantwortlich zu sein (siehe Abbildung 7.9). Ein ähnliches Verhalten ist für die  $k$ –Intervalle, die  $k = 1.08$  und  $k = 1.9$  enthalten, festzustellen. In analoger Weise liefern dort die Orbits des Typs  $(\overline{><<\dots<})$  bzw.  $(\overline{[\neq <][\neq >][\neq >] \dots [\neq >]})$  bei kleiner werdenden  $k$ –Werten den kleinsten Lyapunov–Exponenten (siehe Abbildung 7.11). Ich kann diese Behauptungen nicht formal beweisen, die Numerik legt ihre Gültigkeit jedoch nahe.

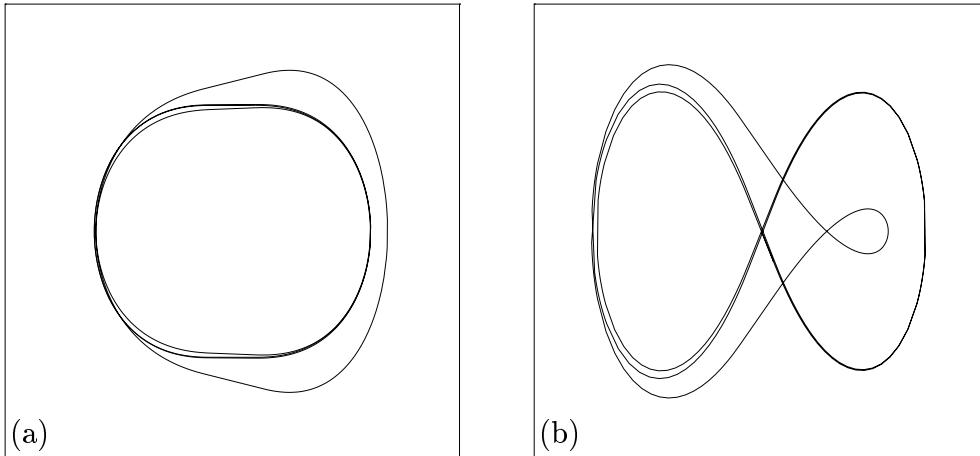


Abbildung 7.11:

Die Orbits (a)  $(\overline{><<<<<<})$  und (b)  $(\overline{[\neq <][\neq >][\neq >][\neq >][\neq >][\neq >]})$  im Zwei–Mulden–System mit  $R_0 = 1.1$  und  $k = 1.08$  bzw.  $k = 1.9$ .

## 7.7 Marginale Stabilität — ein Ausblick

Die bisherigen Ergebnisse bezogen sich auf Energien oberhalb der Orbitingschwelle. Liegt die Energie unterhalb der Orbitingschwelle, so stößt man im Hinblick auf die Bestimmung von Zustandssummen auf Probleme. Thema dieses Abschnitts ist die Darstellung dieser Probleme und die Erörterung von Vorschlägen zu ihrer Lösung.

Liegt die Energie unterhalb der Orbitingschwelle, so gibt es bereits auf dem Niveau  $n = 1$  unendlich viele Kurvenstücke (siehe Abbildungen 2.6 und 4.5). Aufgrund der endlichen Genauigkeit können nicht alle numerisch bestimmt

werden. Eine Lösung dieses Problems ist in der Wahl einer anderen Schnittfläche zu finden. Wie in Abschnitt 1.2 und Abschnitt 4.7 diskutiert, ist im Fall von Orbiting im Inneren einer Potentialmulde eine gebundene Bewegung möglich. Die in dieser Arbeit eingeführte Abbildung  $F$  berücksichtigt die lokalisierte Bewegung im Inneren einer Mulde nicht. Eine Schnittfläche, die auch diese Bewegung berücksichtigt und mit deren Hilfe die vollständige Dynamik des  $N$ -Mulden-Systems im Fall von Orbiting beschrieben werden kann, ist z. B. nach Symmetriereduzierung durch die Fläche  $x = R_0$  gegeben. Die dazugehörige Poincaré-Abbildung ist in kanonischer Weise auf der Ebene, die durch die  $y$ -Koordinate und den Impuls in  $y$ -Richtung gegeben ist, definiert. Jedesmal, wenn die Fläche  $x = R_0$  von einer Trajektorie mit positivem Impuls in  $x$ -Richtung durchstoßen wird, gibt dies Anlaß zu einem Trajektorienpunkt der Poincaré-Abbildung. Im Phasenporträt dieser Abbildung sind dann die zur stabilen Bewegung gehörenden invarianten Linien sichtbar. Man beachte, daß aufgrund der stabilen Bereiche keine Symbolische Dynamik im Sinne von Kapitel 4 existiert.

Eine bemerkenswerte Situation tritt auf, wenn die Energie gleich der kritischen Orbitingenergie ist. Im Inneren der Potentialmulde entsteht dann durch eine Sattel-Zentrum-Bifurkation ein periodischer Kreisorbit, dessen Eigenwerte den Betrag 1 haben, der also *marginal stabil* ist. Die topologische Situation in  $\Gamma$  ist vergleichbar mit der für eine Energie unterhalb der Orbitingschwelle. Für die kritische Orbitingenergie hat der Nenner im Integranden von (1.2) statt einer doppelten eine dreifache Nullstelle. Die Singularität ist daher nicht logarithmischer Natur. In der Nähe des Orbitingdrehimpulses verhält sich die Ablenkfunktion  $\Theta(l)$  wie  $|l - l_{Orb}|^{-1/2}$ . Im Hinblick auf die Topologie der Abbildung hat dies keine Auswirkungen, und eine identische Diskussion wie in Abschnitt 4.4 ist möglich. Insbesondere ist die Abbildung  $F$  auf  $\Lambda$  topologisch konjugiert zu der in Abschnitt 4.4 eingeführten Shift-Abbildung auf dem Folgenraum (4.12). Im Gegensatz zum Falle einer Energie unterhalb der Orbitingschwelle gibt es hier mit dem Orbitingorbit nur einen Orbit, der durch keine Symbolfolge beschrieben werden kann. Im Sinne des Beschneidens eines Symbolbaumes ist hier der Orbitingorbit “herausgeschnitten”. Dies wird nun anhand des Zwei-Mulden-Systems näher erläutert. Für das Zwei-Mulden-System erhält man in der Schnittfläche  $x = R_0$  neben den vier zu den Ringorbits und 8-förmigen Orbits gehörenden Fixpunkten einen weiteren Fixpunkt, der dem Kreisorbit entspricht. Nach der Diskussion in Kapitel 4 läßt sich jeder Orbit des Zwei-Mulden-Systems aus diesen fünf fundamentalen Orbits zusammensetzen. Ordnet man dem Kreisorbit das Symbol  $K$  zu, so läßt sich der Zusammenhang mit der in Kapitel 4 eingeführten Symbolischen Dynamik auf einfache Weise formulieren. Ein Symbol  $[+ > m]$  entspricht z. B. der aus  $m + 1$  Gliedern bestehenden endlichen Symbolfolge, die sich aus  $[+ >]$  gefolgt von  $m$  Symbolen  $K$  zusammensetzt. Da nun umgekehrt jeder bi-infiniten Symbolfolge aus den neuen Symbolen eine Systemtrajektorie entspricht, was wiederum aus der Diskussion in Abschnitt

4.4 folgt, vermute ich, daß das System topologisch konjugiert zu einer Shift–Abbildung auf einem Folgenraum mit 5 Symbolen ist.

Im Falle der kritischen Orbitingenergie stellt sich in diesem Zusammenhang natürlich die Frage, welchen Vorteil die Abbildung  $F$  verglichen mit der Abbildung in der Fläche  $x = R_0$  bietet. Der wesentliche Vorteil ist sicher dadurch gegeben, daß man die explizite formale Gestalt der Abbildung angeben kann. Nur deshalb lassen sich analytische Ergebnisse z. B. im Hinblick auf die Hyperbolizität erzielen. Die Abbildung in der Fläche  $x = R_0$  läßt sich im Gegensatz dazu nur numerisch bestimmen. Ein anderer bemerkenswerter Aspekt besteht darin, daß die Wahl der Schnittfläche für  $F$  den hyperbolischen Teil der Dynamik von dem nichthyperbolischen trennt. Der einzige Orbit der nicht hyperbolisch ist, ist nämlich der marginal stabile Orbitingorbit. Genau dieser findet in  $\Gamma$  keine Berücksichtigung. Die Abbildung  $F$  beschreibt ausschließlich den hyperbolischen Anteil. Im Hinblick auf das oben erwähnte Beschrneiden des Symbolbaumes entspricht dies dem Herausschneiden aller Symbolfolgen, die eine unendlich lange Teilfolge bestehend aus Symbolen  $K$  enthalten. Wie in Abschnitt 4.4 erörtert, führt dies zu einer Symbolischen Dynamik mit unendlich vielen Symbolen.

Die Möglichkeit, reguläre und hyperbolische Phase zu trennen, könnte bedeutsam dafür sein, den Zusammenhang zwischen Spinketten und Symbolischer Dynamik im Fall von Phasenübergängen näher zu untersuchen. Es wurde schon erwähnt, daß die Topologie der Abbildung  $F$  für die kritische Orbitingenergie äquivalent ist mit der für eine Energie unterhalb der Orbitingschwelle. Es gibt aber einen wesentlichen Unterschied. Das Skalenverhalten der Breite der Streifen in  $\Lambda_-^1$ , die in die Nähe von  $l' = l_{Orb}$  abgebildet werden (vgl. Abbildung 4.5), ist anders. Liegt die Energie unterhalb der Orbitingschwelle, so nimmt die Breite der Streifen nach einem Exponentialgesetz ab, was auf die logarithmische Singularität der Ablenkfunktion zurückzuführen ist. Ist die Energie jedoch gleich der kritischen Orbitingenergie, so nimmt die Breite aufgrund der  $|l - l_{Orb}|^{-1/2}$ -Singularität nach einem algebraischen Gesetz ab. Nach der Diskussion in Unterabschnitt 7.6.1 ist also ein Phasenübergang möglich. Aus der Thermodynamik ist bekannt, daß Phasenübergänge in eindimensionalen Spinketten nur dann auftreten können, wenn die Spins unendlich viele Zustände annehmen können oder wenn die Wechselwirkung zwischen den Spins eine lange Reichweite besitzt. Wie erörtert, hängt in dem Mulden–System das dazugehörende Spin–System wesentlich von der Wahl der Poincaré–Ebene ab. Das “Herausschneiden“ des Orbitingorbits führt zu unendlich vielen Symbolen und damit zu Spins mit unendlich vielen Zuständen. Berücksichtigt man hingegen den Orbitingorbit, so erhält man ein endliches Alphabet und entsprechend endlich viele Spin–zustände. Die Wahrscheinlichkeit, daß auf eine endliche Folge von Symbolen  $K$  ein weiteres Symbol  $K$  folgt, scheint jedoch nicht exponentiell sondern algebraisch abzufallen. Nach der Interpretation in Abschnitt 7.1.2 entspricht dies auf der Seite der Spinkette einer langreichweitigen Wechselwirkung. In

jedem Fall ist also ein Phasenübergang möglich. Dieser skizzierte Zusammenhang ist meiner Ansicht nach Anlaß genug, das Mulden–System zur Grundlage weiterer Untersuchungen zu machen.

## 7.8 Die dynamische Zeta–Funktion

In diesem Abschnitt stelle ich eine weitere Methode zur Bestimmung der freien Energie vor. Diese Methode ist allgemein in [Art+90a, Art+90b] dargestellt. Ich beschränke mich hier auf den für diese Arbeit relevanten Fall eines Hamilton–Systems mit zwei Freiheitsgraden. Die Grundlage der Theorie wird durch die periodischen Orbits gebildet. Man faßt eine chaotische Bewegung auf als ein zufälliges ‘‘Springen’’ zwischen periodischen Orbits. Dies ist insofern gerechtfertigt, als in einem chaotischen System die periodischen Orbits dicht liegen. Jeweils für endliche Zeiten verfolgt eine allgemeine Trajektorie in der invarianten Menge bestimmte periodische Orbits. So lassen sich aus der Kenntnis der periodischen Bewegung die charakteristischen Größen des dynamischen Systems bestimmen.

In dem Schnitt  $\overline{\Lambda}_{-i}^n \cap \overline{\Lambda}_{+i}^n$  liegt nach der Diskussion in den Kapiteln 3 und 4 ein  $n$ –periodischer Orbit, der durch die zu  $i$  gehörende Symbolfolge beschrieben wird. Die Breite von  $\overline{\Lambda}_{-i}^n$  ist nach der Diskussion in Abschnitt 7.3 proportional zu  $e^{-\lambda_i n}$ , wobei  $\lambda_i$  der Lyapunov–Exponent des  $n$ –periodischen Orbits ist:

$$l_i^{(n)} \sim e^{-\lambda_i n}. \quad (7.46)$$

Da der Phasenraum kompakt ist, sind die Proportionalitätskonstanten für alle  $i$  und  $n$  beschränkt. Aufgrund des Prinzips der beschränkten Variation folgt deshalb mit (7.8):

$$Z_n(\beta) = \sum_{i=1}^{W(n)} e^{-\beta \lambda_i n} \sim e^{-\beta F(\beta)n} . \quad (7.47)$$

Für die weitere Untersuchung der Zustandssumme ist eine detailliertere Klassifizierung der periodischen Orbits erforderlich. Ein  $n$ –periodischer Punkt ist auch  $mn$ –periodisch,  $m \in \mathbb{N}$ . Dies motiviert die Definition irreduzibler Orbits.

Ein periodischer Orbit heißt *irreduzibel* oder *prim*, wenn er nur einmal durchlaufen wird. Seine Symbolfolge läßt sich nicht aus kürzeren, sich wiederholenden endlichen Symbolfolgen zusammensetzen. So ist z. B. der vier–periodische Orbit  $(\overline{s_0 s_1 s_1 s_0})$  irreduzibel, der vier–periodische Orbit  $(\overline{s_0 s_1 s_0 s_1}) = (\overline{s_0 s_1})$  dagegen nicht. Die Länge des irreduziblen Blockes eines irreduziblen Orbits wird auch als *topologische Länge* bezeichnet.

Ziel ist es jetzt, Teile der Summe in (7.47) so aufzusummieren, daß letztlich nur eine Summe über irreduzible Orbits übrigbleibt.

### 7.8.1 Die Fugazitätsentwicklung

Man betrachtet zu diesem Zweck die aus der Thermodynamik bekannte *Fugazitätsentwicklung*. Mit der Fugazität  $z$  erhält man die großkanonische Zustandssumme  $Z^g(z, \beta)$  aus der kanonischen<sup>5</sup> [Fei87]:

$$Z^g(z, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n Z_n(\beta) . \quad (7.48)$$

Bei vorgegebenem  $\beta$  konvergiert die Summe (7.48) für  $z < e^{\beta F(\beta)}$ , für  $z \geq e^{\beta F(\beta)}$  divergiert sie. Die freie Energie ergibt sich somit aus dem kleinsten positiven  $z$ , für das die Summe (7.48) divergiert.

Man nutzt nun eine grundlegende Eigenschaft periodischer Orbits aus: Die Stabilität, d. h. hier  $e^{-\lambda_i n}$ , ist überall entlang des Orbits gleich. Dies folgt direkt aus der Kettenregel. Ein irreduzibler Orbit  $p$  der Periode  $n_p$  besteht aus  $n_p$  periodischen Punkten. Er trägt also  $n_p$  identische Summanden zur Summe (7.47) bzw. (7.48) bei. Da ein  $n_p$ -periodischer Orbit, der  $r$ -mal durchlaufen wird, den Beitrag  $e^{-\lambda_p n_p r}$  liefert, lässt sich die großkanonische Zustandssumme wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} Z^g(z, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{W(n)} z^n e^{-\beta \lambda_i n} \\ &= \sum_p n_p \sum_{r=1}^{\infty} \left( z^{n_p} e^{-\beta \lambda_p n_p} \right)^r . \end{aligned} \quad (7.49)$$

Der Index  $p$  durchläuft dabei alle verschiedenen irreduziblen periodischen Orbits; es wird dabei nur ein Vertreter jeder zyklischen Permutationsklasse der Ordnung  $n_p$  betrachtet. Durch Aufsummieren der geometrischen Reihe erhält man:

$$Z^g(z, \beta) = \sum_p \frac{n_p z^{n_p} e^{-\beta \lambda_p n_p}}{1 - z^{n_p} e^{-\beta \lambda_p n_p}} . \quad (7.50)$$

Der Faktor  $n_p z^{n_p}$  legt es nun nahe, den Summenausdruck als eine Ableitung zu schreiben:

$$Z^g(z, \beta) = -z \frac{d}{dz} \sum_p \ln \left( 1 - z^{n_p} e^{-\beta \lambda_p n_p} \right) . \quad (7.51)$$

Mit Hilfe des unendlichen Produktes:

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_p \left( 1 - z^{n_p} e^{-\beta \lambda_p n_p} \right) \quad (7.52)$$

lässt sich die großkanonische Zustandssumme dann als logarithmische Ableitung darstellen:

$$Z^g = -z \frac{d}{dz} \ln \frac{1}{\zeta(z)} . \quad (7.53)$$

---

<sup>5</sup>Ich betrachte die großkanonische Zustandssumme hier als Funktion der Fugazität und nicht, wie in der Thermodynamik üblich, als Funktion des chemischen Potentials.

Dies ist ein Beispiel für eine sogenannte *dynamische Zeta-Funktion* [Rue78]. Der Name beruht auf der rein formalen Ähnlichkeit mit der Eulerschen Produkt-Darstellung der Riemannschen Zeta-Funktion.

Die Frage nach der freien Energie ist nun äquivalent zur Suche nach der kleinsten positiven Nullstelle von  $1/\zeta(z)$ . Wie im nächsten Unterabschnitt gezeigt wird, besteht der Vorteil dieses Vorgehens darin, daß die Berücksichtigung einiger weniger kurzer irreduzibler Orbits schon sehr gute Ergebnisse liefert. Dies liegt daran, daß in die Zeta-Funktion eine Teilsummation über beliebig lange Trajektorien eingeht. Ein irreduzibler Orbit ist zwar von endlicher Periode, aber von unendlicher Länge. In der dynamischen Zeta-Funktion wird jeder irreduzible Orbit mit allen wiederholten Durchläufen berücksichtigt.

### 7.8.2 Entwicklung nach irreduziblen Orbits

Für die Bestimmung der freien Energie sind die Stellen  $z$  zu untersuchen, an denen das Produkt (7.52) verschwindet. Ein unendliches Produkt ist nun nicht genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Die Betrachtung von Nullstellen einzelner Faktoren liefert nicht die kleinste positive Nullstelle und führt zu falschen Ergebnissen [Art+90a]. Eine Approximation durch Berücksichtigung nur endlich vieler Faktoren in dem Produkt (7.52) ist daher nicht geeignet. Man führt stattdessen eine formale Entwicklung in eine Potenzreihe durch. Mit  $t_p = e^{-\beta \lambda_p n_p}$  ergibt sich:

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_p (1 - z^{n_p} t_p) = 1 - \sum_{p_1, p_2, \dots, p_k} z^{n_{p_1} + n_{p_2} + \dots + n_{p_k}} t_{p_1 + p_2 + \dots + p_k}, \quad (7.54)$$

wobei

$$t_{p_1 + p_2 + \dots + p_k} = (-1)^{k+1} t_{p_1} t_{p_2} \dots t_{p_k} \quad (7.55)$$

definiert wurde. Die Gewichte  $t_{p_1 + p_2 + \dots + p_k}$  gehören zu sogenannten *Pseudo-Orbits*, die dadurch gegeben sind, daß die verschiedenen irreduziblen Orbits  $p_1, p_2$  bis  $p_k$  nacheinander durchlaufen werden. Da der Pseudo-Orbit  $p_1 + p_2 + \dots + p_k$  ein vergleichbares Gewicht liefert wie der Orbit  $p_1 p_2 \dots p_k$ , spricht man auch davon, daß der Pseudo-Orbit den echten Orbit "beschattet".

Für genügend kleine  $z$  konvergiert die rechte Seite von (7.54). Die entscheidende Idee ist es nun, die Summe nach Potenzen der Fugazität zu ordnen [Cvi88]. Dies führt zu einer Umgruppierung der Terme in *fundamentale Beiträge* und *Krümmungskorrekturen*:

$$\frac{1}{\zeta(z)} = 1 - \sum_f z^{n_f} t_f - \sum_n c_n \quad . \quad (7.56)$$

Dies wird am einfachsten am Beispiel einer vollständigen Symbolischen Dynamik mit einem binären Alphabet deutlich. Kennzeichnet man einen Orbit

durch seinen irreduziblen Symbolblock, so ergibt sich mit den Symbolen  $a, b$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(z)} = 1 & - zt_a - zt_b - z^2(t_{ab} - t_{at_b}) - \\ & - z^3((t_{abb} - t_{abt_b}) + (t_{bab} - t_{bat_b})) \dots . \end{aligned} \quad (7.57)$$

Die einzigen periodischen Orbits, die nicht durch andere beschattet werden können, sind durch die Symbole  $a$  und  $b$  gegeben. Sie bilden die fundamentalen Orbits. Wie in Abschnitt 4.6 diskutiert, bilden sie das topologische “Skelett“ der Dynamik. Alle weiteren periodischen Orbits lassen sich durch Pseudo–Orbits beschatten. Faßt man sie geeignet zu Gruppen zusammen (wie in (7.57)), so ist für jede Potenz von  $z$  die Anzahl der Gewichte mit positivem Vorzeichen gleich der Anzahl der Gewichte mit negativem Vorzeichen. Da die Gewichte eines irreduziblen Orbits und eines ihn beschattenden Pseudo–Orbits näherungsweise gleich sind, sind die Krümmungskorrekturen klein. Die Entwicklung (7.56) wird auch als *Entwicklung nach periodischen Orbits* bezeichnet.

Eine Beschränkung auf den fundamentalen Anteil entspricht auf den Mengen der Zerlegung, die die Symbolische Dynamik definieren, einer linearen Approximation der Abbildung. Die Krümmungskorrekturen korrespondieren stückweise linearen Approximationen auf feiner werdenden Zerlegungen. Je mehr Orbits berücksichtigt werden, desto feiner wird die Zerlegung, desto besser wird der Phasenraum “abgetastet“, und entsprechend besser ist die Approximation.

In diesem Zusammenhang läßt sich nun der Vorteil des reduzierten Systems erklären. Sowohl im reduzierten als auch im nichtreduzierten System ist z. B. das Zwei–Mulden–System für geeignete Parametertwerte topologisch konjugiert zu einer Shift–Abbildung auf einem Folgenraum mit vier Symbolen. Es gibt also in beiden Fällen eine identische Anzahl irreduzibler periodischer Orbits zu einer vorgegebenen Periode. Im nichtreduzierten System ist das Phasenraumvolumen jedoch doppelt so groß wie im reduzierten System. Aus diesem Grund ist die Dichte der periodischen Punkte im erstgenannten Fall kleiner als im letztgenannten. Symmetriereduzierung führt somit bei gleicher Anzahl von periodischen Punkten zu einer feineren Abtastung des Phasenraumes und entsprechend zu einer besseren Approximation. Für eine allgemeine Darstellung des Zusammenhangs zwischen diskreten Symmetrien und dynamischen Zeta–Funktionen verweise ich auf [CviEck93].

Eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendung der Theorie ist die genaue Kenntnis der Topologie des Systems. Nur so lassen sich die periodischen Orbits hierarchisch gliedern. Diese Voraussetzung ist durch die Ergebnisse aus den Kapiteln 3 und 4 erfüllt. Für die Bestimmung der freien Energie mit Hilfe der dynamischen Zeta–Funktion fehlt noch die Kenntnis der Stabilität der periodischen Orbits, d. h. im wesentlichen die Kenntnis der Anfangsbedingungen der periodischen Orbits. Symmetrische periodische Orbits lassen sich

mit Hilfe von Symmetrielinien bestimmen (siehe Anhang C). Da jedoch nicht alle Orbits symmetrisch sind, ist ein allgemeineres Verfahren erforderlich.

### 7.8.3 Numerische Methode zur Bestimmung periodischer Orbits

In diesem Unterabschnitt stelle ich eine Methode zur Bestimmung periodischer Orbits vor. Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieser Methode ist die Kenntnis der Symbolischen Dynamik. Die Methode liefert dann für eine vorgegebene periodische Symbolfolge die Anfangsbedingung des periodischen Orbits in  $\Lambda$ .

Das Verfahren basiert auf dem sogenannten *PIM–Algorithmus* (PIM: proper interior maximum) [NusYor89], den ich zunächst vorstelle. Der PIM–Algorithmus erlaubt die Bestimmung sehr langer chaotischer Transienten. Man betrachtet dazu eine Strecke in  $\Gamma$ , die die stabile Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$  schneidet. Nach der Wahl einer Anzahl gleichmäßig verteilter Anfangsbedingungen auf dieser Strecke mißt man die Lebensdauern der dazu gehörigen Orbits. Nach Konstruktion liegt ein Teil der stabilen Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$  zwischen den beiden Anfangsbedingungen, die die Anfangsbedingung zu der größten Lebensdauer einrahmen. Durch diese beiden Anfangsbedingungen wird eine neue Strecke definiert, für das die beschriebene Prozedur wiederholt wird. So gelangt man sukzessive zu immer kürzeren Strecken, die im Inneren eine Anfangsbedingung auf der stabilen Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$  enthalten. Unterschreitet die Länge eines solchen Intervalls einen vorgegebenen Wert  $\epsilon \ll 1$ , so beendet man das Verfeinerungsverfahren. Man betrachtet dann die Endpunkte der resultierenden Strecke unter der Iteration der Abbildung  $F$ . Die Bildpunkte nähern sich der invarianten Menge entlang der stabilen Mannigfaltigkeit an, gleichzeitig entfernen sie sich entlang der instabilen Mannigfaltigkeit. Wenn der Abstand zwischen den beiden Trajektorien einen weiteren vorgegebenen Wert  $1 \gg \epsilon' > \epsilon$  überschreitet, bricht man die Iteration ab. Man erhält so zwei Punkte, die wieder eine Strecke definieren, die einen Teil der stabilen Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$  schneidet. Wiederholte Durchführung dieses Verfahrens von Verfeinerung und anschließender Iteration unter  $F$  liefert dann eine Reihe von Strecken, die alle in einer  $\epsilon'$ –Umgebung der stabilen Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$  liegen und sich entlang der stabilen Mannigfaltigkeit  $\Lambda$  annähern. Nach einer bestimmten Anzahl von Iterationen liegen die Strecken dann auch in einer  $\epsilon'$ –Umgebung der invarianten Menge. Die Punkte im Inneren dieser Strecken liefern dann einen approximativen, langlebigen Orbit der invarianten Menge.

Eine Modifikation des PIM–Algorithmus liefert eine effiziente Methode zur Bestimmung periodischer Orbits. Man nutzt dabei aus, daß die Abbildung zwischen  $\Lambda$  und dem dazugehörigen Folgenraum ein Homöomorphismus ist. Aufgrund der Stetigkeit entsprechen Punkte im Folgenraum, die bezüglich

der dort vorgegebenen Metrik einen kleinen Abstand haben, Punkten in  $\Lambda$ , deren Abstand bezüglich der dort gegebenen Metrik klein ist.

Bei Vorgabe einer  $n$ -periodischen Symbolfolge, deren irreduzibler periodischer Block durch  $s = (s_0 s_1 \dots s_{n-1})$  gegeben ist, soll nun eine dazu gehörende Anfangsbedingung in  $\Lambda$  bestimmt werden. Im Gegensatz zur üblichen PIM–Methode, wo Strecken betrachtet werden, die beliebige der überabzählbar vielen vertikalen Kurven aus  $\Lambda^\infty$  schneiden, geht es nun darum, Intervalle zu bestimmen, die *bestimmte* vertikale Kurven schneiden, nämlich die stabile Mannigfaltigkeit der  $s$  entsprechenden Trajektorie. Zu diesem Zweck berechnet man bei der Verfeinerungsprozedur nicht die Anfangsbedingung, die zur maximalen Lebensdauer gehört, sondern die Anfangsbedingung, deren Trajektorie sich am längsten in der Nähe des gesuchten periodischen Orbits aufhält. Konkret bestimmt man dazu von jeder Trajektorie die Symbolfolge und vergleicht diese mit der Symbolfolge des periodischen Orbits. Es wird dann diejenige Folge ausgewählt, die den längsten Symbolblock aufweist, der mit einem Symbolblock des periodischen Orbits übereinstimmt. Dieses Auswahlkriterium zugrundelegend, führt man eine Anzahl von Verfeinerungsprozeduren mit anschließender Iteration von Intervallendpunkten durch. Nach einer gewissen Anzahl von Iterationen ergibt sich dann eine Strecke von Anfangsbedingungen, die allesamt zu Symbolfolgen gehören, die mit einem bestimmten endlichen Block  $(s_i, s_{(i+1) \bmod n} \dots)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , beginnen<sup>6</sup>. Je länger dieser Block ist, desto näher liegt die Trajektorie am gesuchten Orbit. Weitere Verfeinerung in Verbindung mit der Iteration von Intervallendpunkten ergibt Punkte  $w$ , die sich immer mehr einem Punkt des gesuchten periodischen Orbits annähern. Aufgrund der endlichen Rechengenauigkeit kann diese Annäherung nicht ad infinitum fortgesetzt werden. Eine Abbruchbedingung, die sich in der Praxis als günstig erwiesen hat, ist durch ein Minimum im Abstand  $|F^n(w) - w|$  gegeben.

Dieses Verfahren liefert bei vorgegebener Symbolfolge die entsprechende Anfangsbedingung. Die zugrunde liegende Idee lässt sich wie folgt zusammenfassen: Mit Hilfe der Symbolischen Dynamik lokalisiert man zunächst die stabile Mannigfaltigkeit des gesuchten Orbits und bewegt sich dann entlang dieser Mannigfaltigkeit auf den gesuchten Orbit zu.

## 7.9 Bestimmung der Entweichrate mit Hilfe der Zeta–Funktion

Mit Hilfe der oben beschriebenen Methode wurden für das Zwei–Mulden–System alle irreduziblen Orbits bis zu einer bestimmten Periode ermittelt.

---

<sup>6</sup>Die Größe  $\epsilon'$  muß dafür natürlich sehr viel kleiner gewählt werden als der kleinste Durchmesser aller Mengen aus der erzeugenden Zerlegung.

maximale Periode	k=1.08		k=1.26		k=1.9	
	$m$	$\kappa$	$m$	$\kappa$	$m$	$\kappa$
1	2	1.333951	2	(2.044411)	4	1.942853
2	3	1.262896	7	1.196390	10	1.957972
3	5	1.299745	17	1.154873	30	1.955781
4	8	1.292208	42	1.145666	90	1.955790
5	14	1.292979	112	1.144062	294	1.955790
6	23	1.292933	297	1.144052		
7	41	1.292937				
8	71	1.292937				

Tabelle 7.7: Entweichrate aus der dynamischen Zeta–Funktion für verschiedene maximale Perioden und  $k$ –Werte.

Einsetzen der jeweiligen Stabilität dieser Orbits in die Zeta–Funktion (7.56) und Bestimmung der kleinsten positiven Nullstelle liefert dann  $\beta F(\beta)$ .

Für die Parameterwerte  $k = 1.08$ ,  $k = 1.26$  und  $1.9$  ergibt sich eine sehr schnelle Konvergenz der Ergebnisse. Die graphische Darstellung der Funktion  $\beta F(\beta)$  zeigt darüber hinaus keine Unterschiede verglichen mit den Ergebnissen, die mit Hilfe der Längenmessung ermittelt wurden. Aus diesem Grund verzichte ich auf Abbildungen der thermodynamischen Potentiale, deren Berechnung auf der Entwicklung nach periodischen Orbits beruht. Die genauere Betrachtung der numerischen Werte fördert jedoch Unterschiede zutage. In der Tabelle 7.7 sind die numerisch erzielten Werte für die Entweichrate dargestellt. Die erste Spalte gibt die maximale Periode der periodischen Orbits an, die für die Entwicklung nach periodischen Orbits berücksichtigt wurde. Für die betrachteten Parameterwerte ist neben der Entweichrate  $\kappa$  die Anzahl  $m$  aller irreduziblen periodischen Orbits angegeben, die bei vorgegebener maximaler Periode existieren. Wie oben schon erwähnt, ist in allen Fällen eine schnelle Konvergenz festzustellen. Für  $k = 1.26$  ist der Wert zur Periode 1 eingeklammert, da erst nach der Periode 2 alle fundamentalen Orbits berücksichtigt und somit erst dann gute Näherungen zu erwarten sind.

Der Vergleich mit den Werten in Tabelle 7.5 zeigt geringfügige Unterschiede. Die Abweichungen sind maximal von der Größenordnung  $10^{-3}$ . Trotz intensiver Bemühungen kann ich diese Abweichungen nicht erklären. Zum Testen der entwickelten Programme habe ich Entweichraten für das System aus drei harte Scheiben mit beiden vorgestellten Methoden bestimmt und mit Ergebnissen in der Literatur verglichen. In [KovTél90] ist die Entweichrate mit Hilfe der Längenmessung und in [CviEck89] — bei einem anderen Scheibenabstand — mit Hilfe der Entwicklung nach periodischen Orbits ermittelt worden. Die Resultate konnten mit den entsprechenden Methoden jeweils in allen relevanten Stellen reproduziert werden. Bestimmt man die

Entweichrate für den Scheibenabstand, den KovÁCS und TÉL in [KovTél90] gewählt haben, durch die Entwicklung nach periodischen Orbits, so ergibt sich ebenfalls eine Diskrepanz. Die Abweichung ist jedoch von der Größenordnung  $10^{-5}$  und damit wesentlich kleiner als die im Zwei–Mulden–System festgestellte. CVITANOVIC und ECKHARDT haben in [CviEck89] keine Diskretisierung der Verzögerungszeit vorgenommen (siehe Abschnitt 2.1). In die Zeta–Funktion geht in diesem Fall nicht nur die Stabilität eines periodischen Orbits ein, sondern auch die Zeit, die für einen Umlauf benötigt wird. Um mit der Methode der Messung von Längen das Ergebnis zu verifizieren, ist die mittlere Zeit erforderlich, die zwischen zwei aufeinander folgenden Stößen an den Scheiben vergeht. Da mir keine alternative Methode bekannt ist, diese Zeit mit der geforderten Genauigkeit von mindestens 6 Dezimalstelle zu bestimmen, kann ich hier keine für einen Vergleich beider Verfahren geeignete Daten angeben.

# Schluß

In dieser Arbeit ist mit den Mulden–Systemen eine Klasse von Hamilton–Systemen mit zwei Freiheitsgraden der Bewegung vorgestellt worden. Die Potentiale dieser Systeme setzen sich aus rein attraktiven Zentralpotentialen zusammen. Bei Kenntnis der Streuung an einem dieser Zentralpotentiale, d. h. bei Kenntnis der zugehörigen Ablenkfunktion, kann man für Energien größer als 0 explizit eine Poincaré–Abbildung angeben, die die Dynamik des Systems beschreibt.

In Zusammenhang mit der Streuung an einem rein attraktiven Zentralpotential wurde für Energien oberhalb und unterhalb der Orbitingschwelle jeweils eine Modellablenkfunktion eingeführt. Diese Ablenkfunctionen wurden so gewählt, daß sie einerseits eine einfache formale Gestalt besitzen, andererseits im Hinblick auf die Dynamik im Mulden–System alle wesentlichen Aspekte berücksichtigen. Für die Ablenkfunktion, die die Streuung im Falle von Energien oberhalb der Orbitingschwelle modelliert, konnte mit Methoden der klassischen Streutheorie das inverse Streuproblem gelöst werden. Das resultierende Zentralpotential ist stetig differenzierbar. Das Mulden–System stellt in diesem Fall ein Hamilton–System mit einer  $C^1$ –Hamilton–Funktion dar, für das eine Poincaré–Abbildung in analytischer Form angegeben werden kann.

Einen zentralen Punkt dieser Arbeit bildete die Untersuchung der Hyperbolizität. Es konnte auf analytischem Wege ein Kriterium hergeleitet werden, das die Hyperbolizität des Mulden–Systems impliziert. Wesentliche Grundlage des Beweises ist die Konstruktion eines unter der linearisierten Dynamik invarianten Kegelfeldes. Das Kriterium konnte so allgemein formuliert werden, daß lediglich die Ablenkfunktion eingeht. Dadurch ist es auch in Fällen anwendbar, in denen die Zentralpotentiale nicht rein attraktiv sind. Die vorgestellte Beweistechnik ist darüber hinaus auf andere Systeme übertragbar. Als Beispiel habe ich mit ihrer Hilfe ein Kriterium für die Hyperbolizität des Troll–Smilanski–Modells hergeleitet (siehe Anhang B).

Unter der Voraussetzung der Hyperbolizität ist es möglich, eine vollständige Symbolische Dynamik einzuführen. Für ausgewählte Parameterwerte konnte eine solche vollständige Symbolische Dynamik explizit angegeben werden. Es wurde gezeigt, wie nichtriviale Grammatikregeln auftreten können. Anhand

des Orbiting–Modells ist darüber hinaus erörtert worden, wie Phasenraumbereiche mit regulärer Bewegung eine Symbolische Dynamik mit unendlich vielen Symbolen implizieren.

Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der zusammenfassenden Darstellung thermodynamischer Konzepte zur Beschreibung dynamischer Systeme. Die Thermodynamik chaotischer Systeme ist dabei exemplarisch anhand des Zwei–Mulden–Systems diskutiert worden. Die Rolle der fundamentalen periodischen Orbits für die thermodynamischen Potentiale wurde dargestellt. Darüber hinaus wurde das Verhalten der thermodynamischen Potentiale beim Auftreten einer Krise untersucht.

Bei allen Betrachtungen wurde ein besonderes Augenmerk auf die Rolle der periodischen Orbits gelegt. Die Bestimmung periodischer Bahnen des vorgestellten Hamilton–Systems ist gleichbedeutend mit der Bestimmung periodischer Punkte der analytisch gegebenen Poincaré–Abbildung. In diesem Zusammenhang ist ein effektives numerisches Verfahren vorgestellt worden, das bei Vorgabe der Symbolfolge den entsprechenden System–Orbit liefert. Dadurch ist es für geeignete Parameterwerte möglich, alle periodischen Orbits bis zu einer bestimmten Periode zu bestimmen. Dies ist eine notwendige Voraussetzung für die Berechnung thermodynamischer Größen mit Hilfe der dynamischen Zeta–Funktion und der Entwicklung nach periodischen Orbits.

Die vorliegende Arbeit hat ausschließlich die klassische Bewegung im Mulden–System zum Thema. Diese ist nun soweit verstanden, daß eine semiklassische Behandlung möglich ist. In meinen Augen ist dies ein Problem, dessen Untersuchung lohnenswert ist.

## Anhang A

# Lösung des inversen Streuproblems

In diesem Anhang wird ein Potential  $v(r)$  bestimmt, das zu der Ablenkfunktion (1.21) gehört.

In der in Kapitel 1 vorgestellten Skalierung folgt aus  $\Theta(l) = 0$  für  $l > 1$ , daß im Bereich  $r > 1$  das Potential verschwindet. Die Gleichung (1.2) läßt sich dann wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\Theta(l) &= \pi - 2 \int_{\bar{r}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{(1-2v(r))}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} \\ &= \pi - 2 \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} - 2 \int_{\bar{r}}^1 \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{(1-2v(r))}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} \\ &= 2 \arccos l - 2 \int_{\bar{r}}^1 \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{(1-2v(r))}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} .\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

Der Beweis von Satz 1 erfolgt nun durch Einsetzen von (1.22) in (A.1). Dabei ist zu berücksichtigen, daß wegen

$$\frac{dr(\gamma)}{d\gamma} = \left(1 + 3\sqrt{3}\gamma^2 \sqrt{1-\gamma^2}\right) e^{-\sqrt{3}k(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad (\text{A.2})$$

die Funktion  $r(\gamma)$  streng monoton wachsend und damit invertierbar ist. Sie ist daher für eine Variablensubstitution in (A.1) geeignet. Der klassische Umkehrpunkt  $\bar{r}$  ist durch die Nullstelle des Wurzausdrucks in dem Integral (A.1) gegeben. Diese Nullstelle entspricht dem Parameterwert  $\gamma = l$ . Mit  $r(\gamma = 1) = 1$  und  $r(\gamma = l) = \bar{r}$  erhält man damit ein Integral über das  $\gamma$ -Intervall  $[l, 1]$ , das nach kurzer Rechnung auf die Ablenkfunktion (1.21) führt.

Ich beschreibe nun das konstruktive Verfahren zur Bestimmung von (1.22). Die wesentlichen Aspekte dieses Verfahrens sind dabei [New82] entnommen.

Ein Problem bei der Lösung des Integrals in (A.1) ist die implizite Abhängigkeit der unteren Integralgrenze von  $v$ . Man führt zur Behebung dieser Schwierigkeit neue Variablen ein:

$$y = \frac{1}{l^2} \quad (A.3)$$

$$x = \frac{1}{(1 - 2v(r))r^2} \quad . \quad (A.4)$$

Läßt man ausschließlich attraktive Potentiale zu, so bedeutet dies, daß  $v(r) \leq 0$  ist und daß für  $r$  aus dem Intervall  $]0, 1[$  die Ungleichung  $dv(r)/dr > 0$  erfüllt ist. Damit liegt  $x$  in dem Intervall  $[1, \infty[$  und für das  $r$ -Intervall  $]0, 1[$  läßt sich die Ungleichung  $dx/dr < 0$  folgern. Also ist  $x$  in  $]0, 1[$  eine streng monotone Funktion von  $r$  und die Integrationsvariable  $r$  in (A.1) läßt sich durch  $x$  ersetzen. Mit (A.3) und (A.4) erhält man dann aus (A.1):

$$\Theta(y) = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{y}} - 2 \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}} \frac{\sqrt{x}}{r(x)} \frac{dr(x)}{dx} dx \quad . \quad (A.5)$$

Mit den Funktionen

$$g(x) = -\frac{\sqrt{x}}{r(x)} \frac{dr(x)}{dx} \quad (A.6)$$

und

$$\tilde{\Theta}(y) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} k (y^{-\frac{3}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}) \pi + \arccos \frac{1}{\sqrt{y}} \quad (A.7)$$

folgt dann:

$$\tilde{\Theta}(y) = \int_1^y dx \frac{g(x)}{\sqrt{y-x}} dx \quad . \quad (A.8)$$

Dies ist eine Abelsche Integralgleichung, deren Lösung gegeben ist durch [Flü79]:

$$g(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\pi} \left( \frac{\tilde{\Theta}(1)}{\sqrt{x-1}} + \int_1^x \frac{d\tilde{\Theta}(y)}{dy} \frac{dy}{\sqrt{x-y}} \right) \quad . \quad (A.9)$$

Nach kurzer Rechnung ergibt sich damit:

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{3}k \frac{\sqrt{x-1}}{2x^2} \quad . \quad (A.10)$$

Um aus dieser Beziehung  $v(r)$  zu gewinnen, betrachtet man die logarithmische Ableitung von  $1 - 2v(r(x))$  nach  $x$ , die nach (A.4) und (A.6) gegeben ist durch:

$$\frac{d \ln(1 - 2v(r(x)))}{dx} = \frac{d \ln \frac{1}{xr^2(x)}}{dx} = -\frac{1}{x} + \frac{2g(x)}{\sqrt{x}} \quad . \quad (A.11)$$

Mit (A.10) folgt:

$$\frac{d \ln(1 - 2v(r(x)))}{dx} = 3\sqrt{3}k \frac{\sqrt{x-1}}{x^{\frac{5}{2}}} \quad . \quad (A.12)$$

Da  $v(r = 1) = 0$  ist, erhält man  $v(r(x = 1)) = 0$  und damit nach Integration:

$$\ln(1 - 2v(r(x))) = 2\sqrt{3}k \left( \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right)^3. \quad (\text{A.13})$$

Umgeformt ergibt sich als Resultat:

$$v(r(x)) = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{2\sqrt{3}k \left( \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right)^3} \right). \quad (\text{A.14})$$

Die Parametrisierung von  $r$  folgt dann direkt aus (A.4):

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{3}k \left( \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right)^3}. \quad (\text{A.15})$$

Führt man den Parameter  $\gamma = 1/\sqrt{x}$  ein, so erhält man Satz 1.

Abschließend gebe ich für die Bewegung im Inneren einer Mulde die Abhängigkeit des Polarwinkels  $\varphi$  vom Parameter  $\gamma$  an. Aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen folgt:

$$\varphi(\gamma) = \pm \int_r^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{(1-2v(r))}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} . \quad (\text{A.16})$$

Nach Einsetzen von (1.22) lässt sich das Integral explizit lösen und man erhält:

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma) &= \pm \left( \arccos \frac{l}{\gamma} + k \frac{3\sqrt{3}}{2} l \sqrt{(1-\gamma^2)(\gamma^2-l^2)} + \right. \\ &\quad \left. k \frac{3\sqrt{3}}{4} (l^3 - l) \left( \arcsin \left( \frac{1+l^2-2\gamma^2}{1-l^2} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right), \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

wobei  $\gamma$  aus dem Intervall  $[l, 1]$  stammt. Mit  $r(\gamma)$  wie in Satz 1 sind die Bahnkurven im Konfigurationsraum für das Innere einer Mulde damit berechnet.

## Anhang B

### Zur Hyperbolizität des Troll–Smilansky–Modells

In [TroSmi89] haben TROLL und SMILANSKY ein System vorgestellt, das die Streuung an einem eindimensionalen Feld aus sich nicht überlappenden Zentralpotentialen modelliert. Dieses Modell bildet — zum Teil mit Modifikationen — die Grundlage einiger Arbeiten [BlüSmi89, Tro91, Lai+92a, Lai+92b, Tro93]. In der Notation von [TroSmi89] wird das System durch folgende Abbildung beschrieben:

$$T : \quad x' = (x + kp) \text{mod}2\pi \quad (\text{B.1a})$$

$$p' = p + G(x'), \quad (\text{B.1b})$$

mit  $G(x) = -\text{sgn}(\cos x) \sin x$ ,  $k > 0$ . Ähnlich wie in System (1.9) ist  $p$  eine zur Winkelvariablen  $x$  konjugierte Drehimpulsvariable. Das Vorzeichen von  $\cos x$  gibt an, welches der beiden Nachbarpotentiale des aktuellen Zentralpotentials als nächstes besucht wird, d. h. in welche Richtung sich das Teilchen innerhalb des Feldes bewegt.

$T$  wird solange iteriert, bis die Entweichbedingung erfüllt ist. Dies ist der Fall, sobald  $p$  größer als ein vorgegebenes  $p_{\max} < 1/2$  wird.

Unter der Bedingung  $k \notin ]0, 4]$  konnten TROLL und SMILANSKI die Hyperbolizität für eine Näherung des Systems B.1 nachweisen. Diese Näherung ist durch folgende Wahl von  $G$  gegeben:

$$G(x) = \begin{cases} -x & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & |\pi - x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (\text{B.2})$$

Die Autoren vermuteten, daß eine ähnliche Schlußfolgerung auch für das System (B.1) gültig ist und belegten dies numerisch. Mit der in Kapitel 3 vorgestellten Technik ist es möglich, diese Vermutung zu beweisen. Aus Gründen

der Vergleichbarkeit mit den Formeln in Kapitel 3 ist der Ausgangspunkt nicht  $T$ , sondern  $T^{-1}$ :

$$T^{-1} : \quad x' = (x - kp') \bmod 2\pi \quad (\text{B.3a})$$

$$p' = p - G(x) . \quad (\text{B.3b})$$

Zunächst führt man wiederum eine Transformation durch, die zwei Punkte eines  $T^{-1}$ –Orbits zu einem zusammenfaßt:

$$u = p \quad (\text{B.4a})$$

$$v = p - G(x) . \quad (\text{B.4b})$$

Für die korrekte Definition der Umkehrung dieser Transformation sind nun ähnliche Einschränkungen vorzunehmen wie für die  $\beta$ – bzw.  $\alpha$ –Variable in Kapitel 3. Abhängig von der Richtung im Feld sind unterschiedliche Winkelbereiche  $x$  relevant. Entsprechend sind bei der Anwendung der trigonometrischen Umkehrfunktion, die bei der Invertierung von (B.4) auftaucht, die korrekten Wertebereiche zu wählen. Ich gebe die Umkehrtransformation nicht explizit an, da die konkrete Form für das folgende nicht benötigt wird, nur die Existenz dieser Umkehrfunktion muß sichergestellt sein.

Das weitere Vorgehen ist dann analog zu dem in Kapitel 3. Beachtet man, daß  $dG(x)/dx$  für Punkte in der invarianten Menge von 0 verschieden ist und damit die Ableitung von  $G^{-1}(x)$  durch  $(dG(x)/dx|_{G^{-1}(x)})^{-1}$  gegeben ist, so erhält man:

$$DT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{dG(x')}{\frac{dx}{dx}} & 1 + \frac{dG(x')}{\frac{dx}{dx}} + k \frac{dG(x')}{dx} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Ein Vergleich mit (3.23) bzw. (3.22) liefert dann als Bedingung für die Hyperbolizität:

$$1 + \left| \frac{\frac{dG(x')}{dx}}{\frac{dG(x)}{dx}} \right| \leq \mu \left| 1 + \frac{\frac{dG(x')}{dx}}{\frac{dG(x)}{dx}} + k \frac{dG(x')}{dx} \right| \quad (\text{B.6})$$

mit  $\mu \in ]0, 1[$ . Für die oben angegebenen Funktionen folgt diese Ungleichung nach kurzer Rechnung aus der Ungleichung:

$$k \geq \frac{1+\mu}{\mu} \left( \frac{1}{\left| \frac{dG(x')}{dx} \right|} + \frac{1}{\left| \frac{dG(x)}{dx} \right|} \right) . \quad (\text{B.7})$$

Für die genäherte Funktion  $G$  ist  $|dG/dx| = 1$ , so daß diese Bedingung für Hyperbolizität äquivalent ist mit der Bedingung:

$$k > 4 . \quad (\text{B.8})$$

Man erhält damit dasselbe Ergebnis wie in [TroSmi89]. Im nicht genäherten Fall ist (B.7) gleichbedeutend mit:

$$k > \frac{1+\mu}{\mu} \left( \frac{1}{|\cos x'|} + \frac{1}{|\cos x|} \right) . \quad (\text{B.9})$$

Insbesondere ist das System hyperbolisch, falls gilt:

$$k > 2 \max_{(x,p) \in \Lambda} \left( \frac{2}{|\cos x|} \right), \quad (\text{B.10})$$

wobei  $\Lambda$  die invariante Menge bezeichnet. Mit diesem Resultat ist die Vermutung in [TroSmi89] präzisiert und bewiesen.

## Anhang C

# Symmetrische periodische Orbits

In [Bir66] hat BIRKHOFF eine Methode vorgestellt, mit deren Hilfe man periodische Punkte einer Abbildung  $F : \Gamma \mapsto \Gamma$  bestimmen kann. Voraussetzung dafür ist, daß sich  $F$  als Produkt von zwei Involutionen schreiben läßt, d. h.:

$$F = I_1 \circ I_0 \quad (\text{C.1})$$

mit

$$I_1^2 = I_2^2 = E \quad , \quad (\text{C.2})$$

wobei  $E$  die Identität symbolisiert. Wie man durch Einsetzen verifiziert, läßt sich die Umkehrabbildung von  $F$  wie folgt darstellen:

$$F^{-1} = I_0 \circ F \circ I_0 \quad . \quad (\text{C.3})$$

Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  ergibt sich damit die Beziehung:

$$I_0 \circ F^{-n} = F^n \circ I_0 \quad . \quad (\text{C.4})$$

Man definiert nun für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Abbildungen

$$I_n = F^n \circ I_0 \quad . \quad (\text{C.5})$$

Mit  $\mathcal{R}_n$  wird die Menge aller Fixpunkte von  $I_n$  bezeichnet:

$$\mathcal{R}_n = \{p \in \Gamma | I_n(p) = p\} \quad (\text{C.6})$$

Mit diesen Definitionen gilt dann:

$$F^n \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{2n} \quad (\text{C.7})$$

$$F^n \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_{2n+1} \quad (\text{C.8})$$

Der Beweis dieser Aussagen ist mit Hilfe von (C.4) zu führen. Ist nämlich  $p$  ein Punkt aus  $\mathcal{R}_{2n}$ , so gilt:

$$\begin{aligned} p &= I_{2n}(p) \\ &= F^{2n} \circ I_0(p) \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

und dies ist wegen (C.4) äquivalent zu:

$$p = F^n \circ I_0 \circ F^{-n}(p) \quad . \quad (\text{C.10})$$

Von links mit  $F^{-n}$  multipliziert ergibt sich daraus:

$$F^{-n}(p) = I_0(F^{-n}(p)) \quad . \quad (\text{C.11})$$

Das bedeutet  $F^{-n}(p) \in \mathcal{R}_0$  und damit:

$$p \in F^n \mathcal{R}_0 \quad . \quad (\text{C.12})$$

Damit ist (C.7) bewiesen. Die Gleichung (C.8) beweist man ähnlich. Sei  $p \in \mathcal{R}_{2n+1}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} p &= I_{2n+1}(p) \\ &= F^{2n+1} \circ I_0(p) \\ &= F^n \circ (F \circ I_0) \circ F^{-n}(p) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Mit (C.1) und (C.2) folgt damit:

$$p = F^n \circ I_1 \circ F^{-n}(p) \quad . \quad (\text{C.14})$$

Nach Multiplikation mit  $F^{-n}$  erkennt man, daß  $F^{-n}(p)$  aus  $\mathcal{R}_1$  ist und daher gilt:

$$p \in F^n \mathcal{R}_1 \quad . \quad (\text{C.15})$$

Damit ist auch (C.8) bewiesen.

Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich nun zeigen, daß ein Punkt  $p$ , der sowohl in  $\mathcal{R}_n$  als auch in  $\mathcal{R}_m$  liegt, ein  $|n - m|$  periodischer Punkt von  $F$  ist. Ist nämlich  $p \in \mathcal{R}_n \cap \mathcal{R}_m$ , so ist dies äquivalent mit:

$$I_n(p) = I_m(p) \quad (\text{C.16})$$

bzw.

$$F^n \circ I_0(p) = F^m \circ I_0(p) \quad . \quad (\text{C.17})$$

Diese Gleichung ist wiederum gleichbedeutend mit:

$$I_0 \circ F^{n-m} \circ I_0(p) = p \quad , \quad (\text{C.18})$$

woraus mit (C.4) und (C.2) folgt:

$$F^{m-n}(p) = p \quad . \quad (\text{C.19})$$

Also ist  $p$  ein periodischer Punkt der Periode  $|n - m|$ . Periodische Punkte, die im Schnitt zweier Mengen  $\mathcal{R}_n$  und  $\mathcal{R}_m$  liegen, werden auch als symmetrische periodische Punkte bezeichnet.

## Anhang D

### Beispiele periodischer Orbits

In diesem Anhang werden exemplarisch die Bahnkurven einiger periodischer Orbits des Zwei–Mulden–Systems im Ortsraum dargestellt. Der Ausschnitt des Ortsraumes ist in allen Darstellungen durch den  $x$ –Bereich  $[-2, 2]$  und durch den  $y$ –Bereich  $[-0.9, 0.9]$  festgelegt. Die Bahnen gehören zum Parameterwert  $k = 1.9$ . In den Bildunterschriften sind die Symbolfolgen der Orbits angegeben. Mit Ausnahme von Abbildung D.1 sind die Symbolfolgen für das reduzierte System aufgeführt. In Abbildung D.1 sind zur Verdeutlichung des Zusammenhangs sowohl die Symbolfolgen des reduzierten als auch die des nichtreduzierten Systems angegeben. Der Auswahl der Orbits liegt keine Systematik zugrunde. Ziel ist es lediglich, die Komplexität der Dynamik anhand von Bahnkurven im Ortsraum zu verdeutlichen. In meinen Augen ist die hier vorgenommene Auswahl dazu geeignet.

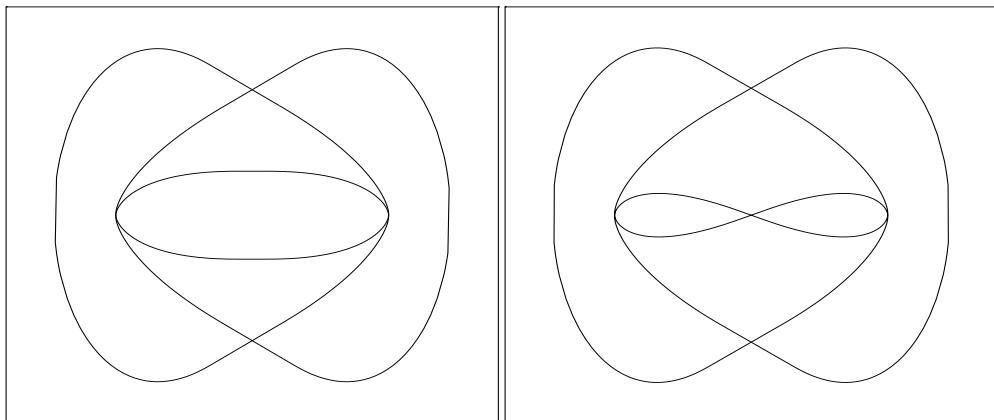


Abbildung D.1:

$$\begin{aligned} \overline{([<=][<=][>=])} &= \overline{([<+][>+][<+])} \\ \overline{([<=][<\neq][>=])} &= \overline{([<+][<-][>-][<-][<+][>+])} \end{aligned}$$

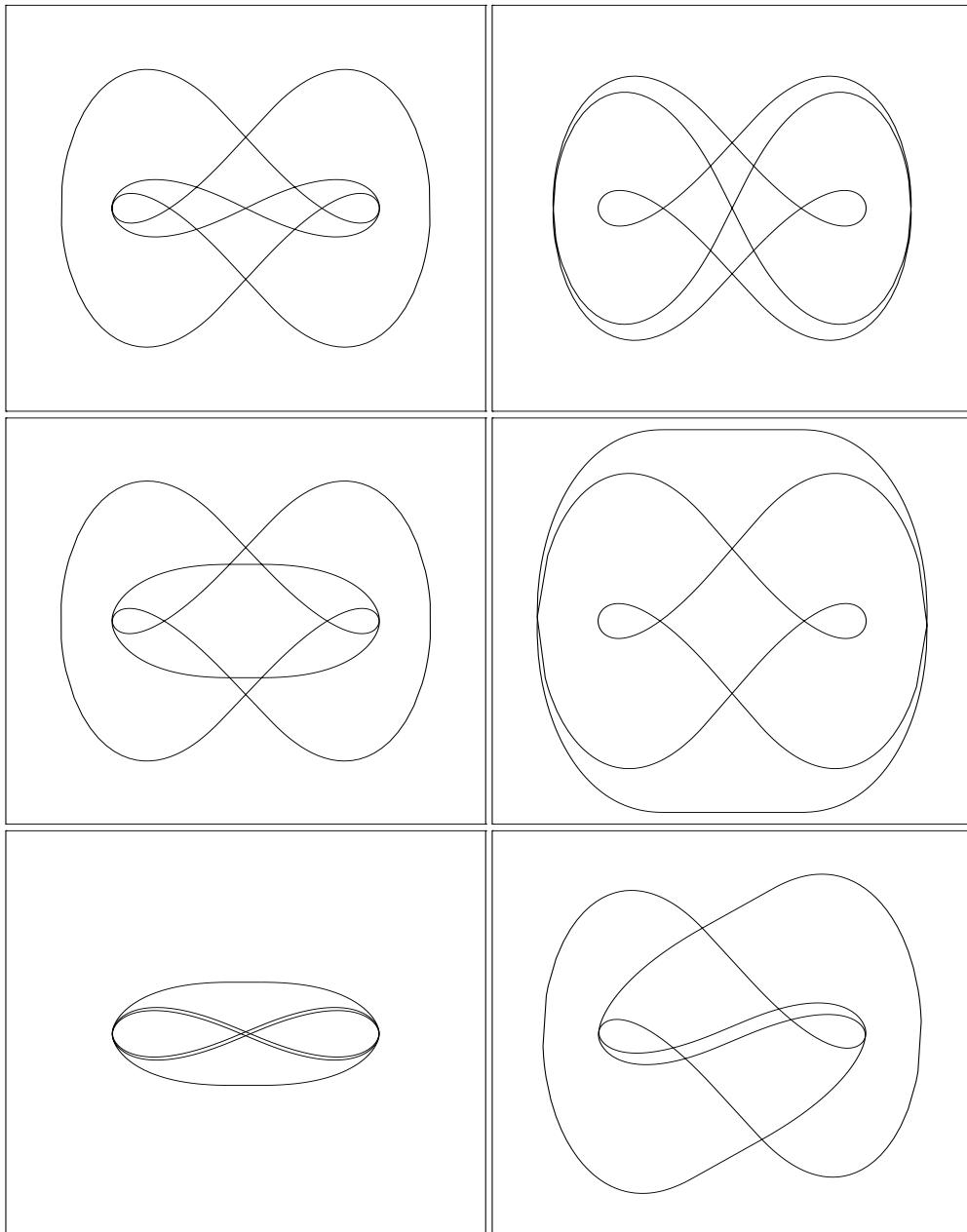


Abbildung D.2:

$$\begin{aligned}
 & \left( \overline{[<\neq][<\neq][>\neq]} , \left( \overline{[<\neq][>\neq][>\neq]} \right) , \right. \\
 & \left( \overline{[<=][>\neq][<\neq]} \right) , \left( \overline{[>=][<\neq][>\neq]} \right) , \\
 & \left. \left( \overline{[<=][<\neq][<\neq]} \right) , \left( \overline{[<=][<\neq][>\neq]} \right) . \right)
 \end{aligned}$$

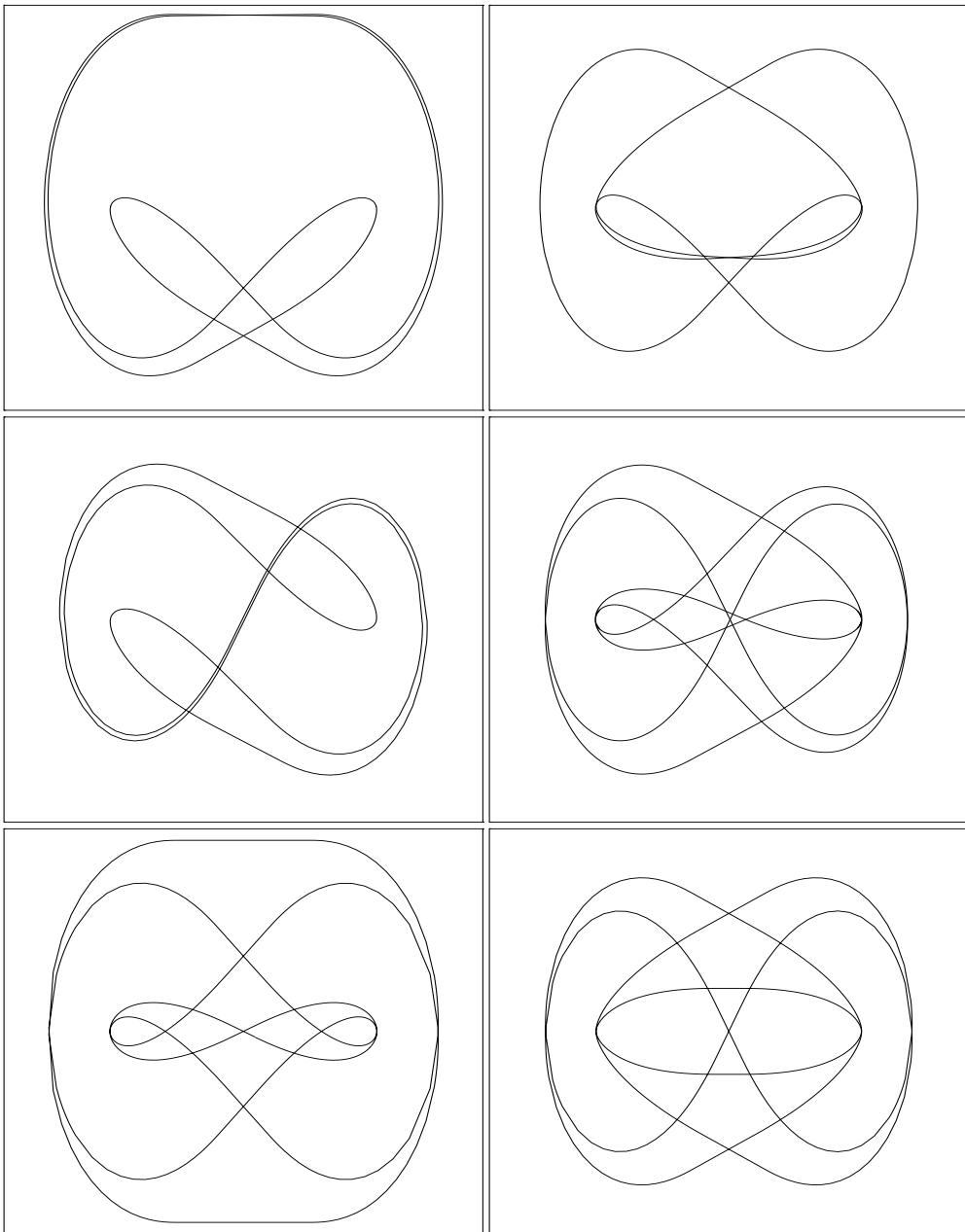


Abbildung D.3:

$$\begin{aligned} & \left( \overline{[<=][>\neq][>=]} \right), \left( \overline{[<=][<=][>\neq]} \right), \\ & \left( \overline{[>=][>\neq][<\neq]} \right), \left( \overline{[>=][>\neq][<\neq][<\neq]} \right), \\ & \left( \overline{[>=][<\neq][<\neq][>\neq]} \right), \left( \overline{[<=][<=][>=][>\neq]} \right). \end{aligned}$$

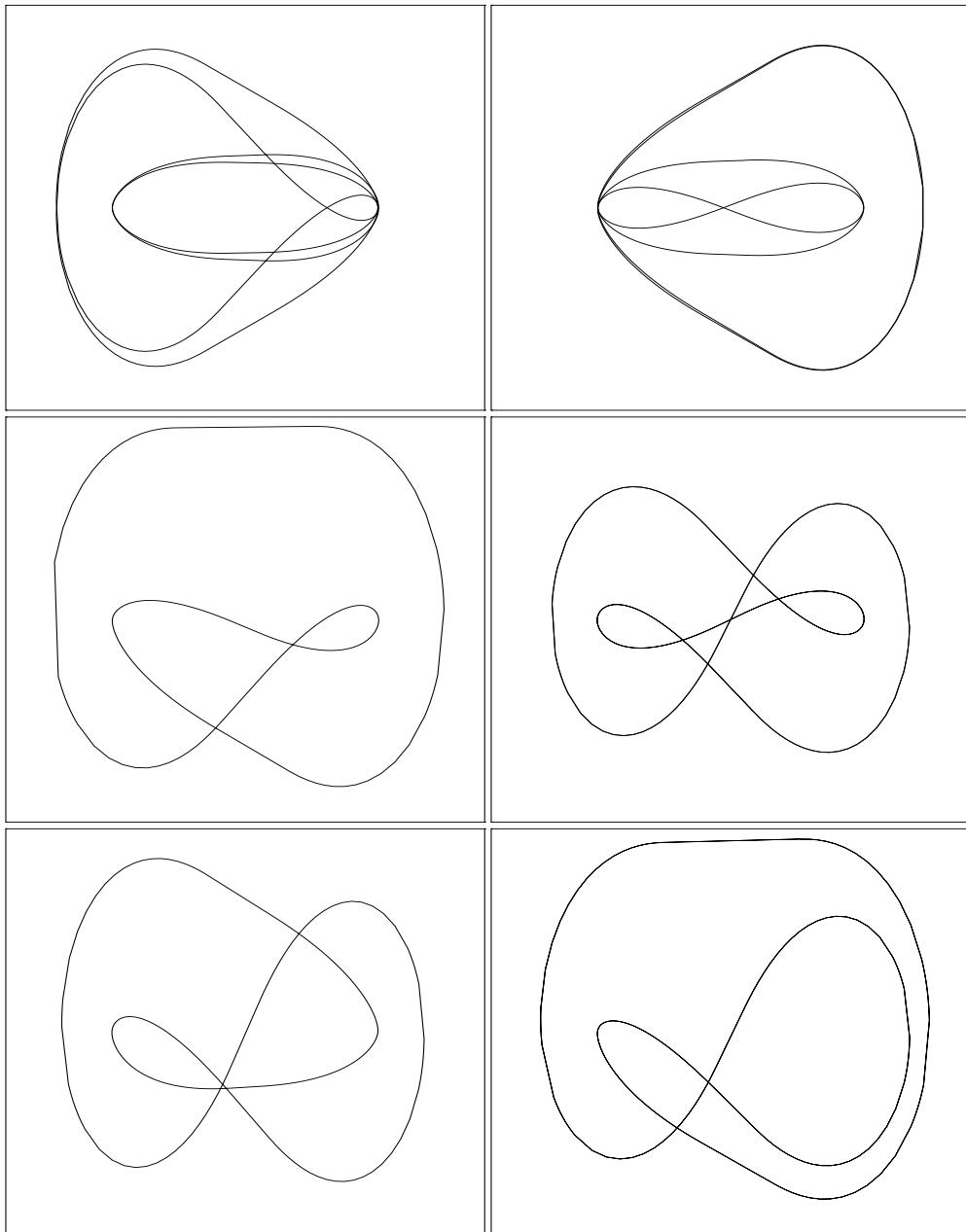


Abbildung D.4:

$$\begin{aligned}
 & \left( \overline{[<=][<=][<=][>\neq]} \right), \left( \overline{[<=][>=][<=][<\neq]} \right), \\
 & \left( \overline{[>=][>=][<\neq][<\neq]} \right), \left( \overline{[<\neq][<\neq][>\neq][>\neq]} \right), \\
 & \left( \overline{[<=][>=][>\neq][<\neq]} \right), \left( \overline{[>=][>=][>\neq][<\neq]} \right).
 \end{aligned}$$

# Literaturverzeichnis

- [Arn89] V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, New York (<sup>2</sup>1989)
- [Art+90a] R. Artuso, E. Aurell, P. Cvitanović, *Recycling of strange sets: I. Cycle expansions*, Nonlinearity **3**, 325 (1990)
- [Art+90b] R. Artuso, E. Aurell, P. Cvitanović, *Recycling of strange sets: II. Applications*, Nonlinearity **3**, 361 (1990)
- [BecSch93] C. Beck, F. Schlögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems*, Cambridge University Press (1993)
- [Bir66] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, AMS, New York (<sup>2</sup>1966)
- [BohRan87] T. Bohr, D. Rand, *The entropy function for characteristic exponents*, Physica D **25**, 387 (1987)
- [Bow75] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphism*, Lecture Notes in Mathematics **470**, Springer, Berlin (1975)
- [Bre+94] W. Breymann, Z. Kovács, T. Tél, *Chaotic scattering in the presence of an external magnetic field*, Phys. Rev. E **50**, 1994 (1994)
- [Bro85] R. Broucke, in: V. G. Szebehely, B. Balasz (Hrsg.), *Dynamical Astronomy*, University of Texas Press, Austin (1985)
- [BlüSmi89] R. Blümel, U. Smilansky, *A simple model for chaotic scattering, II. Quantum mechanical theory*, Physica D **36**, 111 (1989)
- [Chi74] M. S. Child, *Molecular Collision Theory*, Academic Press, London, New York (1974)
- [Cvi88] P. Cvitanović, *Invariant measurements of strange sets in terms of cycles*, Phys. Rev. Lett. **61**, 2729 (1988)
- [CviEck89] P. Cvitanović, B. Eckhardt, *Periodic-orbit quantization of chaotic systems*, Phys. Rev. Lett. **63**, 823 (1989)

- [CviEck93] P. Cvitanović, B. Eckhardt, *Symmetry decomposition of chaotic dynamics*, Nonlinearity **6**, 277 (1993)
- [DahRus92] P. Dahlquist, G. Russberg, *Existence of stable orbits in the  $x^2y^2$  potential*, Phys. Rev. Lett. **65**, 2837 (1990)
- [Dev89] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison–Wesley, Redwood City (2<sup>nd</sup> 1989)
- [DevNit79] R. Devaney, Z. Nitecki, *Shift automorphisms in the Hénon mapping*, Commun. Math. Phys. **67**, 137 (1979)
- [Eck87] B. Eckhardt, *Fractal properties of scattering singularities*, J. Phys. A **20**, 5971 (1987)
- [EckPro86] J. P. Eckmann, I. Procaccia, *Fluctuations of dynamical scaling indices in nonlinear systems*, Phys. Rev. A **34**, 659 (1986)
- [EckRue85] J. P. Eckmann, D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Rev. Mod. Phys. **57**, 617 (1985)
- [Fal90] K. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley, West Sussex (1990)
- [Far82] D. Farmer, *Information dimension and the probabilistic structure of chaos*, Z. Naturforsch. **37a**, 1304 (1982)
- [Fei87] M. J. Feigenbaum, *Scaling spectra and return times of dynamical systems*, J. Stat. Phys. **46**, 925 (1987)
- [Flü79] S. Flügge, *Mathematische Methoden der Physik I*, Springer, Berlin (1979)
- [Fuj83] H. Fujisaka, *Statistical dynamics generated by fluctuations of local Lyapunov exponents*, Progr. Theor. Phys. **70**, 1264 (1983)
- [Gra86] P. Grassberger, *Estimating the fractal dimensions and entropies of strange attractors*, in: A. V. Holden (Hrsg. ) *Chaos*, Manchester University Press, Manchester (1986)
- [GraKan85] P. Grassberger, H. Kantz, *Universal scaling of long-time tails in Hamiltonian systems*, Phys. Lett. **113A**, 167 (1985)
- [Gra+88] P. Grassberger, R. Badii, A. Politi, *Scaling law for invariant measures on hyperbolic and nonhyperbolic attractors*, J. Stat. Phys. **51**, 135 (1988)
- [Gre+75] E. F. Greene, R. B. Hall, E. A. Mason, *Vanishing rainbows near orbiting and the energy dependence of rainbow scattering: Relation to properties of the potential*, J. Chem. Phys. **62**, 3554 (1975)

- [GucHol86] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York (1986)
- [Gut92] M. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer (1992)
- [Hal+86] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, B. I. Shraiman, *Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets*, Phys. Rev. A **33**, 1141 (1986)
- [Ham62] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison–Wesley (1962)
- [Han93] K. T. Hansen, *Symbolic dynamics. I: Finite dispersive billiards*, Nonlinearity **6**, 753 (1993)
- [Hén76] M. Hénon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Commun. Math. Phys. **50**, 69 (1976)
- [Hén88] M. Hénon, *Chaotic scattering modelled by an inclined billiard*, Physica D **33**, 132 (1988)
- [HenPro83] H. G. E. Hentschel, I. Procaccia, *The infinite number of generalized dimensions of fractals and attractors*, Physica D **8**, 435 (1983)
- [Hir+77] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **583**, Springer (1977)
- [JenBoh87] M. H. Jensen, T. Bohr, *Order parameter, symmetry breaking, and the phase transitions in the description of multifractal sets*, Phys. Rev. A **36**, 4904 (1987)
- [JunRic90] C. Jung, P. H. Richter, *Classical chaotic scattering — periodic orbits, symmetries, multifractal invariant sets*, J. Phys. A **23**, 2847 (1990)
- [JunSch87a] C. Jung, H. J. Scholz, *Cantor set structures in the singularities of classical potential scattering*, J. Phys. A **23**, 3607 (1987)
- [JunSch87b] C. Jung, H. J. Scholz, *Chaotic scattering off the magnetic dipole*, J. Phys. A **21**, 2301 (1987)
- [KanGra85] H. Kantz, P. Grassberger, *Repellers, semi-attractors, and long lived chaotic transients*, Physica D **17**, 75 (1985)
- [Khi57] A. I. Khinchin, *Mathematical Foundations of Information Theory*, Dover Publ., New York (1957)

- [Koh88] M. Kohmoto, *Entropy function for multifractals*, Phys. Rev. A **37**, 1345 (1988)
- [KovTél90] Z. Kovács, T. Tél, *Thermodynamics of irregular scattering*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1617 (1990)
- [LaiGre94] Y. Lai, C. Grebogi, *Crisis and enhancement of chaotic scattering*, Phys. Rev. E **49**, 3761 (1994)
- [Lai+92a] Y. Lai, R. Blümel, E. Ott, C. Grebogi, *Quantum manifestations of chaotic scattering*, Phys. Rev. Lett. **68**, 3491 (1992)
- [Lai+92b] Y. Lai, M. Ding, C. Grebogi, R. Blümel, *Algebraic decay and fluctuations of the decay exponents in Hamiltonian systems*, Phys. Rev. A **46**, 4661 (1992)
- [Lai+92c] Y. Lai, C. Grebogi, R. Blümel, M. Ding, *Algebraic decay and phase-space metamorphoses in microwave ionization of hydrogen Rydberg atoms*, Phys. Rev. A **45**, 8284 (1992)
- [Mac+84] R. S. MacKay, J. D. Meiss, I. C. Percival, *Stochasticity and transport in Hamiltonian systems*, Phys. Rev. Lett. **52**, 697 (1984)
- [Mos73] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press (1973)
- [NewPal73] S. Newhouse, J. Palis, *Bifurcations of Morse–Smale dynamical systems*, in: M. M. Peixoto (Hrsg.), *Dynamical Systems*, Academic Press, New York (1973)
- [New82] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, Springer (1982)
- [NusYor89] H. E. Nusse, J. A. Yorke, *A procedure for finding numerical trajectories in chaotic saddles*, Physica D **36**, 137 (1989)
- [Rue78] D. Ruelle, *Statistical Mechanics, Thermodynamic Formalism*, Addison–Wesley, Reading, Mass. (1978)
- [Sma65] S. Smale, *Diffeomorphisms with many periodic points*, in: S. S. Cairnes (Hrsg.), *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton University Press (1965)
- [Smi92] U. Smilansky, *The classical and quantum theory of chaotic scattering*, in: M. Giannoni, A. Voros, J. Zinn–Justin (Hrsg.), *Chaos and Quantum Physics*, North–Holland, Amsterdam (1992)
- [SzéTél86] P. Szépfalusy, T. Tél, *New approach to the problem of chaotic repellers*, Phys. Rev. A **34**, 2520 (1986)

- [Tél87] T. Tél, *Escape rate from strange sets as an eigenvalue*, Phys. Rev. A **36**, 1502 (1987)
- [Tél88] T. Tél, *Fractals, Multifractals, and Thermodynamics*, Z. Naturforsch. **43a**, 1154 (1988)
- [Tél90] T. Tél, *Transient chaos*, in: Hao Bai Lin (Hrsg.), *Directions in Chaos*, Vol. 3, World Scientific (1990)
- [Tro91] G. Troll, *A devil's staircase into chaotic scattering*, Physica D **50**, 276 (1991)
- [Tro93] G. Troll, *Truncated horseshoes and formal languages in chaotic scattering*, Chaos **3**, 459 (1993)
- [TroSmi89] G. Troll und U. Smilansky, *A simple model for chaotic scattering, I. Classical theory*, Physica D **35**, 34 (1989)
- [Wal82] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, New York (1982)
- [Wig88] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos*, Springer, New York (1988)

# Danksagung

Zum Schluß möchte ich mich bei all denen bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Peter Eckelt. Er gab nicht nur die Anregung zu dieser Arbeit. Er unterstützte mich während ihrer Fertigstellung auch in vielfacher Weise.

Bei Arne Beeker möchte ich mich für die Hilfe beim Korrekturlesen bedanken. Zusammen mit Martin Engel sorgte er für eine anregende und besonders humorvolle Arbeitsatmosphäre in Zimmer 421. Beide übernahmen darüber hinaus verschiedene Dv-Dienste.

Dank gilt meinen Eltern für ihre mannigfache Hilfe während meines Studiums.

Dank sagen möchte ich meiner Frau. Ohne ihre Unterstützung wäre diese Arbeit nicht so geworden, wie sie ist. Bei meiner Tochter möchte ich mich für die tatkräftige Hilfe durch rationierte Zuteilung von Gummibärchen bedanken.

Nicht zuletzt möchte ich all jenen hier nicht namentlich Erwähnten danken, die mich in kritischen Phasen der Arbeit aufmunterten.



Lebenslauf:

Name	Berthold Stegemerten
Geburtstag	25.7.1964
Geburtsort	Bad Bentheim
Eltern	Johann Stegemerten Gertrud Stegemerten geb. Niermann
Familienstand	verheiratet mit Sigrid Stegemerten geb. Bögemann eine Tochter
Kinder	
Schulbildung	
1970–1974	Grundschule Achterberg, Bad Bentheim
1974–1983	Missionsgymnasium St. Antonius Bardel, Bad Bentheim
26.5.1983	Abitur
November 1983–Februar 1985	Zivildienst
Studium	
ab SS 1985	Mathematikstudium an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
ab WS 1985/86	Physikstudium an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
22.9.1987	Vordiplome in Mathematik und Physik
18.7.1991	Diplom in Physik
August 1991	Beginn der Dissertation am Institut für Theoretische Physik I bei Prof. Dr. P. Eckelt, WWU Münster
Tätigkeiten	
März 1990 – Juli 1991	Studentische Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I, WWU Münster
August 1991 – Dezember 1992	Wissenschaftliche Hilfskraft
ab Januar 1993	Wissenschaftlicher Mitarbeiter



