

**Mario Sempf**

**Periodische Orbits und hartes Chaos in  
einem Zweimulden-Streusystem**

**2002**







# Periodische Orbits und hartes Chaos in einem Zweimulden-Streusystem

Diplomarbeit  
vorgelegt von  
Mario Sempf

Institut für Theoretische Physik  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

9. Januar 2002



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>1 Das System</b>	<b>7</b>
1.1 Skalierungen . . . . .	8
1.2 Herleitung der Abbildung . . . . .	10
1.3 Symmetriereduktion . . . . .	11
1.4 Die Ablenkfunktion . . . . .	13
1.4.1 Eigenschaften klassischer Ablenkfunktionen . . . . .	13
1.4.2 Die Modellablenkfunktion . . . . .	18
<b>2 Chaos, Hyperbolizität und Symbolische Dynamik</b>	<b>21</b>
2.1 Definition von Chaos . . . . .	22
2.2 Abbildungseigenschaften von $F$ . . . . .	23
2.3 Hyperbolizität der invarianten Menge . . . . .	25
2.4 Konstruktion der invarianten Menge . . . . .	26
2.5 Symbolische Dynamik . . . . .	31
2.5.1 Teilweise reduziertes System . . . . .	32
2.5.2 Reduziertes System . . . . .	35
2.5.3 Konsequenzen der Symbolischen Dynamik . . . . .	36
2.5.3.1 Chaotizität . . . . .	36
2.5.3.2 Numerisches Verfahren zur Bestimmung periodischer Orbits . . . . .	37
2.6 Topologie der periodischen Orbits . . . . .	38

<b>3 Theorie der periodischen Orbits</b>	<b>42</b>
3.1 Ergodizität . . . . .	43
3.2 Mittelungen und Entwicklungsoperatoren . . . . .	45
3.2.1 Die Escape-Rate und der Perron-Frobenius-Operator . . . . .	46
3.2.2 Korrelationsfunktionen . . . . .	51
3.2.3 Dynamische Mittelungen . . . . .	57
3.3 Spurformeln . . . . .	60
3.3.1 Die exakte Spurformel . . . . .	61
3.3.2 Die asymptotische Spurformel . . . . .	64
3.4 Zeta-Funktionen . . . . .	65
3.5 Diskrete Symmetrien . . . . .	68
3.5.1 Darstellungstheorie endlicher Gruppen . . . . .	70
3.5.2 Dynamik im Fundamentalbereich . . . . .	75
3.5.2.1 Symmetriereduzierte Spurformel . . . . .	75
3.5.2.2 Faktorisierung der Zeta-Funktionen . . . . .	77
3.5.3 Anwendung auf das Zweimuldensystem . . . . .	82
3.6 Die Cycle Expansion . . . . .	85
3.6.1 Cycle Expansion der dynamischen Zeta-Funktion . . . . .	86
3.6.2 Cycle Expansion der Selbergschen Zeta-Funktion . . . . .	90
3.7 Formel für dynamische Mittelwerte . . . . .	92
<b>4 Anwendung der Theorie</b>	<b>95</b>
4.1 Die Escape-Rate $\kappa$ . . . . .	96
4.1.1 Numerischer Streuversuch zur Berechnung von $\kappa$ . . . . .	96
4.1.2 Bestimmung von $\kappa$ mit den Zeta-Funktionen . . . . .	99
4.2 Der Lyapunov-Exponent $\lambda$ . . . . .	102
4.2.1 Definition des Lyapunov-Exponenten $\lambda$ . . . . .	102
4.2.2 Der dynamische Mittelwert $\lambda$ . . . . .	104
4.2.3 Numerische Berechnung von $\lambda$ . . . . .	105

4.2.4	Bestimmung von $\lambda$ mit Hilfe der Theorie . . . . .	108
4.3	Das Resonanzspektrum . . . . .	110
4.3.1	Numerische Berechnung einer Korrelationsfunktion . . . . .	111
4.3.2	Symmetrien des Eigenwertspektrums von $\mathcal{L}$ . . . . .	113
4.3.3	Numerische Bestimmung komplexer Nullstellen . . . . .	115
4.3.4	Bestimmung von Resonanzen . . . . .	116
<b>Schluß</b>		<b>123</b>
<b>A Beispiele periodischer Orbits</b>		<b>125</b>
<b>B Matrixdarstellung des Perron-Frobenius-Operators</b>		<b>130</b>
B.1	Vorbereitende Überlegungen . . . . .	131
B.2	Die Escape-Rate $\kappa$ . . . . .	136
B.3	Numerische Berechnungen . . . . .	139
<b>C Alternativer Zugang zur asymptotischen Spurformel</b>		<b>146</b>
<b>D Periodische Orbits und Symmetrien</b>		<b>149</b>
D.1	Symmetrieinvarianz periodischer Orbits . . . . .	149
D.2	Symmetriereduzierte Spurformel . . . . .	153
<b>E Cycle Expansions und Symmetrien beim Zweimuldensystem</b>		<b>159</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>165</b>

# Einleitung

Die breitgefächerte Palette klassischer Hamilton-Systeme wird von zwei Systemklassen mit extremen Eigenschaften berandet. Dabei handelt es sich zum einen um die *integrablen* Systeme und zum anderen um die *hart chaotischen* Systeme. Für integrierte Systeme existiert eine geschlossene Lösungstheorie, nämlich die *Hamilton-Jacobi-Theorie*. Die Zeitentwicklung eines gegebenen Anfangszustandes lässt sich (im Prinzip) mit analytischen Methoden bestimmen. Zwar sind integrierte Systeme i. a. nichtlinear, aber durch geeignete kanonische Transformationen linearisierbar. Die Dynamik solcher Systeme ist „regulär“, „geordnet“. Gebundene Bewegungen beispielsweise sind stets periodisch oder quasiperiodisch. Ferner verursachen kleine Unsicherheiten in der Kenntnis des Anfangszustandes in der Regel nur kleine Unsicherheiten bei der Angabe späterer Zustände.

Hart chaotische Systeme verhalten sich hingegen völlig anders. Die zu Grunde liegenden Bewegungsgleichungen können nicht wie oben linearisiert werden und lassen sich nur numerisch integrieren. Hart chaotische Systeme weisen, wie der Name sagt, eine vollkommen irreguläre, chaotische Dynamik auf. Die Bewegungen erscheinen willkürlich und zufällig. Das Chaos ist „voll entwickelt“ in dem Sinne, daß der gesamte Phasenraum von irregulären Strukturen beherrscht wird. Nirgendwo existieren ausgedehnte „Inseln der Ordnung“, auf denen eine reguläre Bewegung erfolgt. Zwei dicht benachbarte Trajektorien laufen fast immer exponentiell auseinander. Das hat zur Folge, daß eine geringfügige Unsicherheit des Anfangszustandes zu einer großen Unsicherheit späterer Zustände führt. Obwohl deterministisch, ist die Dynamik hart chaotischer Systeme also praktisch nicht vorhersagbar.

Generische Hamilton-Systeme sind irgendwo zwischen diesen beiden Extremen anzusiedeln. Systeme, die „beinahe“ integriert sind, können als integrierte Systeme behandelt werden, die einer kleinen Störung unterworfen sind. Mit den Methoden der *Störungstheorie* können Näherungslösungen für solche Systeme gefunden werden. Bei der Untersuchung von Bewegungen über hinreichend kurze Zeitintervalle ist diese Vorgehensweise sehr erfolgreich [Arn78].

Daher liegt es nahe, bei der Beschreibung von Systemen, die von Chaos dominiert werden, nach dem gleichen Prinzip vorzugehen. Sie können als hart chaoti-

sche Systeme betrachtet werden, die von kleinen Phasenraumbereichen, in denen Ordnung herrscht, „störend“ beeinflußt werden. Dafür benötigt man allerdings zunächst eine Theorie zur Analyse hart chaotischer Systeme.

Bei der Entwicklung einer solchen „Chaostheorie“ sind innerhalb der letzten beiden Jahrzehnte erhebliche Fortschritte erzielt worden. Ziel dieser Theorie ist es nicht, Aussagen über die Zeitentwicklung bestimmter Zustände zu machen, denn eine solche Fragestellung ist wegen der praktischen Unvorhersagbarkeit der Dynamik nicht sinnvoll. Vielmehr werden Größen betrachtet, die das zu untersuchende System global beschreiben. Beispiele sind Escape-Raten, Lyapunov-Exponenten, verallgemeinerte Entropien oder auch fraktale Dimensionen bestimmter Teilmengen des Phasenraumes, die unter der Dynamik invariant sind.

Zur Berechnung solcher Größen ist eine Theorie entwickelt worden, die auf Methoden der Statistischen Mechanik basiert und als *Thermodynamischer Formalismus* bezeichnet wird [Rue78, BecSch93]. Eine Alternative dazu stellt die *Theorie der periodischen Orbits* dar. Sie ermöglicht die Bestimmung der Systemgrößen aus den Eigenschaften der periodischen Orbits des betrachteten Systems. In [Art+90a, Art+90b] sind die wichtigsten Aspekte dieser Theorie erstmalig zusammengefaßt worden. Zur Zeit entsteht ein ausführliches Webbook zu diesem Thema [Cvi+01].

Um solche Theorien erproben zu können, benötigt man hart chaotische Modellsysteme. Bei bisherigen Untersuchungen sind vorwiegend zweidimensionale Potentiale betrachtet worden, die aus harten, konvexen Wänden bestehen, sog. *dispersive Billards*. In solchen Systemen ist jede Trajektorie instabil; benachbarzte Trajektorien laufen exponentiell auseinander. Im Bereich der *offenen Systeme* (Streusysteme) gilt das *Dreischeiben-Billard* als Prototyp für hartes Chaos [Cvi+94, Cvi+01].

Auf den ersten Blick erwartet man daher nicht, daß auch bei der Streuung an einer Anordnung, die sich aus attraktiven Potentialen zusammensetzt, chaotisches Verhalten zu beobachten ist. Die fokussierende Wirkung attraktiver Potentiale sollte eigentlich stabilisierend wirken. Tatsächlich ist z.B. die Bewegung eines geladenen Teilchens in zwei nebeneinander liegenden gleichstarken attraktiven Coulomb-Potentialen integrabel [Cha27].

Es ist jedoch ein Streusystem mit zwei Freiheitsgraden gefunden worden, das sich aus zwei Muldenpotentialen zusammensetzt und dennoch hart chaotisch ist [Ste95]. Die Chaotizität des Systems ist, grob gesagt, folgendermaßen zu erklären: Zum einen sind die Potentiale so beschaffen, daß Trajektorien durch *Überfokussierung* destabilisiert werden. Zum anderen ermöglichen die Potentiale so starke Ablenkungen, daß sich ein an ihnen gestreutes Teilchen lange im Wechselwirkungsbereich aufhalten kann. Dieses *attraktive* Streusystem ist als Modell für hartes Chaos dem *repulsiven* Dreischeiben-Billard mindestens ebenbürtig, wenn nicht gar überlegen, da es einfacher ist.

Obiges *Zweimuldensystem* ist auch das Thema der vorliegenden Arbeit. Während in [Ste95] die Untersuchung des Systems mittels des Thermodynamischen Formalismus im Vordergrund steht, wird hier eine Analyse mit den Methoden der Theorie der periodischen Orbits durchgeführt.

Die Arbeit besteht aus vier Kapiteln. Die ersten beiden Kapitel sind an [Ste95] angelehnt. In Kapitel 1 wird das Zweimuldensystem vorgestellt. Es wird eine zeitdiskrete Abbildung hergeleitet, welche die Dynamik des Systems vollständig beschreibt. Aus den Orbits dieser Abbildung können Trajektorien des Hamiltonschen Flusses rekonstruiert werden. Die Abbildung wird bezüglich der Symmetrie, die das System aufweist, reduziert. Die Symmetriereduktion spielt in allen daraufliegenden Kapiteln eine wichtige Rolle.

In Kapitel 2 geht es um grundlegende Eigenschaften der Abbildung. Zunächst wird die Definition von Chaos nach DEVANEY eingeführt und damit der Begriff „hartes Chaos“ präzisiert. Anschließend wird die Geometrie der Abbildung untersucht und die Struktur der *invariantem Menge* beschrieben. Die in [Ste95] bewiesene *Hyperbolizität* der invarianten Menge ermöglicht ferner die Einführung einer *vollständigen Symbolischen Dynamik*. Mit dieser wird die harte Chaotizität der Abbildung gezeigt. Ferner wird ein numerisches Verfahren zur Bestimmung periodischer Orbits vorgestellt, das auf der Symbolischen Dynamik basiert.

Die Hyperbolizität, die Existenz der Symbolischen Dynamik sowie die harte Chaotizität sind wichtige Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Theorie der periodischen Orbits.

Eine allgemeine Darstellung dieser Theorie, in Anlehnung an [Cvi+01], ist Gegenstand von Kapitel 3. Im Mittelpunkt der Theorie stehen die *dynamische Zeta-Funktion* und die *Selbergsche Zeta-Funktion*. Mit diesen Funktionen lassen sich die gesuchten Systemgrößen exakt bestimmen – aber nur im Prinzip, denn die Funktionen hängen von den Eigenschaften *aller*, also in der Regel von unendlich vielen periodischen Orbits des untersuchten Systems ab. Die dadurch entstehende Problematik wird durch ein erstmalig in [Cvi88] eingeführtes Näherungsverfahren, die *Cycle Expansion*, behoben. Diese ermöglicht die näherungsweise Berechnung der Zeta-Funktionen aus einer endlichen Anzahl periodischer Orbits.

In Kapitel 4 kommt die Theorie schließlich zur Anwendung, indem verschiedene charakteristische Größen des Zweimuldensystems bestimmt werden. Die dazu erforderliche genaue Berechnung periodischer Orbits macht den überwiegenden Anteil am numerischen Aufwand aus. Aus der dadurch entstehenden Datensammlung werden mit der Cycle Expansion die Systemgrößen ermittelt. Dabei erfolgt ein Vergleich mit Ergebnissen aus anderen, „primitiveren“ numerischen Verfahren, die keinen besonderen theoretischen Unterbau besitzen.

# Kapitel 1

## Das System

In dieser Arbeit wird die Streuung eines Teilchens der Masse  $m$  in der  $x$ - $y$ -Ebene an zwei gleichen attraktiven Zentralpotentialen  $V(r)$  betrachtet. Deren Zentren befinden sich in den Punkten  $\mathbf{R}_0 = (R_0, 0)$  und  $\mathbf{R}_1 = (-R_0, 0)$ . Die beiden Potentiale besitzen endliche Reichweite und überlappen sich nicht. In Abbildung 1.1 ist die Geometrie der Streuanordnung dargestellt. Diese ist invariant unter Spiegelungen an der  $x$ - und an der  $y$ -Achse sowie unter Drehungen um Ursprung um den Winkel  $\pi$ . Zusammen mit der Identität bilden diese Symmetrieeoperationen die Symmetriegruppe  $\mathcal{C}_{2v}$ .

Das System besitzt folgende Hamilton-Funktion:

$$H(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|) + V(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|). \quad (1.1)$$

Durchläuft das Teilchen eine der beiden Potentialmulden, so wird es um einen Winkel  $-\Theta$  abgelenkt. Bezeichnet man mit  $l$  die  $z$ -Komponente des Drehimpulses des Teilchens bezüglich des Zentrums der durchlaufenen Mulde und mit  $E$  die Energie des Teilchens, so ist  $\Theta$  durch folgende Ablenkfunktion gegeben [Chi74]:

$$\Theta(l) = \text{sgn}(l) \pi - 2l \int_{\bar{r}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{l^2}{r^2}}}. \quad (1.2)$$

Bei  $\bar{r}$  handelt es sich um den äußeren klassischen Umkehrpunkt des Teilchens. Dieser ist die größte Nullstelle des Nenners. Es gilt

$$\Theta(l) = -\Theta(-l), \quad (1.3)$$

was die Zeitumkehrinvarianz wiedergibt.

Die kanonischen Bewegungsgleichungen des durch (1.1) definierten dynamischen Systems vermitteln einen Fluß in einem vierdimensionalen Phasenraum. Im fol-

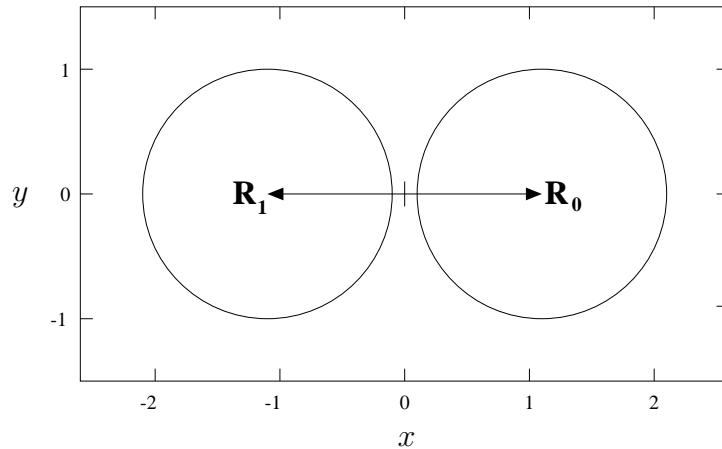


Abbildung 1.1: Das Zweimulden-Streusystem. Die Kreise geben die Reichweite der Potentiale an und haben gemäß der Längenskalierung (1.4a) den Radius 1. Der Abstand der Streuzentren vom Ursprung beträgt  $R_0 = 1.1$ .

genden wird jedoch unter Verwendung der Ablenkfunktion eine Abbildung hergeleitet, welche die Dynamik des Systems bereits vollständig beschreibt. Insbesondere wird es möglich sein, aus den Orbits der Abbildung Bahnkurven im Ortsraum zu rekonstruieren.

Um die nachfolgenden Rechnungen möglichst einfach zu halten, werden in Abschnitt 1.1 Skalierungen vorgenommen. Die erwähnte Abbildung wird in Abschnitt 1.2 hergeleitet. Im darauffolgenden Abschnitt 1.3 wird beschrieben, wie die Abbildung bezüglich der  $C_{2v}$ -Symmetrie reduziert wird. Abschnitt 1.4 beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Ablenkfunktionen verschiedener Muldenpotentiale sowie mit der Einführung einer Modellablenkfunktion.

## 1.1 Skalierungen

Die Reichweite der Potentiale sei mit  $\rho$  bezeichnet. Dadurch wird im folgenden die Maßeinheit der Länge definiert. Alle dynamischen Variablen werden auf dimensionslose Größen transformiert:

$$\frac{\mathbf{R}}{\rho} \longrightarrow \mathbf{R} \quad (1.4a)$$

$$\frac{\mathbf{P}}{\sqrt{2mE}} \longrightarrow \mathbf{P} \quad (1.4b)$$

$$\frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{2E}{m}} t \longrightarrow t \quad (1.4c)$$

$$\frac{H}{2E} \longrightarrow H \quad (1.4d)$$

$$\frac{V(r)}{2E} \longrightarrow V(r). \quad (1.4e)$$

In (1.4e) ist die Skalierung  $\frac{r}{\rho} \longrightarrow r$  im Argument zu beachten.

Aus den Skalierungen ergeben sich einige Folgerungen: An (1.4b) kann man ablesen, daß außerhalb der Streupotentiale

$$|\mathbf{P}| = 1 \quad (1.4f)$$

gilt. Aus der Definition des Drehimpulses folgt, daß dieser sich gemäß

$$\frac{l}{\rho\sqrt{2mE}} \longrightarrow l \quad (1.4g)$$

transformiert. Der Drehimpuls stimmt ferner wegen (1.4f) mit dem Stoßparameter überein. Daher ist ein Drehimpulsbetrag größer als 1 gleichbedeutend mit einem Vorbeiflug an der Mulde.

Mit den Gleichungen (1.4a-c) zeigt man, daß nach Durchführung der Skalierungen

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \quad (1.4h)$$

gilt. Das bedeutet, daß die Masse des Teilchens aus allen Gleichungen herausfällt, d. h. die Masse wird auf 1 transformiert:

$$1 \longrightarrow m. \quad (1.4i)$$

Gleichung (1.4d) besagt nichts anderes, als daß die Energie auf den Wert 1/2 skaliert wird:

$$\frac{1}{2} \longrightarrow E. \quad (1.4j)$$

Leitet man die Ablenkfunktion in den skalierten Größen her, dann nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\Theta(l) = \text{sgn}(l) \pi - 2l \int_{\bar{r}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - 2V(r) - \frac{l^2}{r^2}}}. \quad (1.5)$$

Für alle folgenden Überlegungen und Rechnungen wird der Abstand der Streuzentren vom Ursprung auf

$$R_0 = 1.1 \quad (1.6)$$

festgelegt.

## 1.2 Herleitung der Abbildung

Angenommen, das Teilchen durchläuft die  $i$ -te Mulde ( $i = 0, 1$ ) mit dem Drehimpuls  $l_i$  bezüglich des Muldenzentrums  $\mathbf{R}_i$ . Dann muß wegen der obigen Skalierungen notwendig

$$|l_i| \leq 1 \quad (1.7)$$

gelten. Wenn das Teilchen die  $i$ -te Mulde mit dem Impuls  $\mathbf{P}$  verläßt, dann sei der Winkel zwischen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{R}_i$  mit  $\beta_i$  bezeichnet. Das Teilchen besucht anschließend genau dann Mulde  $j$  (mit  $j = 1 - i$ ), wenn die beiden Bedingungen

$$\frac{\pi}{2} < \beta_i < \frac{3\pi}{2} \quad (1.8)$$

und

$$|l_j| \leq 1 \quad (1.9)$$

erfüllt sind, wobei  $l_j$  den Drehimpuls bezüglich  $\mathbf{R}_j$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} l_j &= [(\mathbf{R} - \mathbf{R}_j) \times \mathbf{P}]_z \\ &= [(\mathbf{R} - \mathbf{R}_i) \times \mathbf{P}]_z + [(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) \times \mathbf{P}]_z \\ &= l_i + 2[\mathbf{R}_i \times \mathbf{P}]_z \\ &= l_i + 2R_0 \sin \beta_i. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Der Winkel zwischen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{R}_j$  ist durch  $\beta_i - \pi$  gegeben. Durch die  $j$ -te Mulde (falls diese tatsächlich besucht wird) erfährt das Teilchen eine Ablenkung um  $-\Theta(l_j)$ . Für den Austrittswinkel  $\beta_j$  gilt dann also:

$$\beta_j = \beta_i - \pi - \Theta(l_j). \quad (1.11)$$

Durch die Gleichungen (1.10) und (1.11) zusammen mit den Bedingungen (1.8) und (1.9) ist eine Poincaré-Abbildung des Hamiltonschen Flusses gegeben. Das Tripel  $(\beta_i, l_i, i)$  wird auf das Tripel  $(\beta_j, l_j, 1-i)$  abgebildet. Durch diese Abbildung wird die Dynamik für Trajektorien, die wenigstens einmal eine Potentialmulde aufsuchen, vollständig und eindeutig beschrieben.

Um die Abbildung in übersichtlicher Weise zu notieren, wird nun der Index  $i$  weggelassen und der Index  $j$  durch einen hochgestellten Strich ersetzt. Außerdem wird eine Variable  $\mu$  eingeführt, die angibt, bei welcher Mulde sich das Teilchen gerade aufhält, d. h. es wird  $\mu = i$  und  $\mu' = j$  gesetzt. Damit ist die Abbildung gegeben durch

$$\beta' = \beta - \pi - \Theta(l') \quad (1.12a)$$

$$\hat{F} : \quad l' = l + 2R_0 \sin \beta \quad (1.12b)$$

$$\mu' = 1 - \mu. \quad (1.12c)$$

Es sind nur  $l$ -Werte mit  $|l| \leq 1$  zulässig. Die Abbildung  $\hat{F}$  wird iteriert, wenn die Bedingungen

$$|l'| \leq 1 \quad (1.12d)$$

und

$$\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2} \quad (1.12e)$$

gelten. Um (1.12d) zu überprüfen, muß  $l'$  aus (1.12b) berechnet werden. Ist (1.12d) dann verletzt, so ist das Ergebnis für  $l'$  nachträglich zu verwerfen.

Die Abbildung  $\hat{F}(\beta, l, \mu)$  ist invertierbar. In  $\hat{F}^{-1}(\beta', l', \mu')$  dürfen nur  $l'$ -Werte mit  $|l'| \leq 1$  eingesetzt werden. Nach der Iteration von  $\hat{F}^{-1}$  sind die Bedingungen  $|l| \leq 1$  und (1.12e) nachträglich zu überprüfen; gegebenenfalls ist das Ergebnis der Iteration zu verwerfen.

Eine einlaufende Trajektorie ist somit durch ein Tripel  $(\beta, l, \mu)$  gegeben, das kein zulässiges Urbild besitzt, eine auslaufende Trajektorie durch ein Tripel, dessen Bild unzulässig ist.

Der Phasenraum, in welchem die Abbildung  $\hat{F}$  wirkt, ist der folgende zweifache Zylinder:

$$\hat{\Gamma} = S^1 \times [-1, 1] \times \{0, 1\}. \quad (1.13)$$

Das dynamische System  $(\hat{\Gamma}, \hat{F})$  wird im folgenden als *nichtreduziertes System* bezeichnet, da an ihm noch nicht die nachfolgend beschriebene Symmetriereduktion vorgenommen wurde.

## 1.3 Symmetriereduktion

Die Invarianz der Streuanordnung unter der Symmetriegruppe  $\mathcal{C}_{2v}$  überträgt sich auf die Abbildung  $\hat{F}$ . Die Elemente von  $\mathcal{C}_{2v}$  werden mit  $e, \sigma_x, \sigma_y, c_2$  bezeichnet. Im Ortsraum werden diese Elemente durch die Identität, die Spiegelung an der  $x$ -Achse, die Spiegelung an der  $y$ -Achse sowie die Drehung um  $\pi$  realisiert. Im Phasenraum  $\hat{\Gamma}$  hingegen werden die Wirkungen der Gruppenelemente durch folgende Transformationen beschrieben:

$$e(\beta, l, \mu) = (\beta, l, \mu), \quad (1.14a)$$

$$\sigma_x(\beta, l, \mu) = (-\beta, -l, \mu), \quad (1.14b)$$

$$\sigma_y(\beta, l, \mu) = (-\beta, -l, 1 - \mu), \quad (1.14c)$$

$$c_2(\beta, l, \mu) = (\beta, l, 1 - \mu). \quad (1.14d)$$

Die Abbildung  $\hat{F}$  ist wegen (1.3) invariant unter jeder dieser Transformationen. Das heißt, ist  $g$  eine beliebige dieser Transformationen, so gilt:

$$\hat{F} = g^{-1} \circ \hat{F} \circ g. \quad (1.15)$$

Im Verlauf der Arbeit wird es sich als sehr nützlich erweisen, das System bezüglich der  $\mathcal{C}_{2v}$ -Symmetrie zu reduzieren. Das bedeutet, daß die Dynamik auf den *Fundamentalbereich*

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} &= S^1 \times [0, 1] \times \{0\} \\ &\simeq S^1 \times [0, 1]\end{aligned}\quad (1.16)$$

eingeschränkt wird. Der gesamte Phasenraum  $\hat{\Gamma}$  setzt sich aus Bildern des Fundamentalbereichs  $\tilde{\Gamma}$  unter den Symmetrieroberationen (1.14) zusammen. Bei der Symmetriereduktion wird für jeden Orbit von  $\hat{F}$  jeder Orbitpunkt, der sich außerhalb von  $\tilde{\Gamma}$  befindet, durch eine jeweils geeignet zu wählende Symmetrieroberation auf einen zugehörigen Punkt in  $\tilde{\Gamma}$  abgebildet. So entstehen Orbits einer Abbildung  $\tilde{F}$ , die nur auf dem Fundamentalbereich wirkt. Das dynamische System  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{F})$  wird als *reduziertes System* bezeichnet. Orbits von  $\hat{F}$ , die sich nur durch eine Symmetrieroberation unterscheiden, werden stets auf ein und denselben Orbit von  $\tilde{F}$  abgebildet; sie werden also identifiziert.

Der Übergang zum reduzierten System, also die Herleitung einer Abbildungsvorschrift für  $\tilde{F}$ , erfolgt nun in zwei Teilschritten. Der erste Schritt besteht darin, auf die Angabe der Mulde, bei welcher sich das Teilchen gerade aufhält, zu verzichten. Es werden nur Startwerte mit  $\mu = 0$  zugelassen, und es wird nach jeder Iteration die Transformation (1.14d) angewandt. Das bedeutet, daß Orbits von  $\hat{F}$ , die sich nur durch die Operation  $c_2$  unterscheiden, identifiziert werden. Es erfolgt also eine Reduktion bezüglich der Untergruppe  $\mathcal{C}_2 = \{e, c_2\}$  von  $\mathcal{C}_{2v}$ . Damit beschränkt man sich auf den einfachen Zylinder

$$\begin{aligned}\Gamma &= S^1 \times [-1, 1] \times \{0\} \\ &\simeq S^1 \times [-1, 1]\end{aligned}\quad (1.17)$$

als Phasenraum, in welchem die zweidimensionale Abbildung

$$F : \quad \beta' = \beta - \pi - \Theta(l') \quad (1.18a)$$

$$l' = l + 2R_0 \sin \beta \quad (1.18b)$$

wirkt. Es gilt  $\det DF = 1$ , folglich ist  $F$  flächenerhaltend. Das dynamische System  $(\Gamma, F)$  wird im folgenden *teilweise reduziertes System* genannt. Es unterscheidet sich vom nichtreduzierten nur durch den fehlenden Austausch zwischen den beiden Phasenraumhälften. Die wesentlichen Aspekte der Dynamik sind in  $F$  enthalten. Daher wird in Kapitel 2 die Abbildung  $F$  anstelle von  $\hat{F}$  analysiert.

Im zweiten Schritt der Symmetriereduktion wird ausgenutzt, daß  $F$  wegen (1.3) invariant unter der Transformation

$$(\beta, l) \longrightarrow (-\beta, -l). \quad (1.19)$$

ist. Um zum reduzierten System überzugehen, wird jedesmal, wenn die  $l$ -Komponente eines Orbitpunktes von  $F$  negativ wird, (1.19) angewandt, wodurch man die Einschränkung auf  $\tilde{\Gamma}$  erhält, siehe (1.16). Das reduzierte System besitzt also die Abbildung

$$\begin{aligned} \beta' &= \beta - \pi - \Theta(l') & \} & \text{falls } l + 2R_0 \sin \beta \geq 0, \\ \tilde{F} : \quad l' &= l + 2R_0 \sin \beta & & (1.20a) \\ \beta' &= -\beta - \pi - \Theta(l') & \} & \text{sonst.} \\ l' &= -l - 2R_0 \sin \beta & & (1.20b) \\ & & & (1.20c) \\ & & & (1.20d) \end{aligned}$$

Das reduzierte System spielt in allen folgenden Kapiteln eine Rolle, vor allem aber bei den theoretischen Überlegungen in Kapitel 3 und den Anwendungen in Kapitel 4.

In den Abbildungen  $\hat{F}$ ,  $F$  und  $\tilde{F}$  ist die Ablenkfunktion  $\Theta(l)$  enthalten, für die noch kein spezieller Ausdruck angegeben wurde. Die Ablenkfunktion ist Thema des folgenden Abschnitts.

## 1.4 Die Ablenkfunktion

Man muß sich überlegen, welche attraktiven Zentralpotentiale eine „interessante“, d. h. hinreichend verwickelte Dynamik ermöglichen. Das System sollte so beschaffen sein, daß Trajektorien existieren, die häufig zwischen den Mulden hin- und herlaufen. Hierfür muß das Potential Ablenkungen ermöglichen, die (am besten deutlich) größer sind als  $\pi$ . In diesem Abschnitt werden zunächst die Eigenschaften klassischer Ablenkfunktionen anhand von Beispielen diskutiert. Damit soll plausibel gemacht werden, daß eine Klasse von Potentialen existiert, welche die obige Forderung erfüllen. Anschließend wird für diese Klasse eine geeignete Modellablenkfunktion angegeben, die im folgenden verwandt werden soll.

### 1.4.1 Eigenschaften klassischer Ablenkfunktionen

Zerlegt man die kinetische Energie eines Teilchens, welches sich in einem Zentralpotential bewegt, in den Radial- und den Azimutalanteil, so zeigt sich, daß die Radialbewegung des Teilchens für genau diejenigen Radien  $r$  klassisch erlaubt ist, für welche gilt:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \leq E \quad (1.21)$$

oder, gemäß den Skalierungen,

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2r^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1.22)$$

Die Funktion  $V_{\text{eff}}(r)$  bezeichnet man als *Effektivpotential*.

Ein Beispiel für ein attraktives Zentralpotential ist das *Woods-Saxon-Potential*:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-r_0}{a}}}. \quad (1.23)$$

Die Abbildungen 1.2 und 1.3 zeigen Effektivpotentiale für die Woods-Saxon-Wechselwirkung bei verschiedenen Drehimpulsen, und zwar für die „Topftiefen“  $V_0 = 3$  bzw.  $V_0 = 1$ . Aufgrund der Skalierung (1.4e) entspricht ein kleinerer Wert von  $V_0$  einer höheren Energie. Die Forderung  $V(r) = 0$  für  $r > 1$  ist in beiden Fällen in guter Näherung erfüllt.

In den Abbildungen ist zu erkennen, daß das Effektivpotential für gewisse Drehimpulswerte ein lokales Maximum besitzt. Es kann vorkommen, daß für einen bestimmten Drehimpuls das lokale Maximum von  $V_{\text{eff}}(r)$  gerade gleich der Energie ist. Ein Beispiel hierfür ist (in guter Näherung) durch die Kurve für  $l = 0.51$  in Abbildung 1.2 gegeben. In solchen Fällen kommt die Radialbewegung des Teilchens asymptotisch auf dem lokalen Maximum zum Erliegen, d. h. das Teilchen wird durch das Potential eingefangen und nähert sich asymptotisch einer Kreisbahn im Ortsraum an. Der Ablenkinkel hat in diesem Fall einen unendlichen Wert. Man spricht hierbei von *Orbiting*, die Ablenkfunktion  $\Theta(l)$  besitzt im *Orbiting-Drehimpuls* eine sog. *Orbiting-Singularität*. Der Radikand im Nenner des Integranden in (1.5) hat dann nämlich im lokalen Maximum von  $V_{\text{eff}}$  eine doppelte Nullstelle, was zur Divergenz des Integrals führt. Bei dem betrachteten Beispiel liegt der Orbiting-Drehimpuls also etwa bei  $l = 0.51$ . Man bezeichnet die Streuung an einem Potential, dessen Ablenkfunktion eine Orbiting-Singularität besitzt, als *Orbiting-Streuung*.

In einem gewissen Drehimpulsintervall oberhalb des Orbiting-Drehimpulses zerfällt der klassisch erlaubte  $r$ -Bereich in zwei disjunkte Intervalle. In dem Intervall mit kleineren  $r$ -Werten existiert eine gebundene Bewegung zwischen zwei inneren klassischen Umkehrpunkten; in dem Intervall mit größeren  $r$ -Werten, welches sich vom äußeren klassischen Umkehrpunkt bis ins Unendliche erstreckt, findet die Streubewegung statt.

Es ist allerdings auch möglich, daß für denjenigen Drehimpuls, bei dem  $V_{\text{eff}}(r)$  einen Sattelpunkt besitzt, der Sattelwert, die sog. *Orbiting-Schwelle*, niedriger ist als die Energie – wie Abbildung 1.3 zeigt. In diesem Fall ist kein Orbiting möglich. Die Ablenkfunktion besitzt dann keine Orbiting-Singularität. Sie hat jedoch im Bereich positiver Drehimpulse ein Minimum. Für positive Drehimpulse kann nämlich bei einem attraktiven Potential die Ablenkfunktion nicht positiv sein. Für  $l = 0$  und für sehr große  $l$  ist die Ablenkung jedoch null, folglich muß die Ablenkfunktion ein Minimum besitzen, sofern sie stetig ist (die Ablenkfunktion kann u. U. Unstetigkeitsstellen besitzen, siehe unten). Man bezeichnet den Wert

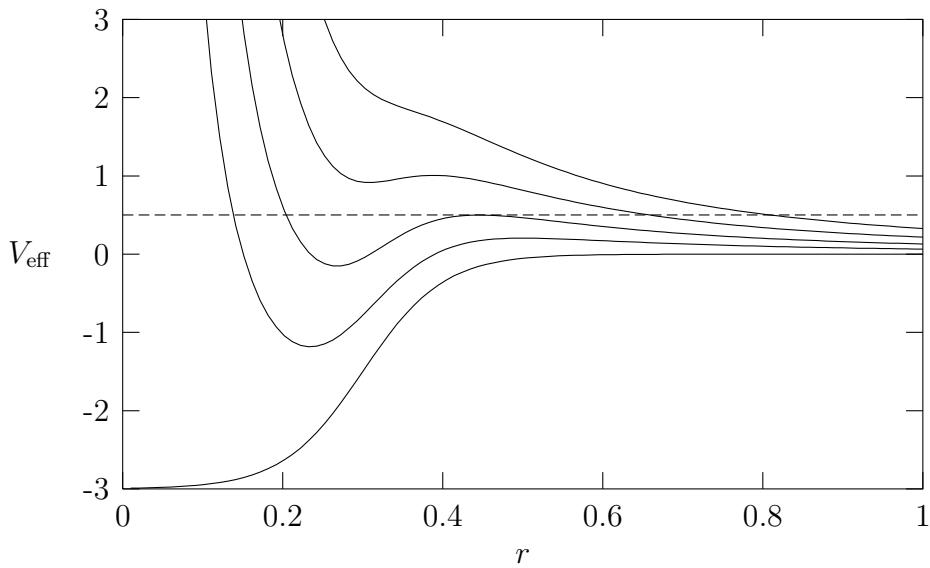


Abbildung 1.2: Effektivpotentiale der Woods-Saxon-Wechselwirkung für  $V_0 = 3$ ,  $r_0 = 0.3$ ,  $a = 0.05$  und für die Drehimpulse  $l = 0, 0.36, 0.51, 0.66, 0.81$  (von unten nach oben). Die unterste Kurve stellt somit das Woods-Saxon-Potential selbst dar. Die gestrichelte Linie gibt die Energie wieder ( $E=1/2$ ).

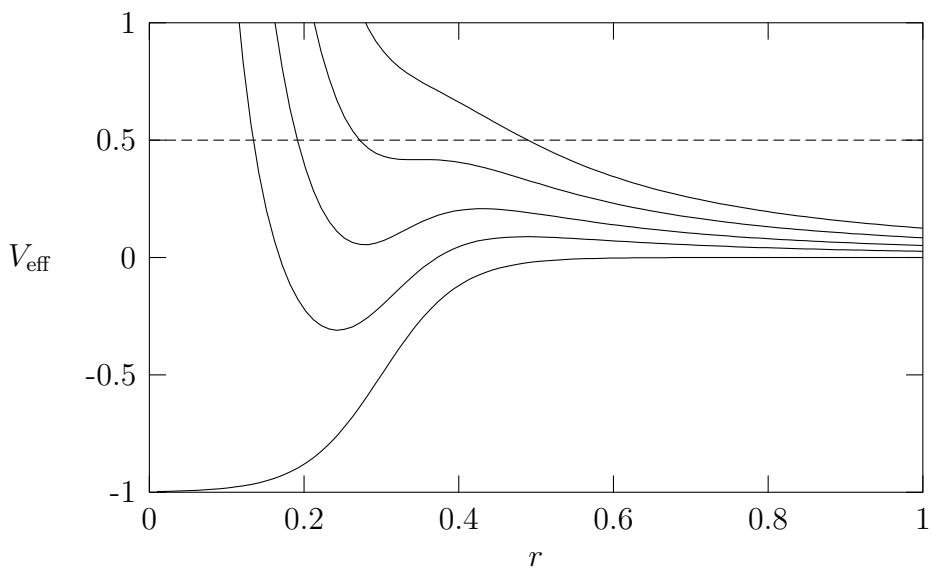


Abbildung 1.3: Wie Abbildung 1.2, jedoch  $V_0 = 1$  sowie  $l = 0, 0.23, 0.32, 0.41, 0.5$  (von unten nach oben).

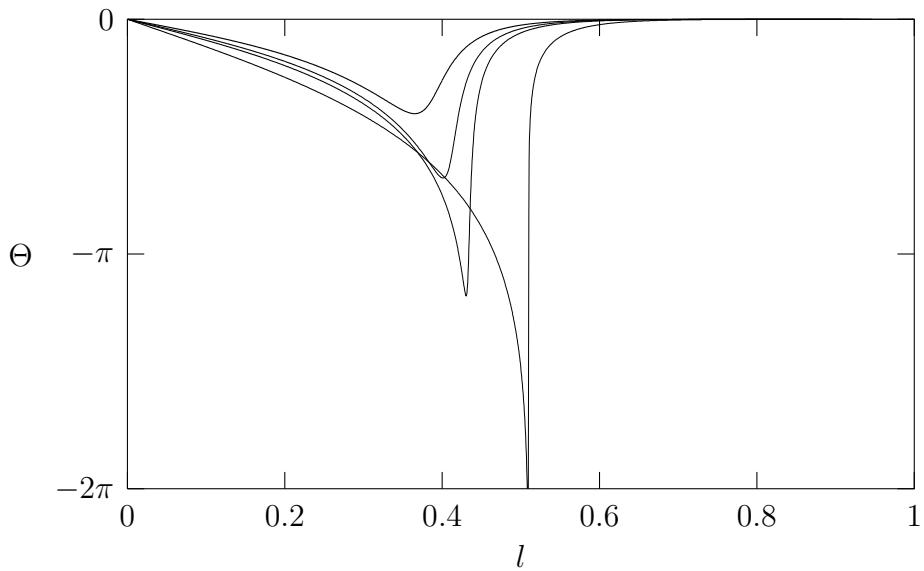


Abbildung 1.4: Ablenkfunktionen des Woods-Saxon-Potentials für  $V_0 = 0.5, 0.75, 1, 3$  (von oben nach unten). Die übrigen Parameterwerte sind dieselben wie in Abb.1.2. Für  $V_0 = 3$  erkennt man eine Orbiting-Singularität.

der Ablenkfunktion im Minimum als *Regenbogenwinkel*  $\Theta_R$ , den dazugehörigen Drehimpuls als *Regenbogendrehimpuls*  $l_R$ . Die Streuung an einem Potential, dessen Ablenkfunktion ein Minimum besitzt, nennt man *Regenbogenstreuung*. Die vorliegende Arbeit hat ausschließlich die Regenbogenstreuung zum Thema, die Orbiting-Streuung wird nicht behandelt.

Abbildung 1.4 zeigt Ablenkfunktionen des Woods-Saxon-Potentials für verschiedene Potentialtiefen. Durch Erhöhung der Potentialtiefe lassen sich offensichtlich beliebig hohe Beträge für den Regenbogenwinkel erzielen, bis dieser in eine Orbiting-Singularität übergeht. Der Regenbogendrehimpuls ändert sich hingegen bei Änderung der Potentialtiefe nur geringfügig. Bei geeigneter Wahl der Parameterwerte ermöglicht das Woods-Saxon-Potential also ausreichend starke Ablenkungen.

Das Woods-Saxon-Potential ist ein Beispiel für ein Muldenpotential mit „weicher Kante“; es besitzt einen inneren *konkaven* Bereich (d. h. einen Bereich mit  $V''(r) > 0$ ) und einen äußeren *konvexen* Bereich (d. h. mit  $V''(r) < 0$ ), und am Rand, also bei  $r = 1$ , ist die Steigung des Potentials sehr gering. Andere Potentiale mit weicher Kante besitzen ähnliche Ablenkfunktionen. Die geringe Steigung am Rand sowie der anschließende steile Abfall des Potentials ermöglichen nämlich, daß das Effektivpotential bei gewissen Drehimpulswerten ein lokales Maximum besitzt. Somit existiert eine Orbiting-Schwelle. Diese kann unterhalb der Energie liegen (kein Orbiting). Bei Erhöhung der Potentialtiefe erhöht sich jedoch stets

auch die Orbiting-Schwelle: Der Drehimpuls, bei welchem das Effektivpotential einen Sattelpunkt besitzt, erhöht sich dann nämlich ebenfalls und damit der Zentrifugalanteil  $l^2/2r^2$  von  $V_{\text{eff}}(r)$  und der Sattelwert. Die Orbiting-Schwelle kann stets auf einen Wert angehoben werden, der höher liegt als die Energie, so daß Orbiting ermöglicht wird: Da nämlich der Zentrifugalterm  $l^2/2r^2$  am Rande des Potentials der dominierende Anteil von  $V_{\text{eff}}(r)$  ist und das Potential im Randbereich nur eine geringe Steigung besitzt, existiert, egal wie tief das Potential ist, für  $l \rightarrow 1$  zumindest im Randbereich ein Intervall, auf dem  $V_{\text{eff}}(r)$  Werte größer als  $E = 1/2$  annimmt. Ist der Abfall des Potentials im Inneren steil genug, so besitzt  $V_{\text{eff}}(r)$  für  $l \approx 1$  ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt mit einem Wert, der größer als  $1/2$  ist.

In den Abbildungen 1.2 und 1.3 kann man das besprochene Phänomen auch beobachten: Für  $V_0 = 1$  besitzt  $V_{\text{eff}}(r)$  bei  $l \approx 0.41$  einen Sattelpunkt, für  $V_0 = 3$  hingegen bei einem  $l$  zwischen 0.66 und 0.81. Der Sattelwert von  $V_{\text{eff}}(r)$  ist im letzteren Falle wesentlich höher als im ersten; insbesondere liegt er für  $V_0 = 1$  unterhalb, für  $V_0 = 3$  hingegen oberhalb der Energie. Man kann also durch Erhöhung der Potentialtiefe beliebig hohe Beträge für den Regenbogenwinkel erlangen, bis hin zu einer Orbiting-Singularität. Die erwünschte Existenz ausreichend hoher Ablenkinkel ist bei beliebigen Potentialen mit weicher Kante bei geeigneter Potentialtiefe gegeben.

Es gibt jedoch auch andere Arten von Muldenpotentialen, etwa solche, die nur einen konkaven Bereich (und somit eine „harte Kante“) besitzen. Das Auftreten einer Orbiting-Singularität in  $]0, 1[$  ist dann nicht zu erwarten, denn mit dem Potential ist auch das Effektivpotential in  $]0, 1[$  konkav und hat somit kein lokales Maximum. Dies ist beispielsweise bei folgendem *Parabelpotential* der Fall:

$$V(r) = \begin{cases} V_0(r^2 - 1) & , \quad 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.24)$$

In Abbildung 1.5 sind Ablenkfunktionen für dieses Potential dargestellt. Für  $V_0 < 0.5$  besitzt die Ablenkfunktion in  $]0, 1[$  ein Minimum. Der Regenbogenwinkel ist dann jedoch nicht kleiner als  $-\pi/2$ , die Ablenkung ist also zu schwach. Für höhere Potentialtiefen sind stärkere Ablenkungen möglich. Abbildung 1.5 erweckt allerdings den Anschein, daß die Ablenkfunktion für  $V_0 \geq 0.5$  in  $]0, 1[$  kein Minimum mehr besitzt, sondern monoton fallend ist. Tatsächlich zeigt eine genauere Analyse, daß  $\lim_{l \uparrow 1} \Theta(l) = -\pi/2$  für  $V_0 = 0.5$  gilt. Im Falle  $V_0 > 0.5$  ergibt eine Abschätzung eine obere Schranke von  $-\pi/\sqrt{2V_0}$  für  $\lim_{l \uparrow 1} \Theta(l)$ . Der Grenzwert ist für  $V_0 \gg 0.5$  jedoch deutlich negativer als die Schranke, aber dennoch endlich.

Für  $l \geq 1$  ist die Ablenkung jedoch null, somit ist die Ablenkfunktion für  $V_0 \geq 0.5$  unstetig in 1. Diese Unstetigkeit tritt bei Muldenpotentialen allgemein immer dann auf, wenn die Steigung des Potentials am Rand größer als 1 ist. Dann ist nämlich für alle  $0 \leq l \leq 1$  die Steigung des Effektivpotentials am Rand größer

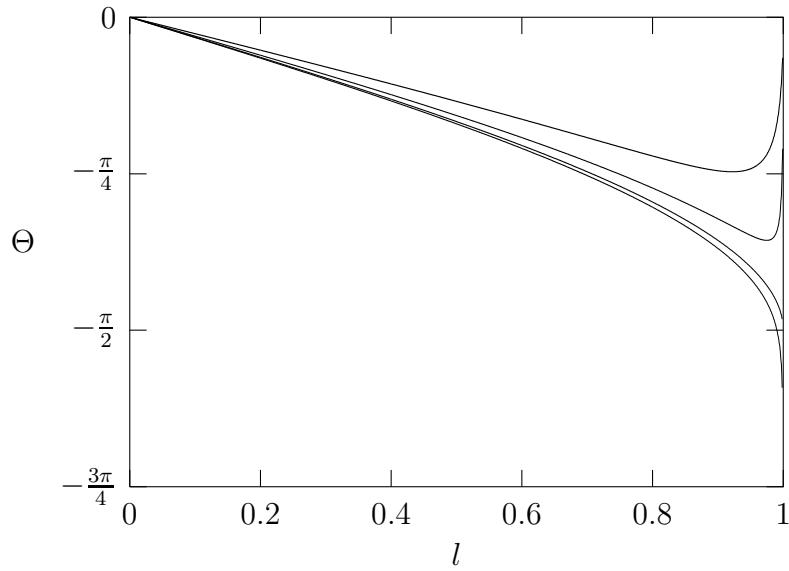


Abbildung 1.5: Ablenkfunktionen des Parabelpotentials (1.24) für die Potentialtiefen  $V_0 = 0.35, 0.45, 0.5, 0.52$  (von oben nach unten).

als 0, so daß sich der klassische Umkehrpunkt, und damit die Ablenkfunktion, unstetig ändert, wenn  $l$  den Wert 1 unterschreitet.

Aufgrund dieser etwas pathologischen Eigenschaft werden hier Potentiale mit harter Kante von der Betrachtung ausgeschlossen. Für die Regenbogenstreuung an Muldenpotentialen mit weicher Kante wird nun eine Modellablenkfunktion angegeben.

### 1.4.2 Die Modellablenkfunktion

Muldenpotentiale haben in der Regel Ablenkfunktionen mit einem sehr schmalen Minimum. Langlebige Streuorbits des Zweimuldensystems besitzen in solchen Fällen  $l$ -Werte, die nahe beim Regenbogendrehimpuls  $l_R$  liegen, da die Ablenkung sonst zu klein wäre. Beispielsweise nimmt die in Abbildung 1.4 gezeigte Ablenkfunktion des Woods-Saxon-Potentials für  $V_0 = 1$  nur auf einem sehr kleinen  $l$ -Intervall Werte kleiner als  $-\pi$  an.

Damit verschiedene langlebige Orbits deutlicher voneinander unterschieden werden können, wird eine Modellablenkfunktion eingeführt, die ein relativ breites quadratisches Minimum besitzt. Sie lautet folgendermaßen [Ste95]:

$$\Theta(l) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{2}k(l^3 - l)\pi & , \quad |l| \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst,} \end{cases} \quad (1.25)$$

mit  $k > 0$ . Diese Ablenkfunktion erfüllt die Zeitumkehrsymmetrie (1.3). Der Regenbogendrehimpuls ist konstant:  $l_R = 1/\sqrt{3}$ . Der Regenbogenwinkel hängt jedoch von  $k$  ab:  $\Theta_R = -k\pi$ . Sein Betrag lässt sich somit durch Erhöhung von  $k$  beliebig anheben.

Aus der obigen Diskussion über klassische Ablenkfunktionen folgt, daß die Erhöhung von  $k$  bis zum Wert  $\infty$  der Erniedrigung der Energie bis hin zur Orbiting-Schwelle entspricht. Die Eigenschaften der Modellablenkfunktion stimmen im wesentlichen mit denen der Ablenkfunktion des Woods-Saxon-Potentials überein und somit mit den Eigenschaften der Ablenkfunktionen aller Potentiale mit weicher Kante:  $\Theta_R$  ist stark  $k$ - bzw. energieabhängig,  $l_R$  hängt hingegen nicht von  $k$  bzw. nur wenig von der Energie ab.

Die Funktion (1.25) ist also ein geeignetes Modell für die betrachtete Systemklasse.

Zur Diskussion der Abbildungen  $\hat{F}$  und  $F$  wird ein zur Ablenkfunktion (1.25) gehöriges Potential nicht benötigt. Es wird jedoch gebraucht, um aus einem von  $\hat{F}$  erzeugten Orbit eine Bahnkurve im Ortsraum zu rekonstruieren. Das *inverse Streuproblem*, also die Bestimmung eines zu (1.25) gehörigen Potentials, ist in [Ste95] gelöst worden. Ein solches Potential ist für  $r > 1$  identisch null und besitzt für  $r \leq 1$  die Parameterdarstellung

$$(r(\gamma), V(\gamma)) = \left( \gamma e^{-\sqrt{3}k(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{2} \left( 1 - e^{2\sqrt{3}k(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right) \quad (1.26)$$

mit  $\gamma \in [0, 1]$ . Die Bahnkurve  $(r(\gamma), \varphi(\gamma))$  innerhalb einer Mulde wird durch  $r(\gamma)$  wie in (1.26) und

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma) = & \pm \left( \arccos \frac{l}{\gamma} + k \frac{3\sqrt{3}}{2} l \sqrt{(1-\gamma^2)(\gamma^2-l^2)} \right. \\ & \left. + k \frac{3\sqrt{3}}{4} (l^3 - l) \left( \arcsin \left( \frac{1+l^2-2\gamma^2}{1-l^2} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (1.27) \end{aligned}$$

mit  $\gamma \in [|l|, 1]$  parametrisiert. Da die Bewegung außerhalb der Mulden frei ist, ist so die Bahn im Ortsraum, die zu einer Trajektorie von  $\hat{F}$  gehört, eindeutig bestimmt.

Den Verlauf des Modellpotentials zeigen die Abbildungen 1.6 und 1.7 für verschiedene Werte von  $k$ . Im folgenden wird das System mit dem Parameterwert  $k = 1.9$  betrachtet, da in diesem Fall, wie noch zu erörtern sein wird, „hartes“ Chaos vorliegt. Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit den Definitionen und Bedeutungen der Begriffe *Chaos* und *Hyperbolizität*.

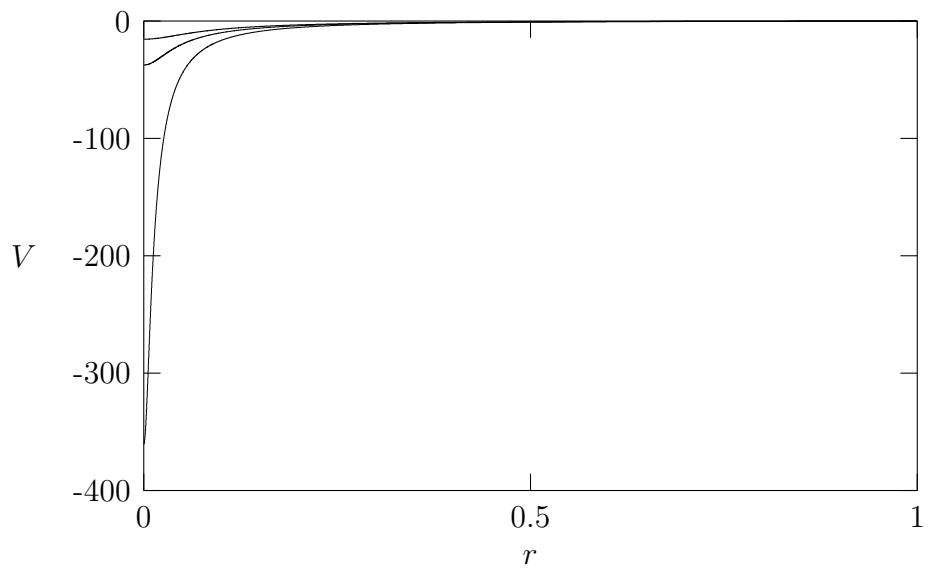


Abbildung 1.6: Potentiale der Modellablenkfunktion (1.25) für die Parameterwerte  $k = 1.0, 1.25, 1.9$  (von oben nach unten).

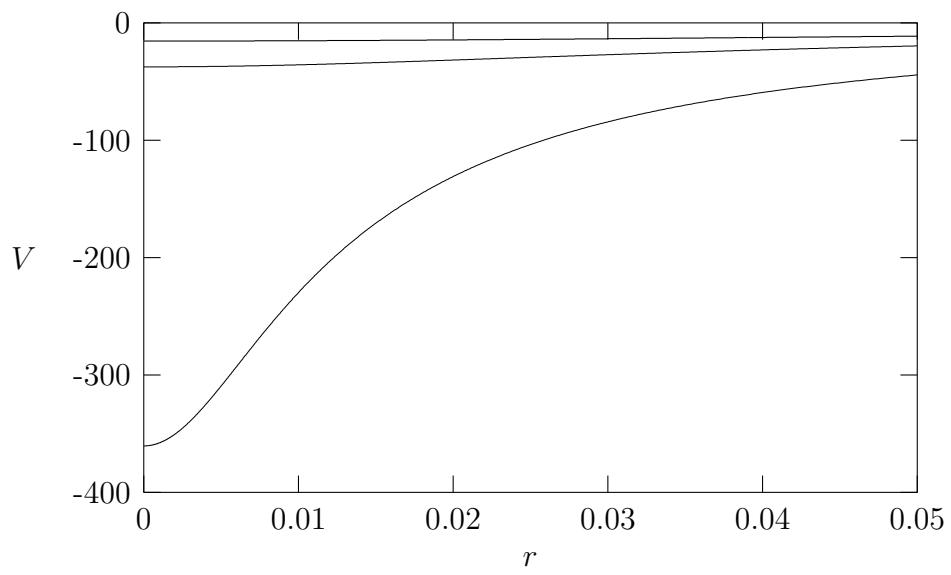


Abbildung 1.7: Verlauf der in Abbildung 1.6 gezeigten Potentialkurven in der Nähe des Kraftzentrums.

# Kapitel 2

## Chaos, Hyperbolizität und Symbolische Dynamik

In diesem Kapitel ist der Begriff der *invarianten Menge* von zentraler Bedeutung. Das ist beim in Kapitel 1 eingeführten teilweise reduzierten Zweimuldensystem die größtmögliche Teilmenge  $\Lambda$  des Phasenraumes  $\Gamma$ , für die  $F(\Lambda) \subset \Lambda$  sowie  $F^{-1}(\Lambda) \subset \Lambda$  gilt. Punkte, die in  $\Lambda$  liegen, verbleiben unter beliebig vielen Iterationen von  $F$  und  $F^{-1}$  in  $\Lambda$  und somit in  $\Gamma$ .

Ebenso wichtig ist der Begriff der *Chaos*. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, *Chaos* zu definieren. In dieser Arbeit wird die Definition nach DEVANEY verwandt [Dev89]. Es wird sich herausstellen, daß die Abbildung  $F$  eine invariante Menge besitzt, auf welcher die Abbildung durch eine *Symbolische Dynamik* beschrieben werden kann. Mit Hilfe der Symbolischen Dynamik zeigt man leicht, daß sich das System chaotisch im Sinne von DEVANEY verhält. Zentrale Voraussetzung für die Existenz der Symbolischen Dynamik, aber auch für die Anwendbarkeit der *Theorie der periodischen Orbits* (siehe Kapitel 3), ist die *Hyperbolizität* der invarianten Menge.

Zunächst wird in Abschnitt 2.1 Chaos definiert. In Abschnitt 2.2 werden kontrahierende, expandierende und faltende Abbildungseigenschaften von  $F$  behandelt. Die kontrahierenden und expandierenden Eigenschaften bilden die Grundlage der Hyperbolizität des Systems, welche in Abschnitt 2.3 behandelt wird. Mit dem Wissen um die Abbildungseigenschaften ausgestattet läßt sich die invariante Menge von  $F$  konstruieren und eine Symbolische Dynamik einführen, was in Abschnitt 2.4 bzw. 2.5 beschrieben wird. Abschließend werden in Abschnitt 2.6 für Kapitel 3 bedeutsame Zusammenhänge zwischen der Symbolischen Dynamik und der Topologie periodischer Orbits diskutiert.

## 2.1 Definition von Chaos

Für die Chaosdefinition nach DEVANEY benötigt man die Definitionen von topologischer Transitivität und von sensibler Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Sei  $V \subset \mathbb{R}^d$ . Eine Abbildung  $f : V \rightarrow V$  heißt *topologisch transitiv*, wenn für jedes Paar offener Mengen  $U, W \in V$  ein  $m > 0$  existiert, so daß  $f^m(U) \cap W \neq \emptyset$  ist. Die Existenz eines in  $V$  dicht liegenden Orbits impliziert somit die topologische Transitivität.

Die Abbildung  $f : V \rightarrow V$  heißt *sensibel abhängig von den Anfangsbedingungen*, wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, so daß für alle  $p \in V$  und jede Umgebung  $U$  von  $p$  ein  $q \in U$  sowie ein  $m > 0$  existiert mit  $|f^m(p) - f^m(q)| > \delta$ . Man beachte, daß die Bedingung  $|f^m(p) - f^m(q)| > \delta$  nicht für jedes  $q \in U$  gelten muß.

Die Definition von Chaos lautet nun folgendermaßen [Dev89]:

**Definition 1 (Chaos)** *Sei  $V \subset \mathbb{R}^d$ . Eine Abbildung  $f : V \rightarrow V$  heißt *chaotisch* auf  $V$ , wenn gilt:*

1.  *$f$  ist sensibel abhängig von den Anfangsbedingungen.*
2.  *$f$  ist topologisch transitiv.*
3. *Die periodischen Punkte von  $f$  liegen dicht in  $V$ .*

In einer experimentellen oder numerischen Situation ist das Verhalten eines chaotischen Systems aufgrund von Punkt 1 also nicht über längere Zeit vorhersagbar, da die Anfangsbedingungen nur mit endlicher Genauigkeit bekannt sind. Der zweite Punkt besagt, daß jeder Teil eines chaotischen Systems mit dem Rest dynamisch in Verbindung steht und deswegen von ihm nicht abgekoppelt werden kann. Die dritte Forderung beinhaltet, daß überall inmitten dieser irregulären Strukturen ein „Skelett“ der Regularität existiert, gegeben durch die periodischen Orbits.

Für das in dieser Arbeit betrachtete System, also für  $d = 2$ , folgt aus der obigen Definition, daß das System nur dann chaotisch sein kann, wenn es keine elliptischen periodischen Punkte besitzt. Solche bringen nämlich immer *KAM-Tori* mit sich, welche undurchdringbare Barrieren im Phasenraum darstellen (kein Orbit kann von außen in das Innere eines KAM-Torus vordringen und umgekehrt). Die topologische Transitivität ist dann nicht mehr gegeben. Also muß jeder periodische Punkt der Abbildung  $F$  mit der Periode  $m$  notwendig ein *hyperbolischer Fixpunkt* von  $F^m$  sein. Der Begriff des hyperbolischen Fixpunktes läßt sich

verallgemeinern zum Begriff der *hyperbolischen invarianten Menge*, welcher im Abschnitt 2.3 erläutert wird.

Im Regelfall existieren im Phasenraum eines dynamischen Systems sowohl reguläre, KAM-Torus-dominierte Bereiche als auch chaotische Bereiche, d.h. ein Teil der invarianten Menge erfüllt die Bedingungen von Definition 1. In diesem Falle spricht man von *weichem Chaos*. Gelten die Bedingungen jedoch für die gesamte invariante Menge, so liegt *hartes Chaos* vor.

Als nächstes wird die Wirkungsweise von  $F$  auf bestimmte Teilmengen des Phasenraumes  $\Gamma$  erläutert.

## 2.2 Abbildungseigenschaften von $F$

Die Mengen derjenigen Punkte des Phasenraumes  $\Gamma$ , die unter mindestens  $n$  Iterationen von  $F$  bzw.  $F^{-1}$  noch in  $\Gamma$  verbleiben, sind gegeben durch

$$\Lambda_-^n = \bigcap_{j=0}^n F^{-j}(\Gamma), \quad (2.1)$$

$$\Lambda_+^n = \bigcap_{j=0}^n F^j(\Gamma). \quad (2.2)$$

Man beachte, daß

$$F^n(\Lambda_-^n) = \Lambda_+^n \quad (2.3)$$

gilt. Mit  $\Lambda_\pm^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_\pm^n$  läßt sich die *invariante Menge*  $\Lambda$ , also die Menge der Punkte, die für alle Zeiten in  $\Gamma$  verbleiben, definieren:

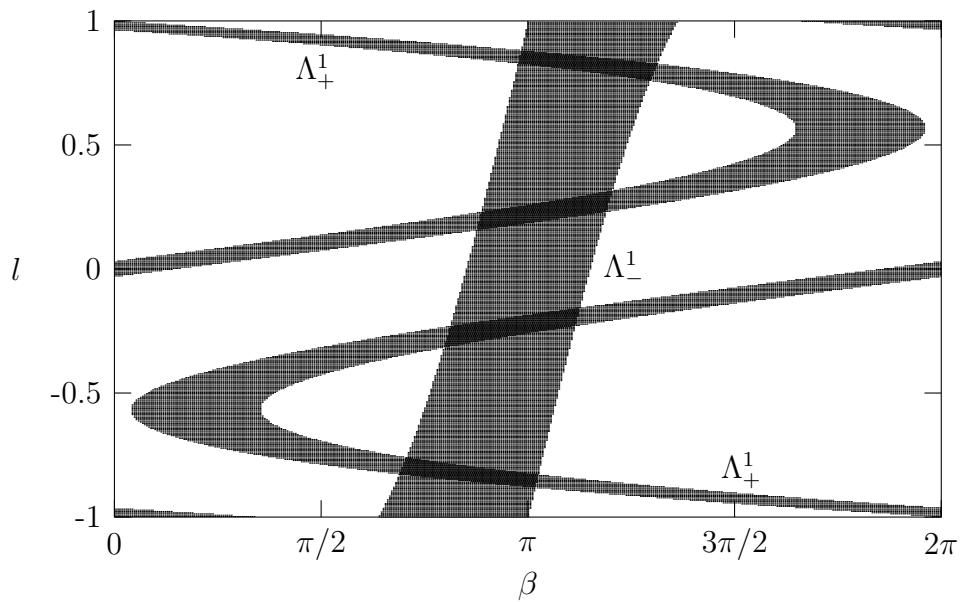
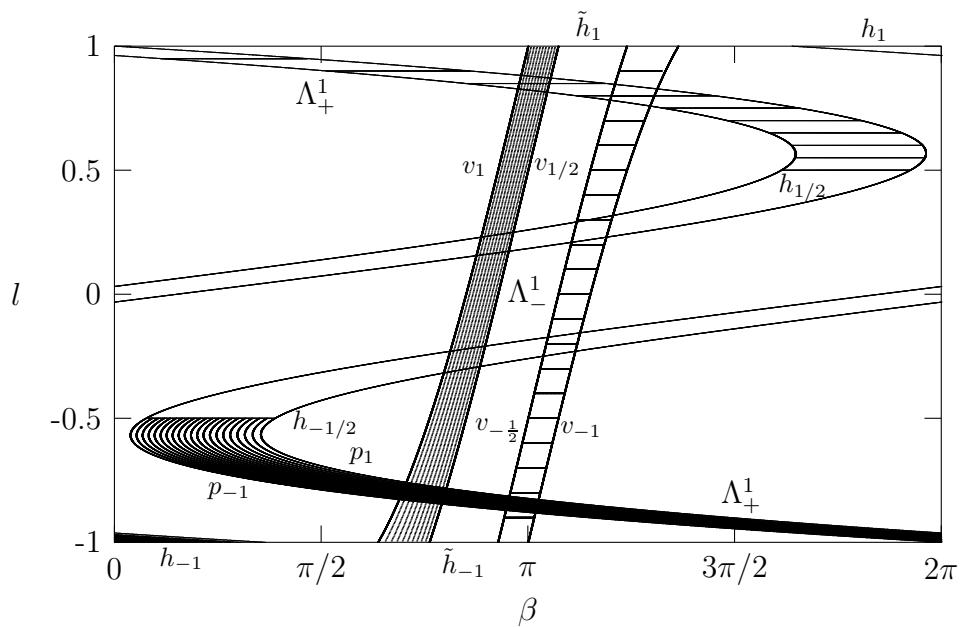
$$\Lambda = \Lambda_+^\infty \cap \Lambda_-^\infty. \quad (2.4)$$

Die Menge  $\Lambda_-^\infty$  wird als *stabile Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$*  bezeichnet. Sie ist die Menge aller Punkte, die unter beliebig vielen Iterationen von  $F$  nicht aus  $\Gamma$  entweichen.  $\Lambda_+^\infty$  ist die *instabile Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$* . Sie besteht aus allen Punkten, die unter beliebig vielen Iterationen von  $F^{-1}$  in  $\Gamma$  bleiben. In Abschnitt 2.4 wird deutlich, daß  $\Lambda_-^\infty$  und  $\Lambda_+^\infty$  sehr kleine Teilmengen von  $\Gamma$  sind, was auch plausibel erscheint.

Abbildung 2.1 zeigt die Mengen  $\Lambda_-^1$  (vertikaler Streifen) und  $\Lambda_+^1$  (parabelförmige, horizontal gefaltete Streifen) für das betrachtete Zweimuldensystem mit  $k = 1.9$ . Da  $\Gamma$  ein Zylinder ist, besteht  $\Lambda_+^1$  nicht etwa aus zwei disjunkten Teilen, sondern ist zusammenhängend. Es gilt  $F(\Lambda_-^1) = \Lambda_+^1$  als Spezialfall von (2.3).

Im folgenden wird die Wirkung von  $F$  auf bestimmte Teilmengen von  $\Lambda_-^1$  beschrieben. Hierfür seien vertikale Kurven  $v_c$  durch

$$l + 2R_0 \sin \beta = c, \quad c \in [-1, 1] \quad (2.5)$$

Abbildung 2.1: Die Mengen  $\Lambda_-^1$  und  $\Lambda_+^1$ .Abbildung 2.2: Wirkungsweise der Abbildung  $F$ ; siehe Text.

definiert. Diese sind in  $\Lambda_-^1$  enthalten und werden aufgrund von (1.18b) auf horizontale Linien  $h_c$  abgebildet, die durch den Schnitt von  $l = c$  mit  $\Lambda_+^1$  gegeben sind. Für jeden Punkt aus  $\Lambda_-^1$  gilt:  $\beta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ . Daher lassen sich die  $v_c$  auch durch

$$\beta_c(l) = \pi - \arcsin\left(\frac{c - l}{2R_0}\right) \quad (2.6)$$

parametrisieren. In Abbildung 2.2 sind einige  $v_c$  mit  $c$  zwischen  $1/2$  und  $1$  (linker Teil von  $\Lambda_-^1$ ) sowie  $v_{-1/2}$  und  $v_{-1}$  dargestellt, die unter  $F$  auf zugehörige horizontale Linien  $h_c$  im oberen Teil von  $\Lambda_+^1$  sowie  $h_{-1/2}$  und  $h_{-1}$  abgebildet werden. Durch die Kurvenscharen  $v_c$  und  $h_c$ ,  $c \in [-1, 1]$ , werden die Mengen  $\Lambda_-^1$  bzw.  $\Lambda_+^1$  komplett auf „blätterteigartige“ Weise ausgefüllt.

Wie sehen die Bilder von horizontalen Linien in  $\Lambda_-^1$  aus? Aus (1.18b) folgt für eine horizontale Kurve  $\tilde{h}_c$  in  $\Lambda_-^1$  mit  $l = c$ :

$$\beta = \pi - \arcsin\left(\frac{l' - c}{2R_0}\right). \quad (2.7)$$

Setzt man dies in (1.18a) ein, so erhält man folgende Parametrisierung der Bildkurve  $p_c$  in  $\Lambda_+^1$ :

$$\beta'_c(l') = -\arcsin\left(\frac{l' - c}{2R_0}\right) - \Theta(l'). \quad (2.8)$$

Die Bildkurven der Teilstücke von einigen  $\tilde{h}_c$ , die in Abbildung 2.2 im rechten Teil von  $\Lambda_-^1$  zu erkennen sind, sind die parabelförmigen Kurvenstücke, die im unteren Teil von  $\Lambda_+^1$  dargestellt sind.

Zusammenfassend kann man folgendes sagen: Die vertikalen Ränder  $v_1$  und  $v_{-1}$  von  $\Lambda_-^1$  werden auf die horizontalen Ränder  $h_1$  bzw.  $h_{-1}$  von  $\Lambda_+^1$  abgebildet, und die horizontalen Ränder  $\tilde{h}_1$  und  $\tilde{h}_{-1}$  von  $\Lambda_-^1$  auf die parabelförmigen Ränder  $p_1$  bzw.  $p_{-1}$  von  $\Lambda_+^1$ . Die Abbildung  $F$  bewirkt eine starke Kontraktion der Menge  $\Lambda_-^1$  in vertikaler Richtung und eine starke Expansion in horizontaler Richtung, anschließend eine Drehung nach rechts um etwa  $-\pi/2$  und eine zweifache horizontale Faltung.

Kontraktions- und Expansionseigenschaften kann man im Begriff der *Hyperbolizität* wiederfinden.

## 2.3 Hyperbolizität der invarianten Menge

Die Definition einer hyperbolischen invarianten Menge lautet folgendermaßen [Wig88, Dev89]:

**Definition 2 (Hyperbolizität)** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus,  $r \geq 1$ ;  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  sei eine abgeschlossene Menge, die invariant unter  $f$  ist.  $\Lambda$  heißt hyperbolische Menge, wenn für alle  $p \in \Lambda$  eine Aufspaltung  $\mathbb{R}^2 = E_p^s \oplus E_p^u$  existiert, so daß gilt:

1.

$$\begin{aligned} Df(p) \cdot E_p^s &= E_{f(p)}^s \\ Df(p) \cdot E_p^u &= E_{f(p)}^u. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2. Es gibt positive reelle Zahlen  $C$  und  $\gamma$  mit  $0 < \gamma < 1$ , so daß

$$\begin{aligned} \text{für } \xi_p \in E_p^s \text{ gilt: } |Df^n(p)\xi_p| &\leq C\gamma^n |\xi_p| \\ \text{für } \eta_p \in E_p^u \text{ gilt: } |Df^{-n}(p)\eta_p| &\leq C\gamma^n |\eta_p|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

3.  $E_p^s$  und  $E_p^u$  ändern sich stetig mit  $p$ .

Man erkennt an dieser Definition, daß in der Nähe eines beliebigen Punktes  $p$  der hyperbolischen invarianten Menge  $\Lambda$  die Abbildung  $f$  in Richtung von  $E_p^s$  kontrahierend und in Richtung von  $E_p^u$  expandierend wirkt, wie dies auch bei hyperbolischen Fixpunkten der Fall ist. Dementsprechend existieren für jedes  $p \in \Lambda$  stabile und instabile Mannigfaltigkeiten, die dieselben Dimensionen wie  $E_p^s$  bzw.  $E_p^u$  besitzen und diese in  $p$  tangieren [Hir+77, Wig88].

Für das vorliegende System hat STEGEMERTEN bewiesen, daß die invariante Menge genau dann nicht leer ist, wenn der Wert des Parameters  $k$  größer oder gleich 1 ist [Ste95], ferner, daß die invariante Menge für  $k = 1.9$  hyperbolisch ist [Ste95, SteEck97]. Die Beweise sind jedoch recht kompliziert und werden hier nicht aufgeführt.

## 2.4 Konstruktion der invarianten Menge

In diesem und dem folgenden Abschnitt wird eine Standardtechnik zur Bestimmung der invarianten Menge und zur Entwicklung einer Symbolischen Dynamik vorgestellt. Die Ausführungen sind im wesentlichen [Wig88] entnommen, wo diese Technik anhand des Beispiels der Hufeisenabbildung eingeführt wird.

Aufgrund der Lage der Menge  $\Lambda_-^1$  in  $\Gamma$  genügt es, die Suche nach der invarianten Menge auf den eingeschränkten Phasenraum

$$\bar{\Gamma} = [\pi/2, 3\pi/2] \times [-1, 1] \quad (2.11)$$

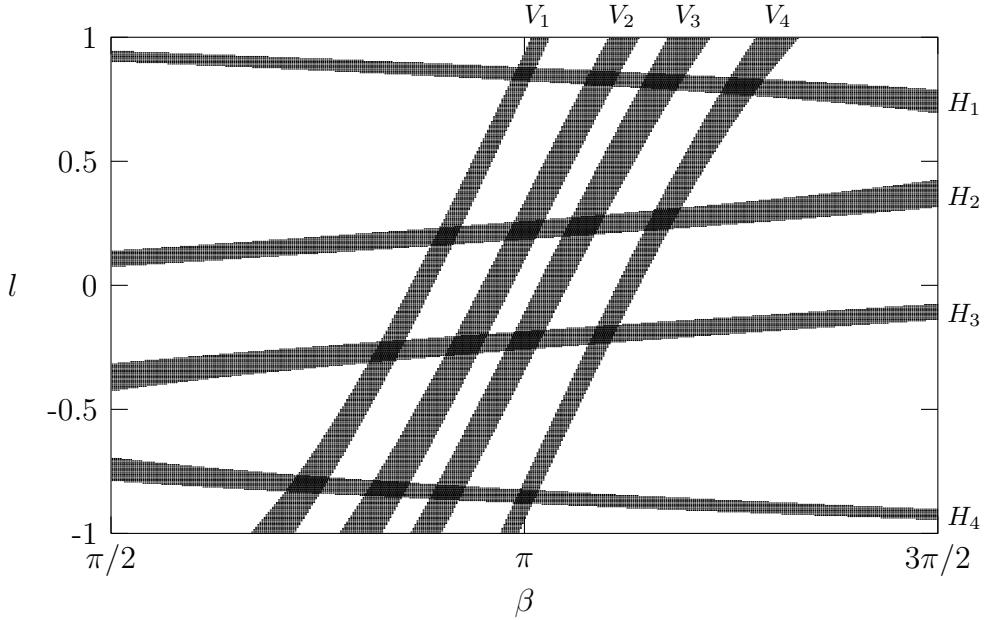


Abbildung 2.3: Die Mengen  $\overline{\Lambda_-^1}$  (vertikale Streifen) und  $\overline{\Lambda_+^1}$  (horizontale Streifen).

zu beschränken. Bezuglich  $\overline{\Gamma}$  kann man die Mengen  $\overline{\Lambda_-^n}$  und  $\overline{\Lambda_+^n}$  analog zu (2.1) und (2.2) definieren:

$$\overline{\Lambda_-^n} = \bigcap_{j=0}^n F^{-j}(\overline{\Gamma}) \quad (2.12)$$

$$\overline{\Lambda_+^n} = \bigcap_{j=0}^n F^j(\overline{\Gamma}). \quad (2.13)$$

Mit  $\overline{\Lambda_-^\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Lambda_-^n}$  und  $\overline{\Lambda_+^\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Lambda_+^n}$  lässt sich die invariante Menge  $\Lambda$  wie folgt konstruieren:

$$\overline{\Lambda^\infty} = \overline{\Lambda_-^\infty} \cap \overline{\Lambda_+^\infty}, \quad (2.14a)$$

somit

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Lambda^n} = \overline{\Lambda_-^\infty} \cap \overline{\Lambda_+^\infty}. \quad (2.14b)$$

Man kann sich klarmachen, daß  $\overline{\Lambda_-^\infty}$  ebenfalls die stabile Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$  ist:  $\overline{\Lambda_-^\infty} = \Lambda_-^\infty$ . Außerdem ist  $\overline{\Lambda_+^\infty}$  der Schnitt von  $\overline{\Gamma}$  mit der instabilen Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$ :  $\overline{\Lambda_+^\infty} = \overline{\Gamma} \cap \Lambda_+^\infty$ .

Die Mengen  $\overline{\Lambda_-^1}$  und  $\overline{\Lambda_+^1}$  sind in Abbildung 2.3 dargestellt.  $\overline{\Lambda_+^1}$  ist durch den Schnitt von  $\Lambda_+^1$  mit  $\overline{\Gamma}$  gegeben und besteht daher aus vier disjunkten horizontalen Streifen, die mit  $H_1, \dots, H_4$  bezeichnet seien. Bei  $\overline{\Lambda_-^1}$  handelt es sich um  $\Lambda_-^1$ , vermindert um die Menge derjenigen Punkte, die unter  $F$  auf Punkte mit  $\beta < \pi/2$

oder  $\beta > 3\pi/2$  abgebildet werden. Aufgrund der im vorigen Abschnitt besprochenen Abbildungseigenschaften bleiben dabei vier disjunkte vertikale Streifen übrig, bezeichnet mit  $V_1, \dots, V_4$ , wobei  $F(V_i) = H_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  gilt.

Wegen (2.14) ist die invariante Menge  $\Lambda$  in der aus 16 disjunkten Teilmengen bestehenden Menge  $\overline{\Lambda_-^1} \cap \overline{\Lambda_+^1}$  enthalten. Für eine feinere Approximation von  $\Lambda$  werden nun die Mengen  $\overline{\Lambda_-^2}$  und  $\overline{\Lambda_+^2}$  betrachtet, welche in Abbildung 2.4 gezeigt werden. Jeder der vier horizontalen Streifen von  $\overline{\Lambda_+^1}$  ist in  $\overline{\Lambda_+^2}$  in vier disjunkte Streifen zerfallen. Gleiches gilt für die vertikalen Streifen. Aufgrund der beschränkten Auflösung ist dies für die vertikalen Streifen in Abbildung 2.4 nicht deutlich erkennbar; daher zeigt Abbildung 2.5 eine Ausschnittsvergrößerung.

Wie kommen die „Unterstreifen“ in den Streifen zustande? Nach zwei Iterationen verbleiben nur diejenigen Anfangsbedingungen aus  $\overline{\Lambda_-^1}$  noch im Phasenraum, die nach der ersten Iteration wieder in einem der vertikalen Streifen von  $\overline{\Lambda_-^1}$  landen. Die Benennung der vertikalen Streifen  $V_{j_1 j_2}$  geschieht folgendermaßen: Der erste Index gibt an, in welchem vertikalen Streifen  $V_{j_1}$  von  $\overline{\Lambda_-^1}$  sich  $V_{j_1 j_2}$  befindet, der zweite Index ist die Nummer des vertikalen Streifens  $V_{j_2}$ , in dem  $F(V_{j_1 j_2})$  liegt. Anhand der Ausführungen in Abschnitt 2.2 kann man sich klarmachen, auf welche Weise eine horizontale Bewegung innerhalb von  $\Lambda_-^1$ , vom linken bis zum rechten Rand, auf ein Durchlaufen der Menge  $\Lambda_+^1$  vom oberen horizontalen Rand durch beide Falten hindurch bis zum unteren horizontalen Rand abgebildet wird (siehe linken Teil von  $\Lambda_-^1$  und oberen Teil von  $\Lambda_+^1$  in Abbildung 2.2). Aus der Reihenfolge, mit welcher bei der Bewegung in  $\Lambda_+^1$  die vertikalen Streifen von  $\overline{\Lambda_-^1}$  durchlaufen werden, erklärt sich jeweils der zweite Index  $j_2$  der in Abbildung 2.4 gezeigten vertikalen Streifen  $V_{j_1 j_2}$ .

Die Benennung der horizontalen Streifen  $H_{j_1 j_2}$  erfolgt analog:  $H_{j_1 j_2}$  ist in  $H_{j_1}$  enthalten,  $F^{-1}(H_{j_1 j_2})$  liegt in  $H_{j_2}$ . Um zu erfahren, in welchem horizontalen Streifen das Urbild von  $H_{j_1 j_2}$  liegt, schätzt man den ungefähren  $l$ -Wertebereich des Urbildes ab. Hierzu vergleicht man  $H_{j_1 j_2}$  mit den parabelförmigen Kurven  $p_c$ , von welchen im unteren Teil von Abbildung 2.2 Teilstücke gezeigt sind. Die Urbilder der  $p_c$  sind ja gerade horizontale Linien mit  $l = c$ .

Aufgrund von  $F(V_i) = H_i$  gilt für alle  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, 4\}$ :

$$F^2(V_{j_1 j_2}) = H_{j_2 j_1}. \quad (2.15)$$

Als nächstes werden die Mengen  $\overline{\Lambda_-^n}$  und  $\overline{\Lambda_+^n}$  für beliebiges  $n$  betrachtet.  $\overline{\Lambda_-^n}$  besteht aus  $4^n$  disjunkten vertikalen Streifen,  $\overline{\Lambda_+^n}$  aus  $4^n$  disjunkten horizontalen Streifen. Diese werden so benannt, daß  $F^k(V_{j_1 \dots j_k \dots j_n}) \subset V_k$  bzw.  $F^{-k}(H_{j_1 \dots j_k \dots j_n}) \subset H_k$  für alle  $k = 1, \dots, n$  ist, was eine Verallgemeinerung der bisher diskutierten Fälle  $n = 1$  und  $n = 2$  darstellt. Per definitionem gilt für jedes  $n \geq 2$ :

$$V_{j_1 \dots j_{n-1} j_n} \subset V_{j_1 \dots j_{n-1}} \quad \text{und} \quad H_{j_1 \dots j_{n-1} j_n} \subset H_{j_1 \dots j_{n-1}}. \quad (2.16)$$

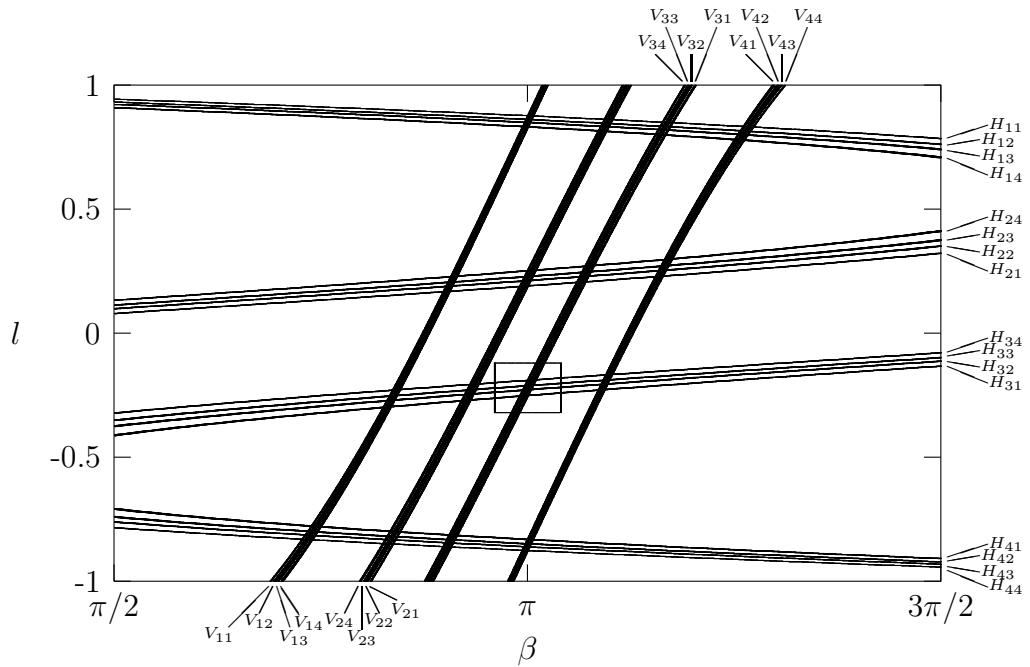


Abbildung 2.4: Die Mengen  $\overline{\Lambda}_-^2$  und  $\overline{\Lambda}_+^2$ . Der durch das Kästchen markierte Ausschnitt ist in Abbildung 2.5 vergrößert dargestellt.

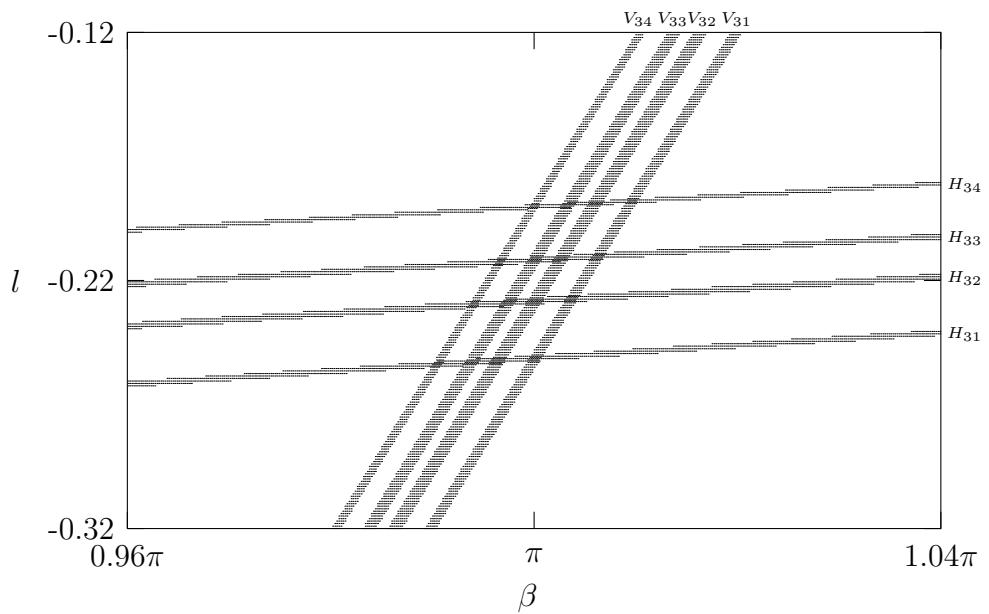


Abbildung 2.5: Ausschnittsvergrößerung der Mengen  $\overline{\Lambda}_-^2$  und  $\overline{\Lambda}_+^2$ . Man beachte die Ähnlichkeit zur Abbildung 2.3.

Wegen  $F(V_i) = H_i$  gilt außerdem eine Verallgemeinerung von (2.15):

$$F^n(V_{j_1 j_2 \dots j_n}) = H_{j_n \dots j_2 j_1}, \quad j_i \in \{1, \dots, 4\} \quad \forall \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

Wichtig ist, daß für jede mögliche Kombination von Indizes genau ein entsprechender vertikaler bzw. horizontaler Streifen existiert (deswegen gibt es  $4^n$  Streifen). Woran liegt das?

Es sei angenommen, daß die Menge  $\overline{\Lambda_+^{n-1}}$  aus  $4^{n-1}$  Streifen besteht, von denen jeder in eindeutiger Weise mit  $n-1$  Indizes benannt wird; für  $n=2$  ist dies jedenfalls der Fall. Es wird nun gezeigt, daß dann  $\overline{\Lambda_+^n}$  aus  $4^n$  Streifen besteht, die jeweils durch  $n$  Indizes eindeutig bezeichnet werden. Per Induktion gilt diese Aussage dann für jedes  $n$ .

Aufgrund der Definition (2.13) geht die Menge  $\overline{\Lambda_+^n}$  aus  $\overline{\Lambda_+^{n-1}}$  wie folgt hervor:

$$\overline{\Lambda_+^n} = F(\overline{\Lambda_+^{n-1}}) \cap \overline{\Gamma}. \quad (2.18)$$

Da jeder horizontale Streifen von  $\overline{\Lambda_+^{n-1}}$  jeden der vier vertikalen Streifen von  $\overline{\Lambda_-^1}$  schneidet, erhält man, wenn man die Operation „ $F$  anwenden und dann den Schnitt mit  $\overline{\Gamma}$  bilden“ auf einen einzelnen horizontalen Streifen  $H_{j_2 \dots j_n}$  von  $\overline{\Lambda_+^{n-1}}$  anwendet, vier horizontale Streifen  $H_{j_1 j_2 \dots j_n}$ ,  $j_1 = 1, \dots, 4$ , jeweils einer in jedem der  $H_{j_1} \subset \overline{\Lambda_+^1}$  gelegen. Dies gilt jedoch für jede der  $4^{n-1}$  möglichen Indexkombinationen  $j_2 \dots j_n$ , daher entstehen beim Konstruktionsschritt  $\overline{\Lambda_+^{n-1}} \rightarrow \overline{\Lambda_+^n}$  gemäß (2.18) insgesamt  $4^n$  Streifen, die sich in ihrer Benennung paarweise unterscheiden. Es wird keine Kombinationssmöglichkeit aus  $n$  Indizes ausgelassen.

Für  $\overline{\Lambda_-^n}$  kann man mit Hilfe von

$$\overline{\Lambda_-^n} = F^{-1}(\overline{\Lambda_-^{n-1}}) \cap \overline{\Gamma} \quad (2.19)$$

analog argumentieren.

Für  $n \rightarrow \infty$  erhält man die Mengen  $\overline{\Lambda_-^\infty}$  und  $\overline{\Lambda_+^\infty}$ . Für diese Mengen wird nun folgendes behauptet: Sie bestehen aus überabzählbar vielen disjunkten vertikalen bzw. horizontalen Kurven. Für jede gegebene infinite Folge  $j_1 j_2 \dots j_k \dots$  von Indizes gibt es genau eine vertikale Kurve  $V_{j_1 j_2 \dots j_k \dots}$  und genau eine horizontale Kurve  $H_{j_1 j_2 \dots j_k \dots}$ , so daß für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$F^k(V_{j_1 \dots j_k \dots}) \subset V_{j_k} \quad (2.20)$$

bzw.

$$F^{-k}(H_{j_1 \dots j_k \dots}) \subset H_{j_k}. \quad (2.21)$$

Die Behauptung kann man wie folgt begründen: Für jede infinite Folge  $j_1 j_2 \dots j_k \dots$  bestehen  $V_{j_1 j_2 \dots j_k \dots}$  und  $H_{j_1 j_2 \dots j_k \dots}$  aufgrund der vorausgegangenen

Diskussion und wegen (2.16) aus unendlichen Schnitten von ineinander verschachtelten abgeschlossenen nichtleeren Mengen und sind daher nicht leer. Daß es sich dabei um Kurven handelt, liegt daran, daß die Breite der Streifen von  $\overline{\Lambda_-^n}$  und  $\overline{\Lambda_+^n}$  für zunehmende  $n$  immer geringer wird und für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 geht. Dies wiederum ist eine Folge der expandierenden und kontrahierenden Abbildungseigenschaften, d.h. der *Hyperbolizität* und erscheint nach den vorangegangenen Betrachtungen plausibel. Für die exakte Begründung dieser Aussage sei auf [Wig88] verwiesen. Hier wird nur folgendes Argument gegeben:  $\overline{\Lambda_+^\infty}$  entsteht durch eine unendliche Wiederholung von Konstruktionsschritten gemäß (2.18). In jedem Schritt erfahren die jeweiligen horizontalen Streifen durch die Anwendung von  $F$  eine Stauchung in Richtung der stabilen Mannigfaltigkeit  $\overline{\Lambda_-^\infty} = \Lambda_-^\infty$  von  $\Lambda$ , also in vertikaler Richtung. Die Menge  $\overline{\Lambda_+^\infty}$  entsteht durch unendliche Wiederholung von (2.19). Bei diesen Schritten erfahren die jeweiligen vertikalen Streifen durch  $F^{-1}$  eine Stauchung in Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit  $\Lambda_+^\infty$  von  $\Lambda$ , also in horizontaler Richtung.

Ein Punkt  $p$  aus  $\Lambda = \overline{\Lambda_-^\infty} \cap \overline{\Lambda_+^\infty}$  ist nun durch den Schnitt einer eindeutig bestimmten vertikalen Kurve  $V_{s_0 s_1 \dots s_k \dots} \subset \overline{\Lambda_-^\infty}$  mit einer eindeutig bestimmten horizontalen Kurve  $H_{s_{-1} s_{-2} \dots s_{-k} \dots} \subset \overline{\Lambda_+^\infty}$  gegeben, läßt sich also eindeutig durch eine bi-infinite Folge  $(\dots s_{-k} \dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 \dots s_k \dots)$  von Indizes kodieren. Umgekehrt existiert für jede gegebene bi-infinite Folge von Indizes genau ein  $p \in \Lambda$ . Dies ist der Ausgangspunkt für die Einführung einer Symbolischen Dynamik.

Es sei noch erwähnt, daß es sich bei  $\Lambda$  um eine *Cantor-Menge* handelt. Im  $n$ -ten Konstruktionsschritt nach (2.14) ist  $\overline{\Lambda^n}$  die disjunkte Vereinigung von  $4^{2n}$  abgeschlossenen Mengen, deren Durchmesser für  $n \rightarrow \infty$  gegen null gehen. Somit ist  $\Lambda$  abgeschlossen, vollständig unverbunden, d. h.  $\Lambda$  enthält keine zusammenhängenden Flächen- oder Kurvenstücke, und  $\Lambda$  ist perfekt, d. h. jeder Punkt aus  $\Lambda$  ist ein Häufungspunkt von  $\Lambda$ ; also ist  $\Lambda$  eine Cantor-Menge.

## 2.5 Symbolische Dynamik

Eine Symbolische Dynamik ist ein dynamisches System bestimmter Art. Der Phasenraum eines solchen Systems ist eine Menge bi-infiniter Folgen, und die zugehörige Abbildung bewirkt eine Verschiebung dieser Folgen. Es wird gezeigt, daß das Zweimuldensystem in einem bestimmten Sinne äquivalent zu einer Symbolischen Dynamik ist.

Die vorherigen Abschnitte hatten ausschließlich das teilweise reduzierte System zum Thema. So wird auch zunächst für das teilweise reduzierte System eine Symbolische Dynamik eingeführt, dann für das reduzierte System. Zum Schluß dieses Abschnitts wird besprochen, welche Vorteile sich aus der Tatsache ergeben, daß eine Symbolische Dynamik für das Zweimuldensystem existiert.

### 2.5.1 Teilweise reduziertes System

Als *Raum der Symbolfolgen aus  $N$  Symbolen* bezeichnet man die folgende Menge von bi-infiniten Folgen:

$$\Sigma^N = \{(\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots) \mid s_i \in S^N \quad \forall i \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.22)$$

$S^N$  ist eine Menge von  $N$  völlig beliebigen, aber unterscheidbaren Elementen, den *Symbolen*. Dies können beispielsweise die natürlichen Zahlen von 1 bis  $N$  sein. Man bezeichnet  $S^N$  auch als *Alphabet*. Der Punkt (.) trennt die Folgenglieder mit positivem von denen mit negativem Index; im folgenden wird er jedoch etwas weitergehende Bedeutung erhalten, siehe unten.

Das Ergebnis des vorigen Abschnittes ist, daß sich jedem Punkt  $p \in \Lambda$  in umkehrbar eindeutiger Weise eine Symbolfolge aus  $\Sigma^4$  zuweisen läßt, mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 4 als Symbolen. Es gibt also eine bijektive Abbildung

$$\phi : \Lambda \longrightarrow \Sigma^4, \quad (2.23)$$

die jedem  $p \in \Lambda$  eine Symbolfolge

$$\phi(p) = (\cdots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_j \cdots) \quad (2.24)$$

zuordnet, so daß für jedes  $j \in \mathbb{Z}$  gilt (wegen (2.20), (2.21) und  $F^{-1}(H_i) = V_i$ ):

$$F^j(p) \in V_{s_j}. \quad (2.25)$$

Der Punkt (.) in den Symbolfolgen hat hier folgende Bedeutung: Für eine gegebene Symbolfolge  $s = (\cdots s_j \cdot s_k s_l \cdots) \in \Sigma^4$  befindet sich  $\phi^{-1}(s)$  in demjenigen vertikalen Streifen  $V_{s_k}$ , den das Symbol  $s_k$  rechts neben dem Punkt angibt. Außerdem liegt  $F(\phi^{-1}(s))$  im Streifen  $V_{s_l}$ , und  $F^{-1}(\phi^{-1}(s))$  liegt in  $V_{s_j}$  usw.

Sei  $p \in \Lambda$ . Mit  $\phi(p) = (\cdots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \cdots)$  gilt per definitionem:

$$\phi(F(p)) = (\cdots s_{-2} s_{-1} s_0 \cdot s_1 s_2 \cdots). \quad (2.26)$$

Die Symbolfolge  $\phi(F(p))$  ist also gegenüber  $\phi(p)$  um eine Stelle nach links verschoben. Der Anwendung der Abbildung  $F$  auf der Menge  $\Lambda$  entspricht also die Anwendung der *Shift-Abbildung*  $\sigma$  im Raum der Symbolfolgen: Für ein  $s = (\cdots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \cdots) \in \Sigma^4$  ist die Shift-Abbildung definiert durch

$$\sigma(s) = (\cdots s_{-2} s_{-1} s_0 \cdot s_1 s_2 \cdots). \quad (2.27)$$

Das dynamische System  $(\Sigma^4, \sigma)$  ist die Symbolische Dynamik für das teilweise reduzierte Zweimuldensystem.

Es gilt also folgender wichtiger Zusammenhang:

$$\sigma \circ \phi = \phi \circ F. \quad (2.28)$$

Dies drückt man auch aus, indem man sagt, daß das folgende Diagramm *kommutiert*:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{F} & \Lambda \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \Sigma^4 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma^4 \end{array} \quad (2.29)$$

Man kann also von der linken oberen Ecke des Diagramms in die rechte untere Ecke auf beiden möglichen Routen gelangen.

Die Abbildung  $\phi$  soll nun etwas umdefiniert werden, ohne daß dies wesentliche Konsequenzen für die folgenden Ausführungen hat. Jedem  $p \in \Lambda$  sei durch  $\phi$  eine Symbolfolge wie in (2.24) zugeordnet, jedoch so, daß anstelle von (2.25) nun für jedes  $j \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$F^j(p) \in H_{s_j}. \quad (2.30)$$

Die so definierte Abbildung  $\phi$  geht aus der ursprünglichen durch eine nachfolgende Anwendung von  $\sigma^{-1}$  hervor. Es ist aber nach wie vor (2.28) gültig. Die Umdefinition von  $\phi$  erfolgt hier deshalb, weil im Rahmen dieser Arbeit Symbolfolgen für bestimmte Orbits numerisch zu bestimmen sind. Die horizontalen Streifen von  $\overline{\Lambda_+^1}$  sind leichter zu unterscheiden als die vertikalen Streifen von  $\overline{\Lambda_-^1}$ ; bei ersteren reicht die Bestimmung der  $l$ -Komponente eines Orbitpunktes.

Für die folgenden Betrachtungen ist die Einführung einer *Metrik* auf dem Raum der Symbolfolgen nützlich. Da die Iteration von  $F$  der Anwendung von  $\sigma$  korrespondiert, erscheint es intuitiv sinnvoll, daß zwei Symbolfolgen dann „dicht benachbart“ sein sollen, wenn sie auf einem langen zentralen Symbolblock übereinstimmen. Der Abstand zwischen zwei Symbolfolgen

$$s = (\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} s_0 s_1 \cdots s_n \cdots), \quad \bar{s} = (\cdots \bar{s}_{-n} \cdots \bar{s}_{-1} \bar{s}_0 \bar{s}_1 \cdots \bar{s}_n \cdots) \in \Sigma^4$$

sei wie folgt definiert [Wig88]:

$$d(s, \bar{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|}. \quad (2.31)$$

Mit der Metrik auf  $\Sigma^4$  ausgerüstet, kann man nun folgendes zeigen:

*Die Abbildung  $\phi : \Lambda \rightarrow \Sigma^4$  ist ein Homöomorphismus.*

Unter einem Homöomorphismus versteht man eine bijektive, stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung.

Es muß nur noch die Stetigkeit von  $\phi$  und  $\phi^{-1}$  gezeigt werden. Seien  $p, \bar{p} \in \Lambda$ ;  $\bar{p}$  sei beliebig, aber fest, und es sei ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Dann gibt es wegen (2.31) ein  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  mit folgender Eigenschaft: Falls für die Symbolfolgen

$$\phi(p) = (\dots s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots), \quad \phi(\bar{p}) = (\dots \bar{s}_{-n} \dots \bar{s}_{-1} \bar{s}_0 \bar{s}_1 \dots \bar{s}_n \dots)$$

die Bedingung  $s_i = \bar{s}_i$ ,  $i = 0, \pm 1, \dots, \pm N$  gilt, so folgt daraus  $d(\phi(p), \phi(\bar{p})) < \epsilon$ . Die Bedingung ist dann erfüllt, wenn sich nicht nur  $\bar{p}$ , sondern auch  $p$  innerhalb der Menge  $M = M(\bar{p}, \epsilon)$  befindet, die durch den Schnitt des vertikalen Streifens  $V_{\bar{s}_{-1} \bar{s}_0 \bar{s}_1 \dots \bar{s}_N}$  mit dem horizontalen Streifen  $H_{\bar{s}_{-2} \bar{s}_{-3} \dots \bar{s}_{-N}}$  gegeben ist (man beachte die durch die Umdefinition von  $\phi$  verursachte Verschiebung der Anfänge der Indexmengen). Man wähle  $\delta(\bar{p}, \epsilon)$  so klein, daß eine Kreisscheibe um  $\bar{p}$  mit dem Radius  $\delta$  ganz in  $M$  enthalten ist (man kann sich klarmachen, daß sich  $\bar{p}$  nicht auf dem Rand von  $M$  befinden kann, da  $\bar{p}$  in  $\Lambda$  liegt; daher gibt es stets ein solches  $\delta > 0$ ). Gilt nun  $|p - \bar{p}| < \delta$ , so liegt nicht nur  $\bar{p}$ , sondern auch  $p$  in  $M$ , und es folgt  $d(\phi(p), \phi(\bar{p})) < \epsilon$ . Somit ist  $\phi$  stetig in  $\bar{p}$ . Doch  $\bar{p}$  war beliebig, somit ist  $\phi$  stetig.

Die Stetigkeit von  $\phi^{-1}$  kann man mit einer ähnlichen Argumentation zeigen.

Die Tatsache, daß  $\phi$  ein Homöomorphismus ist und daß (2.28) gilt, faßt man zusammen, indem man sagt, daß die Abbildung  $F$  auf  $\Lambda$  *topologisch konjugiert* zur Shift-Abbildung  $\sigma$  auf  $\Sigma^4$  ist. Die topologischen Eigenschaften der Dynamik von  $F$  auf  $\Lambda$  sind äquivalent zu denen der Dynamik von  $\sigma$  auf  $\Sigma^4$ , denn Orbits von  $F$  auf  $\Lambda$  werden unter  $\phi$  stetig und bijektiv auf Orbits von  $\sigma$  auf  $\Sigma^4$  abgebildet (und umgekehrt):

$$F = \phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi \implies F^k = (\phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi)^k = \phi^{-1} \circ \sigma^k \circ \phi. \quad (2.32)$$

Es wurde gezeigt, daß sich die Dynamik auf der invarianten Menge  $\Lambda$  für das teilweise reduzierte System durch eine *vollständige* Symbolische Dynamik mit vier Symbolen beschreiben läßt. Der Ausdruck „vollständig“ beschreibt die Tatsache, daß es kein *Verbot von bestimmten Symbolfolgen* (engl. *Pruning*) gibt. Gäbe es Pruning, dann wäre  $\phi$  nicht bijektiv, sondern nur injektiv. In solchen Fällen spricht man von einer *überdeckenden* Symbolischen Dynamik.

Als Symbole sollen nun anstatt der Zahlen  $1, \dots, 4$  die in [Ste95] verwandten Zeichen  $[+ >]$ ,  $[+ <]$ ,  $[- <]$ ,  $[- >]$  benutzt werden, wobei die Ersetzung genau in der angegebenen Reihenfolge erfolgt. Vergleicht man die neuen Symbole mit den zugehörigen horizontalen Streifen von  $\overline{\Lambda}_+^1$ , siehe Abbildung 2.3, so erkennt man, daß die Zeichen  $+$  und  $-$  in den Symbolen das Vorzeichen von  $l$  wiedergeben. Die Zeichen  $>$  und  $<$  sind auf den Regenbogendrehimpuls  $l_R = 1/\sqrt{3} = 0.577 \dots$  bezogen. Gilt  $|l| > l_R$ , so wird  $>$  gesetzt, ansonsten  $<$ .

In dieser Arbeit spielen *periodische Orbits* eine zentrale Rolle. Sie besitzen periodische Symbolfolgen und werden daher im folgenden durch *irreduzible Symbolstrings* gekennzeichnet. Das sind kürzestmögliche endliche Symbolfolgen, deren periodische Fortsetzung in beide Zeitrichtungen jeweils die Symbolfolge des betreffenden Orbits ergibt. Ein Querstrich über den Symbolstrings symbolisiert die periodische Fortsetzung. Beispielsweise steht  $\overline{[+ >]}$  für eine bi-infinite Folge, die nur aus Symbolen  $[+ >]$  besteht.

Man kann den Punkten  $p$  des Phasenraumes  $\Gamma$ , die außerhalb von  $\Lambda$  liegen, ebenfalls Symbolfolgen zuordnen. Die Symbole  $[+ >]$ ,  $[+ <]$ ,  $[< -]$ ,  $[> -]$  gehören nach obiger Definition zu vier verschiedenen Phasenraumbereichen. Das an der  $j$ -ten Stelle der Symbolfolge von  $p$  stehende Symbol  $s_j$  gibt an, in welchem der vier Bereiche sich  $F^j(p)$  befindet, sofern  $F^j(p)$  überhaupt existiert. Ansonsten existiert auch kein Symbol  $s_j$ . Diese Vorschrift zur Wahl von  $s_j$  ist etwas weiter gefaßt als (2.30). Da  $p$  nicht in  $\Lambda$  liegt, muß  $F^j(p)$  nämlich nicht unbedingt in einem der horizontalen Streifen von  $\overline{\Lambda_+^1}$  liegen.

Die Symbolfolgen von Punkten  $p$  außerhalb von  $\Lambda$  sind nicht bi-infinit, da  $F^j(p)$  nicht für alle  $j \in \mathbb{Z}$  existiert. Punkte beliebiger *Streuorbits*, also solcher Orbits, die sowohl in positiver als auch in negativer Zeitrichtung irgendwann aus dem Phasenraum entweichen, bekommen Symbolfolgen zugewiesen, die in beiden Zeitrichtungen endlich sind. Die Punkte, die auf der stabilen Mannigfaltigkeit  $\Lambda_\infty^-$  von  $\Lambda$  liegen und daher sog. *Capture-Orbits* definieren, besitzen Symbolfolgen, die in positiver Zeitrichtung unendlich sind. Auf der instabilen Mannigfaltigkeit  $\Lambda_\infty^+$  von  $\Lambda$  liegen die Punkte, deren Symbolfolgen in negativer Zeitrichtung unendlich sind. Sie entsprechen sog. *Escape-Orbits*.

### 2.5.2 Reduziertes System

Beim Übergang vom teilweise reduzierten zum reduzierten System werden Orbits, die sich nur bezüglich der Transformation (1.19) unterscheiden, identifiziert. Dabei wird die Information über das Drehimpulsvorzeichen vernichtet, jedoch nicht die Information, ob ein Vorzeichenwechsel von  $l$  stattfindet. Dies überträgt sich auf die Symbolische Dynamik.

Für das reduzierte System werden neue Symbole, nämlich  $[=>]$ ,  $[=<]$ ,  $[> \neq]$  und  $[< \neq]$ , eingeführt. Die Zeichen  $>$  und  $<$  haben hier die gleiche Bedeutung wie im teilweise reduzierten System. Findet bei einer Iteration ein Vorzeichenwechsel von  $l$  statt, so wird dies durch  $\neq$  vermerkt, findet keiner statt, so wird  $=$  notiert. Auf diese Weise werden, wie erwünscht, Symbolfolgen, die sich nur im Drehimpulsvorzeichen unterscheiden, identifiziert, während alle übrigen Unterscheidungsmerkmale erhalten bleiben. Beispielsweise erhalten die 1-periodischen Orbits (Fixpunkte)  $\overline{[+ >]}$  und  $\overline{[- >]}$  des teilweise reduzierten Systems beide die

gleiche Symbolfolge  $\overline{[= >]}$  im reduzierten System. Es kann sich auch die Periode von periodischen Orbits beim Übergang vom teilweise reduzierten zum reduzierten System ändern. Die 2-periodischen Orbits  $\overline{[+ >][- >]}$  und  $\overline{[+ <][- <]}$  entsprechen beispielsweise den 1-periodischen Orbits  $\overline{[ \neq >]}$  und  $\overline{[ \neq <]}$ . Die Periode eines Orbits im teilweise reduzierten System ist genau dann doppelt so groß wie die des entsprechenden Orbits im reduzierten System, wenn beim Durchlaufen einer Periode im reduzierten System die Anzahl der Vorzeichenwechsel von  $l$  ungerade ist.

Somit ergibt sich: Die Dynamik auf der invarianten Menge des reduzierten Systems ist ebenfalls topologisch konjugiert zur Shift-Abbildung auf einem Folgenraum  $\Sigma^4$ .

### 2.5.3 Konsequenzen der Symbolischen Dynamik

Die topologische Konjugiertheit der Abbildung  $F$  auf der invarianten Menge  $\Lambda$  zur Shift-Abbildung  $\sigma$  auf dem Folgenraum  $\Sigma^4$  hat weitreichende Konsequenzen. Zwei von diesen werden in diesem Unterabschnitt erläutert. Um die Chaotizität von  $F$  auf  $\Lambda$  zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß  $\sigma$  auf  $\Sigma^4$  chaotisch ist, was vergleichsweise leicht zu überprüfen ist. Ferner ermöglicht die Stetigkeit von  $\phi$  ein numerisches Verfahren zum Auffinden von periodischen Orbits.

Aus der Existenz der Symbolischen Dynamik ergeben sich darüberhinaus noch weitere Vorteile. Die irreduziblen Symbolstrings periodischer Orbits enthalten Information über deren Topologie, was in Abschnitt 2.6 genauer besprochen wird. Insbesondere können die Symmetrieeigenschaften der Orbits an ihren Strings abgelesen werden. Dies wird in Abschnitt 3.5.3 gezeigt. Vor allem aber kommt das Anwendungsverfahren der Theorie der periodischen Orbits, die in Abschnitt 3.6 vorgestellte *Cycle Expansion*, nicht ohne Symbolische Dynamik aus.

#### 2.5.3.1 Chaotizität

Es wird bewiesen, daß  $\sigma$  auf  $\Sigma^4$  chaotisch ist.

Zunächst wird die sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen gezeigt. In der  $\epsilon$ -Umgebung einer Symbolfolge  $s$  liegt eine Symbolfolge  $\bar{s}$  mit  $s_N \neq \bar{s}_N$ ,  $N = N(\epsilon)$  hinreichend groß, siehe (2.31). Also ist  $d(\sigma^N(s), \sigma^N(\bar{s})) \geq 1/2$ , womit die Definition der sensiblen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen erfüllt ist.

Daß die periodischen Symbolfolgen dicht in  $\Sigma^4$  liegen, zeigt man wie folgt: Es sei eine beliebige Symbolfolge  $s$  gegeben. Dann gibt es für jedes beliebig kleine  $\epsilon$  eine periodische Symbolfolge  $\bar{s}$  mit hinreichend langer Periode, so daß  $s$  und  $\bar{s}$

auf einem ausreichend langen zentralen Block übereinstimmen, also  $d(s, \bar{s}) < \epsilon$  gilt.

Die topologische Transivität ist am schwierigsten zu beweisen. Man zeigt diese, indem man einen in  $\Sigma^4$  dicht liegenden Orbit  $s$  konstruiert. Dieser entsteht durch Hintereinanderschreiben endlicher Symbolfolgen in der Reihenfolge, wie man die Zahlen des Vierer-Zahlensystems anordnet (siehe auch [Wig88]). Beginnend beim Punkt (.) werden die ungeraden Zahlen in positiver Zeitrichtung, die geraden Zahlen in negativer Zeitrichtung angeordnet. Jedes  $\bar{s} \in \Sigma^4$  wird dann durch eine der in  $s$  enthaltenen endlichen Symbolfolgen ausreichend approximiert, d. h. für jedes beliebig kleine  $\epsilon$  gibt es ein  $k \in \mathbb{Z}$ , so daß  $d(\sigma^k(s), \bar{s}) < \epsilon$  ist.

Die Shift-Abbildung  $\sigma$  ist also chaotisch auf  $\Sigma^4$ , somit ist  $F$  chaotisch auf  $\Lambda$ . Das Zweimuldensystem ist *hart chaotisch*.

### 2.5.3.2 Numerisches Verfahren zur Bestimmung periodischer Orbits

Zur Bestimmung periodischer Orbits eignet sich eine in [Ste95] angegebene Variante des in [NusYor89] detailliert beschriebenen *PIM-Algorithmus* (PIM=proper interior maximum). Voraussetzung für diese Variante ist die Kenntnis der Symbolischen Dynamik. Nach Vorgabe der Symbolfolge des gesuchten periodischen Orbits betrachtet man eine Strecke  $S$  in  $\overline{\Gamma}$ , welche die stabile Mannigfaltigkeit des periodischen Orbits transversal schneidet (das ist in jedem Fall erfüllt, wenn  $S$  die Menge  $\overline{\Lambda_-^1}$  transversal schneidet). Für gleichmäßig auf  $S$  verteilte Anfangsbedingungen berechnet man durch Vorwärtsiteration die (endlichen) Symbolfolgen in positiver Zeitrichtung. Für eine Anfangsbedingung  $x$  bezeichne  $T(x)$  die Länge eines zusammenhängenden Symbolblocks, auf dem die errechnete Symbolfolge von  $x$  mit der vorgegebenen Folge des gesuchten Orbits (oder einer zyklischen Permutation davon) übereinstimmt. Als ein PIM-Tripel bezeichnet man drei derart auf einer Strecke angeordnete Punkte  $(a, c, b)$ , daß  $c$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt und  $T(a) < T(c) > T(b)$  gilt. Bei hinreichend feiner Unterteilung von  $S$  findet man ein  $c \in S$ , so daß  $T(c)$  auf der gewählten Unterteilung maximal ist, sowie ein zugehöriges PIM-Tripel  $(a, c, b)$ . Nun wendet man die Prozedur auf die Strecke  $[a, b]$  an. Bei hinreichend feiner Unterteilung findet man wieder ein zu einem  $c$  mit maximalem  $T(c)$  gehöriges PIM-Tripel. Die Prozedur wird so oft wiederholt, bis sich eine Strecke ergibt, die kürzer ist als ein vorgegebenes  $\epsilon$ . Diese schneidet aber immer noch die stabile Mannigfaltigkeit des gesuchten Orbits.

Warum funktioniert das? Die durch ein gegebenes PIM-Tripel  $(a, c, b)$  definierte Strecke  $[a, b]$  schneidet einen horizontalen Streifen, dessen Indexmenge auf einem zusammenhängenden Block mit der Länge  $T(c)$  mit der Symbolfolge des gesuchten Orbits übereinstimmt. Dieser Streifen enthält jedoch feinere Streifen, deren Indexmengen auf noch längeren Blöcken der gesuchten Symbolfolge gleichen (sie-

he (2.16)). Liegt ein Punkt  $c' \in [a, b]$  in einem solchen Streifen, so ist entweder  $(a, c', c)$  oder  $(c, c', b)$  ein PIM-Tripel, da ja  $T(c') > T(c)$  gilt.

Nach Beendigung der Verfeinerungsprozedur nähert man sich dem gesuchten Orbit entlang seiner stabilen Mannigfaltigkeit an, indem die Endpunkte der resultierenden Strecke solange iteriert werden, bis der Abstand der Endpunkte ein gewisses  $\epsilon'$  mit  $\epsilon < \epsilon' \ll 1$  überschreitet (die Endpunkte entfernen sich voneinander in Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit des Orbits). Dann startet man die Verfeinerungsprozedur von neuem, gefolgt von Iterationen der Endpunkte usw. Aufgrund der endlichen Rechengenauigkeit kann man dem gesuchten Orbit nicht beliebig nahe kommen. Es erweist sich als günstig, das Verfahren für einen Orbit der Periode  $n$  nach derjenigen Verfeinerungsprozedur abzubrechen, nach der  $|F^n(c) - c|$  minimal ist.

## 2.6 Topologie der periodischen Orbits

Zu jedem Orbit des reduzierten Systems gehören aufgrund des Informationsverlustes bei der Symmetriereduktion mehrere periodische Orbits des nichtreduzierten Systems. Jedem Orbit des nichtreduzierten Systems wiederum ist bijektiv eine Trajektorie des Hamiltonschen Flusses zuzuordnen, mit zugehöriger Bahnkurve im Ortsraum, die sich mit Hilfe von (1.26) und (1.27) bestimmen lässt und eine definierte Umlaufrichtung besitzt. Für jeden Orbit des reduzierten Systems lässt sich also, wenn auch nicht in eindeutiger Weise, eine Bahnkurve angeben.

Abbildung 2.6 zeigt Bahnkurven, die zu den vier 1-periodischen Orbits des reduzierten Systems gehören, wobei jeweils beide Umlaufrichtungen möglich sind. Im reduzierten System werden nämlich die beiden Umlaufrichtungen identifiziert, d. h. bei Änderung der Umlaufrichtung ändert sich nicht die Symbolfolge im reduzierten System.

Jede der beiden ringförmigen Bahnen entspricht zwei Fixpunkten des teilweise reduzierten Systems, jeweils einer mit  $l < 0$  und einer mit  $l > 0$  je nach Umlaufsinn. Im nichtreduzierten System gibt es gar keine Fixpunkte, sondern nur Orbits der Periode  $2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Die beiden 8-förmigen Bahnen entsprechen 2-periodischen Orbits im teilweise reduzierten System:  $[\neq >] \hat{=} [+ >] [- >]$  und  $[\neq <] \hat{=} [+ <] [- <]$ . Hierbei werden die beiden Umlaufrichtungen auch im teilweise reduzierten System identifiziert, da ein Wechsel der Drehimpulsvorzeichen die Symbolfolgen dieser Orbits nur verschiebt, aber nicht in anderer Weise verändert.

Jede in Abbildung 2.6 gezeigte Bahnkurve steht also für zwei Orbits des Hamiltonschen Flusses bzw. des nichtreduzierten Systems, nämlich für das Durchlaufen der jeweiligen Bahn in der einen und in der anderen Richtung.

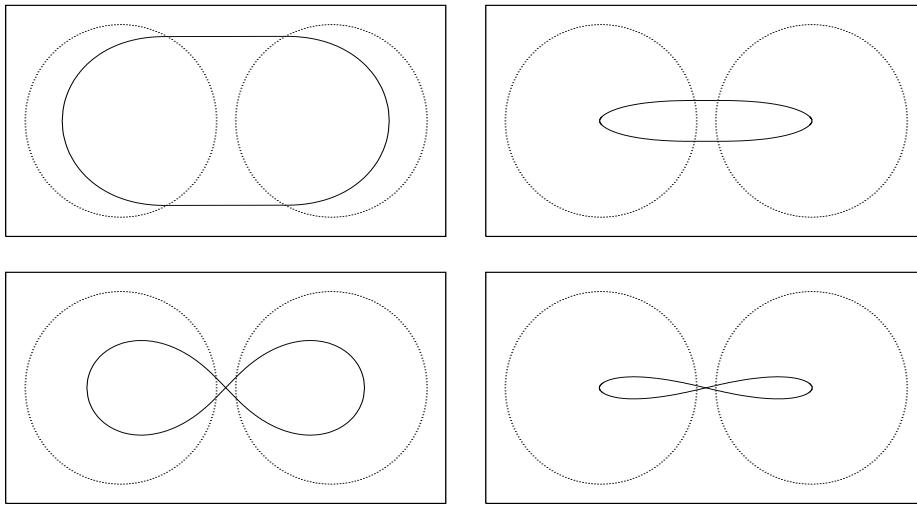


Abbildung 2.6: Bahnkurven der 1-periodischen Orbits  $\overline{=>}$ ,  $\overline{=<}$  (oben) und  $\overline{\neq>}$ ,  $\overline{\neq<}$  (unten) des reduzierten Systems.

Weitere Bahnkurven, die periodischen Orbits des reduzierten Systems zugeordnet werden, zeigen Abbildung 2.7 sowie Anhang A. Die einzelnen Bilder vertreten, wie es auch in Abbildung 2.6 der Fall ist, ganze Klassen von Orbits des nichtreduzierten Systems (mit jeweils zwei oder vier Repräsentanten, wie man zeigen kann; siehe Anhang D). Gehört nämlich eine bestimmte Bahnkurve mit definiter Umlaufrichtung zu einer bestimmten Symbolfolge des reduzierten Systems, dann gehören die um  $\pi$  am Ursprung gedrehte und die an der  $x$ - und an der  $y$ -Achse gespiegelte Bahnkurve zu derselben Symbolfolge – aufgrund der Symmetriereduktion.

Wenn bei einem Orbit des nichtreduzierten Systems mindestens eine der drei genannten Symmetrieeoperationen eine Zeitumkehr des Orbits hervorruft, dann werden bei der zugehörigen Bahn die beiden möglichen Umlaufrichtungen bei der Symmetriereduktion identifiziert. Bei den meisten Orbits kürzerer Periode ist dies der Fall, wie z. B. bei denen aus Abbildung 2.6 und 2.7, bei einigen anderen jedoch nicht (Beispiele in Anhang A). Die Orbits mit festgelegter Umlaufrichtung sind genau diejenigen, deren Symbolfolgen im reduzierten System nicht zeitumkehrinvariant sind.

Wie ermittelt man bei einer gegebenen Symbolfolge die zeitumgekehrte Symbolfolge? Bei Umkehr der Zeitrichtung werden die Drehimpulsvorzeichen geändert. Die Austrittswinkel sind für die Symbolische Dynamik irrelevant. Im teilweise reduzierten System erfolgt die Zeitumkehr also durch Umkehr der Drehimpulsvorzeichen und anschließendes Umdrehen der Symbolfolge. Im reduzierten System sind jedoch nur die Vorzeichenunterschiede zwischen den Symbolen interessant.

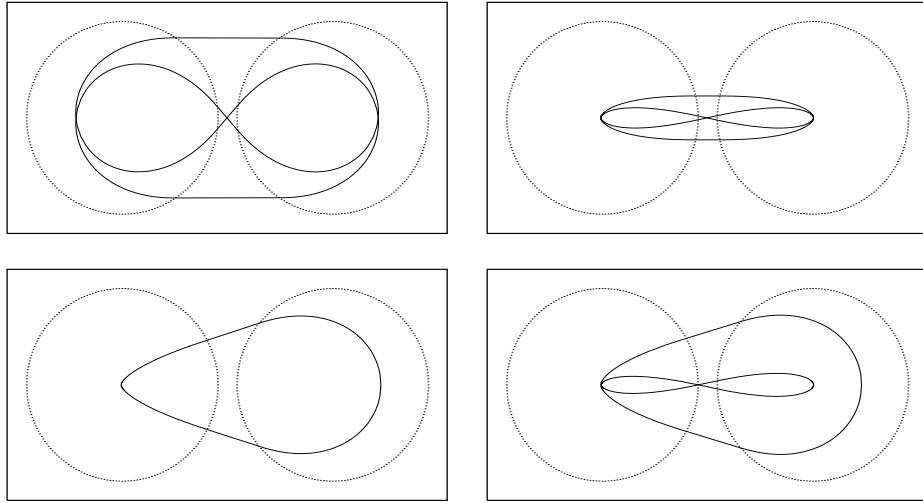


Abbildung 2.7: Bahnkurven der Orbits  $\overline{[= >][\neq >]}$ ,  $\overline{[= <][\neq <]}$  (oben) und  $\overline{[= >][= <]}$ ,  $\overline{[= >][= <][\neq <][\neq <]}$  (unten) des reduzierten Systems.

Somit wird eine Symbolfolge im reduzierten System zeitumgekehrt, indem sie zunächst in das teilweise reduzierte System übersetzt, dort umgedreht und wieder in das reduzierte System zurückübersetzt wird.

Man bezeichnet die vier in Abbildung 2.6 dargestellten Orbits als *fundamentale Orbits*. Sie bilden nämlich die topologischen Grundbausteine der Dynamik. Jeder Orbit höherer Periode setzt sich wie folgt aus den fundamentalen Orbits zusammen: Für jedes Symbol seiner Symbolfolge wird eine (leicht deformierte) Hälfte des dem Symbol entsprechenden fundamentalen Orbits durchlaufen. Die längeren periodischen Orbits mit hoher Symmetrie sehen sogar beinahe so aus, als seien einfache Orbits mit kürzeren Perioden, deren Symbolstrings in dem des längeren Orbits enthalten sind, übereinandergeplottet worden. Beispiele hierfür werden in Abbildung 2.7 gezeigt. Der Orbit  $\overline{[= >][\neq >]}$  ähnelt einer Übereinanderzeichnung von  $\overline{[= >]}$  und  $\overline{[\neq >]}$ ; der Orbit  $\overline{[= <][\neq <]}$  sieht aus, als würden die zu  $\overline{[= <]}$  und  $\overline{[= <]}$  gehörenden Bahnkurven nacheinander durchlaufen werden. Die Bahnkurve von  $\overline{[= >][= <][\neq <][\neq <]}$  ähnelt denen von  $\overline{[= >][= <]}$  und  $\overline{[\neq <]}$ .

Orbits mit längerer Periode werden von sog. *Pseudo-Orbits*, die verschiedene Orbits kürzerer Periode, deren Symbolstrings zusammengesetzt den Symbolstring des längeren Orbits ergeben, nacheinander durchlaufen, *beschattet*. Von *Beschattung* spricht man dann, wenn der Pseudo-Orbit in der Nähe des „echten“ Orbits verläuft (engl. *shadowing*, [GucHol86]). Daß beim Zweimuldensystem jeder Pseudo-Orbit stets den Orbit, dessen Symbolstring sich aus den Strings des Pseudo-Orbits zusammensetzt, tatsächlich beschattet, ist eine Folge davon, daß sowohl die Abbildung, welche die Dynamik des Zweimuldensystems beschreibt,

als auch die Abbildung, die den Punkten der invarianten Menge Symbolfolgen zuordnet, stetig ist.

Das Phänomen der Beschattung ist entscheidend für die Konvergenzeigenschaften der *Cycle Expansion* (siehe Abschnitt 3.6).

# Kapitel 3

## Theorie der periodischen Orbits

Die wesentlichen Aspekte der (klassischen) *Theorie der periodischen Orbits* werden in diesem Kapitel vorgestellt. Die Darstellung orientiert sich größtenteils an [Cvi+01].

Die Theorie ist in erster Linie anwendbar auf dynamische Systeme, die zweierlei Voraussetzungen erfüllen: Erstens sollte die invariante Menge des zu untersuchenden Systems *hyperbolisch* sein; dies ist bei dem in dieser Arbeit betrachteten System erfüllt. Zweitens sollte das System *ergodisch* sein; auch das ist für das Zweimuldensystem gültig. Was Ergodizität bedeutet, wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels erläutert. Doch was ist der Inhalt der Theorie?

In einem chaotischen dynamischen System ist es praktisch nicht möglich, präzise Voraussagen zu treffen, also individuelle Trajektorien über längere Zeit zu verfolgen. Die Theorie der periodischen Orbits ermöglicht jedoch die Bestimmung gewisser intrinsischer Größen des betrachteten Systems, wie z. B. die Escape-Rate, das Langzeitverhalten von Korrelationsfunktionen, das klassische Resonanzspektrum oder dynamische Mittelwerte von Observablen, wie z. B. der Lyapunov-Exponent. Allen genannten Größen ist gemeinsam, daß sie sowohl zeitliche als auch räumliche Mittelungen beinhalten. Die Grundidee der Theorie ist es, solche Mittelwerte mit den Eigenwertspektren gewisser *Entwicklungsoperatoren* in Verbindung zu bringen. Wie das funktioniert, wird im zweiten Abschnitt beschrieben.

In den darauffolgenden Abschnitten werden Techniken zur Bestimmung der Eigenwerte der Entwicklungsoperatoren eingeführt. Sogenannte *Spurformeln* verbinden die Eigenwertspektren mit den periodischen Orbits des Systems. Aus den Spurformeln konstruiert man die wichtigsten Werkzeuge der Theorie der periodischen Orbits: die *Selbergsche Zeta-Funktion* und die *dynamische Zeta-Funktion*. Diese Funktionen faktorisieren in bestimmter Weise bezüglich der Symmetrien des betrachteten Systems, was die numerische Auswertung erheblich erleichtert.

Die exakte Berechnung der Zeta-Funktionen erfordert die Kenntnis sämtlicher periodischen Orbits des Systems. Das sind in der Regel unendlich viele Orbits, jedoch hat Cvitanović gezeigt, daß man bereits dann gute Approximationen der zu berechnenden Größen erhält, wenn man lediglich die kürzeren periodischen Orbits berücksichtigt [Cvi88]. Hierzu entwickelt man die Zeta-Funktionen in Potenzreihen, sog. *Cycle Expansions*. Diese Reihen konvergieren unter bestimmten Voraussetzungen außerordentlich schnell und können dann schon nach geringer Ordnung abgebrochen werden.

Zum Abschluß des Kapitels wird eine Formel für dynamische Mittelwerte von Observablen hergeleitet. Im Gegensatz etwa zur Escape-Rate oder zum Korrelationsspektrum sind die dynamischen Mittelwerte von Observablen nicht direkt durch Eigenwerte von Entwicklungsoperatoren gegeben, sondern müssen auf kompliziertere Weise aus der dynamischen Zeta-Funktion berechnet werden.

### 3.1 Ergodizität

Man betrachte eine Abbildung  $f$  und eine Menge  $M$ , die invariant unter  $f$  ist. Für  $M$  sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  gegeben. Dieses ordnet jeder Teilmenge von  $M$  eine nichtnegative Zahl zu. Es ist ferner additiv, d. h. für jede abzählbare Familie von paarweise disjunkten Teilmengen  $S_i$  von  $M$  ist das Maß der Vereinigung der  $S_i$  gleich der Summe der Maße der einzelnen  $S_i$ :

$$\mu \left( \bigcup_i S_i \right) = \sum_i \mu(S_i). \quad (3.1)$$

Außerdem gilt

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad (3.2)$$

sowie

$$\mu(M) = 1. \quad (3.3)$$

Die letztgenannte Eigenschaft macht das Maß zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß.

Für eine gegebene Menge  $S \subset M$  sei mit  $f^{-1}(S)$  die Menge der Urbilder von  $S$ , also die Menge aller Punkte, die unter  $f$  nach  $S$  abgebildet werden, bezeichnet. Das Maß  $\mu$  heißt *invariant*, wenn für jedes  $S \subset M$  gilt:

$$\mu(S) = \mu(f^{-1}(S)). \quad (3.4)$$

Ist  $f$  invertierbar, so ist dies äquivalent zu  $\mu(S) = \mu(f(S))$  – sonst im allgemeinen nicht.

**Definition 3 (Ergodizität)** Ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  bezeichnet man als ergodisch, wenn für jede komplexwertige, bezüglich  $\mu$  integrierbare Funktion  $a(x)$  das Zeitmittel fast überall gleich dem Scharmittel ist, d. h. mit Ausnahme einer Menge vom  $\mu$ -Maße 0 gilt für alle  $x_0 \in M$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a(f^k(x_0)) = \int_M a(x) d\mu(x). \quad (3.5)$$

Besitzt also die Abbildung  $f$  auf  $M$  ein ergodisches Maß  $\mu$  (man sagt auch, das dynamische System  $(f, M, \mu)$  sei ergodisch), so ist das Zeitmittel für fast alle Startpunkte  $x_0$  gleich, nämlich gleich dem Integral auf der rechten Seite von (3.5).

Ein ergodisches Maß zu haben ist natürlich nur dann von praktischem Nutzen, wenn die Menge derjenigen Punkte, für die (3.5) gilt, wirklich „sehr viel größer“ ist als die Menge derjenigen Punkte, für die (3.5) nicht gilt, die Bezeichnung „fast alle“ also gerechtfertigt ist. Man könnte ja in  $M$  einen Fixpunkt  $q$  von  $f$  auswählen, und allen Teilmengen von  $M$ , die  $q$  enthalten, das Maß 1 verleihen, und allen anderen Teilmengen von  $M$  das Maß 0 geben (auf  $q$  konzentriertes Dirac-Maß). Dieses Maß wäre zwar invariant und ergodisch, aber wenig nützlich, denn die „Unabhängigkeit“ des Zeitmittels vom Startpunkt wäre ja nur für den Punkt  $q$  sichergestellt.

Man kann zeigen, daß das Zweimuldensystem auf seiner invarianten Menge ein „sinnvolles“ ergodisches Maß besitzt. In [ArnAv68] wird bewiesen, daß eine Shift-Abbildung im Folgenraum mit  $N$  Symbolen ohne verbotene Symbolfolgen, eine sog. *Bernoulli-Shift*, für beliebiges  $N \geq 2$  ergodisch ist. Das zugrundeliegende Maß ist so beschaffen, daß nur Mengen von Symbolfolgen, die in unendlich vielen Symbolen übereinstimmen, das Maß 0 besitzen. Die Vereinigung dieser Mengen ist, verglichen mit der Menge aller Symbolfolgen, „sehr klein“. Da die Abbildung  $F$  des Zweimuldensystems auf ihrer invarianten Menge  $\Lambda$  topologisch konjugiert zur Bernoulli-Shift mit vier Symbolen ist, besitzt  $F$  auf  $\Lambda$  ein ergodisches Maß. Das Zeitmittel ist also fast überall auf  $\Lambda$  unabhängig vom Startwert, nämlich gleich dem Scharmittel.

Man kann sich die Ergodizität eines dynamischen Systems  $(f, M, \mu)$  wie folgt veranschaulichen: Fast jeder Orbit von  $f$  mit Startpunkt in  $M$  kommt im Verlaufe der Dynamik jedem Punkt von  $M$  beliebig nahe; das Maß  $\mu(S)$  einer Teilmenge  $S$  von  $M$  gibt an, wie häufig sich ein solcher „typischer“ Orbit im Zeitmittel in  $S$  aufhält (das wird klar, wenn man als Funktion  $a(x)$  in (3.5) die *Indikatorfunktion* von  $S$  wählt:  $a(x) = 1$  falls  $x \in S$  und  $a(x) = 0$  sonst). Diese Häufigkeit des Aufenthaltes in  $S$  ist für alle typischen Orbits gleich. Teilmengen von  $M$  vom Maße 0, deren Punkte die Definition (3.5) nicht erfüllen, sind Mengen von Punkten, die zu „untypischen“ Orbits gehören, also zu solchen Orbits, die nicht jedem Punkt in  $M$  beliebig nahe kommen.

Ein Beispiel für eine Menge untypischer Orbits ist ein periodischer Orbit zusammen mit dem Schnitt seiner stabilen Mannigfaltigkeit mit  $M$ , also die Menge aller Orbits auf  $M$ , die sich im Verlaufe der Dynamik dem periodischen Orbit asymptotisch annähern. Ist  $f$  topologisch konjugiert zu einer Bernoulli-Shift (was für den Rest dieses Abschnitts vorausgesetzt wird), dann ist eine solche Menge durch die Vereinigung aller Symbolfolgen  $(s_n)$  gegeben, für die es jeweils ein  $N$  gibt, so daß die Symbole  $s_n$  für  $n \geq N$  mit den entsprechenden Symbolen des periodischen Orbits übereinstimmen. Das bedeutet Übereinstimmung in unendlich vielen Symbolen, daher besitzt die betrachtete Menge, wie es sich für eine Menge untypischer Orbits gehört, das Maß 0.

Die Vereinigung *aller* periodischen Orbits und deren stabilen Mannigfaltigkeiten, geschnitten mit  $M$ , besteht ebenfalls nur aus Punkten, die (3.5) nicht erfüllen; keiner der Orbits verläuft dicht in  $M$ . Diese Menge kann daher ebenfalls nur das Maß 0 haben. Das ist nach (3.1) auch tatsächlich der Fall. Es handelt sich nämlich um eine abzählbare disjunkte Vereinigung von Mengen vom Maße 0, da die periodischen Orbits abzählbar sind.

Obwohl die gerade betrachtete Menge dicht in  $M$  liegt (schon die Vereinigung der periodischen Orbits allein liegt dicht in  $M$ , vgl. Abschnitt 2.5.3.1), ist sie dennoch nur eine „sehr kleine“ Teilmenge von  $M$ , siehe oben. Sie ist noch nicht einmal die größte Menge vom Maße 0, denn es sind noch andere Mengen von Symbolfolgen denkbar, die in unendlich vielen Symbolen übereinstimmen.

## 3.2 Mittelungen und Entwicklungsoperatoren

In diesem Abschnitt wird erklärt, worum es sich bei der Escape-Rate, dem Korrelationsspektrum sowie den dynamischen Mittelwerten handelt und wie man Entwicklungsoperatoren konstruiert, aus deren Eigenwertspektren sich die genannten Größen errechnen lassen.

Damit sind die Anwendungsmöglichkeiten der Theorie der periodischen Orbits noch nicht erschöpft. Es lassen sich darüber hinaus weitere, aus dem *thermodynamischen Formalismus* bekannte Größen zur Charakterisierung dynamischer Systeme bestimmen [Art+90a]. Hierbei handelt es sich beispielsweise um verallgemeinerte Entropien, verallgemeinerte Dimensionen und verallgemeinerte Lyapunov-Exponenten. In dieser Arbeit wird darauf jedoch nicht näher eingegangen.

Im folgenden wird stets eine (nicht notwendig invertierbare) Abbildung  $f$  betrachtet, die in einem Phasenraum  $\mathcal{M}$  wirkt, der eine kompakte Mannigfaltigkeit ist. Die Theorie der periodischen Orbits existiert auch für Flüsse. Dieser Fall wird hier aber nicht behandelt. Abgesehen von einigen mathematischen Feinheiten,

verläuft die Herleitung der Theorie für Flüsse analog der Theorie für Abbildungen.

### 3.2.1 Die Escape-Rate und der Perron-Frobenius-Operator

Bei Abbildungen, die auf kompakten Mannigfaltigkeiten wirken, hat man zwischen *offenen* und *geschlossenen* Systemen zu unterscheiden. Bei offenen Systemen können, im Gegensatz zu geschlossenen Systemen, Orbits aus dem Phasenraum entweichen. Beim Zweimuldensystem handelt es sich also um ein offenes System. Die Ausführungen dieses Kapitels werden aber möglichst allgemein gehalten und gelten, sofern nicht ausdrücklich anders angegeben, sowohl für offene als auch für geschlossene Systeme.

Man kann eine *Escape-Rate*, also ein Maß für das Entweichen der Orbits, definieren, indem man in Gedanken ein „Streuexperiment“ durchführt. Damit ist gemeint, daß man ein auf  $\mathcal{M}$  gleichverteiltes Ensemble von Anfangswerten betrachtet und der Dynamik von  $f$  unterwirft. Im Falle des Zweimuldensystems kann man sich dies als einen isotropen Beschuß beider Mulden mit einer Vielzahl von Teilchen, deren Stoßparameter gleichmäßig verteilt sind, vorstellen. Bei einem offenen System wird bei jeder Iteration von  $f$  ein gewisser Anteil der Orbits des Ensembles den Phasenraum verlassen. Es wird nun vorausgesetzt, daß jeder Orbit, der  $\mathcal{M}$  verläßt, nie wieder nach  $\mathcal{M}$  zurückkehrt, wie es beim Zweimuldensystem der Fall ist. Der Anteil  $\gamma_n$  derjenigen Orbits, die sich nach  $n$  Iterationen noch immer in  $\mathcal{M}$  befinden, ist dann durch folgendes Doppelintegral gegeben:

$$\gamma_n = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \int_{\mathcal{M}} dx \int_{\mathcal{M}} dy \delta(y - f^n(x)), \quad (3.6)$$

wobei

$$|\mathcal{M}| = \int_{\mathcal{M}} dx \quad (3.7)$$

das Volumen von  $\mathcal{M}$  ist. Das  $dx$ -Integral gibt das gleichverteilte Ensemble von Startwerten vor, das  $dy$ -Integral zählt die Orbits, die nach  $n$  Iterationen noch im Phasenraum verblieben sind.

Bei hart chaotischen offenen Systemen erwartet man asymptotisch eine exponentielle Abnahme von  $\gamma_n$ , d. h. bei diesen Systemen gilt  $\gamma_n \sim e^{-\kappa n}$  für große  $n$ . Der Exponent  $\kappa$  bestimmt die Rate, mit der die Trajektorien entweichen, man bezeichnet ihn daher als *Escape-Rate*:

$$\kappa = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \gamma_n. \quad (3.8)$$

Bei offenen Systemen, in denen KAM-Tori und chaotische Bereiche koexistieren, kann die Abnahme von  $\gamma_n$  asymptotisch einem Potenzgesetz gehorchen,  $\gamma_n \sim n^{-\alpha}$  für große  $n$ , was formal  $\kappa = 0$  bedeutet. Dieses Verhalten ist eine Folge davon, daß die Instabilität von Trajektorien in der Nähe der KAM-Tori beliebig gering wird. Deswegen bleiben Trajektorien in der Nachbarschaft von KAM-Tori dort für lange Zeit „kleben“ [GraKan85].

Numerisch läßt sich die Escape-Rate nur näherungsweise ermitteln, nämlich durch Berechnung von  $-(\ln \gamma_n)/n$  für ein endliches  $n$ , oder, alternativ, durch Berechnung von  $\ln(\gamma_{n-1}/\gamma_n)$ . Es gibt jedoch einen Weg,  $\kappa$  im Prinzip exakt zu bestimmen.

Die Escape-Rate steht in Verbindung mit einem Entwicklungsoperator, dem *Perron-Frobenius-Operator*  $\mathcal{L}^n$ . Der hochgestellte Index  $n$  stellt ein diskretes Zeitargument dar. Der Perron-Frobenius-Operator ist ein Integraloperator, der auf eine beschränkte, auf  $\mathcal{M}$  definierte skalare Dichtefunktion  $h(x)$  in der folgenden Weise wirkt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n h(y) &= \int_{\mathcal{M}} dx \delta(y - f^n(x)) h(x) \\ &= \sum_{\{x \in f^{-n}(y)\}} \frac{h(x)}{|\det Df^n(x)|}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Summiert wird hier über alle  $x$ , die Urbilder von  $y$  unter  $f^n$  sind. Der Perron-Frobenius-Operator beschreibt die Zeitentwicklung der Dichte  $h(x)$ , wenn diese der Dynamik unterworfen wird. Die Dichte  $\mathcal{L}^n h(x)$  entsteht, indem  $h(x)$  durch  $n$ -fache Iteration von  $f$  weitertransportiert wird, und zwar so, daß „die Masse erhalten bleibt“. Mit Hilfe der Formel für Variablentransformationen bei mehrdimensionalen Integralen,

$$\int_{\gamma(S)} \phi(x) dx = \int_S \phi(\gamma(x)) \det D\gamma(x) dx, \quad (3.10)$$

kann man nämlich zeigen, daß für geschlossene Systeme

$$\int_{\mathcal{A}} h(x) dx = \int_{f^n(\mathcal{A})} \mathcal{L}^n h(x) dx \quad (3.11)$$

für alle  $n$  und beliebige Teilmengen  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{M}$  gilt, egal, ob  $f$  phasenraumvolumenerhaltend ( $|\det Df| = 1$ ) ist oder nicht. Das entspricht der Tatsache, daß in geschlossenen Systemen Orbits weder „erzeugt“ noch „vernichtet“ werden. Besitzt beispielsweise  $f^n(\mathcal{A})$  ein kleineres Volumen als  $\mathcal{A}$ , so wird dies durch eine „Verdichtung“ von  $h(x)$  unter der Wirkung von  $\mathcal{L}^n$  kompensiert.

Bei offenen Systemen hingegen findet ein „Massenverlust“ von  $h(x)$  unter der Wirkung von  $\mathcal{L}^n$  durch das Entweichen von Trajektorien statt, aber nur dadurch.

Da  $\mathcal{L}^n$  also einen Transport von Dichteveilungen durch  $n$ -fache Iteration von  $f$  bewirkt, besagt der hochgestellte Index  $n$ , daß die Anwendung von  $\mathcal{L}^n$  gleichbedeutend mit der  $n$ -fachen Anwendung von  $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$  ist.  $\mathcal{L}^n$  ist also tatsächlich die  $n$ -te Potenz von  $\mathcal{L}$ , was äquivalent zu folgender Halbgruppeneigenschaft ist:

$$\mathcal{L}^{n_1+n_2} = \mathcal{L}^{n_1} \mathcal{L}^{n_2}. \quad (3.12)$$

Das läßt sich auch formal beweisen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n_1} \mathcal{L}^{n_2} h(z) &= \int_{\mathcal{M}} dy \delta(z - f^{n_1}(y)) \mathcal{L}^{n_2} h(y) \\ &= \int_{\mathcal{M}} dy \delta(z - f^{n_1}(y)) \int_{\mathcal{M}} dx \delta(y - f^{n_2}(x)) h(x) \\ &= \int_{\mathcal{M}} dx \delta(z - f^{n_1}(f^{n_2}(x))) h(x) \\ &= \int_{\mathcal{M}} dx \delta(z - f^{n_1+n_2}(x)) h(x) \\ &= \mathcal{L}^{n_1+n_2} h(z). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Damit ist (3.12) gezeigt.

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen  $\kappa$  und  $\mathcal{L}$ ? Um dies zu beantworten, ist das Eigenwertproblem von  $\mathcal{L}$  zu betrachten:

$$\mathcal{L} \varphi_\alpha(y) = \lambda_\alpha \varphi_\alpha(y). \quad (3.14)$$

Hierbei seien die Eigenwerte  $\lambda_\alpha$  nach abnehmendem Betrag sortiert. Es sei  $\lambda_0$  der „führende Eigenwert“ von  $\mathcal{L}$ , d. h. derjenige Eigenwert, der maximalen Betrag besitzt und außerdem positiv reell ist. Dann gilt:

$$\lambda_0 = e^{-\kappa}. \quad (3.15)$$

In der Literatur [Cvi+01] wird diese Aussage folgendermaßen begründet: Mit (3.9) läßt sich (3.6) schreiben als

$$\gamma_n = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \int_{\mathcal{M}} dy \mathcal{L}^n i(y), \quad (3.16)$$

wobei  $i(x) = 1 \forall x \in \mathcal{M}$  ist. Diese Funktion wird nach den Eigenfunktionen  $\varphi_\alpha$  von  $\mathcal{L}$  zu den Eigenwerten  $\lambda_\alpha$  entwickelt:

$$i(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha \varphi_\alpha(x). \quad (3.17)$$

Damit erhält man

$$\gamma_n = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha \lambda_\alpha^n \int_{\mathcal{M}} \varphi_\alpha(y) dy. \quad (3.18)$$

Wenn  $n$  groß ist, wird dieser Ausdruck durch den führenden Eigenwert von  $\mathcal{L}$  dominiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = C \lambda_0^n \quad (3.19)$$

mit einer Konstanten  $C$ . Mit (3.8) folgt die Behauptung (3.15).

Gegen diese Argumentation sind Einwände angebracht. Die Eigenfunktionen  $\varphi_\alpha$  müssen wegen (3.9) und (3.14) die Gleichung

$$\int_{\mathcal{M}} dx \delta(y - f^n(x)) \varphi_\alpha(x) = \lambda_\alpha^n \varphi_\alpha(y) \quad (3.20)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllen. Daran sieht man, daß die Funktionen  $\varphi_\alpha(y)$  nur für diejenigen  $y$ , die ein Urbild unter  $f^n$  in  $\mathcal{M}$  besitzen, von null verschiedene Werte annehmen können, also für die  $y$  aus der Menge  $\bigcap_{k=0}^n f^k(\mathcal{M})$ . Da dies für alle  $n$  gilt, müssen die  $\varphi_\alpha$  auf der Menge  $\bigcap_{k=0}^\infty f^k(\mathcal{M})$  konzentriert sein. Für rein expandierende Abbildungen ist  $\bigcap_{k=0}^\infty f^k(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ . Bei einem zweidimensionalem System mit einer kontrahierenden und einer expandierenden Richtung, wie z. B. dem Zweimuldensystem, gibt es jedoch Punkte in  $\mathcal{M}$ , die kein Urbild unter  $f^n$  in  $\mathcal{M}$  besitzen. Die Menge  $\bigcap_{k=0}^\infty f^k(\mathcal{M})$  ist dann sogar nur eine sehr kleine Teilmenge von  $\mathcal{M}$ , nämlich die instabile Mannigfaltigkeit der invarianten Menge von  $f$ , vgl. Abschnitt 2.2. In diesem Falle kann man keinesfalls die Funktion  $i(x) = 1$  auf  $\mathcal{M}$  nach den  $\varphi_\alpha$  entwickeln.

Darüberhinaus stellt sich (auch in geschlossenen Systemen) die Frage, ob die Eigenfunktionen von  $\mathcal{L}$  ein vollständiges System im Raum der Funktionen, auf die man  $\mathcal{L}$  wirken läßt, bilden.

Ein anderes Problem ist die Frage, ob wirklich garantiert ist, daß der Koeffizient  $c_0$  in der Entwicklung (3.17) ungleich null ist. Ansonsten könnte es vorkommen, daß (3.18) nicht durch den führenden Eigenwert von  $\mathcal{L}$  dominiert wird, sondern durch den Eigenwert  $\lambda_\alpha$  mit dem kleinsten  $\alpha$ , für das  $c_\alpha \neq 0$  ist.

Des Weiteren wurde in der obigen Argumentation vorausgesetzt, daß es zwar mehrere Eigenwerte von maximalem Betrage geben kann, von diesen aber nur einen einzigen, dessen Eigenfunktion in der Entwicklung (3.17) einen nichtverschwindenden Koeffizienten besitzt. Dieser Eigenwert  $\lambda_0$  muß außerdem positiv reell sein, da  $\kappa$  positiv ist. Ferner wurde angenommen, daß die Menge  $\{\lambda_\alpha\}$  der Eigenwerte abzählbar ist.

Es wird von nun an aber davon ausgegangen, daß sich die Bedenken aus der Welt schaffen lassen, daß also die oben durchgeführten Manipulationen zumindest „im Prinzip“ gültig sind. Diese sind als eine Art Skizze zu verstehen. Ein Versuch, dies plausibel zu machen, wird in Anhang B mit Hilfe einer *Matrixdarstellung* vom  $\mathcal{L}$  unternommen.

In der „Bedenkenliste“ war bereits von Voraussetzungen an das Eigenwertspektrum von  $\mathcal{L}$  die Rede. Um die Theorie weiter entwickeln zu können, müssen diese

Forderungen in einer noch etwas weitergehenden Form als erfüllt angesehen werden. Vom Eigenwertspektrum  $\{\lambda_\alpha\}$  wird folgendes verlangt:

1.  $\{\lambda_\alpha\}$  ist abzählbar.
2.  $\lambda_0$  ist positiv reell und der einzige Eigenwert von maximalem Betrage, dessen Eigenfunktion in der Entwicklung (3.17) einen nichtverschwindenden Koeffizienten besitzt.
3.  $\sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda_\alpha$  konvergiert absolut.

Die dritte Voraussetzung wird in den Abschnitten 3.3 und 3.4 gebraucht. Aus ihr folgt u. a., daß nur 0 ein Häufungspunkt von  $\{\lambda_\alpha\}$  ist.

Diese Voraussetzungen für ein gegebenes System zu beweisen, stellt im allgemeinen ein schwieriges Problem dar. Der Beweis gelingt in einigen Fällen einfacher eindimensionaler Abbildungen, aber auch für eine spezielle Klasse mehrdimensionaler Abbildungen mit expandierenden und kontrahierenden Richtungen, den sog. *analytisch hyperbolischen Abbildungen*, siehe [RugCvi00] sowie [Rug92]. Zu zeigen, ob das Zweimuldensystem zu dieser Klasse gehört, ist im Rahmen dieser Arbeit nicht gelungen. In Anhang B wird jedoch für das Zweimuldensystem mit numerischer Unterstützung ein „Beweis“ von Voraussetzung 2 erbracht.

Da jedoch die Theorie der periodischen Orbits bereits bei einer Vielzahl hyperbolischer chaotischer Systeme, deren Symbolische Dynamik jeweils nur endlich viele Verbotsregeln für Symbolfolgen (sog. *Pruning-Regeln*) besitzt, erfolgreich angewandt worden ist, liegt die Vermutung nahe, daß die genannten Forderungen an das Eigenwertspektrum bei solchen Systemen stets erfüllt sind.

Die Beschaffenheit des Eigenwertspektrums von  $\mathcal{L}$  hängt in entscheidender Weise davon ab, welcher Raum von Funktionen, auf die man  $\mathcal{L}$  wirken läßt, gewählt wird. Das Problem, festzustellen, ob das Eigenwertspektrum die gewünschten Eigenschaften besitzt, ist also in erster Linie ein Problem, einen geeigneten Funktionenraum zu finden. Erhält man beispielsweise nach Wahl eines Funktionenraumes ein überabzählbares Spektrum, so kann man möglicherweise durch Verkleinerung des Funktionenraumes zu einem abzählbaren Spektrum gelangen. Vergleiche hierzu wiederum [RugCvi00].

Jedoch ist, wie in Abschnitt 3.3 klar wird, für die Auswertung des Eigenwertspektrums die genaue Kenntnis des zugrundeliegenden Funktionenraumes nicht erforderlich. Es muß lediglich die Existenz irgendeines Funktionenraumes vorausgesetzt werden, der so beschaffen ist, daß die geforderten Eigenschaften des Eigenwertspektrums gegeben sind.

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man also die Escape-Rate berechnen, indem man den führenden Eigenwert  $\lambda_0$  des Perron-Frobenius-Operators  $\mathcal{L}$  bestimmt. Bei hart chaotischen offenen Systemen ist stets  $\kappa > 0$ , somit  $\lambda_0 < 1$  zu

erwarten. Für geschlossene Systeme gibt es freilich nicht viel zu berechnen, für solche gilt  $\kappa = 0$  und damit  $\lambda_0 = 1$ .

### 3.2.2 Korrelationsfunktionen

Als *Observable* bezeichnet man eine Funktion, die auf dem Phasenraum definiert ist. In den meisten Fällen betrachtet man Abbildungen des Phasenraumes auf die reellen Zahlen, es spricht jedoch nichts dagegen, auch vektor- oder tensorwertige Observablen zu definieren.

Eine wichtige Rolle bei der Analyse dynamischer Systeme spielen die *Zeitkorrelationen* zwischen Observablen. Diese sind nicht nur unter gewissen Voraussetzungen theoretisch berechenbar, sondern auch häufig in Laborversuchen oder numerischen Simulationen meßbar.

Üblicherweise untersucht man die Fourier-Transformierte einer Zeitkorrelationsfunktion. Dazu wird häufig die *Autokorrelationsfunktion* einer Observablen  $a(x)$  verwandt. Deren Fourier-Transformierte (als Funktion reeller Frequenzen  $\omega$  betrachtet) ist, wie aus einem Satz von WIENER und KHINTCHINE folgt, gleich dem *Leistungsspektrum* des „Signals“  $n \rightarrow a(f^n(x))$  [EckRue85, Rue86]. Diskrete Peaks im Leistungsspektrum deuten auf periodisches oder quasiperiodisches Verhalten des untersuchten Systems hin. Ein breitbandiges Spektrum hingegen bedeutet, daß es sich bei dem Signal um ein Rauschen handelt. Das ist ein Indikator für chaotisches Verhalten.

Eine weitere Möglichkeit der Analyse ist, die Fourier-Transformierte einer Zeitkorrelationsfunktion als Funktion komplexer Frequenzen  $\omega$  zu untersuchen. Die Fourier-Transformierte stimmt innerhalb ihres Konvergenzgebietes mit einer Funktion überein, die Pole in der komplexen  $\omega$ -Ebene besitzt. Deren Residuen hängen von der Wahl der Observablen ab, jedoch nicht die Lage der Pole. Man bezeichnet die Pole als die (klassischen) *Resonanzen* des Systems [Rue86]. Ähnlich der Charakterisierung eines quantenmechanischen Systems durch das Spektrum seiner Energieniveaus eignen sich die Resonanzen zur Charakterisierung eines klassischen dynamischen Systems.

Als Beispiel betrachte man den Fluß eines gebundenen integrablen Hamilton-Systems mit  $n$  Freiheitsgraden. Die zeitliche Entwicklung eines solchen Systems ist nach einem Theorem von LIOUVILLE [Arn78] diffeomorph zu einer quasiperiodischen Bewegung auf einem  $n$ -Torus. Eine zugehörige Zeitkorrelationsfunktion wird dann ebenfalls quasiperiodisches Verhalten aufweisen. Sie setzt sich additiv aus periodischen Anteilen zusammen, was die Periodizität der Bewegung in jeder einzelnen Dimension des Torus wiederspiegelt. Die Resonanzen eines gebundenen integrablen Systems befinden sich daher allesamt auf der reellen Achse, nämlich

bei den Frequenzen, die zu den einzelnen periodischen Anteilen der Korrelationsfunktion gehören [Rug92].

Bei einem nichtintegrablen System müssen sich die Resonanzen nicht mehr auf der reellen Achse befinden. Ist eine Resonanzfrequenz  $\omega$  komplex mit positivem Imaginärteil, so bedeutet dies einen exponentiellen Zerfall des zugehörigen, mit der Frequenz  $\text{Re } \omega$  oszillierenden Anteils der Korrelationsfunktion. Wie noch gezeigt wird, hängt die Zerfallsrate  $\lambda$  mit  $\omega$  durch die Gleichung  $\lambda = e^{i\omega}$  zusammen. Die Menge der Zerfallsraten bezeichnet man als *Korrelationsspektrum*.

Für ein chaotisches System ist ein Zerfall der Korrelationen zu erwarten, denn er spiegelt den Informationsverlust während der Zeitentwicklung des Systems wieder. Man kann die Distanz der Resonanzen von der reellen Achse als ein Maß für die Chaotizität eines Systems ansehen.

In den folgenden Ausführungen geht es darum, einen Zusammenhang zwischen den Resonanzen eines Systems und dem Eigenwertspektrum des Perron-Frobenius-Operators  $\mathcal{L}$  herzustellen.

Bei der Definition der Zeitkorrelationsfunktion ist zwischen geschlossenen und offenen Systemen zu unterscheiden. Für ein *geschlossenes System* und zwei Observablen  $a$  und  $b$  ist die Zeitkorrelationsfunktion entlang des Orbits  $x_k = f^k(\xi)$  für  $n \geq 0$  definiert durch

$$C_{a,b}(n, \xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a(f^{n+k}(\xi))b(f^k(\xi)). \quad (3.21)$$

Ist  $a = b$ , so handelt es sich um eine *Autokorrelationsfunktion* (siehe oben).

Besitzt das geschlossene System ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\rho(x)dx$  und ist das System ergodisch bezüglich dieses Maßes, so ist die obige Zeitmittelung der Observablen  $a(f^n(\xi))b(\xi)$  unabhängig von  $\xi$  (abgesehen von einer Menge vom Maße 0) und kann durch das Scharmittel ersetzt werden:

$$C_{a,b}(n) = \int_{\mathcal{M}} dx \rho(x) a(f^n(x))b(x). \quad (3.22)$$

Definiert man bei einem *offenen System* die Zeitkorrelationsfunktion wie in (3.21), dann ist der Startwert  $\xi$  aus der Menge

$$\mathcal{M}_{-}^{\infty} = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(\mathcal{M}), \quad (3.23)$$

der stabilen Mannigfaltigkeit der invarianten Menge, vgl. Abschnitt 2.2, zu wählen. Das zum System gehörige ergodische Maß ist auf der invarianten Menge

konzentriert, somit nicht durch eine auf  $\mathcal{M}$  stetige Dichtefunktion  $\rho(x)$  gegeben. Es ist daher üblich, die Korrelationsfunktion für offene Systeme durch ein „Streuexperiment“ mit einer stetigen Anfangsverteilung  $\rho(x)$  auf  $\mathcal{M}$  zu definieren, um transientes Verhalten zu untersuchen [Rug92]:

$$C_{a,b,\rho}(n) = \int_{\mathcal{M}_-^n} dx \rho(x) a(f^n(x)) b(x), \quad (3.24)$$

mit

$$\mathcal{M}_-^n = \bigcap_{k=0}^n f^{-k}(\mathcal{M}). \quad (3.25)$$

Die so definierte Korrelationsfunktion ist, im Gegensatz zu (3.21), numerischen Experimenten gegenüber leicht zugänglich. Sie unterscheidet sich von (3.22) formal nur durch den Integrationsbereich. Die nun folgenden Manipulationen, die an (3.24) vorgenommen werden, sind auch für (3.22) zulässig.

Da jeder Punkt aus  $\mathcal{M}_-^n$  ein Bild unter  $f^n$  in  $\mathcal{M}$  besitzt, lässt sich (3.24) folgendermaßen umschreiben:

$$C_{a,b,\rho}(n) = \int_{\mathcal{M}_-^n} dx \int_{\mathcal{M}} dy a(y) \delta(y - f^n(x)) b(x) \rho(x). \quad (3.26)$$

Der Bereich der  $dx$ -Integration kann nun auf ganz  $\mathcal{M}$  ausgedehnt werden, da ohnehin nur die Punkte aus  $\mathcal{M}_-^n$  Beiträge liefern:

$$C_{a,b,\rho}(n) = \int_{\mathcal{M}} dx \int_{\mathcal{M}} dy a(y) \delta(y - f^n(x)) b(x) \rho(x). \quad (3.27)$$

In dieser Gleichung erkennt man den Perron-Frobenius-Operator (3.9) wieder:

$$C_{a,b,\rho}(n) = \int_{\mathcal{M}} dy a(y) \mathcal{L}^n b(y) \rho(y). \quad (3.28)$$

Analog der Vorgehensweise im vorigen Unterabschnitt, entwickelt man nun die Funktion  $b(x)\rho(x)$  nach den Eigenfunktionen von  $\mathcal{L}$ , wobei es auch hier die genannten Bedenken gibt:

$$b(x)\rho(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x). \quad (3.29)$$

Damit folgt für die Korrelationsfunktion:

$$C_{a,b,\rho}(n) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_{\alpha} \lambda_{\alpha}^n \int_{\mathcal{M}} dy a(y) \varphi_{\alpha}(y). \quad (3.30)$$

Es liegt also, sofern  $|\lambda_\alpha| < 1$  für alle  $\alpha$  gilt, ein exponentieller Zerfall der Korrelationen vor, wobei die (Beträge der)  $\lambda_\alpha$  die Zerfallsraten sind. Das Korrelationsspektrum ist daher durch die Eigenwerte von  $\mathcal{L}$  gegeben.

Oszillierende Anteile der Korrelationsfunktion beruhen auf komplex konjugierten Paaren von Eigenwerten (da  $C_{a,b,\rho}(n)$  für reellwertige Observablen nur reelle Werte annimmt, können die Eigenwerte von  $\mathcal{L}$  nur reell sein oder in komplex konjugierten Paaren auftreten), oder auf Eigenwerte, die auf der negativen reellen Achse liegen. Die Frequenz der Oszillation ist gleich der Phase der komplexen Eigenwerte. Die größtmögliche Frequenz liegt vor, wenn die Phase eines Eigenwertes den Wert  $\pi$  annimmt, d. h. der Eigenwert negativ reell ist. Der entsprechende oszillierende Anteil der Korrelationsfunktion ändert dann bei jeder Erhöhung von  $n$  um 1 das Vorzeichen.

Der am Anfang dieses Unterabschnitts erwähnte Zusammenhang zwischen den Zerfallsraten und zugehörigen Resonanzen wird zum Schluß behandelt.

Bei hart chaotischen offenen Systemen ist  $|\lambda_\alpha| < 1$  tatsächlich für alle  $\alpha$  erfüllt, denn es ist  $\lambda_0 < 1$ . In diesem Falle wird für große  $n$  der Zerfall der Korrelationen durch  $\lambda_0$  dominiert.

Bei geschlossenen Systemen hingegen gilt  $\lambda_0 = 1$ . Daher strebt die Korrelationsfunktion für große  $n$  nicht gegen 0, sondern gegen den unkorrelierten Grenzwert  $\langle a \rangle \langle b \rangle$ , das Produkt der Scharmittelwerte von  $a$  und  $b$  (dieser Grenzwert wird in der Regel bei der Definition von der Korrelationsfunktion subtrahiert). Die Geschwindigkeit der Konvergenz wird asymptotisch durch den zweitgrößten Eigenwert  $\lambda_1$  bestimmt. Dies wird nun näher begründet.

Zunächst wird folgendes gezeigt: Da die invariante Dichte  $\rho(x)$  eines geschlossenen Systems sich unter der Dynamik nicht ändert, ist sie gerade gleich der Eigenfunktion  $\varphi_0(x)$  von  $\mathcal{L}$  zum Eigenwert  $\lambda_0 = 1$ . Für eine beliebige Teilmenge  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{M}$  und das invariante Maß  $d\mu(x) = \rho(x)dx$  gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}} \rho(x)dx &= \mu(\mathcal{A}) \\
&= \mu(f^{-1}(\mathcal{A})) \\
&= \int_{f^{-1}(\mathcal{A})} \rho(x)dx \\
&= \int_{\mathcal{A}} dx \sum_{\{y \in f^{-1}(x)\}} \frac{\rho(y)}{|\det Df(y)|} \\
&= \int_{\mathcal{A}} dx \int_{\mathcal{M}} dy \delta(x - f(y))\rho(y) \\
&= \int_{\mathcal{A}} \mathcal{L}\rho(x)dx.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Die Determinante in der vierten Zeile tritt infolge der Koordinatentransformation auf. Da  $\mathcal{A}$  beliebig ist, muß

$$\mathcal{L}\rho(x) = \rho(x) \quad (3.32)$$

gelten und somit

$$\varphi_0(x) = \rho(x), \quad (3.33)$$

was zu zeigen war.

Mit Hilfe von (3.33) und mit dem Scharmittelwert von  $a$ ,

$$\langle a \rangle = \int_{\mathcal{M}} dy a(y)\rho(y), \quad (3.34)$$

folgt aus (3.30) für die Korrelationsfunktion für geschlossene Systeme:

$$C_{a,b}(n) = c_0 \langle a \rangle + \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{\alpha} \lambda_{\alpha}^n \int_{\mathcal{M}} dy a(y) \varphi_{\alpha}(y). \quad (3.35)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite konvergiert, da  $|\lambda_{\alpha}| < 1$  für  $\alpha \geq 1$  gilt, für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0, und zwar asymptotisch mit der Zerfallsrate  $\lambda_1$ .

Nun ist nur noch  $c_0 = \langle b \rangle$  zu zeigen. Aus (3.29) folgt

$$\int_{\mathcal{M}} dx b(x)\rho(x) = \int_{\mathcal{M}} dx \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x). \quad (3.36)$$

Aufgrund von (3.33) und  $\int_{\mathcal{M}} \rho(x)dx = 1$  ergibt sich hieraus

$$\langle b \rangle = c_0 + \int_{\mathcal{M}} dx \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x). \quad (3.37)$$

Für das Integral gilt wegen (3.11) für alle  $n$  jedoch folgendes:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} dx \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x) &= \int_{f^n(\mathcal{M})} dx \mathcal{L}^n \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{\alpha} \lambda_{\alpha}^n \int_{f^n(\mathcal{M})} \varphi_{\alpha}(x) dx \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die linke Seite ist unabhängig von  $n$  und daher null. Es ist also  $c_0 = \langle b \rangle$ , und die Korrelationsfunktion für geschlossene Systeme lautet

$$C_{a,b}(n) = \langle a \rangle \langle b \rangle + \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{\alpha} \lambda_{\alpha}^n \int_{\mathcal{M}} dy a(y) \varphi_{\alpha}(y). \quad (3.39)$$

Sie konvergiert, wie behauptet, für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\langle a \rangle \langle b \rangle$ , asymptotisch mit der Zerfallsrate  $\lambda_1$ .

Das *Resonanzspektrum* erhält man aus der (diskreten) Fourier-Transformierten  $\hat{C}_{a,b,\rho}(\omega)$  von (3.30), die eine  $2\pi$ -periodische Funktion auf  $\mathbb{C}$  ist und folgende Gestalt besitzt:

$$\begin{aligned}\hat{C}_{a,b,\rho}(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{a,b,\rho}(n) e^{-i\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} d_{\alpha}(a, b, \rho) \lambda_{\alpha}^n e^{-i\omega n} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{d_{\alpha}(a, b, \rho)}{1 - \lambda_{\alpha} e^{-i\omega}}.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Voraussetzung ist allerdings, daß  $\operatorname{Im} \omega < |\lambda_{\alpha}^{-1}|$  für alle  $\alpha$  gilt, da die Fourier-Reihe sonst divergiert. Die Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn  $\operatorname{Im} \omega < |\lambda_0^{-1}|$  ist. In dem dadurch vorgegebenen  $\omega$ -Bereich stimmt die Fourier-Transformierte von  $C_{a,b,\rho}(n)$ , wie am Anfang dieses Unterabschnittes behauptet, mit einer Funktion überein, die Pole bei denjenigen  $\omega_{\alpha,k}$  besitzt, für die

$$\lambda_{\alpha} = e^{i\omega_{\alpha,k}}\tag{3.41}$$

gilt. Mit  $\lambda_{\alpha} = |\lambda_{\alpha}| e^{i\phi_{\alpha}}$  folgt daraus:

$$\omega_{\alpha,k} = -\phi_{\alpha} - i \ln |\lambda_{\alpha}| + 2\pi k.\tag{3.42}$$

Die  $\omega_{\alpha,k}$  sind intrinsische Größen des betrachteten dynamischen Systems, nämlich dessen Resonanzen. Nur die Residuen der Pole hängen von den gewählten Observablen  $a, b$  sowie von der Verteilungsfunktion  $\rho$  ab. Im Falle eines geschlossenen Systems erhält man, sofern der Grenzwert  $\langle a \rangle \langle b \rangle$  nicht von der Korrelationsfunktion subtrahiert wird, aufgrund von  $\lambda_0 = 1$  eine Resonanz im Ursprung.

Falls die Phase  $\phi_{\alpha}$  aus dem Intervall  $]-\pi, \pi]$  gewählt wird, gibt  $\operatorname{Re} \omega_{\alpha,0}$  die Oszillationsfrequenz des zum Eigenwert  $\lambda_{\alpha}$  gehörenden Anteils der Korrelationsfunktion (3.30) an. In jedem Fall ist jedoch der Exponent, der die Zerfallsgeschwindigkeit des Anteils bestimmt, durch  $\operatorname{Im} \omega_{\alpha,k}, k$  beliebig, gegeben.

Da alle Resonanzen außerhalb des Konvergenzgebietes von  $\hat{C}_{a,b,\rho}(\omega)$  liegen, ist deren Bestimmung durch numerische Berechnung der Korrelationsfunktion  $C_{a,b,\rho}(n)$  und anschließende Fourier-Transformation nicht ohne weiteres möglich. Vielmehr lassen sich die Resonanzen durch Berechnung der  $\lambda_{\alpha}$ , der Eigenwerte von  $\mathcal{L}$ , ermitteln.

### 3.2.3 Dynamische Mittelungen

In diesem Unterabschnitt geht es um die Berechnung zeitlicher Mittelwerte von Observablen, also um Mittelungen der Observablen entlang von Orbits. Ist das betrachtete System ergodisch, so ist der Zeitmittelwert für fast alle Startwerte gleich. Das Ergebnis ändert sich dann nicht, wenn man über ein Ensemble von Startwerten mittelt. Genau diese Tatsache macht man sich zu Nutze, um die zeitlichen Mittelwerte von Observablen im Rahmen der Theorie der periodischen Orbits zu errechnen.

Für einen Startwert  $x$  aus der Menge  $\mathcal{M}_-^{n-1}$ , siehe (3.25), und eine Observable  $a$  wird die Größe

$$A^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a(f^k(x)) \quad (3.43)$$

als „integrierte“ Observable bezeichnet. Liegt  $x$  sogar in  $\mathcal{M}_-^\infty$ , vgl. (3.23), so ist

$$\overline{a(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} A^n(x). \quad (3.44)$$

der zeitliche Mittelwert von  $a$ , abhängig vom Startwert  $x$ .

Die Auswertung eines solchen  $x$ -abhängigen Zeitmittelwertes ist aber in chaotischen Systemen in der Praxis nicht korrekt durchführbar; man müßte ja einen Orbit unendlich lange präzise verfolgen können. Im folgenden wird jedoch Ergodizität des betrachteten Systems vorausgesetzt. Daher ist

$$\overline{a(x)} = \langle a \rangle \quad \text{für fast alle } x \in M, \quad (3.45)$$

wobei  $M$  die invariante Menge des Systems ist. Das motiviert die Einführung des *Erwartungswertes* von  $a$ . Dieser ist durch Mittelung der  $x$ -abhängigen Zeitmittelwerte über alle  $x$  aus  $\mathcal{M}_-^\infty$  definiert:

$$\overline{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{M}_-^n|} \frac{1}{n} \int_{\mathcal{M}_-^n} A^n(x) dx, \quad (3.46)$$

mit

$$|\mathcal{M}_-^n| = \int_{\mathcal{M}_-^n} dx, \quad (3.47)$$

dem Volumen von  $\mathcal{M}_-^n$ . Bei einem geschlossenen System ist  $\mathcal{M}_-^\infty = \mathcal{M}$ . Gilt  $M = \mathcal{M}$ , dann ist aufgrund der Ergodizität  $\overline{a} = \langle a \rangle$ , und damit, wegen (3.45),

$$\overline{a(x)} = \overline{a} \quad \text{für fast alle } x \in \mathcal{M}_-^\infty. \quad (3.48)$$

Es ist aber auch bei einem offenen ergodischen System mit kontrahierenden und expandierenden Richtungen zu erwarten, daß (3.48) gilt, obwohl dessen invariante

Menge  $M$  nur eine kleine Teilmenge von  $\mathcal{M}_-^\infty$  ist.  $\mathcal{M}_-^\infty$  ist die stabile Mannigfaltigkeit von  $M$ . Jeder Orbit, der in  $\mathcal{M}_-^\infty$  startet, kommt im Laufe der Zeit jeweils einem Orbit auf  $M$  beliebig nahe. Fast jeder dieser Orbits auf  $M$  besitzt die Eigenschaft, daß  $\overline{a(x)} = \langle a \rangle$  gilt, wenn  $x$  ein Punkt des Orbits ist. Daher wird, wenn  $a$  stetig ist, die Abweichung des Zeitmittelwertes von  $a$  bezüglich fast aller in  $\mathcal{M}_-^\infty$  startenden Orbits vom Scharmittelwert  $\langle a \rangle$ , der auf der invarianten Menge gilt, beliebig klein, d. h. es gilt  $\overline{a(x)} = \langle a \rangle$  für fast alle  $x \in \mathcal{M}_-^\infty$ . Aus dem gleichen Grunde gilt aber auch  $\overline{a} = \langle a \rangle$ , und damit (3.48).

Es entsteht also fast nie ein Fehler, wenn man anstelle eines Zeitmittelwertes  $\overline{a(x)}$  den Erwartungswert  $\overline{a}$  berechnet. Eine direkte numerische Berechnung gemäß der Definition (3.46) ist jedoch, genauso wie im Falle der Escape-Rate, nur näherungsweise möglich, nämlich durch Auswertung des Terms auf der rechten Seite für ein endliches  $n$ .

Es gibt aber auch hier eine Möglichkeit,  $\overline{a}$  präzise zu ermitteln. Man kann  $\overline{a}$  nämlich in Zusammenhang mit einem Entwicklungsoperator bringen. Hierzu führt man eine Hilfsvariable  $\beta$  ein und betrachtet räumliche Mittelungen der Form

$$\langle e^{\beta \cdot A^n} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{M}_-^n|} \int_{\mathcal{M}_-^n} dx e^{\beta \cdot A^n(x)}. \quad (3.49)$$

Mit  $\langle \dots \rangle$  ist hier kein Scharmittelwert gemeint. Je nach Beschaffenheit der Observablen  $a$  ist  $\beta$  ebenfalls ein Skalar, Vektor oder Tensor. Da jeder Punkt  $x \in \mathcal{M}_-^n$  unter  $f^n$  ein Bild in  $\mathcal{M}$  besitzt, kann (3.49) wie folgt umgeschrieben werden (vgl.(3.26)):

$$\langle e^{\beta \cdot A^n} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{M}_-^n|} \int_{\mathcal{M}_-^n} dx \int_{\mathcal{M}} dy \delta(y - f^n(x)) e^{\beta \cdot A^n(x)}. \quad (3.50)$$

Auch hier kann der  $dx$ -Integrationsbereich auf ganz  $\mathcal{M}$  erweitert werden:

$$\langle e^{\beta \cdot A^n} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{M}_-^n|} \int_{\mathcal{M}} dx \int_{\mathcal{M}} dy \delta(y - f^n(x)) e^{\beta \cdot A^n(x)}. \quad (3.51)$$

In dieser Gleichung tritt ein neuer Entwicklungsoperator  $\mathcal{L}_\beta^n$  auf, der auf eine Funktion  $h(x)$  wie folgt wirkt:

$$\mathcal{L}_\beta^n h(y) = \int_{\mathcal{M}} dx \delta(y - f^n(x)) e^{\beta \cdot A^n(x)} h(x). \quad (3.52)$$

Dieser Operator geht für  $\beta = 0$  in den Perron-Frobenius-Operator über. Mit diesem Entwicklungsoperator und der Funktion  $i(x) = 1$  erhält man

$$\langle e^{\beta \cdot A^n} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{M}_-^n|} \int_{\mathcal{M}} dy \mathcal{L}_\beta^n i(y). \quad (3.53)$$

Wegen (3.6) gilt

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}_-^n| &= \int_{\mathcal{M}_-^n} dx \\
 &= \int_{\mathcal{M}_-^n} dx \int_{\mathcal{M}} dy \delta(y - f^n(x)) \\
 &= \int_{\mathcal{M}} dx \int_{\mathcal{M}} dy \delta(y - f^n(x)) \\
 &= |\mathcal{M}| \gamma_n.
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Daher ist

$$\langle e^{\beta \cdot A^n} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{M}| \gamma_n} \int_{\mathcal{M}} dy \mathcal{L}_\beta^n i(y). \tag{3.55}$$

Nun wird (mit den üblichen Bedenken) die Funktion  $i(x)$  nach den Eigenfunktionen  $\varphi_\alpha(\beta, x)$  von  $\mathcal{L}_\beta$  zu den Eigenwerten  $\lambda_\alpha(\beta)$  entwickelt,

$$i(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha \varphi_\alpha(\beta, x), \tag{3.56}$$

und man erhält

$$\langle e^{\beta \cdot A^n} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{M}| \gamma_n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha \lambda_\alpha^n(\beta) \int_{\mathcal{M}} \varphi_\alpha(\beta, x) dy. \tag{3.57}$$

Da  $\gamma_n$  für große  $n$  proportional zu  $e^{-\kappa n}$  ist, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle e^{\beta \cdot A^n} \rangle = C \tilde{z}^n(\beta) \tag{3.58}$$

mit

$$\tilde{z}(\beta) = e^\kappa \lambda_0(\beta) \tag{3.59}$$

und einer Konstanten  $C$ . Es ist also

$$\ln \tilde{z}(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \langle e^{\beta \cdot A^n} \rangle. \tag{3.60}$$

Leitet man diese Gleichung an der Stelle  $\beta = 0$  nach  $\beta$  ab, so wird endlich klar, warum die Größe  $\langle e^{\beta \cdot A^n} \rangle$  betrachtet wurde:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \tilde{z}(\beta) \right|_{\beta=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \beta} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \langle e^{\beta \cdot A^n} \rangle \right|_{\beta=0} \\
 &= \left. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial \beta} e^{\beta \cdot A^n} \right\rangle}{\langle e^{\beta \cdot A^n} \rangle} \right|_{\beta=0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \langle A^n \rangle \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{M}_-^n|} \frac{1}{n} \int_{\mathcal{M}_-^n} A^n(x) dx \\
&= \bar{a}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Um  $\bar{a}$  zu ermitteln, muß man die Escape-Rate  $\kappa$  kennen, siehe (3.59). Dafür benötigt man den führenden Eigenwert  $\lambda_0(\beta)$  für  $\beta = 0$ . Ferner braucht man die logarithmische Ableitung von  $\lambda_0(\beta)$  an der Stelle  $\beta = 0$ .

In den folgenden Abschnitten wird eine Technik entwickelt, die es ermöglicht, das Eigenwertspektrum von  $\mathcal{L}$  bzw.  $\mathcal{L}_\beta$  zu errechnen. Die Beantwortung der Frage, wie die Ableitung (3.61) ausgewertet werden kann, wird auf den Schluß des Kapitels, Abschnitt 3.7, verschoben.

### 3.3 Spurformeln

Im folgenden wird stets der in (3.52) definierte Entwicklungsoperator  $\mathcal{L}_\beta^n$  betrachtet. Die weiteren Manipulationen sind natürlich auch für den Spezialfall  $\beta = 0$ , also den Perron-Frobenius-Operator gültig. Der Index  $\beta$  wird von nun an weggelassen.

Der in diesem Abschnitt vorgestellte Weg, sich Zugriff auf die Eigenwerte von  $\mathcal{L}^n$  zu verschaffen, beginnt mit der Berechnung der Spur von  $\mathcal{L}^n$ . Hierzu muß die Spur jedoch wohldefiniert sein. Die Spur ist die Summe der Eigenwerte, und diese Summe sollte konvergieren. Das ist aber nach Voraussetzung 3 auf Seite 50 der Fall.

Es wird sich zeigen, daß durch das Berechnen der Spur eine Beziehung zwischen dem Eigenwertspektrum des Entwicklungsoperators und dem Spektrum der periodischen Orbits von  $f$  hergestellt wird. Die Spur von  $\mathcal{L}^n$  ist ein Integral über eine Diracsche Delta-Funktion, zu welchem nur die Fixpunkte von  $f^n$  beitragen.

Das Ergebnis, daß man für die Spur erhält, ist zunächst ziemlich unhandlich. Unterwirft man es aber einer diskreten Laplace-Transformation, so erhält man einen bequemeren Ausdruck, der als *Spurformel* bezeichnet wird. Die Spurformel ist eine Potenzreihendarstellung einer Funktion, die Pole bei den reziproken Eigenwerten von  $\mathcal{L}$  besitzt. Damit bildet die Spurformel den Ausgangspunkt für weitere Überlegungen in den folgenden Abschnitten.

In diesem Abschnitt wird außerdem durch eine vereinfachende Näherung aus der (exakten) Spurformel eine asymptotische Spurformel entwickelt. Diese gibt trotz der Näherung den führenden Eigenwert von  $\mathcal{L}$  korrekt wieder und wird ebenfalls in den folgenden Abschnitten benötigt.

### 3.3.1 Die exakte Spurformel

Der Kern des Integraloperators  $\mathcal{L}^n$  ist nach (3.52) durch

$$L^n(y, x) = \delta(y - f^n(x))e^{\beta \cdot A^n(x)}. \quad (3.62)$$

gegeben. Die Integration über die „Diagonale“ dieser „kontinuierlichen Matrix“ ergibt die Spur von  $\mathcal{L}^n$ :

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathcal{L}^n &= \int_{\mathcal{M}} dx L^n(x, x) \\ &= \int_{\mathcal{M}} dx \delta(x - f^n(x))e^{\beta \cdot A^n(x)} \\ &= \sum_{\{x: f^n(x)=x\}} \frac{e^{\beta \cdot A^n(x)}}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}^{(n)}(x))|}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

wobei natürlich keine der Determinanten verschwinden darf; das ist auch nicht der Fall, siehe unten. Die Summe läuft über alle periodischen Punkte von  $f$  der Periode  $n$ .  $\mathbf{J}^{(n)}(x)$  ist die Jacobi-Matrix von  $f^n(x)$ , welche auch als *Monodromiematrix* des  $n$ -periodischen Orbits, der bei  $x$  startet und endet, bezeichnet wird. Sie gibt die Stabilitätseigenschaften des Orbits wieder.

Periodische Orbits der Länge  $n$  können Orbits sein, die sich erst nach  $n$  Iterationen von  $f$  zum ersten Mal schließen, oder aber Orbits kürzerer Periode, die mehrmals durchlaufen werden. Orbits der erstgenannten Art werden im folgenden als *Primzyklen* der Länge  $n$  bezeichnet. Jeder Summand in (3.63) ist also ein Beitrag eines ein- oder mehrfach durchlaufenen Primzyklus.

Es sei  $p$  ein Primzyklus der Länge  $n_p$  (auch als *topologische* Länge bezeichnet), mit der Monodromiematrix  $\mathbf{J}_p = Df^{n_p}(x)$  und der integrierten Observablen

$$A_p = \sum_{k=0}^{n_p-1} a(f^k(x)), \quad (3.64)$$

wobei  $x$  ein beliebiger Punkt von  $p$  ist. Der Primzyklus  $p$  trägt genau dann zur Summe in (3.63) bei, wenn es eine natürliche Zahl  $r$  gibt, so daß  $n_p r = n$  ist. Der  $r$ -fach wiederholte Primzyklus besitzt dann die Monodromiematrix  $\mathbf{J}_p^r$  und die integrierte Observable  $r A_p$ . Die  $n_p$  Punkte, die  $p$  durchläuft, treten allesamt in der Menge  $\{x : f^n(x) = x\}$  auf, so daß mit  $p$  auch alle zyklischen Permutationen von  $p$  zu (3.63) beitragen. Diese  $n_p$  Beiträge sind aber einander gleich, aus folgendem Grunde:

Die Eigenwerte von  $\mathbf{J}_p$ , und damit auch die Eigenwerte von  $\mathbf{J}_p^r$ , sind wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_p &= Df^{n_p}(x) \\ &= \prod_{k=0}^{n_p-1} Df(f^k(x)) \end{aligned} \quad (3.65)$$

zyklisch invariant. Für jedes  $k = 0, \dots, n_p - 1$  gilt aufgrund von (3.65) nämlich

$$Df^{n_p}(f^k(x)) = \left( \prod_{j=0}^{k-1} Df(f^j(x)) \right)^{-1} Df^{n_p}(x) \prod_{j=0}^{k-1} Df(f^j(x)). \quad (3.66)$$

$Df^{n_p}(f^k(x))$  und  $Df^{n_p}(x)$  gehen also durch eine Ähnlichkeitstransformation auseinander hervor und haben daher die gleichen Eigenwerte. Daraus folgt, daß die Beiträge aller Punkte von  $p$  zu (3.63) gleich sind.

Somit kann man aus jeder zyklischen Permutationsklasse von Primzyklen einen Vertreter  $p$  auswählen, dessen Beitrag  $n_p$ -fach zählen und (3.63) in eine Summe über (zyklische Permutationsklassen von) Primzyklen und deren Wiederholungen umschreiben:

$$\text{tr } \mathcal{L}^n = \sum_p n_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{r\beta \cdot A_p}}{|\det(\mathbb{1} - \mathbf{J}_p^r)|} \delta_{n, n_p r}. \quad (3.67)$$

Wie bereits erwähnt, dürfen die Determinanten nicht verschwinden. Die  $d$ -dimensionalen Matrizen  $\mathbf{J}_p$  haben die Eigenwerte  $\Lambda_{p,i}$ . Wegen

$$\frac{1}{|\det(\mathbb{1} - \mathbf{J}_p^r)|} = \prod_{i=1}^d \frac{1}{|1 - \Lambda_{p,i}^r|} \quad (3.68)$$

dürfen die  $\mathbf{J}_p$  keinen Eigenwert 1 besitzen. Das ist aber durch die vorausgesetzte Hyperbolizität der invarianten Menge gewährleistet. Insbesondere ist jeder Primzyklus  $p$  hyperbolisch, d. h. jeder Eigenwert von  $\mathbf{J}_p$  ist vom Betrage her echt größer oder kleiner als 1.

Die Menge  $\{\Lambda_{p,i}\}$  der Eigenwerte von  $\mathbf{J}_p$  setzt sich aus zwei disjunkten Teilmengen zusammen: Die Eigenwerte vom Betrage größer als 1 bilden die Menge  $\{\Lambda_{p,e}\}$  der expandierenden Eigenwerte, die übrigen ergeben die Menge  $\{\Lambda_{p,c}\}$  der kontrahierenden Eigenwerte. Es sei  $\Lambda_p = \prod_e \Lambda_{p,e}$  das Produkt der expandierenden Eigenwerte. Die Determinanten faktorisieren damit folgendermaßen:

$$\frac{1}{|\det(\mathbb{1} - \mathbf{J}_p^r)|} = \frac{1}{|\Lambda_p|^r} \prod_e \frac{1}{|1 - 1/\Lambda_{p,e}^r|} \prod_c \frac{1}{|1 - \Lambda_{p,c}^r|}. \quad (3.69)$$

Die Expansion und die Kontraktion wachsen exponentiell mit der topologischen Länge. Aus der Definition der Hyperbolizität folgt nämlich, daß es ein  $s > 1$  gibt, so daß für jeden Primzyklus  $p$ , für jeden expandierenden Eigenwert  $\Lambda_{p,e}$  und für jeden kontrahierenden Eigenwert  $\Lambda_{p,c}$  gilt:

$$\begin{aligned} |\Lambda_{p,e}| &> s^{n_p} \\ |\Lambda_{p,c}| &< s^{-n_p}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Damit folgt, daß  $|\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|$  nicht nur für  $r \rightarrow \infty$ , sondern auch für  $n_p \rightarrow \infty$  gegen  $|\Lambda_p|^r$  konvergiert. Man kann also schreiben:

$$\lim_{n_p r \rightarrow \infty} \frac{1}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|} = \frac{1}{|\Lambda_p|^r}. \quad (3.71)$$

Diese Eigenschaft ist für die Konstruktion der sog. asymptotischen Spurformel bedeutsam, siehe folgenden Unterabschnitt.

Die Formel (3.67) ist aufgrund des Kroneckersymbols  $\delta_{n,n_p r}$  recht unpraktisch. Es erweist sich als nützlich, sich davon durch Anwendung einer diskreten Laplace-Transformation zu befreien. Dann erhält man eine erzeugende Funktion der Größen  $\text{tr } \mathcal{L}^n$ , bzw. die *Spurformel*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{tr } \mathcal{L}^n = \sum_p n_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^{n_p r} e^{r \beta \cdot A_p}}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|}. \quad (3.72)$$

Der Nutzen dieser Formel ist auf den ersten Blick nicht ersichtlich. Da die Spur jedoch die Summe der Eigenwerte ist,

$$\text{tr } \mathcal{L}^n = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda_{\alpha}^n, \quad (3.73)$$

erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe folgendes:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{tr } \mathcal{L}^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} (z \lambda_{\alpha})^n \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{z \lambda_{\alpha}}{1 - z \lambda_{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Im letzten Schritt wurde  $|z| < \lambda_0^{-1}$  vorausgesetzt. Die Spurformel ist also eine Potenzreihendarstellung der Funktion

$$T(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{z \lambda_{\alpha}}{1 - z \lambda_{\alpha}} \quad (3.75)$$

um 0 mit dem Konvergenzradius  $\lambda_0^{-1}$ .

Bei  $T(z)$  handelt es sich um eine auf  $U = \mathbb{C} \setminus \{\lambda_{\alpha}^{-1}\}$  holomorphe Funktion. Sie ist also auf  $\mathbb{C}$  meromorph. Notwendige Voraussetzung dafür ist, daß die Polstellenmenge  $\{\lambda_{\alpha}^{-1}\}$  keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$  besitzt. Das ist aber erfüllt, da wegen Voraussetzung 3 auf Seite 50 die Menge  $\{\lambda_{\alpha}\}$  nur in 0 einen Häufungspunkt besitzt. Daß die  $\lambda_{\alpha}^{-1}$  sich nirgends häufen, reicht für die Holomorphie vom  $T(z)$  auf  $U$  jedoch noch nicht aus. Hinreichend dafür ist hingegen, daß  $\sum_{\alpha} \frac{z \lambda_{\alpha}}{1 - z \lambda_{\alpha}}$  auf

jedem in  $U$  enthaltenem Kompaktum gleichmäßig konvergiert (nach dem *Wei-erstraßschen Konvergenzsatz* [Lor97]). Um diese sog. *kompakte* Konvergenz zu zeigen, benötigt man die durch Voraussetzung 3 gegebene *absolute* Konvergenz von  $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}$ .

Der führende Eigenwert  $\lambda_0$  lässt sich also im Prinzip dadurch ermitteln, daß man das kleinste positiv reelle  $z = \lambda_0^{-1}$  bestimmt, für das die Spurformel divergiert. Dies erscheint jedoch wenig praktikabel. Auch könnte man versuchen, andere Eigenwerte zu finden, indem man Potenzreihendarstellungen von  $T(z)$  um andere Entwicklungspunkte in  $U$  herleitet und deren Konvergenzradien bestimmt, was ja prinzipiell möglich ist, da  $T(z)$  auf  $U$  holomorph ist. Da sich die nicht-führenden Eigenwerte aber nicht unbedingt auf der reellen Achse befinden, wäre ihr Auffinden bei dieser Vorgehensweise besonders schwierig. Die Angelegenheit wird durch die *Zeta-Funktionen*, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden, erheblich vereinfacht.

Zunächst wird jedoch die asymptotische Spurformel eingeführt.

### 3.3.2 Die asymptotische Spurformel

Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe  $\sum_n a_n z^n$  wird durch das asymptotische Verhalten ihrer Koeffizienten  $a_n$ , d. h. deren Verhalten für  $n \rightarrow \infty$ , bestimmt. Approximiert man auf beiden Seiten in (3.72) die exakten Koeffizienten gemäß ihrem asymptotischen Verhalten, so ändert sich der Konvergenzradius  $\lambda_0^{-1}$  nicht.

Für die Koeffizienten auf der linken Seite der Spurformel (3.72) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tr} \mathcal{L}^n = \lambda_0^n. \quad (3.76)$$

Damit erhält man die Näherung

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \operatorname{tr} \mathcal{L}^n \approx \sum_{n=1}^{\infty} (z \lambda_0)^n = \frac{z \lambda_0}{1 - z \lambda_0}. \quad (3.77)$$

Bei der rechten Seite von (3.72) wird die exakte Determinante durch die Asymptotik (3.71) ersetzt. Das ergibt die *asymptotische Spurformel*:

$$\Omega(z) = \sum_p n_p \sum_{r=0}^{\infty} t_p^r \approx \frac{z \lambda_0}{1 - z \lambda_0} \quad (3.78)$$

mit den „Gewichten“

$$t_p = \frac{1}{|\Lambda_p|} z^{n_p} e^{\beta \cdot A_p}. \quad (3.79)$$

Diese Abkürzung wird im folgenden noch häufig verwandt. Dabei ist stets die der Einfachheit halber nicht explizit angegebene  $z$ -Abhängigkeit von  $t_p$  zu beachten.

Ist man nur am führenden Eigenwert von  $\mathcal{L}$  interessiert, dann genügt es also, die asymptotische Spurformel zu betrachten. Möchte man beispielsweise die Escape-Rate bestimmen, so setzt man  $\beta = 0$  in (3.79). Dann divergiert  $\Omega(z)$  bei  $z = e^\kappa$ .

Daß sich die Escape-Rate im Prinzip auf diese Weise mit Hilfe von  $\Omega(z)$  ermitteln läßt, kann auch mit heuristischen Argumenten unter Umgehung des Entwicklungsoperator-Formalismus gezeigt werden. Dies wird in Anhang C vorgeführt.

Die Spurformeln stellen allerdings für die Praxis kein brauchbares Werkzeug zur Bestimmung des Eigenwertspektrums von  $\mathcal{L}$  dar. Abhilfe schaffen hingegen die Zeta-Funktionen, für welche die Spurformeln die Grundlage bilden.

## 3.4 Zeta-Funktionen

Es bietet sich an, die meromorphe Funktion  $T(z)$  als logarithmische Ableitung einer *ganzen* (d. h. einer auf  $\mathbb{C}$  holomorphen) Funktion darzustellen, denn diese ganze Funktion hätte Nullstellen bei den reziproken Eigenwerten  $\lambda_\alpha^{-1}$ . Es ist wesentlich einfacher, Nullstellen einer Funktion aufzufinden als Polstellen. Ein weiterer Vorteil läge darin, daß Potenzreihenentwicklungen ganzer Funktion überall auf  $\mathbb{C}$  konvergieren.

Die reziproken Eigenwerte des linearen Operators  $\mathcal{L}$  sind durch die Nullstellen einer formalen Determinante gegeben:

$$\det(\mathbb{1} - z\mathcal{L}) = \prod_{\alpha=0}^{\infty} (1 - z\lambda_\alpha). \quad (3.80)$$

Das unendliche Produkt auf der rechten Seite ist eine ganze Funktion. Dies ergibt sich mit Hilfe der absoluten Konvergenz von  $\sum_\alpha \lambda_\alpha$  aus dem *Weierstraßschen Produktsatz* der Funktionentheorie [Lor97].

Wegen (3.75) gilt offensichtlich:

$$T(z) = -z \frac{d}{dz} \log \det(\mathbb{1} - z\mathcal{L}). \quad (3.81)$$

$T(z)$  ist also in der Tat die logarithmische Ableitung einer ganzen Funktion (multipliziert mit  $-z$ ), woraus wiederum die Meromorphie von  $T(z)$  folgt.

Ziel der folgenden Umformungen ist die Berechnung der Determinante (3.80) mit Hilfe der Spurformel (3.72). Es wird zunächst  $|z| < \lambda_0^{-1}$  vorausgesetzt. Mit der

Reihenentwicklung des Logarithmus, Gleichung (3.73) sowie der Linearität der Spur erhält man dann

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{1} - z\mathcal{L}) &= \prod_{\alpha=0}^{\infty} (1 - z\lambda_{\alpha}) \\
&= \prod_{\alpha=0}^{\infty} \exp(\log(1 - z\lambda_{\alpha})) \\
&= \prod_{\alpha=0}^{\infty} \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \lambda_{\alpha}^n\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \lambda_{\alpha}^n\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \operatorname{tr} \mathcal{L}^n\right) \\
&= \exp(\operatorname{tr} \log(\mathbb{1} - z\mathcal{L})). \tag{3.82}
\end{aligned}$$

Das ist eine Verallgemeinerung der für quadratische Matrizen  $B$  gültigen *Liouvilleschen Formel* [Rob95],

$$\det B = \exp(\operatorname{tr} \log B), \tag{3.83}$$

auf den unendlichdimensionalen Operator  $\mathbb{1} - z\mathcal{L}$ .

Setzt man (3.72) in die vorletzte Zeile von (3.82) ein, so ergibt sich schließlich

$$\det(\mathbb{1} - z\mathcal{L}) = \exp\left(-\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{z^{n_p r} e^{r\beta \cdot A_p}}{|\det(\mathbb{1} - \mathbf{J}_p^r)|}\right). \tag{3.84}$$

Der Faktor  $1/r$  tritt aufgrund von  $n = n_p r$  auf. Die Funktion auf der rechten Seite ist die *Selbergsche Zeta-Funktion*:

$$Z(z) = \exp\left(-\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{z^{n_p r} e^{r\beta \cdot A_p}}{|\det(\mathbb{1} - \mathbf{J}_p^r)|}\right). \tag{3.85}$$

In der Kreisscheibe  $|z| < \lambda_0^{-1}$  gilt also

$$\det(\mathbb{1} - z\mathcal{L}) = Z(z). \tag{3.86}$$

Der *Identitätssatz für holomorphe Funktionen* [Lor97] garantiert jedoch, daß  $Z(z)$  auf ganz  $\mathbb{C}$  mit  $\det(\mathbb{1} - z\mathcal{L})$  übereinstimmt, so daß wegen (3.81)

$$T(z) = -z \frac{d}{dz} \log Z(z) \tag{3.87}$$

auf ganz  $\mathbb{C}$  gilt. Die reziproken Eigenwerte von  $\mathcal{L}$  sind also durch die Nullstellen von  $Z(z)$  gegeben. Die Selbergsche Zeta-Funktion ermöglicht im Prinzip den Zugriff auf das gesamte Eigenwertspektrum von  $\mathcal{L}$ . Probleme mit Konvergenzradien gibt es nicht – unter Voraussetzung 3 auf Seite 50.

Dennoch erscheint die Selbergsche Zeta-Funktion auf den ersten Blick nicht handhabbar. Sie hängt von den periodischen Orbits des betrachteten Systems ab, von denen es in der Regel unendlich viele gibt. Wie aber in Abschnitt 3.6 gezeigt wird, lassen sich die größten Eigenwerte von  $\mathcal{L}$  schon dann in guter Näherung bestimmen, wenn man nur die Orbits bis zur einer relativ kleinen Länge  $n$  (von der Größenordnung 1 bis 10) berücksichtigt und  $Z(z)$  durch ein Polynom vom Grade  $n$  approximiert. Da  $Z(z)$  eine ganze Funktion ist, lassen sich durch Erhöhung von  $n$  die Genauigkeit und die Zahl der berechenbaren Eigenwerte im Prinzip beliebig steigern.

Für die folgende Diskussion ist es sinnvoll, die Selbergsche Zeta-Funktion in eine *Produktdarstellung* umzuformen. Wie das vonstatten geht, wird hier der Einfachheit halber für zweidimensionale, flächenerhaltende Abbildungen, wie das Zweimuldensystem, demonstriert. Die zu einem Primzyklus  $p$  gehörende Matrix  $\mathbf{J}_p$  besitzt in diesem Falle die beiden Eigenwerte  $\Lambda_p$  und  $1/\Lambda_p$  mit  $|\Lambda_p| > 1$ . Damit kann man die  $\det^{-1}$ -Faktoren in (3.85) folgendermaßen entwickeln:

$$\begin{aligned}
 |\det(\mathbf{1} - \mathbf{J}_p^r)|^{-1} &= |(1 - \Lambda_p^r)(1 - 1/\Lambda_p^r)|^{-1} \\
 &= (|\Lambda_p|^r(1 - 1/\Lambda_p^r)^2)^{-1} \\
 &= |\Lambda_p|^{-r} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_p^{-(i+j)r} \\
 &= |\Lambda_p|^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Lambda_p^{-kr}.
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Einsetzen in (3.85) und Verwendung der Abkürzung (3.79) ergibt

$$\begin{aligned}
 Z(z) &= \exp \left( - \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r} (k+1) (z^{n_p} e^{\beta \cdot A_p} |\Lambda_p|^{-1} \Lambda_p^{-k})^r \right) \\
 &= \exp \left( - \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r} (k+1) t_p^r \Lambda_p^{-kr} \right) \\
 &= \exp \left( \sum_p \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \log \left( 1 - \frac{t_p}{\Lambda_p^k} \right) \right) \\
 &= \prod_{k=0}^{\infty} \prod_p \left( 1 - \frac{t_p}{\Lambda_p^k} \right)^{k+1},
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

womit man die Produktdarstellung der Selbergschen Zeta-Funktion gefunden hat.

Andere in der Literatur gebräuchliche Bezeichnungen für die Selbergsche Zeta-Funktion sind *Spektraldeterminante*, *Funktionaldeterminante*, *Fredholm-Determinante*, und, verwirrenderweise, *dynamische Zeta-Funktion*.

Die zuletzt genannte Bezeichnung ist deshalb verwirrend, weil die Selbergsche Zeta-Funktion ein unendliches Produkt von dynamischen Zeta-Funktionen  $1/\zeta_k$  ist:

$$Z(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta_k^{k+1}}(z) \quad (3.90)$$

mit

$$\frac{1}{\zeta_k}(z) = \prod_p \left(1 - \frac{t_p}{\Lambda_p^k}\right). \quad (3.91)$$

Die Funktion  $1/\zeta_0(z) := 1/\zeta(z)$  ist hierbei von besonderer Bedeutung. Sie wird durchweg als *die* dynamische Zeta-Funktion bezeichnet und besitzt die vergleichsweise einfache Gestalt

$$\frac{1}{\zeta}(z) = \prod_p (1 - t_p). \quad (3.92)$$

Der führende Eigenwert von  $\mathcal{L}$  ist durch die kleinste reelle Nullstelle von  $1/\zeta(z)$  gegeben, denn die dynamische Zeta-Funktion steht im selben Zusammenhang zur asymptotischen Spurformel (3.78) wie die Selbergsche Zeta-Funktion zur exakten Spurformel:

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \sum_p n_p \sum_{r=1}^{\infty} t_p^r \\ &= \sum_p \frac{n_p t_p}{1 - t_p} \\ &= -z \frac{d}{dz} \log \frac{1}{\zeta}(z). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Zur Ermittlung des führenden Eigenwertes von  $\mathcal{L}$  ist die Auswertung der dynamischen Zeta-Funktion das Mittel der Wahl. Zur Bestimmung anderer Eigenwerte benötigt man jedoch die Selbergsche Zeta-Funktion.

Bevor beschrieben wird, wie die Auswertung der Zeta-Funktionen in der Praxis abläuft, gibt es zunächst einen Exkurs über die Auswirkungen von Symmetrien auf die Zeta-Funktionen.

## 3.5 Diskrete Symmetrien

In diesem Abschnitt, der sich an [CviEck93] orientiert, wird gezeigt, daß für ein System, welches invariant unter einer diskreten Symmetrie ist, es zur Berechnung

$\mathcal{C}_{2v}$	$e$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$c_2$
$e$	$e$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$c_2$
$\sigma_x$	$\sigma_x$	$e$	$c_2$	$\sigma_y$
$\sigma_y$	$\sigma_y$	$c_2$	$e$	$\sigma_x$
$c_2$	$c_2$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$e$

Tabelle 3.1: Multiplikationstabelle der Symmetriegruppe  $\mathcal{C}_{2v}$ .

der zugehörigen Zeta-Funktionen genügt, die periodischen Orbits des symmetriereduzierten Systems zu kennen. Besitzt ein System eine Symmetrie, so sollte diese immer ausgenutzt werden, da sich dadurch bei gleichbleibendem numerischen Aufwand erheblich genauere Ergebnisse erzielen lassen.

Eine diskrete Symmetrie wird durch eine endliche Gruppe  $G = \{e, g_2, \dots, g_n\}$  beschrieben. Man bezeichnet ein dynamisches System als *invariant unter der Symmetriegruppe*  $G$ , wenn seine Bewegungsgleichungen invariant unter jeder Symmetrioperation  $g \in G$  sind. Für eine Abbildung  $f$  bedeutet das:

$$f(x) = g^{-1}(f(g(x))) \quad \forall g \in G. \quad (3.94)$$

Hierbei beschreibt  $g(x)$  die Wirkung von  $g$  auf den Phasenraumpunkt  $x$ . Beispiele sind die im Phasenraum  $\hat{\Gamma}$  des Zweimuldensystems wirkenden Symmetrioperationen (1.14) von  $\mathcal{C}_{2v}$ .

Nach (1.15) ist das Zweimuldensystem invariant unter der Symmetriegruppe  $\mathcal{C}_{2v} = \{e, \sigma_x, \sigma_y, c_2\}$ . Tabelle 3.1 zeigt die Multiplikationstabelle von  $\mathcal{C}_{2v}$ . Ihre Einträge geben an, welches Gruppenelement sich ergibt, wenn zunächst das in der jeweiligen Spalte angegebene Element und dann das in der jeweiligen Zeile angegebene Element angewandt wird.  $\mathcal{C}_{2v}$  ist eine Abelsche Gruppe, d. h. alle Elemente von  $\mathcal{C}_{2v}$  kommutieren. Daher ist die Multiplikationstabelle wie eine symmetrische Matrix aufgebaut.

Mit Hilfe von (3.94) kann man für (3.62), den zu  $f$  gehörenden Kern  $L^n$  des Entwicklungsoperators  $\mathcal{L}^n$ , ebenfalls eine Symmetrievinarianz herleiten. Hierzu benötigt man jedoch die wichtige Voraussetzung der Symmetrievinarianz der gemäß (3.43) definierten integrierten Observablen  $A^n$ :

$$A^n(x) = A^n(g(x)) \quad \forall x \in \mathcal{M}, \forall g \in G, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.95)$$

Diese Forderung ist äquivalent zu

$$a(x) = a(g(x)) \quad \forall x \in \mathcal{M}, \forall g \in G. \quad (3.96)$$

Für den Kern von  $\mathcal{L}^n$  ergibt sich dann:

$$L^n(y, x) = \delta(y - f^n(x)) e^{\beta \cdot A^n(x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta(y - g^{-1}(f^n(g(x))))e^{\beta \cdot A^n(x)} \\
&= \delta(g(y) - f^n(g(x)))e^{\beta \cdot A^n(g(x))} \\
&= L^n(g(y), g(x)). \tag{3.97}
\end{aligned}$$

Der Operation in der dritten Zeile, nämlich die Anwendung von  $g$  auf das Argument der Delta-Funktion, ist deshalb korrekt, weil  $|\det Dg| = 1$  für alle  $g \in G$  gilt; denn die Symmetriegerüteoperationen bewirken Drehungen oder Spiegelungen im Phasenraum.

Um die Diskussion fortsetzen zu können, werden als nächstes einige Begriffe aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen erklärt, und zwar sowohl allgemein als auch am Beispiel der Gruppe  $C_{2v}$ . Eine etwas ausführlichere Behandlung dieses Themas findet sich z. B. in [EllDaw79].

### 3.5.1 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

In einem reellen Vektorraum  $V$ , der nicht notwendig endlichdimensional sein muß, sei mit  $\text{End}(V)$  die Menge der linearen Abbildungen von  $V$  auf  $V$  (Endomorphismen auf  $V$ ) bezeichnet. Es sei  $G$  eine endliche Gruppe mit dem Einselement  $e$ . Wenn es einen Gruppenhomomorphismus gibt, der  $G$  auf eine endliche Gruppe abbildet, die durch Elemente von  $\text{End}(V)$  gebildet wird, dann nennt man diesen Homomorphismus eine *Darstellung* von  $G$ :

**Definition 4 (Darstellung)** *Als Darstellung der Gruppe  $G$  bezeichnet man eine Abbildung  $D : G \rightarrow \text{End}(V)$  mit den folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{aligned}
D(gh) &= D(g) \circ D(h) \quad \forall g, h \in G \\
D(e) &= id_V.
\end{aligned}$$

Daß  $D(G)$  eine Gruppe ist, ist durch die oben angegebenen Eigenschaften automatisch erfüllt. Die Komposition von Elementen aus  $D(G)$  ist assoziativ und ergibt wieder ein Element aus  $D(G)$ ,  $id_V$  ist in  $D(G)$  enthalten, und jedes Element aus  $D(G)$  ist invertierbar, denn wegen

$$D(g) \circ D(g^{-1}) = D(gg^{-1}) = D(e) = id_V = D(g^{-1}g) = D(g^{-1}) \circ D(g) \tag{3.98}$$

gilt

$$D(g)^{-1} = D(g^{-1}). \tag{3.99}$$

Die Abbildung  $D : G \rightarrow \text{End}(V)$  selbst ist jedoch im allgemeinen *nicht* invertierbar. So ist z. B.  $D : G \rightarrow \text{End}(V)$ ,  $g \mapsto id_V$  eine Darstellung, aber nicht invertierbar, wenn  $G$  mehr als ein Element besitzt.

Ist  $V$  endlichdimensional mit  $\dim V = n$ , so kann man nach Wahl einer Basis jedes Element aus  $\text{End}(V)$  durch eine  $n \times n$ -Matrix darstellen. Für jede  $n$ -dimensionale Darstellung der Gruppe  $G$  existiert also eine  $n$ -dimensionale *Matrixdarstellung*. Als eine solche bezeichnet man jede Abbildung  $D : G \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $D(gh) = D(g) \cdot D(h) \ \forall g, h \in G$  und  $D(e) = \mathbb{1}$ .

Existiert eine endlichdimensionale Darstellung von  $G$ , so gibt es natürlich nicht nur eine, sondern unendlich viele zugehörige Matrixdarstellungen, die durch Basiswechsel in  $V$  ineinander übergehen. Solche Matrixdarstellungen nennt man *äquivalent*. Man kann jedoch eine Größe definieren, die jedem Gruppenelement  $g \in G$  zwar abhängig von der Darstellung, aber unabhängig von der Wahl der Basis einen Wert zuweist, dieses sozusagen „charakterisiert“:

**Definition 5 (Charakter)** Für eine Matrixdarstellung  $D : G \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und ein  $g \in G$  nennt man

$$\chi(g) = \text{tr } D(g)$$

den Charakter von  $g$  in der (Matrix-)Darstellung  $D$ .

Die Spur einer Matrix ist basisunabhängig. Denn für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  drückt man einen Basiswechsel durch eine Transformation der Gestalt  $A' = UAU^{-1}$  mit einer invertierbaren Matrix  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  aus, und für jede invertierbare Matrix  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt

$$\text{tr } A = \text{tr } UAU^{-1}. \quad (3.100)$$

Die Charaktere sind daher für alle äquivalenten Matrixdarstellungen gleich.

Außerdem sind die Charaktere von zueinander *konjugierten* Gruppenelementen gleich:

**Definition 6 (konjugierte Gruppenelemente)** Ein Gruppenelement  $g \in G$  heißt konjugiert zu  $h \in G$ , wenn es ein  $k \in G$  gibt, so daß  $g = khk^{-1}$  gilt.

Für ein  $x \in G$  bezeichnet man die Menge

$$G_x = \{gxg^{-1} \mid \forall g \in G\} \subset G$$

als Konjugationsklasse von  $x$ .

Ist  $G$  Abelsch, so bildet jedes  $x \in G$  für sich eine Konjugationsklasse, denn für alle  $g \in G$  gilt  $gxg^{-1} = gg^{-1}x = x$ .

Ist  $g$  konjugiert zu  $h$ , so gilt mit (3.99) und (3.100), wie behauptet:

$$\chi(g) = \text{tr } D(g) = \text{tr } D(khk^{-1}) = \text{tr } D(k)D(h)D(k)^{-1} = \text{tr } D(h) = \chi(h). \quad (3.101)$$

In der Gruppe  $\mathcal{C}_{2v}$  ist jedes Gruppenelement für sich eine Konjugationsklasse, denn  $\mathcal{C}_{2v}$  ist Abelsch.

Es ist möglich, daß eine  $n$ -dimensionale Matrixdarstellung sich aus Matrixdarstellungen geringerer Dimensionen zusammensetzt, also *reduzibel* ist. Das ist folgendermaßen gemeint:

**Definition 7 (Reduzibilität)** *Es sei eine  $n$ -dimensionale Matrixdarstellung  $D : G \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben.  $D$  heißt reduzibel, wenn es eine zu  $D$  äquivalente Matrixdarstellung  $D'$  gibt, in der für alle  $g \in G$  die Matrizen  $D'(g)$  die folgende Gestalt besitzen:*

$$D'(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & A(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$$

mit  $m \times m$ -Matrizen  $D_1(g)$ ,  $(n-m) \times (n-m)$ -Matrizen  $D_2(g)$  und  $m \times (n-m)$ -Matrizen  $A(g)$ .

Ist eine Matrixdarstellung nicht reduzibel, so nennt man sie *irreduzibel*. Man kann sich klarmachen, daß durch  $D_1$  und  $D_2$  wiederum Matrixdarstellungen von  $G$  der Dimensionen  $m$  bzw.  $n-m$  gegeben sind, während die Matrizen  $A(g)$  ohne besondere Bedeutung sind.

Im folgenden wird eine bestimmte Matrixdarstellung benötigt, nämlich die *reguläre Darstellung*:

**Definition 8 (reguläre Darstellung)** *Für eine Gruppe  $G$  mit  $\text{ord } G = n$  und den Elementen  $g_1, g_2, \dots, g_n$  besteht die reguläre Darstellung  $D^{(R)} : G \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  aus Matrizen  $D^{(R)}(g_i)$  mit folgenden Einträgen:*

$$D_{kj}^{(R)}(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g_i g_j = g_k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.102)$$

Da es für jedes vorgegebene Paar  $g_i, g_j \in G$  immer genau ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  gibt, so daß  $g_i g_j = g_k$  ist, besitzen die Matrizen  $D^{(R)}(g_i)$  in jeder Spalte genau eine Eins.  $D^{(R)}(e)$  ist die  $n \times n$ -Einheitsmatrix; bei den Matrizen, die zu den übrigen Gruppenelementen gehören, verschwinden hingegen alle Diagonalelemente. Es gilt also für jedes  $h \in G$ :

$$\text{tr } D^{(R)}(h) = \text{ord } G \delta_{h,e}. \quad (3.103)$$

Legt man für die Gruppe  $\mathcal{C}_{2v}$  die Numerierungen der Zeilen, Spalten und Gruppenelemente wie in Tabelle 3.1 fest, dann kann man sich mit Hilfe dieser Tabelle

klarmachen, daß  $\mathcal{C}_{2v}$  folgende reguläre Darstellung besitzt:

$$D^{(R)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.104a)$$

$$D^{(R)}(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.104b)$$

$$D^{(R)}(\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.104c)$$

$$D^{(R)}(c_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.104d)$$

Jede Gruppe besitzt eine bestimmte Anzahl an irreduziblen Darstellungen  $D_\alpha$ , die nicht zueinander äquivalent sind und jeweils die Dimension  $d_\alpha$  besitzen. Man kann zeigen, daß sich die reguläre Darstellung  $D^{(R)}$  einer Gruppe aus allen irreduziblen Darstellungen  $D_\alpha$  der Gruppe zusammensetzt:

$$D^{(R)} = \bigoplus_{\alpha} d_\alpha D_\alpha. \quad (3.105)$$

Das bedeutet, daß es eine zu  $D^{(R)}$  äquivalente Darstellung  $D'^{(R)}$  gibt, die Blockdiagonalgestalt besitzt, wobei die irreduziblen Darstellungen  $D_\alpha$  die einzelnen Blöcke bilden, welche jeweils  $d_\alpha$ -mal vorkommen. Daher gilt für die Charaktere  $\chi^{(R)}(g)$  der Elemente einer Gruppe  $G$  in der regulären Darstellung  $D^{(R)}$  folgendes:

$$\chi^{(R)}(g) = \sum_{\alpha} d_\alpha \chi_{\alpha}(g) \quad \forall g \in G, \quad (3.106)$$

wobei die  $\chi_{\alpha}(g)$  die Charaktere in den irreduziblen Darstellungen sind.

Es kann gezeigt werden, daß jede Gruppe genauso viele irreduzible Darstellungen wie Kongugationsklassen besitzt. Die reguläre Darstellung von  $\mathcal{C}_{2v}$  setzt sich demnach aus vier eindimensionalen irreduziblen Darstellungen zusammen. Um diese zu finden, benötigt man also eine Transformationsmatrix  $U$ , die alle Matrizen aus  $D^{(R)}(\mathcal{C}_{2v})$  gleichzeitig diagonalisiert.

Dies leistet die Matrix

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.107)$$

Damit erhält man eine neue Darstellung  $D'^{(R)} = UD^{(R)}U^t$  mit den Matrizen

$$D'^{(R)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.108a)$$

$$D'^{(R)}(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.108b)$$

$$D'^{(R)}(\sigma_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.108c)$$

$$D'^{(R)}(c_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.108d)$$

Betrachtet man in jeder der vier Matrizen jeweils die gleiche Spalte, so bilden die in der Spalte enthaltenen Diagonalelemente eine der vier irreduziblen Darstellungen von  $\mathcal{C}_{2v}$ , und damit die Charaktere dieser Darstellung. Die vier irreduziblen Darstellungen von  $\mathcal{C}_{2v}$  werden, in den Matrizen (3.108) von links nach rechts gezählt, üblicherweise mit  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  und  $B_2$  bezeichnet.

Da es in jeder endlichen Gruppe immer genauso viele irreduzible Darstellungen wie Konjugationsklassen gibt, kann man die Charaktere der einzelnen Konjugationsklassen in den verschiedenen irreduziblen Darstellungen in Form einer quadratischen Matrix auflisten, welche man als *Charaktertafel* bezeichnet. Die Zeilen der Charaktertafel geben die jeweiligen Konjugationsklassen an, die Spalten die irreduziblen Darstellungen.

Tabelle 3.2 zeigt die Charaktertafel von  $\mathcal{C}_{2v}$ . Da  $\mathcal{C}_{2v}$  nur eindimensionale irreduzible Darstellungen besitzt, ist in Tabelle 3.2 die zu einem Gruppenelement  $g$  gehörende Zeile mit der Diagonale der Matrix  $D'^{(R)}(g)$  in (3.108) identisch.

Im allgemeinen ist es nicht so einfach wie im Falle  $\mathcal{C}_{2v}$ , die irreduziblen Darstellungen und die Charaktertafel einer Gruppe zu bestimmen. In [Jun97] wird

$\mathcal{C}_{2v}$	$A_1$	$A_2$	$B_1$	$B_2$
$e$	1	1	1	1
$\sigma_x$	1	-1	1	-1
$\sigma_y$	1	-1	-1	1
$c_2$	1	1	-1	-1

Tabelle 3.2: Charaktertafel der Symmetriegruppe  $\mathcal{C}_{2v}$ .

hierfür ein konstruktives Verfahren angegeben und auf die Symmetriegruppen  $\mathcal{C}_{nv}$  angewandt.

### 3.5.2 Dynamik im Fundamentalbereich

Für ein dynamisches System, das invariant unter einer Symmetriegruppe  $G$  ist, existiert immer ein *Fundamentalbereich*. Ein Fundamentalbereich  $\tilde{\mathcal{M}}$  ist eine kleinste kompakte Teilmenge des Phasenraumes  $\mathcal{M}$ , die so beschaffen ist, daß sich  $\mathcal{M}$  aus Bildern von  $\tilde{\mathcal{M}}$  unter den Elementen von  $G$  zusammensetzt. Es ist also

$$\mathcal{M} = \bigcup_{g \in G} g(\tilde{\mathcal{M}}), \quad (3.109)$$

wobei sich die verschiedenen Bilder  $g(\tilde{\mathcal{M}})$  höchstens in Randpunkten überlappen. Die Wahl von  $\tilde{\mathcal{M}}$  ist natürlich nicht eindeutig, denn jedes der Bilder  $g(\tilde{\mathcal{M}})$  ist ebenfalls ein Fundamentalbereich.

Es wird nun gezeigt, daß es, wenn eine Symmetrie  $G$  vorliegt, zur Berechnung der Zeta-Funktionen ausreichend ist, das bezüglich dieser Symmetrie *reduzierte System* zu betrachten. Wie bereits im Abschnitt 1.3 beschrieben wurde, bedeutet Symmetriereduktion, daß für jeden Orbit jeder Punkt, der sich außerhalb von  $\tilde{\mathcal{M}}$  befindet, durch eine geeignete Symmetrieroberation  $g$  in  $\tilde{\mathcal{M}}$  kopiert wird. Alle Orbits des reduzierten Systems sind also im Fundamentalbereich „eingesperrt“. Es läßt sich eine symmetriereduzierte Version der Spurformel herleiten, die sich aus Beiträgen der periodischen Orbits des reduzierten Systems zusammensetzt. Mit Hilfe dieser Spurformel zeigt man, daß die Zeta-Funktionen in Funktionen faktorisieren, die den irreduziblen Darstellungen der Symmetriegruppe  $G$  zuzuordnen sind.

#### 3.5.2.1 Symmetriereduzierte Spurformel

Für ein symmetrievariantes System kann man die Spur des Entwicklungsoperators durch eine Integration über den Fundamentalbereich allein berechnen. Hierzu ist die Spur geeignet umzuformen.

Zunächst gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{tr} \mathcal{L}^n &= \int_{\mathcal{M}} dx L^n(x, x) \\ &= \sum_{g \in G} \int_{\mathcal{M}} dx L^n(x, x) \delta_g^{(x)}\end{aligned}\quad (3.110)$$

mit

$$\delta_g^{(x)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } g^{-1}(x) \in \tilde{\mathcal{M}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\quad (3.111)$$

Die zweite Gleichung in (3.110) gilt allerdings nur dann, wenn keine  $n$ -periodischen Punkte von  $f$  auf den Rändern der Mengen  $g(\tilde{\mathcal{M}})$ ,  $g \in G$  liegen, da diese Punkte sonst, wenn sie nicht auch auf dem Rand von  $\mathcal{M}$  liegen, fälschlicherweise mehrfach gezählt würden. Die entsprechenden „Randorbits“ bedürfen besonderer Behandlung [CviEck93]; sie kommen aber bei vielen Systemen, so auch beim Zweimuldensystem, gar nicht vor.

Ausnutzen der Symmetrieviananz (3.97) von  $L^n$  ergibt

$$\begin{aligned}\mathrm{tr} \mathcal{L}^n &= \sum_{g \in G} \int_{\mathcal{M}} dx L^n(g^{-1}(x), g^{-1}(x)) \delta_g^{(x)} \\ &= \sum_{g \in G} \int_{\mathcal{M}} dx \delta(g^{-1}(x) - f^n(g^{-1}(x))) e^{\beta \cdot A^n(g^{-1}(x))} \delta_g^{(x)}.\end{aligned}\quad (3.112)$$

Aufgrund des Symbols  $\delta_g^{(x)}$  tragen bei jedem Summanden jeweils nur diejenigen  $x$  zu  $\mathrm{tr} \mathcal{L}^n$  bei, für die  $g^{-1}(x) \in \tilde{\mathcal{M}}$  gilt. Außerdem sind die Abbildungen  $\tilde{\mathcal{M}} \rightarrow g(\tilde{\mathcal{M}})$  bijektiv, und es gilt  $|\det Dg^{-1}| = 1$ . Damit folgt, wenn man  $\tilde{x} = g^{-1}(x)$  in (3.112) einsetzt, aus den Eigenschaften der Delta-Funktion, daß man sich auf Integrationen über den Fundamentalbereich beschränken kann:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr} \mathcal{L}^n &= \sum_{g \in G} \int_{\tilde{\mathcal{M}}} d\tilde{x} \delta(\tilde{x} - f^n(\tilde{x})) e^{\beta \cdot A^n(\tilde{x})} \\ &= \mathrm{ord} G \int_{\tilde{\mathcal{M}}} d\tilde{x} L^n(\tilde{x}, \tilde{x}) \\ &= \mathrm{ord} G \int_{\tilde{\mathcal{M}}} d\tilde{x} \sum_{h \in G} L^n(\tilde{x}, h(\tilde{x})) \delta_{h,e}.\end{aligned}\quad (3.113)$$

Die letzte Umformung erscheint wie eine unnötige Verkomplizierung. Sie ermöglicht jedoch den entscheidenden Schritt, nämlich eine Verbindung zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen herzustellen.

Es sei  $D$  die reguläre Darstellung von  $G$ . Mit Hilfe von (3.103) erhält man für die Spur von  $\mathcal{L}^n$  folgendes Resultat:

$$\mathrm{tr} \mathcal{L}^n = \int_{\tilde{\mathcal{M}}} d\tilde{x} \sum_{h \in G} \mathrm{tr} D(h) L^n(\tilde{x}, h(\tilde{x})).\quad (3.114)$$

Zum Integral  $\int_{\tilde{\mathcal{M}}} d\tilde{x} L^n(\tilde{x}, h(\tilde{x}))$  trägt jeder Orbit bei, für den  $f^n(\tilde{x}) = h^{-1}(\tilde{x})$  gilt, also jeder  $n$ -periodische Orbit des reduzierten Systems. Da jedoch die Spur von  $D(h)$  für  $h \neq e$  verschwindet, ist sichergestellt, daß tatsächlich nur die  $n$ -periodischen Orbits des nichtreduzierten Systems zu  $\text{tr } \mathcal{L}^n$  beitragen.

Ähnlich der Vorgehensweise in Abschnitt 3.3, jedoch mit etwas mehr Aufwand, leitet man nun als Alternative zu (3.72) die *symmetriereduzierte Spurformel* her, siehe Anhang D:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{tr } \mathcal{L}^n = \sum_{\tilde{p}} n_{\tilde{p}} \sum_{r=1}^{\infty} \text{tr } D(h_{\tilde{p}}^r) \frac{z^{n_{\tilde{p}} r} e^{r \beta \cdot A_{\tilde{p}}}}{|\det(\mathbf{1} - (\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^r)|}. \quad (3.115)$$

Summiert wird hier über die periodischen Orbits  $\tilde{p}$  des reduzierten Systems und deren  $r$ -fache Wiederholungen. Bei  $n_{\tilde{p}}$ ,  $A_{\tilde{p}}$  und  $\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}}$  handelt es sich um die Periode, die integrierte Observable bzw. die Monodromiematrix des  $\tilde{p}$ -ten Orbits. Genauer gesagt folgendes: Nach freier Wahl von  $\tilde{x} \in \tilde{p}$  ist  $\mathbf{J}_{\tilde{p}} = Df^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x})$ , und  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}$  ist die Jacobi-Matrix derjenigen Symmetrieroberation  $h_{\tilde{p}} \in G$ , welche die Gleichung

$$\tilde{x} = h_{\tilde{p}}(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x})) \quad (3.116)$$

erfüllt. Beim Zweimuldensystem läßt sich  $h_{\tilde{p}}$  leicht mit Hilfe der Symbolischen Dynamik bestimmen, was in Abschnitt 3.5.3 beschrieben wird.

Das Gruppenelement  $h_{\tilde{p}}$  bedeutet mehr, als (3.116) auf den ersten Blick suggeriert. In Anhang D wird gezeigt, daß man jedem  $\tilde{p}$  eine ganze Klasse  $\hat{p}$  von periodischen Orbits des nichtreduzierten Systems bijektiv zuordnen kann. In  $\hat{p}$  sind alle diejenigen Orbits zusammengefaßt, die bei der Symmetriereduktion auf den zu  $\hat{p}$  gehörenden Orbit  $\tilde{p}$  abgebildet werden. Befindet sich ein Orbit  $p$  in dieser Klasse, so auch alle Bilder von  $p$  unter den Symmetrieroberationen aus  $G$ ; vergleiche auch Abschnitt 2.6. Einige Elemente aus  $G$  können  $p$  invariant lassen (d. h.  $p$  wird bloß zyklisch permutiert), andere Symmetrieroberationen können aus  $p$  neue Orbits erzeugen. Jeder Orbit aus  $\hat{p}$  besitzt eine zyklische Untergruppe von  $G$ , unter der er invariant ist. Jede dieser Untergruppen wird durch  $h_{\tilde{p}}$  oder ein dazu konjugiertes Gruppenelement erzeugt. Der in  $\tilde{x}$  startende Orbit (mit  $\tilde{x}$  wie in (3.116)) ist invariant unter der von  $h_{\tilde{p}}$  erzeugten Untergruppe, somit gibt  $h_{\tilde{p}}$  den Symmetriotyp dieses Orbits an.

### 3.5.2.2 Faktorisierung der Zeta-Funktionen

Ziel ist es nun, aus (3.115) eine Produktdarstellung der Selbergschen Zeta-Funktion zu entwickeln, die (3.89) ähnelt, aber nur von den periodischen Orbits des reduzierten Systems abhängt. Mit Hilfe dieser Produktdarstellung kann gezeigt werden, daß sowohl die Selbergsche Zeta-Funktion als auch die dynamische

Zeta-Funktion bezüglich der irreduziblen Darstellungen der Symmetriegruppe  $G$  faktorisieren.

Zu diesem Zweck werden, analog der Abkürzung (3.79), die Gewichte der periodischen Orbits des reduzierten Systems definiert:

$$t_{\tilde{p}} = \frac{1}{|\Lambda_{\tilde{p}}|} z^{n_{\tilde{p}}} e^{\beta \cdot A_{\tilde{p}}}, \quad (3.117)$$

wobei  $\Lambda_{\tilde{p}}$  das Produkt der expandierenden Eigenwerte von  $\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}}$  ist. Auch hierbei ist stets die  $z$ -Abhängigkeit der Gewichte zu beachten.

Der in (3.115) auftretenden Faktor  $|\det(\mathbb{1} - (\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^r)|^{-1}$  wird analog (3.88) entwickelt (hier wird wieder der Fall zweidimensionaler flächenerhaltender Abbildungen betrachtet):

$$|\det(\mathbb{1} - (\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^r)|^{-1} = |\Lambda_{\tilde{p}}|^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Lambda_{\tilde{p}}^{-kr}. \quad (3.118)$$

Außerdem ist

$$D(h_{\tilde{p}}^r) = D(h_{\tilde{p}})^r, \quad (3.119)$$

aufgrund der Definition von Darstellungen. Beides wird in (3.115) eingesetzt. Anschließend werden weitere Manipulationen durchgeführt, wobei (3.117), (3.83) und die Linearität der Spur ausgenutzt werden:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{tr } \mathcal{L}^n &= \sum_{\tilde{p}} n_{\tilde{p}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \text{tr } D(h_{\tilde{p}})^r (k+1) (z^{n_{\tilde{p}}} e^{\beta \cdot A_{\tilde{p}}} |\Lambda_{\tilde{p}}|^{-1} \Lambda_{\tilde{p}}^{-k})^r \\ &= \sum_{\tilde{p}} n_{\tilde{p}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \text{tr } D(h_{\tilde{p}})^r (k+1) t_{\tilde{p}}^r \Lambda_{\tilde{p}}^{-kr} \\ &= \text{tr} \left[ \sum_{\tilde{p}} n_{\tilde{p}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) D(h_{\tilde{p}})^r t_{\tilde{p}}^r \Lambda_{\tilde{p}}^{-kr} \right] \\ &= \text{tr} \left[ \sum_{\tilde{p}} z \frac{d}{dz} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{r} D(h_{\tilde{p}})^r t_{\tilde{p}}^r \Lambda_{\tilde{p}}^{-kr} \right] \\ &= \text{tr} \left[ - \sum_{\tilde{p}} z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \log \left( \mathbb{1} - D(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right)^{k+1} \right] \\ &= -z \frac{d}{dz} \text{tr} \log \prod_{\tilde{p}} \prod_{k=0}^{\infty} \left( \mathbb{1} - D(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right)^{k+1} \\ &= -z \frac{d}{dz} \log \det \prod_{\tilde{p}} \prod_{k=0}^{\infty} \left( \mathbb{1} - D(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right)^{k+1} \end{aligned}$$

$$= -z \frac{d}{dz} \log \prod_{\tilde{p}} \prod_{k=0}^{\infty} \det \left( \mathbb{1} - D(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right)^{k+1}. \quad (3.120)$$

Wegen (3.74), (3.75) und (3.87) gilt aber auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{tr } \mathcal{L}^n = -z \frac{d}{dz} \log Z(z) \quad (3.121)$$

für  $|z| < \lambda_0^{-1}$ . Aufgrund von (3.120) und (3.121) ist die folgende Gleichung zunächst für  $|z| < \lambda_0^{-1}$  und nur bis auf einen konstanten Faktor gültig:

$$Z(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{\tilde{p}} \det \left( \mathbb{1} - D(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right)^{k+1}. \quad (3.122)$$

Da aber nach (3.85) oder auch (3.89)  $Z(0) = 1$  gilt, muß der konstante Faktor gleich 1 sein, so daß in (3.122) echte Gleichheit besteht. Ferner ist (3.122) nach dem Identitätssatz für alle  $z \in \mathbb{C}$  erfüllt, denn  $Z(z)$  ist eine ganze Funktion.

Mit (3.122) hat man, als Analogon zu (3.89), die Selbergsche Zeta-Funktion in ihrer symmetriereduzierten Gestalt, abhängig nur von den periodischen Orbits des reduzierten Systems, gefunden.

Sie setzt sich, wie (3.89), aus dynamischen Zeta-Funktionen  $1/\zeta_k$  zusammen:

$$Z(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta_k^{k+1}}(z). \quad (3.123)$$

Diese Funktionen sind schon durch (3.91) bekannt; ausgedrückt durch die periodischen Orbits des reduzierten Systems nehmen sie hingegen folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{\zeta_k}(z) = \prod_{\tilde{p}} \det \left( \mathbb{1} - D(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right). \quad (3.124)$$

Nun kann man ausnutzen, daß es eine zur regulären Darstellung  $D$  äquivalente Darstellung gibt, die sich blockdiagonal aus den irreduziblen Darstellungen  $D_\alpha$  zusammensetzt. Mit (3.105) folgt nämlich

$$\det \left( \mathbb{1} - D(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right) = \prod_{\alpha} \det \left( \mathbb{1} - D_{\alpha}(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right)^{d_{\alpha}}. \quad (3.125)$$

Die dynamischen Zeta-Funktionen  $1/\zeta_k(z)$  faktorisieren daher in Teilstücke  $1/\zeta_{k,\alpha}(z)$ , die zu den irreduziblen Darstellungen  $D_\alpha$  gehören:

$$\frac{1}{\zeta_k}(z) = \prod_{\alpha} \frac{1}{\zeta_{k,\alpha}^{d_{\alpha}}}(z) \quad (3.126)$$

mit

$$\frac{1}{\zeta_{k,\alpha}}(z) = \prod_{\tilde{p}} \det \left( \mathbb{1} - D_\alpha(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right). \quad (3.127)$$

Da die dynamische Zeta-Funktion  $1/\zeta_0(z) = 1/\zeta(z)$  besonders wichtig ist, wird für diese die Faktorisierung nach den  $D_\alpha$  noch einmal gesondert angegeben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta}(z) &= \prod_{\alpha} \frac{1}{\zeta_\alpha^{d_\alpha}}(z) \\ &= \prod_{\alpha} \left( \prod_{\tilde{p}} \det \left( \mathbb{1} - D_\alpha(h_{\tilde{p}}) t_{\tilde{p}} \right) \right)^{d_\alpha}. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Die Selbergsche Zeta-Funktion selbst faktorisiert ebenfalls:

$$Z(z) = \prod_{\alpha} Z_\alpha(z)^{d_\alpha}, \quad (3.129)$$

wobei sich die Teilfunktionen  $Z_\alpha(z)$  aus den  $1/\zeta_{k,\alpha}(z)$  zusammensetzen:

$$\begin{aligned} Z_\alpha(z) &= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta_{k,\alpha}}(z) \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{\tilde{p}} \det \left( \mathbb{1} - D_\alpha(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right)^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Der letzte Schritt besteht nun darin, die Determinanten durch die Charaktere der Gruppenelemente  $h_{\tilde{p}}$  in den irreduziblen Darstellungen auszudrücken, denn die Charaktere lassen sich in der Regel in Standardtabellen nachschlagen. Für eindimensionale irreduzible Darstellungen gilt einfach

$$\begin{aligned} \det \left( \mathbb{1} - D_\alpha(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right) &= 1 - \text{tr } D_\alpha(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \\ &= 1 - \chi_\alpha(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Für zweidimensionale Darstellungen erhält man einen etwas komplizierteren Ausdruck:

$$\det \left( \mathbb{1} - D_\alpha(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right) = 1 - \chi_\alpha(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} + \frac{1}{2} (\chi_\alpha(h_{\tilde{p}})^2 - \chi_\alpha(h_{\tilde{p}}^2)) \left( \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right)^2. \quad (3.132)$$

Auch für höherdimensionale Darstellungen lassen sich Formeln herleiten, die allerdings zunehmend unübersichtlich werden.

Jede der Teilstufen  $1/\zeta_{k,\alpha}$  bzw.  $Z_\alpha$  kann also mit Hilfe der Charaktere von  $D_\alpha$  ausgewertet werden. Die Teilstufen liefern jeweils einen Teil der Nullstellenmenge der jeweiligen dynamischen Zeta-Funktion  $1/\zeta_k(z)$  bzw. der Selbergschen Zeta-Funktion  $Z(z)$ .

In der Menge der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe ist immer die ein-dimensionale Darstellung  $A_1$  enthalten, die jedem Gruppenelement einfach die Zahl 1 zuordnet. Für jedes Gruppenelement  $h \in G$  ist  $\chi_{A_1}(h) = 1$ . Daher und aufgrund von (3.128) und (3.131) besitzt die zu  $A_1$  gehörende Teilstufe der dynamischen Zeta-Funktion  $1/\zeta(z)$ ,

$$\frac{1}{\zeta_{A_1}}(z) = \prod_{\tilde{p}} (1 - t_{\tilde{p}}) \quad (3.133)$$

eine besonders einfache Gestalt, die formal mit (3.92) übereinstimmt. Sie ist auch die interessanteste aller Teilstufen, denn der (inverse) führende Eigenwert von  $\mathcal{L}$  ist stets in ihrer Nullstellenmenge enthalten [CviEck93]. Hieran wird der Nutzen der Symmetriereduktion deutlich: Durch die Auswertung von (3.133) anstelle von (3.92) erhält man bei gleichbleibendem numerischen Aufwand, also bei gleicher Anzahl berücksichtigter Orbits, eine feinere Abtastung des Phasenraumes, da der Fundamentalbereich kleiner ist als der gesamte Phasenraum. Somit bekommt man genauere Ergebnisse.

Genaugenommen wurde die Gültigkeit der Faktorisierung (3.128) der dynamischen Zeta-Funktion bisher nur für den Fall zweidimensionaler flächenerhaltender Abbildungen gezeigt. Man kann aber zeigen, daß (3.128) allgemein gültig ist, nämlich indem man von (3.115) zur asymptotischen Spurformel übergeht. Mit der Näherung  $|\det(\mathbf{1} - (\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^r)| \rightarrow |\Lambda_{\tilde{p}}|^r$ , vgl. (3.71), erhält man

$$\Omega(z) = \sum_{\tilde{p}} n_{\tilde{p}} \sum_{r=1}^{\infty} \text{tr } D(h_{\tilde{p}}^r) t_{\tilde{p}}^r. \quad (3.134)$$

Das ist dieselbe Funktion  $\Omega(z)$  wie in (3.78) (Beweis in Anhang D). Indem man diesen Ausdruck auf die gleiche Weise umformt, wie es oben mit der exakten symmetriereduzierten Spurformel geschehen ist, zeigt man, daß

$$\Omega(z) = -z \frac{d}{dz} \log \frac{1}{\zeta}(z) \quad (3.135)$$

mit  $1/\zeta(z)$  wie in (3.128) gilt. Da diese Gleichung aber nach (3.93) auch für die nicht symmetriereduzierte dynamische Zeta-Funktion (3.92) gilt, und ferner (3.134) zu (3.78) äquivalent ist, handelt es sich bei (3.128) und (3.92) um ein und dieselbe Funktion (zunächst nur bis auf einen konstanten Faktor; man kann aber wie bei (3.122) argumentieren).

Für die Teilfunktionen  $Z_\alpha(z)$  der Selbergschen Zeta-Funktion existieren neben (3.130) auch Darstellungen, die (3.85) ähneln und ebenfalls von den Charakteren  $\chi_\alpha(h_{\tilde{p}})$  abhängen. Diese Darstellungen haben den Vorteil, daß sie nicht nur für zweidimensionale flächenerhaltende Abbildungen gelten; außerdem erweist sich ihre Verwendung bei der numerischen Auswertung der  $Z_\alpha$  als günstiger als die Verwendung von (3.130).

Um diese Darstellungen herzuleiten, wird (3.115) mit Hilfe von (3.106) in eine Summe über die irreduziblen Darstellungen umgeschrieben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{tr} \mathcal{L}^n = \sum_{\alpha} d_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{tr}_{\alpha} \mathcal{L}^n \quad (3.136)$$

mit den „Teilspurformeln“

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{tr}_{\alpha} \mathcal{L}^n = \sum_{\tilde{p}} n_{\tilde{p}} \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{\alpha}(h_{\tilde{p}}^r) \frac{z^{n_{\tilde{p}} r} e^{r \beta \cdot A_{\tilde{p}}}}{|\det(\mathbf{1} - (\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^r)|}. \quad (3.137)$$

Daher kann man die Teilfunktionen  $Z_\alpha(z)$  folgendermaßen schreiben:

$$Z_{\alpha}(z) = \exp \left( - \sum_{\tilde{p}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\chi_{\alpha}(h_{\tilde{p}}) z^{n_{\tilde{p}} r} e^{r \beta \cdot A_{\tilde{p}}}}{|\det(\mathbf{1} - (\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^r)|} \right), \quad (3.138)$$

denn diese sind durch logarithmische Ableitungen mit den Teilspurformeln verknüpft,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{tr}_{\alpha} \mathcal{L}^n = -z \frac{d}{dz} \log Z_{\alpha}(z), \quad (3.139)$$

woraus mit (3.136) und (3.121) folgt:

$$\begin{aligned} -z \frac{d}{dz} \log \prod_{\alpha} Z_{\alpha}(z)^{d_{\alpha}} &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{tr} \mathcal{L}^n \\ &= -z \frac{d}{dz} \log Z(z). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Es gilt also (3.129), hier jedoch mit  $Z_{\alpha}(z)$  wie in (3.138); zunächst ist (3.129) nur bis auf einen konstanten Faktor gültig, vergleiche jedoch die Argumentation bei (3.122). Als „Probe“ kann zudem im Falle zweidimensionaler flächenerhaltender Abbildungen mit einer ähnlichen Rechnung wie bei (3.120) die Darstellung (3.138) von  $Z_{\alpha}(z)$  in die Darstellung (3.130) umgeformt werden.

### 3.5.3 Anwendung auf das Zweimuldensystem

In diesem Unterabschnitt wird die bisher erarbeitete Theorie auf das Zweimuldensystem angewandt. Es wird gezeigt, daß es sich bei den Matrizen  $\mathbf{J}_{\tilde{p}}$  und  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}$  um

$2 \times 2$ -Matrizen handelt, da das nichtreduzierte Zweimuldensystem in den Variablen  $\beta$  und  $l$  kontinuierlich, in der Variable  $\mu$  hingegen diskret ist. Die möglichen Gestalten der  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}$  werden angegeben sowie ein Verfahren,  $h_{\tilde{p}}$ , also den Symmetrietyp von  $\tilde{p}$ , zu bestimmen.

Für das nichtreduzierte Zweimuldensystem mit der Abbildung  $\hat{F}$ , die nach (1.12) durch

$$\beta' = \hat{F}_\beta(\beta, l) \quad (3.141a)$$

$$\hat{F} : \quad l' = \hat{F}_l(\beta, l) \quad (3.141b)$$

$$\mu' = \hat{F}_\mu(\mu) \quad (3.141c)$$

mit den Komponenten

$$\hat{F}_\beta(\beta, l) = \beta - \pi - \Theta(l') \quad (3.141d)$$

$$\hat{F}_l(\beta, l) = l + 2R_0 \sin \beta \quad (3.141e)$$

$$\hat{F}_\mu(\mu) = 1 - \mu \quad (3.141f)$$

definiert ist, lautet der Perron-Frobenius-Operator wie folgt:

$$\mathcal{L}^n \rho(\beta', l', \mu') = \sum_{\mu=0}^1 \int_{S^1} d\beta \int_{-1}^1 dl \delta \left[ (\beta', l') - \left( \hat{F}_\beta^n(\beta, l), \hat{F}_l^n(\beta, l) \right) \right] \delta_{\mu', \hat{F}_\mu^n(\mu)} \rho(\beta, l, \mu). \quad (3.142)$$

Dieser Operator beschreibt in korrekter Weise die Iteration von Dichteverteilungen  $\rho(\beta, l, \mu)$  im Phasenraum  $\hat{\Gamma} = S^1 \times [-1, 1] \times \{0, 1\}$ . Entsprechend kann man auch den in (3.52) eingeführten verallgemeinerten Entwicklungsoperator  $\mathcal{L}_\beta^n$  für das Zweimuldensystem definieren. Auf die Angabe von  $\mathcal{L}_\beta^n$  für das Zweimuldensystem wird hier verzichtet, um Verwechslungen der beiden verschiedenen Variablen  $\beta$  zu vermeiden.

Die Abbildung  $\hat{F}$  ist nur in den Variablen  $\beta$  und  $l$  differenzierbar. Die Diracsche Delta-Funktion in (3.142) bezieht sich daher nur auf die  $\beta$ - und die  $l$ -Komponente des Systems, während der  $\mu$ -Komponente durch ein Kronecker-Symbol Rechnung getragen wird. Dementsprechend ist die Spur von  $\mathcal{L}^n$  für das Zweimuldensystem folgendermaßen zu berechnen:

$$\text{tr } \mathcal{L}^n = \sum_{\mu=0}^1 \int_{S^1} d\beta \int_{-1}^1 dl \delta \left[ (\beta, l) - \left( \hat{F}_\beta^n(\beta, l), \hat{F}_l^n(\beta, l) \right) \right] \delta_{\mu, \hat{F}_\mu^n(\mu)}. \quad (3.143)$$

Damit kann die Herleitung der Spurformeln auf das Zweimuldensystem übertragen werden. Dabei zeigt sich, daß als Monodromiematrizen  $\mathbf{J}_p$  und  $\mathbf{J}_{\tilde{p}}$  die  $2 \times 2$ -Matrizen der Ableitungen der  $\beta$ - und  $l$ -Komponenten von  $\hat{F}^{n_p}$  bzw.  $\hat{F}^{n_{\tilde{p}}}$  nach  $\beta$  und  $l$  einzusetzen sind. Analoges gilt für die Jacobi-Matrizen  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}$  der im Phasenraum  $\hat{\Gamma}$  wirkenden Symmetrioperationen (1.14) aus  $\mathcal{C}_{2v}$ , denn diese sind ebenfalls

nur in  $\beta$  und  $l$  differenzierbar. Deren Jacobi-Matrizen lauten daher folgendermaßen:

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.144a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.144b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.144c)$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.144d)$$

Angenommen, für einen bestimmten periodischen Orbit  $\tilde{p}$  des reduzierten Zweimuldensystems wurde der expandierende Eigenwert  $\Lambda'_{\tilde{p}}$  von  $\mathbf{J}_{\tilde{p}}$  berechnet. Dann ist der expandierende Eigenwert  $\Lambda_{\tilde{p}}$  von  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}\mathbf{J}_{\tilde{p}}$  leicht anzugeben. Im Falle  $h_{\tilde{p}} = e$  oder  $h_{\tilde{p}} = c_2$  gilt  $\Lambda_{\tilde{p}} = \Lambda'_{\tilde{p}}$ . Ist jedoch  $h_{\tilde{p}} = \sigma_x$  oder  $h_{\tilde{p}} = \sigma_y$ , so gilt  $\Lambda_{\tilde{p}} = -\Lambda'_{\tilde{p}}$ .

Wie kann man für einen gegebenen Orbit  $\tilde{p}$  des reduzierten Zweimuldensystems das zugehörige Gruppenelement  $h_{\tilde{p}}$  ermitteln? Für ein  $\tilde{x} \in \tilde{p}$  ist herauszufinden, in welchem Phasenraumbereich  $h_{\tilde{p}}^{-1}(\tilde{\Gamma}) \subset \hat{\Gamma}$  sich  $f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x})$  befindet, vgl. (3.116). Hierfür kommen die folgenden vier Teilmengen von  $\hat{\Gamma}$  in Frage:

$$\begin{aligned} e(\tilde{\Gamma}) &= S^1 \times [0, 1] \times \{0\}, \\ \sigma_x(\tilde{\Gamma}) &= S^1 \times [-1, 0] \times \{0\}, \\ \sigma_y(\tilde{\Gamma}) &= S^1 \times [-1, 0] \times \{1\}, \\ c_2(\tilde{\Gamma}) &= S^1 \times [0, 1] \times \{1\}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Die Bestimmung von  $h_{\tilde{p}}$  lässt sich in einfacher Weise mit Hilfe der Symbolischen Dynamik des reduzierten Systems durchführen. An der Symbolfolge von  $\tilde{p}$  kann man ablesen, welche der vier Phasenraumsegmente in welcher Reihenfolge durch den in  $\tilde{x}$ , und damit in  $e(\tilde{\Gamma}) = \tilde{\Gamma}$  startenden periodischen Orbit des nichtreduzierten Systems durchlaufen werden. Insbesondere ist so festgelegt, in welchem Bereich  $f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x})$  liegt.

Bei jeder Iteration von  $\hat{F}$  ändert sich der Wert der Variable  $\mu$ . Ferner bleibt das Vorzeichen von  $l$  entweder gleich, oder es ändert sich. Der erstere Fall entspricht der Wirkung von  $c_2$ , der letztere der Wirkung von  $\sigma_y$ . Dementsprechend kann man jedem in der Symbolfolge von  $\tilde{p}$  auftretenden Symbol ein Gruppenelement zuordnen. Die Symbole  $[= >]$  und  $[= <]$  bekommen jeweils das Element  $c_2$  zugewiesen und die Symbole  $[ \neq > ]$  und  $[ \neq < ]$  das Element  $\sigma_y$ . Multipliziert man die sich so ergebenden Gruppenelemente, so erhält man  $h_{\tilde{p}}^{-1}$ , d. h.  $f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x})$  liegt in  $h_{\tilde{p}}^{-1}(\tilde{\Gamma})$ . Damit erhält man gleichzeitig auch  $h_{\tilde{p}}$ , denn in  $\mathcal{C}_{2v}$  ist jedes Element selbstinvers.

Dieses Verfahren ist im Prinzip auf Systeme, die invariant unter anderen Symmetriegruppen sind, übertragbar, sofern diese Systeme entsprechende symmetrierte Symbolische Dynamiken besitzen; siehe z. B. [Jun97]. Im allgemeinen ist allerdings darauf zu achten, daß man diejenige zyklische Permutation der Symbolfolge von  $\tilde{p}$  verwendet, die mit dem Startpunkt  $\tilde{x} \in \tilde{p}$  verträglich ist. Die Wahl einer anderen zyklischen Permutation entspricht der Wahl eines anderen Startpunktes  $\tilde{x}' \in \tilde{p}$ , und man erhält möglicherweise anstelle von  $h_{\tilde{p}}$  ein dazu konjugiertes Gruppenelement, siehe Anhang D. Im Falle des Zweimuldensystems hat man jedoch die Freiheit, irgendeine zyklische Permutation der Symbolfolge von  $\tilde{p}$  zu wählen, da  $C_{2v}$  Abelsch ist.

## 3.6 Die Cycle Expansion

Das Problem, die Eigenwerte von  $\mathcal{L}$  zu bestimmen, ist im Grunde durch die Zeta-Funktionen vollständig gelöst. In der Regel muß man zu deren exakter Berechnung jedoch unendlich viele periodische Orbits kennen. In der Praxis ist daher meist nur eine näherungsweise Berechnung möglich. Hierfür wird in diesem Abschnitt ein Verfahren vorgestellt, die *Cycle Expansion*. Damit kann man, falls das betrachtete System eine Symbolische Dynamik mit nur endlich vielen Pruning-Regeln besitzt, bereits dann erstaunlich genaue Ergebnisse erzielen, wenn nur die kürzesten periodischen Orbits des Systems bekannt sind [Cvi88].

Es wird im folgenden davon ausgegangen, daß *sämtliche* periodischen Orbits (des nichtreduzierten oder des reduzierten Systems, je nach Anwendung) bis zu einer bestimmten Länge  $k$  und damit deren Stabilitäten und Gewichte bekannt sind. Das sind  $K$  verschiedene Orbits. Angenommen, man möchte die führende Nullstelle der dynamischen Zeta-Funktion (3.92), oder, formal identisch, von (3.133) bestimmen. Da nur die ersten  $K$  Orbits bekannt sind, könnte man auf die Idee kommen, das unendliche Produkt durch ein endliches Produkt der Form

$$\frac{1}{\zeta^{(K)}(z)} = \prod_{p=1}^K (1 - t_p) \quad (3.146)$$

zu approximieren und anzunehmen, die dynamische Zeta-Funktion besäße genau dort Nullstellen, wo einer ihrer Faktoren null wird. Die führende Nullstelle von  $1/\zeta(z)$  wäre dann eventuell durch die Nullstelle einer der Faktoren von (3.146) gegeben.

Mit diesem „Anfängerfehler“ [Art+90a] produziert man jedoch falsche Ergebnisse, denn das *unendliche Produkt* (3.92) bzw. (3.133) ist keineswegs *konvergent* [Lor97] in dem Sinne, daß es genau dann null wird, wenn einer seiner Faktoren null ist.

Warum das so ist, kann wie folgt begründet werden: Die dynamische Zeta-Funktion besitzt zwar, im Gegensatz zur Selbergschen Zeta-Funktion, Polstellen, ist also eine auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion. Die führende Polstelle ist jedoch weiter vom Ursprung entfernt als die führende Nullstelle [Aur90, Art+90a]. Letztere liegt daher innerhalb des Konvergenzradius einer Potenzreihenentwicklung von  $1/\zeta(z)$  um 0. Das endliche Produkt (3.146) ist wegen (3.79) ein Polynom in  $z$  vom Grade  $N \geq K \gg k$ , es ist  $1/\zeta^{(K)}(z) = 1 - \sum_{n=1}^N a_n z^n$ . Die Koeffizienten  $a_n$  für  $n = 1, \dots, k$  stimmen exakt mit denen der Potenzreihenentwicklung von  $1/\zeta(z)$  überein, siehe auch unten. Wie aber noch gezeigt wird, weichen die höheren Koeffizienten des Polynoms drastisch von den entsprechenden „echten“ Koeffizienten ab, was zu einer starken Verschiebung der führenden Nullstelle führt.

Bei Existenz einer Symbolischen Dynamik mit endlich vielen Pruning-Regeln konvergiert die Potenzreihenentwicklung von  $1/\zeta(z)$  sehr schnell. Daher erhält man eine sehr gute Näherung, wenn man sich beim Ausmultiplizieren von (3.146) auf Terme der Ordnung kleiner oder gleich  $k$  in  $z$  beschränkt. Das bedeutet Approximation von  $1/\zeta(z)$  durch ein Polynom vom Grade  $k$ . Da diese nach der  $k$ -ten Ordnung abgebrochene Potenzreihenentwicklung von den periodischen Orbits bis zur Länge  $k$  abhängt, bezeichnet man sie als *Cycle Expansion k-ter Ordnung*.

Im nachfolgenden Unterabschnitt wird die Cycle Expansion der dynamischen Zeta-Funktion genauer betrachtet. Durch ein geschicktes Umordnen der Summanden lassen sich die erstaunlichen Konvergenzeigenschaften erklären.

Der darauffolgende Unterabschnitt beschäftigt sich mit der Selbergschen Zeta-Funktion  $Z(z)$ . Sie läßt sich ebenfalls um 0 in eine Potenzreihe entwickeln. Diese konvergiert sogar auf ganz  $\mathbb{C}$ . Auch für  $Z(z)$  existiert eine Cycle Expansion  $k$ -ter Ordnung, die sich aus den periodischen Orbits bis zur Länge  $k$  errechnen läßt.

In beiden Unterabschnitten wird die Cycle Expansion zunächst für die nicht symmetriereduzierte Version der jeweiligen Zeta-Funktion eingeführt. Es wird sich allerdings zeigen, daß sich das Verfahren in einfacher Weise auf die einzelnen Teilfunktionen, die den irreduziblen Darstellungen zugeordnet werden, übertragen läßt.

### 3.6.1 Cycle Expansion der dynamischen Zeta-Funktion

Um eine Potenzreihenentwicklung der dynamischen Zeta-Funktion zu erhalten, wird zunächst das unendliche Produkt formal ausmultipliziert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(z)} &= \prod_p (1 - t_p) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_1, p_2, \dots, p_j} (-1)^j t_{p_1} t_{p_2} \cdots t_{p_j}. \end{aligned} \tag{3.147}$$

Länge $n_p$	Symbolstring $p$
1	0, 1
2	01
3	001, 011
4	0001, 0011, 0111
5	00001, 00011, 00101, 00111, 01011, 01111

Tabelle 3.3: Irreduzible Symbolstrings bis zur Länge 5 einer binären Symbolischen Dynamik.

Die Summe über  $p_1, p_2, \dots, p_j$  ist eine Summe über alle verschiedenen Kombinationen von  $j$  unterschiedlichen Primzyklen. Die auftretenden Kombinationen sind verschieden in dem Sinne, daß sie nicht durch Permutation der  $p_i$  auseinander hervorgehen. Das Produkt  $t_{p_1}t_{p_2} \cdots t_{p_j}$  kann als Gewicht eines *Pseudo-Orbits*  $p_1 + p_2 + \dots + p_j$  aufgefasst werden, der die Primzyklen  $p_1, p_2, \dots, p_j$  nacheinander einmal durchläuft.

Werden die in (3.147) auftretenden Summanden nach Potenzen von  $z$  sortiert, so ergibt sich eine Potenzreihe:

$$\frac{1}{\zeta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (3.148)$$

mit  $c_0 = 1$ . Die Reihe konvergiert für alle  $z$  von hinreichend kleinem Betrage.

Eine Cycle Expansion  $k$ -ter Ordnung erhält man nun dadurch, daß man nur die Summanden bis zur  $k$ -ten Ordnung in  $z$  berücksichtigt. Das entspricht, wie oben dargelegt, dem Ausmultiplizieren des endlichen Produktes (3.146) und anschließendem Verwerfen der Terme, die eine höhere Ordnung als  $k$  besitzen. Damit ist auch schon gesagt, wie man eine Cycle Expansion der dynamischen Zeta-Funktion in der Praxis durchführt. Die Konvergenzeigenschaften sind hingegen noch unklar.

Die Konvergenz der Potenzreihe (3.148) läßt sich am einfachsten anhand des Beispiels eines Systems, das eine vollständige binäre Symbolische Dynamik besitzt, diskutieren. Jeder Primzyklus  $p$  dieses Systems läßt sich mit seinem irreduziblen Symbolstring aus den Symbolen 0 und 1 kennzeichnen. Tabelle 3.3 zeigt alle bezüglich zyklischer Permutation verschiedenen irreduziblen binären Symbolstrings bis zur Länge 5, wobei hier der Querstrich, der die periodische Fortsetzung symbolisieren soll, der Übersicht halber weggelassen wird. Die dynamische Zeta-Funktion des Beispielsystems lautet damit folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta}(z) = & (1 - t_0)(1 - t_1)(1 - t_{01})(1 - t_{001})(1 - t_{011})(1 - t_{0001}) \\ & (1 - t_{0011})(1 - t_{0111})(1 - t_{00001})(1 - t_{00011})(1 - t_{00101}) \\ & (1 - t_{00111})(1 - t_{01011})(1 - t_{01111}) \dots \end{aligned} \quad (3.149)$$

Das Produkt wird nun ausmultipliziert, und es werden nur die Terme bis zur fünften Potenz in  $z$  notiert, was einer Cycle Expansion fünfter Ordnung entspricht:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta}(z) = & 1 - t_0 - t_1 - t_{01} - t_{001} - t_{011} - t_{0001} - t_{0011} - t_{0111} - t_{00001} \\ & - t_{00011} - t_{00101} - t_{00111} - t_{01011} - t_{01111} - \dots \\ & + t_0 t_1 + t_0 t_{01} + t_0 t_{001} + t_0 t_{011} + t_0 t_{0001} + t_0 t_{0011} + t_0 t_{0111} + \dots \\ & + t_1 t_{01} + t_1 t_{001} + t_1 t_{011} + t_1 t_{0001} + t_1 t_{0011} + t_1 t_{0111} + \dots \\ & + t_{01} t_{001} + t_{01} t_{011} + \dots \\ & - t_0 t_1 t_{01} - t_0 t_1 t_{001} - t_0 t_1 t_{011} - \dots \end{aligned} \quad (3.150)$$

Man erhält ein übersichtlicheres Ergebnis, wenn man die Terme in bestimmter Weise umordnet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta}(z) = & 1 - t_0 - t_1 - (t_{01} - t_0 t_1) - (t_{001} - t_0 t_{01}) - (t_{011} - t_{01} t_1) \\ & - (t_{0001} - t_0 t_{001}) - (t_{0011} - t_0 t_{011} - t_{001} t_1 + t_0 t_{01} t_1) - (t_{0111} - t_{011} t_1) \\ & - (t_{00001} - t_0 t_{0001}) - (t_{00011} - t_0 t_{0011} - t_{0001} t_1 + t_0 t_{001} t_1) \\ & - (t_{00101} - t_{001} t_{01}) - (t_{00111} - t_0 t_{0111} - t_{0011} t_1 + t_0 t_{011} t_1) \\ & - (t_{01011} - t_{01} t_{011}) - (t_{01111} - t_{011} t_{11}) - \dots \end{aligned} \quad (3.151)$$

Die Terme sind jetzt nach aufsteigender Potenz von  $z$  sortiert, und die in Klammern stehenden Terme besitzen jeweils die gleiche Potenz in  $z$ . Man betrachte zunächst die Klammern, in denen jeweils zwei Terme zusammengefaßt sind. Der erste Term ist stets das Gewicht eines Primzyklus  $t_{p_1 p_2}$ , dessen Symbolstring sich aus den kürzeren Strings  $p_1$  und  $p_2$  zusammensetzt. Der zweite Term ist das Produkt  $t_{p_1} t_{p_2}$  aus den Gewichten der kürzeren Primzyklen  $p_1$  und  $p_2$ , also das Gewicht des Pseudo-Orbits  $p_1 + p_2$ . Ist die Abbildung des betrachteten Systems wenigstens stückweise stetig, so verläuft der Pseudo-Orbit  $p_1 + p_2$  im Phasenraum in der Nähe des echten Orbits  $p_1 p_2$ , *beschattet* diesen also; vgl. hierzu den Schluß von Kapitel 2. Daher ist das Gewicht  $t_{p_1} t_{p_2}$  des Pseudo-Orbits etwa genauso groß wie  $t_{p_1 p_2}$ . Die paarweise in Klammern stehenden Terme heben sich also gegenseitig fast auf.

Gleiches gilt für die Klammern, in denen vier Terme zusammengefaßt sind. Auch hier ist jeweils der erste Term das Gewicht eines echten Orbits, während die übrigen drei Terme zu verschiedenen Pseudo-Orbits gehören, die den echten Orbit beschatten. Da stets zwei Terme mit positivem Vorzeichen versehen sind, die anderen zwei hingegen mit negativem, heben sie sich ebenfalls fast auf.

Interessant ist, daß der vierte Term jeweils zu einem Pseudo-Orbit gehört, der sich aus drei Teilorbits zusammensetzt. Erhöht man die Ordnung der Cycle-Expansion, so tauchen immer kompliziertere Pseudo-Orbits auf, die aus immer mehr Teilstücken bestehen. Tendenziell gilt: Je länger ein Primzyklus ist, umso

größer wird die Zahl der Terme von Pseudo-Orbits, die den Primzyklus beschatten. Jedoch erhält man jedesmal, wenn man die Gewichte eines Primzyklus und der zugehörigen Pseudo-Orbits zusammenfaßt, genauso viele Terme mit positivem wie mit negativem Vorzeichen, so daß sie sich beinahe aufheben. Es scheint, daß man dies mit Hilfe sogenannter *Markov-Graphen* allgemein beweisen kann [Aur90].

Ferner kann gezeigt werden, daß ein Primzyklus und die ihn beschattenden Pseudo-Orbits im Phasenraum um so näher beieinander liegen, je länger der Primzyklus ist. Der Effekt des Sich-Aufhebens der Terme wird also mit zunehmender Länge des betreffenden Primzyklus stärker, und zwar so sehr, daß der Fehler, der durch das Abbrechen der Reihenentwicklung (3.148) entsteht, exponentiell mit der Ordnung abnimmt [Cvi88, Art+90a, Aur90]. Die Potenzreihe (3.148) konvergiert also exponentiell schnell. Das ist besonders erstaunlich, da die Zahl der zu berücksichtigenden Terme mit der Ordnung der Cycle Expansion exponentiell zunimmt.

Die Primzyklen der Länge 1 sind die einzigen Orbits, die sich nicht beschatten lassen. Allgemein bezeichnet man solche Orbits als *fundamentale Orbits*. Sie bilden die topologischen Grundbausteine der Dynamik. Alle Orbits, auch die nichtperiodischen, lassen sich näherungsweise aus den fundamentalen Orbits zusammensetzen. Die fundamentalen Orbits leisten, da sie nicht beschattet werden, die dominanten Beiträge zur Cycle Expansion. Bei Systemen vom Typ des betrachteten Beispiels erhält man bei der Bestimmung der führenden Nullstelle der dynamischen Zeta-Funktion selbst in erster Ordnung, also mit der gröbsten Näherung  $1/\zeta(z) \approx 1 - t_0 - t_1$ , bereits erstaunlich genaue Ergebnisse. Die längeren Orbits bewirken lediglich kleinere Korrekturen.

Die bisherigen Überlegungen können auf jedes System verallgemeinert werden, das eine überdeckende Symbolische Dynamik mit endlich vielen Symbolen besitzt, sofern die Anzahl der *Pruning-Regeln* endlich ist. Dann gibt es nämlich nur eine endliche Anzahl fundamentaler Orbits [Cvi+C]. Ab einer bestimmten Ordnung hingegen heben sich alle Terme durch Beschattung fast auf, was die exponentiell schnelle Konvergenz der Cycle Expansion sicherstellt. Gibt es hingegen unendlich viele Pruning-Regeln, dann gibt es auch unendlich viele Terme, die nicht durch Beschattung aufgehoben werden. Es ist dann nur eine sehr langsame Konvergenz zu erwarten.

Jetzt kann auch besser verstanden werden, warum das einfache Ausmultiplizieren von (3.146) unter Beibehaltung aller Terme zu falschen Ergebnissen führt. Die Koeffizienten des so entstehenden Polynoms vom Grade  $N$  sind bis zur  $k$ -ten Ordnung zwar korrekt. In den höheren Ordnungen jedoch treten nur Terme von Pseudo-Orbits auf; die Terme der Primzyklen, die von den Pseudo-Orbits beschattet werden, fehlen hingegen. Das gegenseitige Sich-Aufheben von Termen ist nicht mehr gewährleistet, und die Koeffizienten höherer Ordnung werden vom

Betrage her viel zu groß.

Das bisher Gesagte gilt für die nicht symmetriereduzierte dynamische Zeta-Funktion (3.92) sowie für die Teilfunktion (3.133), die zur irreduziblen Darstellung  $A_1$  gehört. Möchte man die Reihenentwicklungen der anderen Teilfunktionen berechnen, so sind die dann auftretenden gruppentheoretischen Faktoren zu beachten. Bei eindimensionalen irreduziblen Darstellungen sind nach (3.128) und (3.131) die Gewichte  $t_{\tilde{p}}$  durch  $\chi_\alpha(h_{\tilde{p}})t_{\tilde{p}}$  zu ersetzen. Beispielsweise ändern sich bei der  $C_{2v}$ -Symmetrie die Vorzeichen einiger Gewichte. Trotzdem gibt es bei den Cycle Expansions der anderen Teilfunktionen die gleichen Kombinationen sich aufhebender Terme wie bei der Teilfunktion  $1/\zeta_{A_1}$ , was in [CviEck93] für mehrere Beispielsysteme mit unterschiedlichen Symmetrien gezeigt wird. Für das Zweimuldensystem wird dies in Anhang E demonstriert. Dort werden Cycle Expansions aller vier Teilfunktionen der dynamischen Zeta-Funktion des Zweimuldensystems aufgeführt.

Die Auswertung von Teilfunktionen, die zu höherdimensionalen irreduziblen Darstellungen gehören, ist schwieriger. Zwar muß man auch bei diesen Funktionen das Produkt aus Faktoren, die zu den Orbits  $\tilde{p}$  der Länge  $n_{\tilde{p}} \leq k$  gehören, ausmultiplizieren und danach die Terme größerer Ordnung als  $k$  verwerfen. Die Faktoren sind aber von komplizierterer Gestalt. Sie sind beispielsweise bei zweidimensionalen Darstellungen durch (3.132) gegeben. Es ist zu beachten, daß darin  $t_{\tilde{p}}^2$ -Terme enthalten sind, die Beiträge der Ordnung  $2n_{\tilde{p}}$  liefern.

Die höheren dynamischen Zeta-Funktionen  $1/\zeta_k(z)$ <sup>1</sup> und ihre Teilfunktionen  $1/\zeta_{k,\alpha}(z)$  können formal auf die gleiche Weise entwickelt werden wie  $1/\zeta(z)$  bzw.  $1/\zeta_\alpha(z)$ . Aufgrund von (3.91) und (3.127) ist lediglich  $t_p$  durch  $t_p/\Lambda_p^k$  bzw.  $t_{\tilde{p}}$  durch  $t_{\tilde{p}}/\Lambda_{\tilde{p}}^k$  zu ersetzen.

### 3.6.2 Cycle Expansion der Selbergschen Zeta-Funktion

Die Cycle Expansion der Selbergschen Zeta-Funktion ist in der Durchführung nicht wesentlich komplizierter als die der dynamischen Zeta-Funktion; ihre Struktur ist jedoch wesentlich undurchsichtiger. Daher wird hier auf eine Diskussion der Konvergenzeigenschaften verzichtet. Stattdessen wird auf [Cvi91] verwiesen. Dort wird gezeigt, daß die Potenzreihenentwicklung von  $Z(z)$  schneller als exponentiell konvergiert. Bei einem  $d$ -dimensionalen System verhalten sich die Entwicklungskoeffizienten  $b_n$  asymptotisch gemäß  $|b_n| \approx u^{n^{1+1/d}}$  mit  $0 < u < 1$ .

Hier wird nur auf die Durchführung der Cycle Expansion eingegangen.

---

<sup>1</sup>Mit dem Index  $k$  von  $1/\zeta_k(z)$  ist hier nicht die Ordnung der Cycle Expansion gemeint.

Die durch (3.75) definierte Funktion besitzt um 0 die Potenzreihenentwicklung

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (3.152)$$

mit  $a_n = \text{tr } \mathcal{L}^n$ , siehe (3.74). Die Selbergsche Zeta-Funktion hat die Entwicklung

$$Z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (3.153)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten  $b_n$ . Man kann sowohl (3.85) als auch (3.89) entnehmen, daß  $b_0 = 1$  gilt (setze  $z = 0$ ). Aus dem Zusammenhang (3.87) zwischen  $T(z)$  und  $Z(z)$  folgt

$$T(z) = -z \frac{Z'(z)}{Z(z)} \quad (3.154)$$

und damit

$$T(z)Z(z) = -z \frac{d}{dz} Z(z), \quad (3.155)$$

was sich mit Hilfe der Potenzreihendarstellungen auch wie folgt schreiben läßt:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^n. \quad (3.156)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich für die Entwicklungskoeffizienten  $b_n$  der Selbergschen Zeta-Funktion für  $n \geq 1$  folgende Rekursionsformel:

$$b_n = -\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-j} b_j. \quad (3.157)$$

Man kann also die Koeffizienten  $b_1, \dots, b_k$  genau dann bestimmen, wenn die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_k$  bekannt sind. Eine Approximation von  $Z(z)$  durch ein Polynom  $k$ -ten Grades ist mit Hilfe der Rekursionsformel genau dann möglich, wenn eine Approximation der Spurformel (3.72) durch ein Polynom  $k$ -ten Grades gegeben ist. Dieses Polynom wiederum erhält man durch die numerische Auswertung der folgenden endlichen Summe über die  $K$  verschiedenen periodischen Orbits der Länge kleiner oder gleich  $k$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k a_n z^n &= \sum_{n=1}^k z^n \text{tr } \mathcal{L}^n \\ &= \sum_{p=1}^K \sum_{r=1}^{[k/n_p]} \frac{z^{n_p r} e^{r \beta \cdot A_p}}{|\prod_{j=1}^d (1 - \Lambda_{p,j}^r)|}. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Hierbei bezeichnet  $[\cdot]$  die Gauß-Klammer, und die  $\Lambda_{p,j}$  sind die verschiedenen Eigenwerte der  $d \times d$ -Matrix  $\mathbf{J}_p$ . Durch (3.157) und (3.158) sowie durch  $b_0 = 1$  ist eine Cycle Expansion  $k$ -ter Ordnung der Selbergschen Zeta-Funktion gegeben.

Möchte man Symmetrien berücksichtigen und Cycle Expansions der Teilfunktionen  $Z_\alpha(z)$ , siehe (3.138), berechnen, so ist völlig analog vorzugehen. Für  $Z_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(\alpha)} z^n$  gilt  $b_0^{(\alpha)} = 1$ . Wegen (3.139) sind die übrigen Koeffizienten durch

$$b_n^{(\alpha)} = -\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-j}^{(\alpha)} b_j^{(\alpha)}. \quad (3.159)$$

gegeben, wobei diesmal die Koeffizienten  $a_n^{(\alpha)} = \text{tr}_\alpha \mathcal{L}^n$  der Teilsturzformel (3.137) benötigt werden. Für eine Cycle Expansion  $k$ -ter Ordnung von  $Z_\alpha(z)$  ist also die endliche Summe

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k a_n^{(\alpha)} z^n &= \sum_{n=1}^k z^n \text{tr}_\alpha \mathcal{L}^n \\ &= \sum_{\tilde{p}=1}^K \sum_{r=1}^{[k/n_{\tilde{p}}]} \chi_\alpha(h_{\tilde{p}}^r) \frac{z^{n_{\tilde{p}} r} e^{r \beta \cdot A_{\tilde{p}}}}{\left| \prod_{j=1}^d (1 - \Lambda_{\tilde{p},j}^r) \right|}. \end{aligned} \quad (3.160)$$

numerisch zu berechnen. Hier sind  $\Lambda_{\tilde{p},j}$  die Eigenwerte von  $\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}}$ .

Mit den bisher vorgestellten Techniken können zwei der drei in Abschnitt 3.2 beschriebenen Anwendungsmöglichkeiten der Theorie in die Tat umgesetzt werden. Die Escape-Rate kann mit der dynamischen oder mit der Selbergschen Zeta-Funktion bestimmt werden, das Korrelationsspektrum mit der Selbergschen Zeta-Funktion. Diese Funktionen werden näherungsweise durch die Cycle Expansion bestimmt. Bei den Gewichten  $t_p$  bzw.  $t_{\tilde{p}}$  ist bei diesen Anwendungen stets  $\beta = 0$  zu setzen, weswegen  $\beta$  bisher nicht explizit als Argument der Zeta-Funktionen angegeben wurde.

Die Hilfsvariable  $\beta$  ist nur bei der dritten Anwendungsmöglichkeit, nämlich bei der Berechnung dynamischer Mittelwerte von Observablen, von Bedeutung. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie dynamische Mittelwerte mit Hilfe der dynamischen Zeta-Funktion berechnet werden.

### 3.7 Formel für dynamische Mittelwerte

Nach Abschnitt 3.2.3 ist in ergodischen Systemen der dynamische Mittelwert einer Observablen  $a$  gleich ihrem Erwartungswert  $\bar{a}$ . Der Erwartungswert ist nach (3.59) und (3.61) gegeben durch

$$\bar{a} = \left. \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \tilde{z}(\beta) \right|_{\beta=0} \quad (3.161)$$

mit  $\tilde{z}(\beta) = e^\kappa \lambda_0(\beta)$ , wobei  $\kappa$  die Escape-Rate des Systems und  $\lambda_0(\beta)$  der führende Eigenwert des Entwicklungsoperators  $\mathcal{L}_\beta$  ist. Bevor  $\bar{a}$  berechnet werden kann, muß also die Escape-Rate bekannt sein.

Der Eigenwert  $\lambda_0(\beta)$  ist das Inverse der führenden Nullstelle  $z(\beta)$  der dynamischen Zeta-Funktion  $1/\zeta(z, \beta)$ :

$$z(\beta) = \lambda_0(\beta)^{-1}. \quad (3.162)$$

Um eine Formel zur Berechnung von  $\bar{a}$  herzuleiten, wird folgende Abkürzung eingeführt:

$$\begin{aligned} s(\beta) &= \ln \tilde{z}(\beta) \\ &= \kappa + \ln \lambda_0(\beta). \end{aligned} \quad (3.163)$$

Die führende Nullstelle von  $1/\zeta(z, \beta)$  kann dann in Abhängigkeit von  $s$  geschrieben werden:

$$z(s) = e^{\kappa-s}. \quad (3.164)$$

Leitet man die Gleichung

$$0 = \frac{1}{\zeta}(z(s(\beta)), \beta) \quad (3.165)$$

an der Stelle  $\beta = 0$  nach  $\beta$  ab, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{\zeta}(z(s(\beta)), \beta) \Big|_{\beta=0} \\ &= \left[ \frac{\partial 1/\zeta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \beta} + \frac{\partial 1/\zeta}{\partial \beta} \right]_{\beta=0}. \end{aligned} \quad (3.166)$$

Mit (3.161) und (3.163) folgt hieraus

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{\partial s}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} \\ &= - \frac{\frac{\partial 1/\zeta}{\partial \beta}}{\frac{\partial 1/\zeta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}} \Big|_{\beta=0}. \end{aligned} \quad (3.167)$$

Aus (3.164) ergibt sich  $\partial z / \partial s = -e^{\kappa-s} = -z$ . Ferner ist  $\lambda_0(\beta = 0) = e^{-\kappa}$  und damit  $z(\beta = 0) = e^\kappa$ . Für den Erwartungswert von  $a$  kommt man daher zu folgendem Resultat:

$$\bar{a} = \frac{\frac{\partial 1/\zeta(z, \beta)}{\partial \beta}}{z \frac{\partial 1/\zeta(z, \beta)}{\partial z}} \Big|_{\beta=0, z=e^\kappa}. \quad (3.168)$$

Die Auswertung der Formel ist nicht wesentlich schwieriger als die Auswertung der dynamischen Zeta-Funktion selbst, denn sowohl für den Zähler als auch für den Nenner gibt es eine Cycle Expansion. Wie diese Cycle Expansions aufgebaut sind, sieht man, wenn man z. B. die Entwicklung der dynamischen Zeta-Funktion gemäß (3.151) betrachtet und die Operation  $\partial/\partial\beta$  bzw.  $z\partial/\partial z$  auf jeden einzelnen Summanden anwendet. Die praktische Durchführung dieser Cycle Expansions erfolgt auf ähnliche Weise wie bei der dynamischen Zeta-Funktion, wie nun gezeigt wird.

Der Zähler von (3.168) wird folgendermaßen ausgewertet: Aus (3.79) und der Produktregel folgt zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\beta} \frac{1}{\zeta}(z, \beta) \Big|_{\beta=0} &= \frac{\partial}{\partial\beta} \prod_p (1 - t_p) \Big|_{\beta=0} \\ &= - \sum_{p'} A_{p'} t_{p'} \prod_{p \neq p'} (1 - t_p). \end{aligned} \quad (3.169)$$

Betrachtet man nun die Summe und die Produkte als endliche Summe bzw. endliche Produkte über alle Orbits bis zur Länge  $k$ , multipliziert aus und verwirft anschließend alle Terme, deren Ordnung in  $z$  größer ist als  $k$ , so erhält man die Cycle Expansion  $k$ -ter Ordnung des Zählers von (3.168).

Bei der Auswertung des Nenners geht man völlig analog vor. Es gilt

$$\begin{aligned} z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\zeta}(z, \beta) &= z \frac{\partial}{\partial z} \prod_p (1 - t_p) \\ &= - \sum_{p'} n_{p'} t_{p'} \prod_{p \neq p'} (1 - t_p). \end{aligned} \quad (3.170)$$

Hier erhält man die Cycle Expansion  $k$ -ter Ordnung genau wie oben beschrieben. Setzt man noch  $z = e^\kappa$ , so ist der Erwartungswert  $\bar{a}$  der Observablen  $a$  in „ $k$ -ter Näherung“ bestimmt.

Selbstverständlich kann im Falle eines symmetrieeinvarianten Systems anstelle der dynamischen Zeta-Funktion  $1/\zeta(z)$  die Teilfunktion  $1/\zeta_{A_1}(z)$  verwandt werden. Formal ändert sich dann nichts an den genannten Formeln, außer daß  $p$  durch  $\tilde{p}$  zu ersetzen ist, aber es sind genauere Ergebnisse zu erwarten.

# Kapitel 4

## Anwendung der Theorie

Abgesehen vom Resonanzspektrum, sind die Größen, die sich mit Hilfe der Theorie der periodischen Orbits bestimmen lassen, grundsätzlich auch auf direktem Wege berechenbar, nämlich durch numerisches Ausrechnen ihrer Definitionsgleichungen. Die dazu erforderlichen Verfahren können mit vergleichsweise geringem Aufwand implementiert werden. Ist es da überhaupt lohnend, sich mit der komplizierten Theorie, die in Kapitel 3 beschrieben wurde, zu beschäftigen?

Eine Schwäche der direkten numerischen Berechnungen wurde bereits in Kapitel 3 erwähnt: Die Definitionen der Escape-Rate und des Erwartungswertes einer Observablen beinhalten einen Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ . Dieser ist numerisch niemals erreichbar. Man muß sich stets auf Extrapolationen verlassen, und es kann nie mit Sicherheit gesagt werden, daß die damit erzielten Ergebnisse korrekt sind. In der Theorie hingegen wird der Limes  $n \rightarrow \infty$  berücksichtigt, so daß man mit ihr exakte Ergebnisse erzielt – aber nur im Prinzip.

Denn auch mit der Theorie sind im allgemeinen nicht wirklich exakte Ergebnisse zu erreichen. Die Cycle Expansion ist ebenfalls nur ein Näherungsverfahren und muß natürlich auch numerisch berechnet werden. Es wäre also festzustellen, ob die Theorie der direkten numerischen Umsetzung von Definitionen tatsächlich überlegen ist.

Genau das soll in diesem Kapitel anhand des Zweimuldensystems überprüft werden. Es werden die *Escape-Rate*  $\kappa$  und, als Beispiel für einen dynamischen Mittelwert, der *Lyapunov-Exponent*  $\lambda$  berechnet, zunächst direkt numerisch, dann mit Hilfe der Theorie. Die Ergebnisse werden verglichen und in ihrer Genauigkeit bewertet.

Außerdem werden, als Abschluß des Kapitels, *Resonanzen* des Zweimuldensystems mit den Mitteln der Theorie bestimmt. Zur Vorbereitung wird eine Korrelationsfunktion berechnet. Diese eignet sich zwar nicht für eine numerische Ver-

gleichsrechnung, wie am Ende von Abschnitt 3.2.2 bereits besprochen wurde, aber für eine einführende qualitative Diskussion des Resonanzspektrums.

## 4.1 Die Escape-Rate $\kappa$

Die Escape-Rate  $\kappa$  des Zweimuldensystems wird hier zunächst durch numerische Simulation eines Streuexperimentes, wie es am Anfang von Abschnitt 3.2.1 beschrieben wurde, errechnet. Darauf folgt die Berechnung von  $\kappa$  mit Hilfe der Zeta-Funktionen. Um die Aussage zu überprüfen, daß sich die führende Polstelle beim Übergang von der exakten zur asymptotischen Spurformel nicht verschiebt (siehe Abschnitt 3.3.2), wird  $\kappa$  sowohl mit der Selbergschen als auch mit der dynamischen Zeta-Funktion bestimmt.

### 4.1.1 Numerischer Streuversuch zur Berechnung von $\kappa$

Ziel ist es, die Größen  $\gamma_n$ , die durch (3.6) definiert sind, für möglichst viele  $n$  zu errechnen, ihr Verhalten in Abhängigkeit von  $n$  zu untersuchen und daraus Rückschlüsse auf ihr asymptotisches Verhalten zu ziehen. Dazu werden Startwerte gleichmäßig im Phasenraum des Zweimuldensystems verteilt, und es wird abgezählt, wieviele der zugehörigen Orbits nach  $n$  Iterationen noch im Phasenraum verblieben sind. Aufgrund der Symmetrie des Zweimuldensystems genügt es, das Verhalten von Orbits des reduzierten Systems im Phasenraum  $\tilde{\Gamma} = S^1 \times [0, 1]$  zu untersuchen.

Für den Streuversuch wird ein gleichmäßig auf einem Rechteckgitter in  $\tilde{\Gamma}$  verteiltes Ensemble von  $N_0 = 2.5 \cdot 10^{12}$  Startwerten vorgegeben. Tatsächlich berechnet werden allerdings nur die  $10^{12}$  Orbits, die im  $\beta$ -Bereich von  $0.7\pi$  bis  $1.5\pi$  starten, da die übrigen Orbits auf jeden Fall sofort entweichen, was man z. B. in Abbildung 2.1 erkennen kann. Ist  $N_n$  die Zahl der nach  $n$  Iterationen noch nicht entwichenen Orbits, dann ist  $\gamma_n$  durch

$$\gamma_n = \frac{N_n}{N_0} \quad (4.1)$$

gegeben.

Als Approximation von  $\kappa$  könnte sowohl  $-(\ln \gamma_n)/n$  als auch  $\ln(\gamma_{n-1}/\gamma_n)$  dienen. Beides konvergiert nämlich im Falle einer *kontinuierlichen* Anfangsverteilung für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\kappa$ , wie aus (3.8) folgt. Daher liegt die Idee nahe, eine dieser beiden Größen für ein möglichst großes  $n$  zu errechnen und als ein numerisches Ergebnis für  $\kappa$  anzusehen. Das Problem dabei ist jedoch, daß die Anfangsverteilung *diskret* ist.  $N_n$  wird mit zunehmendem  $n$  kleiner; die relative Unsicherheit von  $N_n$  und  $\gamma_n$  wird damit größer. Deshalb wird hier ein anderer Weg gesucht,  $\kappa$  aus den

$n$	$N_n$	$\gamma_n$	$\ln \gamma_n$	$-(\ln \gamma_n)/n$	$\ln(\gamma_{n-1}/\gamma_n)$
0	25000000000000	1.0	0.0000		
1	397373459147	0.1589493836588	-1.8392	1.8392	1.8392
2	55902945824	0.0223611783296	-3.8004	1.9002	1.9612
3	7887310983	0.0031549243932	-5.7588	1.9196	1.9584
4	1112911260	0.0004451645040	-7.7171	1.9293	1.9583
5	157035499	0.0000628141996	-9.6753	1.9351	1.9583
6	22158525	0.0000088634100	-11.6336	1.9389	1.9583
7	3103999	0.0000012415996	-13.5991	1.9427	1.9655
8	422987	0.0000001691948	-15.5922	1.9490	1.9931
9	54909	0.0000000219636	-17.6338	1.9593	2.0416
10	6829	0.0000000027316	-19.7183	1.9718	2.0845
11	838	0.0000000003352	-21.8163	1.9833	2.0979
12	91	0.0000000000364	-24.0365	2.0036	2.2202
13	8	0.0000000000032	-26.4679	2.0360	2.4314
14	1	0.0000000000004	-28.5473	2.0391	2.0794

Tabelle 4.1: Ergebnis des Streuexperiments zur Bestimmung von  $\kappa$ , siehe Text.

$\gamma_n$ -Werten zu bestimmen. Dazu ist zunächst das Verhalten dieser Werte, also das Resultat des Streuexperiments, zu diskutieren.

Die  $n$ -abhängigen Größen  $N_n$ ,  $\gamma_n$ ,  $\ln \gamma_n$ ,  $-(\ln \gamma_n)/n$  und  $\ln(\gamma_{n-1}/\gamma_n)$  sind in Tabelle 4.1 für  $n$  von 0 bis 14 aufgelistet. Die Größe  $-(\ln \gamma_n)/n$  steigt mit zunehmendem  $n$  leicht an, was daran liegt, daß  $-\ln \gamma_1$  relativ klein ist. Es entweicht also bei der ersten Iteration des vorgegebenen Ensembles ein etwas geringerer Anteil von Orbits als bei den folgenden Iterationen.

Dagegen ändert sich  $\ln(\gamma_{n-1}/\gamma_n)$  nicht monoton. Bis  $n = 6$  erweckt diese Größe den Eindruck einer Konvergenz gegen 1.9583, so, als wäre das der korrekte Wert für  $\kappa$ . Bei höherem  $n$  hingegen weicht  $\ln(\gamma_{n-1}/\gamma_n)$  deutlich von diesem Wert ab. Die Abweichung bei  $n = 7$  ist so groß, daß sie kaum durch die relative Unsicherheit von  $N_n$  bedingt sein kann;  $N_7 \approx 3 \cdot 10^6$  ist immer noch relativ groß. Vielmehr ist das Verhalten von  $\gamma_n$  für  $n \geq 7$  offenbar tatsächlich ein anderes als für  $n < 7$ . Eine Erklärung für dieses Phänomen konnte in dieser Arbeit nicht gefunden werden.

Jedenfalls scheint die Idee,  $-(\ln \gamma_n)/n$  oder  $\ln(\gamma_{n-1}/\gamma_n)$  für ein großes  $n$  von Tabelle 4.1 abzulesen und als Ergebnis für  $\kappa$  zu betrachten, hier tatsächlich nicht sehr angemessen zu sein, denn für beide Größen ist in dem verfügbaren  $n$ -Bereich keine deutliche Konvergenz erkennbar. Im folgenden wird jedoch von der plausiblen, aber etwas spekulativen Annahme ausgegangen, daß  $\kappa$  innerhalb des Intervalls liegt, in welchem die vorliegenden Werte von  $\ln(\gamma_{n-1}/\gamma_n)$  schwanken. Unter dieser Voraussetzung bietet es sich an, diese Schwankungen herauszumitteln, in-

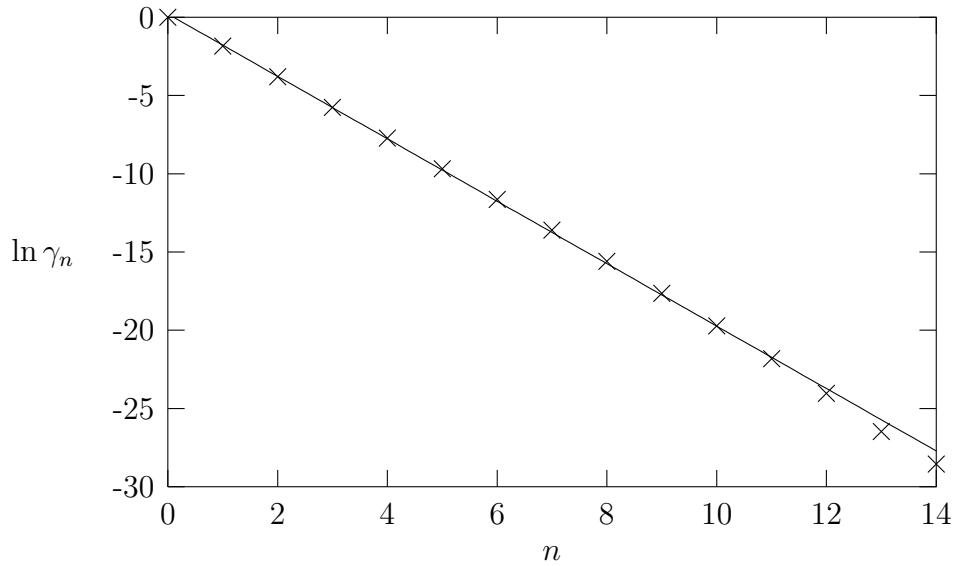


Abbildung 4.1: Die Funktion  $\ln \gamma_n$ , versehen mit einer Ausgleichsgeraden.

dem  $\ln \gamma_n$  gegen  $n$  aufgetragen und  $\kappa$  als negative Steigung der Ausgleichsgeraden bestimmt wird.

Abbildung 4.1 zeigt die Funktion  $\ln \gamma_n$  samt Ausgleichsgerade. Bei der Berechnung der Geraden sind  $n = 13$  und  $n = 14$  nicht berücksichtigt worden, da den errechneten Werten von  $\gamma_{13}$  und  $\gamma_{14}$  nur sehr wenige verbliebene Orbits zu Grunde liegen und sie daher mit einer relativ hohen Unsicherheit behaftet sind.

Aus der Steigung der Geraden ergibt sich für die Escape-Rate das folgende numerische Resultat:

$$\kappa = 1.99 \pm 0.04. \quad (4.2)$$

Als Toleranz wird hier diejenige Änderung der Geradensteigung angesehen, die dazu führt, daß sich die Summe der quadratischen Abweichungen der  $\ln \gamma_n$ -Werte von der Geraden gegenüber dem Minimalwert verdoppelt. Der Achsenabschnitt wird dabei so angepaßt, daß die Gerade stets durch den Schwerpunkt der aufgetragenen Punkte verläuft.

Das numerische Ergebnis (4.2) ist vor dem Hintergrund des damit verbundenen Rechenaufwandes recht ungenau. Ferner beruht es auf der Annahme, daß sich das Verhalten der  $\ln \gamma_n$  für  $n \rightarrow \infty$  nicht wesentlich ändert, diese also nicht etwa ab einem bestimmten  $n$  einer Geraden mit einer anderen Steigung folgen. Da ein solches „Abknicken“, wenn auch in schwacher Form, bereits bei  $n = 7$  zu beobachten ist, ist die Annahme etwas spekulativ. Es ist also gar nicht völlig sicher, ob  $\kappa$  sich tatsächlich in dem durch (4.2) vorgegebenen Intervall oder auch nur in

dessen Nähe befindet. Eine genauere Rechnung mit einem feineren Startensemble würde an dieser Unsicherheit nichts ändern.

Es hat sich gezeigt, daß sich ein numerischer Streuversuch beim Zweimuldensystem nicht dazu eignet, verlässliche Aussagen über  $\kappa$  zu treffen.

### 4.1.2 Bestimmung von $\kappa$ mit den Zeta-Funktionen

Zur Berechnung von  $\kappa$  mit Hilfe der dynamischen Zeta-Funktion  $1/\zeta(z)$  und der Selbergschen Zeta-Funktion  $Z(z)$  genügt es, die Teilfunktionen  $1/\zeta_{A_1}(z)$  und  $Z_{A_1}(z)$  zu betrachten, da die führende Nullstelle von  $Z(z)$  bzw.  $1/\zeta(z)$  in diesen Teilfunktionen enthalten ist (siehe die Erläuterungen zu (3.133)). Im folgenden werden Cycle Expansions von  $1/\zeta_{A_1}(z)$  und  $Z_{A_1}(z)$  bis zur siebenten Ordnung errechnet (noch höhere Ordnungen erbringen keine besseren Ergebnisse, siehe unten). Die kleinsten positiv reellen Nullstellen dieser Polynome werden mittels eines Bisektionsverfahrens bestimmt und ergeben Approximationen von  $\lambda_0^{-1}$ , dem inversen führenden Eigenwert von  $\mathcal{L}$ . Nach (3.15) sind die Logarithmen dieser Nullstellen Näherungswerte für  $\kappa$ .

Die Zahl der zu berücksichtigenden periodischen Orbits nimmt exponentiell mit der Ordnung der Cycle Expansion zu. Wieviele Orbits es genau sind, wird im folgenden gezeigt.

Bei einer vollständigen symbolischen Dynamik mit  $N$  Symbolen gibt es genau  $N^k$  verschiedene Symbolstrings der Länge  $k$ . Die Menge dieser Strings wird vollständig ausgeschöpft durch Primzyklen der Länge  $j$ , wobei  $j$  ein Teiler von  $k$  ist (inkl.  $j = 1$  und  $j = k$ ), sowie durch deren zyklische Permutationen. Insgesamt trägt jeder Primzyklus also  $j$ -fach bei. Ist  $M_j$  die (bislang noch unbekannte) Zahl verschiedener Primzyklen der Länge  $j$ , so gilt also:

$$N^k = \sum_{j|k} j M_j. \quad (4.3)$$

Aus dieser Gleichung kann mit Hilfe der *Möbiusschen Umkehrformel* der Zahlentheorie [HarWri58] die Zahl  $M_k$  gewonnen werden:

$$M_k = \frac{1}{k} \sum_{j|k} \mu\left(\frac{k}{j}\right) N^j \quad (4.4)$$

mit der *Möbiusschen Funktion*

$$\mu(l) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } l = 1 \\ (-1)^m & , \text{ falls alle } m \text{ Primfaktoren von } l \text{ verschieden sind} \\ 0 & , \text{ falls ein Primfaktor von } l \text{ mehrfach vorkommt.} \end{cases}$$

Ordnung $k$	Anz. $M_k$ d. Primzyklen	$G_k = \sum_{j=1}^k M_j$
1	4	4
2	6	10
3	20	30
4	60	90
5	204	294
6	670	964
7	2340	3304
8	8160	11464
9	29120	40584
10	104754	145338

Tabelle 4.2: Anzahl  $M_k$  der Primzyklen der Länge  $k$  sowie die Gesamtzahl  $G_k$  der in einer Cycle Expansion  $k$ -ter Ordnung beim Zweimuldensystem zu berücksichtigen Primzyklen.

Für große  $k$  gilt:  $M_k \approx N^k/k$ .

Für das Zweimuldensystem ( $N = 4$ ) und für  $k = 1, \dots, 10$  zeigt Tabelle 4.2 die Anzahl  $M_k$  der Primzyklen der Länge  $k$  sowie die Gesamtzahl  $G_k$  der Primzyklen, die in einer Cycle Expansion  $k$ -ter Ordnung zu berücksichtigen sind.

Die Koeffizienten  $c_n$  und  $b_n$  der Cycle Expansion siebenter Ordnung von

$$1/\zeta_{A_1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (4.5)$$

bzw. von

$$Z_{A_1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (4.6)$$

sind in Tabelle 4.3 aufgelistet. In beiden Fällen nehmen die Koeffizienten mit zunehmender Ordnung äußerst rasch ab. Koeffizienten der Ordnung acht oder höher zu berechnen macht keinen Sinn, da sie eine erhebliche relative Ungenauigkeit hätten. Die Gewichte der zu Grunde liegenden Orbits wären nämlich so klein, daß sich die begrenzte Rechengenauigkeit spürbar auf sie auswirken würde. Außerdem müßte eine sehr große Anzahl von Gewichten, also von fehlerbehafteten Größen, aufsummiert werden, so daß man im Endeffekt ein wesentlich ungenaueres Ergebnis erhielte, als wenn man, wie hier getan, die Koeffizienten ab der achten Ordnung exakt null setzt.

Die Koeffizienten  $c_1$  und  $b_1$  sind fast gleich; für  $n \geq 2$  hingegen weichen  $c_n$  und  $b_n$  stark voneinander ab. Es handelt sich bei  $1/\zeta_{A_1}(z)$  und  $Z_{A_1}(z)$  also, wie zu erwarten war, um zwei recht unterschiedliche Funktionen. Dennoch sollten sie gemäß Abschnitt 3.3.2 die gleiche führende Nullstelle besitzen. Das bedeutet nicht, daß

$n$	$c_n$	$b_n$
0	1.00000000000000000000	1.00000000000000000000
1	-0.14329443243195960633	-0.14120492311802074203
2	0.00030347377201883239	0.00000523869447260615
3	-0.00000609963625050212	-0.00000563463574115262
4	0.00000000360263775572	-0.00000000878075742229
5	-0.00000000000213771584	-0.00000000000179784885
6	-0.00000000000000280851	-0.00000000000000289563
7	0.0000000000000001742	0.0000000000000000969

Tabelle 4.3: Koeffizienten der Cycle Expansions siebenter Ordnung der Funktionen  $1/\zeta_{A_1}(z)$  und  $Z_{A_1}(z)$ .

beide Funktionen in niedriger Ordnung der Cycle Expansion den gleichen Näherungswert für  $\kappa$  liefern müssen. Bei Erhöhung der Ordnung sollten die Werte jedoch gegeneinander konvergieren.

Das ist in der Tat der Fall, wie man Tabelle 4.4 entnehmen kann. Dort sind Ergebnisse für  $\kappa$  aufgelistet, die man aus den Cycle Expansions verschiedener Ordnungen von  $1/\zeta_{A_1}(z)$  und von  $Z_{A_1}(z)$  erhält. Je höher die Ordnung, um so näher liegen tatsächlich die aus den beiden Funktionen gewonnenen Werte beieinander. In der siebenten Ordnung gibt es erst in der dreizehnten Nachkommastelle eine Diskrepanz. Die davorliegenden Stellen können also nach Rundung als korrekt betrachtet werden.

Die Theorie der periodischen Orbits liefert demnach für die Escape-Rate des Zweimuldensystems, also das Maß für die asymptotische exponentielle Abnahme

Ordnung $k$	$\kappa$ aus $1/\zeta_{A_1}(z)$	$\kappa$ aus $Z_{A_1}(z)$
1	1.943	1.9575
2	1.9580	1.9578
3	1.955782	1.95581
4	1.95579062	1.95579061
5	1.95579058357	1.95579058358
6	1.955790583215	1.955790583222
7	1.9557905832309	1.9557905832307

Tabelle 4.4: Escape-Rate  $\kappa$  für verschiedene Ordnungen der Cycle Expansion von  $1/\zeta_{A_1}(z)$  und von  $Z_{A_1}(z)$ .

der Anzahl im Phasenraum verbliebener Orbits, folgenden Wert<sup>1</sup>:

$$\kappa = 1.955790583231 \pm 10^{-12}. \quad (4.7)$$

Das aus der Theorie gewonnene Resultat ist um zehn Größenordnungen genauer als das Ergebnis (4.2) des numerischen Streuversuchs. Letzteres wird schon in der ersten Ordnung der Cycle Expansion, also lediglich durch die Beiträge der vier fundamentalen Orbits, deutlich an Präzision übertroffen, vor allem im Falle der Funktion  $Z_{A_1}(z)$ .

Im Rahmen der dort angegebenen Toleranz stimmt (4.2) jedenfalls mit (4.7) überein. Die Extrapolation mittels einer Ausgleichgeraden hat sich in diesem Falle nicht als falsch erwiesen. Bei höherem Anspruch an die Genauigkeit erweist sich der Streuversuch zur Bestimmung von  $\kappa$  jedoch als unbrauchbar, ganz im Gegensatz zur Theorie.

## 4.2 Der Lyapunov-Exponent $\lambda$

Der Lyapunov-Exponent  $\lambda$  ist, wie die Escape-Rate  $\kappa$ , ein Zahlenwert, der einem dynamischen System zugeordnet wird und dieses charakterisiert. Durch  $\lambda$  wird das Auseinander- oder Zusammenlaufen dicht benachbarter Orbits des Systems quantitativ beschrieben. Ist das System sensibel abhängig von den Anfangsbedingungen, so gibt  $\lambda$  an, wie stark diese Eigenschaft ausgeprägt ist.

Zunächst wird die allgemeine Definition des Lyapunov-Exponenten angegeben. Anschließend wird, immer noch in allgemeiner Formulierung, eine Verbindung zum Formalismus der dynamischen Mittelungen und damit eine Grundlage zur Berechnung von  $\lambda$  hergestellt. Danach wird  $\lambda$  speziell für das Zweimuldensystem auf direkte numerische Weise berechnet, gefolgt von einer Rechnung mit den Methoden der Theorie der periodischen Orbits.

### 4.2.1 Definition des Lyapunov-Exponenten $\lambda$

Gegeben sei ein *ergodisches* dynamisches System, das durch eine Abbildung  $f$  definiert sei. Zur Einführung der Definition von  $\lambda$  betrachtet man das Verhalten zweier Orbits, die in den infinitesimal benachbarten Punkten  $x_0$  und  $x'_0$  starten. Diese Orbits sind durch die Punktfolgen

$$x_n = f^n(x_0) \quad (4.8)$$

---

<sup>1</sup>Der Umrechnungsfaktor zwischen Euro und DM beträgt bekanntlich 1.95583. Diese Zahl weicht nur um  $4 \cdot 10^{-5}$  von  $\kappa$  ab. Der Autor hält Befürchtungen, der Außenwert des Euro könnte ebenfalls exponentiell abnehmen, dennoch für unbegründet.

und

$$x'_n = f^n(x'_0) \quad (4.9)$$

gegeben. In einer infinitesimalen Umgebung von  $x_0$  wird die Wirkung von  $f$  durch die linearisierte Abbildung beschrieben. Das bedeutet, daß sich der *Abstandsvektor*

$$\xi_n = x'_n - x_n \quad (4.10)$$

wie folgt unter der Dynamik entwickelt:

$$\xi_n = Df^n(x_0) \cdot \xi_0. \quad (4.11)$$

Die Matrix  $Df^n(x_0)$  besitzt die Eigenwerte  $\Lambda_i(n, x_0)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , wobei  $d$  die Dimension des Systems ist. Für jedes  $n$  seien die Eigenwerte nach absteigendem Betrag sortiert. Je nachdem, ob  $\Lambda_i(n, x_0)$  dem Betrage nach größer oder kleiner als 1 ist, wird die zur  $i$ -ten Eigenrichtung von  $Df^n(x_0)$  gehörende Komponente von  $\xi_n$  gegenüber der entsprechenden Komponente von  $\xi_0$  entweder vergrößert oder verkleinert. Diese Expansion bzw. Kontraktion wächst im Mittel exponentiell mit  $n$ , und zwar mit der mittleren Rate

$$\lambda^{(i)}(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_i(n, x_0)|. \quad (4.12)$$

Dabei bedeutet  $\lambda^{(i)}(x_0) > 0$  Expansion,  $\lambda^{(i)}(x_0) < 0$  Kontraktion. Man bezeichnet die verschiedenen Größen  $\lambda^{(i)}(x_0)$  als die *Lyapunov-Exponenten* des Orbits, der in  $x_0$  startet.

Da  $\xi_0$  im allgemeinen nichtverschwindende Komponenten in allen Eigenrichtungen besitzt, wird das Auseinander- oder Zusammenlaufen der beiden betrachteten Orbits, d. h. die Längenänderung von  $\xi_n$  bei Zunahme von  $n$ , asymptotisch durch den größten Lyapunov-Exponenten  $\lambda^{(1)}(x_0)$  bestimmt. Dieser spielt also eine dominante Rolle und wird oft als *der* Lyapunov-Exponent  $\lambda(x_0)$  des in  $x_0$  startenden Orbits bezeichnet. Mit  $\Lambda(n, x_0) = \Lambda_1(n, x_0)$ , dem vom Betrage her größten Eigenwert von  $Df^n(x_0)$ , ist  $\lambda(x_0)$  demnach wie folgt definiert:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda(n, x_0)|. \quad (4.13)$$

Diese Größe hängt vom Startwert  $x_0$  ab. Aufgrund der vorausgesetzten Ergodizität ist  $\lambda(x_0)$  jedoch fast überall auf der invarianten Menge des Systems konstant:

$$\lambda(x_0) = \lambda \quad \text{für fast alle } x_0 \in M, \quad (4.14)$$

wobei  $M$  die invariante Menge ist. Das folgt im Falle eindimensionaler Systeme wegen  $\ln |\Lambda(n, x_0)| = \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(f^k(x_0))|$  direkt aus der Definition der Ergodizität. Bei höherdimensionalen Systemen läßt sich  $|\Lambda(n, x_0)|$  jedoch nicht in dieser

einfachen Weise faktorisieren. Die Behauptung (4.14) ist aber dennoch gültig, nämlich nach dem *multiplikativen Ergodensatz* von OSELEDEC [Rob95]; entsprechendes gilt für alle Lyapunov-Exponenten  $\lambda^{(i)}$ .

Die Zahl  $\lambda$  ist also eine Systemgröße. Man bezeichnet sie als den Lyapunov-Exponenten *des Systems*. „Gemessen“ wird dieser auf der invarianten Menge.

### 4.2.2 Der dynamische Mittelwert $\lambda$

Bei *geschlossenen* Systemen stellt die Berechnung von  $\lambda$  im allgemeinen kein besonderes Problem dar. Für einen willkürlich ausgewählten Startwert  $x$  und für ein großes  $n$  wird, der Definition (4.13) folgend,  $(\ln |\Lambda(n, x)|)/n$  numerisch ausgerechnet. Je größer  $n$  ist, um so genauer ist das Ergebnis, wenngleich die Konvergenz im allgemeinen recht langsam ist.

Bei *offenen* Systemen, wie z. B. beim Zweimuldensystem, sind der Größe von  $n$  jedoch Grenzen gesetzt, da die invariante Menge numerisch nie genau getroffen wird. Der Fehler, der dadurch entsteht, daß  $n$  nicht sehr groß ist, kann jedoch teilweise dadurch ausgeglichen werden, daß man über verschiedene Startwerte mittelt. Das führt nämlich zu einer gleichmäßigeren Abtastung der invarianten Menge bzw. ihrer Umgebung. Eine solche Mittelung ist aber genau der Grundgedanke des in Abschnitt 3.2.3 vorgestellten Formalismus der dynamischen Mittelung von Observablen. Wie sich gleich zeigen wird, läßt sich  $\lambda$  mit diesem Formalismus erfassen.

Für den Startwert  $x$  wird die *integrierte Observable*  $A^n(x)$  hier, abweichend von der Definition (3.43), wie folgt festgelegt:

$$A^n(x) = \ln |\Lambda(n, x)|. \quad (4.15)$$

Mit (4.13) folgt daraus:

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} A^n(x). \quad (4.16)$$

Das entspricht formal dem in (3.44) definierten *Zeitmittelwert einer Observablen*  $a(x)$ . Eine solche Observable ist hier aber nur für eindimensionale Systeme definiert:  $a(x) = \ln |f'(x)|$ . In diesem Falle ist die Definition (4.15) äquivalent zu (3.43). Bei mehrdimensionalen Systemen läßt sich eine vergleichbare Observable jedoch nicht ohne weiteres angeben. Die Argumentationskette von Abschnitt 3.2.3 und die gesamte darauf aufbauende Theorie kommen aber ohne einen expliziten Ausdruck für  $a(x)$  aus und können aufgrund der entscheidenden Voraussetzung (4.14) auf das vorliegende Problem übertragen werden.

Wegen (4.14) läßt sich  $\lambda$  nämlich durch Mittelung über alle Startwerte aus der Menge  $\mathcal{M}_-^\infty$  bestimmen:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{M}_-^n|} \frac{1}{n} \int_{\mathcal{M}_-^n} \ln |\Lambda(n, x)| dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{M}_-^n|} \frac{1}{n} \int_{\mathcal{M}_-^n} A^n(x) dx,\end{aligned}\quad (4.17)$$

wobei  $|\mathcal{M}_-^n|$  das Volumen von  $\mathcal{M}_-^n$  ist; vgl. (3.23) und (3.25). Der Lyapunov-Exponent  $\lambda$  entspricht also dem *Erwartungswert* (3.46) und kann daher mit der in Kapitel 3 erarbeiteten Theorie bestimmt werden.

Die Grundidee des nächsten Unterabschnitts ist die numerische Berechnung des Integrals auf der rechten Seite von (4.17) für endliche Werte von  $n$ . Im übernächsten Unterabschnitt wird  $\lambda$  durch die Formel (3.168) für dynamische Mittelwerte ermittelt.

In beiden Fällen wird ausgenutzt, daß für ein unter einer Symmetriegruppe  $G$  invariantes System die gemäß (4.15) definierte integrierte Observable  $A^n(x)$  die Symmetrieinvarianz (3.95) erfüllt. Das folgt daraus, daß für jedes Gruppenelement  $g \in G$  und für jeden Punkt  $x \in \mathcal{M}$  gilt:

$$\Lambda(n, x) = \Lambda(n, g(x)) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

Das wiederum liegt daran, daß  $\Lambda(n, x)$  der dem Betrage nach größte Eigenwert von  $Df^n(x)$ ,  $\Lambda(n, g(x))$  hingegen der betragsmäßig größte Eigenwert von  $Df^n(g(x))$  ist; die beiden Matrizen unterscheiden sich aber nur durch eine Ähnlichkeitstransformation voneinander, vgl. (D.10) und (D.11).

### 4.2.3 Numerische Berechnung von $\lambda$

Zunächst wird das Integral auf der rechten Seite von (4.17) für das Zweimulden-System für  $n = 1, \dots, 14$  numerisch ausgewertet, was Näherungswerte  $\lambda_{(n)}$  ergibt. Das so ermittelte Verhalten von  $\lambda_{(n)}$  in Abhängigkeit von  $n$  wird anschließend extrapoliert. Das numerische Ergebnis für den Lyapunov-Exponenten ist dann durch

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{(n)} \quad (4.19)$$

gegeben.

Zur Berechnung von  $\lambda_{(n)}$  wird der Phasenraum auf einem Rechteckgitter abgetastet. Das bedeutet, daß das Integral in (4.17) durch eine Riemann-Summe diskretisiert wird. Die Abtastung erfolgt mit dem gleichen Ensemble wie bei der numerischen Berechnung von  $\kappa$  in Abschnitt 4.1.1. Es wird also auch hier das reduzierte System betrachtet, was erlaubt ist, da die integrierte Observable (4.15)

$n$	$\lambda_{(n)}$	$N_n$
1	2.8778	397373459147
2	3.1017	55902945824
3	3.1739	7887310983
4	3.2105	1112911260
5	3.2325	157035499
6	3.2471	22158525
7	3.2569	3103999
8	3.2630	422987
9	3.2673	54909
10	3.2719	6829
11	3.2744	838
12	3.2737	91
13	3.2556	8
14	3.1295	1

Tabelle 4.5: Numerisch gemäß (4.20) bestimmte Näherungswerte  $\lambda_{(n)}$  des Lyapunov-Exponenten  $\lambda$  sowie die Zahl  $N_n$  der Orbits, aus denen  $\lambda_{(n)}$  berechnet worden ist.

der Invarianzforderung (3.95) genügt. Die Menge der Startpunkte des Ensembles sei  $\mathcal{N}$ . Wie in Abschnitt 4.1.1 wird mit  $N_n$  die Anzahl der Orbits des Ensembles bezeichnet, die nach  $n$  Iterationen noch im Phasenraum verblieben sind. Ferner entspricht beim reduzierten Zweimuldensystem die Menge  $\mathcal{M}_-^n$  aus (4.17) dem Schnitt der Menge  $\Lambda_-^n$ , die durch (2.1) definiert ist, mit dem Fundamentalbereich  $\tilde{\Gamma}$ . Damit berechnet sich  $\lambda_{(n)}$  folgendermaßen:

$$\lambda_{(n)} = \frac{1}{N_n n} \sum_{x \in \mathcal{N}_-^n} \ln |\Lambda(n, x)| \quad (4.20)$$

mit

$$\mathcal{N}_-^n = \mathcal{N} \cap \Lambda_-^n \cap \tilde{\Gamma}. \quad (4.21)$$

Die Werte von  $\lambda_{(n)}$  sind für  $n = 1, \dots, 14$  zusammen mit der Anzahl  $N_n$  der jeweils an der Mittelung beteiligten Orbits in Tabelle 4.5 aufgelistet. Für  $n = 1, \dots, 11$  steigt  $\lambda_{(n)}$  mit zunehmendem  $n$  an, jedoch immer langsamer. Daß  $\lambda_{(12)}$ ,  $\lambda_{(13)}$  und  $\lambda_{(14)}$  von der Monotonie abweichen, dürfte daran liegen, daß diese Werte nur auf wenigen Orbits und daher auf einer schlechten Statistik basieren. Sie werden in der folgenden Betrachtung nicht weiter berücksichtigt.

Offenbar liegt ein Konvergenzverhalten von  $\lambda_{(n)}$  vor. Dieses gilt es zu extrapolieren. Dazu ist es von Nutzen zu wissen, wodurch die Abweichungen der Näherungswerte  $\lambda_{(n)}$  vom exakten Lyapunov-Exponenten bedingt sind. Für jeden Punkt

$x \in \mathcal{N}_-^n$  hängt  $\ln |\Lambda(n, x)|$  von der Jacobi-Matrix

$$D\tilde{F}^n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} D\tilde{F}(\tilde{F}^k(x)) \quad (4.22)$$

ab und damit von den ersten  $n$  Punkten des in  $x$  startenden *Streuorbits*. Der Startpunkt eines Streuorbits kann weit von der invarianten Menge  $\tilde{\Lambda}$  des reduzierten Systems entfernt sein. Während der ersten Iterationen wird der Orbit schnell von  $\tilde{\Lambda}$  angezogen, nämlich in Richtung der stabilen Mannigfaltigkeit von  $\tilde{\Lambda}$ . Danach hält sich der Orbit für eine Weile in der Nähe von  $\tilde{\Lambda}$  auf, um sich anschließend entlang der instabilen Mannigfaltigkeit wieder von  $\tilde{\Lambda}$  zu entfernen und letztlich den Phasenraum  $\tilde{\Gamma}$  zu verlassen. Während  $\lambda$  nur von den Punkten auf  $\tilde{\Lambda}$  abhängt, tragen zu  $\lambda_{(n)}$  auch Punkte aus  $\tilde{\Gamma}$  bei, die weit von  $\tilde{\Lambda}$  entfernt sind. Dadurch sind die Abweichungen der  $\lambda_{(n)}$ -Werte von  $\lambda$  zu erklären.

Unabhängig von  $n$  werden die bei weitem größten Abweichungen durch die Startpunkte der berücksichtigten Orbits verursacht. Die ebenfalls weit von  $\tilde{\Lambda}$  entfernten Endpunkte der Orbits tragen nämlich niemals zu  $\lambda_{(n)}$  bei: Für jeden Startpunkt  $x \in \mathcal{N}_-^n$  existiert definitionsgemäß der Orbitpunkt  $\tilde{F}^n(x)$ . Dieser spielt aber nach (4.22) bei der Berechnung von  $\lambda_{(n)}$  keine Rolle.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Abweichungen der  $\lambda_{(n)}$  von  $\lambda$  etwa proportional zu  $1/n$  sein müssen. Für  $\lambda_{(n)}$  ist also folgendes Verhalten zu erwarten:

$$\lambda_{(n)} \approx \lambda + cn^{-1} \quad (4.23)$$

mit einer Konstanten  $c$ .

Das numerische Ergebnis für  $\lambda$  wird nun wie folgt gewonnen: Anhand der vorhandenen  $\lambda_{(n)}$ -Werte wird eine zweiparametrische Fit-Funktion der kontinuierlichen Variablen  $n$ , nämlich

$$g(n) = \lambda + cn^{-1} \quad (4.24)$$

mit den Fit-Parametern  $\lambda$  und  $c$  berechnet.

Diese Fit-Funktion wird in Abbildung 4.2 zusammen mit ihrer Asymptote  $\lambda$  (gestrichelte Linie) und den Werten  $\lambda_{(n)}$  dargestellt. Diese Werte stimmen, abgesehen von  $\lambda_{(12)}$ ,  $\lambda_{(13)}$  und  $\lambda_{(14)}$ , recht gut mit  $g(n)$  überein, was die Annahme (4.23) bestätigt. Zur Berechnung von  $g(n)$  sind die drei letztgenannten Werte auch nicht berücksichtigt worden.

Aus  $g(n)$  ergibt sich für den Lyapunov-Exponenten folgender Wert:

$$\lambda = 3.318 \pm 2.5 \cdot 10^{-3}. \quad (4.25)$$

Eine Änderung von  $\lambda$  um den angegebenen Toleranzwert bei konstant gehaltenem Parameter  $c$  bewirkt eine Verdoppelung der Summe der quadratischen Abweichungen der  $\lambda_{(n)}$  von der Fit-Funktion  $g(n)$ .

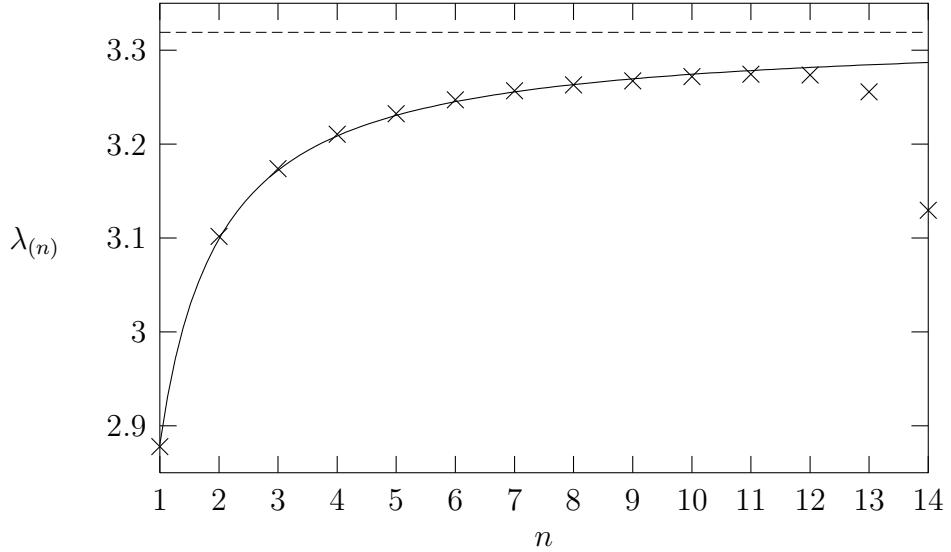


Abbildung 4.2: Näherungswerte  $\lambda_{(n)}$  aus Tabelle 4.5 und Fit-Funktion  $g(n)$ ; die gestrichelte Linie stellt die Asymptote  $\lambda$  von  $g(x)$  dar.

Beim numerischen Ergebnis (4.25) für  $\lambda$  ist die Toleranz immerhin um eine Größenordnung geringer als beim entsprechenden Resultat (4.2) für  $\kappa$ . Das könnte zum einen dadurch bedingt sein, daß (4.25) auf einer größeren Menge von Information beruht als (4.2). Während  $\kappa$  nur von den Lebensdauern der Orbits des Startensembles abhängt, hängt  $\lambda$  von der Lage aller Orbitpunkte ab. Zum anderen basiert, anders als bei  $\kappa$ , die zur Berechnung von  $\lambda$  vorgenommene Extrapolation auf einer recht plausiblen Argumentation. Das hat nicht nur zur Folge, daß die Fit-Funktion  $g(n)$  sich tatsächlich gut an die  $\lambda_{(n)}$ -Werte anpaßt und die Toleranz des Ergebnisses daher gering wird, sondern auch, daß die Aussage (4.25) mit hoher Wahrscheinlichkeit tatsächlich wahr ist.

Dennoch ist das Resultat (4.25) nicht völlig frei von Zweifeln. Ferner vermag es gehobene Ansprüche an die Genauigkeit nicht zu befriedigen.

#### 4.2.4 Bestimmung von $\lambda$ mit Hilfe der Theorie

Der Lyapunov-Exponent  $\lambda$  des Zweimuldensystems wird nun mit Hilfe der Formel (3.168) für dynamische Mittelwerte bestimmt. Benutzt wird dazu die Funktion  $1/\zeta_{A_1}(z, \beta)$ . Es wird also auch hier die Invarianz des Zweimuldensystems und der integrierten Observablen unter der Symmetriegruppe  $\mathcal{C}_{2v}$  ausgenutzt.

Zur Auswertung des Zählers und des Nenners von (3.168) benötigt man die Ableitungen von  $1/\zeta_{A_1}(z, \beta)$  nach  $\beta$  und nach  $z$ , die durch (3.169) bzw. (3.170) gegeben

Ordnung $k$	Lyapunov-Exponent $\lambda$
1	3.296
2	3.322
3	3.319709
4	3.31972337
5	3.319723431
6	3.319723428233
7	3.3197234282912

Tabelle 4.6: Lyapunov-Exponent  $\lambda$  für verschiedene Ordnungen der Cycle Expansion.

sind, allerdings mit  $\tilde{p}$  statt  $p$ . Zu (3.169) tragen die integrierten Observablen  $A_{\tilde{p}}$  der periodischen Orbits  $\tilde{p}$  des reduzierten Systems bei. Entsprechend (4.15) ist  $A_{\tilde{p}}$  wie folgt definiert:

$$A_{\tilde{p}} = \ln |\Lambda_{\tilde{p}}|, \quad (4.26)$$

wobei  $\Lambda_{\tilde{p}}$  für  $x \in \tilde{p}$  der vom Betrage her größte Eigenwert von  $D\tilde{F}^{n_{\tilde{p}}}(x) = \mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}} = \mathbf{h}_{\tilde{p}} D\mathbf{F}^{n_{\tilde{p}}}(x)$  ist.

Die Cycle Expansions von (3.169) und von (3.170) werden, wie in Abschnitt 3.7 beschrieben, berechnet, und zwar bis zur siebten Ordnung. Dabei wird  $\beta = 0$  und  $z = e^\kappa$  mit  $\kappa$  aus (4.7) gesetzt. Durch Quotientenbildung der Ergebnisse jeweils gleicher Ordnung  $k$  der Cycle Expansion ergibt sich  $\lambda$  in  $k$ -ter Näherung.

Die Ergebnisse dieser Rechnung für  $k = 1, \dots, 7$  sind in Tabelle 4.6 aufgelistet. Die Werte konvergieren mit zunehmendem  $k$  gegen das Resultat für  $k = 7$ . Letzteres dürfte, wie man aus der Geschwindigkeit der Konvergenz schließen kann, auf mindestens zwölf Nachkommastellen genau sein. Die Theorie liefert also folgendes Ergebnis für den Lyapunov-Exponenten:

$$\lambda = 3.319723428291 \pm 10^{-12}. \quad (4.27)$$

Auch dieses Ergebnis aus der Theorie ist erheblich genauer als der entsprechende numerische Wert (4.25), nämlich um neun Größenordnungen. Allerdings stimmen beide Werte auch hier im Rahmen der Toleranz überein.

Die am Anfang des Kapitels gestellte Frage, ob die Theorie dem direkten numerischen Ausrechnen der Gleichungen, die die gesuchten Größen definieren, überlegen ist, kann für das Zweimuldensystem eindeutig mit ja beantwortet werden. Die Ergebnisse der Theorie sind bei weitaus geringerem Rechenaufwand erheblich genauer. Der größte Aufwand liegt in der Berechnung der periodischen Orbits. Diese muß jedoch nur einmal durchgeführt werden. Die daraus gewonnenen Daten sind bei jeder Art der Anwendung der Theorie nutzbar.

Die Ursache für die geringe Effektivität der direkten Numerik besteht darin, daß die Startwerte gleichmäßig im gesamten Phasenraum verteilt sind. Es wird nicht

zwischen „wichtigen“ und „weniger wichtigen“ Phasenraumregionen unterscheiden. Zur Beschreibung langlebiger Dynamik in der Nähe der invarianten Menge  $\Lambda$  eignen sich jedoch nur Startwerte, die nahe der stabilen Mannigfaltigkeit von  $\Lambda$  liegen. Daher wird bei der direkten Numerik die Rechenleistung größtenteils verschwendet.

Die Vorgehensweise nach der Theorie der periodischen Orbits beinhaltet hingegen die gezielte Extraktion der benötigten Information über die Dynamik auf  $\Lambda$ . Aus der Existenz einer vollständigen Symbolischen Dynamik folgt, daß sich jeder Orbit auf  $\Lambda$  durch einen Pseudo-Orbit, der sich aus Primzyklen bis zu einer vorgegebenen Länge  $k$  zusammensetzt, approximieren läßt. Die Güte der Approximation steigt exponentiell mit  $k$ . Die Primzyklen bis zur Länge  $k$  bilden also ein Gerüst, mit dessen Hilfe sich die gesamte Dynamik auf  $\Lambda$  näherungsweise beschreiben läßt. Dadurch erklärt sich der Erfolg der Theorie beim Zweimuldensystem.

Bei Systemen mit unendlich vielen Pruning-Regeln gibt es jedoch für jedes noch so groß gewählte  $k$  immer Orbits, die nicht durch Pseudo-Orbits aus Primzyklen bis zur Länge  $k$  approximiert werden können. In solchen Fällen ist die Theorie der periodischen Orbits anderen Verfahren nicht unbedingt überlegen.

### 4.3 Das Resonanzspektrum

Ziel dieses letzten Abschnitts der Arbeit ist die Ermittlung von Resonanzen des Zweimuldensystems. Diese sind durch Polstellen der  $2\pi$ -periodischen Funktion (3.40) gegeben. Die Resonanzen  $\omega_{\alpha,k}$  sind durch (3.42) mit den Eigenwerten  $\lambda_\alpha$  des Perron-Frobenius-Operators  $\mathcal{L}$  verknüpft. Die Bestimmung der  $\omega_{\alpha,k}$  erfolgt daher durch Berechnung der  $\lambda_\alpha$ , also des Korrelationsspektrums.

Wegen der  $2\pi$ -Periodizität der  $\omega_{\alpha,k}$  werden im folgenden nur diejenigen Resonanzen betrachtet, die im Streifen  $-\pi \leq \operatorname{Re} \omega_{\alpha,k} < \pi$  liegen. Zu diesem Zweck wird der Phasenwinkel  $\phi_\alpha$  von  $\lambda_\alpha = |\lambda_\alpha| e^{i\phi_\alpha}$  stets aus dem Intervall  $]-\pi, \pi]$  gewählt, und in (3.42) wird  $k = 0$  gesetzt. Auf diese Weise bekommt jeder Eigenwert  $\lambda_\alpha$  genau eine Resonanz  $\omega_\alpha$  zugeordnet.

Dieser Abschnitt ist in vier Unterabschnitte gegliedert. Im ersten Unterabschnitt wird – als Einführung – numerisch eine Korrelationsfunktion berechnet. Zwar können dieser keine genaue Information über die Resonanzen entnommen werden; sie ermöglicht jedoch eine qualitative Diskussion des Korrelations- und Resonanzspektrums. Die beiden darauffolgenden Unterabschnitte dienen der Vorbereitung der Berechnung der Eigenwerte  $\lambda_\alpha$  mit Hilfe der Selbergschen Zeta-Funktion. Im zweiten Unterabschnitt geht es um Symmetrieeigenschaften des Eigenwertespektrums. Es wird gezeigt, daß bereits die Teilfunktionen zu den irreduziblen Darstellungen  $A_1$  und  $A_2$  die Zeta-Funktionen des Zweimuldensystems vollständig

bestimmen, was den Aufwand bei den darauffolgenden Rechnungen halbiert. Im dritten Unterabschnitt wird ein eigens entwickeltes numerisches Verfahren zum Auffinden komplexer Nullstellen vorgestellt, welches schließlich im letzten Unterabschnitt zur Anwendung kommt. Aus den Nullstellen der Selbergschen Zeta-Funktion werden die Eigenwerte  $\lambda_\alpha$  und die Resonanzen  $\omega_\alpha$  bestimmt.

### 4.3.1 Numerische Berechnung einer Korrelationsfunktion

Als Observable im Phasenraum  $\hat{\Gamma}$  des nichtreduzierten Zweimuldensystems wird der Drehimpuls  $l$  gewählt:

$$a(\beta, l, \mu) = l. \quad (4.28)$$

Für diese Observable wird die *Autokorrelationsfunktion* entsprechend (3.24) berechnet, und zwar bezüglich der gleichmäßigen Anfangsverteilung  $i(\beta, l, \mu) = 1$ :

$$C_{l,l,i}(n) = \sum_{\mu=0}^1 \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-1}^1 dl a(\hat{F}^n(\beta, l, \mu)) a(\beta, l, \mu) \delta_n(\beta, l) \quad (4.29)$$

mit der Abbildung  $\hat{F}(\beta, l, \mu)$  des nichtreduzierten Systems und der *Indikatorfunktion*  $\delta_n(\beta, l)$  der durch (2.1) definierten Mengen  $\Lambda_-^n$ :

$$\delta_n(\beta, l) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\beta, l) \in \Lambda_-^n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.30)$$

Mit Hilfe der  $\mathcal{C}_{2v}$ -Invarianz von  $\hat{F}$  und der daraus folgenden Symmetrieeigenschaft der Mengen  $\Lambda_-^n$ , nämlich  $\delta_n(\beta, l) = \delta_n(-\beta, -l)$ , kann gezeigt werden, daß zur Berechnung von (4.29) eine Integration über den Fundamentalbereich  $\tilde{\Gamma}$  ausreicht:

$$C_{l,l,i}(n) = 4 \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^1 dl F_l^n(\beta, l) l \delta_n(\beta, l). \quad (4.31)$$

Hierbei ist  $F_l(\beta, l)$  die  $l$ -Komponente der Abbildung  $F(\beta, l)$  des teilweise reduzierten Systems.

Zur numerischen Auswertung von (4.31) wird das Integral durch eine Riemann-Summe diskretisiert. Dazu wird das gleiche Ensemble von Startwerten verwandt wie in den beiden vorausgegangenen Abschnitten. Die Korrelationsfunktion nimmt dann folgende Form an:

$$C_{l,l,i}(n) = 4Q \sum_{(\beta,l) \in \mathcal{N}_-^n} F_l^n(\beta, l) l, \quad (4.32)$$

wobei die Menge  $\mathcal{N}_-^n$  wie in (4.21) definiert ist;  $Q$  ist der Flächeninhalt einer Elementarzelle des Gitters, auf dem die Startwerte liegen.

$n$	$C_{l,l,i}(n)$
0	8.377580409573
1	-0.144776577042
2	0.006109224289
3	-0.000197421228
4	0.000006605500
5	-0.000000206490
6	0.000000025927
7	-0.000000005404
8	-0.000000003032
9	0.000000000332
10	0.000000000060
11	0.000000000132
12	-0.000000000092
13	0.000000000030
14	-0.000000000006

Tabelle 4.7: Drehimpuls-Autokorrelationsfunktion  $C_{l,l,i}(n)$ .

Das Ergebnis der Berechnung von (4.32) zeigt Tabelle 4.7. Es gilt  $C_{l,l,i}(0) = 8\pi/3$ , wie man leicht durch direktes Nachrechnen von (4.31) bestätigt. Auffällig ist ein äußerst rasches Zerfallen der Korrelationsfunktion mit zunehmendem  $n$ . Die Geschwindigkeit dieses Zerfalls ist bei niedrigen  $n$  deutlich größer als bei höheren  $n$ . Außerdem nimmt  $C_{l,l,i}(n)$  etwa genauso häufig negative wie positive Werte an. Zu beachten ist, daß die Werte für  $n = 12, 13, 14$  mit hoher relativer Unsicherheit behaftet sind. Die zugehörigen Mengen  $\mathcal{N}_-^{12}$ ,  $\mathcal{N}_-^{13}$  und  $\mathcal{N}_-^{14}$  bestehen nur aus wenigen Punkten ( $\mathcal{N}_-^{14}$  sogar nur aus einem einzigen, siehe Tabelle 4.1) und gewährleisten daher nur eine schlechte Statistik. Sie füllen die Mengen  $\Lambda_-^{12}$ ,  $\Lambda_-^{13}$  und  $\Lambda_-^{14}$  nur ungleichmäßig aus.

Mit Hilfe obiger Beobachtungen kann man einige (wenn auch etwas vage) allgemeine Aussagen über die Eigenwerte  $\lambda_\alpha$  von  $\mathcal{L}$  treffen, und damit auch über die Resonanzen. Nach (3.30) setzt sich  $C_{l,l,i}(n)$  additiv aus Anteilen zusammen, die jeweils proportional zu  $\lambda_\alpha^n$  sind. Aus der Abnahme der Zerfallsgeschwindigkeit von  $C_{l,l,i}(n)$  bei zunehmendem  $n$  folgt, daß offenbar Eigenwerte existieren, die dem Betrage nach wesentlich kleiner sind als der führende Eigenwert  $\lambda_0$ . Die kleineren Eigenwerte bestimmen für kleine  $n$  maßgeblich die Zerfallsgeschwindigkeit, während für größere  $n$  der Zerfall durch  $\lambda_0$  dominiert wird. Aus der Existenz von Eigenwerten mit deutlich kleinerem Betrag als  $\lambda_0$  (die übrigens zwingend aus Voraussetzung 3 auf Seite 50 folgt) ergibt sich mit (3.42), daß Resonanzen existieren, deren Imaginärteil deutlich größer ist als die Escape-Rate  $\kappa$ . Zum führenden Eigenwert  $\lambda_0$  hingegen gehört wegen (3.15) die Resonanz  $\omega_0 = i\kappa$ . Keine andere

Resonanz hat einen kleineren Imaginärteil.

Wie das häufige Auftreten negativer Werte von  $C_{l,l,i}(n)$  zeigt, besteht diese Funktion überwiegend aus oszillierenden Anteilen. Nach den auf (3.30) folgenden Erläuterungen ist die Oszillationsfrequenz eines solchen Anteils gleich der Phase des entsprechenden komplexen oder negativ reellen Eigenwertes. Das sich ständig abwechselnde Vorzeichen von  $C_{l,l,i}(n)$  im Bereich von  $n = 0$  bis  $n = 6$  (maximal mögliche Oszillationsfrequenz) deutet darauf hin, daß Eigenwerte existieren, die auf oder nahe bei der negativ reellen Achse liegen. Die zugehörigen Resonanzen haben einen Realteil von etwa  $-\pi$ .

Im Bereich  $n > 6$  sind die Oszillationen von  $C_{l,l,i}(n)$  langsamer. Daraus läßt sich schließen, daß auch komplex konjugierte Eigenwertpaare existieren und damit Paare von Resonanzen, die spiegelsymmetrisch zur imaginären Achse angeordnet sind.

Ob es außer  $\lambda_0$  noch Eigenwerte auf der positiv reellen Achse gibt und damit Resonanzen auf der imaginären Achse, kann der Korrelationsfunktion nicht entnommen werden. Ein Zeichen dafür wäre ein deutliches Überwiegen positiver Werte von  $C_{l,l,i}(n)$ , entsprechend einem erheblichen Gehalt an nichtoszillierenden Anteilen. Bei  $C_{l,l,i}(n)$  ist so etwas nicht zu erkennen. Die Existenz weiterer positiv reeller Eigenwerte läßt sich aber auch nicht ausschließen. Es ist genausogut möglich, daß die zu solchen Eigenwerten gehörenden, nach (3.30) von der Wahl der Observablen und der Anfangsverteilung abhängigen Proportionalitätsfaktoren verhältnismäßig klein sind.

### 4.3.2 Symmetrien des Eigenwertspektrums von $\mathcal{L}$

Eine Symmetrie der Anordnung der Eigenwerte von  $\mathcal{L}$  in der komplexen Ebene ist bereits bekannt: Die Eigenwerte sind entweder reell oder treten in komplex konjugierten Paaren auf, d. h. sie liegen spiegelsymmetrisch zur reellen Achse. Begründet wurde dies bereits in den Erläuterungen zu (3.30). Eine andere Begründung ist durch die Tatsache gegeben, daß die Potenzreihenentwicklung der Selbergschen Zeta-Funktion nur reelle Koeffizienten enthält. Diese Eigenschaft gilt für alle dynamischen Systeme.

Eine Besonderheit des Zweimuldensystems ist hingegen, daß die Eigenwerte punktsymmetrisch um den Ursprung angeordnet sind:

*Ist  $\lambda_\alpha$  ein Eigenwert von  $\mathcal{L}$ , dann auch  $-\lambda_\alpha$ .*

Insbesondere gibt es zwei Eigenwerte von maximalem Betrage:  $\lambda_0$  und  $-\lambda_0$ .

Zwar wird die Punktsymmetrie der Eigenwerte auch in Anhang B mit einer Matrixdarstellung von  $\mathcal{L}$  begründet; der folgende Beweis zeigt jedoch explizit die

Tatsache, daß die Selbergsche Zeta-Funktion  $Z(z)$  bereits durch die Teilstücke  $Z_{A_1}(z)$  und  $Z_{A_2}(z)$  eindeutig bestimmt ist. Es gilt nämlich

$$Z_{A_1}(z) = Z_{B_1}(-z) \quad (4.33)$$

und

$$Z_{A_2}(z) = Z_{B_2}(-z), \quad (4.34)$$

woraus wegen  $Z(z) = Z_{A_1}(z)Z_{A_2}(z)Z_{B_1}(z)Z_{B_2}(z)$  folgt:

$$Z(z) = Z(-z). \quad (4.35)$$

Das wiederum bedingt die Punktsymmetrie der Nullstellen von  $Z(z)$  und damit der Eigenwerte von  $\mathcal{L}$ .

Zum Beweis von (4.33) werden zunächst die Teilstücke  $1/\zeta_{k,A_1}(z)$  und  $1/\zeta_{k,B_1}(z)$  einer dynamischen Zeta-Funktion  $1/\zeta_k(z)$  betrachtet, siehe (3.126) und (3.127). Die Funktion  $1/\zeta_{k,A_1}(z)$  ist wegen (3.127) und (3.131) sowie wegen  $\chi_{A_1}(h) = 1 \forall h \in \mathcal{C}_{2v}$  durch

$$\frac{1}{\zeta_{k,A_1}}(z) = \prod_{\tilde{p}} \left( 1 - \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right). \quad (4.36)$$

gegeben. Bei  $1/\zeta_{k,B_1}(z)$  hingegen ist der Charakter in der  $B_1$ -Darstellung zu beachten:

$$\frac{1}{\zeta_{k,B_1}}(z) = \prod_{\tilde{p}} \left( 1 - \chi_{B_1}(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\tilde{p}}^k} \right). \quad (4.37)$$

Der Charaktertafel auf Seite 75 ist zu entnehmen, daß  $\chi_{B_1}(h_{\tilde{p}}) = -1$  gilt, falls  $h_{\tilde{p}} = \sigma_y$  oder  $h_{\tilde{p}} = c_2$  ist. Die Charaktere der übrigen beiden Elemente von  $\mathcal{C}_{2v}$  sind hingegen gleich 1. Man kann sich anhand des in Abschnitt 3.5.3 vorgestellten Verfahrens zur Bestimmung von  $h_{\tilde{p}}$  klarmachen, daß ein Orbit  $\tilde{p}$  genau dann den Symmetriertyp  $\sigma_y$  oder  $c_2$  besitzt, wenn seine topologische Länge  $n_{\tilde{p}}$  ungerade ist. Das bedeutet, daß das Vorzeichen der Gewichte von Orbits ungerader Länge in (4.37) ein anderes ist als in (4.36). Entwickelt man (4.37) und (4.36) durch formales Ausmultiplizieren der unendlichen Produkte in Potenzreihen (vgl. Abschnitt 3.6.1), so folgt mit (3.117), daß die Entwicklungskoeffizienten gerader Ordnung bei beiden Funktionen gleich sind; die Koeffizienten ungerader Ordnung hingegen sind zwar von gleichem Betrage, unterscheiden sich aber im Vorzeichen. Daher gilt:

$$\frac{1}{\zeta_{k,A_1}}(z) = \frac{1}{\zeta_{k,B_1}}(-z). \quad (4.38)$$

Von den Funktionen  $1/\zeta_{k,A_1}(z)$  und  $1/\zeta_{k,B_1}(z)$  kann man nun mit Hilfe von (3.130) auf  $Z_{A_1}(z)$  und  $Z_{B_1}(z)$  schließen:

$$Z_{A_1}(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta_{k,A_1}^{k+1}}(z) \quad (4.39)$$

$$= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta_{k, B_1}^{k+1}}(-z) \quad (4.40)$$

$$= Z_{B_1}(-z). \quad (4.41)$$

Damit ist (4.33) gezeigt. Der Beweis von (4.34) erfolgt analog. Es gilt also (4.35) und die Punktsymmetrie der Eigenwerte.

Aus der Punktsymmetrie und der Spiegelsymmetrie zur reellen Achse folgt, daß die Eigenwerte auch spiegelsymmetrisch zur imaginären Achse angeordnet sind. Somit besitzen die Eigenwerte  $C_{2v}$ -Symmetrie – wie das Zweimuldensystem selbst.

Der praktische Nutzen von (4.33) und (4.34) liegt darin, daß es genügt, die Cycle Expansions von  $Z_{A_1}(z)$  und  $Z_{A_2}(z)$  zu berechnen.

### 4.3.3 Numerische Bestimmung komplexer Nullstellen

Das rekursive Verfahren, welches hier eingeführt wird, eignet sich zur Bestimmung komplexer Nullstellen beliebiger holomorpher Funktionen. Es ist also insbesondere auf Polynome anwendbar und damit auf Cycle Expansions von Zeta-Funktionen. Der Vorteil des Verfahrens liegt darin, daß der Rechenaufwand nur logarithmisch mit der erwünschten Genauigkeit des Ergebnisses ansteigt. Sucht man die Nullstellen hingegen durch einfaches Abtasten eines Gitters in  $\mathbb{C}$ , so steigt der Aufwand quadratisch mit der Genauigkeit. Ein gewisser Nachteil der hier vorgetellten Methode liegt darin, daß nicht mit völliger Sicherheit jede Nullstelle gefunden wird. Bei erneutem Starten der Prozedur mit leicht veränderten Anfangsbedingungen werden aber in der Regel die vorher nicht entdeckten Nullstellen aufgespürt, siehe unten.

Das Verfahren basiert auf dem *Minimumsprinzip holomorpher Funktionen* [Lor97]. Dieses Prinzip gilt für jede auf einem beliebigen Kompaktum  $K \subset \mathbb{C}$  definierte Funktion  $h(z)$ , die auf dem Inneren von  $K$  holomorph ist; es besagt, daß das Minimum von  $|h(z)|$  auf  $K$  stets auf dem Rand von  $K$  angenommen wird, es sei denn,  $h(z)$  besitzt im Inneren von  $K$  eine Nullstelle.

Ausgangspunkt der Prozedur ist ein Quadrat in  $\mathbb{C}$ , von dem angenommen wird, daß es in seinem Inneren alle relevanten Nullstellen der betrachteten Funktion  $h(x)$  enthält. Dieses Quadrat wird in vier gleich große Teilquadrate unterteilt. Mit jedem dieser Teilquadrate wird wie folgt verfahren: Zunächst wird durch feine Abtastung das Minimum von  $|h(z)|$  auf dem Rand bestimmt. Anschließend wird das Innere des Teilquadrates abgetastet. Wird ein Punkt  $w$  im Inneren gefunden, für den der Wert  $|h(w)|$  kleiner ist als das vorher bestimmte Randminimum, so liegt aufgrund des Minimumsprinzips (mit hoher Wahrscheinlichkeit) eine Nullstelle von  $h(z)$  im Inneren des Teilquadrates. In diesem Falle wird die Abtastung

abgebrochen und die Prozedur für das betrachtete Teilquadrat erneut aufgerufen. Wird jedoch nach hinreichend genauer Abtastung kein Punkt gefunden, in dem die Funktion  $|h(z)|$  einen kleineren Wert annimmt als am Rand, so befindet sich (mit hoher Wahrscheinlichkeit) keine Nullstelle im betrachteten Teilquadrat. Dieses wird dann nicht weiter untersucht.

Nach und nach werden immer kleinere Quadrate überprüft. Wenn die Kantenlänge eines Teilquadrates einen vorgegebenen Wert, der die gewünschte Genauigkeit angibt, unterschreitet, und die Existenz einer Nullstelle im Inneren eines solchen Teilquadrates festgestellt wird, dann wird die Prozedur nicht erneut aufgerufen, sondern die Nullstelle als im Zentrum des Teilquadrates liegend angenommen. Das Verfahren endet, wenn alle Teilquadrat abgearbeitet sind und kein weiterer Aufruf anhängig ist. Dann werden alle gefundenen Nullstellen ausgegeben.

Probleme können sich ergeben, wenn es im Laufe der Rechnung vorkommt, daß eine Nullstelle sehr nahe an oder auf dem Rand eines (Teil-)Quadrates liegt. Dann ist das gefundene Randminimum von  $|h(z)|$  sehr klein und es kann passieren, daß kein Punkt aus dem Inneren des Quadrates gefunden wird, der eine Unterschreitung dieses Wertes ergibt, da nur mit endlicher Genauigkeit abgetastet werden kann. Die in dem Quadrat enthaltene Nullstelle wird dann nicht registriert.

Wenn bekannt ist, wieviele Nullstellen in dem Quadrat liegen, für das die Rechnung gestartet worden ist, dann wird nach Beendigung der Rechnung auch bemerkt, wenn eine oder mehrere Nullstellen nicht gefunden worden sind. Fehlende Nullstellen können meist dadurch gefunden werden, daß die Rechnung für ein gegenüber dem ersten Versuch leicht verschobenes Quadrat oder mit erhöhter Abtastgenauigkeit noch einmal begonnen wird. Insbesondere ist, falls die Existenz reeller Nullstellen angenommen wird, darauf zu achten, daß das Quadrat nicht symmetrisch zur reellen Achse liegt. Ansonsten gäbe es schon nach der ersten Unterteilung des Quadrates Nullstellen, die auf Rändern von Teilquadraten liegen.

#### 4.3.4 Bestimmung von Resonanzen

Resonanzen werden aus Eigenwerten von  $\mathcal{L}$  berechnet. Diese wiederum sind inverse Nullstellen der Selbergschen Zeta-Funktion  $Z(z)$ . Die Bestimmung der Nullstellen erfolgt hier mit der Cycle Expansion siebenter Ordnung von  $Z_{A_1}(z)$  und von  $Z_{A_2}(z)$ . Die Koeffizienten  $b_n$  der ersten wurden bereits in Tabelle 4.3 angegeben. Die Koeffizienten  $a_n$  der Cycle Expansion von

$$Z_{A_2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (4.42)$$

stehen in Tabelle 4.8.

Aus den Nullstellen dieser Polynome erhält man durch Vorzeichenumkehr wegen (4.33) und (4.34) zusätzlich die Nullstellen der Cycle Expansions von  $Z_{B_1}(z)$  und von  $Z_{B_2}(z)$ .

Zu beachten ist, daß nicht alle so gefundenen Nullstellen in der Nähe von Nullstellen der exakten Selbergschen Zeta-Funktion  $Z(z)$  liegen. Um das einzusehen, betrachte man das Verhalten der Nullstellen, wenn die Ordnung der Cycle Expansion fortwährend erhöht wird. Bei jeder Erhöhung der Ordnung um eins kommt eine neue Nullstelle hinzu. Ferner verschieben sich die Nullstellen, die „noch nicht lange“ existieren, stark. Nur die „schon länger“ existierenden Nullstellen sind weitgehend unempfindlich gegenüber Erhöhung der Ordnung, und nur diese Nullstellen stellen eine gute Approximation von Nullstellen der exakten Selbergschen Zeta-Funktion  $Z(z)$  dar.

Um festzustellen, welche der Nullstellen der Cycle Expansion siebenter Ordnung tatsächlich den exakten Nullstellen nahe sind, bietet sich ein Vergleich mit der Cycle Expansion sechster Ordnung an. Nur die Nullstellen, die sich in beiden Fällen etwa an der gleichen Position befinden, können als korrekt angenommen werden. Bei den übrigen Nullstellen ist zu erwarten, daß sie sich bei weiterer Erhöhung der Ordnung noch in einem nicht unerheblichen Maße verschieben.

Eine Übersicht über das Verhalten der Nullstellen beim Übergang von der sechsten zur siebenten Ordnung zeigen die Abbildungen 4.3 bis 4.6. Über der komplexen Ebene werden die Funktionen  $-\ln |Z_{A_1}^{[6]}(z)|$ ,  $-\ln |Z_{A_1}^{[7]}(z)|$ ,  $-\ln |Z_{A_2}^{[6]}(z)|$  und  $-\ln |Z_{A_2}^{[7]}(z)|$  dargestellt; die hochgestellten Indizes geben jeweils die Ordnung der Cycle Expansion an. Durch die Bildung des negativen Logarithmus treten die Nullstellen der entsprechenden Cycle Expansions als deutliche Spitzen hervor.

Die Funktionen  $Z_{A_1}^{[6]}(z)$  und  $Z_{A_1}^{[7]}(z)$  besitzen in guter Übereinstimmung drei relativ dicht benachbarte Nullstellen in der Nähe des Ursprungs. Die mittlere von ihnen

$n$	$a_n$
0	1.0000000000000000000000000000000
1	0.02858330669670940474
2	-0.00015435182731255418
3	0.00000019153095581858
4	-0.00000000034952003887
5	-0.00000000000041527029
6	0.00000000000000018003
7	0.0000000000000000000150

Tabelle 4.8: Koeffizienten der Cycle Expansion siebenter Ordnung von  $Z_{A_2}(z)$ .

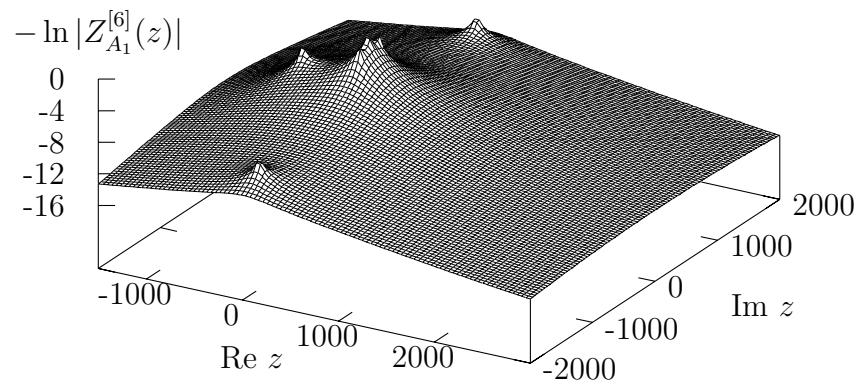


Abbildung 4.3: Die Funktion  $-\ln|Z_{A_1}^{[6]}(z)|$ .

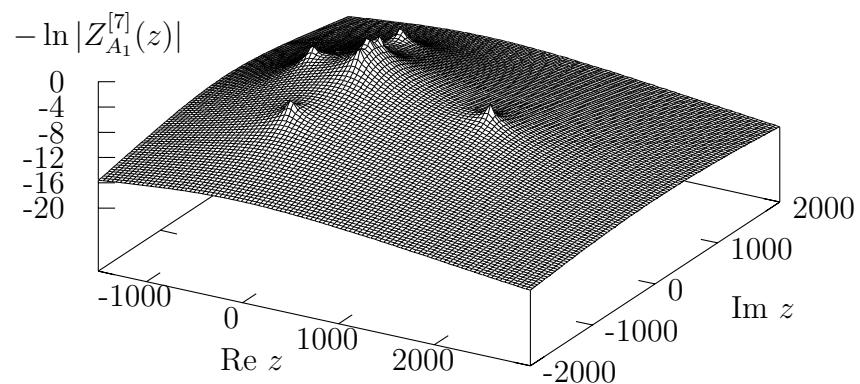
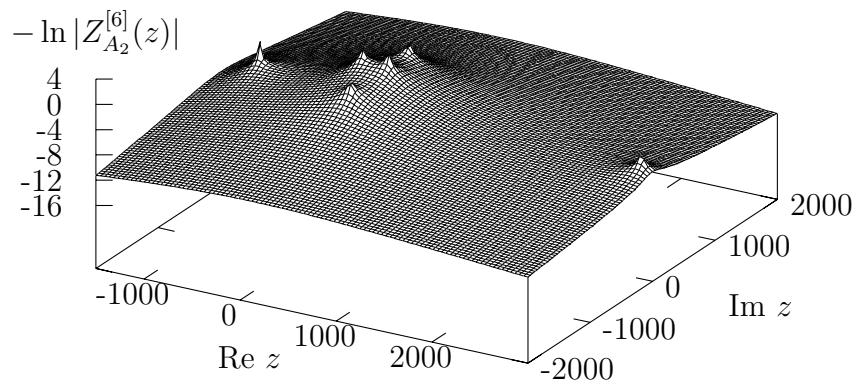
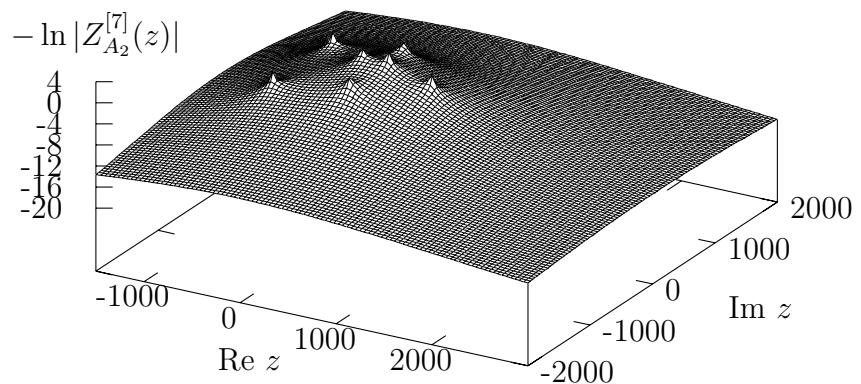


Abbildung 4.4: Die Funktion  $-\ln|Z_{A_1}^{[7]}(z)|$ .

Abbildung 4.5: Die Funktion  $-\ln|Z_{A_2}^{[6]}(z)|$ .Abbildung 4.6: Die Funktion  $-\ln|Z_{A_2}^{[7]}(z)|$ .

liegt auf der reellen Achse. Sie ist die führende Nullstelle. Es gibt noch eine weitere Nullstelle, die sich bei beiden Funktionen etwa am gleichen Ort befindet, und zwar auf der negativ reellen Achse. Damit sind vier korrekte Nullstellen gefunden.

Die übrigen Kandidaten sind hingegen noch „in Bewegung“. Ein komplex konjugiertes Paar nahe der imaginären Achse ist bei  $Z_{A_1}^{[7]}(z)$  im Vergleich zu  $Z_{A_1}^{[6]}(z)$  deutlich dichter zusammengerückt. Außerdem besitzt  $Z_{A_1}^{[7]}(z)$  eine neu entstandene positiv reelle Nullstelle.

Bei  $Z_{A_2}^{[6]}(z)$  und  $Z_{A_2}^{[7]}(z)$  gibt es ebenfalls in der Nähe des Ursprungs jeweils vier Nullstellen, die in beiden Fällen etwa an den gleichen Positionen liegen, nämlich zwei auf der reellen Achse und ein komplex konjugiertes Paar.

Ansonten gibt es jedoch keine Übereinstimmung: Eine negativ reelle Nullstelle von  $Z_{A_2}^{[6]}(z)$  hat sich bei  $Z_{A_2}^{[7]}(z)$  in ein komplex konjugiertes Paar aufgespalten; ferner hat sich eine positiv reelle Nullstelle von  $Z_{A_2}^{[7]}(z)$  gegenüber ihrem Pendant bei  $Z_{A_2}^{[6]}(z)$  deutlich in Richtung Ursprung verschoben.

Damit ist die ungefähren Position von jeweils vier Nullstellen von  $Z_{A_1}(z)$  und  $Z_{A_2}(z)$  bekannt. Diese werden nun aus  $Z_{A_1}^{[7]}(z)$  und  $Z_{A_2}^{[7]}(z)$  mit Hilfe des im vorigen Unterabschnitt beschriebenen Verfahrens genau bestimmt. Durch Vorzeichenumkehr ergeben sich dann Nullstellen von  $Z_{B_1}(z)$  und  $Z_{B_2}(z)$ . Damit erhält man insgesamt 16 Nullstellen der Selbergschen Zeta-Funktion  $Z(z)$ . Aus diesen lassen sich durch Inversion ebensoviele Eigenwerte von  $\mathcal{L}$  berechnen und anschließend, mit (3.42), die gleiche Anzahl an Resonanzen. Dabei wird, wie am Anfang des Abschnitts festgelegt worden ist, die Phase der Eigenwerte aus dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  gewählt, und in (3.42) wird  $k = 0$  gesetzt. Jeweils vier der Nullstellen, Eigenwerte und Resonanzen sind jeder der vier irreduziblen Darstellungen von  $\mathcal{C}_{2v}$  zuzuordnen.

Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind, nach den irreduziblen Darstellungen sortiert, in Tabelle 4.9 aufgelistet. Als erstes werden die führende Nullstelle  $\lambda_0^{-1}$ , der führende Eigenwert  $\lambda_0$  sowie die zugehörige Resonanz  $\kappa i$  aufgeführt. Der betragsmäßig zweitgrößte Eigenwert  $\lambda_1$  gehört zur  $A_2$ -Darstellung.

Abbildung 4.7 zeigt diejenigen errechneten Eigenwerte von  $\mathcal{L}$ , die in der Nähe des Ursprungs der komplexen Ebene liegen. Die Positionen der Eigenwerte werden durch unterschiedliche Symbole dargestellt, so daß jedem Eigenwert die zugehörige irreduzible Darstellung anzusehen ist. Vier der errechneten Eigenwerte sind nicht in dem gezeigten Ausschnitt der komplexen Ebene enthalten, nämlich  $\pm\lambda_0$  und  $\pm\lambda_1$ . An den dargestellten Eigenwerten ist die in Abschnitt 4.3.2 hergeleitete  $\mathcal{C}_{2v}$ -Symmetrie erkennbar.

Die Resonanzen werden in Abbildung 4.8 graphisch dargestellt. Diese werden ebenfalls durch verschiedene Symbole markiert, so daß jeweils die zugehörige irreduzible Darstellung erkennbar ist. Auch die Anordnung der Resonanzen besitzt

Nullstelle von $Z(z)$	Eigenwert von $\mathcal{L}$	Resonanz
<i>A</i> <sub>1</sub> -Darstellung:		
7.069506 = $\lambda_0^{-1}$	0.141453 = $\lambda_0$	$\kappa i = 1.955791i$
14.861665 ± 154.026919i	0.000621 ± 0.006432i	±1.474607 + 5.041761i
-575.640264	-0.001737	-3.141593 + 6.355483i
<i>A</i> <sub>2</sub> -Darstellung:		
-29.951546 = $\lambda_1^{-1}$	-0.033387 = $\lambda_1$	-3.141593 + 3.399581i
246.254350	0.004061	5.506365i
127.795286 ± 427.716852i	0.000641 ± 0.002146i	±1.280455 + 6.101216i
<i>B</i> <sub>1</sub> -Darstellung:		
-7.069506 = $-\lambda_0^{-1}$	-0.141453 = $-\lambda_0$	-3.141593 + 1.955791i
-14.861665 ± 154.026919i	-0.000621 ± 0.006432i	±1.666986 + 5.041761i
575.640264	0.001737	6.355483i
<i>B</i> <sub>2</sub> -Darstellung:		
29.951546 = $-\lambda_1^{-1}$	0.033387 = $-\lambda_1$	3.399581i
-246.254350	-0.004061	-3.141593 + 5.506365i
-127.795286 ± 427.716852i	-0.000641 ± 0.002146i	±1.861138 + 6.101216i

Tabelle 4.9: Nullstellen der Selbergschen Zeta-Funktion  $Z(z)$ , Eigenwerte des Perron-Frobenius-Operators  $\mathcal{L}$  und Resonanzen des Zweimuldensystems.

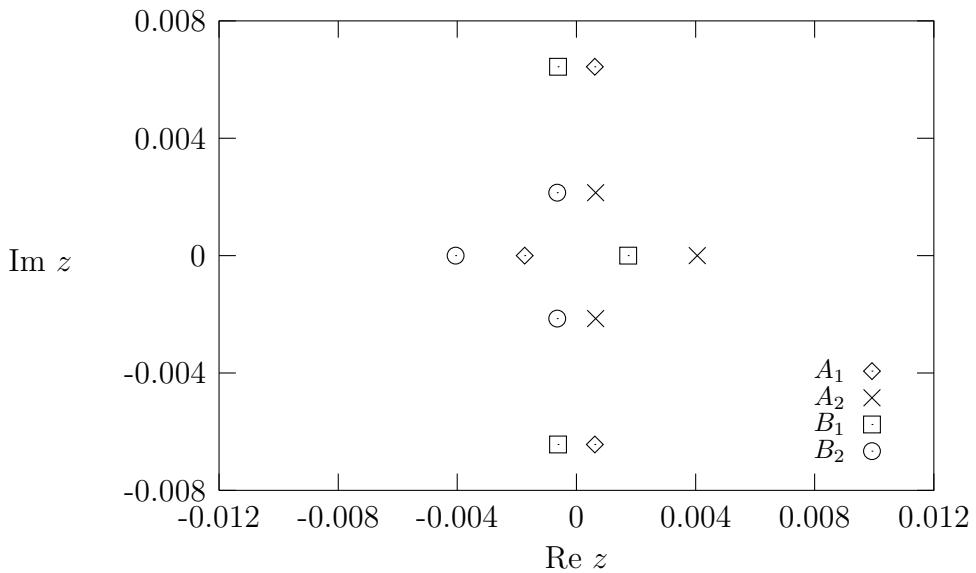


Abbildung 4.7: Eigenwerte von  $\mathcal{L}$  in der Nähe des Ursprungs der komplexen Ebene. Die unterschiedlichen Symbole geben entsprechend der Legende die Zugehörigkeit der Eigenwerte zur jeweiligen irreduziblen Darstellung an.

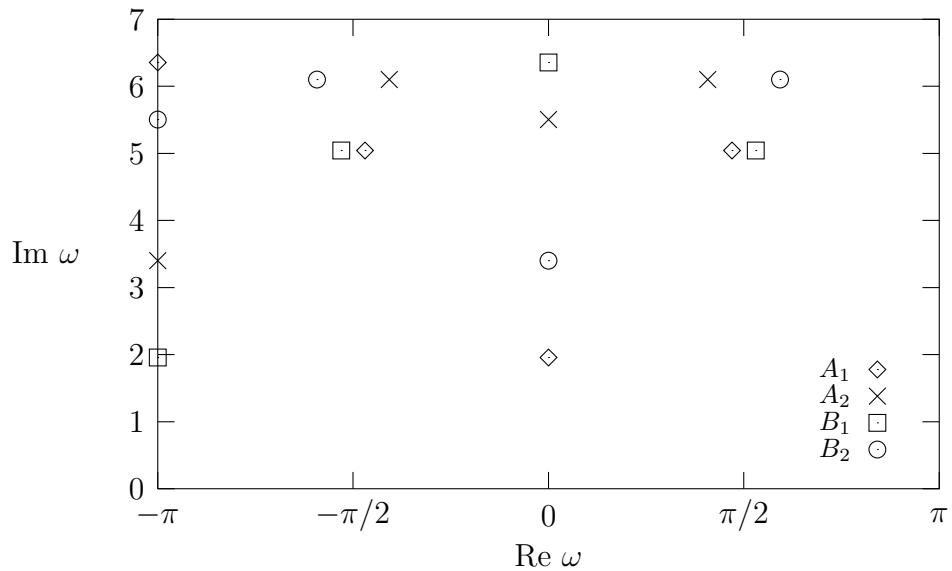


Abbildung 4.8: Resonanzen des Zweimuldensystems. Wie in Abbildung 4.7 wird die Zuordnung der Resonanzen zu den irreduziblen Darstellungen durch die verschiedenen Symbole angegeben.

ein hohes Maß an Symmetrie, was nicht verwunderlich ist, da der Realteil der Resonanzen gleich der Phase der Eigenwerte ist. Die Symmetrie wird besonders deutlich, wenn man sich klarmacht, daß der dargestellte  $\omega$ -Bereich aufgrund der  $2\pi$ -Periodizität der Resonanzen gemäß (3.42) eigentlich als ein Zylinder anzusehen ist. Zum einen liegen die Resonanzen spiegelsymmetrisch zur  $\text{Re } \omega = 0$ -Linie und damit zur  $\text{Re } \omega = -\pi$ -Linie, was eine Folge der Symmetrie der Eigenwerte zur reellen Achse ist. Zum anderen besitzt jede Resonanz einen Partner, der um  $\pi$  verschoben ist, d. h. sich an der gegenüberliegenden Seite des Zylinders befindet. Das liegt an der Punktsymmetrie der Eigenwerte. Die beiden Symmetrien der Resonanzen erzeugen, in Korrespondenz zur Spiegelsymmetrie der Eigenwerte bezüglich der imaginären Achse, eine dritte Symmetrie, nämlich bezüglich Spiegelungen an der  $\text{Re } \omega = -\pi/2$ -Linie und somit an der  $\text{Re } \omega = \pi/2$ -Linie. Damit ergibt sich eine  $C_{2v}$ -Symmetrie auf dem Zylinder.

Die Aussagen, die in Abschnitt 4.3.1 mit Hilfe der Korrelationsfunktion gemacht wurden, sind zutreffend. Es gibt Eigenwerte, deren Beträge deutlich kleiner sind als der führende Eigenwert  $\lambda_0$ , und damit Resonanzen, deren Imaginärteil deutlich größer ist als die Escape-Rate  $\kappa$ . Außerdem existieren, wie erwartet, Eigenwerte auf der negativen reellen Achse sowie komplexe konjugierte Paare von Eigenwerten. Daher gibt es Resonanzen mit dem Realteil  $-\pi$  sowie solche, die spiegelsymmetrisch zu  $\text{Re } \omega = 0$  angeordnet sind. Was in Abschnitt 4.3.1 nicht erkannt wurde, ist, daß genauso viele positiv reelle Eigenwerte wie negativ reelle vorhanden sind, also genauso viele Resonanzen mit dem Realteil 0 wie mit dem Realteil  $-\pi$ .

# Schluß

In dieser Arbeit wurde ein Hamilton-System mit zwei Freiheitsgraden vorgestellt und untersucht, das hartes Chaos aufweist. Im Gegensatz zu den wenigen anderen Systemen solcher Art, die in der Literatur zu finden sind, besitzt das hier betrachtete System die besondere Eigenschaft, aus nur zwei rein attraktiven Zentralpotentialen zu bestehen.

Die Zentralpotentiale wurden indirekt durch Angabe einer Ablenkfunktion von relativ einfacher Gestalt festgelegt. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, daß die Dynamik des Systems sich so durch eine analytisch leicht handhabbare Abbildung beschreiben läßt. Außerdem wurde die Ablenkfunktion so gewählt, daß das Zweimuldensystem ein Modell für eine allgemeinere Systemklasse darstellt, nämlich für Zweimuldensysteme, die aus Potentialen mit „weicher Kante“ und geeigneter Tiefe bestehen. Das konnte durch eine Diskussion der Eigenschaften klassischer Ablenkfunktionen plausibel gemacht werden.

Die Abbildung wurde in zwei Schritten bezüglich der  $\mathcal{C}_{2v}$ -Symmetrie reduziert. So entstand ein *teilweise reduziertes System* und ein *reduziertes System*. Damit wurde eine Vereinfachung der darauffolgenden Diskussionen und numerischen Rechnungen ermöglicht.

Durch Betrachtung der geometrischen Eigenschaften der teilweise reduzierten Abbildung  $F$  konnte eine invariante Menge konstruiert werden. Aus der in [Ste95] nachgewiesenen Hyperbolizität der invarianten Menge folgt zum einen, daß diese die Struktur einer zweidimensionalen Cantor-Menge besitzt, zum anderen, daß die Dynamik von  $F$  auf der invarianten Menge topologisch konjugiert zu einer vollständigen Symbolischen Dynamik mit vier Symbolen ist. Für das reduzierte System konnte ebenfalls eine vollständige Symbolische Dynamik mit vier Symbolen eingeführt werden.

Mit Hilfe der Symbolischen Dynamik wurde die harte Chaotizität des Zweimuldensystems nachgewiesen. Eine vollständige Symbolische Dynamik, d. h. eine *Bernoulli-Shift*, stellt Chaos in reinster Form dar. Beispielsweise kann streng bewiesen werden, daß eine Bernoulli-Shift ergodisch ist.

Es wurde ein numerisches Verfahren vorgestellt, mit dem sich nach Vorgabe einer endlichen Symbolfolge der zugehörige periodische Orbit ermitteln läßt. Damit

ließ sich die Berechnung aller periodischen Orbits des reduzierten Systems bis zur topologischen Länge 7 sowie der zugehörigen Stabilitäten automatisieren. Die entstandenen Daten bildeten die Grundlage zur Anwendung der Theorie der periodischen Orbits.

Diese Theorie wurde in der vorliegenden Arbeit zusammenfassend dargestellt. Es wurde erläutert, wie sich Escape-Raten, Resonanzspektren und dynamische Mittelwerte bestimmen lassen. Alle diese Größen zur Charakterisierung dynamischer Systeme beruhen sowohl auf zeitlichen als auch auf räumlichen Mittelungen, daher sind die Konzepte zu ihrer Bestimmung sehr ähnlich. Bei den beiden letztgenannten Fällen spielt die Ergodizität des betrachteten Systems eine entscheidende Rolle. Alle genannten Systemgrößen stehen mit den Eigenwerten von Entwicklungsooperatoren in Verbindung. Die Werkzeuge zur Berechnung der Eigenwerte sind die Zeta-Funktionen. Diese hängen von den periodischen Orbits des zu analysierenden Systems ab.

Ein besonderes Gewicht wurde auf die Beschreibung der Auswirkungen diskreter Symmetrien auf die Zeta-Funktionen gelegt. Dabei wurde gezeigt, daß zur Berechnung der Selbergschen Zeta-Funktion unter Ausnutzung der Symmetrie des Systems die Symmetrietypen der periodischen Orbits des reduzierten Systems benötigt werden. Es wurde beschrieben, wie man die Symmetrietypen beim reduzierten Zweimuldensystem auf einfache Weise an den Symbolfolgen der Orbits ablesen kann.

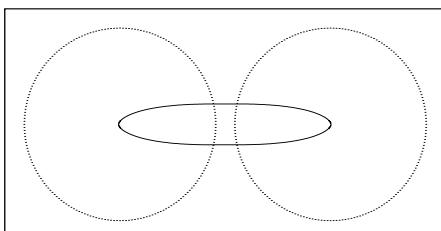
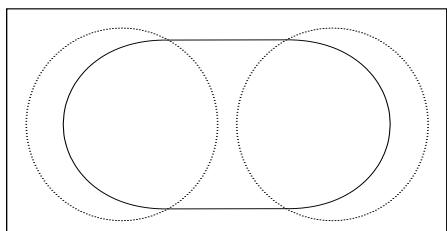
Die Escape-Rate  $\kappa$  und der Lyapunov-Exponent  $\lambda$  des Zweimuldensystems konnten mit Hilfe der Theorie mit einer Genauigkeit von  $10^{-12}$  bestimmt werden. Andere numerische Verfahren zur Berechnung von  $\kappa$  und  $\lambda$  haben sich gegenüber der Theorie als hoffnungslos unterlegen erwiesen. Darin wird aber auch deutlich, daß es sich beim Zweimuldensystem um ein im höchsten Maße idealisiertes Modell handelt. Aufgrund der Existenz einer vollständigen Symbolischen Dynamik ist das System geradezu perfekt auf die Theorie zugeschnitten.

Den Abschluß der Arbeit bildete die Bestimmung einiger Resonanzen des Zweimuldensystems. Dabei wurden gewisse Vermutungen über die Beschaffenheit des Resonanzspektrums, die durch Betrachtung einer Korrelationsfunktion getroffen wurden, bestätigt. Zur Berechnung der Resonanzen waren komplexe Nullstellen der Selbergschen Zeta-Funktion zu bestimmen, wofür ein numerisches Verfahren entwickelt wurde. Es konnte eine interessante Eigenschaft des Eigenwertspektrums des Perron-Frobenius-Operators  $\mathcal{L}$  und des Resonanzspektrums beim Zweimuldensystem entdeckt werden: Aufgrund der Charaktere der Symmetriegruppe  $\mathcal{C}_{2v}$  und der Eigenschaften der Symbolischen Dynamik des reduzierten Systems weisen die Anordnung der Eigenwerte in der komplexen Ebene und die Anordnung der Resonanzen auf dem „komplexen  $\omega$ -Zylinder“ ebenfalls eine  $\mathcal{C}_{2v}$ -Symmetrie auf.

# Anhang A

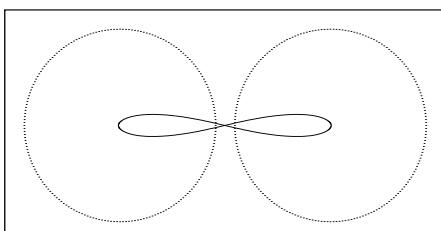
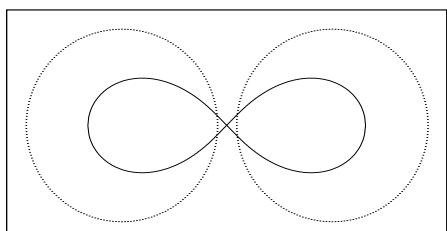
## Beispiele periodischer Orbits

In diesem Anhang werden Ortsraumbahnen einiger periodischer Orbits des Zweimuldensystems gezeigt. Unter den Bildern sind die jeweiligen Symbolfolgen im reduzierten System notiert. Die Orbits bis zur Periode 3 werden sämtlich aufgeführt sowie einige Beispiele besonders verwickelter Orbits höherer Periode. Jede der gezeigten Bahnen kann an der  $x$ - und  $y$ -Achse gespiegelt und am Ursprung um  $\pi$  gedreht werden, ohne daß sich die zugehörige Symbolfolge ändert (siehe Abschnitt 2.6). Verursacht keine dieser Operationen eine Zeitumkehr des Orbits, so liegt die Umlaufrichtung der Bahn fest. Diese wird dann durch einen Pfeil gekennzeichnet. Das letzte Beispiel besitzt zwar eine festgelegte Umlaufrichtung; zu deren Bestimmung ist die Bahnkurve jedoch zu kompliziert.



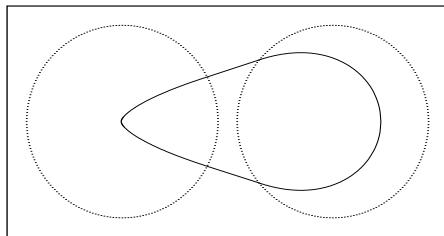
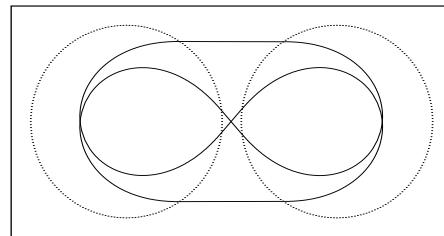
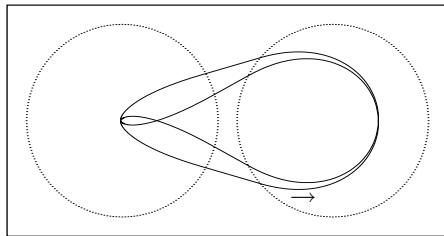
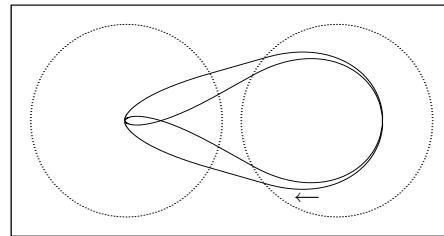
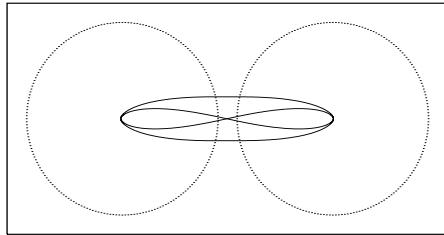
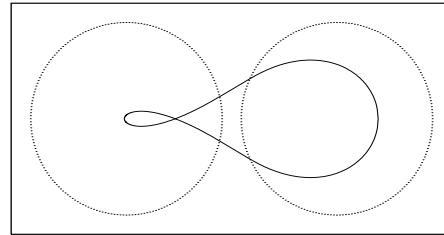
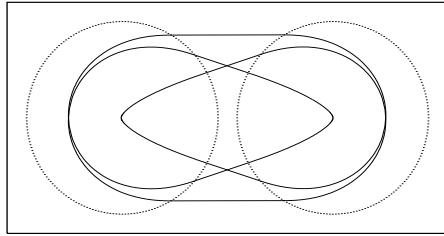
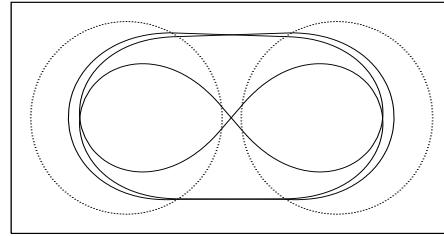
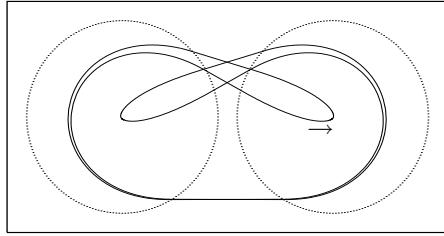
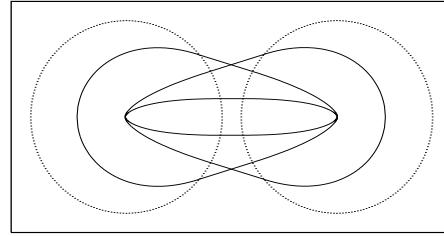
$[\Rightarrow]$

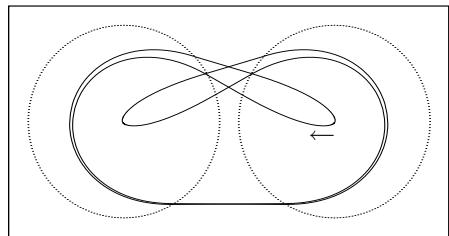
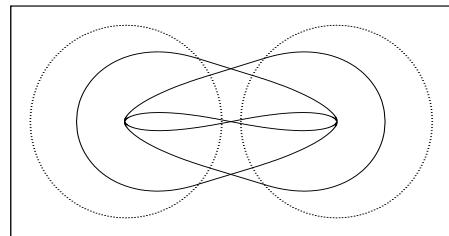
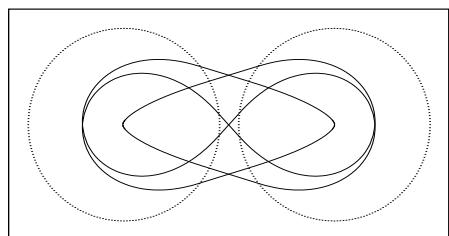
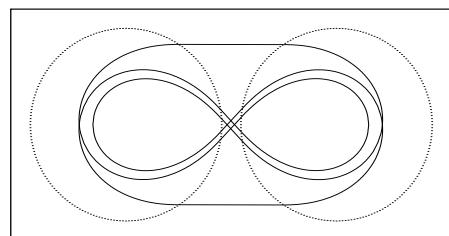
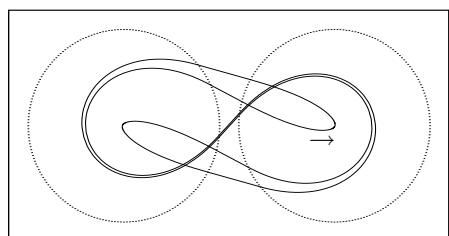
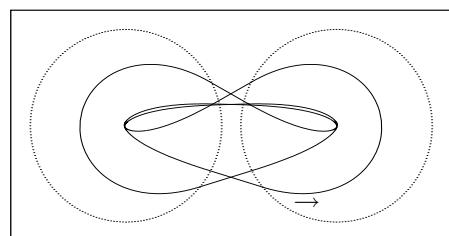
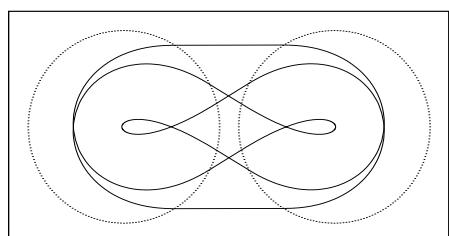
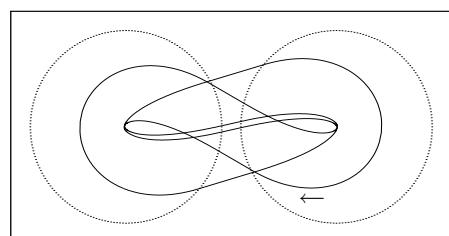
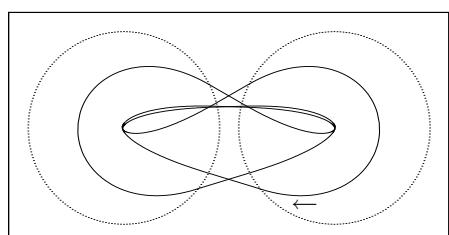
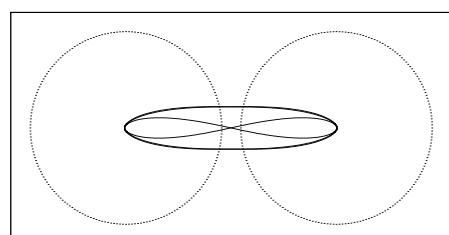
$[\Leftarrow]$

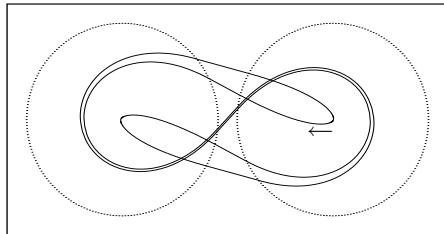
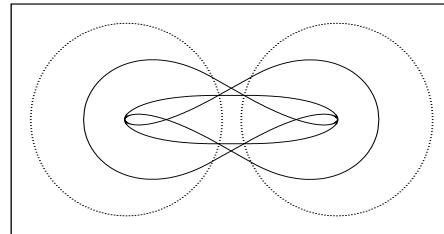
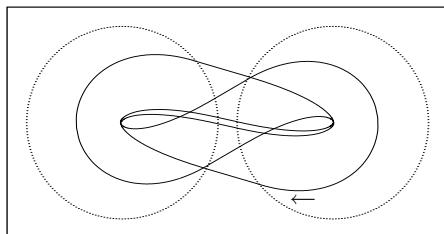
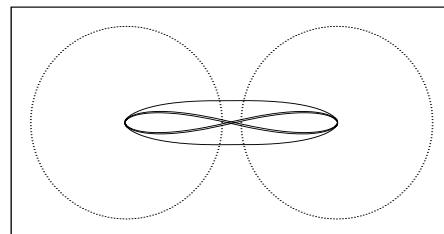
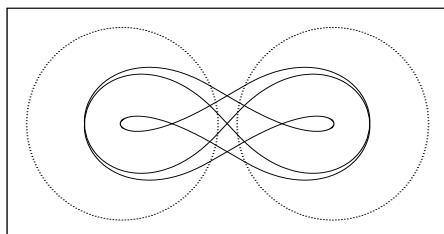
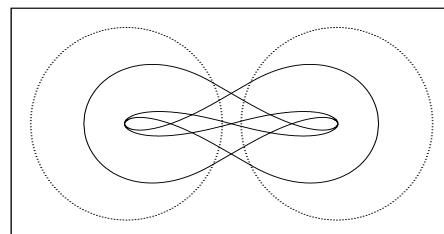
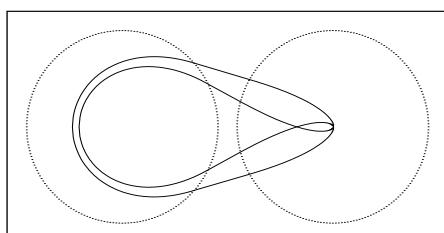
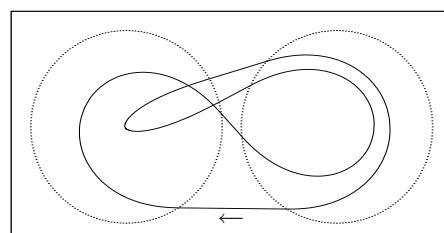
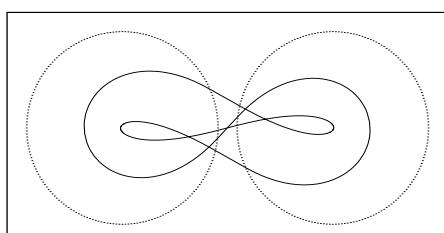
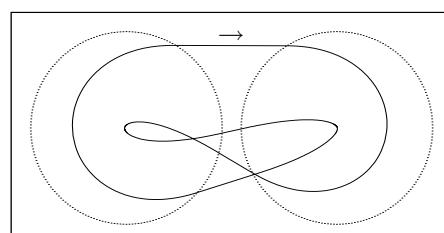


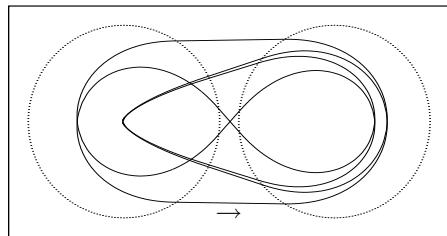
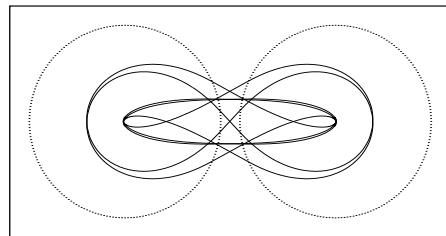
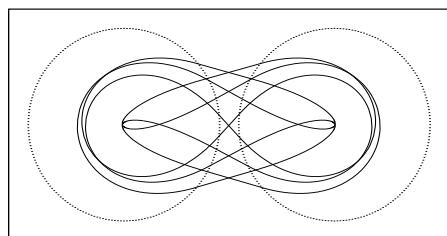
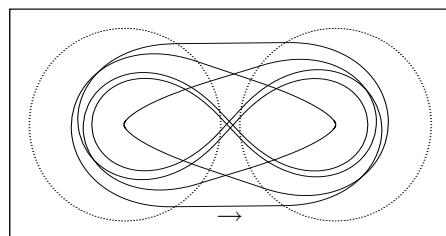
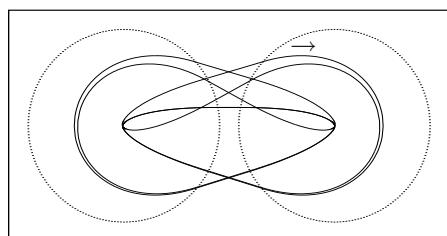
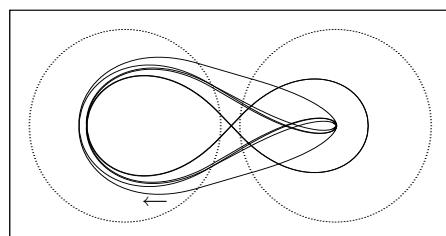
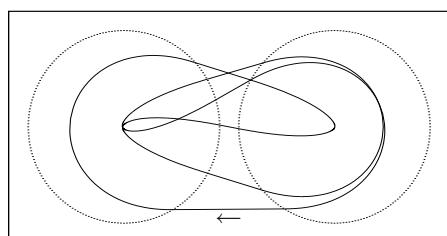
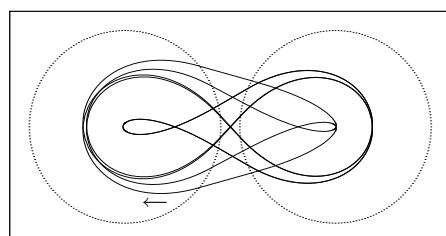
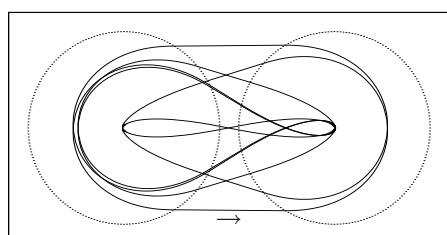
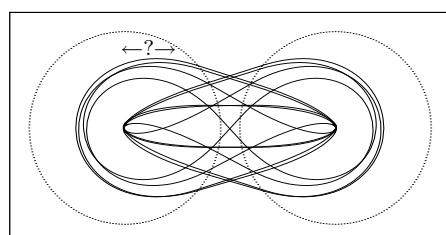
$[\Rightarrow]$

$[\Leftarrow]$

 $[\Rightarrow][\Leftarrow]$  $[\Rightarrow][\neq\Rightarrow]$  $[\Rightarrow][\neq\Leftarrow]$  $[\Leftarrow][\neq\Rightarrow]$  $[\Leftarrow][\neq\Leftarrow]$  $[\neq\Rightarrow][\neq\Leftarrow]$  $[\Rightarrow][\Rightarrow][\Leftarrow]$  $[\Rightarrow][\Rightarrow][\neq\Rightarrow]$  $[\Rightarrow][\Rightarrow][\neq\Leftarrow]$  $[\Rightarrow][\Leftarrow][\Leftarrow]$

 $[\Rightarrow][=<][\neq>]$  $[\Rightarrow][=<][\neq<]$  $[\Rightarrow][\neq>][=<]$  $[\Rightarrow][\neq>][\neq>]$  $[\Rightarrow][\neq>][\neq<]$  $[\Rightarrow][\neq<][=<]$  $[\Rightarrow][\neq<][\neq>]$  $[\Rightarrow][\neq<][\neq<]$  $[=<][=<][\neq>]$  $[=<][=<][\neq<]$


 $[\neq <][\neq >][\neq >]$ 

 $[\neq <][\neq >][\neq <]$ 

 $[\neq <][\neq <][\neq >]$ 

 $[\neq <][\neq <][\neq <]$ 

 $[\neq >][\neq >][\neq <]$ 

 $[\neq >][\neq <][\neq <]$ 

 $[\neq >][\neq <][\neq >][\neq <]$ 

 $[\neq >][\neq >][\neq >][\neq <]$ 

 $[\neq >][\neq >][\neq <][\neq <]$ 

 $[\neq >][\neq >][\neq <][\neq <]$

 $[=>][=<][=>][\neq>]$  $[=<][=<][\neq>][\neq>][\neq<]$  $[=>][\neq>][\neq<][=>][\neq<]$  $[=>][=>][\neq>][\neq>][=<]$  $\overline{[=>][=<][=<][=>][\neq<]}$  $\overline{[=>][\neq<][\neq>][\neq>][\neq>][\neq<]}$  $\overline{[=>][=<][\neq>][=>][=<][\neq<]}$  $\overline{[=>][\neq>][\neq<][\neq>][\neq>][\neq<]}$  $\overline{[=>][=<][\neq<][=>][\neq<][\neq>]}$  $\overline{[=>][=<][=>][\neq>][\neq<][=>][\neq<][=<][=<]}$

## Anhang B

# Matrixdarstellung des Perron-Frobenius-Operators

Ziel dieses Anhangs ist es, die Manipulationen, die in Abschnitt 3.2.1 zur Begründung von (3.15) durchgeführt wurden, zu rechtfertigen und die Bedenken, die in diesem Zusammenhang vorgebracht wurden, zumindest größtenteils zu entkräften. Dazu werden hier zwar keine strengen Beweise, aber plausible Argumente vorgelegt. Es wird speziell das Zweimuldensystem diskutiert; das Prinzip der Argumentation ist jedoch auf andere Systeme übertragbar. Der Grundgedanke ist, den Perron-Frobenius-Operator  $\mathcal{L}$  in einer bestimmten, in [Web00] vorgestellten Art und Weise durch eine Matrix darzustellen.

Dieser Anhang ist in drei Abschnitte aufgeteilt. Der erste Abschnitt besteht aus vorbereitenden Überlegungen. Es wird ein *Hilbert-Raum*  $\mathcal{H}$  quadratintegrabler Funktionen auf dem Phasenraum des nichtreduzierten Zweimuldensystems konstruiert. Die Struktur des Hilbert-Raumes wird nach Wahl einer Orthonormalbasis dazu verwandt, den Perron-Frobenius-Operator  $\mathcal{L}$  des Zweimuldensystems durch eine unendliche Matrix darzustellen. Anschließend wird  $\mathcal{L}$  durch einen Operator approximiert, dessen Matrixelemente auf einem endlichen, in der „linken oberen Ecke“ liegenden  $d \times d$ -Block mit den entsprechenden Matrixelementen des exakten Operators  $\mathcal{L}$  übereinstimmen und ansonsten gleich null sind. Dieser Operator stellt also eine  $d$ -dimensionale Approximation von  $\mathcal{L}$  dar. Es wird argumentiert, daß die durch diese Näherung verursachten Fehler für  $d \rightarrow \infty$  verschwinden. Insbesondere konvergieren die Eigenwerte der  $d \times d$ -Matrix für  $d \rightarrow \infty$  gegen die Eigenwerte von  $\mathcal{L}$ .

Im zweiten Abschnitt wird die Argumentation, die zur Herleitung von (3.15) verwendet wurde, wiederholt, jedoch unter Verwendung der  $d$ -dimensionalen Approximation von  $\mathcal{L}$ . Es stellt sich heraus, daß die meisten der in Abschnitt 3.2.1 diskutierten Probleme in diesem Falle nicht auftreten. Der Fehler, der durch eine

derartige Bestimmung der Escape-Rate  $\kappa$  entsteht, wird beliebig klein, wenn  $d$  nur hinreichend groß wird.

Zur Bekräftigung der Argumente werden im dritten Abschnitt einige numerische Rechnungen durchgeführt. Für verschiedene  $d$  werden durch die Berechnung des linken oberen  $d \times d$ -Blocks der  $\mathcal{L}$ -Matrix Eigenwerte von  $\mathcal{L}$ , die Eigenfunktion zum führenden Eigenwert sowie die Escape-Rate  $\kappa$  näherungsweise bestimmt und die Abhängigkeiten von  $d$  diskutiert.

## B.1 Vorbereitende Überlegungen

Der Phasenraum  $\hat{\Gamma}$  des nichtreduzierten Zweimuldensystems besitzt nach (1.13) die Gestalt eines doppelten Zylinders. Im folgenden wird ein Raum  $\mathcal{H}$  auf  $\hat{\Gamma}$  definierter Funktionen  $\chi(\beta, l, \mu)$  betrachtet, von denen folgende Eigenschaften gefordert werden: Zum einen sollen sie in der Variablen  $\beta$  stückweise stetig sein, was bei festgehaltenem  $l$  und  $\mu$  eine *Fourier-Entwicklung* in  $\beta$  möglich macht. Ferner wird Analytizität in  $l$  verlangt. Das ermöglicht bei festem  $\beta$  und  $\mu$  eine Entwicklung nach Monomen in  $l$ , d. h. eine *Taylor-Entwicklung* oder aber, was für die folgenden Überlegungen sinnvoller ist, eine Entwicklung nach *Legendre-Polynomen* in  $l$ . Diese bilden genau wie die Monome ein vollständiges System im Raum der analytischen Funktionen auf dem Intervall  $[-1, 1]$ .

Die Funktionen  $\chi(\beta, l, \mu)$  mit den oben aufgeführten Eigenschaften sind auf  $\hat{\Gamma}$  quadratintegrabel, so daß ein Skalarprodukt eingeführt werden kann, siehe unten. Damit wird  $\mathcal{H}$  zu einem Hilbert-Raum.

Aufgrund der Definition von  $\mathcal{H}$  bilden die folgenden Funktionen ein *vollständiges* System in  $\mathcal{H}$ :

$$\psi_{jkps}(\beta, l, \mu) = \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} P_k(l) (-1)^{s\mu}, & j = 0 \\ \cos j\beta P_k(l) (-1)^{s\mu}, & j \geq 1, p = 0 \\ \sin j\beta P_k(l) (-1)^{s\mu}, & j \geq 1, p = 1. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Die Indizes  $j, k, p$  und  $s$  nehmen folgende Werte an:  $j = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $p = 0$  falls  $j = 0$ ,  $p = 0, 1$  falls  $j \geq 1$  und  $s = 0, 1$ . Letzterer Index gibt das Verhalten bei Änderung von  $\mu$  an: Die  $\psi_{jkps}$  mit  $s = 0$  verhalten sich *symmetrisch* (keine Veränderung), die mit  $s = 1$  hingegen *antisymmetrisch* (Vorzeichenumkehr). Bei  $P_k(l)$  handelt es sich um die Legendre-Polynome. Sie sind Lösungen der *Legendreschen Differentialgleichung* und lassen sich aus der *Rodrigues-Formel* errechnen:

$$P_k(l) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dl^k} (l^2 - 1)^k. \quad (\text{B.2})$$

Wichtig ist folgende anschauliche Bedeutung der Indizes  $j$  und  $k$ : Da  $P_k(l)$  im Intervall  $[-1, 1]$   $k$  Nullstellen besitzt, oszilliert  $\psi_{jkps}(\beta, l, \mu)$  bei Änderung von  $l$  um so schneller, je größer  $k$  ist. Die Geschwindigkeit, mit der  $\psi_{jkps}(\beta, l, \mu)$  bei Änderung von  $\beta$  oszilliert, nimmt hingegen mit  $j$  zu.

Als nächstes wird gezeigt, daß es sich bei (B.1) auch um ein *orthonormiertes* System handelt (bezüglich des Skalarproduktes, das noch zu definieren ist).

Die Legendre-Polynome erfüllen folgende *Orthogonalitätsrelation*:

$$\int_{-1}^1 P_k(l) P_{k'}(l) dl = \frac{2}{2k+1} \delta_{kk'}. \quad (\text{B.3})$$

Die Sinus- und die Cosinus-Funktion erfüllen ebenfalls bestimmte Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^{2\pi} \cos j\beta \cos j'\beta d\beta = \pi \delta_{jj'}, \quad (\text{B.4a})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin j\beta \sin j'\beta d\beta = \pi \delta_{jj'}, \quad (\text{B.4b})$$

$$\int_0^{2\pi} \cos j\beta \sin j'\beta d\beta = 0. \quad (\text{B.4c})$$

Das *Skalarprodukt* zwischen zwei Funktionen  $\chi(\beta, l, \mu), \chi'(\beta, l, \mu) \in \mathcal{H}$  wird nun wie folgt erklärt:

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \sum_{\mu=0}^1 \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-1}^1 dl \chi^*(\beta, l, \mu) \chi'(\beta, l, \mu). \quad (\text{B.5})$$

Daraus folgt mit (B.3) und (B.4) die *Orthonormiertheit* der Funktionen (B.1):

$$\langle \psi_{jkps}, \psi_{j'k'p's'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kk'} \delta_{pp'} \delta_{ss'}. \quad (\text{B.6})$$

Da also die  $\psi_{jkps}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$  bilden, kann jede Funktion  $\chi(\beta, l, \mu) \in \mathcal{H}$  wie folgt nach den  $\psi_{jkps}$  entwickelt werden:

$$\chi(\beta, l, \mu) = \sum_{j, k, p, s} \langle \psi_{jkps}, \chi \rangle \psi_{jkps}(\beta, l, \mu). \quad (\text{B.7})$$

Die Wirkung des *Perron-Frobenius-Operators*  $\mathcal{L}$  auf eine Funktion  $\chi(\beta, l, \mu)$  kann daher in der Form „Matrix mal Spaltenvektor“ beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\chi(\beta, l, \mu) &= \sum_{\substack{j, k, p, s, \\ j', k', p', s'}} \langle \psi_{jkps}, \mathcal{L}\langle \psi_{j'k'p's'}, \chi \rangle \psi_{j'k'p's'} \rangle \psi_{jkps}(\beta, l, \mu) \\ &= \sum_{\substack{j, k, p, s, \\ j', k', p', s'}} \mathcal{L}_{jkpsj'k'p's'} c_{j'k'p's'} \psi_{jkps}(\beta, l, \mu) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

mit den Komponenten des *Spaltenvektors*, durch den  $\chi$  dargestellt wird,

$$c_{j'k'p's'} = \langle \psi_{j'k'p's'}, \chi \rangle \quad (\text{B.9})$$

und den *Matrixelementen* von  $\mathcal{L}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{jkpsj'k'p's'} &= \langle \psi_{jkps}, \mathcal{L}\psi_{j'k'p's'} \rangle \\ &= \sum_{\mu=0}^1 \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-1}^1 dl \psi_{jkps}(\beta, l, \mu) \mathcal{L}\psi_{j'k'p's'}(\beta, l, \mu) \\ &= \sum_{\mu=0}^1 \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-1}^1 dl \psi_{jkps}(\beta, l, \mu) \psi_{j'k'p's'}(\hat{F}^{-1}(\beta, l, \mu)). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Die letzte Zeile folgt aus (3.9) mit der Invertierbarkeit und der flächenerhaltenden Eigenschaft der Abbildung  $\hat{F}$  des nichtreduzierten Zweimuldensystems.

Obwohl die Matrixelemente mit acht Indizes versehen sind, soll hier nicht die Vorstellung eines achtdimensionalen Gebildes erweckt werden. Vielmehr sollen die ersten vier Indizes als Zeilenangabe, die übrigen Indizes als Spaltenangabe in einer unendlich großen Matrix aufgefaßt werden. Entsprechendes gilt für die Komponenten (B.9) des  $\chi$ -Spaltenvektors.

Als Approximation „ $N$ -ter Ordnung“ für  $\mathcal{L}$  wird nun ein Operator  $\mathcal{L}^{(N)}$  eingeführt.<sup>1</sup> Dieser wird dadurch definiert, daß er folgende Matrixdarstellung besitzt:

$$\mathcal{L}_{jkpsj'k'p's'}^{(N)} = \begin{cases} \mathcal{L}_{jkpsj'k'p's'} & , \text{ falls } j \leq N, k \leq N \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Der Operator  $\mathcal{L}^{(N)}$  verdient die Bezeichnung „Approximation“ zumindest dann, wenn er für  $N \rightarrow \infty$  gegen  $\mathcal{L}$  konvergiert in dem Sinne, daß für jede Funktion  $\chi(\beta, l, \mu) \in \mathcal{H}$  die Funktionenfolge  $\mathcal{L}^{(N)}\chi(\beta, l, \mu)$  wenigstens punktweise gegen  $\mathcal{L}\chi(\beta, l, \mu)$  konvergiert. Das ist aber der Fall, denn die Summe in (B.8) konvergiert für alle  $\beta, l$  und  $\mu$ .

Aus letzterem folgt aber, daß die Beträge der Matrixelemente von  $\mathcal{L}$ , die nicht in der  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix vertreten sind (also die  $|\mathcal{L}_{jkpsj'k'p's'}|$  mit  $j > N$  oder  $k > N$ ), für  $N \rightarrow \infty$  hinreichend schnell verschwinden müssen. Das läßt Rückschlüsse über die „Dynamik“ der Eigenwerte von  $\mathcal{L}^{(N)}$  bei fortwährender Erhöhung von  $N$  zu. Jedesmal, wenn  $N$  erhöht wird und somit der nichtverschwindende Teil der  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix vergrößert wird, geschieht folgendes: Zum einen erhöht sich auch die Zahl der Eigenwerte. Zum anderen werden Eigenwerte, die erst „vor kurzem entstanden“ sind, sich stark verschieben. Hingegen reagieren Eigenwerte, die „schon

<sup>1</sup>  $\mathcal{L}^{(N)}$  stellt in Abhängigkeit von  $N$  eine Folge von Operatoren dar. Da aber im folgenden hauptsächlich die Eigenschaften des  $N$ -ten Folgengliedes diskutiert werden, wird stets von „dem Operator“  $\mathcal{L}^{(N)}$  die Rede sein.

lange“ existieren, weitgehend unempfindlich auf die neu hinzukommenden Matrixelemente (vgl. [Web00]). Letztere sind nämlich vom Betrage her klein gegen die Elemente, aus denen die  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix zu den „Zeitpunkten“ bestand, als die betreffenden Eigenwerte neu hinzukamen.

Da also jeder Eigenwert von  $\mathcal{L}^{(N)}$  bei immerwährender Erhöhung von  $N$  irgendwann „zur Ruhe“ kommt, gilt folgendes:

*Die Eigenwerte  $\lambda_\alpha^{(N)}$  von  $\mathcal{L}^{(N)}$  konvergieren für  $N \rightarrow \infty$  gegen die Eigenwerte  $\lambda_\alpha$  von  $\mathcal{L}$ .*

Wie läßt sich die Wirkung von  $\mathcal{L}^{(N)}$  veranchaulichen? Bei geeigneter Wahl der Zeilen- und Spaltennumerierung besitzt die  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix nach (B.11) nur in einem  $d \times d$ -Block in der „linken oberen Ecke“ nichtverschwindende Elemente, wobei  $d = d(N)$  monoton von  $N$  abhängt.  $\mathcal{L}^{(N)}$  bildet auf einen  $d$ -dimensionalen Unterraum  $U^{(N)} \subset \mathcal{H}$  ab, der wie folgt gegeben ist:

$$U^{(N)} = \text{span}\{\psi_{jkps}(\beta, l, \mu) \mid j \leq N, k \leq N\}. \quad (\text{B.12})$$

In  $U^{(N)}$  liegen solche Funktionen, die räumlich nicht allzu schnell oszillieren (siehe die Erläuterungen zu (B.1)), also nicht allzu feine Strukturen aufweisen. Diese Funktionen werden durch Spaltenvektoren repräsentiert, bei denen nur die ersten  $d$  Komponenten nicht unbedingt verschwinden. Der Raum solcher Spaltenvektoren sei hier ebenfalls mit  $U^{(N)}$  bezeichnet. Die Wirkung der  $\mathcal{L}$ -Matrix auf Vektoren, die bereits in  $U^{(N)}$  liegen, wird zwar nicht exakt, aber in guter Näherung durch die Wirkung der  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix beschrieben. Die  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix agiert nämlich im diesem Falle wie die  $\mathcal{L}$ -Matrix, gefolgt von einer Projektion auf  $U^{(N)}$ . Die Komponenten, die durch die Projektion zum Verschwinden gebracht werden, haben aber ohnehin meist einen vergleichsweise kleinen Betrag, denn die Elemente der  $\mathcal{L}$ -Matrix, die unterhalb der  $d$ -ten Zeile liegen, sind vom Betrage her in der Regel wesentlich kleiner als die Elemente, die auch in der  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix vertreten sind.

Der Operator  $\mathcal{L}^{(N)}$  wirkt daher auf Funktionen, die in  $U^{(N)}$  liegen, etwa in der gleichen Weise wie  $\mathcal{L}$ .

Funktionen, die außerhalb von  $U^{(N)}$  liegen, also für  $\mathcal{L}^{(N)}$  zu schnell oszillierende Anteile haben, werden durch Spaltenvektoren dargestellt, die nichtverschwindende Komponenten besitzen, welche nicht zu den ersten  $d$  gehören. Diese Komponenten werden durch die  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix nicht berücksichtigt. Es kommt nur auf die Projektionen der Vektoren auf  $U^{(N)}$  an, und die Bilder unter  $\mathcal{L}^{(N)}$  liegen ebenfalls in  $U^{(N)}$ . Das bedeutet, daß allzu feine Strukturen unter der Wirkung von  $\mathcal{L}^{(N)}$  verschwinden. Die Funktionen werden sozusagen „weichgezeichnet“.

Je größer  $N$  ist, um so größer ist auch die Fähigkeit von  $\mathcal{L}^{(N)}$ , feine Strukturen im Phasenraum aufzulösen.

Im übernächsten Abschnitt wird die  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix für mehrere  $N$  numerisch bestimmt. Um den Rechenaufwand zu verringern, wird nun die Abhängigkeit der Matrixelemente  $\mathcal{L}_{jkpsj'k'p's'}$  von  $s$  und  $s'$  betrachtet. Es wird sich zeigen, daß nur ein Viertel der Elemente der  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix tatsächlich berechnet werden müssen.

Aus (B.10) und (B.1) folgt, daß  $\mathcal{L}_{jkpsj'k'p's'}$  für  $s \neq s'$  verschwindet. Das bedeutet, daß  $\mathcal{L}$  zwei invariante Unterräume besitzt. Deren erster ist der Unterraum  $\mathcal{H}_+$  *symmetrischer* Funktionen, d. h. der Funktionen  $\chi_+(\beta, l, \mu) \in \mathcal{H}$ , die

$$\chi_+(\beta, l, \mu) = \chi_+(\beta, l, 1 - \mu) \quad (\text{B.13})$$

erfüllen. Dieser Raum wird von den Funktionen  $\psi_{jkp0}$  erzeugt (siehe die Erläuterung zum Index  $s$  der Basisfunktionen (B.1)). Die  $\psi_{jkp1}$  hingegen erzeugen den zweiten Unterraum  $\mathcal{H}_-$ . Dieser besteht aus *antisymmetrischen* Funktionen  $\chi_-(\beta, l, \mu)$  mit

$$\chi_-(\beta, l, \mu) = -\chi_-(\beta, l, 1 - \mu). \quad (\text{B.14})$$

Damit ist  $\mathcal{L}$  die direkte Summe der Operatoren  $\mathcal{L}^+$  und  $\mathcal{L}^-$ , die auf  $\mathcal{H}_+$  bzw.  $\mathcal{H}_-$  wirken:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^+ \oplus \mathcal{L}^-. \quad (\text{B.15})$$

Diese Operatoren haben folgende Matrixelemente:

$$\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^+ = \mathcal{L}_{jkp0j'k'p'0} \quad (\text{B.16a})$$

$$\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^- = \mathcal{L}_{jkp1j'k'p'1}. \quad (\text{B.16b})$$

Ferner kann (B.10) und (B.1) entnommen werden, daß

$$\mathcal{L}_{jkp1j'k'p'1} = -\mathcal{L}_{jkp0j'k'p'0} \quad (\text{B.17})$$

gilt. Für die Matrixelemente von  $\mathcal{L}^+$  und  $\mathcal{L}^-$  folgt daraus:

$$\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^- = -\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^+. \quad (\text{B.18})$$

Damit besitzen  $\mathcal{L}^+$  und  $\mathcal{L}^-$  die gleichen Eigenwerte – bis auf unterschiedliche Vorzeichen – was zur Folge hat:

*Ist  $\lambda_\alpha$  ein Eigenwert von  $\mathcal{L}$ , dann auch  $-\lambda_\alpha$ .*

Vergleiche hierzu Abschnitt 4.3.2.

Diese Eigenschaften von  $\mathcal{L}$  wirken sich natürlich auf die  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix (B.11) aus. Wegen (B.15) ist  $\mathcal{L}^{(N)}$  nämlich ebenfalls die direkte Summe zweier Operatoren:

$$\mathcal{L}^{(N)} = \mathcal{L}^{+(N)} \oplus \mathcal{L}^{-(N)}. \quad (\text{B.19})$$

$\mathcal{L}^{(N)}$  besitzt bei geeigneter Zeilen- und Spaltennumerierung Blockdiagonalgestalt. Die Blöcke werden durch die nichtverschwindenden Matrixelemente von  $\mathcal{L}^{+(N)}$  und  $\mathcal{L}^{-(N)}$  gebildet. Die Matrixelemente von  $\mathcal{L}^{+(N)}$  und  $\mathcal{L}^{-(N)}$  lauten wie folgt:

$$\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^{+(N)} = \begin{cases} \mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^+, & \text{falls } j \leq N, k \leq N \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{B.20a})$$

$$\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^{-(N)} = \begin{cases} \mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^-, & \text{falls } j \leq N, k \leq N \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.20b})$$

Hierbei sind die Elemente  $\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^+$  und  $\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^-$  nach (B.16a) bzw. (B.16b) durch bestimmte Elemente der gemäß (B.10) definierten  $\mathcal{L}$ -Matrix gegeben.

Sind alle Elemente  $\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^{+(N)}$  bekannt, dann auch alle  $\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^{-(N)}$ , denn wegen (B.18) gilt:

$$\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^{-(N)} = -\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^{+(N)}. \quad (\text{B.21})$$

Daher ist es zur Bestimmung der  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix ausreichend, nur die Matrixelemente von  $\mathcal{L}^{+(N)}$  zu berechnen. Das sind nur ein Viertel aller Matrixelemente von  $\mathcal{L}^{(N)}$ . Außerdem besitzen  $\mathcal{L}^{+(N)}$  und  $\mathcal{L}^{-(N)}$  genau wie  $\mathcal{L}^+$  und  $\mathcal{L}^-$  bis auf das Vorzeichen die gleichen Eigenwerte. Ist  $\lambda_\alpha^{(N)}$  ein Eigenwert von  $\mathcal{L}^{(N)}$ , dann auch  $-\lambda_\alpha^{(N)}$ .

## B.2 Die Escape-Rate $\kappa$

In folgenden sollen die meisten der in Abschnitt 3.2.1 geäußerten Einwände gegenüber der Vorgehensweise bei der Herleitung von (3.15) entkräftet werden. Das schwerwiegendste Problem, das dabei angesprochen wurde, soll als erstes angegangen werden. Dieses liegt in dem entscheidenden Schritt (3.17), nämlich die Entwicklung der gleichmäßigen Anfangsverteilung  $i(\beta, l, \mu) = 1$  nach den Eigenfunktionen  $\varphi_\alpha(\beta, l, \mu)$  von  $\mathcal{L}$ . Ähnliches wurde in den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3 durchgeführt, siehe (3.29) bzw. (3.56). Solche Entwicklungen sind beim Zweimuldensystem nicht möglich, da die Eigenfunktionen  $\varphi_\alpha(\beta, l, \mu)$ , wie in Abschnitt 3.2.1 begründet wurde, „singuläre Objekte“ sind, die auf der instabilen Mannigfaltigkeit  $\hat{\Lambda}_+^\infty = \Lambda \times \{0, 1\}$  der invarianten Menge  $\hat{\Lambda} = \Lambda \times \{0, 1\}$  des nichtreduzierten Zweimuldensystems lokalisiert sind; damit sind sie übrigens nicht quadratintegrierbar und liegen nicht im hier betrachteten Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ . Es wird hier aber gezeigt, daß der Schritt (3.17) „im Prinzip“ doch erlaubt ist. Mit ähnlichen Argumentationen können dann (3.29) und (3.56) gerechtfertigt werden, was hier aber nicht vorgeführt wird.

Der entscheidende Trick besteht darin, anstelle der Eigenfunktionen  $\varphi_\alpha$  von  $\mathcal{L}$  zu den Eigenwerten  $\lambda_\alpha$  die Eigenfunktionen  $\varphi_\alpha^{(N)}$  zu den Eigenwerten  $\lambda_\alpha^{(N)}$  des

Operators  $\mathcal{L}^{(N)}$  zu verwenden und auszunutzen, daß die  $\lambda_\alpha^{(N)}$  für  $N \rightarrow \infty$  gegen die  $\lambda_\alpha$  konvergieren.

Die Eigenfunktionen  $\varphi_\alpha^{(N)}$  bilden in Abhängigkeit von  $N$  Funktionenfolgen, die für  $N \rightarrow \infty$  gegen die Grenzfunktionen  $\varphi_\alpha$  streben. Daher sind die  $\varphi_\alpha^{(N)}$  um so schärfer auf der instabilen Mannigfaltigkeit  $\hat{\Lambda}_+^\infty$  lokalisiert, je höher  $N$  ist. Die Schärfe der Lokalisation ist durch das Auflösungsvermögen von  $\mathcal{L}^{(N)}$  im Bezug auf Strukturen im Phasenraum beschränkt (im folgenden Abschnitt wird dies visualisiert). Die Eigenfunktionen  $\varphi_\alpha^{(N)}$  liegen in dem nach (B.12) definierten Unterraum  $U^{(N)}$  und bilden darin ein vollständiges System (siehe unten). Insbesondere kann die Anfangsverteilung  $i(\beta, l, \mu)$  nach den  $\varphi_\alpha^{(N)}$  entwickelt werden. Das impliziert, daß letztere außerhalb der instabilen Mannigfaltigkeit  $\hat{\Lambda}_+^\infty$  keinesfalls identisch verschwinden, wie es bei den Eigenfunktionen  $\varphi_\alpha$  von  $\mathcal{L}$  der Fall ist, sondern noch eine gewisse „Restwelligkeit“ besitzen. Diese ist allerdings mit zunehmendem  $N$  immer schwächer ausgeprägt.

Nun werden die Ausführungen, die in Abschnitt 3.2.1 zu (3.15) führten, in etwas abgewandelter Form wiederholt.

Die Escape-Rate  $\kappa$  wird nach (3.8) aus dem asymptotischen Verhalten der gemäß (3.6) definierten Größen  $\gamma_n$  bestimmt. Entsprechend (3.16) sind die  $\gamma_n$  beim Zweimuldensystem durch

$$\gamma_n = \frac{1}{8\pi} \sum_{\mu=0}^1 \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-1}^1 dl \mathcal{L}^n i(\beta, l, \mu) \quad (\text{B.22})$$

mit  $i(\beta, l, \mu) = 1$  gegeben. Ersetzt man nun  $\mathcal{L}$  durch  $\mathcal{L}^{(N)}$ , dann erhält man eine Approximation  $\gamma_n^{(N)}$  von  $\gamma_n$ :

$$\gamma_n^{(N)} = \frac{1}{8\pi} \sum_{\mu=0}^1 \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-1}^1 dl \mathcal{L}^{(N)n} i(\beta, l, \mu). \quad (\text{B.23})$$

Es handelt sich zumindest dann um eine Approximation, wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_n^{(N)} = \gamma_n \quad \text{für alle } n \quad (\text{B.24})$$

gilt. Dies zu zeigen ist sicherlich nicht ganz einfach. Jedenfalls ist nicht zu erwarten, daß die Folge  $\mathcal{L}^{(N)n} i(\beta, l, \mu)$  glatter Funktionen für  $N \rightarrow \infty$  *gleichmäßig* gegen die unstetige Funktion  $\mathcal{L}^n i(\beta, l, \mu)$  konvergiert ( $\mathcal{L}^n i(\beta, l, \mu)$  ist unstetig, da nämlich  $\mathcal{L}^n i(\beta, l, \mu)$  gleich 1 ist für  $(\beta, l) \in \Lambda_+^n$ , siehe (2.2), und gleich 0 sonst). Ansonsten wäre (B.24) klar, denn dann wäre garantiert, daß die rechte Seite von (B.23) für  $N \rightarrow \infty$  gegen die rechte Seite von (B.22) strebt.

Ein Beweis für (B.24) wird hier nicht erbracht. Es erscheint jedoch einigermaßen plausibel, daß die Konvergenz von  $\mathcal{L}^{(N)n} i(\beta, l, \mu)$  gegen  $\mathcal{L}^n i(\beta, l, \mu)$  hinreichend

„gutartig“ ist, so daß (B.23) tatsächlich gegen (B.22) konvergiert. Im folgenden wird dies angenommen, und damit die Gültigkeit von (B.24).

Da  $\mathcal{L}^{(N)}$  diagonalisierbar sein dürfte (wäre dies nicht der Fall, dann wären die Zeilen der  $\mathcal{L}^{(N)}$ -Matrix nicht linear unabhängig, und das erscheint unwahrscheinlich), bilden die Eigenfunktionen  $\varphi_\alpha^{(N)}(\beta, l, \mu)$  von  $\mathcal{L}^{(N)}$  zu den Eigenwerten  $\lambda_\alpha^{(N)}$  ein vollständiges System in  $U^{(N)}$ , und  $i(\beta, l, \mu)$  kann nach diesen Funktionen entwickelt werden:

$$i(\beta, l, \mu) = \sum_{\alpha=0}^{d-1} c_\alpha^{(N)} \varphi_\alpha^{(N)}(\beta, l, \mu). \quad (\text{B.25})$$

Es sei daran erinnert, daß  $d = d(N)$  die Dimension von  $U^{(N)}$  ist. Mit (B.25) ergibt sich aus (B.23):

$$\gamma_n^{(N)} = \frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha=0}^{d-1} c_\alpha^{(N)} \lambda_\alpha^{(N)n} \sum_{\mu=0}^1 \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-1}^1 dl \varphi_\alpha^{(N)}(\beta, l, \mu). \quad (\text{B.26})$$

Dieser Ausdruck wird für große  $n$  durch den führenden Eigenwert  $\lambda_0^{(N)}$  von  $\mathcal{L}^{(N)}$  dominiert (zur Existenz weiterer Eigenwerte von maximalem Betrage siehe unten):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(N)} = C \lambda_0^{(N)n} \quad (\text{B.27})$$

mit einer Konstanten  $C$ .

Im Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$  geht  $\lambda_0^{(N)}$  in den führenden Eigenwert  $\lambda_0$  von  $\mathcal{L}$  über:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_0^{(N)} = \lambda_0 \quad (\text{B.28})$$

Die durch (3.8) definierte Escape-Rate  $\kappa$  ist also nach (B.24), (B.27) und (B.28) wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \kappa &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \gamma_n \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \gamma_n^{(N)} \\ &= - \ln \lambda_0. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Damit ist (3.15) korrekt.

Es sind aber noch einige Fragen aus Abschnitt 3.2.1 offen geblieben. Beispielsweise ist noch nicht bekannt, wie viele weitere Eigenwerte von maximalem Betrage existieren und ob diese nicht die Vorherrschaft von  $\lambda_0^{(N)}$  in (B.26) beim Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  stören. Tatsächlich ist  $-\lambda_0^{(N)}$  ebenfalls ein Eigenwert von  $\mathcal{L}^{(N)}$ , siehe Ende des vorigen Abschnitts. Dieser Eigenwert ist hier jedoch nicht von Bedeutung. Da die Funktion  $i(\beta, l, \mu) = 1$  die Eigenschaft (B.13) erfüllt, also im

*symmetrischen Unterraum*  $\mathcal{H}_+$  liegt, hätte man in den obigen Ausführungen anstelle der Operatoren  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}^{(N)}$  auch die Operatoren  $\mathcal{L}^+$  und  $\mathcal{L}^{+(N)}$  verwenden können. Damit ist  $\lambda_0^{(N)}$  ein Eigenwert von  $\mathcal{L}^{+(N)}$ , und  $-\lambda_0^{(N)}$  ist ein Eigenwert von  $\mathcal{L}^{-(N)}$ . Die zu  $-\lambda_0^{(N)}$  gehörende Eigenfunktion kommt in der Entwicklung (B.25) nicht vor. Somit tritt der Eigenwert  $-\lambda_0^{(N)}$  in (B.26) nicht auf und kann sich daher auch nicht störend auswirken.

Andere (komplexe) Eigenwerte von höchstem Betrage gibt es nicht. Dies kann hier zwar nicht bewiesen werden, und auch nicht, daß  $\lambda_0$  positiv reell ist. Es sei hier aber ein numerisches Ergebnis des folgenden Abschnitts vorweggenommen: Die  $\mathcal{L}^{+(N)}$ -Matrizen für  $N = 0, \dots, 7$  besitzen allesamt jeweils genau einen Eigenwert  $\lambda_0^{(N)}$  mit maximalem Betrag, und diese Eigenwerte sind positiv reell. Andere Eigenwerte haben wesentlich kleineren Betrag. Außerdem ist in dem betrachteten  $N$ -Bereich bereits eine deutliche Konvergenz von  $\lambda_0^{(N)}$  zu beobachten. Daher ist zu erwarten, daß  $\lambda_0^{(N)}$  für alle  $N$  positiv reell und der einzige Eigenwert von maximalem Betrage ist. Daraus ergibt sich zusammen mit der Schlußfolgerung des vorigen Absatzes im Prinzip die Voraussetzung 2 auf Seite 50.

Ein weiterer Einwand, auf den noch nicht eingegangen wurde, ist der folgende: Wenn in (B.25) der Koeffizient  $c_0^{(N)}$  der zu  $\lambda_0^{(N)}$  gehörenden Eigenfunktion  $\varphi_0^{(N)}(\beta, l, \mu)$  gleich null ist, gilt (B.27) nicht. Dazu müßte jedoch  $i(\beta, l, \mu)$  orthogonal zu  $\varphi_0^{(N)}(\beta, l, \mu)$  sein, und das erscheint unwahrscheinlich.

Zur Frage, ob ein Funktionenraum existiert, in dem  $\mathcal{L}$  ein abzählbares Eigenwertspektrum besitzt, kann nur folgendes gesagt werden: Zur Konstruktion eines solchen Raumes müßte der hier betrachtete Funktionenraum  $\mathcal{H}$  so erweitert werden, daß er die Grenzfunktionen der Folgen  $\varphi_\alpha^{(N)}$  von Eigenfunktionen von  $\mathcal{L}^{(N)}$  enthält, aber keine weiteren singulären Eigenfunktionen, wie z. B. auf Fixpunkten konzentrierte Delta-Funktionen. Ob das möglich ist, kann hier nicht beantwortet werden.

Ob die wichtige Voraussetzung 3 auf Seite 50, also die absolute Konvergenz der Summe der Eigenwerte von  $\mathcal{L}$ , gegeben ist, kann hier ebenfalls nicht geklärt werden.

Wenngleich sich also nicht alle in Abschnitt 3.2.1 geäußerten Bedenken beiseite schaffen ließen, so dürfte es hier dennoch gelungen sein, die Glaubwürdigkeit der in Kapitel 3 vorgestellten Theorie zu untermauern.

## B.3 Numerische Berechnungen

Um die Ergebnisse der beiden vorausgegangenen Abschnitte etwas greifbarer zu machen, wird im folgenden die  $\mathcal{L}^{+(N)}$ -Matrix für  $N = 0, \dots, 7$  berechnet. Es wird

das Verhalten des dem Betrage nach größten und zweitgrößten Eigenwertes sowie der Eigenfunktion zum führenden Eigenwert in Abhängigkeit von  $N$  untersucht.

Die Matrixelemente (B.20a) von  $\mathcal{L}^{+(N)}$  werden durch numerische Berechnung der entsprechenden Integrale (B.10) bestimmt. Der nichtverschwindende Block der  $\mathcal{L}^{+(N)}$ -Matrix ist eine  $d^+(N) \times d^+(N)$ -Matrix, wobei  $d^+(N) = d(N)/2$  die halbe Dimension des Unterraumes  $U^{(N)}$  ist.  $\mathcal{L}^{+(N)}$  bildet nämlich auf den symmetrischen Teil  $U_+^{(N)} = U^{(N)} \cap \mathcal{H}_+$  von  $U^{(N)}$  ab. Nach (B.20a) und gemäß den Kombinationsmöglichkeiten der Indizes der Basisfunktionen (B.1) ist  $d^+(N)$  wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} d^+(N) &= \left( \sum_{j=0}^0 \sum_{k=0}^N \sum_{p=0}^0 1 \right) + \left( \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^N \sum_{p=0}^1 1 \right) \\ &= N + 1 + 2N(N + 1) \\ &= (2N + 1)(N + 1). \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

In Tabelle B.1 wird  $d^+(N)$  für  $N = 0, \dots, 7$  angegeben.

Die  $\mathcal{L}^{+(1)}$ -Matrix beispielsweise lautet wie folgt:

$$\mathcal{L}_{jkpj'k'p'}^{+(1)} = \begin{pmatrix} 0.1589 & 0.0000 & 0.0152 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0600 \\ 0.0000 & -0.0173 & 0.0000 & 0.0098 & 0.0149 & 0.0000 \\ -0.2046 & 0.0000 & -0.0210 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0787 \\ 0.0000 & 0.0683 & 0.0000 & -0.0259 & 0.0028 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0059 & -0.0221 & 0.0000 \\ -0.0683 & 0.0000 & 0.0004 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0261 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.31})$$

Die Zeilen- und Spaltenindizes  $jkp$  bzw.  $j'k'p'$  werden hierbei in der folgenden Reihenfolge durchlaufen: 000, 010, 100, 101, 110, 111.

Der führende Eigenwert  $\lambda_0^{(N)}$  der  $\mathcal{L}^{+(N)}$ -Matrix und der zugehörige Eigenvektor lassen sich auf sehr einfache Weise bestimmen: Man nehme einen beliebigen Vek-

$N$	$d^+(N)$
0	1
1	6
2	15
3	28
4	45
5	66
6	91
7	120

Tabelle B.1: Die Größe  $d^+(N)$  der  $\mathcal{L}^{+(N)}$ -Matrix.

$N$	$\lambda_0^{(N)}$	$\kappa^{(N)}$	$\lambda_1^{(N)}$
0	0.1589	1.8392	—
1	0.1685	1.7808	0.0017
2	0.1233	2.0928	$-0.0016 \pm 0.0148i$
3	0.1466	1.9197	0.0275
4	0.1447	1.9327	$-0.0104 \pm 0.0314i$
5	0.1407	1.9609	$-0.0059 \pm 0.0374i$
6	0.1408	1.9602	0.0494
7	0.1407	1.9608	$-0.0065 \pm 0.0399i$
$\infty$	0.1415	1.9558	-0.0334

Tabelle B.2: Führender Eigenwert  $\lambda_0^{(N)}$  von  $\mathcal{L}^{+(N)}$ , daraus errechneter Näherungswert  $\kappa^{(N)}$  sowie der zweitgrößte Eigenwert  $\lambda_1^{(N)}$ ; unterste Zeile:  $\lambda_0$ ,  $\kappa$  und  $\lambda_1$ .

tor und wende die Matrix wiederholt auf ihn an, wobei gelegentlich normiert werden sollte. Da der anfängliche Vektor i. a. eine nichtverschwindende Komponente in der führenden Eigenrichtung besitzt, konvergiert dieses Verfahren gegen den Eigenvektor zu  $\lambda_0^{(N)}$ . Anschließend kann  $\lambda_0^{(N)}$  durch die Längenänderung des Eigenvektors bei Anwendung der Matrix bestimmt werden.

Die Komponenten des Eigenvektors sind die Koeffizienten derjenigen Linearkombination von Basisfunktionen  $\psi_{jkp0}$ , welche die Eigenfunktion  $\varphi_0^{(N)}$  ergibt.

Der vom Betrage her zweitgrößte Eigenwert der  $\mathcal{L}^{+(N)}$ -Matrix wird mit einer dafür geeigneten Routine bestimmt.

Tabelle B.2 zeigt den führenden Eigenwert  $\lambda_0^{(N)}$  von  $\mathcal{L}^{+(N)}$ , den daraus errechneten Näherungswert

$$\kappa^{(N)} = -\ln \lambda_0^{(N)} \quad (\text{B.32})$$

für die Escape-Rate  $\kappa$  sowie den zweitgrößten Eigenwert  $\lambda_1^{(N)}$  für  $N = 0, \dots, 7$ . Die unterste Zeile („ $N = \infty$ “) zeigt zum Vergleich die zum exakten Operator  $\mathcal{L}$  gehörenden Werte  $\lambda_0$ ,  $\kappa$  und  $\lambda_1$ , die in Kapitel 4 mittels der Theorie der periodischen Orbits bestimmt wurden. Bei  $\lambda_0^{(N)}$  ist eine Konvergenz gegen  $\lambda_0$  deutlich zu erkennen. Noch anschaulicher wird dies durch die in Abbildung B.1 gezeigte graphische Auftragung von  $\lambda_0^{(N)}$  gegen  $N$ . Die Punkte nähern sich bei zunehmendem  $N$  deutlich der gestrichelten Linie an, die  $\lambda_0$  darstellt.

Die Näherungswerte  $\kappa^{(5)}$ ,  $\kappa^{(6)}$  und  $\kappa^{(7)}$  kommen dem exakten Wert  $\kappa$  wesentlich näher als das Ergebnis (4.2) eines numerischen Streuversuchs.

Bei  $\lambda_1^{(N)}$  ist das Verhalten in Abhängigkeit von  $N$  jedoch völlig regellos. Von einer Konvergenz gegen  $\lambda_1$  kann in dem vorliegenden  $N$ -Bereich keine Rede sein. Man müßte offenbar zu weitaus höheren  $N$  übergehen, um eine Konvergenz zu

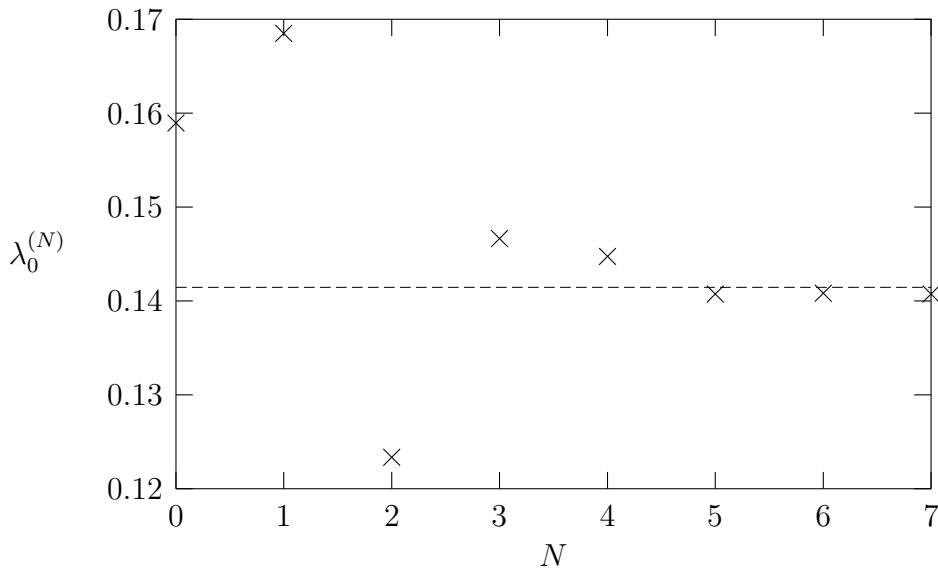


Abbildung B.1: Führender Eigenwert  $\lambda_0^{(N)}$  von  $\mathcal{L}^{+(N)}$  (Punkte) sowie führender Eigenwert von  $\mathcal{L}$  (gestrichelte Linie).

erkennen. Dies wäre jedoch ein beschwerliches Unterfangen, da die Zahl der zu berechnenden Matrixelemente etwa proportional zu  $N^4$  ist.

Eine Erklärung dafür, daß  $\lambda_0^{(N)}$  schon bei geringen  $N$  ein Konvergenzverhalten aufweist,  $\lambda_1^{(N)}$  hingegen nicht, ist möglicherweise die Tatsache, daß  $\lambda_0^{(N)}$  schon für  $N = 0$  existiert und  $\lambda_1^{(N)}$  erst bei  $N = 1$  hinzukommt;  $\lambda_0^{(N)}$  ist also der „ältere“ Eigenwert. Vergleiche hierzu die Diskussion der  $N$ -Abhängigkeit der  $\lambda_\alpha^{(N)}$  im vorletzten Abschnitt.

Die Eigenfunktion  $\varphi_0^{(N)}$  zum führenden Eigenwert  $\lambda_0^{(N)}$  von  $\mathcal{L}^{+(N)}$  wird in Abbildung B.2 für  $N = 0, \dots, 7$  dargestellt, und zwar eingeschränkt auf den Phasenraum  $\Gamma = S^1 \times [-1, 1]$  des teilweise reduzierten Zweimuldensystems (die horizontale Richtung gibt  $\beta$  an, die vertikale Richtung hingegen  $l$ , wie z. B. in Abbildung 2.1). Das ist ausreichend, da die Eigenfunktion symmetrisch ist, also für beide möglichen Werte von  $\mu$  die gleiche  $\beta$ - und  $l$ -Abhängigkeit besitzt. Dunkle Bereiche stellen positive Funktionswerte dar, helle Bereiche hingegen negative Funktionswerte.

Während die Eigenfunktion für  $N = 0$  eine Gleichverteilung auf dem Phasenraum ist, werden mit zunehmendem  $N$  immer feinere Strukturen erkennbar. Besonders auffällig sind zwei in der linken unteren und in der rechten oberen Ecke des Phasenraumes liegende dunkle Flecken, die um so schärfer hervortreten, je größer  $N$  wird. Was hier beobachtet wird, ist die im vorigen Abschnitt besprochene zunehmende Lokalisierung der Eigenfunktion (hier des in  $\Gamma$  liegenden Anteils) auf der instabilen Mannigfaltigkeit  $\Lambda_+^\infty$  der invarianten Menge  $\Lambda$  (des teilweise

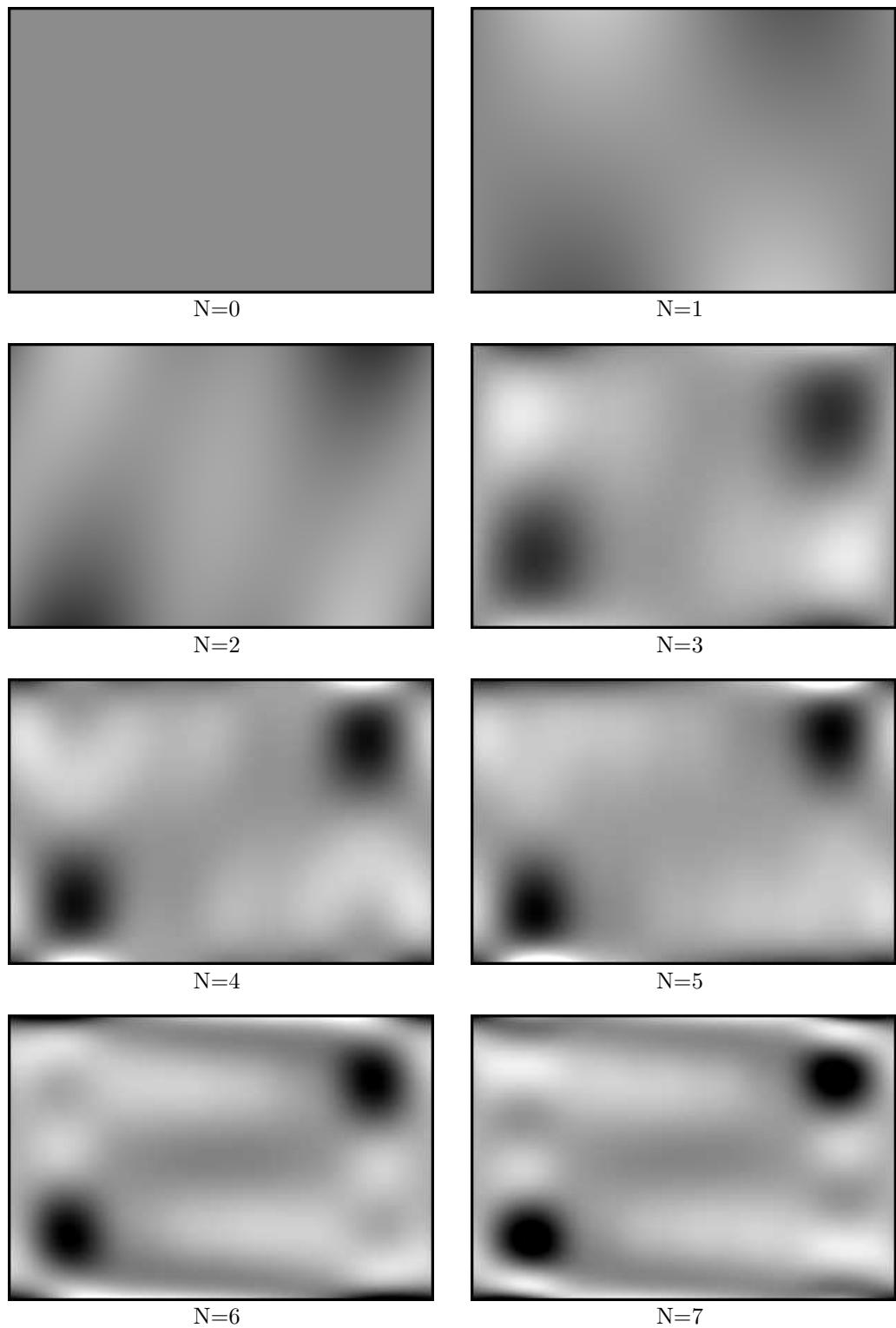


Abbildung B.2: Eigenfunktion  $\varphi_0^{(N)}$  zum führenden Eigenwert  $\lambda_0^{(N)}$  des Operators  $\mathcal{L}^{+(N)}$ .

reduzierten Zweimuldensystems). Um das einzusehen, betrachte man die in Abbildung 2.1 dargestellte Menge  $\Lambda_+^1$ , welche  $\Lambda_+^\infty$  überdeckt. Beim Vergleich mit Abbildung B.2 erkennt man, daß sich die dunklen Flecken genau bei den Falten der parabelförmigen Streifen von  $\Lambda_+^1$  befinden. Bei genauerer Betrachtung von Abbildung B.2 vermag man bei den höheren  $N$ -Werten sogar die gesamte Form der parabelförmigen Streifen schemenhaft zu erkennen.

Daß die Lokalisation auf  $\Lambda_+^\infty$  vor allem bei den Falten so deutlich hervortritt, dürfte daran liegen, daß die Falten im Vergleich zu den übrigen Teilen von  $\Lambda_+^1$  eine große räumliche Ausdehnung besitzen. Das Auflösungsvermögen des Operators  $\mathcal{L}^{+(7)}$  reicht nicht aus, um die schmalen horizontalen Teile von  $\Lambda_+^1$  deutlich werden zu lassen. Diese dürften erst bei höheren  $N$  gut sichtbar werden. Bei weiterer Erhöhung von  $N$  müßten dann die feineren Streifen der Menge  $\Lambda_+^2$ , die ja ebenfalls  $\Lambda_+^\infty$  überdeckt, hervortreten, gefolgt von den Strukturen von  $\Lambda_+^3$  usw.

Die Lokalisation der Eigenfunktion ist eindrucksvoller, wenn man den zur *inversen Abbildung*  $\hat{F}^{-1}$  des Zweimuldensystems gehörenden Perron-Frobenius-Operator  $\mathcal{L}^\dagger$  betrachtet. Seine Matrixelemente sind durch (B.10) gegeben, wobei allerdings  $\hat{F}^{-1}$  durch  $\hat{F}$  zu ersetzen ist. Analog der Definition (B.20a) des Operators  $\mathcal{L}^{+(N)}$  kann ein Operator  $\mathcal{L}^{\dagger+(N)}$  definiert werden. Da gezeigt werden kann, daß  $\mathcal{L}^\dagger$  der zu  $\mathcal{L}$  adjungierte Operator ist, und ferner alle Matrixelemente von  $\mathcal{L}$  reell sind, braucht die  $\mathcal{L}^{\dagger+(N)}$ -Matrix nicht eigens berechnet zu werden: Sie ist die transponierte  $\mathcal{L}^{+(N)}$ -Matrix.

Daher besitzt  $\mathcal{L}^{\dagger+(N)}$  die gleichen Eigenwerte wie  $\mathcal{L}^{+(N)}$ . Die Eigenfunktionen von  $\mathcal{L}^{\dagger+(N)}$  unterscheiden sich jedoch grundlegend von den Eigenfunktionen von  $\mathcal{L}^{+(N)}$ : Wie man sich klarmachen kann, sind sie nicht in der Nähe der *instabilen* Mannigfaltigkeit  $\Lambda_+^\infty$  von  $\Lambda$  konzentriert, sondern in der Nähe der *stabilen* Mannigfaltigkeit  $\Lambda_-^\infty$ .

Abbildung B.3 zeigt die Eigenfunktion  $\varphi_0^{\dagger(N)}$  zum führenden Eigenwert  $\lambda_0^{(N)}$  von  $\mathcal{L}^{\dagger+(N)}$  für  $N = 0, \dots, 7$ . Während bei  $N = 0$  wie schon in Abbildung B.2 eine Gleichverteilung vorliegt, erkennt man schon bei  $N = 3$  deutlich einen dunklen vertikalen Streifen, der die Form der in Abbildung 2.1 gezeigten Menge  $\Lambda_-^1$  besitzt, welche die stabile Mannigfaltigkeit  $\Lambda_-^\infty$  überdeckt. Bei höheren  $N$  werden die Konturen noch zunehmend schärfer. Daß die Form von  $\Lambda_-^1$  schon bei kleinem  $N$  so deutlich hervortritt (im Gegensatz zur Form von  $\Lambda_+^1$  in Abbildung B.2), liegt daran, daß  $\Lambda_-^1$  im Vergleich zu  $\Lambda_+^1$  relativ breit ist. Die Struktur von  $\Lambda_-^1$  kann schon bei kleinem  $N$  gut aufgelöst werden.

Ferner sind weit entfernt vom vertikalen Streifen Wellen zu erkennen, die jedoch um so schwächer ausgeprägt sind, je größer  $N$  ist. Dieses Verhalten wurde bereits im vorigen Abschnitt angesprochen (dort allerdings im Zusammenhang mit dem Operator  $\mathcal{L}^{(N)}$ ): In einiger Entfernung von  $\Lambda_-^\infty$  verschwinden die Werte der Eigenfunktion bei großem  $N$  zwar beinahe, aber nicht völlig. Eine gewisse „Restwelligkeit“ bleibt bei endlichem  $N$  stets zurück.

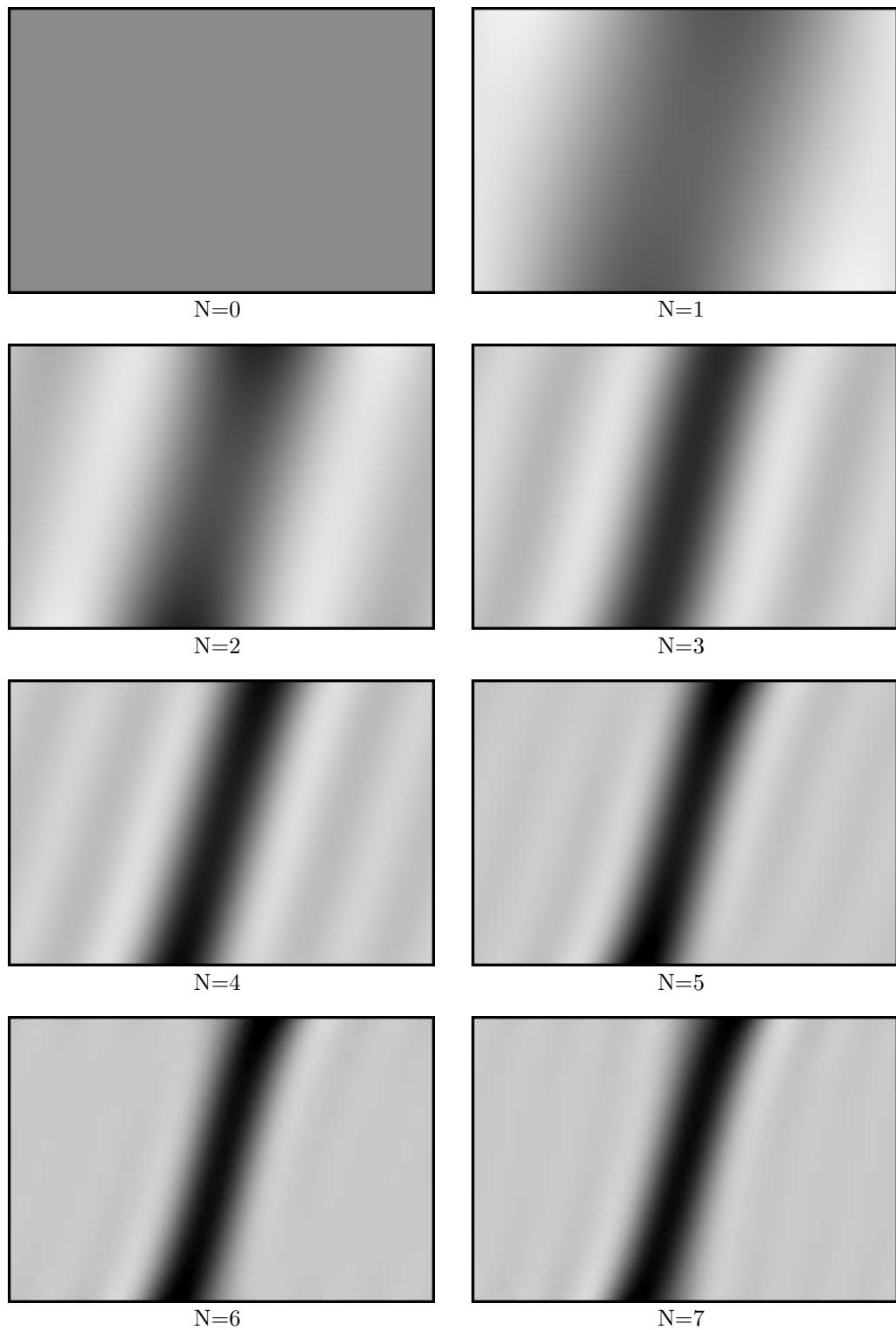


Abbildung B.3: Eigenfunktion  $\varphi_0^{\dagger(N)}$  zum führenden Eigenwert  $\lambda_0^{(N)}$  des Operators  $\mathcal{L}^{+\dagger(N)}$ .

## Anhang C

# Alternativer Zugang zur asymptotischen Spurformel

In Kapitel 3 wird im Rahmen allgemeinerer Überlegungen unter anderem gezeigt, daß die Escape-Rate mit Hilfe der asymptotischen Spurformel (3.78) bestimmt werden kann. Zu diesem Ergebnis kann man auf direkterem Wege unter Vermeidung des Entwicklungsoperator-Formalismus gelangen, nämlich indem man die Volumina der Mengen von Punkten, die nach  $n$  Iterationen noch nicht aus dem Phasenraum entwichen sind, direkt durch die Stabilität periodischer Orbits abschätzt. Dieser alternative Zugang zur asymptotischen Spurformel geht auf [Cvi88] zurück und wird in diesem Anhang anhand des Zweimuldensystems vorgeführt. Die Argumentation läßt sich auf jedes hyperbolische System, das eine Symbolische Dynamik besitzt, übertragen; sie ist allerdings nicht ganz streng.

Wie in Kapitel 2 sei  $\overline{\Lambda_-^n}$  die Menge derjenigen Punkte im (eingeschränkten) Phasenraum  $\overline{\Gamma} = [\pi/2, 3\pi/2] \times [-1, 1]$  des teilweise reduzierten Zweimuldensystems, die nach  $n$  Iterationen der Abbildung  $F$  noch in  $\overline{\Gamma}$  verbleiben. Für die Escape-Rate ist der Anteil  $\gamma_n$ , den  $\overline{\Lambda_-^n}$  in  $\overline{\Gamma}$  einnimmt, von Bedeutung:

$$\gamma_n = \frac{1}{|\overline{\Gamma}|} \int_{\overline{\Lambda_-^n}} dx, \quad (\text{C.1})$$

wobei  $|\overline{\Gamma}| = \int_{\overline{\Gamma}} dx$  der Flächeninhalt von  $\overline{\Gamma}$  ist.

Wie aus Kapitel 2 bekannt, besteht  $\overline{\Lambda_-^n}$  aus  $4^n$  vertikalen Streifen. Es ist nun das Ziel, die Flächeninhalte dieser Streifen abzuschätzen. Da die Längen aller Streifen gleich sind, werden die Flächeninhalte der Streifen durch deren Breiten bestimmt.

Jedem Streifen ist eine endliche Symbolfolge mit  $n$  Symbolen zuzuordnen, denn jeder Streifen ist jeweils die Menge aller Punkte, deren (endliche oder unendliche) Symbolfolgen in positiver Zeitrichtung mit den Symbolen anfangen, die dem

Streifen zugeordnet sind. Insbesondere enthält jeder Streifen genau einen periodischen Punkt, dessen Periode gleich  $n$  oder gleich einem Teiler von  $n$  ist, nämlich den Punkt, der genau die bi-infinite Symbolfolge besitzt, die durch periodische Fortsetzung der Folge, die zum jeweiligen Streifen gehört, entsteht.

Beim  $i$ -ten Streifen sei  $x_i$  der zugehörige periodische Punkt mit der oben beschriebenen Eigenschaft, und  $\Lambda_i$  sei der expandierende Eigenwert von  $DF^n(x_i)$ . Da dieser Eigenwert die Expansion einer kleinen Umgebung von  $x_i$  unter der Wirkung von  $F^n$  beschreibt, und diese Expansion annähernd in horizontaler Richtung erfolgt, ist die Breite des  $i$ -ten Streifen, und damit sein Flächeninhalt, ungefähr proportional zu  $1/|\Lambda_i|$ . Aus diesem Grunde gilt

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \sum_{i=1}^{4^n} \frac{a_i}{|\Lambda_i|} \\ &= C_n \sum_{i=1}^{4^n} \frac{1}{|\Lambda_i|}.\end{aligned}\tag{C.2}$$

Die Faktoren  $a_i$  sind allesamt von der Größenordnung 1, egal wie groß  $n$  ist. Daher ändern sich die Konstanten  $C_n$  bei zunehmendem  $n$ , verglichen mit dem exponentiellen Anwachsen der  $|\Lambda_i|$ , nur geringfügig.

Da die Escape-Rate  $\kappa$  asymptotisch definiert ist,

$$\kappa = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \gamma_n,\tag{C.3}$$

können die  $C_n$  als Faktoren vernachlässigt werden. Definiert man also

$$\tilde{\gamma}_n = \sum_{i=1}^{4^n} \frac{1}{|\Lambda_i|},\tag{C.4}$$

so gilt auch

$$\kappa = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{\gamma}_n.\tag{C.5}$$

Das bedeutet  $\tilde{\gamma}_n \sim e^{-\kappa n}$  für große  $n$ , und daher sollte die erzeugende Funktion der  $\tilde{\gamma}_n$ , nämlich

$$\begin{aligned}\Omega(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \tilde{\gamma}_n \\ &\approx \frac{1}{1 - ze^{-\kappa}}\end{aligned}\tag{C.6}$$

für  $z = e^\kappa$  divergieren. Wie sich gleich herausstellen wird, ist dies dasselbe  $\Omega(z)$  wie in (3.78).

Jeder Streifen enthält, wie bereits gesagt, einen Punkt, der zu einem Primzyklus  $p$  gehört, dessen topologische Länge  $n_p$  gleich  $n$  oder einem Teiler von  $n$  ist, d. h. es gibt ein  $r$  mit  $n = n_p r$ . Der zugehörige Eigenwert  $\Lambda_i$  ist daher gleich  $\Lambda_p^r$ . Umgekehrt gibt es zu jedem Primzyklus  $p$  der Länge  $n_p$ , für den es ein  $r$  mit  $n = n_p r$  gibt, insgesamt  $n_p$  verschiedene Streifen, die Punkte von  $p$  enthalten und denen daher der gleiche Eigenwert  $\Lambda_p^r$  zugeordnet ist. Das liegt daran, daß für jede denkbare Symbolfolge der Länge  $n$  ein zugehöriger Streifen existiert.

Aus dem Gesagten folgt, daß die Summe auf der rechten Seite von (C.4) sich durch die folgende Summe ersetzen läßt:

$$\tilde{\gamma}_n = \sum_p n_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{|\Lambda_p|^r} \delta_{n, n_p r}. \quad (\text{C.7})$$

Mit diskreter Laplace-Transformation folgt schließlich

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \tilde{\gamma}_n \\ &= \sum_p n_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^{n_p r}}{|\Lambda_p|^r}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Das ist die asymptotische Spurformel (3.78) mit  $\beta = 0$  in den Gewichten (3.79).

## Anhang D

# Periodische Orbits und Symmetrien

Thema dieses Anhanges sind die Eigenschaften periodischer Orbits von Abbildungen, die invariant unter einer Symmetriegruppe  $G$  sind. Ziel ist es, die Ausführungen des Abschnittes 3.5.2 zu ergänzen und zu vertiefen. Dazu gehören die Herleitung der Spurformel (3.115) sowie eine Diskussion darüber, welches Gruppenelement  $h_{\tilde{p}} \in G$ , dessen Jacobimatrix  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}$  in (3.115) auftritt, dem jeweiligen Orbit  $\tilde{p}$  zuzuordnen ist. Außerdem wird die Äquivalenz von (3.134) zu (3.78) gezeigt. Um das alles vorzubereiten, werden zunächst die Auswirkungen der Anwendung von Symmetrioperationen auf periodische Orbits diskutiert. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Tatsache, daß zu jedem periodischen Orbit eine Untergruppe von  $G$  gehört, unter deren Elementen der Orbit invariant ist.

### D.1 Symmetrievinvarianz periodischer Orbits

Eine Abbildung  $f$  sei invariant unter der Symmetriegruppe  $G$ . Wendet man auf einen Orbit von  $f$ , gegeben durch eine Punktfolge  $x_k = f^k(x_0)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  eine beliebige Symmetrioperation  $g \in G$  an, so ist die resultierende Punktfolge  $g(x_k) = g(f^k(x_0)) = f^k(g(x_0))$  ebenfalls ein Orbit von  $f$ .

Wendet man nun  $g$  auf einen periodischen Orbit

$$p = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_p-1}\} \tag{D.1}$$

an, so entsteht entweder ein neuer periodischer Orbit  $g(p)$ , oder  $p$  bleibt invariant. Der Orbit  $p$  ist genau dann invariant unter  $g$ , wenn  $g$  nichts anderes als eine zyklische Permutation der Orbitpunkte  $x_i$  bewirkt. Die Menge  $\mathbb{H}_p \subset G$  von Gruppenelementen, unter denen  $p$  invariant ist, bildet also eine *zyklische Untergruppe* von  $G$ .

Die Symmetriegruppe  $\mathcal{C}_{2v}$ , unter der das Zweimuldensystem invariant ist, besitzt folgende zyklische Untergruppen:  $\{e\}$ ,  $\{e, \sigma_x\}$ ,  $\{e, \sigma_y\}$  und  $\{e, c_2\}$ . Es kann also kein Orbit des Zweimuldensystems unter allen Elementen von  $\mathcal{C}_{2v}$  invariant sein, denn  $\mathcal{C}_{2v}$  selbst ist nicht zyklisch.

Jedes Element  $h_i \in \mathbb{H}_p$ ,  $i = 0, 1, \dots, \text{ord } \mathbb{H}_p - 1$  bewirkt eine zyklische Verschiebung der Orbitpunkte um  $n(h_i)$  Plätze nach links:

$$h_i(p) = \{x_{n(h_i)}, x_{n(h_i)+1}, \dots, x_{n_p}, x_0, \dots, x_{n(h_i)-1}\}. \quad (\text{D.2})$$

Die Verschiebungen sind ein Vielfaches von  $n_p/\text{ord } \mathbb{H}_p$ . Man kann die  $h_i$  so numerieren, daß gilt:

$$n(h_i) = \frac{in_p}{\text{ord } \mathbb{H}_p}. \quad (\text{D.3})$$

Insbesondere muß also  $\text{ord } \mathbb{H}_p$  ein Teiler von  $n_p$  sein. Wenn  $\mathbb{H}_p$  eine nichttriviale Gruppe ist, d. h. wenn  $\mathbb{H}_p \supset \{e\}$  gilt, dann verursacht das Element  $h_1 = h_p$  die minimale Verschiebung  $n(h_p) = n_p/\text{ord } \mathbb{H}_p$ , und es ist  $\mathbb{H}_p = \{e, h_p, h_p^2, \dots\}$ . Für alle  $i = 0, \dots, n_p - 1$  gilt also

$$f^{n(h_p)}(x_i) = h_p(x_i). \quad (\text{D.4})$$

Für den Orbit  $p$  folgt daraus

$$p = \{x_0, x_1, \dots, x_{n(h_p)-1}, h_p(x_0), h_p(x_1), \dots, h_p(x_{n(h_p)-1}), h_p^2(x_0), \dots\}. \quad (\text{D.5})$$

Das bedeutet, daß es ein *irreduzibles Segment*

$$\bar{p} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n(h_p)-1}\} \quad (\text{D.6})$$

der Länge  $n(h_p)$  gibt, so daß sich  $p$  aus den Bildern von  $\bar{p}$  unter den Elementen von  $\mathbb{H}_p$  zusammensetzt. Beim Übergang zum reduzierten System werden jedoch alle Bilder des irreduziblen Segmentes auf den gleichen Orbit  $\tilde{p}$  im Fundamentalbereich abgebildet. Zum Orbit  $p$  des nichtreduzierten Systems mit der Periode  $n_p$  gehört also ein Orbit  $\tilde{p}$  des reduzierten Systems, dessen Periode  $n_{\tilde{p}} = n(h_p) = n_p/\text{ord } \mathbb{H}_p$  im Falle  $\mathbb{H}_p \supset \{e\}$  kürzer ist als  $n_p$ .

Nun sei  $g \notin \mathbb{H}_p$ . Der neue periodische Orbit  $g(p)$  setzt sich aus folgenden Punkten zusammen:

$$\begin{aligned} g(p) &= \{y_0, y_1, \dots, y_{n_p-1}\} \\ &= \{g(x_0), g(x_1), \dots, g(h_p(x_0)), g(h_p(x_1)), \dots, g(h_p^2(x_0)), \dots\}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Für jedes  $i = 0, \dots, n_p - 1$  ist

$$\begin{aligned} f^{n_{\tilde{p}}}(y_i) &= g(h_p(x_i)) \\ &= g(h_p(g^{-1}(g(x_i)))) \\ &= g(h_p(g^{-1}(y_i))). \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Das heißt, daß auch  $g(p)$  invariant unter einer zyklischen Untergruppe ist, deren Elemente ebenfalls eine Verschiebung der Orbitpunkte um ein Vielfaches von  $n_{\tilde{p}}$  Plätzen bewirkt. Diese Gruppe  $g\mathbb{H}_p g^{-1}$  wird durch das zu  $h_p$  konjugierte Gruppendenelement  $gh_p g^{-1}$  erzeugt. Dieses muß mit  $h_p$  nicht unbedingt übereinstimmen, wenn  $G$  nicht Abelsch ist.

Bei der Menge der durch Elemente von  $G$  erzeugbaren zyklischen Permutationen von  $p$  handelt es sich also um die Menge  $\mathbb{H}_p(p)$ , während solche zyklischen Permutationen von  $g(p)$  durch  $g\mathbb{H}_p g^{-1}(g(p)) = g\mathbb{H}_p(p)$  gegeben sind. Bei den Mengen  $\mathbb{H}_p = e\mathbb{H}_p$  und  $g\mathbb{H}_p$  handelt es sich, da  $g$  nicht in  $\mathbb{H}_p$  enthalten ist, um zwei verschiedene *Nebenklassen* (engl. *cosets*, [Che89]) von  $\mathbb{H}_p$ . Sie besitzen keine gemeinsamen Elemente, denn gäbe es ein  $h_i \in \mathbb{H}_p$  mit  $gh_i \in \mathbb{H}_p$ , dann wäre auch  $gh_i h_i^{-1} = g$  ein Element von  $\mathbb{H}_p$ .

Ist  $G$  durch  $\mathbb{H}_p$  und  $g\mathbb{H}_p$  noch nicht vollständig ausgeschöpft, so kann man ein  $a \in G$  wählen, das weder in  $\mathbb{H}_p$  noch in  $g\mathbb{H}_p$  liegt, und erhält eine weitere Nebenklasse  $a\mathbb{H}_p$ . Diese besitzt weder mit  $\mathbb{H}_p$  noch mit  $g\mathbb{H}_p$  gemeinsame Elemente. Der Orbit  $a(p)$  ist invariant unter der Untergruppe  $a\mathbb{H}_p a^{-1}$ , und die durch diese Gruppe erzeugten zyklischen Permutationen von  $a(p)$  sind durch  $a\mathbb{H}_p(p)$  gegeben. Die Prozedur läßt sich fortsetzen, bis man  $G$  als eine disjunkte Vereinigung von Nebenklassen erhält.

Jede Nebenklasse von  $\mathbb{H}_p$  erzeugt also aus  $p$  jeweils genau einen Orbit, zusammen mit zyklischen Permutationen. Diese Orbits sind paarweise topologisch verschieden, lassen sich jedoch durch Symmetrioperationen aufeinander abbilden. Die Anzahl  $m_p$  dieser verschiedenen Orbits ist gleich der Anzahl der Nebenklassen von  $\mathbb{H}_p$  in  $G$ . Für diese *Multiplizität* von  $p$  (in der Literatur [CviEck93] auch als *Entartungsgrad* bezeichnet) gilt folglich:

$$m_p = \frac{\text{ord } G}{\text{ord } \mathbb{H}_p}. \quad (\text{D.9})$$

Beim Zweimuldensystem gilt stets  $\text{ord } \mathbb{H}_p = 1$  oder  $\text{ord } \mathbb{H}_p = 2$  (siehe oben). Daher ist beim Zweimuldensystem nur  $m_p = 4$  oder  $m_p = 2$  möglich.

Man spricht deshalb von Multiplizität oder Entartungsgrad, weil in den Zeta-Funktionen (3.89) und (3.91) jeweils  $m_p$ -mal der gleiche Faktor  $(1 - t_p/\Lambda_p^k)$  auftritt. Jedes Bild von  $p$  unter den zu den Nebenklassen  $b\mathbb{H}_p$  gehörenden Symmetrioperationen  $b$  besitzt das gleiche Produkt  $\Lambda_p$  der expandierenden Eigenwerte seiner Monodromiematrix und damit das gleiche Gewicht  $t_p$  wie  $p$ , denn  $\Lambda_p$  hängt von den Stabilitätseigenschaften von  $p$  ab, und es erscheint plausibel, daß sich die Stabilitätseigenschaften unter Symmetrioperationen nicht ändern.<sup>1</sup> Dies kann man auch leicht explizit zeigen. Es gilt sogar, daß für einen nicht notwendig periodischen Orbit der Länge  $n$  mit beliebigem Startpunkt  $x_0$  die Monodromiematrix

<sup>1</sup>Das Gewicht  $t_p$  hängt für  $\beta \neq 0$  auch von der integrierten Observablen  $A_p$  ab. Unter der Voraussetzung (3.95) ist die Symmetrieinvarianz von  $t_p$  dennoch gewährleistet.

$Df^n(x_0)$  die gleichen Eigenwerte besitzt wie die Monodromiematrix  $Df^n(b(x_0))$  des in  $b(x_0)$  startenden Orbits. Es sei  $\mathbf{b} = Db$  die Jacobimatrix der Symmetrioperation  $b$ . Dann erhält man mit Hilfe von

$$\begin{aligned} Df^n(b(x_0))\mathbf{b} &= D[f^n(b(x))]_{x=x_0} \\ &= D[b(f^n(x))]_{x=x_0} \\ &= \mathbf{b}Df^n(x_0) \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

nämlich folgendes:

$$Df^n(b(x_0)) = \mathbf{b}Df^n(x_0)\mathbf{b}^{-1}. \quad (\text{D.11})$$

Die beiden Matrizen  $Df^n(x_0)$  und  $Df^n(b(x_0))$  gehen also durch eine Ähnlichkeitstransformation auseinander hervor und besitzen daher die gleichen Eigenwerte. Insbesondere besitzt jedes Bild eines periodischen Orbits tatsächlich die gleichen Eigenwerte der Monodromiematrix und das gleiche Gewicht wie der Orbit selbst.

Durch die Gleichheit von Eigenwerten und Gewichten gewisser verschiedener Orbits verringert sich die Zahl der voneinander unabhängigen Beiträge zu den Zeta-Funktionen. Die  $m_p$  verschiedenen Bilder von  $p$  können zu Klassen  $\hat{p}$  mit zugehörigen  $\Lambda_{\hat{p}}$  und  $t_{\hat{p}}$  zusammengefasst werden, und die dynamischen Zeta-Funktionen (3.91) lassen sich in Produkte über die Klassen  $\hat{p}$  umschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_k}(z) &= \prod_p \left(1 - \frac{t_p}{\Lambda_p^k}\right) \\ &= \prod_{\hat{p}} \left(1 - \frac{t_{\hat{p}}}{\Lambda_{\hat{p}}^k}\right)^{m_{\hat{p}}}, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

wobei jeweils  $m_{\hat{p}} = m_p$  für einen beliebig ausgewählten Orbit  $p \in \hat{p}$  zu setzen ist.

Da die einzelnen Repräsentanten einer Klasse  $\hat{p}$  sich jeweils paarweise nur durch Symmetrioperationen voneinander unterscheiden, werden sie alle auf den selben Orbit  $\tilde{p}$  im Fundamentalbereich abgebildet. Andererseits gibt es keinen Repräsentanten einer anderen Klasse  $\hat{p}'$ , der ebenfalls auf  $\tilde{p}$  abgebildet wird. Es besteht also ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang zwischen den Klassen  $\hat{p}$  von periodischen Orbits des nichtreduzierten Systems und den einzelnen periodischen Orbits  $\tilde{p}$  des reduzierten Systems. Man kann jeden  $\hat{p}$ -Beitrag in (D.12) durch einen Beitrag, der vom zugehörigen  $\tilde{p}$  abhängt, berechnen. Diese  $\tilde{p}$ -Beiträge anzugeben ist das Ziel von Abschnitt 3.5.2.

Beim Zweimuldensystem besitzen die Klassen  $\hat{p}$  stets zwei oder vier Repräsentanten, siehe oben; vergleiche auch Abschnitt 2.6.

## D.2 Symmetriereduzierte Spurformel

Es folgen nun die Herleitung der symmetriereduzierten Spurformel (3.115) sowie einige weiterführende Diskussionen.

Aus (3.114) ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathcal{L}^n &= \int_{\tilde{\mathcal{M}}} d\tilde{x} \sum_{h \in G} \text{tr } D(h) \delta(\tilde{x} - h(f^n(\tilde{x}))) e^{\beta \cdot A^n(\tilde{x})} \\ &= \sum_{h \in G} \text{tr } D(h) \sum_{\{\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{M}}: \tilde{x} = h(f^n(\tilde{x}))\}} \frac{e^{\beta \cdot A^n(\tilde{x})}}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{hJ}^{(n)}(\tilde{x}))|}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Hierbei ist  $\mathbf{J}^{(n)}(\tilde{x}) = Df^n(\tilde{x})$ , und  $\mathbf{h}$  bezeichnet die Jacobi-Matrix der Symmetrieroberung  $h$ . Summiert wird über alle Punkte  $\tilde{x}$  aus  $\tilde{\mathcal{M}}$ , deren Bilder unter  $f^n$  mit  $\tilde{x}$  bis auf eine Symmetrieroberung übereinstimmen. Das sind genau die Punkte, die von periodischen Orbits der Länge  $n$  des reduzierten Systems durchlaufen werden. Analog der Art und Weise, wie (3.63) umgeformt wurde, wird (D.13) nun in eine Summe über Primzyklen  $\tilde{p}$  und deren Wiederholungen umgeschrieben, was in diesem Falle jedoch mehr Aufwand erfordert.

Ein Primzyklus  $\tilde{p}$  des reduzierten Systems mit Periode  $n_{\tilde{p}}$  sei durch

$$\tilde{p} = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n_{\tilde{p}}-1}\} \quad (\text{D.14})$$

gegeben. Jeder Punkt von  $\tilde{p}$  leistet einen Beitrag zu (D.13). Wie im dem Falle, in welchem keine Symmetrien berücksichtigt wurden, wird sich auch hier herausstellen, daß die Beiträge zur Spurformel für alle Punkte eines Primzyklus gleich sind.

Der bei  $\tilde{x}_0$  startende periodische Orbit des nichtreduzierten Systems sei nun mit  $p$  bezeichnet. Er besitzt ein irreduzibles Segment  $\bar{p}$  der Länge  $n_{\tilde{p}}$ :

$$\bar{p} = \{\tilde{x}_0, f(\tilde{x}_0), f^2(\tilde{x}_0), \dots, f^{n_{\tilde{p}}-1}(\tilde{x}_0)\}. \quad (\text{D.15})$$

Durch bestimmte Symmetrieroberungen  $g_1, g_2, \dots, g_{n_{\tilde{p}}-1} \in G$  werden die einzelnen Punkte von  $\bar{p}$  in den Fundamentalbereich zurücktransportiert, wodurch  $\tilde{p}$  entsteht:

$$\tilde{p} = \{\tilde{x}_0, g_1(f(\tilde{x}_0)), g_2(f^2(\tilde{x}_0)), \dots, g_{n_{\tilde{p}}-1}(f^{n_{\tilde{p}}-1}(\tilde{x}_0))\}. \quad (\text{D.16})$$

Dies kann man durch Vergleich mit (D.14) auch kompakter ausdrücken:

$$\tilde{x}_j = g_j(f^j(\tilde{x}_0)), \quad j = 1, \dots, n_{\tilde{p}} - 1. \quad (\text{D.17})$$

Bevor die Gleicheit der Beiträge aller  $\tilde{x}_j$  zu (D.13) gezeigt wird, wird der Beitrag von  $\tilde{x}_0$  ermittelt, indem die Matrix  $\mathbf{hJ}^{(n)}(\tilde{x}_0)$  bestimmt wird. Dieser Beitrag ist dann  $n_{\tilde{p}}$ -fach zu zählen.

Es gibt eine eindeutig bestimmte Symmetrioperation  $h_{\tilde{p}} \in G$ , welche die Gleichung

$$\tilde{x}_0 = h_{\tilde{p}}(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_0)) \quad (\text{D.18})$$

bzw.

$$h_{\tilde{p}}^{-1}(\tilde{x}_0) = f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_0) \quad (\text{D.19})$$

erfüllt. Es ist also  $h_{\tilde{p}}^{-1}$  dasjenige Gruppenelement, welches eine zyklische Permutation der Punkte von  $p$  um  $n_{\tilde{p}}$  Plätze nach links bewirkt, es entspricht also dem  $h_p$  aus dem vorigen Abschnitt, vgl. (D.4). Durch  $h_{\tilde{p}}^{-1}$  (aber auch durch  $h_{\tilde{p}}$ ) wird die Untergruppe  $\mathbb{H}_{\tilde{p}} \subset G$  erzeugt, unter der  $p$  invariant ist.

Der Primzyklus  $\tilde{p}$  trägt genau dann zur Summe in (D.13) bei, wenn es ein  $r \in \mathbb{N}$  gibt mit  $n = n_{\tilde{p}}r$ . Ist dies der Fall, so ergibt sich, wie gleich gezeigt wird, für die Matrix  $\mathbf{hJ}^{(n)}(\tilde{x}_0)$  folgendes:

$$\mathbf{hJ}^{(n)}(\tilde{x}_0) = (\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^r \quad (\text{D.20})$$

mit der Monodromiematrix  $\mathbf{J}_{\tilde{p}}$  des irreduziblen Segmentes, d. h.  $\mathbf{J}_{\tilde{p}} = Df^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_0)$ , und der Jacobi-Matrix  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}$  von  $h_{\tilde{p}}$ .

Um (D.20) zu zeigen, wird hilfsweise eine Abbildung  $f_{\tilde{p}}$  definiert:

$$f_{\tilde{p}}(x) = h_{\tilde{p}}(f^{n_{\tilde{p}}}(x)). \quad (\text{D.21})$$

Der Punkt  $\tilde{x}_0$  ist wegen (D.18) ein Fixpunkt von  $f_{\tilde{p}}$ . In einer Umgebung von  $\tilde{x}_0$  wird die  $n_{\tilde{p}}$ -te Iterierte der Abbildung des reduzierten Systems durch  $f_{\tilde{p}}^r$  korrekt beschrieben. Aufgrund der Symmetrieviananz von  $f$  gilt  $f_{\tilde{p}}^r(x) = h_{\tilde{p}}^r(f^{n_{\tilde{p}}r}(x))$  und damit

$$\begin{aligned} Df_{\tilde{p}}^r(\tilde{x}_0) &= \mathbf{h}_{\tilde{p}}^r Df^{n_{\tilde{p}}r}(\tilde{x}_0) \\ &= \mathbf{hJ}^{(n)}(\tilde{x}_0) \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

für  $n = n_{\tilde{p}}r$ , denn es gilt  $h_{\tilde{p}}^r = h$ :

$$h(f^n(\tilde{x}_0)) = \tilde{x}_0 = h_{\tilde{p}}^r(f^{n_{\tilde{p}}r}(\tilde{x}_0)) = h_{\tilde{p}}^r(f^n(\tilde{x}_0)). \quad (\text{D.23})$$

Wegen  $f_{\tilde{p}}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$  gilt aber auch

$$\begin{aligned} Df_p^r(\tilde{x}_0) &= Df_{\tilde{p}}(\tilde{x}_0)^r \\ &= (\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^r. \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Mit (D.22) folgt hieraus die Behauptung (D.20). Die Matrix  $\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}} = Df_{\tilde{p}}(\tilde{x}_0)$  ist die Monodromiematrix des Primzyklus  $\tilde{p}$  des reduzierten Systems.

Nun ist noch zu zeigen, daß die Punkte  $\tilde{x}_j$  für  $j = 1, 2, \dots, n_{\tilde{p}} - 1$  den gleichen Beitrag zu (D.13) liefern wie  $\tilde{x}_0$ . Dies geschieht, indem bewiesen wird, daß die

beiden Matrizen  $\mathbf{h}\mathbf{J}^{(n)}(\tilde{x}_j)$  und  $(\mathbf{h}_{\tilde{p}}\mathbf{J}_{\tilde{p}})^r$  durch eine Ähnlichkeitstransformation miteinander verknüpft sind und daher die gleichen Eigenwerte haben.

Einsetzen von (D.18) in (D.17), Ausnutzen der Symmetrieinvarianz von  $f$  und erneute Beachtung von (D.17) ergibt

$$\begin{aligned}\tilde{x}_j &= g_j(f^j(h_{\tilde{p}}(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_0)))) \\ &= g_j(h_{\tilde{p}}(f^{n_{\tilde{p}}}(f^j(\tilde{x}_0)))) \\ &= g_j(h_{\tilde{p}}(f^{n_{\tilde{p}}}(g_j^{-1}(\tilde{x}_j)))) \\ &= g_j(h_{\tilde{p}}(g_j^{-1}(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_j)))) \\ &= h_{\tilde{p}}^{(j)}(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_j)),\end{aligned}\quad (\text{D.25})$$

wobei das Gruppenelement  $h_{\tilde{p}}^{(j)} = g_j h_{\tilde{p}} g_j^{-1}$  zu  $h_{\tilde{p}}$  konjugiert ist. Da die obige Gleichung formal die gleiche Gestalt besitzt wie (D.18), kann man mit der gleichen Argumentation, wie sie bei  $\tilde{x}_0$  angewandt wurde, zeigen, daß mit  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}^{(j)} = Dh_{\tilde{p}}^{(j)}$  und  $\mathbf{J}_{\tilde{p}}^{(j)} = Df^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_j)$  gilt:

$$\mathbf{h}\mathbf{J}^{(n)}(\tilde{x}_j) = \left( \mathbf{h}_{\tilde{p}}^{(j)} \mathbf{J}_{\tilde{p}}^{(j)} \right)^r. \quad (\text{D.26})$$

Nun wird ein Ausdruck für  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}^{(j)} \mathbf{J}_{\tilde{p}}^{(j)}$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}}$  und  $j$  gesucht. Wegen  $\mathbf{J}_{\tilde{p}}^{(j)} = Df^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_j) = Df^{n_{\tilde{p}}}(g_j(f^j(\tilde{x}_0)))$ , siehe (D.17), und mit  $\mathbf{g}_j = Dg_j$  erhält man:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\tilde{p}}^{(j)} \mathbf{g}_j Df^j(\tilde{x}_0) &= D[f^{n_{\tilde{p}}}(g_j(f^j(x)))]_{x=\tilde{x}_0} \\ &= D[g_j(f^j(f^{n_{\tilde{p}}}(x)))]_{x=\tilde{x}_0} \\ &= \mathbf{g}_j Df^j(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_0)) \mathbf{J}_{\tilde{p}}.\end{aligned}\quad (\text{D.27})$$

Daraus folgt

$$\mathbf{J}_{\tilde{p}}^{(j)} = \mathbf{g}_j Df^j(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_0)) \mathbf{J}_{\tilde{p}} Df^j(\tilde{x}_0)^{-1} \mathbf{g}_j^{-1}. \quad (\text{D.28})$$

Für  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}^{(j)} \mathbf{J}_{\tilde{p}}^{(j)}$  kommt man mit  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}^{(j)} = \mathbf{g}_j \mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{g}_j^{-1}$  zu einem Zwischenergebnis:

$$\mathbf{h}_{\tilde{p}}^{(j)} \mathbf{J}_{\tilde{p}}^{(j)} = \mathbf{g}_j \mathbf{h}_{\tilde{p}} Df^j(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_0)) \mathbf{J}_{\tilde{p}} Df^j(\tilde{x}_0)^{-1} \mathbf{g}_j^{-1}. \quad (\text{D.29})$$

Da wegen (D.19)  $Df^j(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_0)) = Df^j(h_{\tilde{p}}^{-1}(\tilde{x}_0))$  gilt, findet man mit Hilfe von

$$\begin{aligned}Df^j(h_{\tilde{p}}^{-1}(\tilde{x}_0)) \mathbf{h}_{\tilde{p}}^{-1} &= D[f^j(h_{\tilde{p}}^{-1}(x))]_{x=\tilde{x}_0} \\ &= D[h_{\tilde{p}}^{-1}(f^j(x))]_{x=\tilde{x}_0} \\ &= \mathbf{h}_{\tilde{p}}^{-1} Df^j(\tilde{x}_0)\end{aligned}\quad (\text{D.30})$$

für  $Df^j(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_0))$  einen neuen Ausdruck:

$$Df^j(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}_0)) = \mathbf{h}_{\tilde{p}}^{-1} Df^j(\tilde{x}_0) \mathbf{h}_{\tilde{p}}. \quad (\text{D.31})$$

Einsetzen in (D.29) ergibt schließlich

$$\mathbf{h}_{\tilde{p}}^{(j)} \mathbf{J}_{\tilde{p}}^{(j)} = \mathbf{g}_j Df^j(\tilde{x}_0) \mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}} Df^j(\tilde{x}_0)^{-1} \mathbf{g}_j^{-1}. \quad (\text{D.32})$$

Die Matrizen  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}^{(j)} \mathbf{J}_{\tilde{p}}^{(j)}$  und  $\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}}$  gehen also durch eine Ähnlichkeitstransformation auseinander hervor, und damit auch  $(\mathbf{h}_{\tilde{p}}^{(j)} \mathbf{J}_{\tilde{p}}^{(j)})^r$  und  $(\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^r$ . Jeder der  $n_{\tilde{p}}$  Punkte von  $\tilde{p}$  leistet den gleichen Beitrag zu (3.63).

Die Spur von  $\mathcal{L}^n$  nimmt nun als Summe über (zyklische Permutationsklassen von) Primzyklen und deren Wiederholungen folgende Gestalt an:

$$\text{tr } \mathcal{L}^n = \sum_{\tilde{p}} n_{\tilde{p}} \sum_{r=1}^{\infty} \text{tr } D(h_{\tilde{p}}^r) \frac{e^{r\beta \cdot A_{\tilde{p}}}}{|\det(\mathbf{1} - (\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^r)|} \delta_{n, n_{\tilde{p}} r}. \quad (\text{D.33})$$

Hierbei ist  $A_{\tilde{p}}$  die integrierte Observable vom  $\tilde{p}$ , die man wegen (3.96) je nach Belieben entlang  $\tilde{p}$  oder auch entlang des entsprechenden irreduziblen Segmentes auswerten kann.

Der letzte Schritt ist die diskrete Laplace-Transformation. Diese führt auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{tr } \mathcal{L}^n = \sum_{\tilde{p}} n_{\tilde{p}} \sum_{r=1}^{\infty} \text{tr } D(h_{\tilde{p}}^r) \frac{z^{n_{\tilde{p}} r} e^{r\beta \cdot A_{\tilde{p}}}}{|\det(\mathbf{1} - (\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^r)|}. \quad (\text{D.34})$$

Das ist die symmetriereduzierte Spurformel (3.115).

An der Herleitung dieser Formel erkennt man, daß man bei der Angabe von  $\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}}$  eine gewisse Wahlfreiheit besitzt. Abhängig davon, welches  $\tilde{x} \in \tilde{p}$  gewählt wird, um  $\mathbf{J}_{\tilde{p}} = Df^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x})$  zu berechnen, ist  $\mathbf{h}_{\tilde{p}}$  die Jacobimatrix derjenigen Symmetrioperation  $h_{\tilde{p}}$ , die  $\tilde{x} = h_{\tilde{p}}(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}))$  erfüllt. Die verschiedenen Symmetrioperatoren, die für  $h_{\tilde{p}}$  überhaupt in Frage kommen, wenn man  $\tilde{x} \in \tilde{p}$  noch nicht gewählt hat, sind jedoch allesamt in derselben Konjugationsklasse enthalten, siehe (D.18) und (D.25).

Jedem Primzyklus  $\tilde{p}$  des reduzierten Systems kann also eine bestimmte Konjugationsklasse  $G_{\tilde{p}} \subset G$  zugeordnet werden. Ihre Elemente erzeugen zyklische Untergruppen von  $G$ . Jeder Repräsentant der zu  $\tilde{p}$  gehörenden Klasse  $\hat{p}$  periodischer Orbits des nichtreduzierten Systems (siehe Ende des vorigen Abschnitts) ist invariant unter einer dieser Untergruppen. Welche Konjugationsklasse  $G_{\tilde{p}}$  zu  $\tilde{p}$  gehört, hängt also von den Symmetrieeigenschaften der in  $\hat{p}$  enthaltenen Orbits ab.

Hat man zur Berechnung von  $\mathbf{J}_{\tilde{p}}$  ein  $\tilde{x} \in \tilde{p}$  gewählt, so stellt sich in der Praxis die Frage, wie denn  $h_{\tilde{p}}$  lautet. Zu ihrer Beantwortung ist zu überprüfen, in welchem Phasenraumbereich  $h_{\tilde{p}}^{-1}(\mathcal{M})$  sich  $f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x})$  befindet. Mit Hilfe einer Symbolischen Dynamik ist dies häufig auf recht bequeme Weise möglich, siehe z. B. [Jun97].

Wie dies im Falle des Zweimuldensystems funktioniert, wird in Abschnitt (3.5.3) erläutert.

Die im vorhergehenden Abschnitt gemachte Aussage, daß jeder Orbit  $p$  einer Klasse  $\hat{p}$  das gleiche Gewicht  $t_{\hat{p}}$  besitzt, kann nun noch etwas präzisiert werden. Definiert man nämlich  $t_{\tilde{p}}$  gemäß (3.117) und bezeichnet mit  $\mathbb{H}_{\tilde{p}}$  die durch  $h_{\tilde{p}}$  erzeugte zyklische Untergruppe von  $G$ , so gilt für alle  $p \in \hat{p}$ :

$$\begin{aligned} t_p &= t_{\hat{p}} \\ &= t_{\tilde{p}}^{\text{ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}}. \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

Um dies zu zeigen, wählt man zur Berechnung von  $t_p$  die Matrix  $\mathbf{J}_p = Df^{n_p}(\tilde{x})$  mit  $\tilde{x} \in \mathcal{M}$  und zur Berechnung von  $t_{\tilde{p}}$  die Matrix  $\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}}$  mit  $\mathbf{J}_{\tilde{p}} = Df^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x})$  und  $\tilde{x} = h_{\tilde{p}}(f^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}))$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_p &= \prod_{j=0}^{\text{ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}-1} Df^{n_{\tilde{p}}} \left( f^{jn_{\tilde{p}}}(\tilde{x}) \right) \\ &= \prod_{j=0}^{\text{ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}-1} Df^{n_{\tilde{p}}} \left( h_{\tilde{p}}^{-j}(\tilde{x}) \right). \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Aus

$$\begin{aligned} Df^{n_{\tilde{p}}} \left( h_{\tilde{p}}^{-j}(\tilde{x}) \right) \mathbf{h}_{\tilde{p}}^{-j} &= D \left[ f^{n_{\tilde{p}}} \left( h_{\tilde{p}}^{-j}(x) \right) \right]_{x=\tilde{x}} \\ &= D \left[ h_{\tilde{p}}^{-j} \left( f^{n_{\tilde{p}}}(x) \right) \right]_{x=\tilde{x}} \\ &= \mathbf{h}_{\tilde{p}}^{-j} Df^{n_{\tilde{p}}}(\tilde{x}) \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

folgt

$$Df^{n_{\tilde{p}}} \left( h_{\tilde{p}}^{-j}(\tilde{x}) \right) = \mathbf{h}_{\tilde{p}}^{-j} \mathbf{J}_{\tilde{p}} \mathbf{h}_{\tilde{p}}^j. \quad (\text{D.38})$$

Einsetzen in (D.36) ergibt wegen  $h_{\tilde{p}}^{-(\text{ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}-1)} = h_{\tilde{p}}$  schließlich

$$\mathbf{J}_p = (\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}})^{\text{ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}}. \quad (\text{D.39})$$

Jeder Eigenwert von  $\mathbf{J}_p$  ist also jeweils die  $(\text{ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}})$ -te Potenz eines Eigenwertes von  $\mathbf{h}_{\tilde{p}} \mathbf{J}_{\tilde{p}}$ . Daher ist  $\Lambda_p = \Lambda_{\tilde{p}}^{\text{ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}}$ . Da wegen (3.95) auch  $e^{\beta \cdot A_p} = e^{\beta \cdot A_{\tilde{p}} \text{ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}}$  gilt, folgt (D.35).

Jetzt ist es möglich, die Übereinstimmung der symmetriereduzierten Version (3.134) der asymptotischen Spurformel mit (3.78) zu zeigen. Die symmetriereduzierte asymptotische Spurformel

$$\Omega(z) = \sum_{\tilde{p}} n_{\tilde{p}} \sum_{r=1}^{\infty} \text{tr } D(h_{\tilde{p}}^r) t_{\tilde{p}}^r \quad (\text{D.40})$$

kann mit Hilfe von  $\text{tr } D(h_{\tilde{p}}^r) = \text{ord } G \delta_{r,k \text{ ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}}$  (siehe (3.103)) umgeschrieben werden:

$$\Omega(z) = \sum_{\tilde{p}} n_{\tilde{p}} \text{ ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}} \frac{\text{ord } G}{\text{ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}} \sum_{k=1}^{\infty} t_{\tilde{p}}^{k \text{ ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}}. \quad (\text{D.41})$$

Jeder Orbit der zu  $\tilde{p}$  gehörenden Klasse  $\hat{p}$  von periodischen Orbits des nichtreduzierten Systems besitzt die Länge  $n_{\hat{p}} = n_{\tilde{p}} \text{ ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}$ . Setzt man außerdem (D.9) und (D.35) ein, so ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \sum_{\hat{p}} n_{\hat{p}} m_{\hat{p}} \sum_{r=1}^{\infty} t_{\hat{p}}^r \\ &= \sum_p n_p \sum_{r=1}^{\infty} t_p^r, \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

was (3.78) entspricht.

Obgleich er nur von untergeordneter Bedeutung ist, sei abschließend noch der genaue Zusammenhang zwischen den Beiträgen der Klassen  $\hat{p}$  zu den dynamischen Zeta-Funktionen  $1/\zeta_k$ , ausgedrückt durch (D.12), und den  $\tilde{p}$ -Beiträgen, ausgedrückt durch (3.124), angegeben. Vergleicht man (D.12) mit (3.124), so sieht man, daß für jede Klasse  $\hat{p}$  und den jeweiligen korrespondierenden Primzyklus  $\tilde{p}$  des reduzierten Systems für jedes  $k = 0, 1, \dots$  folgende Identität gilt:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{t_{\hat{p}}}{\Lambda_{\hat{p}}^k}\right)^{m_{\hat{p}}} &= \left(1 - \left(\frac{t_{\tilde{p}}}{\Lambda_{\hat{p}}^k}\right)^{\text{ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}}\right)^{\frac{\text{ord } G}{\text{ord } \mathbb{H}_{\tilde{p}}}} \\ &= \det \left(1 - D(h_{\tilde{p}}) \frac{t_{\hat{p}}}{\Lambda_{\hat{p}}^k}\right). \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

## Anhang E

# Cycle Expansions und Symmetrien beim Zweimuldensystem

Die dynamische Zeta-Funktion  $1/\zeta(z)$  des Zweimuldensystems faktorisiert in vier Teilfunktionen  $1/\zeta_{A_1}(z)$ ,  $1/\zeta_{A_2}(z)$ ,  $1/\zeta_{B_1}(z)$ ,  $1/\zeta_{B_2}(z)$ , die jeweils zu den entsprechenden irreduziblen Darstellungen der  $\mathcal{C}_{2v}$ -Symmetriegruppe gehören. Die Cycle-Expansions dritter Ordnung dieser Funktionen werden in diesem Anhang aufgelistet. Hierbei wird gezeigt, daß die Kombinationen sich aufhebender Terme durch das Auftreten gruppentheoretischer Faktoren nicht zerstört werden.

Da die irreduziblen Darstellungen von  $\mathcal{C}_{2v}$  sämtlich eindimensional sind, besitzen die Teilfunktionen  $1/\zeta_\alpha(z)$  aufgrund von (3.128) und (3.131) folgende Gestalt:

$$\frac{1}{\zeta_\alpha}(z) = \prod_{\tilde{p}} (1 - \chi_\alpha(h_{\tilde{p}})t_{\tilde{p}}) . \quad (\text{E.1})$$

Es ist also erforderlich, die Symmetrietypen  $h_{\tilde{p}}$  der einzelnen Orbits  $\tilde{p}$  zu kennen. Mittels des in Abschnitt 3.5.3 beschriebenen Verfahrens können die Symmetrietypen direkt an den Symbolfolgen der Orbits abgelesen werden. Für die Orbits bis zur Länge 3 sind die Symmetrietypen in Tabelle E.1 aufgelistet. Dort werden die Symbolstrings nicht nur mit Hilfe der Symbole  $[= >]$ ,  $[= <]$ ,  $[ \neq >]$ ,  $[ \neq <]$  ausgedrückt, sondern auch durch die Zahlen 1, 2, 3, 4. Aus Gründen der Übersicht werden hier die Gewichte der Orbits mit den Symbolstrings, die aus den vier Zahlen bestehen, indiziert. Außerdem wird der Querstrich über den Strings weggelassen.

Die Charaktere  $\chi_\alpha(h_{\tilde{p}})$  können der Charaktertafel von  $\mathcal{C}_{2v}$  (Tabelle 3.2 auf Seite 75) entnommen werden.

Symbolfolge des Orbits $\tilde{p}$ , mit den Symbolen [=>], [= <], [≠ >], [≠ <]; 1, 2, 3, 4		Symmetriertyp $h_{\tilde{p}}$
[=>]	1	$c_2$
[=<]	2	$c_2$
[≠ >]	3	$\sigma_y$
[≠ <]	4	$\sigma_y$
[=>][=<]	12	$e$
[=>][≠ >]	13	$\sigma_x$
[=>][≠ <]	14	$\sigma_x$
[=<][≠ >]	23	$\sigma_x$
[=<][≠ <]	24	$\sigma_x$
[≠ >][≠ <]	34	$e$
[=>][=>][=<]	112	$c_2$
[=>][=>][≠ >]	113	$\sigma_y$
[=>][=>][≠ <]	114	$\sigma_y$
[=>][=<][=<]	122	$c_2$
[=>][=<][≠ >]	123	$\sigma_y$
[=>][=<][≠ <]	124	$\sigma_y$
[=>][≠ >][=<]	132	$\sigma_y$
[=>][≠ >][≠ >]	133	$c_2$
[=>][≠ >][≠ <]	134	$c_2$
[=>][≠ <][=<]	142	$\sigma_y$
[=>][≠ <][≠ >]	143	$c_2$
[=>][≠ <][≠ <]	144	$c_2$
[=<][=<][≠ >]	223	$\sigma_y$
[=<][=<][≠ <]	224	$\sigma_y$
[=<][≠ >][≠ >]	233	$c_2$
[=<][≠ >][≠ <]	234	$c_2$
[=<][≠ <][≠ >]	243	$c_2$
[=<][≠ <][≠ <]	244	$c_2$
[≠ >][≠ >][≠ <]	334	$\sigma_y$
[≠ >][≠ <][≠ <]	344	$\sigma_y$

Tabelle E.1: Symmetriertypen der periodischen Orbits bis zur Länge 3 des reduzierten Zweimuldensystems.

In der trivialen Darstellung  $A_1$  ist der Charakter jedes Gruppenelementes gleich 1, d. h. es gilt  $\chi_{A_1}(h) = 1 \forall h \in \mathcal{C}_{2v}$ . Die Teilfunktion  $1/\zeta_{A_1}$  besitzt also die von  $1/\zeta(z)$  gewohnte Form, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_{A_1}}(z) = & (1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)(1-t_4)(1-t_{12})(1-t_{13})(1-t_{14})(1-t_{23}) \\ & (1-t_{24})(1-t_{34})(1-t_{112})(1-t_{113})(1-t_{114})(1-t_{122})(1-t_{123}) \\ & (1-t_{124})(1-t_{132})(1-t_{133})(1-t_{134})(1-t_{142})(1-t_{143})(1-t_{144}) \\ & (1-t_{223})(1-t_{224})(1-t_{233})(1-t_{234})(1-t_{243})(1-t_{244})(1-t_{334}) \\ & (1-t_{344}) \dots \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Multipliziert man aus und notiert nur die Terme bis zur dritten Ordnung, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_{A_1}}(z) = & 1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_{12} - t_{13} - t_{14} - t_{23} - t_{24} - t_{34} - t_{112} - t_{113} \\ & - t_{114} - t_{122} - t_{123} - t_{124} - t_{132} - t_{133} - t_{134} - t_{142} - t_{143} - t_{144} \\ & - t_{223} - t_{224} - t_{233} - t_{234} - t_{243} - t_{244} - t_{334} - t_{344} - \dots \\ & + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_1 t_{12} + t_1 t_{13} + t_1 t_{14} + t_1 t_{23} + t_1 t_{24} + t_1 t_{34} + \dots \\ & + t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_2 t_{12} + t_2 t_{13} + t_2 t_{14} + t_2 t_{23} + t_2 t_{24} + t_2 t_{34} + \dots \\ & + t_3 t_4 + t_3 t_{12} + t_3 t_{13} + t_3 t_{14} + t_3 t_{23} + t_3 t_{24} + t_3 t_{34} + \dots \\ & + t_4 t_{12} + t_4 t_{13} + t_4 t_{14} + t_4 t_{23} + t_4 t_{24} + t_4 t_{34} + \dots \\ & - t_1 t_2 t_3 - t_1 t_2 t_4 - t_1 t_3 t_4 - t_2 t_3 t_4 - \dots \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Nun werden die jeweils zusammengehörenden Terme von Orbits und beschattenden Pseudo-Orbits in Klammern zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_{A_1}}(z) = & 1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - (t_{12} - t_1 t_2) - (t_{13} - t_1 t_3) - (t_{14} - t_1 t_4) \\ & - (t_{23} - t_2 t_3) - (t_{24} - t_2 t_4) - (t_{34} - t_3 t_4) - (t_{112} - t_1 t_{12}) \\ & - (t_{113} - t_1 t_{13}) - (t_{114} - t_1 t_{14}) - (t_{122} - t_1 t_{22}) \\ & - (t_{123} - t_1 t_{23}) - (t_{124} - t_1 t_{24}) - (t_{132} - t_1 t_{32}) - (t_{133} - t_1 t_{33}) - (t_{134} - t_1 t_{34}) \\ & - (t_{142} - t_1 t_{42}) - (t_{143} - t_1 t_{43}) - (t_{144} - t_1 t_{44}) - (t_{223} - t_2 t_{23}) \\ & - (t_{224} - t_2 t_{24}) - (t_{233} - t_2 t_{33}) - (t_{234} - t_2 t_{34}) - (t_{243} - t_2 t_{43}) - (t_{244} - t_2 t_{44}) \\ & - (t_{334} - t_3 t_{34}) - (t_{344} - t_3 t_{44}) - \dots \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Bei einer Symbolischen Dynamik mit vier Symbolen entstehen also schon in der dritten Ordnung einige „Vierergrüppchen“, was bei einer binären Symbolischen Dynamik erst in der vierten Ordnung geschieht.

Bei der Teilfunktion  $1/\zeta_{A_2}(z)$  kehren sich die Vorzeichen einiger Gewichte um. Nach der Charaktertafel auf Seite 75 sind in der Darstellung  $A_2$  die Charaktere von  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  gleich  $-1$ , die Charaktere der übrigen Gruppenelemente sind  $1$ . Die Gewichte der Orbits mit  $\sigma_x$ - oder mit  $\sigma_y$ -Symmetrie tragen also mit umgekehrten Vorzeichen bei. Man kann sich mit Hilfe des Verfahrens aus Abschnitt 3.5.3 klarmachen, daß dies genau diejenigen Orbits sind, deren Symbolstrings eine ungerade Anzahl von Symbolen besitzen, die das Zeichen  $\neq$  enthalten. In den anderen Symbolen ausgedrückt, enthalten diese Symbolstrings die Zahlen  $3$  und  $4$  insgesamt in ungerader Anzahl. Die Funktion  $1/\zeta_{A_2}(z)$  lautet damit

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\zeta_{A_2}}(z) &= (1 - t_1)(1 - t_2)(1 + t_3)(1 + t_4)(1 - t_{12})(1 + t_{13})(1 + t_{14})(1 + t_{23}) \\
 &\quad (1 + t_{24})(1 - t_{34})(1 - t_{112})(1 + t_{113})(1 + t_{114})(1 - t_{122})(1 + t_{123}) \\
 &\quad (1 + t_{124})(1 + t_{132})(1 - t_{133})(1 - t_{134})(1 + t_{142})(1 - t_{143})(1 - t_{144}) \\
 &\quad (1 + t_{223})(1 + t_{224})(1 - t_{233})(1 - t_{234})(1 - t_{243})(1 - t_{244})(1 + t_{334}) \\
 &\quad (1 + t_{344}) \dots \\
 &= 1 - t_1 - t_2 + t_3 + t_4 - t_{12} + t_{13} + t_{14} + t_{23} + t_{24} - t_{34} - t_{112} + t_{113} \\
 &\quad + t_{114} - t_{122} + t_{123} + t_{124} + t_{132} - t_{133} - t_{134} + t_{142} - t_{143} - t_{144} \\
 &\quad + t_{223} + t_{224} - t_{233} - t_{234} - t_{243} - t_{244} + t_{334} + t_{344} - \dots \\
 &\quad + t_1 t_2 - t_1 t_3 - t_1 t_4 + t_1 t_{12} - t_1 t_{13} - t_1 t_{14} - t_1 t_{23} - t_1 t_{24} + t_1 t_{34} + \dots \\
 &\quad - t_2 t_3 - t_2 t_4 + t_2 t_{12} - t_2 t_{13} - t_2 t_{14} - t_2 t_{23} - t_2 t_{24} + t_2 t_{34} + \dots \\
 &\quad + t_3 t_4 - t_3 t_{12} + t_3 t_{13} + t_3 t_{14} + t_3 t_{23} + t_3 t_{24} - t_3 t_{34} + \dots \\
 &\quad - t_4 t_{12} + t_4 t_{13} + t_4 t_{14} + t_4 t_{23} + t_4 t_{24} - t_4 t_{34} + \dots \\
 &\quad + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 - t_1 t_3 t_4 - t_2 t_3 t_4 - \dots \tag{E.5}
 \end{aligned}$$

Wenn man nun die Terme in derselben Weise umgruppiert wie bei  $1/\zeta_{A_1}(z)$  geschehen, so heben sich auch hier die in Klammern zusammengefaßten Terme fast auf. Trägt nämlich das Gewicht  $t_{\tilde{p}}$  eines Primzyklus  $\tilde{p}$  mit umgekehrtem Vorzeichen bei, so tun dies auch die Gewichte sämtlicher zugehöriger Pseudo-Orbits. Das liegt daran, daß die Zahl der Primzyklen, die in einem zu  $\tilde{p}$  gehörenden Pseudo-Orbit enthalten sind und deren Symbolstrings eine ungerade Anzahl von Symbolen mit dem Zeichen  $\neq$  besitzen, so daß ihre Gewichte umgekehrtes Vorzeichen haben, ungerade ist. Wäre diese Zahl gerade, wäre beim betrachteten Pseudo-Orbit die Gesamtzahl der Symbole, die  $\neq$  enthalten, gerade, und damit auch bei  $\tilde{p}$ , und  $t_{\tilde{p}}$  würde nicht mit umgekehrtem Vorzeichen beitragen.

Im Endeffekt unterscheidet sich die Cycle Expansion von  $1/\zeta_{A_2}(z)$  formal von derjenigen der Funktion  $1/\zeta_{A_1}(z)$  nur dadurch, daß die fundamentalen Beiträge  $t_3$  und  $t_4$  sowie einige Klammern ein anderes Vorzeichen besitzen:

$$\frac{1}{\zeta_{A_2}}(z) = 1 - t_1 - t_2 + t_3 + t_4 - (t_{12} - t_1 t_2) + (t_{13} - t_1 t_3) + (t_{14} - t_1 t_4)$$

$$\begin{aligned}
 & + (t_{23} - t_2 t_3) + (t_{24} - t_2 t_4) - (t_{34} - t_3 t_4) - (t_{112} - t_1 t_{12}) \\
 & + (t_{113} - t_1 t_{13}) + (t_{114} - t_1 t_{14}) - (t_{122} - t_{12} t_2) \\
 & + (t_{123} - t_1 t_{23} - t_{12} t_3 + t_1 t_2 t_3) + (t_{124} - t_1 t_{24} - t_{12} t_4 + t_1 t_2 t_4) \\
 & + (t_{132} - t_{13} t_2) - (t_{133} - t_{13} t_3) - (t_{134} - t_1 t_{34} - t_{13} t_4 + t_1 t_3 t_4) \\
 & + (t_{142} - t_{14} t_2) - (t_{143} - t_{14} t_3) - (t_{144} - t_{14} t_4) + (t_{223} - t_2 t_{23}) \\
 & + (t_{224} - t_2 t_{24}) - (t_{233} - t_{23} t_3) - (t_{234} - t_2 t_{34} - t_{23} t_4 + t_2 t_3 t_4) \\
 & - (t_{243} - t_{24} t_3) - (t_{244} - t_{24} t_4) + (t_{334} - t_3 t_{34}) \\
 & + (t_{344} - t_{34} t_4) - \dots
 \end{aligned} \tag{E.6}$$

In der Darstellung  $B_1$  haben die Gruppenelemente folgende Charaktere:  $\chi_{B_1}(\sigma_y) = \chi_{B_1}(c_2) = -1$ ,  $\chi_{B_1}(\sigma_x) = \chi_{B_1}(e) = 1$ . Hier kehren sich also bei den Beiträgen der Orbits mit  $\sigma_y$ - oder mit  $c_2$ -Symmetrie die Vorzeichen um. Das sind genau die Orbits mit ungerader Länge. Damit sieht  $1/\zeta_{B_1}(z)$  folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\zeta_{B_1}}(z) &= (1 + t_1)(1 + t_2)(1 + t_3)(1 + t_4)(1 - t_{12})(1 - t_{13})(1 - t_{14})(1 - t_{23}) \\
 &\quad (1 - t_{24})(1 - t_{34})(1 + t_{12})(1 + t_{13})(1 + t_{14})(1 + t_{122})(1 + t_{123}) \\
 &\quad (1 + t_{124})(1 + t_{132})(1 + t_{133})(1 + t_{134})(1 + t_{142})(1 + t_{143})(1 + t_{144}) \\
 &\quad (1 + t_{223})(1 + t_{224})(1 + t_{233})(1 + t_{234})(1 + t_{243})(1 + t_{244})(1 + t_{334}) \\
 &\quad (1 + t_{344}) \dots \\
 &= 1 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - t_{12} - t_{13} - t_{14} - t_{23} - t_{24} - t_{34} + t_{112} + t_{113} \\
 &\quad + t_{114} + t_{122} + t_{123} + t_{124} + t_{132} + t_{133} + t_{134} + t_{142} + t_{143} + t_{144} \\
 &\quad + t_{223} + t_{224} + t_{233} + t_{234} + t_{243} + t_{244} + t_{334} + t_{344} - \dots \\
 &\quad + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 - t_1 t_{12} - t_1 t_{13} - t_1 t_{14} - t_1 t_{23} - t_1 t_{24} - t_1 t_{34} + \dots \\
 &\quad + t_2 t_3 + t_2 t_4 - t_2 t_{12} - t_2 t_{13} - t_2 t_{14} - t_2 t_{23} - t_2 t_{24} - t_2 t_{34} + \dots \\
 &\quad + t_3 t_4 - t_3 t_{12} - t_3 t_{13} - t_3 t_{14} - t_3 t_{23} - t_3 t_{24} - t_3 t_{34} + \dots \\
 &\quad - t_4 t_{12} - t_4 t_{13} - t_4 t_{14} - t_4 t_{23} - t_4 t_{24} - t_4 t_{34} + \dots \\
 &\quad + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 - \dots
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

Ähnlich wie bei der Darstellung  $A_2$  kann man auch hier argumentieren, daß die Kombinationen sich aufhebender Terme nicht zerstört werden:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\zeta_{B_1}}(z) &= 1 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - (t_{12} - t_1 t_2) - (t_{13} - t_1 t_3) - (t_{14} - t_1 t_4) \\
 &\quad - (t_{23} - t_2 t_3) - (t_{24} - t_2 t_4) - (t_{34} - t_3 t_4) + (t_{112} - t_1 t_{12}) \\
 &\quad + (t_{113} - t_1 t_{13}) + (t_{114} - t_1 t_{14}) + (t_{122} - t_{12} t_2) \\
 &\quad + (t_{123} - t_1 t_{23} - t_{12} t_3 + t_1 t_2 t_3) + (t_{124} - t_1 t_{24} - t_{12} t_4 + t_1 t_2 t_4) \\
 &\quad + (t_{132} - t_{13} t_2) + (t_{133} - t_{13} t_3) + (t_{134} - t_1 t_{34} - t_{13} t_4 + t_1 t_3 t_4) \\
 &\quad + (t_{142} - t_{14} t_2) + (t_{143} - t_{14} t_3) + (t_{144} - t_{14} t_4) + (t_{223} - t_2 t_{23})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (t_{224} - t_2 t_{24}) + (t_{233} - t_{23} t_3) + (t_{234} - t_2 t_{34} - t_{23} t_4 + t_2 t_3 t_4) \\
& + (t_{243} - t_{24} t_3) + (t_{244} - t_{24} t_4) + (t_{334} - t_3 t_{34}) \\
& + (t_{344} - t_{34} t_4) - \dots
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Abschließend ist noch die Darstellung  $B_2$  zu betrachten. Zur Funktion  $1/\zeta_{B_2}(z)$  trägt jeder Orbit mit der Symmetrie  $\sigma_x$  oder  $c_2$  mit umgekehrtem Vorzeichen bei. Die Symbolstrings dieser Orbits enthalten eine ungerade Anzahl von Symbolen, die das Zeichen = enthalten, bzw. eine insgesamt ungerade Anzahl der Zahlen 1 und 2. Daher hat  $1/\zeta_{B_2}(z)$  folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta_{B_2}}(z) &= (1 + t_1)(1 + t_2)(1 - t_3)(1 - t_4)(1 - t_{12})(1 + t_{13})(1 + t_{14})(1 + t_{23}) \\
&\quad (1 + t_{24})(1 - t_{34})(1 + t_{112})(1 - t_{113})(1 - t_{114})(1 + t_{122})(1 - t_{123}) \\
&\quad (1 - t_{124})(1 - t_{132})(1 + t_{133})(1 + t_{134})(1 - t_{142})(1 + t_{143})(1 + t_{144}) \\
&\quad (1 - t_{223})(1 - t_{224})(1 + t_{233})(1 + t_{234})(1 + t_{243})(1 + t_{244})(1 - t_{334}) \\
&\quad (1 - t_{344}) \dots \\
&= 1 + t_1 + t_2 - t_3 - t_4 - t_{12} + t_{13} + t_{14} + t_{23} + t_{24} - t_{34} + t_{112} - t_{113} \\
&\quad - t_{114} + t_{122} - t_{123} - t_{124} - t_{132} + t_{133} + t_{134} - t_{142} + t_{143} + t_{144} \\
&\quad - t_{223} - t_{224} + t_{233} + t_{234} + t_{243} + t_{244} - t_{334} - t_{344} - \dots \\
&\quad + t_1 t_2 - t_1 t_3 - t_1 t_4 - t_1 t_{12} + t_1 t_{13} + t_1 t_{14} + t_1 t_{23} + t_1 t_{24} - t_1 t_{34} + \dots \\
&\quad - t_2 t_3 - t_2 t_4 - t_2 t_{12} + t_2 t_{13} + t_2 t_{14} + t_2 t_{23} + t_2 t_{24} - t_2 t_{34} + \dots \\
&\quad + t_3 t_4 + t_3 t_{12} - t_3 t_{13} - t_3 t_{14} - t_3 t_{23} - t_3 t_{24} + t_3 t_{34} + \dots \\
&\quad + t_4 t_{12} - t_4 t_{13} - t_4 t_{14} - t_4 t_{23} - t_4 t_{24} + t_4 t_{34} + \dots \\
&\quad - t_1 t_2 t_3 - t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 - \dots
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Auch hier kombinieren die Terme in der gewohnten Weise:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta_{B_2}}(z) &= 1 + t_1 + t_2 - t_3 - t_4 - (t_{12} - t_1 t_2) + (t_{13} - t_1 t_3) + (t_{14} - t_1 t_4) \\
&\quad + (t_{23} - t_2 t_3) + (t_{24} - t_2 t_4) - (t_{34} - t_3 t_4) + (t_{112} - t_1 t_{12}) \\
&\quad - (t_{113} - t_1 t_{13}) - (t_{114} - t_1 t_{14}) + (t_{122} - t_1 t_{12}) \\
&\quad - (t_{123} - t_1 t_{23} - t_{12} t_3 + t_1 t_{23}) - (t_{124} - t_1 t_{24} - t_{12} t_4 + t_1 t_{24}) \\
&\quad - (t_{132} - t_{13} t_2) + (t_{133} - t_{13} t_3) + (t_{134} - t_1 t_{34} - t_{13} t_4 + t_1 t_{34}) \\
&\quad - (t_{142} - t_{14} t_2) + (t_{143} - t_{14} t_3) + (t_{144} - t_{14} t_4) - (t_{223} - t_2 t_{23}) \\
&\quad - (t_{224} - t_2 t_{24}) + (t_{233} - t_{23} t_3) + (t_{234} - t_2 t_{34} - t_{23} t_4 + t_2 t_{34}) \\
&\quad + (t_{243} - t_{24} t_3) + (t_{244} - t_{24} t_4) - (t_{334} - t_3 t_{34}) \\
&\quad - (t_{344} - t_{34} t_4) - \dots
\end{aligned} \tag{E.10}$$

# Literaturverzeichnis

- [Arn78] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York (1978)
- [ArnAv68] V. I. Arnold, A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, The Mathematical Physics Monograph Series, W. A. Benjamin, New York (1968).
- [Art+90a] R. Artuso, E. Aurell, P. Cvitanović, *Recycling of strange sets: I. Cycle Expansions*, Nonlinearity **3**, 325 (1990).
- [Art+90b] R. Artuso, E. Aurell, P. Cvitanović, *Recycling of strange sets: II. Applications*, Nonlinearity **3**, 361 (1990).
- [Aur90] E. Aurell, *Convergence of Dynamical Zeta Functions*, J. Stat. Phys. **58**, 967 (1990).
- [BecSch93] C. Beck, F. Schlögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems*, Cambridge University Press (1993).
- [Cha27] C. L. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, Bd. 1,2, 2. üb. Aufl., de Gruyter, Berlin (1927).
- [Che89] J. Chen, *Group Representation Theory for Physicists*, World Scientific, Singapur (1989).
- [Chi74] M. S. Child, *Molecular Collision Theory*, Academic Press, London and New York (1974).
- [Cvi88] P. Cvitanović, *Invariant measurements of strange sets in terms of cycles*, Phys. Rev. Lett. **61**, 2729 (1988).
- [Cvi91] P. Cvitanović, *Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos*, Physica D **51**, 138 (1991).
- [CviEck93] P. Cvitanović, B. Eckhard, *Symmetry decomposition of chaotic dynamics*, Nonlinearity **6**, 277 (1993).

- [Cvi+94] P. Cvitanović, B. Eckhardt, P. E. Rosenqvist, G. Russberg, P. Scherer, *Pinball Scattering*, 405-433 in: G. Casati and B. Chirikov (Hrsg.), *Quantum Chaos*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [Cvi+01] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri and G. Vatay, *Classical and Quantum Chaos*, [www.nbi.dk/ChaosBook/](http://www.nbi.dk/ChaosBook/), Niels Bohr Institute Copenhagen (2001).
- [Cvi+C] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri and G. Vatay, Kapitel „*Counting*“ in [Cvi+01].
- [Dev89] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Redwood City (1989).
- [EckRue85] J. P. Eckmann, D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Rev. Mod. Phys. **57**, 617 (1985).
- [EllDaw79] J. P. Elliot, P. G. Dawber, *Symmetry in Physics*, Band 1, The MacMillan Press, London, Basingstoke (1979).
- [GraKan85] P. Grassberger, H. Kantz, *Universal scaling of long-time tails in hamiltonian systems?*, Phys. Lett. **113A**, 167 (1985).
- [GucHol86] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations on Vector Fields*, Springer, New York (1986).
- [HarWri58] G. H. Hardy, E. M. Wright: *Zahlentheorie*, R. Oldenbourg, München (1958).
- [Hir+77] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **583**, Springer (1977).
- [Jun97] B. Junglas, *Quantenchaos in einem dispersiven Billard*, Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (1997).
- [Lor97] F. Lorenz, *Funktionentheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin (1997)
- [NusYor89] H. E. Nusse, J. A. Yorke, *A procedure for finding numerical trajectories in chaotic saddles*, Physica D **36**, 137 (1989).
- [Rob95] C. Robinson, *Dynamical Systems*, CRC Press, Boca Raton (1995)
- [Rue78] D. Ruelle, *Statistical Mechanics, Thermodynamic Formalism*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1978).

- 
- [Rue86] D. Ruelle, *Locating Resonances for Axiom A Dynamical Systems*, J. Stat. Phys. **44**, 281 (1986).
  - [Rug92] H. H. Rugh, *The correlation spectrum for hyperbolic analytic maps*, Nonlinearity **5**, 1237 (1992).
  - [RugCvi00] H. H. Rugh, P. Cvitanović, Kapitel „*Why does it work?*“ in [Cvi+01].
  - [Ste95] B. Stegemerten, *Zur Thermodynamik eines attraktiven hyperbolischen Streusystems*, Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (1995).
  - [SteEck97] B. Stegemerten, P. Eckelt, *Hyperbolicity in a double-well potential*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997).
  - [Web00] J. Weber, F. Haake, P. Seba, *Probenius-Perron-Resonances for Maps with a Mixed Phase Space*, hys. Rev. Lett. **85**, 3620 (2000).
  - [Wig88] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos*, Springer, New York (1988).



Hiermit bestätige ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfaßt und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.









