

Geladenes Teilchen im elektromagnetischen
Kick-Feld:
Untersuchung einer vierdimensionalen Abbildung

Diplomarbeit
vorgelegt von
Bodo Junglas

Institut für Theoretische Physik I
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

— 10. März 1995 —

Konventionen

In Vorwegnahme sämtlicher Ausführungen sollen bereits hier einige Konventionen festgelegt werden. Man erinnere sich an diese kurze Aufstellung, sollten sich beim Lesen des Textes Unklarheiten ergeben.

Die allgemeine vierdimensionale Abbildung, die in dieser Arbeit untersucht werden soll, wird durchgängig mit

$$M_{\alpha,F} \quad \text{bzw.} \quad M_{\alpha,\beta,f}$$

bezeichnet, wobei α , F , β und f jeweils die Parameter bezeichnen, durch die die Abbildung eindeutig festgelegt ist.

Für viele Ausführungen wird eine umskalierte Abbildung — entsprechend Gleichung (1.15) — benötigt, die durchgängig mit einer Tilde versehen wird, also:

$$\tilde{M}_{\alpha,F} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{M}_{\alpha,\beta,f}.$$

Jede weitere Abbildung, die in dieser Skalierung zu verstehen ist, wird ebenfalls mit einer Tilde versehen.

Um die in der vierdimensionalen Abbildungen enthaltenen beiden zweidimensionalen Abbildungen gesondert zu kennzeichnen, sollen die folgenden Symbole verwandt werden:

$$M_{\alpha,\beta,f}^{(x)} \quad , \quad M_{\alpha,\beta,f}^{(y)} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{M}_{\alpha,\beta,f}^{(x)} \quad , \quad \tilde{M}_{\alpha,\beta,f}^{(y)}.$$

Hierbei bezeichnet $M_{\alpha,\beta,f}^{(x)}$ den (x,u) -Anteil und $M_{\alpha,\beta,f}^{(y)}$ den (y,v) -Anteil von $M_{\alpha,\beta,f}$.

Bei der Betrachtung zweier wichtiger Spezialfälle entkoppeln die Abbildungen $M_{\alpha,\beta,f}^{(x)}$ und $M_{\alpha,\beta,f}^{(y)}$ voneinander, und es empfiehlt sich, für diese Spezialfälle neue Symbole einzuführen. Sämtliche zweidimensionalen Abbildung, die in der (x,u) -Ebene operieren werden mit einem Balken versehen, also:

$$\bar{M}_{\alpha,f}.$$

Sämtliche zweidimensionalen Abbildungen in der (y,v) -Ebene werden mit einem Dach versehen:

$$\hat{M}_f.$$

Alle Abbildungen, die nur zeitweilig für Rechnungen benötigt werden und sich aus den obigen ableiten lassen, sollen mit einem Brevis gekennzeichnet werden, also:

$$\breve{M}_{\alpha,\beta,f} \quad \text{bzw.} \quad \breve{M}_{\alpha,f}.$$

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
1 Die Abbildung	7
1.1 Herleitung aus dem Modell	7
1.2 Äquivalente Darstellung	10
1.3 n -te Iterierte der Abbildung	11
1.4 Einschränkung der Kick-Potentiale	13
1.5 Der Fall $\beta = 0$	14
1.6 Der Fall $\beta = \frac{\pi}{2}$	15
1.7 Beispiele für Kick-Potentiale	16
2 Topologische Konjugiertheit	19
2.1 Allgemeiner Fall	19
2.2 Der Fall $\beta = 0$	20
2.3 Ein spezielles Kick-Potential	21
3 Symmetrie und Reversibilität	24
3.1 Allgemeine Grundlagen	24
3.2 Anwendung auf Kick-Systeme	32
3.3 Symmetrien des Systems	34
4 Der Grenzfall $\beta = 0$	36
4.1 Aperiodische Kick-Funktionen	37
4.1.1 Periodische Orbits	37
4.1.2 Aufbauprinzip des Netzes	55
4.1.3 Das Stochastische Netz	66
4.1.4 Differenzierbare Kick-Funktion	76
4.2 Periodische Kick-Funktionen	79
4.2.1 Kristallsymmetrien	79
4.2.2 Das Stochastische Netz	86
4.2.3 Stückweise lineare Kick-Funktion	92
4.2.4 Approximatives Hamilton-System erster Ordnung	93
4.2.5 Approximatives Hamilton-System höherer Ordnung	103

5	Der Grenzfall $\beta = \frac{\pi}{2}$	107
5.1	Aperiodische Kick-Funktion	107
5.2	Periodische Kick-Funktion	126
6	Die Fälle $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$	133
6.1	Aperiodische Kick-Funktion	133
6.2	Periodische Kick-Funktion	144
	Schluß	155
A	Mathematischer Anhang	157
A.1	Verallgemeinerte Spiegelungen im n -dimensionalen Raum	157
A.2	Unstetige Kick-Funktionen	158
A.3	Additionstheoreme im regelmäßigen q -Eck	158
A.4	Vollständiger Beweis von Lemma 4.2	160
A.5	Markovs Formeln	167
A.6	Symmetriereduktion	168
B	Bilderbuch	171
	Literaturverzeichnis	181

Einleitung

*Ladies and gentleman, attention, please!
Come in close where everyone can see!
I got a tale to tell, it isn't gonna cost a dime!
(And if you believe that,
we're gonna get along just fine.)*

STEVE EARLE "SNAKE OIL"

In dieser Arbeit soll die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem zeitlich konstanten, homogenen Magnetfeld unter der Einwirkung eines zeitlich periodischen, ortsabhängigen elektrischen Feldes analysiert werden. Dabei soll die Wirkung des elektrischen Feldes auf das Teilchen als so kurz erachtet werden, daß sich die Zeitabhängigkeit gut durch eine Folge zeitlich äquidistanter δ -Impulse approximieren läßt. Ein so approximiertes Feld wird auch als *Kick-Feld* bezeichnet, die zeitliche Frequenz des elektrischen Feldes soll daher *Kick-Frequenz* genannt werden. Ferner sei vorausgesetzt, daß das elektrische Feld transversal zum Magnetfeld ist, das heißt, die beiden Felder sollen einen konstanten Winkel zueinander einschließen. Der Winkel zwischen dem elektrischen Feld und der zum Magnetfeld orthogonalen Richtung soll mit β bezeichnet werden.

Um ein aus dynamischer Sicht leichter handhabbares Modell zu erhalten, sollen sämtliche dissipativen Eigenschaften des physikalischen Systems, also zum Beispiel die Zyklotronstrahlung, vernachlässigt werden. Auf diese Weise erhält man ein Hamilton-System, bestehend aus einem harmonischen Oszillator und einer freien Teilchenpropagation, die über einen zeitlich periodischen Störterm miteinander gekoppelt sind. Die Bewegungsgleichungen dieses Hamilton-Systems können dann durch Iteration einer *vierdimensionalen Abbildung* gelöst werden. Da die Zeitabhängigkeit des elektrischen Feldes durch eine Folge von δ -Impulsen approximiert wird, ist es möglich, für diese Abbildung einen analytischen Ausdruck anzugeben. Diese Abbildung ist abhängig von dem oben genannten Winkel β , dem Verhältnis der Zyklotronfrequenz des Magnetfeldes zur Kick-Frequenz, im folgenden auch mit α bezeichnet, und der Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes. Ein Großteil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit der Analyse der Dynamik dieser Abbildung.

Das hier vorgestellte System und die daraus resultierende Abbildung ist ein wichtiges Modell der Plasmaphysik. Es wurde erstmalig eingeführt von Zaslav-

sky und Mitarbeitern [1, 2], wobei die Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes sinusförmig (das heißt antisymmetrisch und periodisch) gewählt wurde. Eine derartige Ortsabhängigkeit entspricht einer stehenden Welle, wie sie in einem Hohlraumresonator erzeugt werden kann. Neben dem Phasenportrait des Systems wurde vornehmlich das diffusive Energiewachstum des Systems untersucht. Von besonderem Interesse ist, daß sich das System in zwei Grenzfällen auf zwei wohlbekannte, viel diskutierte zweidimensionale Abbildungen reduzieren läßt.

Für den Grenzfall $\beta = 0$, das heißt in dem Fall, wo das elektrische Feld senkrecht zum Magnetfeld ist, läßt sich die vierdimensionale Abbildung auf die ebenfalls von Zaslavsky und Mitarbeitern eingeführte *Netzabbildung* (englisch: web map) reduzieren [3, 4]. Wie der Name bereits ausdrückt, erzeugt die Netzabbildung bei bestimmten Parameterwerten α im Phasenraum eine netzartige Struktur, die allgemein als *Stochastisches Netz* bezeichnet wird. Die Netzabbildung zählt daher zu einer der interessantesten zweidimensionalen konservativen Abbildungen. Auch bei der Netzabbildung wurden viele Untersuchungen bezüglich des diffusiven Energiewachstums durchgeführt.

Für den Grenzfall $\beta = \pi/2$, das heißt in dem Fall, daß elektrisches und magnetisches Feld parallel zueinander sind, kann die vierdimensionale Abbildung auf die von Taylor und Chirikov eingeführte *Standardabbildung* [5, 6] reduziert werden. Die Standardabbildung spielt eine herausragende Rolle in der Theorie der Twist-Abbildungen und ist das einfachste System, mit dem die Ergebnisse der KAM-Theorie anschaulich demonstriert werden können. Die Standardabbildung zeigt damit auf einfache Weise eine universelle Struktur, wie sie auch in zahlreichen anderen Systemen zu finden ist. Auch diese Abbildung zeigt diffusives Energiewachstum, das Gegenstand zahlreicher Untersuchungen ist.

Sowohl bei der Netzabbildung als auch bei der Standardabbildung ist eine sinusförmige Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes vorausgesetzt. In der vorliegenden Diplomarbeit soll nun vornehmlich eine alternative Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes, die weiterhin antisymmetrisch, jedoch nicht mehr periodisch ist, und deren Auswirkung auf die Dynamik untersucht werden. Die meisten Untersuchungen werden anhand einer signumförmigen Ortsabhängigkeit mit stetigem Übergang durchgeführt. Eine derartige Ortsabhängigkeit kann zum Beispiel durch eine homogene Raumladungsschicht konstanter Breite, die zeitlich oszilliert, realisiert werden.

Es soll eine detaillierte Analyse des Phasenportraits dieses Systems in Abhängigkeit von den Parametern α und β sowie der Breite des Übergangsgebietes (der Schichtbreite) vorgenommen werden. Dabei werden die oben genannten Grenzfälle $\beta = 0$ und $\beta = \pi/2$ gesondert berücksichtigt. Es wird sich herausstellen, daß die Dynamik im Grenzfall $\beta = 0$ ebenfalls ein Stochastisches Netz im Phasenraum erzeugt, obgleich die Ortsabhängigkeit nicht mehr periodisch ist. Der Aufbaumechanismus dieses Stochastischen Netzes ist jedoch grundverschieden von dem der Netzabbildung. Die genauen Unterschiede der Dynamik zu dem Fall einer sinusförmigen Ortsabhängigkeit sollen verdeutlicht werden. Betrachtungen bezüglich des diffusiven Energiewachstums sollen, trotz ihrer nicht unbedeutenden physikalischen Bedeutung, in dieser Arbeit jedoch nicht durchgeführt werden.

Die Arbeit ist in sechs Kapitel gegliedert, von denen sich die ersten drei mit rechentechnischen und mathematischen Vorbereitungen befassen und die letzten drei mit der Dynamik des Systems. Im ersten Kapitel wird erklärt, wie sich die Abbildung konkret aus dem physikalischen System gewinnen läßt. Im zweiten Kapitel werden äquivalente Darstellungen der Abbildung diskutiert und die Verbindung zu einem von Krug und Schwägerl diskutierten System [7] hergestellt. Das dritte Kapitel ist eine allgemeine Einführung in die Theorie der Symmetrien und Umkehrenden Symmetrien diskreter dynamischer Systeme. Der Grenzfall $\beta = 0$ (Magnetfeld und elektrisches Feld senkrecht zueinander) wird im vierten Kapitel besprochen, wobei ein neuer Aufbaumechanismus für Stochastische Netze erläutert und mit dem von der Netzabbildung her bekannten verglichen wird. Es wird eine vollständige, mathematisch exakte Analyse des regulären Anteils der Dynamik gegeben. Kapitel fünf behandelt den anderen Grenzfall $\beta = \pi/2$ (Magnetfeld und elektrisches Feld parallel zueinander), wobei unter anderem ein kurzer Einblick in die Dynamik der Standardabbildung gegeben wird. Das sechste Kapitel beschäftigt sich schließlich mit der vierdimensionalen Dynamik, wobei insbesondere untersucht werden soll, wie sich diese Dynamik in der Nähe der beiden bekannten Grenzfälle verhält.

Kapitel 1

Die Abbildung

1.1 Herleitung aus dem Modell

Wie bereits in der Einleitung erläutert, soll die Bewegung eines geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld unter dem Einfluß eines zeitperiodischen elektrischen Feldes, das nur jeweils für kleine Zeitintervalle von null verschieden ist, betrachtet werden. Sofern diese Zeitintervalle gegenüber der zeitlichen Periode vernachlässigbar klein sind, übt das elektrische Feld kurze Stöße auf das Teilchen aus. Der Einfachheit halber soll angenommen werden, daß die Wirkung des elektrischen Feldes auf das Teilchen durch eine Folge von δ -Impulsen, die durch einen ortsabhängigen Vorfaktor gewichtet sind, beschrieben werden kann.

Unter Vernachlässigung aller dissipativen Effekte, lassen sich dann die Bewegungsgleichungen des Systems aus einer Hamilton-Funktion der folgenden Gestalt herleiten:

$$H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, t) = H_0(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) + V(x_1, x_2, x_3)T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (1.1)$$

Hierbei soll $H_0(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ die ungestörte Bewegung des Teilchens im homogenen Magnetfeld beschreiben und T die zeitliche Periode des elektrischen Feldes bedeuten. $V(x_1, x_2, x_3)$ ist der erwähnte ortsabhängige Gewichtungsfaktor der δ -Impulse; da er die Dimension einer Energie hat, soll er im folgenden als *Kick-Potential* bezeichnet werden. Der Faktor T vor der Summe ist hierbei notwendig, um diese dimensionslos zu machen; es gilt ja die Identität $\delta(t/T - n) = T\delta(t - nT)$.

Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß das magnetische Feld in x_3 -Richtung weist. Dann ist H_0 von der einfachen Gestalt

$$H_0(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2(x_1^2 + x_2^2)}{2}, \quad (1.2)$$

wobei m die Masse des Teilchen und ω_c die Zyklotronfrequenz bedeuten. Offenbar kann H_0 auch als Summe dreier Hamilton-Funktionen aufgefaßt werden, von denen zwei eine harmonische Oszillation in x_1 - bzw. x_2 -Richtung beschreiben und die dritte die Bewegung eines freien Teilchens in x_3 -Richtung.

Man erkennt ferner, daß die ungestörte Bewegung in x_2 -Richtung bis auf eine mögliche Phasenverschiebung vollkommen äquivalent zur Bewegung in x_1 -Richtung ist. Da es wünschenswert ist, die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems weitestgehend zu reduzieren, und die Bewegung in x_2 -Richtung nichts entscheidend Neues darstellt, soll von nun an davon ausgegangen werden, daß V nicht von x_2 abhängt, also $V = V(x_1, x_3)$ gilt. Hierdurch wird die Bewegung in x_2 -Richtung von der in x_1 - und x_3 -Richtung entkoppelt und muß im folgenden nicht mehr berücksichtigt werden. Man verbleibt also mit einem Hamilton-System mit $2\frac{1}{2}$ Freiheitsgraden der folgenden Gestalt:

$$H(x_1, x_3, p_1, p_3, t) = H_0(x_1, x_3, p_1, p_3) + V(x_1, x_3)T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.3a)$$

mit

$$H_0(x_1, x_3, p_1, p_3) = \frac{p_1^2 + p_3^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2 x_1^2}{2}. \quad (1.3b)$$

Es ist allgemein üblich, ein System mit kontinuierlichem Zeitverlauf, dessen Zeitabhängigkeit periodisch mit der Periode T ist, dadurch in ein System mit diskretem Zeitverlauf zu überführen, daß man einen Poincaré-Schnitt einführt, bei dem die Systemzustände nur zu den Zeitpunkten nT für $n \in \mathbb{Z}$ festgehalten werden. Bei einem *Kick-System* wie (1.3a) hat man den Vorteil, daß die Bewegung zwischen den Kicks allein durch die Hamilton-Funktion H_0 beschrieben wird, deren Fluß in diesem Fall integrabel ist. Hierdurch ist es möglich, die Poincaré-Abbildung analytisch zu bestimmen. Man muß sich jedoch darauf verständigen, die Systemzustände entweder vor oder nach den Kicks zu notieren. Es wird sich zeigen, daß beide Möglichkeiten auf zwei zueinander topologisch konjugierte Abbildungen führen.

Die zu dem oben eingeführten Poincaré-Schnitt gehörige Poincaré-Abbildung, das heißt diejenige Abbildung, die einem Systemzustand (x_1, p_1, x_3, p_3) den Zustand nach Verstreichen der Zeit T zuordnet, werde im folgenden mit M bezeichnet. M setzt sich zusammen aus dem Fluß Φ_T von H_0 und einer Abbildung Ψ_K , die den Einfluß des Kicks auf das System beschreibt und im folgenden als *Kick-Abbildung* bezeichnet werden soll.

Notiert man den Zustand des Systems *vor* dem Kick, so erhält man als Poincaré-Abbildung offensichtlich

$$M = \Phi_T \circ \Psi_K. \quad (1.4)$$

Betrachtet man hingegen umgekehrt den Systemzustand *nach* dem Kick, so erhält man entsprechend

$$\check{M} = \Psi_K \circ \Phi_T. \quad (1.5)$$

Da der Fluß von H_0 ein Diffeomorphismus ist, erkennt man leicht, daß M und $\check{M}$ zueinander topologisch konjugiert sind:

$$M = \Phi_T \circ \check{M} \circ \Phi_T^{-1}. \quad (1.6)$$

Im folgenden seien alle Betrachtungen auf M beschränkt. Eine ausführliche Auflistung sämtlicher zu M konjugierten Poincaré–Abbildungen findet sich im folgenden Abschnitt und im Kapitel 2.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Kick–Abbildung Ψ_K keinen Einfluß auf den Ort des Teilchens haben kann, sondern allein auf die Impulse p_1 und p_3 wirkt, da V allein ortsabhängig ist. Integriert man die Bewegungsgleichungen des Systems um einen der Zeitpunkte nT herum, so erhält man den folgenden Ausdruck:

$$\Psi_K : \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_3 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 + T \hat{F}_1(x_1, x_3) \\ x_3 \\ p_3 + T \hat{F}_3(x_1, x_3) \end{pmatrix} \quad (1.7a)$$

mit

$$\hat{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1, x_3) \quad , \quad i = 1, 3. \quad (1.7b)$$

Die $\hat{F}_i$ haben die Dimension einer Kraft und als negative Ableitungen des Kick–Potentials würde es Sinn machen, sie als “Kick–Kräfte” zu bezeichnen. Diese Bezeichnung ist jedoch sprachlich ungeschickt und da viele der nun folgenden Ausführungen eher mathematischer Art sind, sollen die $\hat{F}_i$ von nun an *Kick–Funktionen* genannt werden.

Zur Bestimmung der Poincaré–Abbildung fehlt noch ein Ausdruck für den ungestörten Fluß Φ_T . H_0 ist die Summe zweier voneinander unabhängiger Hamilton–Funktionen (harmonische Oszillation in x_1 –Richtung und freie Bewegung in x_3 –Richtung). Man kann zeigen, daß sich der Fluß Φ_T als Komposition der Flüsse dieser beiden entkoppelten Hamilton–Systeme schreiben läßt, also:

$$\Phi_T = \Phi_T^{(1)} \circ \Phi_T^{(2)} = \Phi_T^{(2)} \circ \Phi_T^{(1)}. \quad (1.8)$$

$\Phi_T^{(1)}$ und $\Phi_T^{(2)}$ sind aber auf einfache Weise zu bestimmen. Für die harmonische Oszillation des Teilchens in x_1 –Richtung mit der Frequenz ω_c in der Zeitspanne T gilt:

$$\Phi_T^{(1)} : \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_3 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \omega_c T & \frac{\sin \omega_c T}{m \omega_c} & 0 & 0 \\ -m \omega_c \sin \omega_c T & \cos \omega_c T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_3 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

und für die freie Bewegung in x_3 –Richtung in der Zeitspanne T ergibt sich:

$$\Phi_T^{(2)} : \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_3 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{T}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_3 \\ p_3 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Insgesamt erhält man also die folgende Poincaré–Abbildung:

$$M : \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_3 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \omega_c T & \frac{\sin \omega_c T}{m \omega_c} & 0 & 0 \\ -m \omega_c \sin \omega_c T & \cos \omega_c T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{T}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 + T \hat{F}_1(x_1, x_3) \\ x_3 \\ p_3 + T \hat{F}_3(x_1, x_3) \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

In dieser Darstellung hängt die Abbildung M noch von der Frequenz ω_c , der Periodendauer T , der Masse m und von den Kick–Funktionen $\hat{F}_i$ ab. Um die Anzahl der Parameter zu reduzieren, empfiehlt es sich, die Koordinaten wie folgt zu skalieren:

$$x = x_1 \quad , \quad u = \frac{T p_1}{m} \quad , \quad y = x_3 \quad , \quad v = \frac{T p_3}{m}, \quad (1.12a)$$

wobei zur weiteren Vereinfachung die Kick–Funktionen $\hat{F}_i$ ebenfalls neu skaliert werden:

$$F_x(x, y) = \frac{T^2 \hat{F}_1(x, y)}{m} \quad , \quad F_y(x, y) = \frac{T^2 \hat{F}_3(x, y)}{m}. \quad (1.12b)$$

Berücksichtigt man, daß x_1, x_3 die Dimension einer Länge, p_1, p_3 die Dimension eines Impulses und $\hat{F}_1, \hat{F}_3$ die Dimension einer Kraft haben, so erkennt man, daß alle neu definierten Größen die Dimension einer Länge haben. Im folgenden werden F_x und F_y der Einfachheit halber häufig zu einer zweidimensionalen Kick–Funktion F zusammengefaßt.

Mit Hilfe dieser Umskalierung und der Abkürzung

$$\alpha = \omega_c T \quad (1.13)$$

vereinfacht sich die Poincaré–Abbildung M schließlich zu:

$$M_{\alpha, F} : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{\alpha} & 0 & 0 \\ -\alpha \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u + F_x(x, y) \\ y \\ v + F_y(x, y) \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Diese Abbildung ist nur noch von dem Winkel α und der zweidimensionalen Kick–Funktion F abhängig. Im folgenden soll die Abbildung immer mit diesen beiden Größen indiziert werden.

1.2 Äquivalente Darstellung

Es ist möglich die Abbildung $M_{\alpha, F}$ durch Umskalierung der Koordinaten weiter zu vereinfachen. Der Einfachheit halber werden von nun an keine neuen Symbole mehr eingeführt:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} x &\rightarrow x \quad , \quad \frac{u}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow u \quad , \quad y \rightarrow y \quad , \quad v \rightarrow v \\ \frac{F_x(x/\sqrt{\alpha}, y)}{\sqrt{\alpha}} &\rightarrow F_x(x, y) \quad , \quad F_y(x/\sqrt{\alpha}, y) \rightarrow F_y(x, y). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Hiermit läßt sich $M_{\alpha,F}$ vereinfachen zu

$$\tilde{M}_{\alpha,F} : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u + F_x(x, y) \\ y \\ v + F_y(x, y) \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Diese Darstellung hat den Vorteil, daß sich die Formeln um einen Vorfaktor α bzw. $1/\alpha$ vereinfachen, gerade bei sehr aufwendigen Überlegungen soll hiervon später Gebrauch gemacht werden. Zudem ist Φ_T in dieser Skalierung eine reine Drehung in der (x, u) -Ebene, und es zeigt sich, daß hierdurch das Phasenportrait in dieser Ebene eine symmetrischere Gestalt annimmt. Jedoch hat diese Skalierung den Nachteil, daß sie im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ nicht mehr topologisch konjugiert zur ursprünglichen Abbildung (1.14) ist (zum Beispiel divergiert das erste Argument in der Kick-Funktion F).

Der Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ entspricht im physikalischen System gerade dem Abschalten des magnetischen Feldes. $M_{\alpha=0,F}$ beschreibt dann die zweidimensionale Bewegung eines freien Teilchens unter dem Einfluß des Kick-Potentials, dieser Grenzfall kann von $\tilde{M}_{\alpha,F}$ nicht mehr erfaßt werden. Aus diesem Grunde sollen alle Überlegungen über die allgemeine vierdimensionale Abbildung anhand von $M_{\alpha,F}$ durchgeführt werden. Wenn im folgenden nichts anderes gesagt wird, ist immer die Abbildung von der Gestalt (1.14) gemeint.

Dagegen sind die Ausführungen in Kapitel 4 nur für $\alpha > 0$ von Interesse, und gerade dort wird sich die Skalierung (1.15) als sinnvoll erweisen.

1.3 n -te Iterierte der Abbildung

Für spätere Betrachtungen wird es sich als wichtig erweisen, die n -te Iterierte der Abbildung $M_{\alpha,F}$ in der folgenden Gestalt zu betrachten:

$$M_{\alpha,F}^n : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos n\alpha + \frac{u}{\alpha} \sin n\alpha \\ -\alpha x \sin n\alpha + u \cos n\alpha \\ y + nv \\ v \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} F_x(x_k, y_k) \sin(n-k)\alpha \\ F_x(x_k, y_k) \cos(n-k)\alpha \\ (n-k) F_y(x_k, y_k) \\ F_y(x_k, y_k) \end{pmatrix} \quad (1.17a)$$

mit

$$x_k = M_{\alpha,F}^k(x, u, y, v) \cdot \vec{e}_x, \quad y_k = M_{\alpha,F}^k(x, u, y, v) \cdot \vec{e}_y. \quad (1.17b)$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y$ sind dabei die vierdimensionalen Einheitsvektoren in x - bzw. y -Richtung. Leider ist dies keine in sich geschlossene Form. Zur Berechnung der n -ten Iterierten benötigt man sämtliche (x, y) -Paare der $1, \dots, (n-1)$ -ten Iterierten. Es wird sich jedoch zeigen, daß mit Hilfe von (1.17a) und speziell gewähltem F sich einige exakte Schlußfolgerungen über die Periodizität bestimmter Bereiche im Phasenraum treffen lassen (siehe hierzu weiter unten). (1.17a) läßt sich mittels vollständiger Induktion nach n wie folgt beweisen:

IA: $n = 1$. Es ist klar, daß (1.17a) für $n = 1$ in die Abbildung $M_{\alpha,F}$ gemäß (1.14) übergeht.

IV: (1.17a) sei für $n \geq 1$ bewiesen.

IS: $n \rightarrow n + 1$. Gegeben sein ein beliebiger Anfangspunkt $(x, u, y, v) \in \mathbb{R}^4$. Die k -ten Iterierten dieses Punktes sollen wie folgt abgekürzt werden:

$$(x_k, u_k, y_k, v_k) = M_{\alpha,F}^k(x, u, y, v).$$

Nun gilt $M_{\alpha,F}^{n+1} = M_{\alpha,F} \circ M_{\alpha,F}^n$. Schreibt man (1.14) entsprechend um, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ u_{n+1} \\ y_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \cos \alpha + (u_n + F_x(x_n, y_n)) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \\ -\alpha x_n \sin \alpha + (u_n + F_x(x_n, y_n)) \cos \alpha \\ y_n + v_n + F_y(x_n, y_n) \\ v_n + F_y(x_n, y_n) \end{pmatrix}.$$

Nach IV sind die x_n, u_n, y_n, v_n bereits durch (1.17a) gegeben. Eingesetzt folgt dann:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(x \cos n\alpha + \frac{u}{\alpha} \sin n\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha} F_x(x_k, y_k) \sin(n-k)\alpha \right) \cos \alpha \\ &+ \left(-\alpha x \sin n\alpha + u \cos n\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} F_x(x_k, y_k) \cos(n-k)\alpha + F_x(x_n, y_n) \right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \\ &= x \cos(n+1)\alpha + \frac{u}{\alpha} \sin(n+1)\alpha + \sum_{k=0}^n \frac{1}{\alpha} F_x(x_k, y_k) \sin(n+1-k)\alpha \\ u_{n+1} &= -\alpha \left(x \cos n\alpha + \frac{u}{\alpha} \sin n\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha} F_x(x_k, y_k) \sin(n-k)\alpha \right) \sin \alpha \\ &+ \left(-\alpha x \sin n\alpha + u \cos n\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} F_x(x_k, y_k) \cos(n-k)\alpha + F_x(x_n, y_n) \right) \cos \alpha \\ &= -\alpha x \sin(n+1)\alpha + u \cos(n+1)\alpha + \sum_{k=0}^n F_x(x_k, y_k) \cos(n+1-k)\alpha \\ y_{n+1} &= y + nv + \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F_y(x_k, y_k) + v + \sum_{k=0}^{n-1} F_y(x_k, y_k) + F_y(x_n, y_n) \\ &= y + (n+1)v + \sum_{k=0}^n (n+1-k) F_y(x_k, y_k) \\ v_{n+1} &= v + \sum_{k=0}^{n-1} F_y(x_k, y_k) + F_y(x_n, y_n) \\ &= v + \sum_{k=0}^n F_y(x_k, y_k). \end{aligned}$$

Die Endformeln sind jeweils gleich denen, die sich für $n+1$ aus (1.17a) ergeben würden. Da (x, u, y, v) beliebig gewählt wurde, ist hiermit (1.17a) bewiesen.

□

1.4 Einschränkung der Kick-Potentiale

Alle bisherigen Überlegungen gelten für beliebige Kick-Potentiale V und damit auch für beliebige Kick-Funktionen F . Die Untersuchungen seien jedoch auf Kick-Potentiale beschränkt, deren Äquipotentiallinien parallel zu einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt sind. Anschaulich gesprochen sollen nur diejenigen Kick-Potentiale betrachtet werden, bei denen das Teilchen in Richtung einer Gerade durch den Ursprung gekickt wird. Das heißt, das elektrische Feld soll eine einheitliche Richtung haben und mit dem homogenen Magnetfeld einen konstanten Winkel einschließen. Man macht sich schnell klar, daß eine derartige Klasse von Kick-Potentialen die allgemeine Gestalt

$$V(x, y) = v(x \cos \beta + y \sin \beta) \quad (1.18a)$$

hat, wobei β den Winkel der Äquipotentiallinien mit der y -Achse bezeichnet. Weiterhin soll die Klasse der betrachteten Kick-Potentiale auf gerade Funktionen v beschränkt sein:

$$v(x) = v(-x). \quad (1.18b)$$

Durch Differenzieren von (1.18a) erhält man in der Skalierung (1.12) sämtliche in Frage kommenden Kick-Funktionen:

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= \cos \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \\ F_y(x, y) &= \sin \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \end{aligned} \quad (1.19a)$$

mit

$$f(x) = -\frac{T^2}{m} v'(x). \quad (1.19b)$$

Es sei angemerkt, daß f eine ungerade Funktion ist, sofern v , wie vorausgesetzt, gerade ist. Im folgenden sei die Kick-Funktion F immer von der Gestalt (1.19); sollte ein Ergebnis auch für allgemeines F gültig sein, wird gesondert darauf hingewiesen (siehe Kapitel 2).

Durch die obige Spezialisierung der Kick-Funktionen ist die Poincaré-Abbildung $M_{\alpha, F}$ von einem weiteren Winkel β abhängig, dafür aber nur noch von einer eindimensionalen Kick-Funktion f . Im folgenden soll daher für die Poincaré-Abbildung $M_{\alpha, \beta, f}$ geschrieben werden:

$$M_{\alpha, \beta, f} : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{\alpha} & 0 & 0 \\ -\alpha \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u + \cos \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \\ y \\ v + \sin \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Anhand der Matrixdarstellung erkennt man deutlich, daß sich $M_{\alpha, \beta, f}$ aus zwei zweidimensionalen Abbildungen zusammensetzt, die über die Kick-Funktion f

miteinander gekoppelt sind. Um diese beiden im wesentlichen getrennt voneinander arbeitenden Dynamiken hervorzuheben, soll die Abbildung auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$M_{\alpha,\beta,f}^{(x)} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{\alpha} \\ -\alpha \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u + \cos \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \end{pmatrix} \quad (1.21a)$$

und

$$M_{\alpha,\beta,f}^{(y)} : \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v + \sin \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \end{pmatrix}. \quad (1.21b)$$

Bei dieser Schreibweise ist jedoch zu beachten, daß $M_{\alpha,\beta,f}^{(x)}$ und $M_{\alpha,\beta,f}^{(y)}$ im allgemeinen miteinander gekoppelt sind ($M_{\alpha,\beta,f}^{(x)}$ ist von y und $M_{\alpha,\beta,f}^{(y)}$ von x abhängig) und somit formal keine zweidimensionalen Abbildungen sind. $M_{\alpha,\beta,f}^{(x)}$ soll im folgenden auch als (x, u) -Abbildung bzw. -Dynamik und $M_{\alpha,\beta,f}^{(y)}$ als (y, v) -Abbildung bzw. -Dynamik bezeichnet werden.

Für die wichtigen Spezialfälle $\beta = 0$ und $\beta = \pi/2$ sind $M_{\alpha,\beta,f}^{(x)}$ und $M_{\alpha,\beta,f}^{(y)}$ voneinander entkoppelte zweidimensionale Abbildungen und können getrennt untersucht werden. Anschaulich ist klar, daß das Teilchen bei $\beta = 0$ senkrecht zum Magnetfeld und für $\beta = \pi/2$ parallel dazu gekickt wird. Für $\beta = 0$ reduziert sich $M_{\alpha,\beta,f}^{(y)}$ auf eine gleichförmige Translationsbewegung in y -Richtung, und umgekehrt vereinfacht sich $M_{\alpha,\beta,f}^{(x)}$ für $\beta = \pi/2$ zu einer harmonischen Oszillation in x -Richtung. Beide Spezialfälle sollen in den nun nachfolgenden Abschnitten sowie in den Kapiteln 4 und 5 näher untersucht werden.

1.5 Der Fall $\beta = 0$

Wie im vorherigen Abschnitt angekündigt, entkoppeln im Fall $\beta = 0$ die (x, u) -Abbildung $M_{\alpha,\beta,f}^{(x)}$ und die (y, v) -Abbildung $M_{\alpha,\beta,f}^{(y)}$. Setzt man in (1.21) $\beta = 0$ ein, so ergibt sich:

$$M_{\alpha,\beta=0,f}^{(x)} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{\alpha} \\ -\alpha \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u + f(x) \end{pmatrix} \quad (1.22a)$$

und

$$M_{\alpha,\beta=0,f}^{(y)} : \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.22b)$$

Wie man sieht, beschreibt $M_{\alpha,\beta=0,f}^{(y)}$ eine einfache Translationsbewegung in y -Richtung. Dieser Teil der Dynamik muß daher nicht weiter betrachtet werden, stattdessen sei das Augenmerk allein auf $M_{\alpha,\beta=0,f}^{(x)}$ gerichtet. Im folgenden soll der Index $\beta = 0$ weggelassen werden.

Die Abbildung (1.22a) wurde von Zaslavsky und Mitarbeitern für die spezielle Kick-Funktion $f(x) = -K \sin(2\pi x)$ ausführlich untersucht [3, 4, 8]. Es zeigt sich,

daß sich für dieses f und spezielle Parameterwerte α im Phasenraum eine netzartige Struktur ausbildet, die als *Stochastisches Netz* bezeichnet wird. (1.22a) in der Skalierung (1.15) wird daher auch als *Netzabbildung* bezeichnet. Viele weitere Publikationen (zum Beispiel [9, 10, 11]) beschäftigen sich ebenfalls mit dieser oder einer leicht abgewandelten Abbildung. Jedoch wird in fast allen Arbeiten vorausgesetzt, daß f zumindest eine periodische Funktion ist. In der vorliegenden Untersuchung soll unter anderem gezeigt werden, daß die Bedingung einer periodischen Kick-Funktion für die Ausbildung eines Stochastischen Netzes nicht notwendig ist.

Es sei erwähnt, daß sich (1.22a) analog zu den Ausführungen in Abschnitt 1.1 als Poincaré-Abbildung aus dem folgenden Hamilton-System mit $1\frac{1}{2}$ Freiheitsgrade ergibt:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 x^2 + v(x)T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (1.23)$$

Setzt man in der Darstellung (1.17a) für die n -te Iterierte der Abbildung die speziellen Kick-Funktionen (1.19) und anschließend $\beta = 0$ ein, so erhält man nach kurzer Rechnung einen ganz entsprechenden Ausdruck für die n -te Iterierte von $M_{\alpha,f}^{(x)}$:

$$M_{\alpha,f}^{(x)n} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos n\alpha + \frac{u}{\alpha} \sin n\alpha \\ -\alpha x \sin n\alpha + u \cos n\alpha \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} f(x_k) \sin(n-k)\alpha \\ f(x_k) \cos(n-k)\alpha \end{pmatrix} \quad (1.24a)$$

mit

$$x_n = M_{\alpha,f}^{(x)n}(x, u) \cdot \vec{e}_x. \quad (1.24b)$$

Hierbei ist $\vec{e}_x$ jedoch nicht vierdimensional, sondern der zweidimensionale Einheitsvektor in x -Richtung. Diese Formel wird sich für die spätere Beweisführung als sehr hilfreich erweisen. Eine genaue Untersuchung der Dynamik von (1.22a) findet sich in Kapitel 4.

1.6 Der Fall $\beta = \frac{\pi}{2}$

Ganz entsprechend dem vorherigen Abschnitt ergibt sich für den Grenzfall $\beta = \pi/2$ aus (1.21):

$$M_{\alpha,\beta=\pi/2,f}^{(x)} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{\alpha} \\ -\alpha \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (1.25a)$$

und

$$M_{\alpha,\beta=\pi/2,f}^{(y)} : \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v + f(y) \end{pmatrix}. \quad (1.25b)$$

$M_{\alpha,\beta=\pi/2,f}^{(x)}$ beschreibt eine ungestörte Oszillation in x -Richtung und ist auf eine einfache Drehstreckung im Phasenraum reduziert. Dieser Teil der Dynamik kann für diesen Spezialfall also vernachlässigt werden. Ferner ist $M_{\alpha,\beta=\pi/2,f}^{(y)}$ unabhängig

von dem Winkel α , daher sollen im folgenden die Indizes α und $\beta = \pi/2$ fortgelassen werden.

Die Abbildung $M_f^{(y)}$ geht für die Kick-Funktion $f(x) = -K \sin(2\pi x)$ in die von Taylor und Chirikov eingeführte *Standardabbildung* [5] über, die in zahlreichen Publikationen zitiert und diskutiert wird (zum Beispiel [6]). Die Standardabbildung erhält ihre besondere Bedeutung dadurch, daß sie auf einfache Weise die Ergebnisse der KAM-Theorie anschaulich demonstriert.

Wie im vorherigen Abschnitt läßt sich auch (1.25b) formal genauso wie in Abschnitt 1.1 aus einem Hamilton-System der folgenden Gestalt herleiten:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + v(x)T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (1.26)$$

Entsprechend erhält man aus der allgemeinen Darstellung (1.17a) für die n -te Iterierte der Abbildung:

$$M_f^{(y)n} : \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y + nv \\ v \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} (n-k)f(y_k) \\ f(y_k) \end{pmatrix} \quad (1.27a)$$

mit

$$y_k = M_f^{(y)k}(y, v) \cdot \vec{e}_y. \quad (1.27b)$$

Dabei ist $\vec{e}_y$ wieder als zweidimensionaler Einheitsvektor in y -Richtung zu verstehen. Auch dieser Ausdruck wird sich später als wichtig erweisen. Eine ausführlichere Untersuchung der Dynamik von (1.25b) findet sich in Kapitel 5.

1.7 Beispiele für Kick-Potentiale

Im Rahmen dieser Arbeit sollen mehrere Kick-Potentiale bzw. Kick-Funktionen genauer untersucht werden, die an dieser Stelle kurz vorgestellt werden. Es sollen Kick-Potentiale v betrachtet werden, so daß die daraus resultierende Poincaré-Abbildung $M_{\alpha, \beta, f}$ im Grenzfall $\beta = 0$ in der (x, u) -Ebene ein Stochastisches Netz erzeugt. Für eine genauere Erläuterung dieses Begriffes sei auf Kapitel 4 verwiesen.

In Vorwegnahme der Ergebnisse sei erwähnt, daß es sowohl periodische als auch aperiodische Kick-Potentiale gibt, die dieser Bedingung genügen. Da die Phasenportraits zu periodischen Kick-Potentialen jedoch ansonsten ganz verschieden von denen aperiodischer Kick-Potentiale sind, sollen diese beiden Klassen im folgenden immer getrennt voneinander betrachtet werden.

Aperiodische Kick-Potentiale

Es wird sich zeigen, daß das aperiodische Kick-Potential

$$v_{A1}(x) = K' \begin{cases} \frac{x^2}{2b} + \frac{b}{2} & \text{für } |x| < b \\ |x| & \text{für } |x| \geq b \end{cases} \quad (1.28)$$

zu beliebigem $b > 0$ der oben genannten Bedingung genügt. Dieses v_{A1} ist nichts anderes als die Betragsfunktion, die um $x = 0$ durch ein Parabelstück differenzierbar abgerundet wird. Durch Differenzieren von v_{A1} erhält man als zugehörige Kick-Funktion

$$f_{A1}(x) = -K \begin{cases} \frac{x}{b} & \text{für } |x| < b \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{für } |x| \geq b \end{cases} \quad (1.29)$$

mit $K = K'T^2/m$. f_{A1} ist also die Signum-Funktion, die um $x = 0$ durch ein Geradenstück stetig verbunden ist. In dem hier vorgestellten physikalischen Modell entspricht diese Kick-Funktion dem elektrischen Feld einer homogenen Raumladungsschicht der Breite $2b$, die zeitperiodisch oszilliert.

Obgleich die Poincaré-Abbildung $M_{\alpha,\beta,f_{A1}}$ stückweise linear ist, erzeugt sie im Grenzfall $\beta = 0$ in der (x, u) -Ebene ein Stochastisches Netz, dessen Struktur und Aufbaumechanismus sich vollständig erklären lassen. Diese Poincaré-Abbildung kann somit als Prototyp für einen möglichen Aufbaumechanismus eines Stochastischen Netzes benutzt werden.

Es zeigt sich, daß für das Entstehen des Stochastischen Netzes nicht so sehr die Gestalt von v_{A1} in der Nähe von $x = 0$ entscheidend ist, sondern vielmehr dessen Asymptotik. Einige Rechnungen sollen daher an dem leicht abgewandelten Kick-Potential

$$v_{A2}(x) = K'b \ln \cosh \frac{x}{b} \quad (1.30)$$

durchgeführt werden, das im Gegensatz zu v_{A1} beliebig oft differenzierbar ist und sich für kleine b durch v_{A1} gut approximieren läßt. Aus v_{A2} ergibt sich die Kick-Funktion

$$f_{A2}(x) = -K \tanh \frac{x}{b} \quad (1.31)$$

mit $K = K'T^2/m$. Es wird sich zeigen, daß v_{A2} ganz ähnliche Phasenportraits erzeugt wie v_{A1} .

Periodische Kick-Potentiale

Die meisten Rechnungen für periodische Kick-Potentiale sollen anhand von

$$v_{P1}(x) = -\frac{K'}{2\pi} \cos(2\pi x) \quad (1.32)$$

durchgeführt werden, also anhand der Kick-Funktion

$$f_{P1}(x) = -K \sin(2\pi x) \quad (1.33)$$

mit $K = K'T^2/m$. In dem physikalischen Modell entspricht diese Kick-Funktion dem elektrischen Feld einer stehenden Welle (zum Beispiel Hohlraumresonator), die zeitlich oszilliert.

Die zugehörige Poincaré-Abbildung $M_{\alpha,\beta,f_{P1}}$ wurde erstmalig von Zaslavsky und Mitarbeitern eingeführt [1]. Die beiden Teilabbildungen $M_{\alpha,f_{P1}}^{(x)}$ und $M_{f_{P1}}^{(y)}$, zu denen sich $M_{\alpha,\beta,f_{P1}}$ in den Grenzfällen $\beta = 0$ bzw. $\beta = \pi/2$ reduziert, sind für die Kick-Funktion (1.33) wohlbekannt. $M_{\alpha,f_{P1}}^{(x)}$ ist die bereits erwähnte Netzabbildung

und $M_{\alpha, f_{P_1}}^{(y)}$ die ebenfalls erwähnte Standardabbildung. Für genauere Ausführungen zu diesen beiden wichtigen zweidimensionalen Abbildungen sei auf die Kapitel 4 und 5 verwiesen.

Es ist bekannt, daß auch andere periodische Kick-Potentiale ein Stochastisches Netz erzeugen können. Aus diesem Grunde sollen einige wenige Rechnungen anhand des Kick-Potentials

$$v_{P_2}(x) = -\frac{K'}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3} \quad (1.34)$$

durchgeführt werden. v_{P_2} ist eine differenzierbare periodische Funktion der Periode 1, die aus Parabelstücken zusammengesetzt ist und die Cosinus-Funktion approximiert. Da (1.32) formal eine Fourier-Reihe ist, wurde der Einfachheit halber v_{P_2} ebenfalls in Form einer Fourier-Reihe angegeben. Es ergibt sich die Kick-Funktion

$$f_{P_2}(x) = -K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^2} \quad (1.35)$$

mit $K = K'T^2/m$. f_{P_2} ist die periodisch fortgesetzte Dreiecksfunktion. Die sich aus $M_{\alpha, f_{P_2}}^{(x)}$ ergebenden Netzstrukturen wurden von Yu und Parmenter [9] ausführlich untersucht. Für genauere Erläuterungen sei auf das Kapitel 4.

Kapitel 2

Topologische Konjugiertheit

2.1 Allgemeiner Fall

Die folgenden Überlegung gelten für *beliebige* Kick-Potentiale. Gegeben sei die Poincaré-Abbildung $M_{\alpha,F}$ in der Gestalt (1.14) mit *beliebiger* zweidimensionaler Kick-Funktion F .

Mit Hilfe eines algebraischen Computer-Programmes¹ war es möglich, eine ganze Klasse zueinander topologisch konjugierter Abbildungen vom Typ (1.14) zu finden. Es zeigt sich, daß $M_{\alpha,F}$ topologisch konjugiert zu einer Abbildung $M_{\delta,G}$ mit einem anderen Winkel δ und einer anderen Kick-Funktion G ist. Formal gilt:

$$M_{\delta,G} = h_{\alpha,\delta,\varphi}^{-1} \circ M_{\alpha,F} \circ h_{\alpha,\delta,\varphi}. \quad (2.1)$$

Dabei ist $h_{\alpha,\delta,\varphi}$ eine einparametrische Schar von Homöomorphismen (Scharparameter φ) — genau genommen von invertierbaren linearen Abbildungen —, die von den Winkeln α, δ und einem zusätzlichen frei wählbaren Winkel φ abhängt. $h_{\alpha,\delta,\varphi}$ ist von der folgenden Gestalt:

$$h_{\alpha,\delta,\varphi} : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ \frac{\alpha \cos \varphi (\cos \alpha - \cos \delta)}{\sin \alpha} & \frac{\alpha \sin \delta \cos \varphi}{\delta \sin \alpha} & \frac{\alpha \sin \varphi (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} & -\frac{\alpha \sin \varphi}{\sin \alpha} \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi - \sin \varphi \cos \delta & \frac{\sin \delta \sin \varphi}{\delta} & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Die neue Kick-Funktion G läßt sich folgendermaßen aus der alten Kick-Funktion F und den Transformationsparametern α, δ, φ bestimmen:

$$\begin{aligned} G_x(x, y) &= \frac{2\delta(\cos^2 \varphi \cos \alpha + \sin^2 \varphi - \cos \delta)}{\sin \delta} x + \frac{2\delta(\sin \varphi \cos \varphi (1 - \cos \alpha))}{\sin \delta} y \\ &\quad + \frac{\delta \cos \varphi \sin \alpha}{\alpha \sin \delta} F_x(x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi) \\ &\quad + \frac{\delta \sin \varphi}{\sin \delta} F_y(x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi) \end{aligned} \quad (2.3a)$$

¹Maple V Revision 2

und

$$\begin{aligned} G_y(x, y) = & 2 \sin \varphi \cos \varphi (1 - \cos \alpha) x - 2 \sin^2 \varphi (1 - \cos \alpha) y \\ & - \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{\alpha} F_x(x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi) \\ & + \cos \varphi F_y(x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi). \end{aligned} \quad (2.3b)$$

Mit Hilfe dieser allgemeinen Transformation ist es prinzipiell möglich, den Winkel α immer auf null zu transformieren, man muß ja nur $h_{\alpha, \delta=0, \varphi}$ für ein beliebiges φ auf $M_{\alpha, F}$ anwenden. Die (x, u) -Dynamik, das heißt ein entsprechend definiertes $M_{\alpha, F}^{(x)}$, hätte dann formal dieselbe Struktur, wie die (y, v) -Dynamik $M_{\alpha, F}^{(y)}$. In der Praxis ist ein derartiges Vorgehen jedoch in der Regel nicht sinnvoll (siehe jedoch die Ausführungen in den folgenden Abschnitten), da die neue Kick-Funktion G eine sehr komplizierte Gestalt annehmen kann.

Beschränkt man sich auf Kick-Funktionen von der Gestalt (1.19), also

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= \cos \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \\ F_y(x, y) &= \sin \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

so erkennt man leicht, daß die neue Kick-Funktion G für allgemeines α, δ, φ nicht ebenfalls von dieser gewünschten Gestalt ist. Da der Winkel φ in den Argumenten der Kick-Funktion F wie ein Drehung wirkt, könnte man annehmen, daß φ bei der Transformation nur den Winkel β beeinflußt, jedoch verändert sich dabei die Gestalt der Kick-Funktion so sehr, daß kaum noch Aussagen möglich sind. Die Transformation ist hier hauptsächlich aufgrund ihrer allgemeinen Gestalt angegeben, da sie eine ganze Klasse von Abbildungen miteinander verbindet. In den folgenden beiden Abschnitten wird sich ein Teilaspekt der obigen Transformation als wichtig erweisen.

2.2 Der Fall $\beta = 0$

Aus der allgemeinen Transformation des vorherigen Abschnitts läßt sich leicht eine Formel für den Spezialfall $\beta = 0$ bestimmen, sofern man sich auf Kick-Funktionen von der Gestalt (1.19) bzw. (2.4) beschränkt.

Betrachtet werden soll die in (1.22a) definierte Abbildung $M_{\alpha, f}^{(x)}$. Da $\beta = 0$ in diesem Fall fest vorgegeben ist und φ , wie oben erwähnt, eine Drehung in den Argumenten der Kick-Funktion F ist, muß $\varphi = 0$ gesetzt werden. Es gilt dann:

$$M_{\delta, g}^{(x)} = h_{\alpha, \delta}^{-1} \circ M_{\alpha, f}^{(x)} \circ h_{\alpha, \delta}. \quad (2.5)$$

Dabei ist $h_{\alpha, \delta}$ eine zweidimensionale invertierbare lineare Abbildung — also auch ein Homöomorphismus —, die sich aus der linken oberen 2×2 -Matrix von (2.2) ergibt, wobei $\varphi = 0$ gesetzt wird:

$$h_{\alpha, \delta} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha(\cos \alpha - \cos \delta)}{\sin \alpha} & \frac{\alpha \sin \delta}{\delta \sin \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Die neue Kick-Funktion g ergibt sich dann ganz entsprechend durch Einsetzen von $\beta = \varphi = 0$ in (2.3) und (2.4) zu

$$g(x) = \frac{2x\delta(\cos \alpha - \cos \delta)}{\sin \delta} + \frac{\delta \sin \alpha}{\alpha \sin \delta} f(x). \quad (2.7)$$

Berücksichtigt man weiterhin, daß sich die Kick-Funktion f aus einem Kick-Potential v ergibt, nämlich $f(x) = -\frac{T^2}{m}v'(x)$, so kann man genausogut sagen, daß — entsprechend (1.23) — die Hamilton-Systeme

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m \left(\frac{\alpha}{T} \right)^2 x^2 + v(x)T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.8a)$$

und

$$\check{H}(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m \left(\frac{\delta}{T} \right)^2 x^2 + \check{v}(x)T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.8b)$$

auf zwei zueinander topologisch konjugierte Poincaré-Abbildungen führen. Dabei sind die Kick-Potentiale v und $\check{v}$ wie folgt miteinander verknüpft:

$$\check{v}(x) = \frac{m}{T^2} \frac{x^2 \delta(\cos \delta - \cos \alpha)}{\sin \delta} + \frac{\delta \sin \alpha}{\alpha \sin \delta} v(x). \quad (2.9)$$

Man rechnet schnell nach, daß $g(x) = -\frac{T^2}{m}\check{v}'(x)$ gilt, sofern $f(x) = -\frac{T^2}{m}v'(x)$ ist.

2.3 Ein spezielles Kick-Potential

In diesem Abschnitt soll ein Beispiel für die Transformationsformel aus dem vorherigen Abschnitt diskutiert werden. Krug und Schwägerl haben eine Abbildung untersucht [7], die sich aus einer Hamilton-Funktion der folgenden Gestalt ergibt:

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} + v(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.10a)$$

mit

$$v(q) = \begin{cases} [(q - 2q_0)^2 + q_0^2]/2f & \text{für } q < -q_0 \\ [q_0^2 - q^2]/2f & \text{für } q^2 < q_0^2 \\ [(q - 2q_0)^2 - q_0^2]/2f & \text{für } q > q_0 \end{cases} . \quad (2.10b)$$

Diese Hamilton-Funktion ist offensichtlich von der Gestalt (2.8) sofern entweder α oder δ gleich null und $m = 1$ gesetzt werden. Das hier verwandte Kick-Potential setzt sich aus Parabelstücken zusammen. In Anbetracht der Tatsache, daß in (2.9) x im ersten Summanden gerade quadratisch vorkommt, sollte es möglich sein, einen Homöomorphismus anzugeben, der die hier betrachtete Abbildung $M_{\alpha, f_{A1}}^{(x)}$ mit der von Krug und Schwägerl betrachteten verbindet.

Ausgangspunkt ist das aperiodische Kick-Potential v_{A1} aus Abschnitt 1.7. Die zugehörige Kick-Funktion f_{A1} ergab sich in (1.29) zu:

$$f(x) = K \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq -b \\ -\frac{x}{b} & \text{für } |x| < b \\ -1 & \text{für } x \geq b \end{cases} . \quad (2.11)$$

Setzt man nun in (2.6) $\delta = 0$ und wendet man

$$h_{(1)} = h_{\alpha, \delta=0} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha(\cos \alpha - 1)}{\sin \alpha} & \frac{\alpha}{\sin \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

auf $M_{\alpha, f}^{(x)}$ an, so ist, entsprechend den Ausführungen im vorhergehenden Abschnitt, diese Abbildung topologisch konjugiert zu

$$M_{\delta=0, g}^{(x)} = h_{(1)}^{-1} \circ M_{\alpha, f}^{(x)} \circ h_{(1)} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u + g(x) \end{pmatrix} \quad (2.13a)$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} 2x(\cos \alpha - 1) + K \frac{\sin \alpha}{\alpha} & \text{für } x \leq -b \\ 2x(\cos \alpha - 1) - \frac{K}{b} \frac{\sin \alpha}{\alpha} x & \text{für } |x| < b \\ 2x(\cos \alpha - 1) - K \frac{\sin \alpha}{\alpha} & \text{für } x \geq b \end{cases} \quad (2.13b)$$

Um auf die spezielle Form der Abbildung von Krug und Schwägerl zu gelangen, ist noch eine weitere Transformation notwendig: Da g eine stetige Funktion ist und ohne Einschränkung davon ausgegangen werden kann, daß $b > 0$ ist, sind die Abbildungen

$$h_{(2)} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} bx \\ bu - g(bx) \end{pmatrix}, \quad h_{(2)}^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x/b \\ u/b + g(x)/b \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

stetig und zueinander invers. $h_{(2)}$ ist demnach ein Homöomorphismus, der auf $M_{\delta=0, g}^{(x)}$ angewandt werden kann. Es ergibt sich eine immer noch zu $M_{\alpha, f}^{(x)}$ topologisch konjugierte Abbildung der folgenden Gestalt:

$$\check{M} = h_{(2)}^{-1} \circ M_{\delta=0, g}^{(x)} \circ h_{(2)} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + u \\ u + g(bx + bu)/b \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Berücksichtigt man die Tatsache, daß g stückweise linear ist, so ist auch die Abbildung $\check{M}$ stückweise linear und kann demnach in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\check{M}(x, u) = \begin{cases} A(x, u) & \text{für } |x + u| < 1 \\ B(x, u) & \text{für } x + u \geq 1 \\ C(x, u) & \text{für } x + u \leq -1 \end{cases} \quad (2.16a)$$

mit den jeweils linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} A : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x + u \\ u + (x + u)(2 \cos \alpha - 2 - \frac{K \sin \alpha}{b \alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \\ B : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x + u \\ u + (x + u)(2 \cos \alpha - 2) - \frac{K \sin \alpha}{b \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \\ C : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x + u \\ u + (x + u)(2 \cos \alpha - 2) + \frac{K \sin \alpha}{b \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.16b)$$

Es kann davon ausgegangen werden, daß α kein ganzes Vielfaches von π ist. Setzt man

$$K = 4b\alpha \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} \neq 0 \quad (2.17)$$

und verwendet man zudem die Abkürzung

$$\gamma = 2 - 2 \cos \alpha, \quad (2.18)$$

so vereinfachen sich die obigen Abbildungen schließlich zu:

$$\begin{aligned} A : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma & 1 + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \\ B : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma & 1 - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma \end{pmatrix} \\ C : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma & 1 - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Folglich ist $M_{\alpha,f}$ für den oben gewählten K -Wert topologisch konjugiert zu dieser Abbildung $\tilde{M}$, die exakt die Form hat, wie sie in [7] von Krug und Schwägerl benutzt wurde.

Kapitel 3

Symmetrie und Reversibilität

In diesem Kapitel sollen allgemein die Symmetrien diskreter dynamischer Systeme untersucht werden. Man erhält daraus ein einfaches Verfahren zum Auffinden periodischer Punkte, das sich gerade für die Untersuchung der Abbildung $M_{\alpha,f}^{(x)}$ im Spezialfall $\beta = 0$ als besonders sinnvoll erweisen wird und auch im Spezialfall $\beta = \pi/2$ brauchbare Resultate liefert.

3.1 Allgemeine Grundlagen

In diesem Abschnitt sollen einige allgemeine Überlegungen über die Symmetrieeigenschaften diskreter dynamischer Systeme durchgeführt werden. Die Sätze und Definitionen orientieren sich im wesentlichen an den Arbeiten von Lamb [12] sowie von Roberts und Quispel [13].

Gegeben sei eine beliebige Abbildung $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. M kann, wie im vorliegenden Fall, die Poincaré-Abbildung eines Hamilton-Systems sein, könnte jedoch auch abstrakt gewählt werden. Man definiert die Begriffe *Symmetrie* und *Umkehrende Symmetrie* der Abbildung M wie folgt:

Definition 3.1 Eine Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Symmetrie* von M , wenn

$$L \circ M = M \circ L \tag{3.1}$$

gilt.

Es ist klar, daß id, M selber und M^{-1} , sofern M invertierbar ist, immer Symmetrien von M sind. Somit ist die Menge der Symmetrien einer Abbildung nie leer.

Lemma 3.1 Die Menge aller invertierbaren Symmetrien von M bilden eine Gruppe bezüglich der Komposition. Diese wird *Symmetriegruppe* von M genannt.

Der Beweis hierzu findet sich in [12] bzw. skizzenhaft in Anhang A.6.

Es ist anzumerken, daß nach Definition einer Symmetrie diese nicht notwendigerweise auch invertierbar sein muß. Streng mathematisch gesehen bildet die Menge aller Symmetrien einer Abbildung M nur eine Halbgruppe. Im folgenden

soll von diesen Extremfällen jedoch Abstand genommen und jede Symmetrie soll als invertierbar vorausgesetzt werden. Da M selber Symmetrie ist, wird damit M ebenfalls als invertierbar vorausgesetzt.

Gelegentlich findet man auch die genaue Unterscheidung zwischen *der* Symmetriegruppe und *einer* Symmetriegruppe, womit einerseits die Menge *aller* möglichen Symmetrien, andererseits nur eine Untergruppe gemeint ist. Diese Unterscheidung ist insofern sinnvoll, als die Gesamtheit aller Symmetrien eines Systems im allgemeinen nicht vollständig bestimmt werden kann.

Definition 3.2 Ist M invertierbar, so heißt eine Abbildung $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Umkehrende Symmetrie von M , wenn

$$S \circ M = M^{-1} \circ S \quad (3.2)$$

gilt.

Häufig findet man als Definition einer Umkehrenden Symmetrie auch die Beziehung

$$M \circ S \circ M = S, \quad (3.3)$$

woraus unter der Bedingung, daß S selber invertierbar ist, sofort folgt, daß auch M invertierbar und die Bedingung (3.2) erfüllt ist. Ist S hingegen nicht invertierbar, so unterscheiden sich die beiden Definitionen voneinander und (3.3) erfaßt eine größere Menge von möglichen Umkehrenden Symmetrien. Wie bei den Symmetrien soll im folgenden jedoch auch jede Umkehrende Symmetrie als invertierbar vorausgesetzt werden.

Lemma 3.2 Die Menge aller invertierbaren Symmetrien von M , vereinigt mit der Menge aller invertierbaren Umkehrenden Symmetrien von M , bildet eine Gruppe bezüglich der Komposition. Diese wird die Umkehrende Symmetriegruppe von M genannt.

Der Beweis hierzu ist ebenfalls in [12] zu finden.

Hierbei ist zu beachten, daß die Menge der Umkehrenden Symmetrien allein im allgemeinen keine Gruppe bildet; so existiert in der Menge der Umkehrenden Symmetrien im allgemeinen kein neutrales Element. Die einzige Ausnahme hierzu ist, wenn jede Umkehrende Symmetrie auch Symmetrie ist, was nur der Fall sein kann, wenn M zu sich selbst invers ist.

Es kann leicht gezeigt werden, daß die Komposition zweier (Umkehrender) Symmetrien eine Symmetrie und die Komposition einer Symmetrie mit einer Umkehrenden Symmetrie eine Umkehrende Symmetrie ist. Damit ist ersichtlich, daß eine Komposition innerhalb der Menge der Umkehrenden Symmetrien im allgemeinen aus dieser Menge hinausführt. Die Umkehrenden Symmetrien allein können keine Gruppe bilden.

Hat man eine Umkehrende Symmetrie S von M gefunden, so ist hiermit bereits gezeigt, daß $M \circ S$ sowie $M^{-1} \circ S$ ebenfalls Umkehrende Symmetrien von M sind, da M und M^{-1} Symmetrien von M sind. Mittels vollständiger Induktion ist dann schnell gezeigt, daß $M^n \circ S$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine Umkehrende Symmetrie von M ist.

Speziell diese Umkehrenden Symmetrien, die sich aus einer einzigen Umkehrenden Symmetrie S ergeben, werden sich im folgenden als wichtig erweisen.

Es ist nun sinnvoll, für die Klasse der dynamischen Systeme, die eine Umkehrende Symmetrie besitzen, einen eigenen Begriff einzuführen:

Definition 3.3 *Ein diskretes dynamisches System mit einer Umkehrenden Symmetrie heißt schwach reversibel.*

Für eine weitere Spezialisierung dieses Begriffes benötigt man den allgemeinen Begriff einer Involution:

Definition 3.4 *Eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Involution, wenn gilt:*

$$\phi^2 = \phi \circ \phi = id. \quad (3.4)$$

Hiermit läßt sich der wichtige Begriff eines *reversiblen* Systems einführen:

Definition 3.5 *Ein diskretes dynamisches System mit einer Involution als Umkehrende Symmetrie heißt reversibel.*

Es sei angemerkt, daß die letzten drei Definitionen praktisch unverändert auch für kontinuierliche dynamische Systeme übernommen werden können, man muß nur den Begriff der Umkehrenden Symmetrie für ein kontinuierliches System passend einführen (siehe hierzu zum Beispiel [12]).

Gelegentlich findet man auch eine zu 3.5 äquivalente Definition für den Begriff eines diskreten reversiblen Systems. Diese soll hier als Lemma formuliert werden:

Lemma 3.3 *Eine Abbildung M ist genau dann reversibel, wenn es zwei Involutionen S_0 und S_1 gibt, so daß $M = S_1 \circ S_0$ gilt.*

Beweis:

Sei M reversibel, dann gibt es eine Umkehrende Symmetrie S , die eine Involution ist. Definiere $S_0 = S$ und $S_1 = M \circ S$, dann gilt offenbar $M = S_1 \circ S_0$, da $S \circ S = id$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß S_1 eine Involution ist:

$$\begin{aligned} S \circ M = M^{-1} \circ S &\Rightarrow M \circ S \circ M = S \Rightarrow (M \circ S) \circ (M \circ S) = id \\ &\Rightarrow S_1 \circ S_1 = id. \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt $M = S_1 \circ S_0$, wobei S_0 und S_1 Involutionen sind. Dann gilt $M^{-1} = S_0 \circ S_1$, und damit ist sofort ersichtlich, daß sowohl S_0 als auch S_1 Umkehrende Symmetrien von M sind:

$$S_0 \circ M = S_0 \circ S_1 \circ S_0 = M^{-1} \circ S_0.$$

Für S_1 ist entsprechend vorzugehen. Also ist M reversibel entsprechend der Definition 3.5.

□

Um nun die besondere Bedeutung der Umkehrenden Symmetrien und damit der reversiblen dynamischen Systeme darlegen zu können, wird der Begriff der Fixpunktmenge einer Abbildung benötigt:

Definition 3.6 *Gegeben sei eine beliebige Abbildung $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; deren Fixpunktmenge $\text{Fix}(\psi)$ ist definiert als*

$$\text{Fix}(\psi) = \{x \in \mathbb{R}^n; \psi(x) = x\}. \quad (3.5)$$

Die Definition der Fixpunktmenge ist nicht auf Abbildungen vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ beschränkt, sie kann in dieser Form unverändert auf beliebige Mengen erweitert werden. In der Galois-Theorie beispielsweise interessiert man sich unter anderem für Fixpunktmenge von Körperhomomorphismen. Für das Folgende ist Definition 3.6 jedoch vollkommen ausreichend.

Im folgenden soll eine Abbildung M mit einer Umkehrenden Symmetrie S betrachtet werden, also ein schwach reversibles System. Für die nachfolgenden Überlegungen ist es zunächst unerheblich, ob S eine Involution ist oder nicht. Die besondere Bedeutung der reversiblen dynamischen Systeme wird erst gegen Ende des Abschnitts deutlich werden.

Es erweist sich als sinnvoll, die Fixpunktmenge der Umkehrenden Symmetrien

$$S_k = M^k \circ S \quad (3.6)$$

zu betrachten. Man beachte, daß bereits gezeigt wurde, daß die S_k Umkehrende Symmetrien von M sind. Für die Schnittpunkte zweier solcher Fixpunktmenge gilt das folgende Lemma:

Lemma 3.4 *Sei $S_k = M^k \circ S$ wie oben. Dann gilt:*

$$x \in \text{Fix}(S_k) \cap \text{Fix}(S_l) \Rightarrow M^{k-l}(x) = x. \quad (3.7)$$

Mit anderen Worten: Wenn $x \in \mathbb{R}^n$ im Durchschnitt der Fixpunktmenge zweier spezieller Umkehrender Symmetrien S_k und S_l liegt, so ist x ein periodischer Punkt von M , der maximal die Periode $k - l$ hat.

Beweis:

Zunächst erkennt man, daß $M^k \circ S = S \circ M^{-k}$ gelten muß, da S eine Umkehrende Symmetrie von M ist. Es gilt ja:

$$S \circ M = M^{-1} \circ S \iff M \circ S = S \circ M^{-1},$$

woraus durch einfaches Einsetzen die Behauptung folgt:

$$M^k \circ S = M^{k-1} \circ M \circ S = M^{k-1} \circ S \circ M^{-1} = \dots$$

Wenn nun $x \in \text{Fix}(S_k) \cap \text{Fix}(S_l)$ gilt, so folgt einerseits:

$$(M^k \circ S)(x) = (S \circ M^{-k})(x) = (S \circ M^{-k})^{-1}(x) = (M^k \circ S^{-1})(x) = x$$

— man beachte, daß x ein Fixpunkt von $S \circ M^{-k}$ und damit auch von $(S \circ M^{-k})^{-1}$ ist — und andererseits $(M^l \circ S)(x) = x$.

Folglich gilt:

$$M^{k-l}(x) = (M^k \circ S^{-1} \circ S \circ M^{-l})(x) = (M^k \circ S^{-1} \circ M^l \circ S)(x) = (M^k \circ S^{-1})(x) = x$$

□

Die Schnittpunkte der Fixpunktmenzen von S_k und S_l ergeben also periodische Punkte der Abbildung M . Man könnte nun annehmen, damit nicht sonderlich viel gewonnen zu haben, da es im allgemeinen ein großer Aufwand ist, die Fixpunktmenzen zweier Abbildungen zu berechnen. Es zeigt sich jedoch, daß gerade die Fixpunktmenzen der S_k sehr einfach zu bestimmen sind. Hierzu folgendes Lemma:

Lemma 3.5 *Es gilt:*

$$\text{Fix}(S_{2k}) = M^k(\text{Fix}(S_0)) \quad , \quad \text{Fix}(S_{2k+1}) = M^k(\text{Fix}(S_1)). \quad (3.8)$$

Mit anderen Worten: Die Fixpunktmenge von S_k ist eine Iterierte der Fixpunktmenge von S_0 oder S_1 .

Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in \text{Fix}(S_{2k}) &\iff x = (M^{2k} \circ S)(x) = (M^k \circ S \circ M^{-k})(x) \\ &\iff (S \circ M^{-k})(x) = M^{-k}(x) \iff M^{-k}(x) \in \text{Fix}(S_0) \\ &\iff x \in M^k(\text{Fix}(S_0)). \end{aligned}$$

Und entsprechend:

$$\begin{aligned} x \in \text{Fix}(S_{2k+1}) &\iff x = (M^{2k+1} \circ S)(x) = (M^k \circ M \circ S \circ M^{-k})(x) \\ &\iff (M \circ S \circ M^{-k})(x) = M^{-k}(x) \iff M^{-k}(x) \in \text{Fix}(S_1) \\ &\iff x \in M^k(\text{Fix}(S_1)). \end{aligned}$$

□

Man benötigt also nur die Fixpunktmenzen von S_0 und S_1 , alle weiteren Menzen $\text{Fix}(S_k)$ ergeben sich durch deren Iteration unter M . Auf diese Weise erhält man ein sehr effektives Verfahren zum Auffinden derjenigen periodischen Punkte, die auf der Fixpunktmenge einer Umkehrenden Symmetrie liegen. Diese periodischen Punkte werden häufig als *symmetrische periodische Punkte* bezeichnet (siehe weiter unten). Wie diese Bezeichnung bereits andeutet, hat die Abbildung M im allgemeinen auch periodische Punkte, die nicht symmetrisch sind, also nicht auf Fixpunktmenzen Umkehrender Symmetrien liegen.

Ist eine beliebige Umkehrende Symmetrie S von M gegeben, so ist mit den Lemmata 3.4 und 3.5 gezeigt, daß auf den Schnittpunkten der Iterierten von $\text{Fix}(S)$ und $\text{Fix}(M \circ S)$ periodische Punkte liegen. Es ist möglich, eine Umkehrung dieser Aussage zu erreichen, wozu man den Begriff eines *symmetrischen periodischen Orbits* benötigt. Zunächst einmal definiert man:

Definition 3.7 Eine beliebige Teilmenge A des Phasenraumes $\mathbb{R}^n$ heißt *symmetrisch* bezüglich einer (Umkehrenden) Symmetrie S , wenn gilt:

$$S(A) = A. \quad (3.9)$$

Faßt man einen Orbit als Teilmenge des Phasenraumes auf, so ist hiermit bereits geklärt, was unter einem symmetrischen Orbit zu verstehen ist. Es gibt nun ein leicht verständliches Kriterium dafür, wann ein Orbit symmetrisch bezüglich einer (Umkehrenden) Symmetrie S ist:

Lemma 3.6 Ein Orbit ist genau dann symmetrisch bezüglich einer (Umkehrenden) Symmetrie S , wenn es für alle Punkte x_0 des Orbits ein — im allgemeinen von x_0 abhängiges — $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß gilt:

$$M^k(x_0) = S(x_0). \quad (3.10)$$

Beweis:

Es ist klar, daß aus der Bedingung (3.10) sofort folgt, daß der Orbit symmetrisch sein muß, schließlich ist mit x_0 auch $M^k(x_0)$ ein Element des Orbits. Ist nun umgekehrt der Orbit symmetrisch, so muß mit x_0 auch $S(x_0)$ Element des Orbits sein. Es gibt also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $M^k(x_0) = S(x_0)$.

□

Es sei angemerkt, daß zusätzlich gezeigt werden kann, daß dieses k unabhängig von x_0 ist, sofern S eine Symmetrie ist. Ausgehend von einem beliebigen x_0 des Orbits gilt ja

$$M^k(M^l(x_0)) = M^l(M^k(x_0)) = M^l(S(x_0)) = S(M^l(x_0))$$

für alle $l \in \mathbb{Z}$. Die $M^l(x_0)$ überdecken aber den gesamten Orbit.

Hiermit ist es nun möglich, die Umkehrung des Lemmas 3.4 zu zeigen:

Satz 3.1 Alle Punkte eines periodischen Orbits, der symmetrisch bezüglich einer Umkehrenden Symmetrie S ist, liegen auf Schnittpunkten von Iterierten von $\text{Fix}(S)$ und $\text{Fix}(M \circ S)$.

Beweis:

x_0 liege auf einem periodischen Orbit der Periode p , der symmetrisch bezüglich der Umkehrenden Symmetrie S ist. Dann gibt es nach Lemma 3.6 ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß $M^k(x_0) = S(x_0)$ ist. Da x_0 p -periodisch ist, folgt sofort, daß auch $M^k(M^{-np}(x_0)) = M^{k-np}(x_0) = S(x_0)$ für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ gelten muß. Hieraus

folgt aber, daß $x_0 = (M^{np-k} \circ S)(x_0) = S_{np-k}(x_0)$ gilt, also x_0 in den Fixpunkt-
mengen $\text{Fix}(S_{np-k})$ liegt.

Mit Lemma 3.5 ist damit gezeigt, daß x_0 auf Schnittpunkten von Iterierten von $\text{Fix}(S)$ und $\text{Fix}(M \circ S)$ liegt.

□

Also kann man den Schnittpunkten der Fixpunkt-mengen von S_k entsprechend Lemma 3.4 symmetrische periodische Orbits zuordnen. Umgekehrt kann man einem symmetrischen periodischen Orbit Schnittpunkte von Fixpunkt-mengen von S_k zuordnen. Eine genauere Ausführung dieser Thematik findet sich in [12].

Man beachte, daß für Satz 3.1 nicht benutzt wurde, daß die Umkehrende Symmetrie S der Abbildung M eine Involution ist. Das Verfahren funktioniert demnach bereits für schwach reversible Systeme. Allerdings wurden bisher nur rein algebraische Methoden angewandt, und über die genaue Gestalt der Fixpunkt-mengen wurde noch keine Aussage getroffen.

Für den Fall, daß die Abbildung M $2n$ -dimensional ist, läßt sich zeigen, daß die Fixpunkt-menge einer Umkehrenden Symmetrie, sofern diese eine antisymplektische Involution (siehe unten) ist, eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Um dies zeigen zu können, benötigt man, daß sich jede Involution um ihre Fixpunkte herum linearisieren läßt. Diese Aussage erinnert an das Hartman–Grobman–Theorem, demzufolge sich eine Abbildung um einen hyperbolischen Fixpunkt herum linearisieren läßt.

Satz 3.2 *Eine Involution ϕ ist um jeden ihrer Fixpunkte x_0 topologisch konjugiert zu ihrem linearen Anteil. Es gibt also eine Umgebung U um x_0 , eine Umgebung V um 0 und einen Homöomorphismus $h : U \rightarrow V$, so daß*

$$\phi = h^{-1} \circ D\phi(x_0) \circ h \quad (3.11)$$

auf ganz U gilt.

Beweis:

Für zwei Involutionen ψ_1 und ψ_2 , wobei zusätzlich ψ_2 linear sein soll, gilt immer $(\psi_1 + \psi_2) \circ \psi_1 = \psi_2 \circ (\psi_1 + \psi_2)$. Setzt man nun $\psi_1 = \phi$ und $\psi_2 = D\phi(x_0)$ (linear), so ergibt sich

$$\phi = (\phi + D\phi(x_0))^{-1} \circ D\phi(x_0) \circ (\phi + D\phi(x_0)),$$

sofern $\phi + D\phi(x_0)$ invertierbar ist. Nun ist aber ϕ eine Involution, daß heißt $\det D\phi \neq 0$, folglich auch $\det D(\phi + D\phi(x_0))(x_0) = \det 2D\phi(x_0) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist dann $\phi + D\phi(x_0)$ in einer Umgebung von x_0 invertierbar. Setzt man dann $h = \phi + D\phi(x_0)$ in eben dieser Umgebung, so erhält man den gesuchten Homöomorphismus.

□

Für den Fall einer zweidimensionalen Involution kann zudem noch gezeigt werden, daß diese wenigstens einen Fixpunkt hat [14], um den herum nach dem obigen Satz linearisiert werden kann. Bei höherdimensionalen Involutionen ist die Situation noch weitgehend ungeklärt.

Für das Folgende benötigt man nun noch den Begriff einer *antisymplektischen* Abbildung:

Definition 3.8 Sei $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ eine Abbildung. ϕ heißt *antisymplektisch*, wenn

$$D\phi \cdot \Gamma \cdot D\phi^t = -\Gamma \quad (3.12)$$

mit

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

gilt.

Es sei angemerkt, daß im Zweidimensionalen eine Abbildung ϕ genau dann antisymplektisch ist, wenn $\det D\phi = -1$ gilt. Hiermit läßt sich nun die oben erwähnte Behauptung exakt formulieren:

Satz 3.3 Sei $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ eine antisymplektische Involution mit mindestens einem Fixpunkt x_0 . Dann ist $\text{Fix}(\phi)$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n}$.

Beweisidee:

Da ϕ nach Voraussetzung antisymplektisch ist, muß auch $D\phi(x_0)$ antisymplektisch sein. Es können sogenannte symplektische Koordinaten (ξ, η) eingeführt werden mit $D\phi(x_0)(\xi, \eta) = (-\xi, \eta)$. Da ϕ in einer kleinen Umgebung von x_0 zu $D\phi(x_0)$ topologisch konjugiert ist, gibt es auch — leicht abgewandelte — lokale Koordinaten (ξ, η) , so daß $\phi(\xi, \eta) = (-\xi, \eta)$ gilt. In einer Umgebung um den Fixpunkt x_0 herum reduziert sich ϕ also auf eine n -dimensionale Spiegelung in den ξ -Richtungen. Die Fixpunktmenge von ϕ ist dann in dieser Umgebung durch $\{(0, \eta); \eta \in \mathbb{R}^n\}$ gegeben. Damit hat man bereits überabzählbar viele Fixpunkte, an denen alle obigen Überlegungen wiederholt werden können. Insgesamt ergibt sich dann eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

□

Im Zweidimensionalen genügt zum Beweis dieses Satzes bereits die Bedingung $\det D\phi < 0$ — antisymplektisch würde dort ja $\det D\phi = -1$ bedeuten. Da zweidimensionale Abbildungen weit verbreitet sind, findet man oft unter der Definition einer Umkehrenden Symmetrie S auch die Bedingung, daß $\det DS < 0$ gelten soll. Für den allgemeineren Fall einer $2n$ -dimensionalen Abbildung muß sinnvollerweise Antisymplektizität gelten. Siehe hierzu auch [13] und [15].

Im Falle eines reversiblen Systems unter der Nebenbedingung, daß die Umkehrende Symmetrie antisymplektisch ist, hat man also den Vorteil, daß die Fixpunkt mengen der Umkehrenden Symmetrien $M^n \circ S$ — auch *Symmetrielinien* bzw. *Symmetrieflächen* genannt — eine einfache topologische Gestalt annehmen.

3.2 Anwendung auf Kick-Systeme

Gegeben sei eine Hamilton-Funktion der folgenden — bereits wohlbekannten — Gestalt:

$$H(x, p) = H_0(x, p) + V(x)T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (3.14)$$

Hierbei sollen x und p f -dimensionale Vektoren sein. Man kann aus Invarianzen der Hamilton-Funktion H_0 auf (Umkehrende) Symmetrien des zugehörigen Flusses Φ_t schließen. Es gilt der folgende Satz:

Satz 3.4 *Sei H_0 invariant unter einer invertierbaren, antisymplektischen Abbildung R , das heißt es soll $H_0 = H_0 \circ R$ gelten. Dann ist R eine Umkehrende Symmetrie des Flusses Φ_t von H_0 , das heißt es gilt*

$$\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t} = R \circ \Phi_t \circ R^{-1}. \quad (3.15)$$

Beweis:

Die von H_0 erzeugten Bewegungsgleichungen lassen sich in der folgenden Form zusammenfassen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(x, p) = \Gamma \cdot \nabla H_0|_{\Phi_t(x, p)}.$$

Aus der Kettenregel folgt

$$H_0 = H_0 \circ R \quad \Rightarrow \quad \nabla H_0|_{(x, p)} = DR_{|R^{-1}(x, p)}^t \cdot \nabla H_0|_{R(x, p)},$$

wobei zu beachten ist, daß $\nabla H_0 = DH_0^t$ gilt. Es gilt also einerseits

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (R \circ \Phi_t \circ R^{-1})(x, p) &= DR_{|\Phi_t(R^{-1}(x, p))} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(R^{-1}(x, p)) \\ &= DR_{|\Phi_t(R^{-1}(x, p))} \cdot \Gamma \cdot \nabla H_0|_{\Phi_t(R^{-1}(x, p))} \\ &= DR_{|\Phi_t(R^{-1}(x, p))} \cdot \Gamma \cdot DR_{|\Phi_t(R^{-1}(x, p))}^t \cdot \nabla H_0|_{(R \circ \Phi_t \circ R^{-1})(x, p)} \\ &= -\Gamma \cdot \nabla H_0|_{(R \circ \Phi_t \circ R^{-1})(x, p)} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{-t}(x, p) = -\Gamma \cdot \nabla H_0|_{\Phi_{-t}(x, p)}.$$

Da sowohl Φ_{-t} als auch $R \circ \Phi_t \circ R^{-1}$ den Flußaxiomen genügen, muß aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung (3.15) gelten.

□

Im folgenden sei H_0 unter der Involution

$$R : (x, p) \mapsto (x, -p) \quad (3.16)$$

invariant. Zum Beispiel ist dies der Fall, wenn H_0 quadratisch in den Impulsen ist. Man verifiziert schnell, daß dieses R invertierbar und antisymplektisch ist. Nach

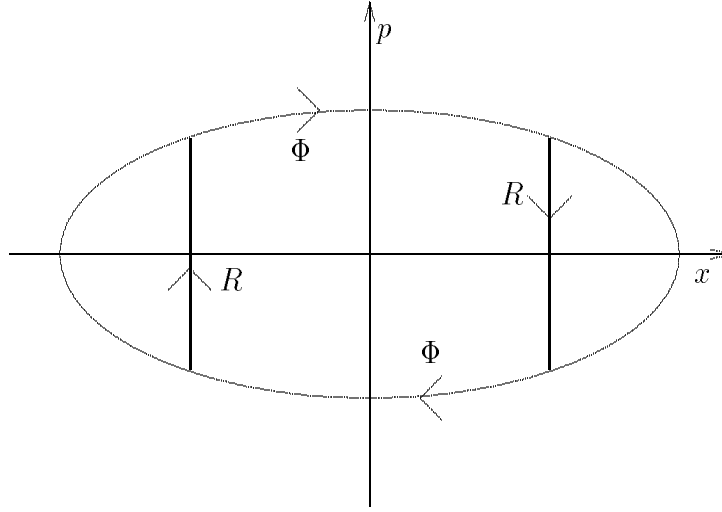


Abbildung 3.1: Veranschaulichung der Beziehung (3.17)

Satz 3.4 ist R damit eine Umkehrende Symmetrie von Φ_t . Da zusätzlich $R = R^{-1}$ gilt, vereinfacht sich (3.15) zu

$$\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t} = R \circ \Phi_t \circ R. \quad (3.17)$$

Für den Fall $f = 1$, das heißt für ein Hamilton-System H_0 mit nur einem Freiheitsgrad, läßt sich (3.17) anhand von Abbildung 3.1 anschaulich plausibel machen.

Die Poincaré-Abbildung M des gesamten durch H beschriebenen Systems setzt sich, wie in Abschnitt 1.1 beschrieben, aus dem Fluß Φ_T und der Kick-Abbildung Ψ_K zusammen ($M = \Phi_T \circ \Psi_K$ oder $M = \Psi_K \circ \Phi_T$). Unter Ausnutzung von (3.17) gilt dann zum Beispiel

$$M = \Phi_T \circ \Psi_K = (R \circ \Phi_T^{-1}) \circ (R \circ \Psi_K) = S_1 \circ S_0 \quad (3.18a)$$

mit

$$S_0 = R \circ \Psi_K, \quad S_1 = R \circ \Phi_T^{-1}. \quad (3.18b)$$

Dabei sind S_0 und S_1 Involutionen, wie anhand von

$$S_1^2 = (R \circ \Phi_T^{-1}) \circ (R \circ \Phi_T^{-1}) = id \quad (3.19a)$$

und

$$\begin{aligned} \Psi_K(x, p) = (x, p + f(x)) &\Rightarrow (R \circ \Psi_K)(x, p) = (x, -p - f(x)) \\ &\Rightarrow (\Psi_K \circ R \circ \Psi_K)(x, p) = (x, -p) \\ &\Rightarrow (R \circ \Psi_K \circ R \circ \Psi_K)(x, p) = (x, p) \\ &\Rightarrow S_0^2 = id \end{aligned} \quad (3.19b)$$

ersichtlich ist.

Nach Lemma 3.3 ist damit gezeigt, daß die Poincaré–Abbildung M reversibel ist. Genauer gesagt ist M symmetrisch bezüglich der Umkehrenden Symmetrie $S_0 = R \circ \Psi_K$ und damit auch bezüglich aller Umkehrenden Symmetrien $S_n = M^n \circ S_0$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Man macht sich schnell klar, daß S_1 hierin bereits enthalten ist. Es gilt ja

$$S_1 = R \circ \Phi_T^{-1} \circ S_0^2 = R \circ \Phi_T^{-1} \circ R \circ \Psi_K \circ S_0 = \Phi_T \circ \Psi_K \circ S_0 = M^1 \circ S_0. \quad (3.20)$$

Geht man nun davon aus, daß H_0 und V invariant unter der Involution

$$Q : (x, p) \mapsto (-x, p) \quad (3.21)$$

sind, was zum Beispiel der Fall ist, wenn H_0 quadratisch in den Orten und V symmetrisch (gerade) ist, so kann ganz analog vorgegangen werden. Entsprechend folgt dann für den Fluß die Beziehung:

$$\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t} = Q \circ \Phi_t \circ Q, \quad (3.22)$$

woraus entsprechend dem obigen Schema für die Poincaré–Abbildung folgt:

$$M = \Phi_T \circ \Psi_K = (Q \circ \Phi_T^{-1}) \circ (Q \circ \Psi_K) = T_1 \circ T_0 \quad (3.23a)$$

mit

$$T_0 = Q \circ \Psi_K, \quad T_1 = Q \circ \Phi_T^{-1}. \quad (3.23b)$$

Dabei sind T_0 und T_1 wiederum Involutionen. Um nachzuweisen, daß T_0 eine Involution ist, benötigt man gerade die Voraussetzung, daß V unter Q invariant ist.

Es ist also auf einfache Weise möglich, aus Invarianzen der Hamilton–Funktion (3.14) auf Umkehrende Symmetrien der zugehörigen Poincaré–Abbildung zu schließen. Im folgenden Abschnitt soll das hier vorgestellte allgemeine Verfahren auf das gegebene System angewandt werden.

3.3 Symmetrien des Systems

Da die Hamilton–Funktion H_0 der ungestörten Bewegung, wie sie in Abschnitt 1.1 (siehe (1.3)) eingeführt wurde, sowohl quadratisch in den Impulsen als auch quadratisch in den Orten ist und das Kick–Potential als symmetrisch vorausgesetzt wird, ist H sowohl invariant gegenüber R als auch gegenüber Q .

Aus der Invarianz gegenüber $R : (x, p) \mapsto (x, -p)$ ergeben sich für die Poincaré–Abbildung $M_{\alpha, F}$ nach kurzer Rechnung entsprechend dem obigen Verfahren die folgenden beiden Umkehrenden Symmetrien:

$$S_0 : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -u - F_x(x, y) \\ y \\ -v - F_y(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.24a)$$

und

$$S_1 : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\frac{\sin \alpha}{\alpha} & 0 & 0 \\ -\alpha \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.24b)$$

Wie man schnell nachprüft, sind S_0 und S_1 antisymplektische Involutionen mit $M_{\alpha,F} = S_1 \circ S_0$. Da $\det DS_0 = \det DS_1 = 1 > 0$ ist, sieht man, daß die für zweidimensionale Systeme gültige Bedingung $\det DS < 0$ in höheren Dimensionen nicht mehr zutrifft.¹

Aus der Invarianz gegenüber $Q : (x, p) \mapsto (-x, p)$ ergeben sich ganz entsprechend:

$$T_0 : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ u + F_x(x, y) \\ -y \\ v + F_y(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.25a)$$

und

$$T_1 : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{\alpha} & 0 & 0 \\ \alpha \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.25b)$$

Hierbei kann man sich erneut davon überzeugen, daß T_0 und T_1 antisymplektische Involutionen sind. Offenbar gilt $T_0 = -S_0$ und $T_1 = -S_1$. Man hätte T_0 und T_1 auch durch allgemeine Symmetrieüberlegungen gewinnen können: Da die Kick-Funktionen F_x und F_y ungerade sind (dies entspricht gerade der Voraussetzung, daß V gerade ist), ist $-id$ eine Symmetrie von $M_{\alpha,F}$, und damit sind $-id \circ S_0$ und $-id \circ S_1$ Umkehrende Symmetrien von $M_{\alpha,F}$.

Betrachtet man die umskalierte Abbildung $\tilde{M}_{\alpha,F}$ wie sie in Abschnitt 1.2 (siehe (1.16)) definiert wurde, so erhält man ganz entsprechend die folgenden Symmetrien:

$$\tilde{S}_0 = -\tilde{T}_0 : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -u - F_x(x, y) \\ y \\ -v - F_y(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.26a)$$

und

$$\tilde{S}_1 = -\tilde{T}_1 : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.26b)$$

¹Der Grund für das umgekehrte Vorzeichen liegt darin begründet, daß S_0 und S_1 Spiegelungen im $\mathbb{R}^4$ sind. Eine genauere Diskussion hierzu findet sich im Anhang A.1.

Kapitel 4

Der Grenzfall $\beta = 0$

Eine richtige Theorie muß Vorhersagen ermöglichen und wenigstens potentiell quantitativ sein.

AUGUSTE COMTE

In diesem Kapitel soll allein die in Abschnitt 1.5 eingeführte (x, u) -Dynamik $M_{\alpha, f}^{(x)}$ betrachtet werden. Gerade für diesen Spezialfall erweist es sich als sehr sinnvoll, die Dynamik in der Skalierung (1.15) zu betrachten, also:

$$\sqrt{\alpha}x \rightarrow x \quad , \quad \frac{u}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow u \quad , \quad \frac{f(x/\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow f(x). \quad (4.1)$$

In dieser Skalierung ergibt sich analog zu (1.22a) die folgende Dynamik:

$$\tilde{M}_{\alpha, f}^{(x)} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u + f(x) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Praktisch alle Überlegungen der folgenden Unterabschnitte lassen sich ebenso gut auf die nichtskalierte Abbildung $M_{\alpha, f}^{(x)}$ anwenden, die Rechnungen werden nur ein wenig aufwendiger, und es zeigt sich, daß die im folgenden besprochenen Netzstrukturen für $\tilde{M}_{\alpha, f}^{(x)}$ eine symmetrischere Gestalt annehmen.

Im folgenden soll mit dem *Stochastischen Netz* der Abbildung $\tilde{M}_{\alpha, f}^{(x)}$ dasjenige Phasenraumgebiet gemeint sein, in dem es einen chaotischen Orbit gibt, der im Phasenraum eine netzartige Struktur erzeugt. Die einzelnen Komponenten des Netzes sollen als *Kanäle* bezeichnet werden. Mit den *Maschen* seien die Freiräume zwischen dem Netz gemeint, auf denen sich $\tilde{M}_{\alpha, f}^{(x)}$ regulär verhält. Ziel aller nachfolgenden Überlegungen soll es sein, das genaue Aufbauprinzip des Netzes und der davon umschlossenen Maschen zu untersuchen sowie der entsprechenden Dynamik

Der Übersichtlichkeit halber soll in diesem Kapitel $\tilde{M}_{\alpha, f}$ statt $\tilde{M}_{\alpha, f}^{(x)}$ geschrieben werden. Die Herkunft aus dem vierdimensionalen System darf jedoch nicht vergessen werden.

4.1 Aperiodische Kick-Funktionen

In diesem Abschnitt soll die oben definierte Abbildung $\bar{M}_{\alpha,f} = \tilde{M}_{\alpha,f}^{(x)}$ für eine aperiodische Kick-Funktion $f(x)$ untersucht werden. Im folgenden sei $f(x)$ von der speziellen Gestalt

$$f(x) = -K \begin{cases} g(x) & \text{für } |x| < b \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{für } |x| \geq b \end{cases} \quad (4.3)$$

mit beliebigen Konstanten b und K sowie beliebiger stetiger, ungerader Funktion $g(x)$, die $g(b) = 1$ erfüllt. $f(x)$ ist dann selber stetig und ungerade. Diese Kick-Funktion ist etwas allgemeiner als die in Abschnitt 1.7 vorgestellte Kick-Funktion $f_{A1}(x)$. Alle Berechnungen sollen anhand von $f_{A1}(x)$ durchgeführt werden, sämtliche mathematischen Ergebnisse dieses Abschnitts gelten jedoch für beliebige Kick-Funktionen vom Typ (4.3).

Ferner sei α ein rationales Vielfaches von 2π , also

$$\alpha = 2\pi \frac{p}{q} \quad (4.4)$$

mit $p, q \in \mathbb{N}$. Es kann ohne Einschränkung davon ausgegangen werden, daß $0 < p/q < 1$ gilt, da α als Winkel ohnehin nur bis auf Vielfache von 2π festgelegt werden muß. Wegen (1.13) entspricht diese Einschränkung dem Resonanzfall

$$\omega = \frac{q}{p} \omega_c. \quad (4.5)$$

Das heißt, die Kick-Frequenz $\omega = 2\pi/T$ soll ein rationales Vielfaches der Zyklotronfrequenz ω_c sein.

Für eine aperiodische Kick-Funktion $f(x)$ gemäß (4.3) und entsprechenden Winkel α , der (4.4) genügt, lassen sich genaue Aussagen über die Dynamik in den Maschen treffen. Die Überlegungen des folgenden Unterabschnitts gelten für beliebig gewähltes $g(x)$, das den oben genannten Nebenbedingungen genügt. Erst zur Betrachtung der Dynamik auf dem Netz wird es erforderlich sein, die Funktion $g(x)$ festzulegen.

4.1.1 Periodische Orbits

Es erweist sich als sinnvoll, die wie folgt definierten Mengen zu betrachten:

$$\Lambda^i = \left\{ (x, u) \in \mathbb{R}^2; |\bar{M}_{\alpha,f}^i(x, u) \cdot \vec{e}_x| < b \right\} \quad (4.6)$$

und eine endliche Vereinigung dieser Mengen:

$$\Omega^l = \bigcup_{0 \leq i \leq l} \Lambda^i. \quad (4.7)$$

Λ^i ist das i -te Urbild von Λ^0 , also die Menge aller Punkte, die nach i Iterationen in $\Lambda^0 = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2; |x| < b\}$ liegen. Ω^l ist folglich diejenige Menge, deren Punkte

nach l Iterationen mindestens einmal Λ^0 passiert haben. Da die Abbildung $\bar{M}_{\alpha,f}$ stetig ist, sind die Mengen Λ^i als Urbilder der offenen Menge Λ^0 offen und damit ist Ω^l als endliche Vereinigung ebenfalls offen.

Anschaulich ist Λ^0 gerade dasjenige Phasenraumgebiet, auf dem die Funktion $g(x)$ wirksam ist. Da $g(x)$ bisher noch nicht festgelegt wurde, das heißt, daß die Dynamik auf Ω^l im wesentlichen noch unbekannt ist, soll im folgenden zunächst die Dynamik auf dem Komplement $\mathbb{R}^2 - \Omega^l$ betrachtet werden. Hier gilt der folgende Hilfssatz:

Lemma 4.1 *Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \Omega^l$ ein stetiger Weg und $x_i(t) = (\bar{M}_{\alpha,f}^i \circ \gamma)(t) \cdot \vec{e}_x$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt $f(x_i(t)) = f(x_i(0))$ für alle $0 \leq i \leq l$ und alle $t \in [0, 1]$.*

Beweis:

Da $\gamma(t) \notin \Omega^l$ für alle $t \in [0, 1]$ vorausgesetzt ist, muß nach Definition der Menge Ω^l gelten: $|x_i(t)| \geq b$ für alle $0 \leq i \leq l$ und alle $t \in [0, 1]$. Da $\bar{M}_{\alpha,f}$ stetig ist, müssen die $x_i(t)$ stetige Funktionen sein. Ist dann $x_i(0) \geq b$, so muß auch $x_i(t) \geq b$ für alle $t \in [0, 1]$ gelten, ansonsten wäre die Stetigkeit verletzt. Entsprechend wird der Fall $x_i(0) \leq -b$ behandelt.

□

Es sei angemerkt, daß dieses Lemma auch für unstetige Kick-Funktionen $f(x)$ vom Typ (4.3) und damit auch für unstetige Abbildung $\bar{M}_{\alpha,f}$ gilt. Der Beweis gestaltet sich dann jedoch etwas komplizierter (siehe Anhang A.2).

Anschaulich hat Lemma 4.1 die folgende Bedeutung: Jeder Orbit, der in $\mathbb{R}^2 - \Omega^l$ startet, bleibt für l Iterationen außerhalb der Menge Λ^0 , auf der die Funktion $g(x)$ wirksam ist. Das heißt, die $f(x_i)$ für $0 \leq i \leq l$ können nur die Werte $+K$ und $-K$ annehmen. Man kann dem Orbit also für l Iterationen eine Symbolfolge aus den Symbolen $+$ und $-$ zuordnen. Lemma 4.1 besagt, daß alle in einem zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{R}^2 - \Omega^l$ startenden Orbits für l Iterationen die gleichen Symbolfolgen haben. Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich nun der folgende Satz beweisen:

Satz 4.1 *Sei $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^2 - \Omega^l$ ein periodischer Punkt der Periode n mit $n \leq l$. Dann ist $\bar{M}_{\alpha,f}^n$ in jeder zusammenhängenden Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^l$ von $(\bar{x}, \bar{u})$ von der folgenden Gestalt:*

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi np}{q} & \sin \frac{2\pi np}{q} \\ -\sin \frac{2\pi np}{q} & \cos \frac{2\pi np}{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ u - \bar{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Beweis:

Da $(\bar{x}, \bar{u})$ periodisch mit der Periode n ist, gilt $\bar{M}_{\alpha,f}^n(\bar{x}, \bar{u}) = (\bar{x}, \bar{u})$. Entsprechend der skalierten Version von (1.24) gilt dann:

$$\bar{M}_{\alpha,f}^n \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \cos n\alpha + \bar{u} \sin n\alpha \\ -\bar{x} \sin n\alpha + \bar{u} \cos n\alpha \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} f(\bar{x}_k) \sin(n-k)\alpha \\ f(\bar{x}_k) \cos(n-k)\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$$

mit $\bar{x}_k = \bar{M}_{\alpha,f}^k(\bar{x}, \bar{u}) \cdot \vec{e}_x$. Hieraus folgt sofort:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} f(\bar{x}_k) \sin(n-k)\alpha \\ f(\bar{x}_k) \cos(n-k)\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Sei $U \in \mathbb{R}^2 - \Omega^l$ eine zusammenhängende Umgebung von $(\bar{x}, \bar{u})$ und $(x, u) \in U$ ein beliebiger Punkt in dieser Umgebung. Da U zusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = (\bar{x}, \bar{u})$ und $\gamma(1) = (x, u)$. Nach Lemma 4.1 gilt dann:

$$f(x_k) = f((\bar{M}_{\alpha,f}^k \circ \gamma)(1) \cdot \vec{e}_x) = f((\bar{M}_{\alpha,f}^k \circ \gamma)(0) \cdot \vec{e}_x) = f(\bar{x}_k)$$

mit $x_k = \bar{M}_{\alpha,f}^k(x, u) \cdot \vec{e}_x$ für $0 \leq k < n \leq l$. Folglich ist:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\alpha,f}^n \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \cos n\alpha + u \sin n\alpha \\ -x \sin n\alpha + u \cos n\alpha \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} f(x_k) \sin(n-k)\alpha \\ f(x_k) \cos(n-k)\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} f(\bar{x}_k) \sin(n-k)\alpha \\ f(\bar{x}_k) \cos(n-k)\alpha \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ u - \bar{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wird anschließend noch $\alpha = 2\pi p/q$ eingesetzt, ist hiermit (4.8) gezeigt. Da $(x, u) \in U$ beliebig gewählt war, ist der Satz bewiesen. $\square$

Bei diesem Satz muß beachtet werden, daß periodisch mit der Periode n nur meint, daß $\bar{M}_{\alpha,f}^n(\bar{x}, \bar{u}) = (\bar{x}, \bar{u})$ gilt. Für den Satz ist es unerheblich, ob $(\bar{x}, \bar{u})$ auch die Hauptperiode n hat. Ferner muß beachtet werden, daß bereits ein periodischer Punkt außerhalb von Ω^l bekannt sein muß, woraus dann folgt, daß $\bar{M}_{\alpha,f}^n$ in einer Umgebung um diesen Punkt herum eine einfache Drehung um den Winkel $2\pi np/q$ im mathematisch negativen Sinn ist. Es kann gezeigt werden, daß immer ein solcher periodischer Punkt innerhalb eines zusammenhängenden Gebietes, das ganz in $\mathbb{R}^2 - \Omega^l$ mit genügend großem l liegt, existiert. Da dieser Beweis jedoch sehr aufwendig und für das Verständnis der Dynamik nicht sehr hilfreich ist, wurde er auf das Ende dieses Unterabschnitts geschoben. Zunächst einmal sollen die periodischen Punkte mit Hilfe von Symmetrielinien gefunden werden.

Um die weiteren Überlegungen zu erleichtern, soll im folgenden nur noch die Menge Ω^∞ , das heißt $l \rightarrow \infty$, betrachtet werden, die als abzählbare Vereinigung offener Mengen ebenfalls offen ist. $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ ist dann diejenige Menge, deren Orbits nie in das Gebiet Λ^0 eintauchen. Prinzipiell ist es möglich, alle weiteren Überlegungen mit endlichem $l \in \mathbb{N}$ durchzuführen, allerdings würde dies auf zu viele Nebenbedingungen führen, die für das allgemeine Verständnis nicht hilfreich wären.

Satz 4.1 hat eine wichtige Konsequenz: Jeder Punkt (x, u) der zusammenhängenden Umgebung U des n -periodischen Punktes $(\bar{x}, \bar{u})$ ist seinerseits periodisch, da $\bar{M}_{\alpha,f}^n$ nichts weiter als eine Drehung um den Winkel $-2\pi np/q$ ist. Die Hauptperiode von (x, u) ergibt sich aus p, q und n gemäß dem folgenden Satz:

Satz 4.2 Sei $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ ein periodischer Punkt der Hauptperiode n , dann gilt für alle zusammenhängenden Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ von $(\bar{x}, \bar{u})$:

- (a) Ist np kein Vielfaches von q , so ist jeder Punkt $(x, u) \in U - \{(\bar{x}, \bar{u})\}$ periodisch mit der Hauptperiode

$$k = \frac{nq}{\text{ggT}(np, q)}. \quad (4.9)$$

- (b) Ist np ein Vielfaches von q , so sind alle Punkte $(x, u) \in U$ bis auf maximal einen periodisch mit der Hauptperiode n .

Beweis:

Die Überlegungen seien zunächst nur auf den Fall (a) beschränkt, das heißt np sei kein Vielfaches von q . Nach Satz 4.1 ist $\bar{M}_{\alpha, f}^n$ in jeder zusammenhängenden Umgebung U von $(\bar{x}, \bar{u})$ eine Drehung um den Winkel $-2\pi np/q$ um den Punkt $(\bar{x}, \bar{u})$. Offenbar ist dann $\bar{M}_{\alpha, f}^{nm}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ in U eine Drehung um den Winkel $-2\pi nmp/q$. Somit ist klar, daß jeder Punkt in $U - \{(\bar{x}, \bar{u})\}$ periodisch mit der Periode $k = nm$ ist, wobei

$$m = \frac{q}{\text{ggT}(np, q)}$$

gilt; $\bar{M}_{\alpha, f}^{nm}$ ist dann eine Drehung um einen Winkel $-2\pi j$ mit $j \in \mathbb{N}$. Es bleibt zu zeigen, daß $k = nm$ auch die Hauptperiode dieser Punkte ist. Der Beweis erfolgt indirekt:

Angenommen es gibt ein $(x', u') \in U - \{(\bar{x}, \bar{u})\}$ und ein $k' < k$ mit $\bar{M}_{\alpha, f}^{k'}(x', u') = (x', u')$. Nach Satz 4.1 ist dann $\bar{M}_{\alpha, f}^{k'}$ in U eine Drehung um den Winkel $-2\pi k'p/q$ um den Punkt (x', u') . Da np kein Vielfaches von q und somit $\bar{M}_{\alpha, f}^n$ eine echte Drehung um den Punkt $(\bar{x}, \bar{u}) \neq (x', u')$ ist, muß $\bar{M}_{\alpha, f}^{k'}|_U = \text{id}|_U$ gelten — ansonsten könnte $\bar{M}_{\alpha, f}^{k'} \circ \bar{M}_{\alpha, f}^n = \bar{M}_{\alpha, f}^n \circ \bar{M}_{\alpha, f}^{k'}$ nie erfüllt werden.

Ferner ist nach Voraussetzung n die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft $\bar{M}_{\alpha, f}^n(\bar{x}, \bar{u}) = (\bar{x}, \bar{u})$. Folglich ist k' ein Vielfaches von n , also $k' = nm'$. Es kann nun keine kleinere natürliche Zahl $m' < m$ mit der Eigenschaft $\bar{M}_{\alpha, f}^{nm'}|_U = \text{id}|_U$ geben, denn für diese müßte auch gelten:

$$-2\pi \frac{nm'p}{q} = -2\pi j'$$

für ein $j' \in \mathbb{N}$. Kürzt man den Bruch, so folgt:

$$m' \frac{p'}{q'} \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad p' = \frac{np}{\text{ggT}(np, q)} \quad \text{und} \quad q' = \frac{q}{\text{ggT}(np, q)}.$$

Da p' und q' dann teilerfremd sind, muß $m' = q'$ gelten, also gerade $m' = m$. Damit ist gezeigt, daß alle Punkte in $U - \{(\bar{x}, \bar{u})\}$ die Hauptperiode $k = nm$ haben.

Ist hingegen np ein Vielfaches von q (Fall (b)), so ist nach Satz 4.1 $\bar{M}_{\alpha, f}^n|_U = \text{id}|_U$. Es kann nun einen Punkt $(x', u') \in U - \{(\bar{x}, \bar{u})\}$ und ein $k' < n$ mit $\bar{M}_{\alpha, f}^{k'}(x', u') = (x', u')$ geben. $k'p$ kann jedoch kein Vielfaches von q sein, da ansonsten $\bar{M}_{\alpha, f}^{k'}|_U = \text{id}|_U$ und somit n nicht die kleinste natürliche Zahl mit

$\bar{M}_{\alpha,f}^n(\bar{x}, \bar{u}) = (\bar{x}, \bar{u})$ wäre. Für diesen Punkt (x', u') gelten die obigen Überlegungen für den Fall (a), und es ist klar, daß es nur einen solchen Punkt in U geben kann. Somit haben alle Punkte in U bis auf maximal einen die Hauptperiode n .

□

Zusammengefaßt läßt sich bereits das Folgende über die Dynamik von $\bar{M}_{\alpha,f}$ auf dem Phasenraumgebiet $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ sagen: Hat man einen periodischen Punkt der Hauptperiode n in $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ gefunden, so weiß man, daß ein beliebiges zusammenhängendes Gebiet um diesen Punkt herum ebenfalls periodisch ist. Für die genaue Periode der Punkte dieses Gebietes ist es entscheidend, ob np und q teilerfremd sind oder nicht. Ist np beispielsweise ein Vielfaches von q , so ist jeder Punkt in dem Gebiet bis auf eine Ausnahme ebenfalls periodisch mit der Hauptperiode n . Sind np und q hingegen teilerfremd so ist jeder Punkt in dem Gebiet periodisch mit der Hauptperiode nq .

Nach diesen recht mathematischen Überlegungen soll nun zunächst einmal die Struktur der Menge Ω^∞ untersucht werden. Es liegt ja durchaus im Bereich des Möglichen, daß Ω^∞ den gesamten Phasenraum $\mathbb{R}^2$ überdeckt und somit nichts übrig bleibt, auf das sich die obigen Sätze anwenden ließen; für große b und kleine K ist dies sogar der Fall.

Als erstes macht man sich klar, daß der Parameter K in der Kick-Funktion $f(x)$ immer auf 1 gesetzt werden kann. Ist nämlich $K \neq 0$ beliebig, so kann man die Koordinaten folgendermaßen neu skalieren:

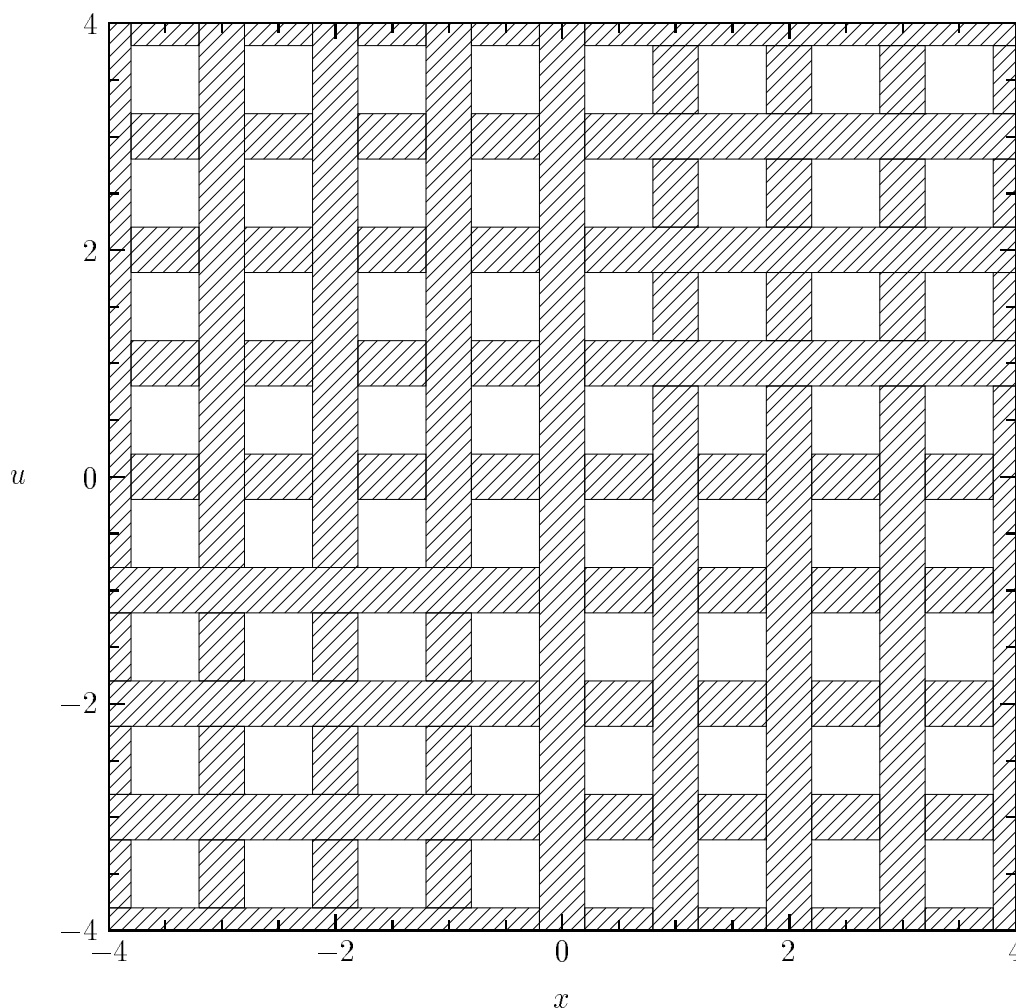
$$x \rightarrow Kx \quad , \quad u \rightarrow Ku. \quad (4.10)$$

Das heißt, man vergrößert den Phasenraum um einen konstanten Faktor. Über diese Koordinatentransformation ist dann $\bar{M}_{\alpha,f}$ auf einfache Weise topologisch konjugiert zu $\bar{M}_{\alpha,\hat{f}}$ mit

$$\hat{f}(x) = - \begin{cases} \hat{g}(x) = g(Kx) & \text{für } |x| < \hat{b} = b/K \\ \text{sgn}(x) & \text{für } |x| \geq \hat{b} = b/K \end{cases} . \quad (4.11)$$

Hierdurch sind K und b miteinander verknüpft, und man kann sich aussuchen, welchem der beiden Parameter man einen festen Wert zuschreibt oder ob man allein das Verhältnis b/K als Parameter ansieht. Im folgenden soll immer $K = 1$ gelten.

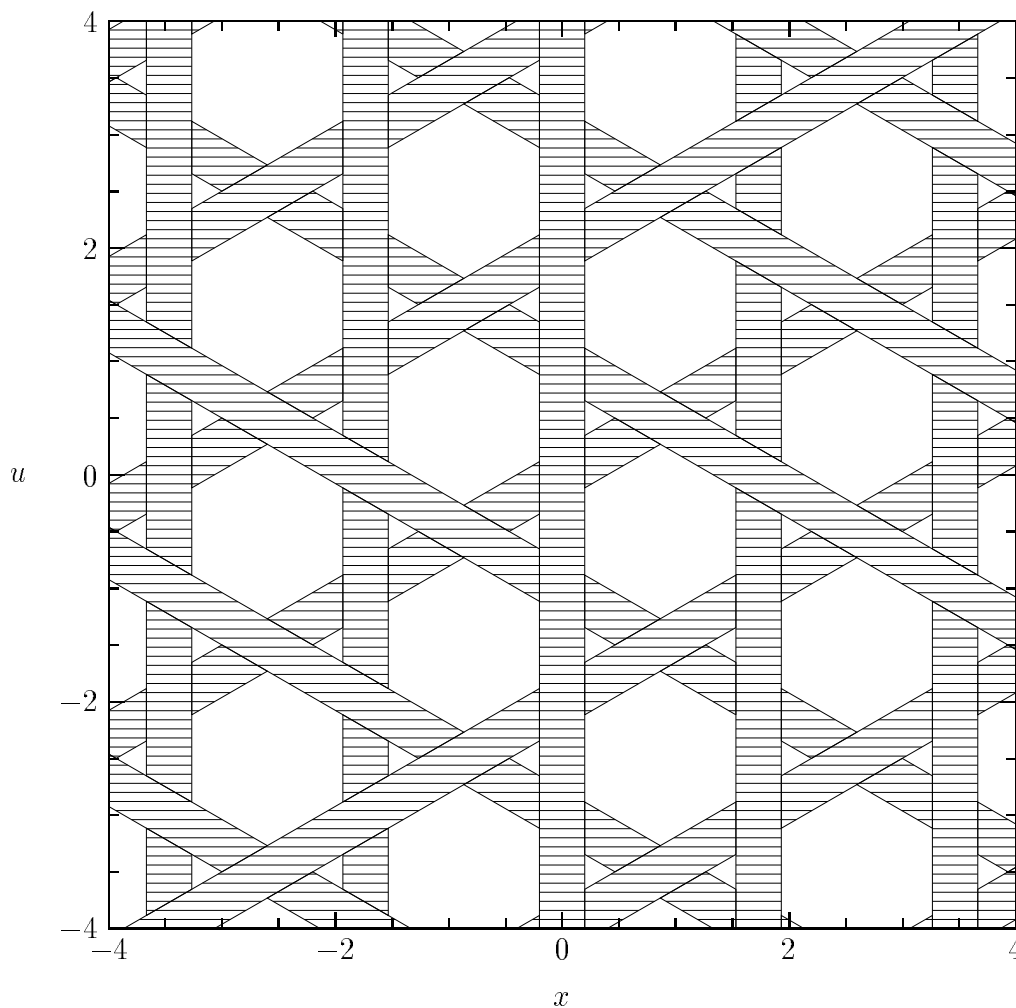
Die Menge Ω^∞ soll für zwei Parameterwerte q untersucht werden, bei denen sich besonders übersichtliche Strukturen ergeben. Es wird später genau erläutert werden, daß man für andere Parameterwerte kompliziertere Strukturen erhält. In Abbildung 4.1 ist die Menge Ω^∞ für $p = 1, q = 4$ und $b = 0.2$ schraffiert dargestellt. Da auf dem Computer nicht unendlich viele Iterationen durchgeführt werden können, wurde die Menge Λ^0 nur 30mal rückwärts iteriert. Für den hier gewählten Ausschnitt ist dies bereits ausreichend, da sich bei höheren Iterationen nur noch außerhalb des Ausschnittes etwas ändert. Abbildung 4.2 zeigt das gleiche für $p = 1, q = 6$ und $b = 0.2$. Die in den Abbildungen auftretenden Über- und

Abbildung 4.1: Die Menge Ω^∞ für $p = 1, q = 4$ und $b = 0.2$.

Unterschneidungen der verschiedenen Streifen sind rechentechnischer Natur und haben keine anschauliche Bedeutung.

Da der Streifen Λ^0 nach Definition die Breite $2b$ hat und $\bar{M}_{\alpha,f}$ im wesentlichen eine Drehung ist, hat jeder der abgebildeten Streifen von Ω^∞ ebenfalls die Breite $2b$. Variiert man b , so ändert sich einzig und allein die Breite der Streifen, nicht jedoch deren Position. Damit ist anschaulich klar, daß für genügend kleine b die Menge Ω^∞ nicht ganz $\mathbb{R}^2$ überdeckt und eine netzartige Struktur bildet. Es bleiben demnach genügend Bereiche offen, auf die die obigen Sätze angewandt werden können. In Abbildung 4.1 sind dies gerade die nicht schraffierten Quadrate und in Abbildung 4.2 die nicht schraffierten Drei- und Sechsecke.

Findet man in einem dieser freien Bereiche *einen* periodischen Punkt, so ist mit Satz 4.2 gezeigt, daß *alle* Punkte innerhalb dieses Bereiches periodisch sind. Dieser Punkt kann entsprechend den Ausführungen in Kapitel 3 mit Hilfe der Symmetrielinien gefunden werden. Aus den vierdimensionalen Umkehrenden Symmetrien $\tilde{S}_k$ und $\tilde{T}_k$ in Gleichung (3.26) erhält man für die (x, u) -Dynamik im Falle $\beta = 0$


 Abbildung 4.2: Die Menge Ω^∞ für $p = 1, q = 6$ und $b = 0.2$.

sofort die folgenden Umkehrenden Symmetrien von $\bar{M}_{\alpha,f}$:

$$\bar{S}_0 = -\bar{T}_0 : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -u - f(x) \end{pmatrix} \quad (4.12a)$$

und

$$\bar{S}_1 = -\bar{T}_1 : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}. \quad (4.12b)$$

Wie man schnell nachrechnet, sind die beiden ersten Symmetrielinien von der folgenden Gestalt:

$$\text{Fix}(\bar{S}_0) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2; u = -f(x)/2\} \quad (4.13a)$$

$$\text{Fix}(\bar{S}_1) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2; u = -x \tan(\alpha/2)\}. \quad (4.13b)$$

In die Berechnung der Symmetrielinien geht also die genaue Gestalt von $f(x)$ ein, daß heißt $g(x)$ muß festgelegt werden. Für die nachfolgenden Beispiele soll $g(x)$

linear gewählt werden, also:

$$g(x) = \frac{x}{b}. \quad (4.14)$$

Die hieraus resultierende Kick-Funktion $f(x)$ wurde bereits im Abschnitt 1.7 (siehe (1.29)) kurz vorgestellt und wird im folgenden noch eine bedeutende Rolle spielen. Hier wird dieses spezielle $g(x)$ jedoch nur dazu benötigt, um die Symmetrielinien von $\bar{M}_{\alpha,f}$ vollständig berechnen zu können.

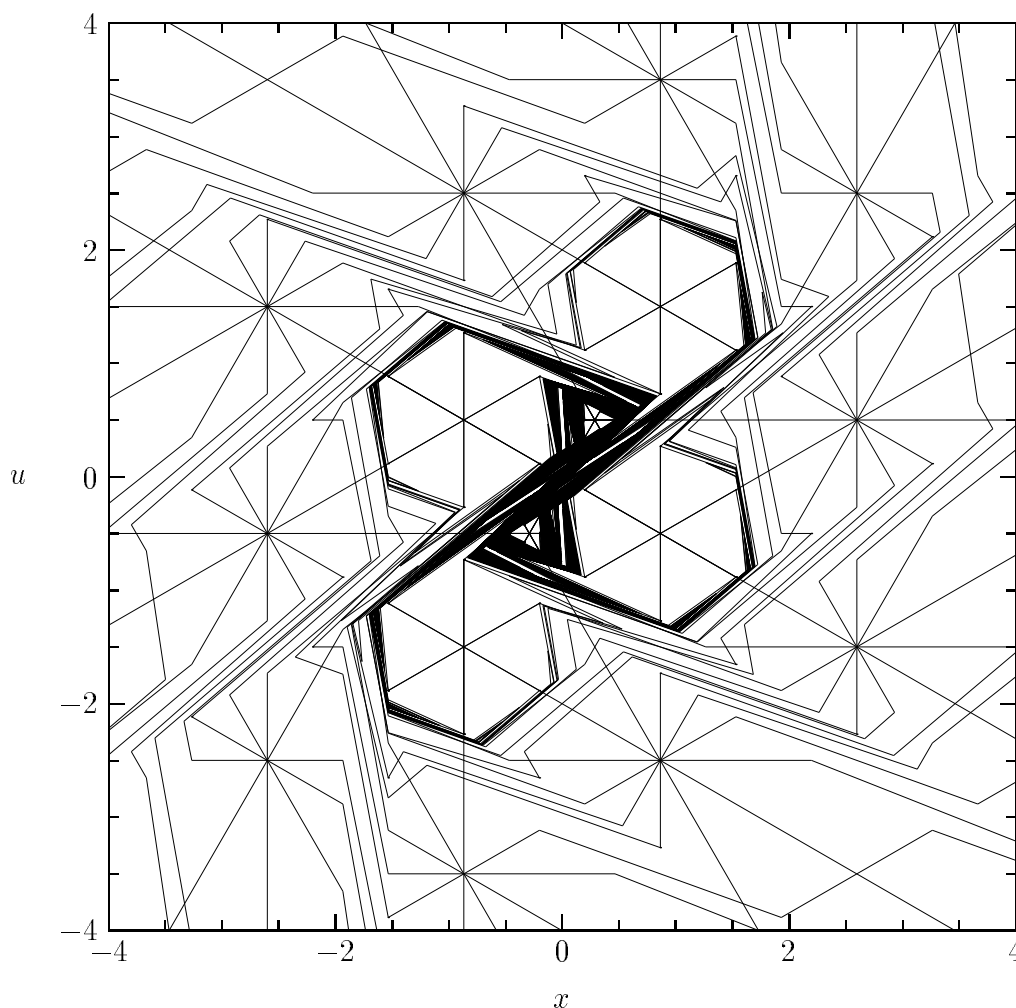
Abbildung 4.3 zeigt die ersten 13 Iterierten von $\text{Fix}(\bar{S}_0)$ und von $\text{Fix}(\bar{S}_1)$, also die Fixpunktmenge der Symmetrien $\bar{S}_k$ für $0 \leq k \leq 27$. Bei höheren Iterationen erhalten die Randbereiche noch weitere Strukturen; da in Abbildung 4.3 jedoch schon über 20000 Linien zu sehen sind und der Rechenaufwand exponentiell ansteigt (bei der 14. Iteration wären es schon knapp 40000 Linien), wurde darauf verzichtet, noch höhere Symmetrielinien zu berechnen. Man erkennt auch so eine strukturelle Ähnlichkeit mit der Menge Ω^∞ , wie sie in Abbildung 4.2 zu sehen ist.

Prinzipiell müßten der Vollständigkeit halber auch die Symmetrielinien der $\bar{T}_k$ bestimmt werden. Es gilt zwar $\bar{T}_k = -\bar{S}_k$, aber das bedeutet nicht, daß sich damit auch die Fixpunktmenge $\text{Fix}(\bar{T}_k)$ auf einfache Weise aus den Fixpunktmenge $\text{Fix}(\bar{S}_k)$ ergeben. Eine genaue Berechnung zeigt jedoch, daß die Mengen $\text{Fix}(\bar{T}_k)$ sich qualitativ nicht von Abbildung 4.3 unterscheiden. Aus diesem Grunde sollen diese Umkehrenden Symmetrien hier nicht weiter betrachtet werden.

Legt man die Symmetrielinien über die Menge Ω^∞ , wobei Überschneidungen weggelassen werden (siehe Abbildung 4.4), so ist offensichtlich, daß in allen nicht von Ω^∞ überdeckten Bereichen des Phasenraumes mindestens ein symmetrischer periodischer Punkt zu finden ist. Nach Satz 4.2 folgt damit aber, daß alle Punkte, die in einem solchen Bereich liegen, periodisch sind. Daß in Abbildung 4.4 immer noch einige Überschneidungen vorhanden sind, hat rechentechnische Gründe und soll nicht weiter verwirren.

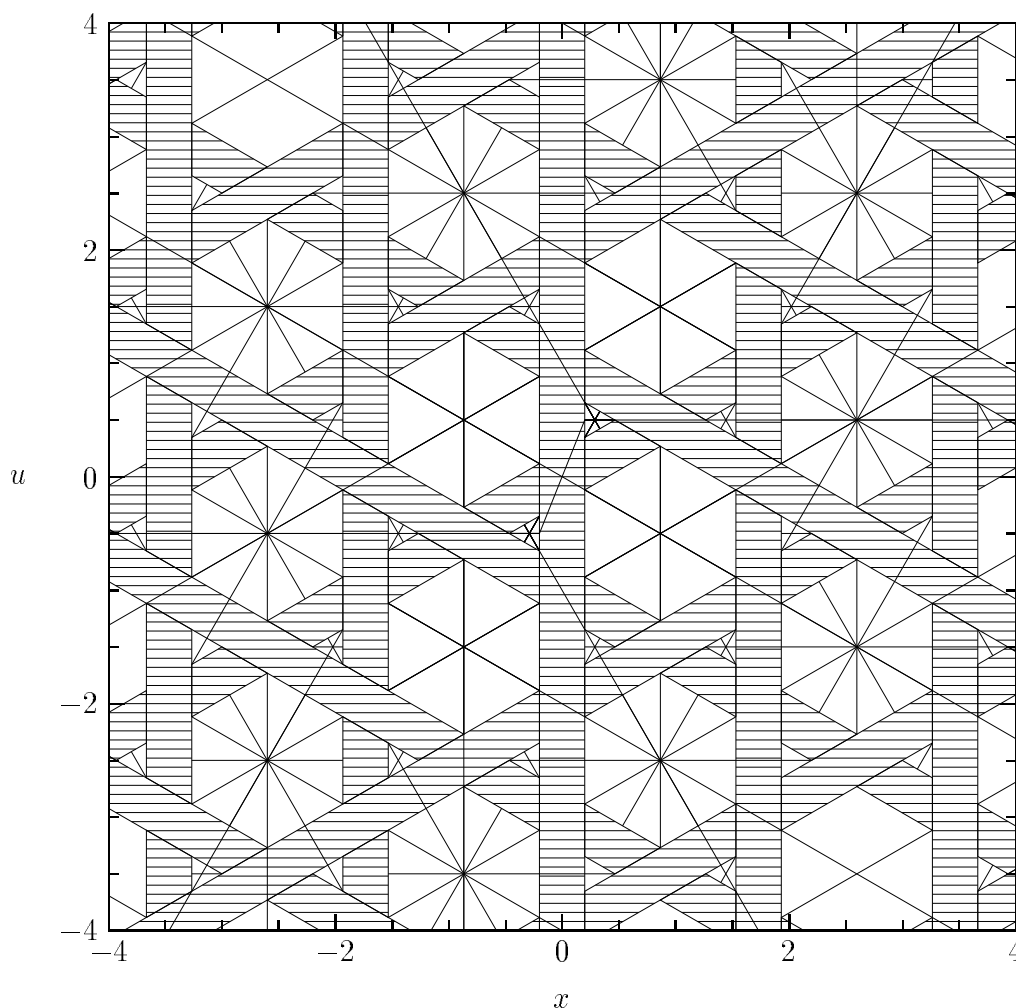
Das Entfernen der Überschneidungen von Ω^∞ und den Symmetrielinien in Abbildung 4.4 hat mehrere Vorteile. Zum einen wird die Anzahl der Linien drastisch reduziert, was sowohl der Übersichtlichkeit dient, als auch die Berechnungen um ein Vielfaches vereinfacht. Beschränkt man sich allein auf das Gebiet $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$, so können dort die Symmetrielinien mit wesentlich geringerem Rechenaufwand iteriert werden, als auf ganz $\mathbb{R}^2$. Zum anderen wird durch das Ausblenden der Menge Ω^∞ gerade derjenige Phasenraumbereich fortgelassen, auf dem die Funktion $g(x)$ wirksam ist. Bei der Wahl einer anderen Funktion $g(x)$ bleibt Abbildung 4.4 unverändert. Allein für Abbildung 4.3 war es notwendig, $g(x)$ festzulegen, alle weiteren Ausführungen gelten uneingeschränkt für beliebiges $g(x)$.

Mit Abbildung 4.4 ist zunächst nur die Existenz eines periodischen Punktes numerisch gesichert, über dessen Periode wurde keine Aussage gemacht. Führt man eine genauere Analyse der Schnittpunkte durch, daß heißt, notiert man genau, die wievielten Iterierten der Symmetrielinien sich in welchem Punkt schneiden, so erkennt man, daß die Perioden der periodischen Punkte keine Vielfachen von q sind. In Abbildung 4.5 sind die Perioden der symmetrischen periodischen Punkte, das heißt der Schnittpunkte von Symmetrielinien, in die jeweiligen Phasenraumbereiche eingetragen.


 Abbildung 4.3: Symmetrielinien für $p = 1, q = 6$ und $b = 0.2$.

Entsprechend Satz 4.1 ist $\bar{M}_{\alpha,f}^n$ in der Umgebung dieser periodischen Punkte der Periode n einfach eine Drehung um den Winkel $-2\pi np/q$. Für den Fall $p = 1, q = 6$ bedeutet dies, daß $\bar{M}_{\alpha,f}^n$ eine Drehung um $-\pi n/3$ ist. Damit ist plausibel, weshalb die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ regelmäßigen Drei- und Sechsecken ergeben, deren Mittelpunkt der symmetrische periodische Punkt ist. Ist n teilerfremd zu $q = 6$, so ergeben sich Sechsecke und die Punkte um den Mittelpunkt sind nach Satz 4.2 periodisch mit der Periode $6n$. Ist n hingegen ein Vielfaches von 2, so sind Dreiecke und Sechsecke möglich, und die Punkte um den Mittelpunkt sind periodisch mit der Periode $3n$. Perioden, die Vielfache von 3 sind, scheint es jedoch nicht zu geben. Eine genauere Analyse der Perioden findet sich im folgenden Unterabschnitt.

Hiermit ist die Dynamik auf der Menge $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ befriedigend erklärt. Sämtliche Überlegungen sind jedoch davon abhängig, daß es in jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ immer mindestens einen periodischen Punkt gibt; nur unter dieser Bedingung sind die Sätze 4.1 und 4.2 anwendbar. Bis jetzt wurde nur

Abbildung 4.4: Symmetrielinien und Menge Ω^∞ für $p = 1, q = 6$ und $b = 0.2$.

numerisch nachgewiesen, daß es für bestimmte Parameterwerte in einem kleinen Phasenraumgebiet immer solche Punkte gibt. Es steht noch ein mathematisch exakter Beweis für die Existenz dieser Punkte aus, der nun nachgeholt werden soll.

Es erweist sich als einfacher, nicht die Existenz eines einzelnen periodischen Punktes in einer Zusammenhangskomponente zu beweisen, sondern zu zeigen, daß — entsprechend Satz 4.2 — bereits jeder Punkt in einer Zusammenhangskomponente periodisch ist. Ziel der nachfolgenden Überlegungen soll es daher sein, zu zeigen, daß es zu jeder zusammenhängenden Menge $U \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ ein genügend großes n mit

$$\bar{M}_{\alpha,f|U}^n = id|_U \quad (4.15)$$

gibt.

Für die folgenden Überlegungen soll durchgängig $p = 1$ gesetzt werden, also α

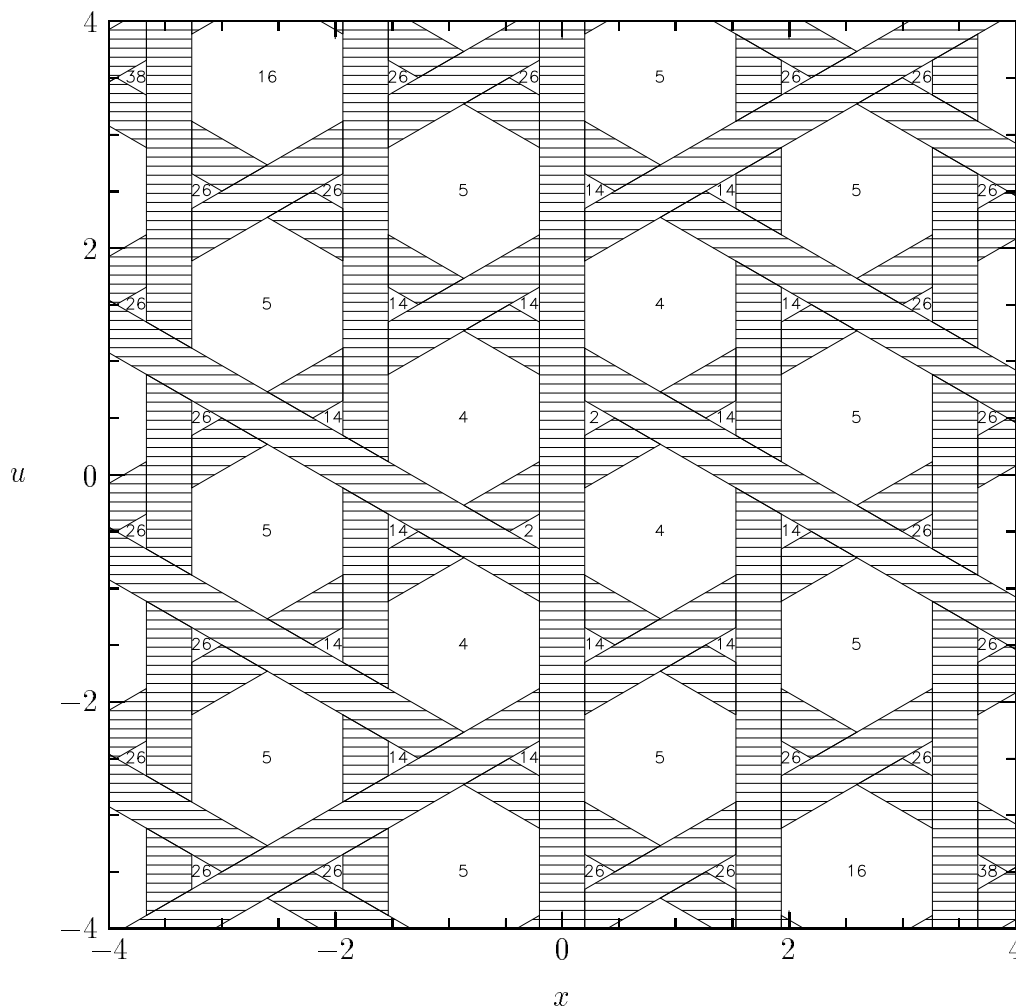


Abbildung 4.5: Perioden der symmetrischen periodischen Punkte für $p = 1, q = 6$ und $b = 0.2$.

von der Gestalt

$$\alpha = \frac{2\pi}{q} \quad (4.16)$$

sein. Vom Prinzip her ist es sicherlich möglich, die folgenden Beweise auch für allgemeine p -Werte aufzuziehen, jedoch werden die Ausführungen bereits für $p = 1$ sehr umfangreich.

Bevor der eigentliche Satz bewiesen werden kann, sind zunächst einige Überlegungen über das Ausbreitungsverhalten eines in $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ startenden Orbits notwendig. Es zeigt sich, daß ein solcher Orbit sich nicht beliebig weit im Phasenraum ausdehnen kann, sondern in einem gewissen Phasenraumbereich eingeschlossen ist. Zu jeder Zusammenhangskomponente U in $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ kann eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ gefunden werden, so daß jeder in U startende Orbit in D verbleibt. Dies ist Bestandteil des folgenden Lemmas:

Lemma 4.2 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ eine beliebige beschränkte Menge. Dann gibt es eine beschränkte (meßbare) Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ mit $U \subset D$ und*

$$\bar{M}_{\alpha,f}^n(U) \subset D \quad (4.17)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Der Beweis soll konstruktiv erfolgen. Zunächst wird eine Menge D konstruiert, die unter der Abbildung

$$L_\alpha : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u - \operatorname{sgn}(x) \end{pmatrix}$$

invariant ist, das heißt $L_\alpha(D) \subset D$. (Streng genommen kann sogar $L_\alpha(D) = D$ gezeigt werden, aber das ist für die Aussage des Satzes unerheblich.) D soll durch Vorgabe des Randes konstruiert werden. Wird der Rand unter L_α auf sich selbst abgebildet, so wird D auf D abgebildet.

Ferner soll der Rand von D als Polygon konstruiert werden, so daß L_α Eckpunkte wieder auf Eckpunkte abbildet. Sofern keine der Kanten des Polygons die u -Achse transversal schneidet, wird dann der Rand von D wieder auf den Rand von D abgebildet, da L_α stückweise linear ist. Ordnet man die Eckpunkte im mathematisch negativen Sinn an, so wirkt L_α auf den Eckpunkten gerade wie eine Translation um einen festen Wert $\nu \in \mathbb{N}$.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

q gerade:

Gegeben sei ein beliebiges genügend großes $m \in \mathbb{N}_0$. Ausgehend von dem Punkt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m+1}{1-\cos \alpha} \end{pmatrix},$$

sollen die folgenden Punkte konstruiert werden:

$$\begin{aligned} a_{0,j,l} &= \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} + j \sum_{k=0}^{q/2-1} \begin{pmatrix} \sin(q/2-k)\alpha \\ \cos(q/2-k)\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha}{1-\cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $0 \leq l \leq q/2$ und $0 \leq j \leq m$. Diese Punkte sollen in der folgenden Weise angeordnet werden:

$$\begin{aligned} &a_{0,0,0}, a_{0,0,1}, \dots, a_{0,0,q/2}, \\ &a_{0,1,0}, a_{0,1,1}, \dots, a_{0,1,q/2}, \\ &\vdots \\ &a_{0,m,0}, a_{0,m,1}, \dots, a_{0,m,q/2}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß der letzte Punkt jeder Zeile gleich dem ersten Punkt der folgenden Zeile ist, also $a_{0,j+1,0} = a_{0,j,q/2}$ für alle $0 \leq j < m$ gilt. Mit dieser Anordnung sind die ersten $\nu = (q/2 + 1)(m + 1) - m$ Punkte des zu konstruierenden Polygons gegeben.

In Anhang A.4 wird gezeigt, daß für den letzten Punkt

$$a_{0,m,q/2} = \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \end{pmatrix}$$

gilt und somit alle so konstruierten Punkte in dem von der u -Achse und $(\sin \alpha, \cos \alpha)$ aufgespannten Sektor liegen.

Die restlichen Punkte des Polygons werden durch L_α -Iteration der $a_{0,j,l}$ konstruiert:

$$a_{i,j,l} = L_\alpha^i(a_{0,j,l})$$

für $0 \leq i \leq q$. Ganz entsprechend sollen diese Punkte wie folgt angeordnet werden:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{0,0,0}, & \dots, & a_{0,m,q/2}, \\ a_{1,0,0}, & \dots, & a_{1,m,q/2}, \\ & \vdots & \\ a_{q,0,0}, & \dots, & a_{q,m,q/2}. \end{array}$$

In Anhang A.4 wird bewiesen, daß

$$a_{q-1,m-1,1} = a_{0,0,0}$$

gilt und alle auf $a_{q-1,m-1,1}$ folgenden Punkte mit den auf $a_{0,0,0}$ folgenden Punkten übereinstimmen, sofern m groß genug ist. Das mit diesen Punkten konstruierte Polygon wird also geschlossen. Man erhält $q\nu - 2(q/2 + 1) - 2 = q(\nu - 1)$ verschiedene Punkte, auf denen L_α wie eine Translation um ν wirkt.

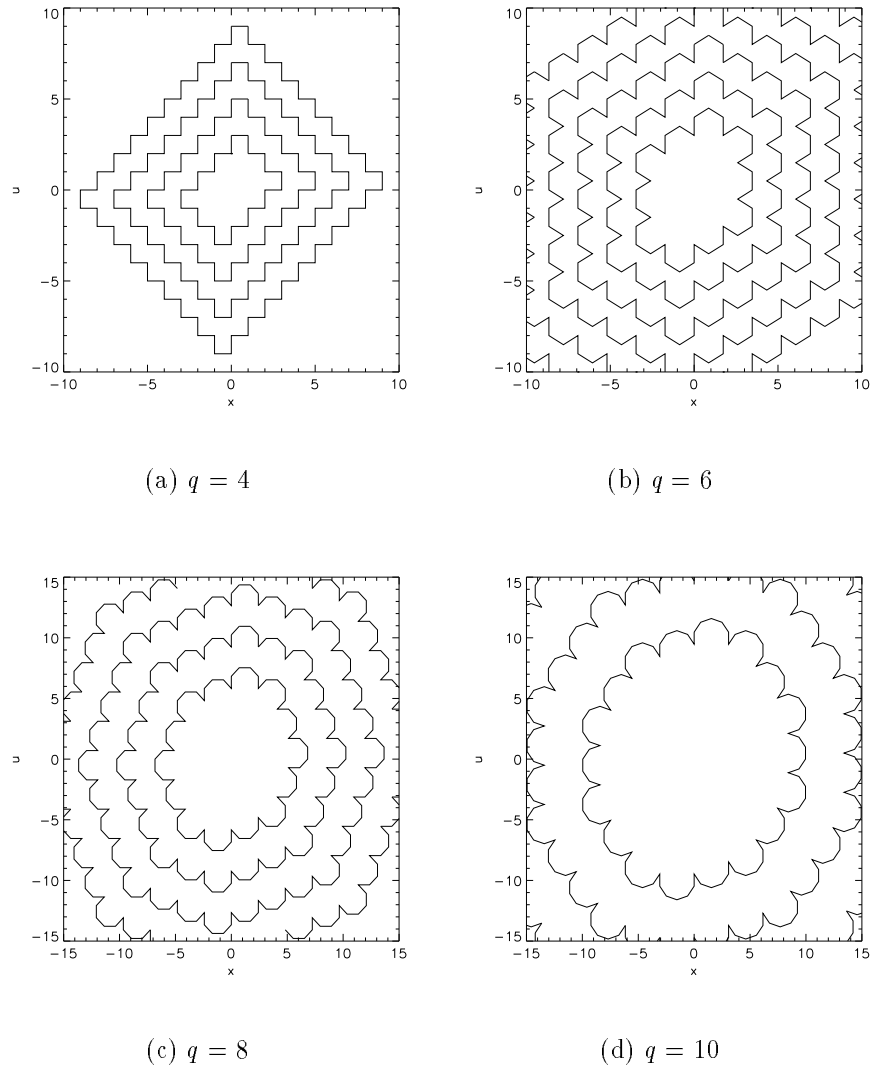
Da L_α stückweise linear ist und — wie ebenfalls in Anhang A.4 gezeigt wird — keine der Kanten des Polygons die u -Achse transversal schneidet, ist damit klar, daß das Polygon unter L_α wieder auf sich selbst abgebildet wird. Damit ist der Rand der Menge D für den Fall, daß q gerade ist, konstruiert. Die so konstruierte Menge D ist beschränkt und meßbar. Abbildung 4.6 zeigt einige der so konstruierten Ränder für unterschiedliche Werte von q und m .

q ungerade:

Dieser Fall ist ähnlich zu behandeln wie der vorherige, jedoch erweist sich die Konstruktion der Punkte als etwas komplizierter. Gegeben sei wieder ein genügend großes $m \in \mathbb{N}_0$. Dann werden ausgehend von dem Punkt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m+1}{1 - \cos(\alpha/2)} \end{pmatrix}$$

die folgenden Punkte konstruiert:


 Abbildung 4.6: L_α -invariante Mengen für einige gerade q -Werte.

$$a_{0,j,l} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha + 2 \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix}$$

für $0 \leq l \leq (q-1)/2$ und $0 \leq j \leq m$ sowie

$$\begin{aligned} a_{0,j,l} &= a_{0,j,(q-1)/2} - \sum_{k=0}^{l-(q+1)/2} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{l-(q+1)/2} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} + (j+1/2) \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha + 2 \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $(q+1)/2 \leq l \leq q$ und $0 \leq j \leq m$. Analog zum vorherigen Fall werden diese

Punkte wie folgt angeordnet:

$$\begin{array}{c} a_{0,0,0}, a_{0,0,1}, \quad \dots, a_{0,0,q}, \\ \vdots \\ a_{0,m,0}, a_{0,m,1}, \quad \dots, a_{0,m,q}. \end{array}$$

Hierbei ist wiederum zu beachten, daß der letzte Punkt jeder Zeile gleich dem ersten Punkt in der folgenden Zeile ist. Es zeigt sich, daß

$$a_{0,m,q} = \begin{pmatrix} r \sin(\alpha/2) \\ r \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

gilt und damit die Punkte $a_{0,j,l}$ alle in dem von der u -Achse und $(\sin(\alpha/2), \cos(\alpha/2))$ aufgespannten Sektor liegen. Diese so konstruierten Punkte müssen nun an der Achse $(\sin(\alpha/2), \cos(\alpha/2))$ gespiegelt werden:

$$a_{1,j,l} = \begin{pmatrix} r \sin(\alpha/2) \\ r \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha \sin(\alpha/2) - 1}{1 - \cos \alpha} \end{pmatrix}$$

für $0 \leq l \leq (q+1)/2$ und $0 \leq j \leq m$ sowie

$$\begin{aligned} a_{1,j,l} &= a_{1,j,(q+1)/2} - \sum_{k=0}^{l-(q+1)/2-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \sin(\alpha/2) \\ r \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{l-(q+1)/2-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} \\ &\quad + (j+1/2) \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha \sin(\alpha/2) - 1}{1 - \cos \alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $(q+1)/2+1 \leq l \leq q$ und $0 \leq j \leq m$. Hierbei wurde die Indizierung so gewählt, daß sich die $a_{1,j,l}$ ganz entsprechend den $a_{0,j,l}$ anordnen lassen. Es gilt:

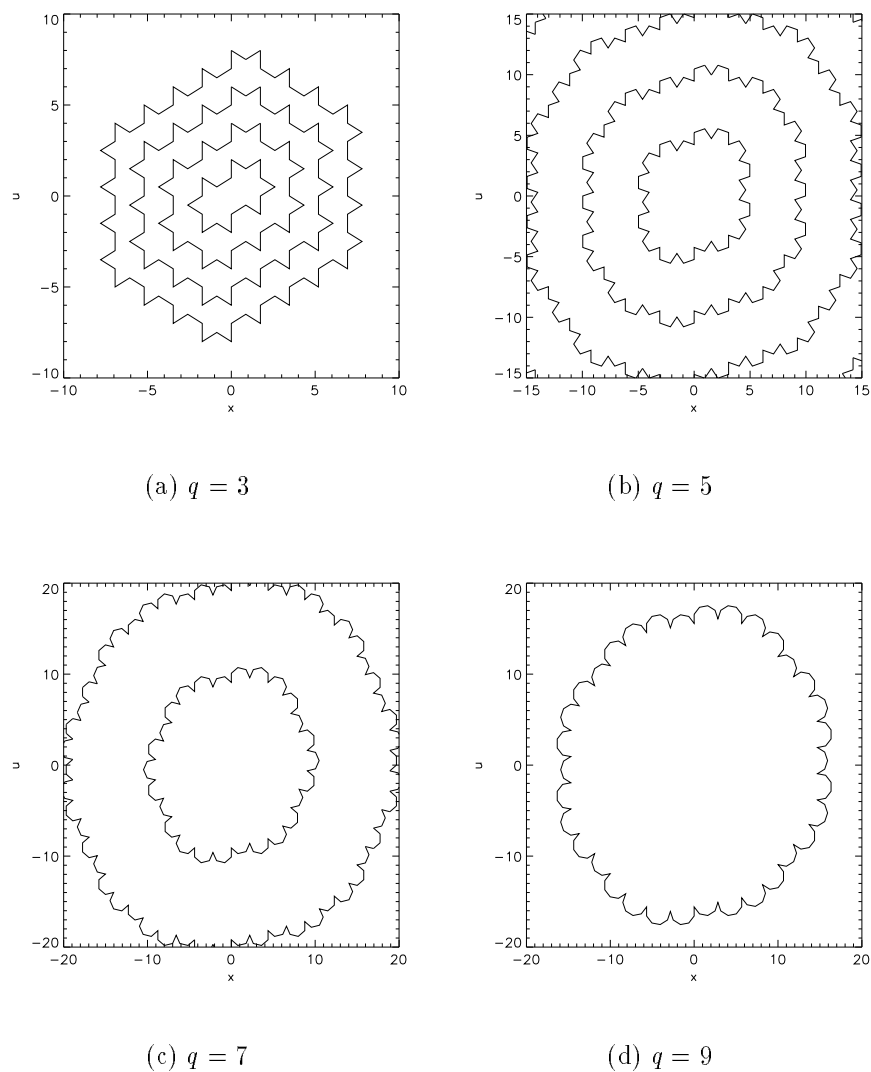
$$a_{1,m,q} = \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Auf diese Weise erhält man die ersten $\nu = 2(q+1)(m+1) - 2m - 1$ Punkte des Polygons, die alle in dem von der u -Achse und $(\sin \alpha, \cos \alpha)$ aufgespannten Sektor liegen. Wie im vorhergehenden Fall werden die so konstruierten Punkte unter L_α iteriert:

$$a_{i,j,l} = \begin{cases} L_\alpha^{i/2}(a_{0,j,l}) & i \text{ gerade} \\ L_\alpha^{(i-1)/2}(a_{1,j,l}) & i \text{ ungerade} \end{cases}$$

für $0 \leq i \leq 2q$. Diese Punkte werden ganz analog angeordnet:

$$a_{0,0,0}, \dots, a_{0,m,q} = a_{1,0,0}, \dots, a_{1,m,q}, a_{2,0,0}, \dots, a_{2q,0,0}, \dots, a_{2q,m,q}$$


 Abbildung 4.7: L_α -invariante Mengen für einige ungerade q -Werte.

In Anhang A.4 wird bewiesen, daß

$$a_{2q-1,m-1,1} = a_{0,0,0}$$

gilt und alle nach $a_{2q-1,m-1,1}$ folgenden Punkte gleich den auf $a_{0,0,0}$ folgenden Punkten sind. Das heißt, das so konstruierte Polygon wird geschlossen. Man erhält $q(\nu - 1)$ verschiedene Punkte auf denen L_α wie eine Translation um ν wirkt.

Damit ist auch für den Fall, daß q ungerade ist, der Rand der Menge D konstruiert. Die so konstruierte Menge D ist beschränkt und meßbar. In Abbildung 4.7 sind einige der so konstruierten Mengen abgebildet.

Allgemeines q :

Sei eine beschränkte Menge $U \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ geben. Dann gibt es eine nach obigem

Schema konstruierte Menge D mit $U \subset D$, sofern $m \in \mathbb{N}_0$ genügend groß gewählt wird. Es gilt also

$$U \subset D \cap \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty.$$

Nach Definition der Menge Ω^∞ und der Abbildung L_α gilt offensichtlich

$$\bar{M}_{\alpha,f}|_{\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty} = L_\alpha|_{\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty}.$$

Die Menge D wurde so konstruiert, daß sie unter L_α invariant ist, das heißt

$$L_\alpha(D) \subset D.$$

Folglich gilt:

$$\bar{M}_{\alpha,f}(U) = L_\alpha(U) \subset D.$$

Ferner ist die Menge Ω^∞ invariant unter $\bar{M}_{\alpha,f}$, es gilt also:

$$\bar{M}_{\alpha,f}(\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty) = \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty.$$

Da $U \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ ist, folgt damit, daß auch

$$\bar{M}_{\alpha,f}(U) \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$$

gilt. Somit gilt also

$$\bar{M}_{\alpha,f}(U) \subset D \cap \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty.$$

$\bar{M}_{\alpha,f}(U)$ erfüllt damit dieselbe Voraussetzung wie die Menge U und die obigen Schlüsse können wiederholt werden. Mittels vollständiger Induktion kann auf diese Weise gezeigt werden, daß

$$M_{\alpha,f}^n(U) \subset D$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt. Hiermit ist das Lemma bewiesen.

□

Durch das Lemma ist garantiert, daß eine beliebige beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ unter $\bar{M}_{\alpha,f}$ immer innerhalb einer beschränkten (meßbaren) Menge D bleibt. Die besondere Gestalt von D hat entscheidende Bedeutung für das Aufbauprinzip der periodischen Orbits, dies soll im folgenden Abschnitt genauer untersucht werden.

Es soll nun gezeigt werden, daß bereits aus der Existenz von D folgt, daß alle Punkte einer beliebigen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ periodisch sind. Hierzu der folgende Satz:

Satz 4.3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ eine beliebige zusammenhängende, beschränkte und meßbare Menge von positiven Maß, das heißt $\mu(U) > 0$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so daß gilt:*

$$\bar{M}_{\alpha,f}^m|_U = id|_U. \quad (4.18)$$

Beweis:

Sei U wie in den Voraussetzungen des Satzes beliebig gewählt. Wie auf Seite 38 beschrieben, kann jedem in $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ startenden Orbit eine Symbolfolge mit den Symbolen $+$ und $-$ zugeordnet werden, entsprechend dem Vorzeichen von $f(x_i) = \pm K$. Lemma 4.1 impliziert im Limes $l \rightarrow \infty$, daß alle in U startenden Orbits dieselbe Symbolfolge besitzen. Die folgenden drei Fälle sind denkbar:

- In U startet ein periodischer Orbit der Periode n . Dann hat dieser Orbit — und damit auch alle anderen in U startenden Orbits — eine periodische Symbolfolge der Periodenlänge $\leq n$. Nach Satz 4.2 sind dann alle anderen Orbits in U periodisch mit der Periode $qn/\text{ggT}(n, q)$. Wählt man $m = qn/\text{ggT}(n, q)$, so ist der Satz für diesen Fall bewiesen.
- In U startet ein aperiodischer Orbit mit periodischer Symbolfolge der Periodenlänge n . Sei $(x, u) \in U$ der Startpunkt dieses Orbits. Entsprechend der skalierten Version von (1.24) gilt dann für die qn -te Iterierte:

$$\bar{M}_{\alpha, f}^{qn}(x, u) = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{qn-1} \begin{pmatrix} -f(x_k) \sin \frac{2\pi k}{q} \\ f(x_k) \cos \frac{2\pi k}{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}.$$

Wäre nun $s = c = 0$, so wäre der Orbit periodisch mit der Periode nq ; also kann davon ausgegangen werden, daß $(s, c) \neq (0, 0)$ gilt. Da die Symbolfolge aber die Periodenlänge n hat, gilt $f(x_k) = f(x_{n+k}) = f(x_{2n+k}) = \dots = f(x_{qn+k})$. Und damit gilt:

$$\bar{M}_{\alpha, f}^{mqn}(x, u) = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 4.2 gibt es aber eine beschränkte Menge $D \supset U$ mit

$$\bar{M}_{\alpha, f}^{mqn}(U) \subset D.$$

Die Existenz eines derartigen Orbits widerspricht aber gerade der Beschränktheit von D . Also ist dieser Fall nicht möglich.

- In U startet ein aperiodischer Orbit mit aperiodischer Symbolfolge. Nach Lemma 4.1 haben dann alle in U startenden Orbits die dieselbe aperiodische Symbolfolge. Angenommen, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\bar{M}_{\alpha, f}^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Dann ist $\bar{M}_{\alpha, f}^n(U) \cup U \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ zusammenhängend. Nach Lemma 4.1 haben dann alle in $\bar{M}_{\alpha, f}^n(U)$ startenden Orbits dieselbe Symbolfolge wie die in U startenden Orbits. Mit anderen Worten, die Symbolfolge ist periodisch. Es kann also davon ausgegangen werden, daß die Mengen $\bar{M}_{\alpha, f}^n(U)$ für $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind. Nach Lemma 4.2 gibt es eine Menge D von endlichem Maß, so daß gilt:

$$\bar{M}_{\alpha, f}^n(U) \subset D$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\bar{M}_{\alpha,f}$ konservativ (flächenerhaltend) ist, gilt $\mu(\bar{M}_{\alpha,f}^n(U)) = \mu(U) > 0$. Also liegen unendlich viele paarweise disjunkte Mengen von konstantem positiven Maß in einer Menge D von endlichem Maß. Dies ist nicht möglich, folglich kann dieser Fall auch ausgeschlossen werden.

Weitere Möglichkeiten sind nicht denkbar, womit der Satz bewiesen ist. □

Der Satz garantiert, daß jeder Punkt einer Zusammenhangskomponente, die keine Nullmenge ist, periodisch ist. Da Ω^∞ offen ist, ist es durchaus denkbar, daß $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ auch Zusammenhangskomponenten vom Maße 0 enthält (für geeignet gewählte Parameter), der Satz kann hier nicht mehr angewandt werden. Im letzten Punkt des Beweises war es ja entscheidend, unendlich viele paarweise disjunkte Mengen von positivem Maß zu erhalten.

Ferner gibt der Satz keine Aussage über die Struktur der periodischen Orbits in der Zusammenhangskomponente. Aus der Analyse der Symmetrielinien ergab sich als Beobachtung, daß es in jeder Zusammenhangskomponente einen zentralen symmetrischen Punkt gibt, dessen Periode kein Vielfaches von q ist, und daß alle weiteren periodischen Punkte sich in konzentrischen Kreisen um diesen symmetrischen Punkt anordnen. Diese Feinheiten werden von dem Satz nicht erfaßt.

Eine genaue Analyse der Perioden der symmetrischen Punkte ist Bestandteil des folgenden Unterabschnitts. Es kann zwar nicht gezeigt werden, daß jede Zusammenhangskomponente einen symmetrischen periodischen Punkt enthält, jedoch wird auf anschauliche Weise begründet, daß es einen zentralen periodischen Punkt gibt, dessen Periode kein Vielfaches von q ist.

4.1.2 Aufbauprinzip des Netzes

Im vorherigen Unterabschnitt wurde bewiesen, daß die Dynamik von $\bar{M}_{\alpha,f}$ auf $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ rein periodisch ist. Wenn es also ein Stochastisches Netz gibt (siehe nachfolgender Unterabschnitt), so kann es sich nur innerhalb der Menge Ω^∞ entwickeln, da die Dynamik außerhalb regulär ist. Über die möglichen Perioden wurde bisher jedoch noch keine Aussage getroffen (ausgenommen Satz 4.2). In diesem Unterabschnitt sollen die Mengen Ω^∞ zu verschiedenen q -Werten — im folgenden sei der Einfachheit wieder $p = 1$ gewählt — einander gegenübergestellt und die Perioden der Punkte außerhalb Ω^∞ genauer untersucht werden. Das heißt, die Dynamik innerhalb der Maschen des Netzes soll untersucht werden.

Bisher wurde Ω^∞ allein für $q = 4$ und $q = 6$ betrachtet (Abbildungen 4.1 und 4.2), weil Ω^∞ für diese beiden q -Werte eine besonders einfache Gestalt hat. Die Überlegungen des vorhergehenden Unterabschnitts gelten jedoch für beliebige q -Werte, nur muß in Kauf genommen werden, daß Ω^∞ dann eine sehr verschachtelte Gestalt haben kann.

Bevor die komplizierteren Fälle betrachtet werden, sollen zunächst einmal die Fälle $q \in \{3, 4, 6\}$ etwas genauer untersucht werden. Im vorherigen Unterabschnitt zeigte sich für $q = 6$, daß sich die symmetrischen periodischen Punkte mit wachsender Periode konzentrisch um den Ursprung anordnen (Abbildung 4.5). Im fol-

genden soll nun für die verschiedenen q -Werte genau bestimmt werden, in welcher Form die Perioden der symmetrischen periodischen Punkte anwachsen.

$q = 4$:

Abbildung 4.1 zeigt die Menge Ω^∞ für $q = 4$ und $b = 0.2$. Für diese Wahl von q ist Ω^∞ ein quadratisches Gitter der Breite $2b$, das den gesamten Phasenraum überdeckt. Im folgenden sollen allein die periodischen Orbits außerhalb von Ω^∞ betrachtet werden.

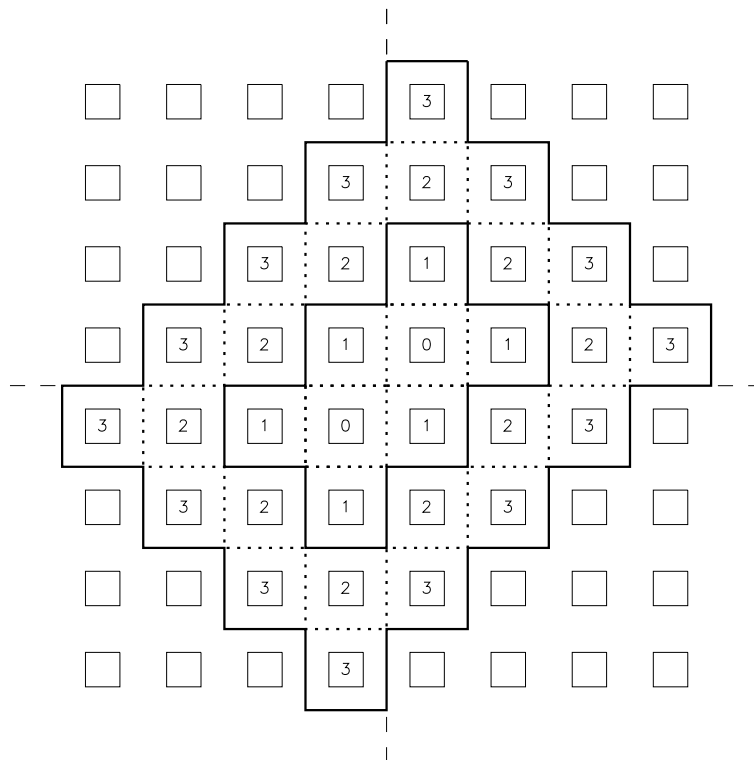
In Abbildung 4.6(a) sind die zugehörigen L_α -invarianten Mengen von Lemma 4.2 gezeigt. Abbildung 4.8 zeigt schematisch den Zusammenhang zwischen diesen Mengen und den periodischen Orbits. Die dünn gezeichneten Quadrate stellen den Rand von Ω^∞ dar und die dicker gezeichneten Linien — der Übersichtlichkeit halber teils durchgezogen, teils gepunktet — die unterschiedlichen Ränder der L_α -invarianten Mengen. Man geht nun von innen nach außen: Nach Lemma 4.2 kann $\bar{M}_{\alpha,f}$ nur die beiden mit 0 markierten Quadrate aufeinander abbilden. Da damit $\bar{M}_{\alpha,f}$ auf den inneren beiden Quadraten festgelegt ist, können die mit 1 markierten Quadrate — ebenfalls nach Lemma 4.2 — nur auf diese Quadrate abgebildet werden. Analoges gilt für die mit den Symbolen 2 und 3 markierten Quadrate, und so weiter.

Man erhält also Klassen von Quadraten die konzentrisch um den Ursprung angeordnet sind und unter $\bar{M}_{\alpha,f}$ aufeinander abgebildet werden. Nun ist $\bar{M}_{\alpha,f}$ außerhalb von Ω^∞ eine *Isometrie*, das heißt, die Quadrate werden nur gedreht und verschoben. Damit ist klar, daß die Mittelpunkte der Quadrate periodische Punkte sind. Eine Möglichkeit, die Perioden dieser Punkte zu ermitteln, ist eine Analyse der Symmetrielinien wie sie in den Abbildungen 4.3 bis 4.5 exemplarisch für den Fall $q = 6$ durchgeführt wurde. Eine andere Möglichkeit ist, zu untersuchen, wie die Quadrate aufeinander abgebildet werden. Ist dies bekannt, so kennt man ebenfalls die Perioden der Mittelpunkte. Dies soll im folgenden erläutert werden.

Wie in Abbildung 4.8 bereits angedeutet, numeriert man die Klassen von innen nach außen durch. Man stellt fest, daß von einer Klasse zur nächsten in jedem Quadranten jeweils ein Quadrat hinzukommt, also insgesamt vier Quadrate. Das heißt, die Anzahl der Quadrate $N(n)$ und die Anzahl der Quadrate im ersten Quadranten $\tilde{N}(n)$ einer Klasse ist durch

$$N(n) = 2 + 4n \quad \text{bzw.} \quad \tilde{N}(n) = 1 + n \quad (4.19)$$

gegeben, wobei $n = 0, 1, 2, \dots$ die Nummer der Klasse bedeutet. Man macht sich nun anschaulich klar, daß $\bar{M}_{\alpha,f}$ das oberste Quadrat im ersten Quadranten einer Klasse auf das oberste (ganz rechts liegende) Quadrat im vierten Quadranten verschiebt und zugleich um -90 Grad dreht — mit Ausnahme der Klasse 0, die ja nur aus zwei Quadraten besteht. Ordnet man nun die Quadrate einer Klasse im mathematisch negativen Sinn an, so macht $\bar{M}_{\alpha,f}$ nichts anderes, als die Quadrate um die Anzahl der Quadrate im ersten Quadranten $\tilde{N}(n)$ im mathematisch negativen Sinn zu verschieben.


 Abbildung 4.8: Schematischer Aufbau des Netzes für $q = 4$.

n	$k(n)$	n	$k(n)$	n	$k(n)$
0	2	4	18	8	34
1	3	5	11	9	19
2	10	6	26	10	42
3	7	7	15	11	23

 Tabelle 4.1: Perioden der Maschenmittelpunkte für $q = 4$.

Abstrakt gesehen hat man also eine Reihe von $N(n) = 2 + 4n$ Quadraten, auf der $\tilde{M}_{\alpha,f}$ durch zyklisches Durchschieben um $\tilde{N}(n)$ Plätze operiert. Es ist klar, daß man nach

$$k(n) = \frac{\text{kgV}(N(n), \tilde{N}(n))}{\tilde{N}(n)} = \frac{\text{kgV}(2 + 4n, n + 1)}{n + 1} \quad (4.20)$$

derartigen Operationen wieder beim ursprünglichen Ergebnis angelangt ist. $k(n)$ ist daher die Periode der Mittelpunkte der Klasse n .

Tabelle 4.1 zeigt eine Reihe von berechneten $k(n)$ -Werten, die sich auch mittels Analyse der Symmetrielinien verifizieren lassen. Man erinnere sich an Satz 4.1, demzufolge $\tilde{M}_{\alpha,f}^k(n)$ um einen Punkt der Periode $k(n)$ eine Drehung um $-k(n)\alpha = -2\pi \frac{k(n)}{4}$ ist. Da keiner der aufgeführten $k(n)$ -Werte ein Vielfaches von $q = 4$ ist,

sind alle nichtzentralen Punkte in den Quadraten von der Periode $2k(n)$ bzw. $4k(n)$, je nachdem ob $k(n)$ gerade oder ungerade ist.

$q = 6$:

Dieser Fall ist komplizierter als der Fall $q = 4$, da Ω^∞ sowohl Dreiecke als auch Sechsecke umschließen kann. Abbildung 4.2 zeigt Ω^∞ für $b = 0.2$. Man kann sich leicht vorstellen, daß zuerst die Dreiecke verschwinden und danach die Sechsecke, wenn die Breite $2b$ der Streifen langsam erhöht wird. Im folgenden soll b jedoch klein genug sein, daß sowohl Dreiecke als auch Sechsecke vorhanden sind.

Da $\bar{M}_{\alpha,f}$ flächenerhaltend und außerhalb von Ω^∞ sogar eine Isometrie ist, können Sechsecke nicht auf Dreiecke abgebildet werden und umgekehrt. Somit ist es möglich, diesen Fall praktisch genauso zu behandeln, wie den Vorherigen.

Abbildung 4.9 zeigt schematisch die Menge Ω^∞ und die Ränder der L_α -invarianten Mengen im Sinne von Lemma 4.2 (siehe Abbildung 4.6(b)). Zunächst einmal sollen nur die Sechsecke betrachtet werden, die ja nach der vorangegangenen Bemerkung aufeinander abgebildet werden müssen.

Im Gegensatz zu $q = 4$ können dieses Mal nicht einfach nur die Quadranten betrachtet werden. Der Phasenraum muß aufgrund der sechszähligen Symmetrie in sechs Sektoren aufgeteilt werden, wie durch die gestrichelten Linien angedeutet. Die Sektoren sollen im mathematisch negativen Sinne durchnummeriert sein. Die L_α -invarianten Mengen teilen die Sechsecke wie im vorangegangenen Fall wiederum in Klassen ein, die konzentrisch um den Ursprung herum angeordnet sind. Die Klassen werden erneut von innen heraus durchnummeriert. Die Klasse 0 besteht aus 4 Sechsecken und man stellt fest, daß von einer Klasse zur nächsten pro Sektor ein Sechseck hinzukommt, also insgesamt sechs Sechsecke. Damit ist die Zahl $N_6(n)$ der Sechsecke pro Klasse und $\tilde{N}_6(n)$ der Sechsecke im ersten Sektor gleich

$$N_6(n) = 4 + 6n \quad \text{bzw.} \quad \tilde{N}_6(n) = 1 + n, \quad (4.21)$$

wobei $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ erneut die Nummer der Klasse bedeutet.

Man macht sich nun anschaulich klar, daß $\bar{M}_{\alpha,f}$ das erste Sechseck im ersten Sektor auf das erste Sechseck im zweiten abbildet. Folglich ist $\bar{M}_{\alpha,f}$ wieder eine Verschiebung um $\tilde{N}_6(n)$. Da die Sechsecke dabei nur gedreht und verschoben werden, sind die Mittelpunkte der Sechsecke periodisch. Ganz entsprechend berechnen sich dann die Perioden $k_6(n)$ dieser Mittelpunkte zu

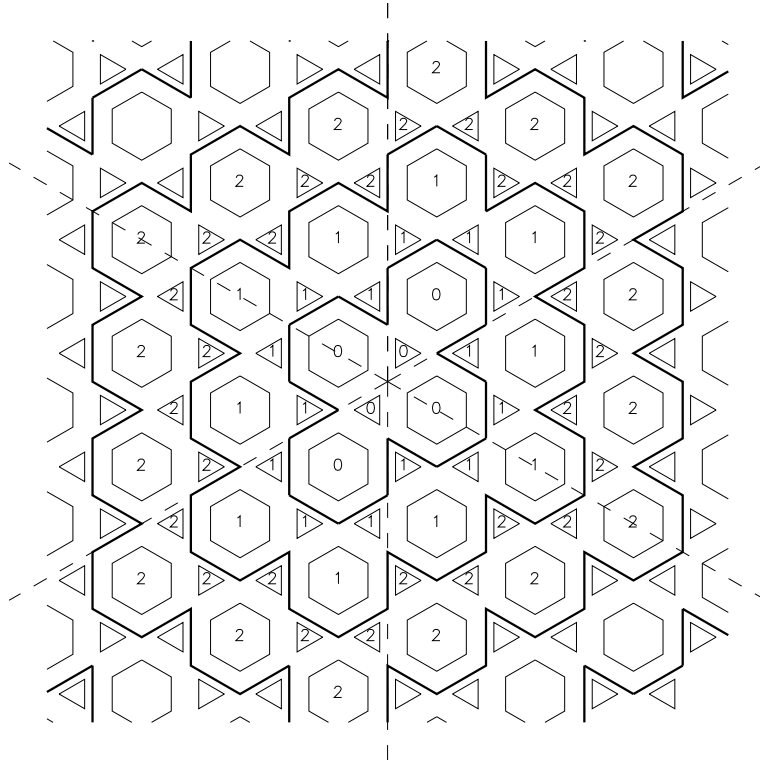
$$k_6(n) = \frac{\text{kgV}(N_6(n), \tilde{N}_6(n))}{\tilde{N}_6(n)} = \frac{\text{kgV}(4 + 6n, n + 1)}{n + 1}. \quad (4.22)$$

Die neben den Sechsecken auftretenden Dreiecke werden nun genauso behandelt. Dann ergibt sich die Anzahl $N_3(n)$ der Dreiecke pro Klasse und die Anzahl $\tilde{N}_3(n)$ zu

$$N_3(n) = 2 + 12n \quad \text{bzw.} \quad \tilde{N}_3(n) = 1 + 2n. \quad (4.23)$$

Damit ergibt sich analog für die Perioden der Mittelpunkte:

$$k_3(n) = \frac{\text{kgV}(2 + 12n, 2n + 1)}{2n + 1}. \quad (4.24)$$


 Abbildung 4.9: Schematischer Aufbau des Netzes für $q = 6$.

n	$k_6(n)$	$k_3(n)$	n	$k_6(n)$	$k_3(n)$	n	$k_6(n)$	$k_3(n)$
0	4	2	4	28	50	8	52	98
1	5	14	5	17	62	9	29	110
2	16	26	6	40	72	10	64	122
3	11	38	7	23	86	11	35	134

 Tabelle 4.2: Perioden der Maschenmittelpunkte für $q = 6$.

Tabelle 4.2 zeigt einige berechnete Werte von $k_3(n)$ und $k_6(n)$, die auch anhand der Symmetrielinien überprüft werden können. In Abbildung 4.5 sind beispielsweise die ersten $k_3(n)$ - und $k_6(n)$ -Werte für diesen Fall gezeigt, wie sie sich aus der Analyse der Symmetrielinien ergeben haben.

$q = 3$:

Der Fall $q = 3$ kann praktisch genauso behandelt werden wie der Fall $q = 6$, nur wird der Phasenraum dieses Mal nicht in sechs Sektoren eingeteilt, sondern in drei.

Abbildung 4.10 zeigt schematisch den Aufbau des Netzes für $q = 3$. Teilt man die Sechsecke und Dreiecke nun in gewohnter Weise wieder in Klassen ein (siehe

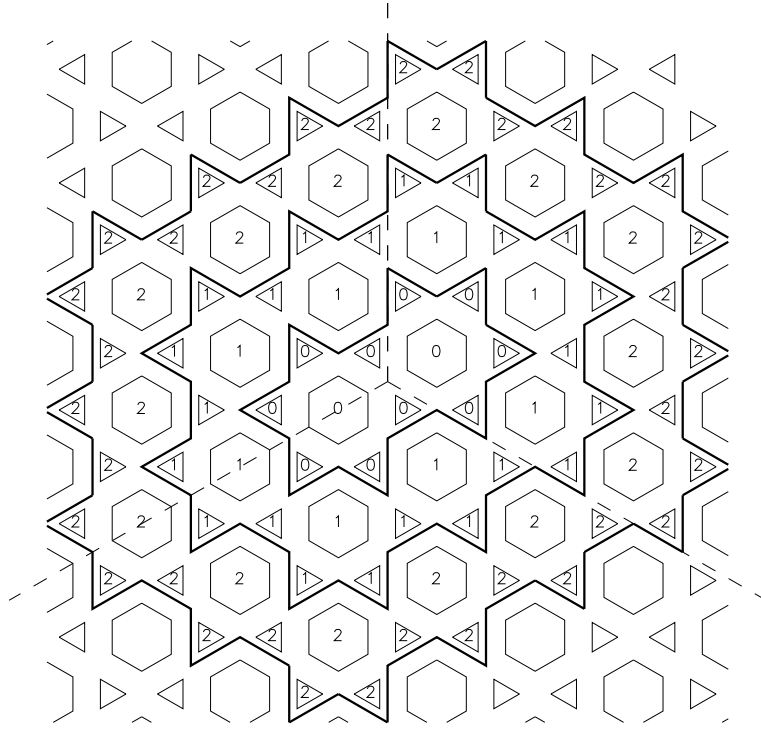

 Abbildung 4.10: Schematischer Aufbau des Netzes für $q = 3$.

Abbildung 4.7(a)), so gilt für die Sechsecke:

$$N_6(n) = 2 + 6n \quad \text{bzw.} \quad \tilde{N}_6(n) = 1 + 2n. \quad (4.25)$$

Hierbei ist $N_6(n)$ wiederum die Anzahl der Sechsecke pro Klasse und $\tilde{N}_6(n)$ die Anzahl der Sechsecke im ersten Sektor. Für die Perioden der Mittelpunkte folgt damit:

$$k_6(n) = \frac{\text{kgV}(2 + 6n, 2n + 1)}{2n + 1}. \quad (4.26)$$

Entsprechend ergibt sich für die Anzahl der Dreiecke:

$$N_3(n) = 10 + 12n \quad \text{bzw.} \quad \tilde{N}_3(n) = 4 + 4n. \quad (4.27)$$

Und wie üblich gilt für die Perioden der Mittelpunkte dann:

$$k_3(n) = \frac{\text{kgV}(10 + 12n, 4 + 4n)}{4 + 4n}. \quad (4.28)$$

n	$k_6(n)$	$k_3(n)$	n	$k_6(n)$	$k_3(n)$	n	$k_6(n)$	$k_3(n)$
0	2	5	4	26	29	8	50	53
1	8	11	5	32	35	9	56	59
2	14	17	6	38	41	10	62	65
3	20	23	7	44	47	11	68	71

Tabelle 4.3: Perioden der Maschenmittelpunkte für $q = 3$.

Tabelle 4.3 zeigt die ersten berechneten $k_3(n)$ - und $k_6(n)$ -Werte.

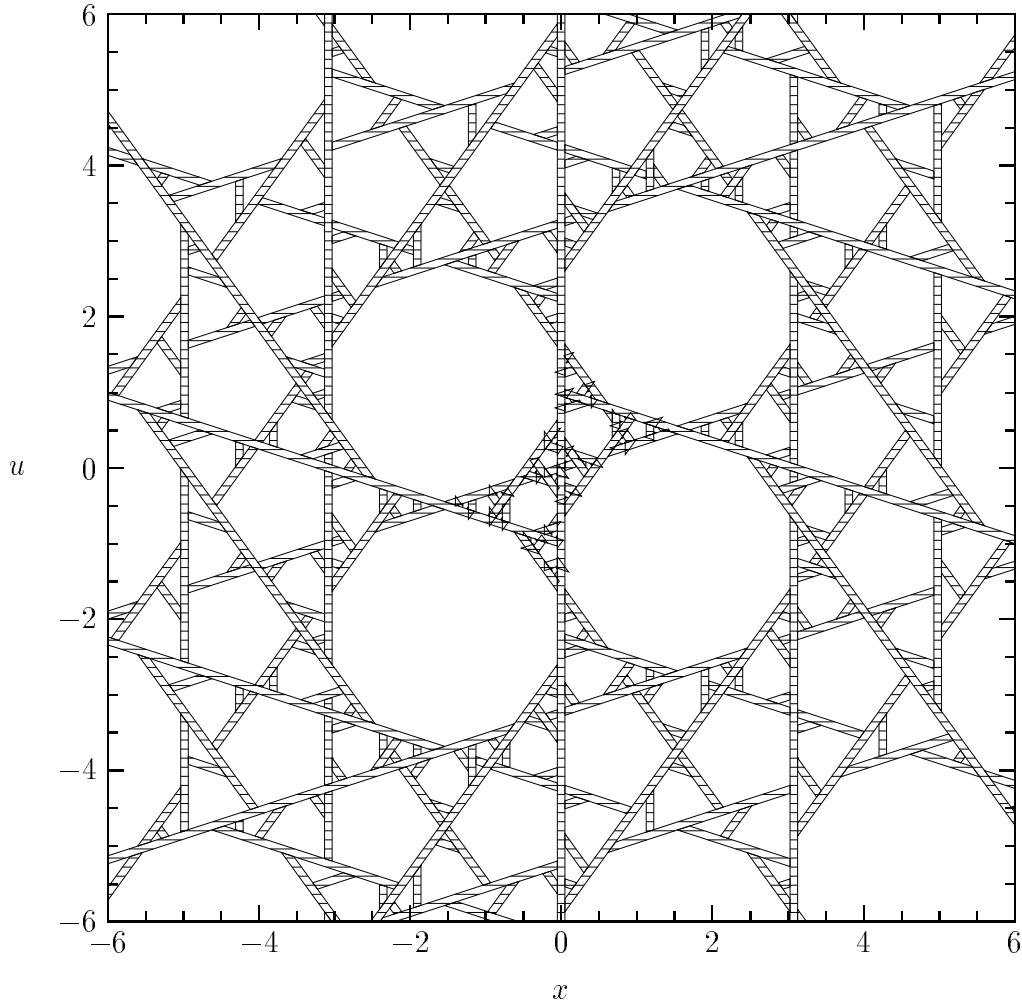
Hiermit sind die Fälle $q \in \{3, 4, 6\}$ praktisch vollständig erklärt. Bevor jedoch die verbleibenden Fälle diskutiert werden, zunächst eine kleine Anmerkung dazu, weshalb die Fälle $q \in \{3, 4, 6\}$ eine besondere Bedeutung haben: Im folgenden Abschnitt wird der Fall periodischer Kick-Funktionen untersucht. Es wird sich herausstellen, daß gerade für diese q -Werte die Abbildung $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ Translationssymmetrie besitzt und sich zusammen mit den (Umkehrenden) Symmetrien eine Kristallsymmetriegruppe ergibt. Daher werden die Fälle $q \in \{3, 4, 6\}$ als *kristallsymmetrische* Fälle bezeichnet. Diese Bezeichnung ist auch für aperiodische Kick-Funktionen sinnvoll, da die Menge Ω^∞ für $q \in \{3, 4, 6\}$ ebenfalls Translationssymmetrie besitzt. Dies darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß die Abbildung selber keine derartige Translationssymmetrie hat. Anhand des gerade besprochenen Aufbauprinzips der periodischen Orbits wäre das unmöglich.

Die anderen Fälle $q \notin \{3, 4, 6\}$ sind dadurch gekennzeichnet, daß Ω^∞ eine sehr viel verschachteltere Struktur hat, die trotz einer gewissen Regelmäßigkeit keinerlei Translationssymmetrie zu besitzen scheint. Diese Fälle sollen im folgenden auch *quasikristalline* Fälle genannt werden.

Abbildung 4.11 zeigt als Beispiel die Menge Ω^{50} für den Fall $q = 5$. (Im Gegensatz zu den Abbildungen 4.1 und 4.2 konnte hier aus numerischen Gründen nicht weit genug iteriert werden, um Ω^∞ in dem gezeigten Ausschnitt zu realisieren.) Hierbei ist die Breite b so klein gewählt, daß möglichst viel von der Struktur zu erkennen ist. Nach der allgemeinen Theorie aus Unterabschnitt 4.1.1 ist gesichert, daß alle Punkte außerhalb Ω^∞ periodisch sind.

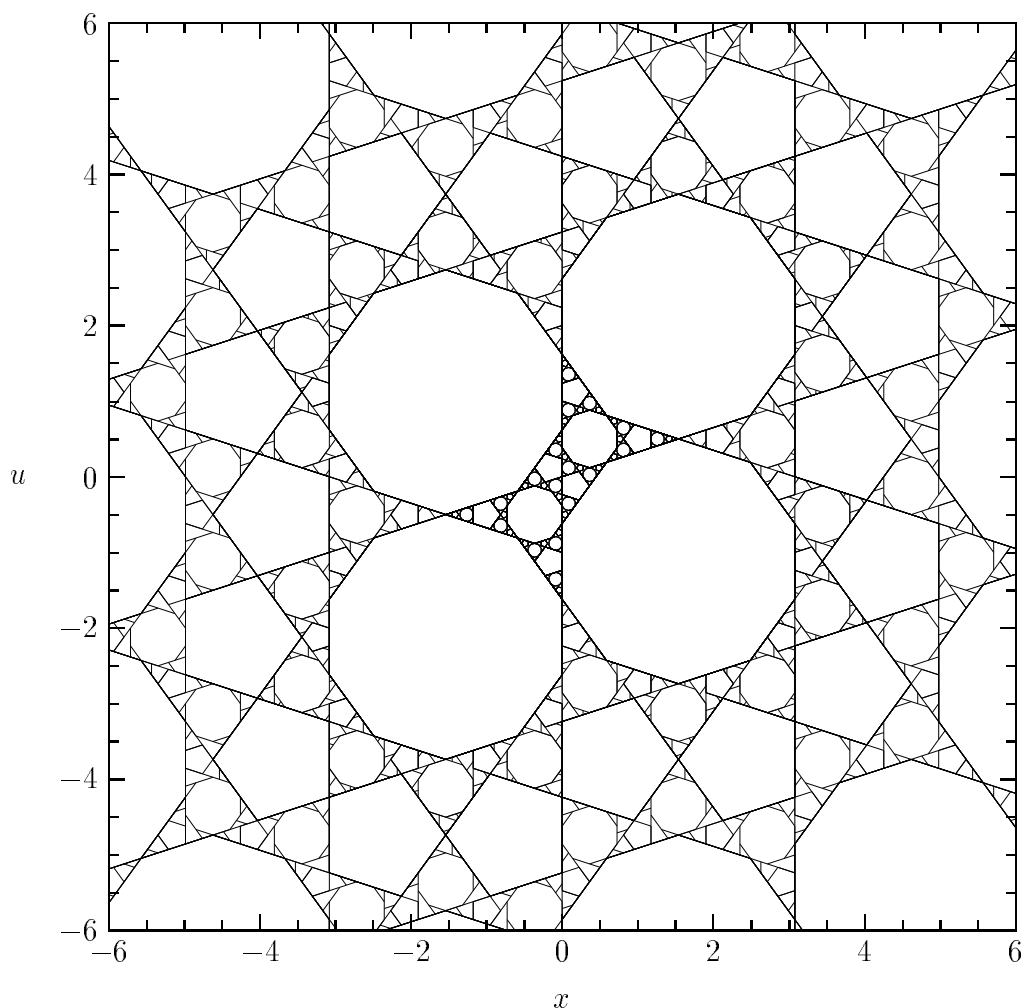
Nun ist ersichtlich, daß mit wachsendem b die feineren Strukturen der Reihe nach verloren gehen, bis schließlich nur noch die größeren Fünf- und Zehnecke frei bleiben. Je kleiner also b gewählt wird, desto mehr wird von der Feinstruktur des Netzes erkennbar. Um einen Eindruck davon zu erhalten, wie kompliziert das Netz werden kann, soll im folgenden der Fall $b \rightarrow 0$ betrachtet werden. Das heißt, die Streifen, aus denen sich Ω^∞ zusammensetzt, schrumpfen zu Linienstücken zusammen.

Bei einem derartigen Grenzübergang ist jedoch zu beachten, daß die Abbildung $\bar{M}_{\alpha,f}$ für $b = 0$ nicht mehr stetig ist. Obwohl das fundamentale Lemma 4.1 auch für diesen Fall bewiesen werden kann, haben die folgenden Abbildungen allein den Sinn, ein Grundgerüst für das Netz zu zeigen. Es ist schwer, für unstetiges $\bar{M}_{\alpha,f}$ einen Orbit zu finden, der die Netzstruktur wiedergibt, zumal da alle Orbits, die in die Nähe der Unstetigkeit gelangen, mit Rechenfehlern behaftet sind.


 Abbildung 4.11: Die Menge Ω^{50} für $q = 5$ und $b = 0.05$.

Die Netzstruktur für $b \rightarrow 0$ läßt sich auf einfache Weise durch Rückwärts-Iteration der u -Achse ermitteln; Abbildung 4.12 zeigt dies für den Fall $q = 5$. Da die Netzstruktur auch für den Fall $b \rightarrow 0$ invariant ist, ließen sich die dieselben Bilder auch durch Vorwärts-Iteration der u -Achse gewinnen. Aus numerischen Gründen wurden nur 150 Iterationen abgebildet. Man erkennt jedoch, daß sich die Struktur aus Fünf- und Zehneckern an mehreren Stellen in immer kleinerer Skalierung fortsetzt. Bei jedem $b > 0$ wird ein Teil dieser Struktur von Ω^∞ überdeckt und ist somit nicht mehr erkennbar.

Trotz dieser komplizierten Gestalt ist gesichert, daß jeder Punkt außerhalb von Ω^∞ periodisch ist. Das Problem bei $q = 5$ besteht nun darin, daß mit kleiner werdendem b immer mehr Zusammenhangskomponenten in $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ hinzukommen. Dennoch existieren auch hier die L_α -invarianten Mengen von Lemma 4.2, die die Struktur, genauso wie bei den Fällen $q \in \{3, 4, 6\}$, in konzentrische Klassen um den Ursprung einteilen. Für die Fälle $q = 3$ und $q = 6$ gab es in diesen Klassen sowohl Dreiecke als auch Sechsecke. Für $q = 5$ besteht jede Klasse jedoch aus Fünf-

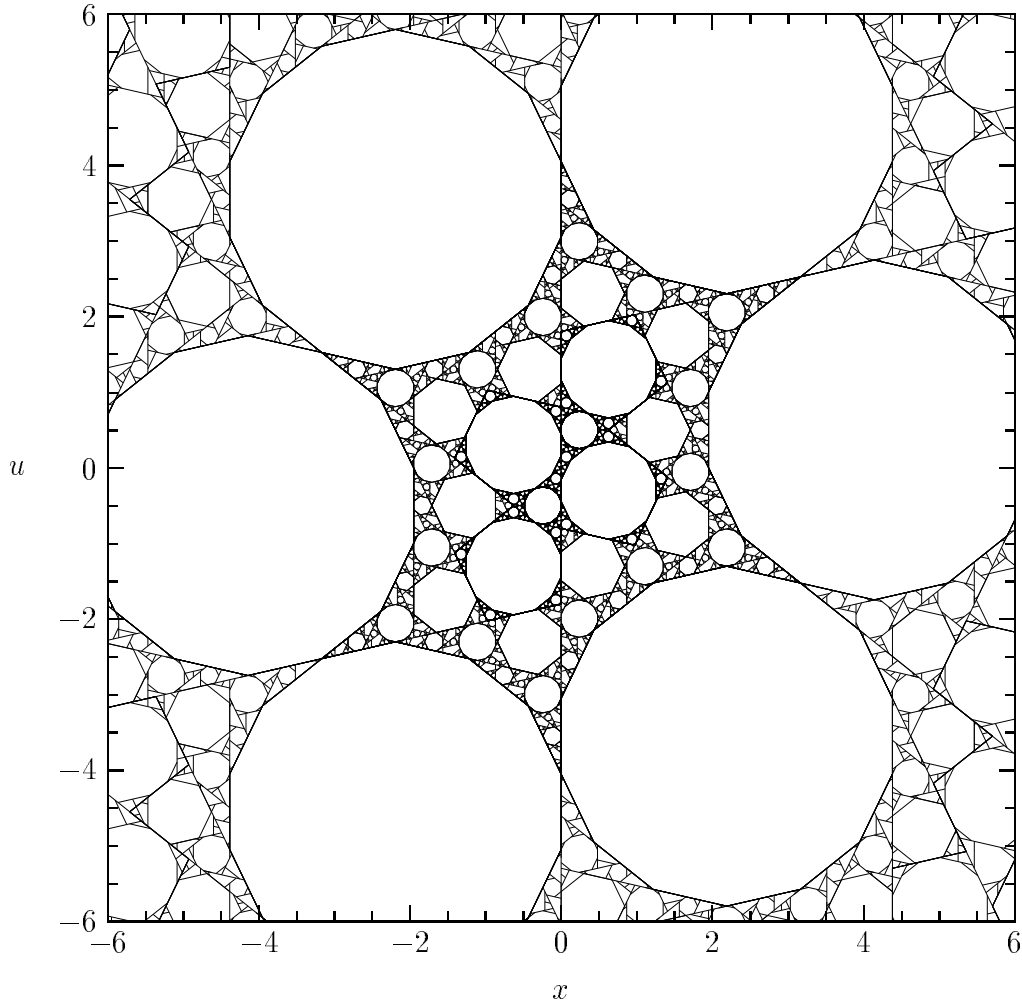

 Abbildung 4.12: Netzstruktur für $q = 5$ und $b \rightarrow 0$.

und Zehneck, deren Anzahl mit kleiner werdendem b beliebig groß werden kann.

Nichtsdestotrotz ist es prinzipiell möglich, bei der Analyse der Perioden genauso zu verfahren wie in den Fällen $q \in \{3, 4, 6\}$. Da $\bar{M}_{\alpha, f}$ flächenerhaltend ist, können natürlich Fünf- oder Zehnecke einer bestimmten Größe nicht auf Fünf- oder Zehnecke einer anderen Größe abgebildet werden. Innerhalb jeder Klasse wäre es also nötig, die Fünf- und Zehnecke entsprechend ihrer Größe zu klassifizieren und anschließend die $N(n)$ - und $\tilde{N}(n)$ -Werte für jede dieser Größenklassen zu bestimmen. Entsprechend dem b -Wert müßte dies dann bis zu beliebig kleinen Strukturen durchgeführt werden, will man die gesamte Struktur erfassen.

Es ist jedoch denkbar, daß sich gewisse Abhängigkeiten in den $N(n)$ - und $\tilde{N}(n)$ -Werten von einer Größenklasse zur nächsten aufspüren lassen und sich somit die komplette Struktur erfassen läßt. Eine derartige Analyse würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Stattdessen soll zumindest ansatzweise eine Erklärung für das Entstehen dieser Strukturen gegeben werden. Die Abbildungen 4.13 und 4.14 zeigen, daß ähnlich


 Abbildung 4.13: Netzstruktur für $q = 7$ und $b \rightarrow 0$.

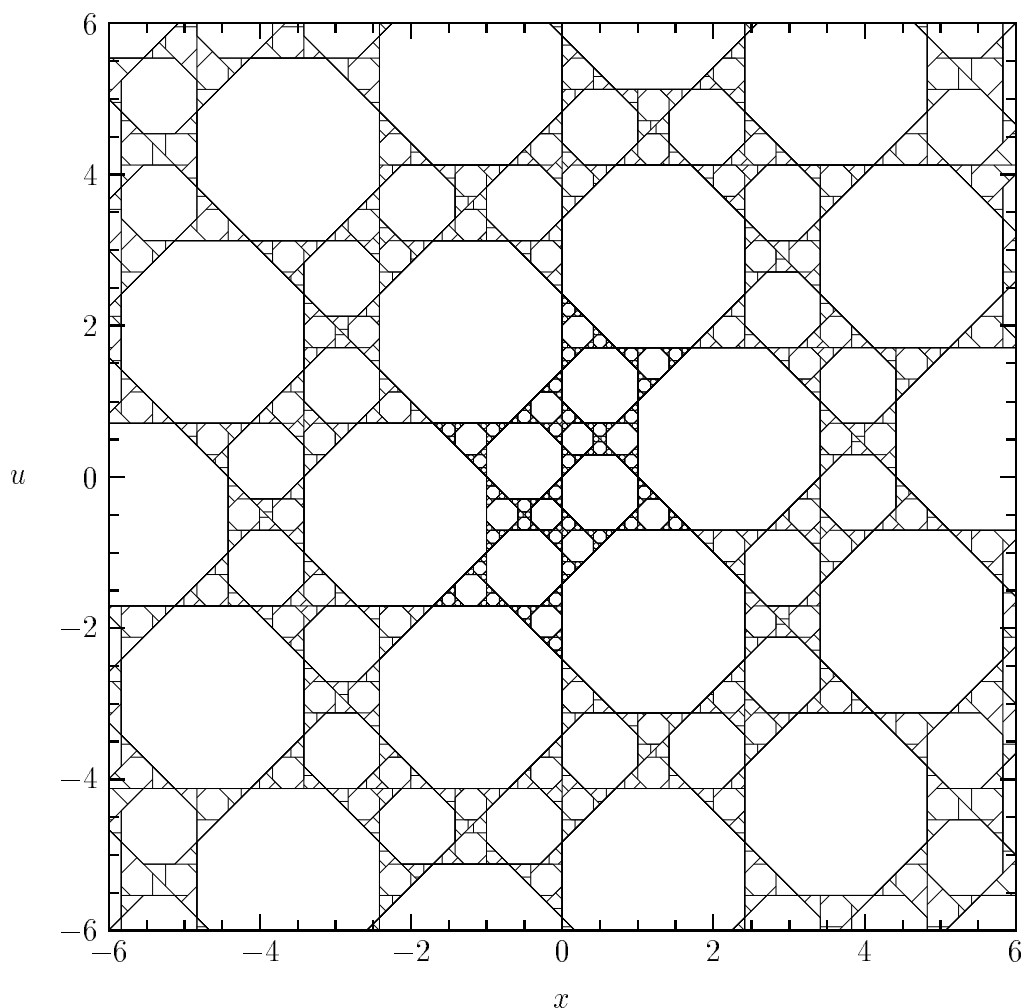
verschachtelte Strukturen auch für andere Werte $q \notin \{3, 4, 6\}$ auftreten. Dabei ist auffällig, daß für $q = 7$ die Struktur aus Sieben- und Vierzehneckern besteht, während die Struktur für $q = 8$ praktisch nur aus Achtecken zu bestehen scheint.

Entsprechend der skalierten Version von (1.24) kann die n -te Iterierte von $\bar{M}_{\alpha, f}$ wie folgt geschrieben werden:

$$\bar{M}_{\alpha, f}^n : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_n) \begin{pmatrix} \sin(n-k)\alpha \\ \cos(n-k)\alpha \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Dabei ist zu beachten, daß im Grenzfall $b \rightarrow 0$ die $f(x_n)$ nur die Werte ± 1 annehmen können. $\bar{M}_{\alpha, f}^n$ setzt sich also zusammen aus einer Drehung um den Winkel $n\alpha$ und einer Summe von Vektoren des Typs $\lambda_k(\sin(n-k)\alpha, \cos(n-k)\alpha)$ mit $\lambda_k \in \mathbb{Z}$.

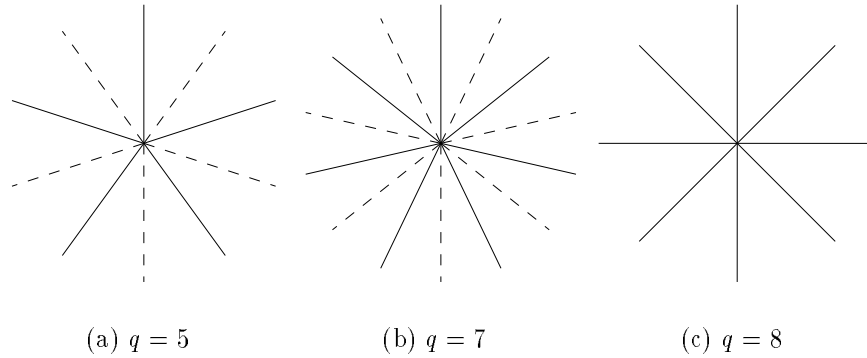
Für die Netzstruktur bedeutet dies, daß die u -Achse um die Winkel $-n\alpha$ gedreht, an einigen Stellen getrennt und um die Vektoren $\lambda_k(\sin(n-k)\alpha, \cos(n-k)\alpha)$

Abbildung 4.14: Netzstruktur für $q = 8$ und $b \rightarrow 0$.

verschoben wird. Betrachtet man nun alle möglichen Drehungen der u -Achse (siehe Abbildung 4.15), so ist klar, daß die u -Achse für ungerades q gerade in q Richtungen gedreht werden kann, während bei geradem q nur $q/2$ verschiedene Richtungen möglich sind.

Es scheint nun ein wesentliches Aufbauprinzip der Netzstrukturen zu sein, daß die Maschen regelmäßige n -Ecke sind, deren Rand sich aus allen möglichen Richtungen zusammensetzt. Für $q = 5$ und $q = 7$ sind daher Fünf- und Zehnecke bzw. Sieben- und Vierzehnecke möglich, während für $q = 8$ nur Achtecke möglich sind. (Kein anderes regelmäßiges n -Eck setzt sich aus den vier möglichen Richtungen zusammen.) Der Fall $q = 8$ ist insofern ein Sonderfall, als zum Beispiel bei $q = 10$ auch Fünfecke oder bei $q = 12$ auch Sechsecke auftreten.

Damit ist zumindest das Auftreten der verschiedenen n -Ecke erklärt. Um nun das Auftreten der komplizierten Strukturen für die Fälle $q \notin \{3, 4, 6\}$ zu erklären, muß auf eine weitere Besonderheit dieser q -Werte aufmerksam gemacht werden. Betrachtet man den Phasenraum als komplexe Ebene, so werden die Vektoren


 Abbildung 4.15: Richtungen für verschiedene q -Werte.

$\lambda_k(\sin(n-k)\alpha, \cos(n-k)\alpha)$ durch komplexe Zahlen vom Typ $\lambda_k e^{ik\alpha} e^{i\phi}$ repräsentiert. Durch Drehung des Koordinatensystems kann der konstante Phasenfaktor $e^{i\phi}$ vernachlässigt werden. Daß heißt man interessiert sich vornehmlich für komplexe Zahlen von der Gestalt $\lambda_k e^{ik\alpha} = \lambda_k e^{2\pi i k/q}$ mit $\lambda_k \in \mathbb{Z}$. Aus der Theorie der Kreisteilungskörper ist bekannt, daß die Menge

$$\mathbb{Q}\left(e^{i\frac{2\pi}{q}}\right) = \left\{ \sum_{k=0}^{q-1} a_k e^{ik\frac{2\pi}{q}} \mid a_k \in \mathbb{Q} \quad \forall k \right\}, \quad (4.30)$$

aufgefaßt als $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, die Dimension

$$\dim \mathbb{Q}\left(e^{i\frac{2\pi}{q}}\right) = \phi(q) \quad (4.31)$$

hat. Hierbei ist $\phi(q)$ die Eulersche ϕ -Funktion, die genau für die q -Werte $q \in \{3, 4, 6\}$ den Wert $\phi(q) = 2$ hat.

Da für alle Vorfaktoren $\lambda_k \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ gilt, kann die Struktur des Netzes als Projektion eines $\phi(q)$ -dimensionalen Gitters auf eine zweidimensionale Ebene angesehen werden. Für die kristallsymmetrischen Fälle $q \in \{3, 4, 6\}$ ergibt sich daraus keine Schwierigkeit, während alle anderen Fälle Projektionen höherdimensionaler Gitter auf die Ebene darstellen. Es ist bekannt, daß bei derartigen Projektionen sehr komplizierte Muster entstehen können.

Diese Bemerkungen sollen keine mathematisch korrekte Begründung darstellen, zumal da sehr regelmäßige Penrose-Muster ebenfalls aus der Projektion höherdimensionaler Gitter ins Zweidimensionale gewonnen werden können.

4.1.3 Das Stochastische Netz

In den vorherigen beiden Unterabschnitten wurde ausschließlich die Dynamik auf dem Phasenraumbereich $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ besprochen, und es hat sich gezeigt, daß alle darin startenden Orbits periodisch sind. Über die Dynamik auf Ω^∞ wurden bis jetzt noch keine Aussagen getroffen.

Die Kick-Funktion $f(x)$ sei weiterhin von der Gestalt (4.3). Für die Dynamik auf Ω^∞ ist nun die Funktion $g(x)$ entscheidend. Im einfachsten Fall ist $g(x)$ linear, wie bereits im Unterabschnitt 4.1.1 zur Berechnung der Symmetrielinien angenommen (siehe (4.14)). $f(x)$ hat dann die Gestalt von $f_{A1}(x)$ (siehe (1.29)). Wie schon besprochen, kann $K = 1$ gewählt werden. Die Poincaré-Abbildung $\bar{M}_{\alpha,f}$ ist dann stückweise linear und nur noch von den Parametern α und b abhängig. Weiterhin soll $p = 1$ gelten, das heißt $\alpha = 2\pi/q$ für $q \geq 2$.

Es zeigt sich, daß sich die Abbildung $\bar{M}_{\alpha,f}$ auf der Menge Ω^∞ chaotisch verhält und im Phasenraum ein Stochastisches Netz erzeugt. Hierzu zwei Abbildungen, die sich gut in die bisherigen Überlegungen eingliedern:

Da sämtliche Punkte außerhalb der Menge Ω^∞ periodisch sind, kann sich ein chaotischer Orbit nur innerhalb dieser Menge entwickeln. Die Abbildungen 4.16 und 4.17 zeigen jeweils einen Orbit der in der Nähe der u -Achse gestartet wurde. Vergleicht man diese beiden Orbits mit den Abbildungen 4.1 und 4.2 der Menge Ω^∞ gerade für die entsprechenden Parameterwerte, so ist die Ähnlichkeit offensichtlich. Mehr noch scheinen die obigen Orbits sogar dicht in Ω^∞ zu liegen.

Im folgenden soll die Chaotizität auf der Menge Ω^∞ näher untersucht werden. Hierzu wird zunächst die Stabilität des zentralen Fixpunktes $(0,0)$ bestimmt. Da $\bar{M}_{\alpha,f}$ eine zweidimensionale Abbildung ist, läßt sich die Stabilität am einfachsten mit dem *Residuum* des Fixpunktes bestimmen (siehe [16]). Das Residuum ist wie folgt definiert:

$$R = \frac{1}{4}(2 - \text{Tr } D\bar{M}_{\alpha,f}). \quad (4.32)$$

Dabei ist $D\bar{M}_{\alpha,f}$ an der Stelle des Fixpunktes zu nehmen. Ist $R < 0$, so ist der Fixpunkt hyperbolisch; für $0 < R < 1$ ist der Fixpunkt elliptisch und für $R > 1$ invers hyperbolisch. Für den zentralen Fixpunkt $(0,0)$ von $\bar{M}_{\alpha,f}$ kann das Residuum schnell berechnet werden:

$$R = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{2b} \right). \quad (4.33)$$

Man erkennt sofort, daß für genügend kleines b und $q > 2$ das Residuum R immer größer als eins ist. Das heißt, der zentrale Fixpunkt ist invers hyperbolisch. Für die in den Abbildungen 4.16 und 4.17 gewählten q -Werte ist $b = 0.2$ bereits klein genug.

Es ist daher naheliegend, die stabile und instabile Mannigfaltigkeit dieses Fixpunktes zu verfolgen. Da das System stückweise linear ist, kann man erwarten, daß die invarianten Mannigfaltigkeiten sich aus mehr oder minder kompliziert verschachtelten, stetig verbundenen Linienstücken zusammensetzen.

Abbildung 4.18 zeigt die instabile und Abbildung 4.19 die stabile Mannigfaltigkeit des Fixpunktes $(0,0)$ zu $q = 6$ und $b = 0.2$, der Rand der Menge Ω^∞ ist durch die punktierten Linien markiert. Es darf nicht überraschen, daß die beiden Mannigfaltigkeiten durch Spiegelung an der Achse $(\sin(\alpha/2), \cos(\alpha/2))$ ineinander übergehen; diese Spiegelung ist gerade die Umkehrende Symmetrie $\hat{S}_1$ von $\bar{M}_{\alpha,f}$. Durch Übereinanderlegen beider Abbildungen erkennt man, daß sich beide Mannigfaltigkeiten in vielen homoklinen Punkten schneiden, von denen einige bereits

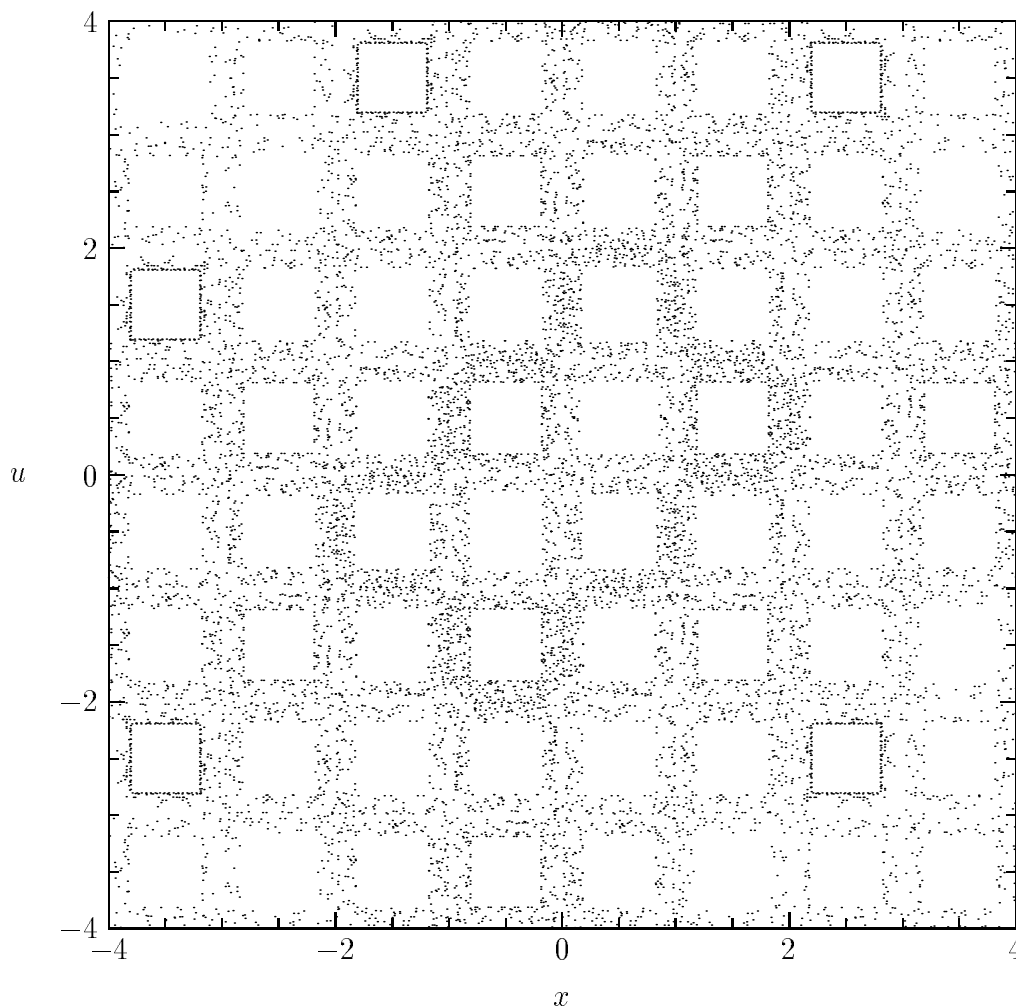


Abbildung 4.16: Orbit für $q = 4$ und $b = 0.2$. Startwerte $x_0 = 0$ und $u_0 = 0.2$. 20000 Iterationen.

in entfernten Armen der Menge Ω^∞ liegen. Für den Fall $q = 4$ ergeben sich ganz entsprechende Bilder, die hier jedoch nicht gezeigt werden sollen.

Da sich die Dynamik in der Nähe des Fixpunktes im wesentlichen entlang der instabilen Mannigfaltigkeit entwickelt, ist erkennbar, daß die Orbits zwar immer wieder nach innen gefaltet, aber auch weit nach außen gedrückt werden. Durch die vielen homoklinen Punkte entsteht eine “Durchmischung” der Dynamik, die letztlich die Chaotizität auf diesem Phasenraumbereich ausmacht. Dieses kann folgendermaßen erklärt werden:

Zunächst ist anzumerken, daß aus der Existenz *eines* homoklinen Punktes die Existenz von unendlich vielen homoklinen Punkten resultiert. Dies ist insofern anschaulich klar, als beide Mannigfaltigkeiten invariante Mengen sind, das heißt, sie werden unter der Dynamik auf sich selbst abgebildet. Damit ist klar, daß homokline Punkte wiederum auf homokline Punkte abgebildet werden müssen. Nun konvergiert aber jeder Punkt auf der stabilen Mannigfaltigkeit

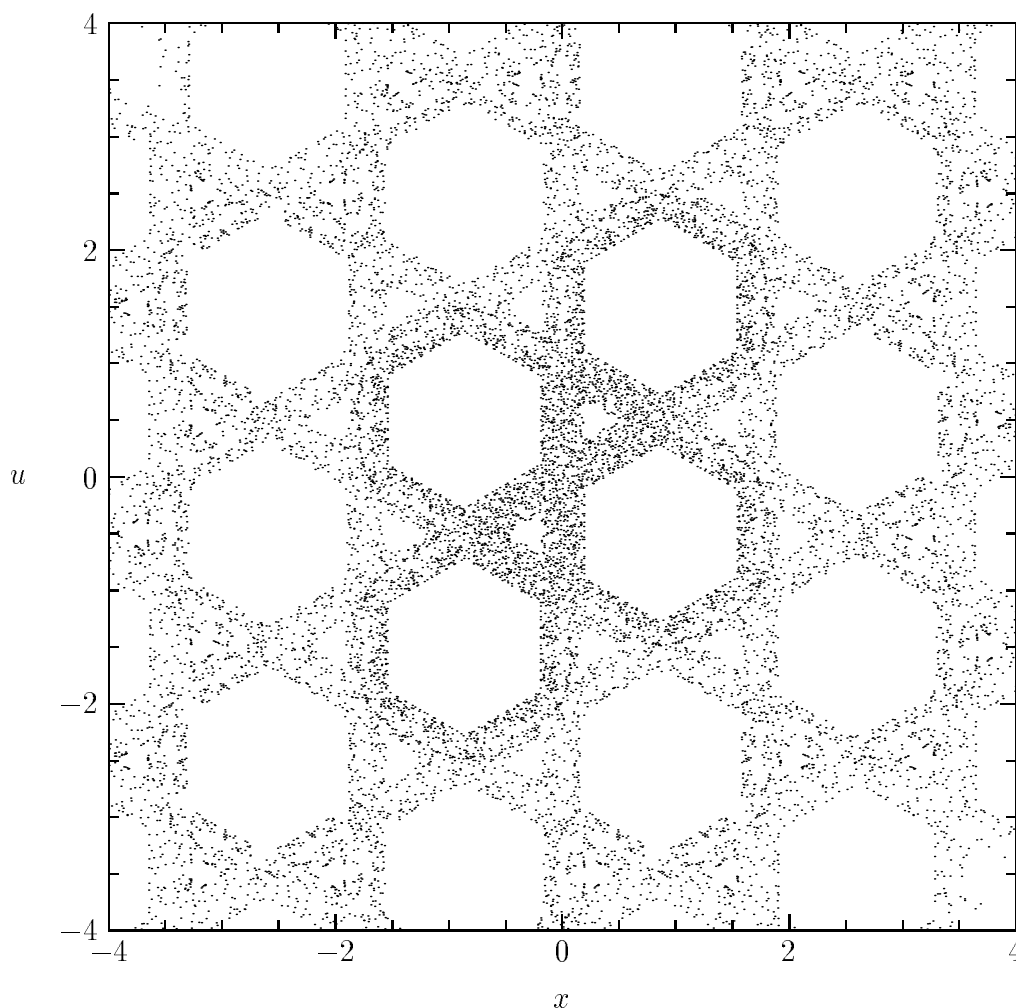


Abbildung 4.17: Orbit für $q = 6$ und $b = 0.2$. Startwerte $x_0 = 0$ und $u_0 = 1$. 20000 Iterationen.

unter Vorwärts-Iteration und jeder Punkt der instabilen Mannigfaltigkeit unter Rückwärts-Iteration gegen den zentralen Fixpunkt. Hat man nun einen homoklinen Punkt gegeben, so erhält man durch Anwendung der Dynamik auf diesen Punkt bereits beliebig viele homokline Punkte.

Nun bilden die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit zwischen zwei homoklinen Punkten eine Schleife, die ein gewisses Phasenraumgebiet umfaßt. Da die Mannigfaltigkeiten, wie oben angemerkt, invariante Mengen sind, wird unter der Dynamik eine Schleife auf die nächste abgebildet. Ferner ist die Dynamik konservativ, das heißt flächenerhaltend, was zur Folge hat, daß sämtliche Schleifen dasselbe Phasenraumvolumen umfassen. Es ist anschaulich klar, daß die Schleifen in der Nähe des Fixpunktes immer dichter werden und sich dort vielfach transversal überdecken. Es ist mathematisch exakt bewiesen (siehe zum Beispiel [17]), daß dies zur Folge hat, daß eine gewisse Iterierte der Dynamik auf einem Gebiet in der Nähe des Fixpunktes topologisch konjugiert zur *Hufeisenabbildung* ist. Dies

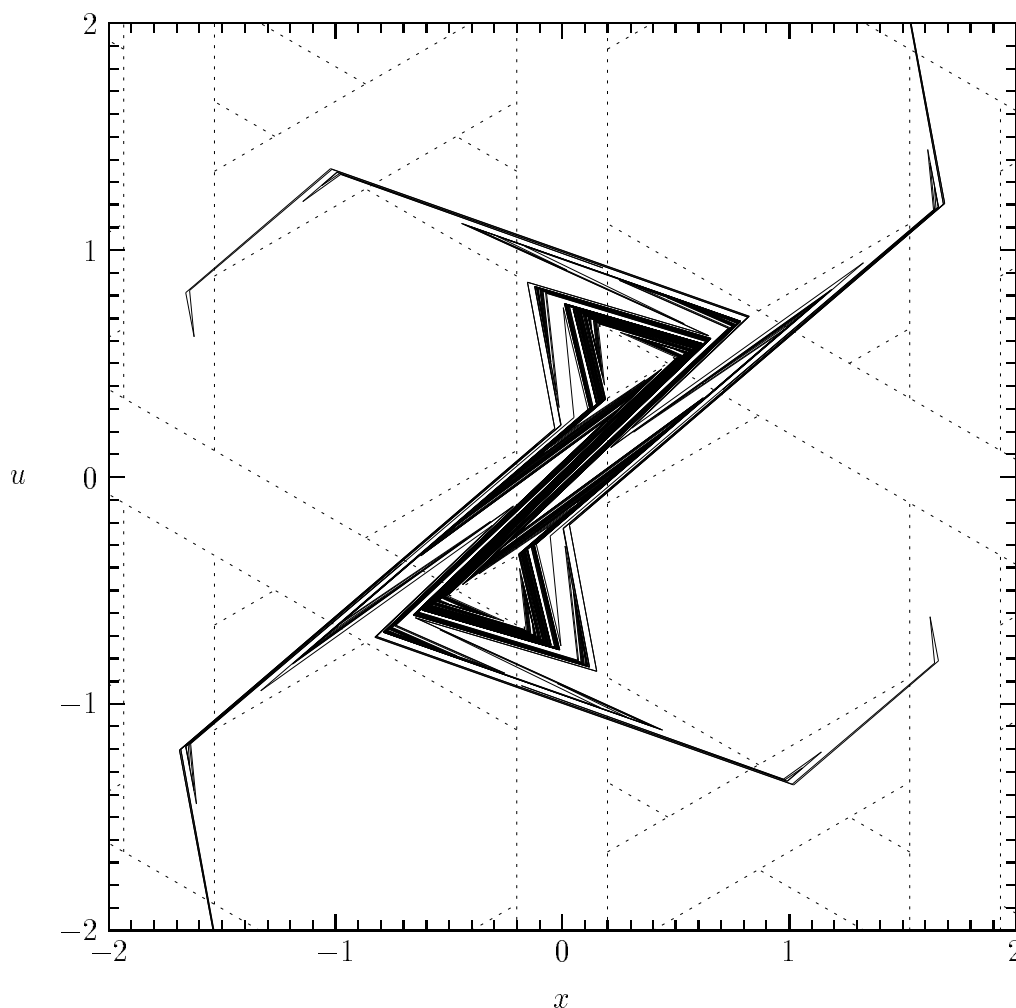


Abbildung 4.18: Instabile Mannigfaltigkeit des Fixpunktes $(0,0)$ für $q = 6$ und $b = 0.2$.

soll anhand der gegebenen Dynamik demonstriert werden.

In Abbildung 4.20 wird ein Parallelogramm, welches in der nahen Umgebung des zentralen Fixpunktes liegt und parallel zu den Eigenrichtungen ist, unter der Dynamik fünfmal iteriert. Die ursprüngliche Menge und die 5. Iterierte sind im untersten Bild übereinandergelegt. In Abbildung 4.21 ist das Analoge für die Rückwärtsdynamik durchgeführt.

Man erkennt, daß die 5. Vorwärts- und die 5. Rückwärts-Iterierte der Menge die ursprünglich Menge in jeweils drei Streifen schneiden, wobei wichtig ist, daß die Streifen der Vorwärtsdynamik das ursprüngliche Gebiet horizontal und die Streifen der Rückwärtsdynamik das ursprüngliche Gebiet vertikal schneiden. Hierbei ist “vertikal” und “horizontal” als Schnitt mit dem oberen und unteren bzw. linken und rechten Rand zu verstehen. Nur unter dieser Bedingung ist eine topologische Konjugiertheit zu einer vollständigen Hufeisenabbildung gegeben.

Mit Hilfe dieser Hufeisenabbildung ist es prinzipiell möglich, auf dem Aus-

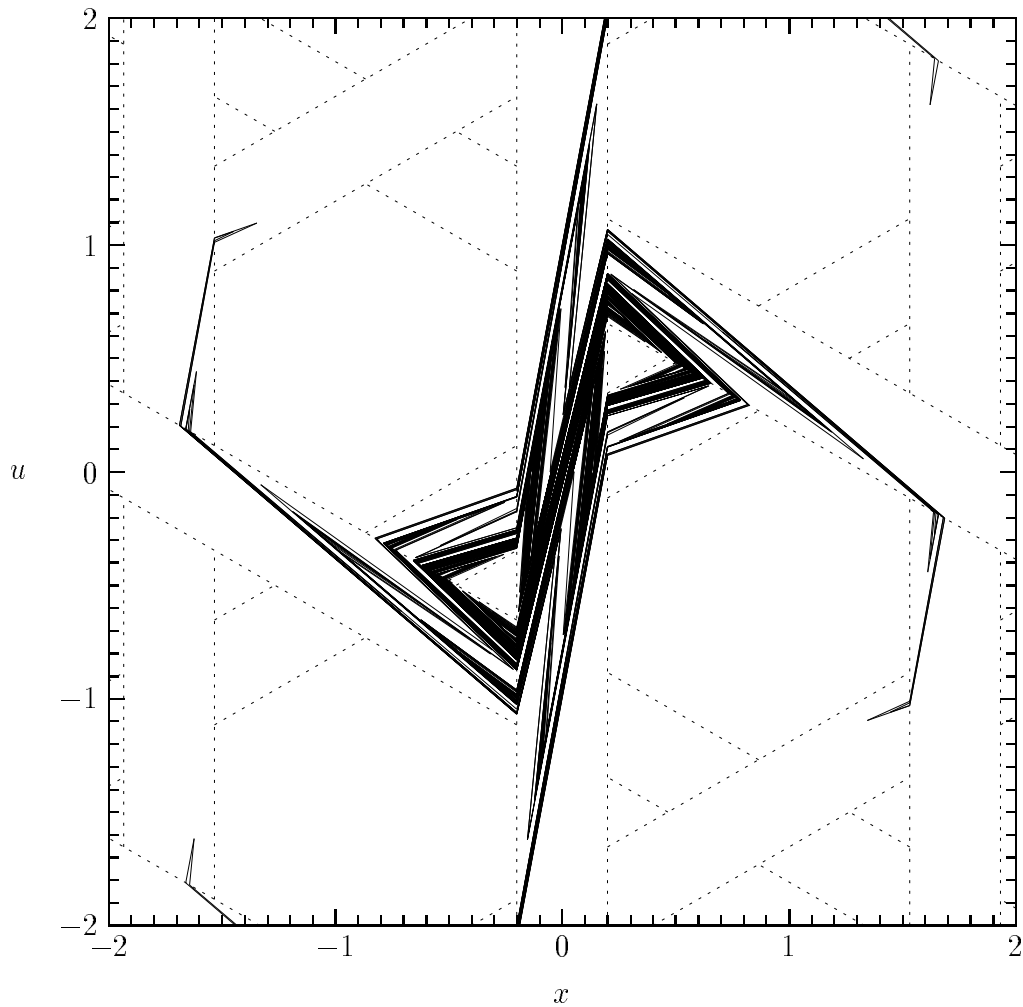


Abbildung 4.19: Stabile Mannigfaltigkeit des Fixpunktes $(0,0)$ für $q = 6$ und $b = 0.2$.

gangsgebiet eine symbolische Dynamik mit drei Symbolen einzuführen, so daß die Dynamik auf einer vollständig hyperbolischen Cantor-Menge innerhalb des Gebiets topologisch konjugiert zur Shift-Abbildung ist, womit die Chaotizität auf dieser Menge streng mathematisch bewiesen wäre. Dies soll jedoch nicht in allen Einzelheiten durchgeführt werden. Es sei jedoch erwähnt, daß sich die Dynamik unter Ausnutzung der Punktsymmetrie im Ursprung auf zwei Symbole reduzieren läßt.

Die Abbildungen 4.22 und 4.23 zeigen, daß die vorstehenden Überlegungen auch für den Fall $q = 6$ durchführbar sind.

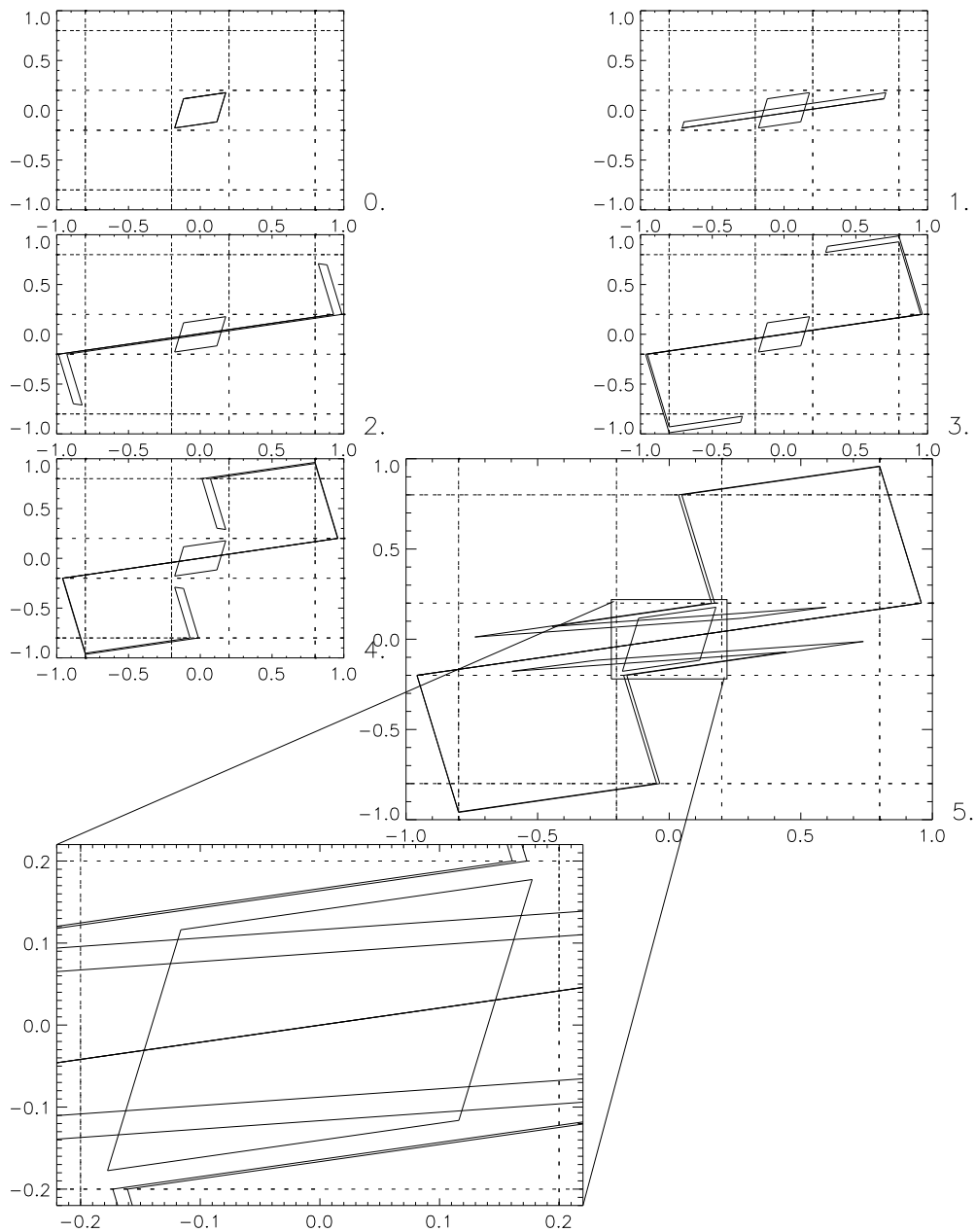


Abbildung 4.20: Vorwärts-Iteration eines Parallelogramms ($q = 4$ und $b = 0.2$).

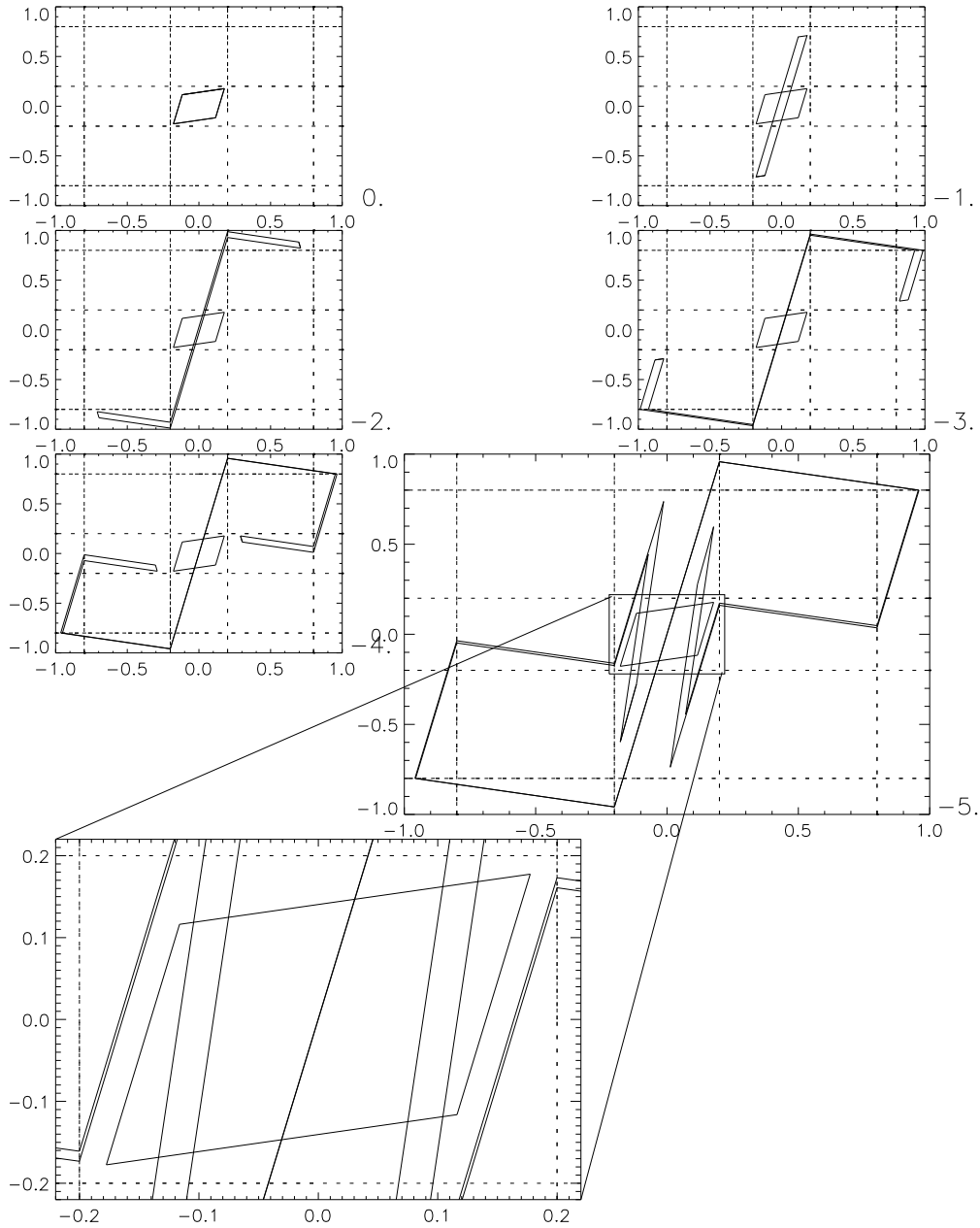


Abbildung 4.21: Rückwärts-Iteration eines Parallelogramms ($q = 4$ und $b = 0.2$).

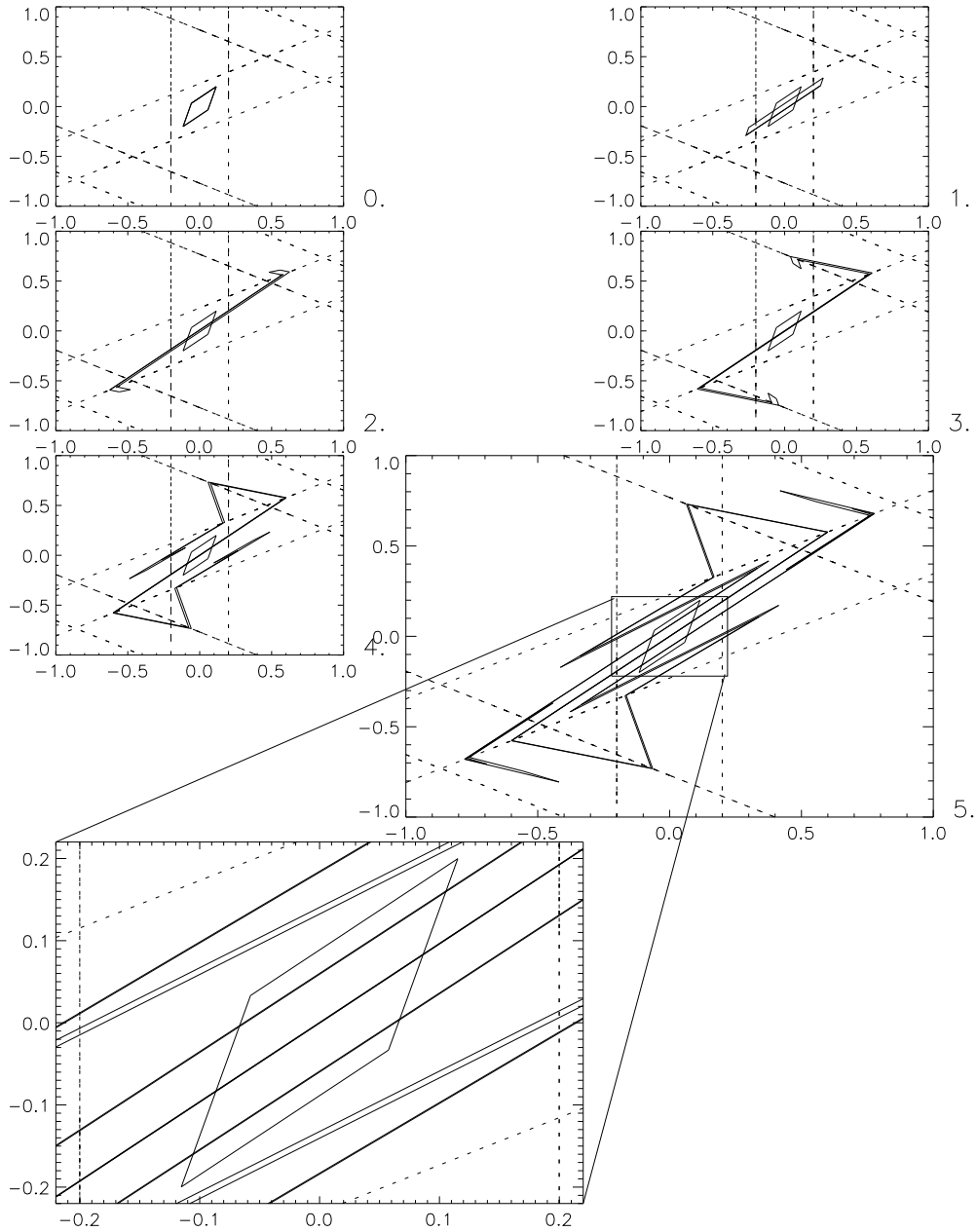


Abbildung 4.22: Vorwärts-Iteration eines Parallelogramms ($q = 6$ und $b = 0.2$).

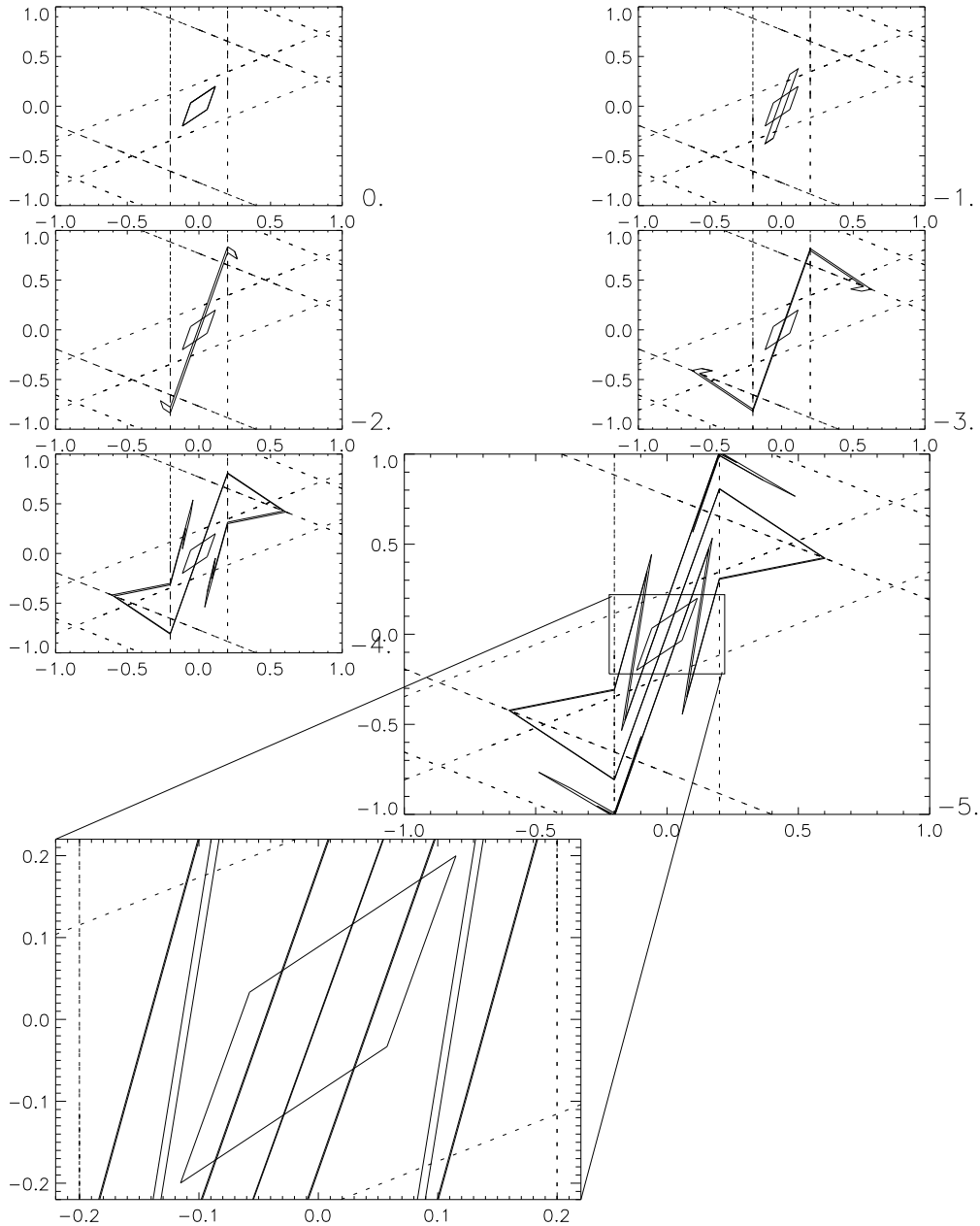


Abbildung 4.23: Rückwärts-Iteration eines Parallelogramms ($q = 6$ und $b = 0.2$).

4.1.4 Differenzierbare Kick-Funktion

Wie in Abschnitt 1.7 bereits angedeutet, kann die in den vorherigen Unterabschnitten verwandte stückweise lineare Kick-Funktion $f_{A1}(x)$ durch die Kick-Funktion $f_{A2}(x)$ (siehe (1.31)) angenähert werden bzw. umgekehrt. Die Kick-Funktion $f_{A2}(x)$ hat den Vorteil, daß sie beliebig oft differenzierbar ist und eine aus mathematischer Sicht etwas ansprechendere Gestalt hat als f_{A1} .

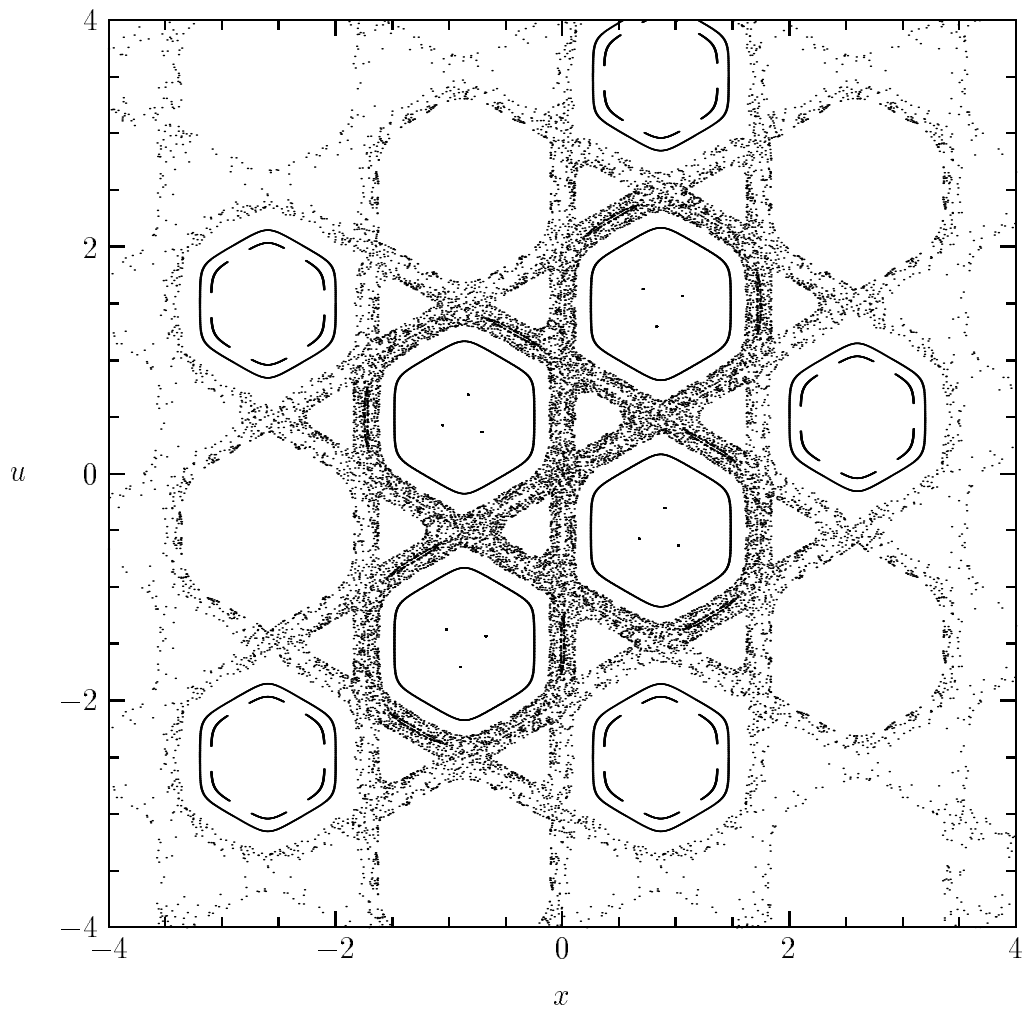
Abbildung 4.24 zeigt ein typisches Phasenportrait von $\bar{M}_{\alpha, f_{A2}}$ für $q = 6$ und $b = 0.1$ anhand von günstig ausgewählten Orbits. Das erkennbare Stochastische Netz ist ein Orbit mit 40000 Iterationen, der in der Nähe des Ursprungs gestartet wurde. Innerhalb der Maschen wurden zusätzlich vier Orbits gestartet und für jeweils 4000 Iterationen verfolgt.

Zunächst ist die Ähnlichkeit mit den bisher von $f_{A1}(x)$ bekannten Strukturen anzumerken. Zum einen gibt es ein Stochastisches Netz, dessen Struktur sich von dem bisherigen praktisch nicht unterscheidet; zum anderen scheinen alle Punkte außerhalb des Netzes stabil zu sein. An den invarianten Kurven erkennt man jedoch, daß nicht mehr alle Punkte außerhalb des Netzes periodisch sind, sondern nur noch quasiperiodisch. Dies ist nicht weiter überraschend, da die Konstanz von $f(x)$ außerhalb eines gewissen Bereiches um die u -Achse für $f_{A2}(x)$ nicht mehr gewährleistet ist. Erst in der Nähe der Mittelpunkt scheinen die bisherigen Ergebnisse zu gelten, wie an dem abgebildeten 12-Zyklus erkennbar ist

Ferner ist zu bemerken, daß es für $f_{A2}(x)$ auf dem Stochastischen Netz Stabilitätsinseln gibt, die bei größerem b deutlich erkennbar werden. Abbildung 4.25 zeigt die Orbits mit denselben Startwerten, wie in in Abbildung 4.24, nur mit dem Unterschied, daß $b = 0.2$ gesetzt wurde. Die Lücken in dem Stochastischen Netz sind deutlich erkennbar.

Ohne genaue Analyse sei an dieser Stelle angemerkt, daß an den Stellen, wo diese Stabilitätsinseln in Erscheinung treten, bei der stückweise linearen Abbildung $f_{A1}(x)$ marginal stabile Punkte (mit Residuum 0) liegen, die bei $f_{A2}(x)$ elliptisch werden.

Zusammengefaßt läßt sich sagen, daß sich die Strukturen von $\bar{M}_{\alpha, f_{A2}}$ für kleines b mit der bisherigen Theorie erklären lassen, für größere b -Werte jedoch Strukturen entstehen, die gesondert behandelt werden müssen. Auf eine umfangreichere Untersuchung sei an dieser Stelle verzichtet.


 Abbildung 4.24: Phasenportrait zu $f_{A2}(x)$ für $q = 6, K = 1$ und $b = 0.1$.

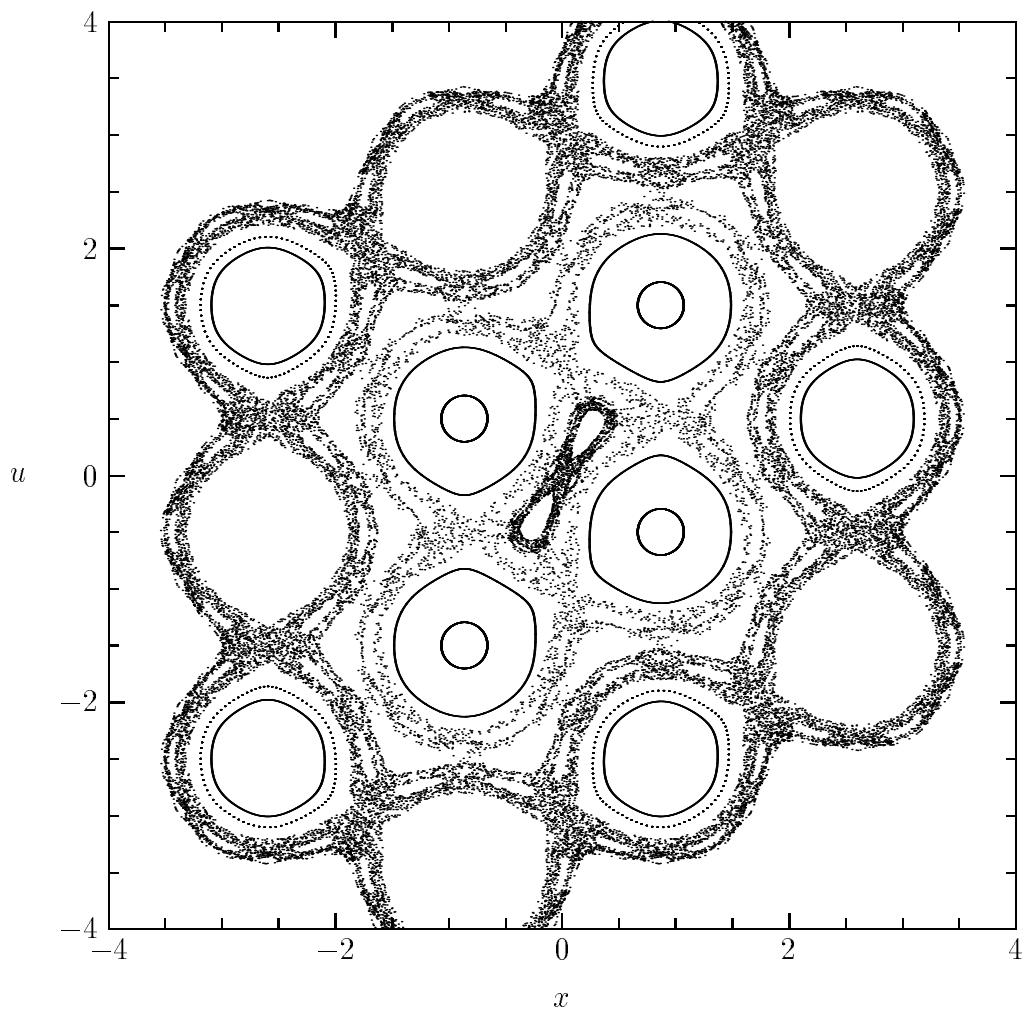


Abbildung 4.25: Wie Abbildung 4.24, jedoch $b = 0.2$.

4.2 Periodische Kick-Funktionen

Im vorherigen Abschnitt wurde die Kick-Funktion $f(x)$ so gewählt, daß durch sie ein regelmäßiges Stochastisches Netz erzeugt wurde, dessen Geometrie sich auf einfache Weise erklären ließ. Zudem hatte die stückweise lineare Abbildung den Vorteil, daß die chaotischen und die regulären Bereiche des Phasenraumes scharf voneinander getrennt waren und sich die Breite der stochastischen Kanäle direkt aus den Parameterwerten ergab.

Die meisten Überlegungen sollen im folgenden anhand der Kick-Funktion

$$f(x) = -K \sin(2\pi x) \quad (4.34)$$

durchgeführt werden, also anhand der Kick-Funktion $f_{P1}(x)$, die in Abschnitt 1.7 kurz eingeführt wurde (siehe (1.33)). Mit dieser Kick-Funktion wird $\bar{M}_{\alpha,f}$ zu der von Zaslavsky eingeführten Netzabbildung. Zur Netzabbildung wurden umfangreiche Untersuchungen durchgeführt (siehe zum Beispiel [3, 4, 8, 11, 18, 19]), jedoch soll nicht vergessen werden, daß obiges $f(x)$ nicht die einzige periodische Kick-Funktion ist, die ein Stochastisches Netz erzeugt. Yu und Parmenter haben in [9] mehrere periodische Kick-Funktionen vorgestellt, die ein ganz ähnliches Verhalten zeigen.

4.2.1 Kristallsymmetrien

Als erstes überlegt man sich, daß nur Kick-Funktionen mit der (räumlichen) Periode 1 betrachtet werden müssen. Hat man nämlich eine Kick-Funktion $f(x)$ mit der Periode $b \neq 0$ gegeben, so ist $\bar{M}_{\alpha,f}$ ähnlich wie für aperiodische Kick-Funktionen (vergleiche 4.10), über die Umskalierung

$$\frac{x}{b} \rightarrow x \quad , \quad \frac{u}{b} \rightarrow u \quad (4.35)$$

topologisch konjugiert zu einem $\bar{M}_{\alpha,\hat{f}}$, wobei $\hat{f}(x)$ die Periode 1 hat. Ohne Einschränkung habe also $f(x)$ immer die Periode 1.

Es soll im folgenden weiterhin $\alpha = 2\pi/q$ mit $q \in \mathbb{N}$ gelten (siehe (4.16)). In der Betrachtung der aperiodischen Kick-Funktion zeigte sich bereits, daß man für die Fälle $q \in \{3, 4, 6\}$ eine sehr gleichförmige Netzstruktur mit einer offensichtlichen Translationssymmetrie erhielt, während sich für die anderen Fälle, wie $q = 5$ oder $q = 7$, ein recht kompliziertes, verschachteltes Netz ergab. Es liegt also nahe, die Fälle $q \in \{3, 4, 6\}$ getrennt zu untersuchen und nach Möglichkeit eine Begründung der Unterschiede zu liefern.

Es soll nun gezeigt werden, daß $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ Translationssymmetrie besitzt, sofern $q \in \{3, 4, 6\}$ und $f(x)$ periodisch ist. Um dies zu zeigen, soll die q -te Iterierte von $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ in anderer Form als in (1.24) geschrieben werden. Es sei daran erinnert, daß $\bar{M}_{\alpha,f}$ die Komposition zweier Abbildungen ist:

$$\bar{M}_{\alpha,f} = \Phi_\alpha \circ \Psi_K \quad (4.36a)$$

mit

$$\Phi_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ und } \Psi_K(x, u) = \begin{pmatrix} x \\ u + f(x) \end{pmatrix}. \quad (4.36b)$$

Φ_α ergibt sich aus der Teilchenbewegung zwischen den Kicks, und Ψ_K beschreibt den Impulsübertrag beim Kick. In der hier gewählten Skalierung (1.15) reduziert sich Φ_α auf eine einfache Drehung um den Winkel $-\alpha$.

Dann kann die q -te Iterierte von $\bar{M}_{\alpha,f}$ auch in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\bar{M}_{\alpha,f}^q = (\Phi_\alpha \circ \Psi_K)^q = \prod_{k=1}^q \Psi_{k\alpha} \quad (4.37a)$$

mit

$$\Psi_{k\alpha} = \Phi_{k\alpha} \circ \Psi_K \circ \Phi_{-k\alpha}. \quad (4.37b)$$

Hierbei soll $\prod$ eine sukzessive Komposition und $\Phi_{k\alpha}$ eine Drehung um den Winkel $-k\alpha$ bedeuten. Es ist zu beachten, daß das Produkt $\prod$ von links nach rechts geschrieben wird und $\Phi_{-q\alpha} = id$ gilt. Im Grunde ist (4.37a) nichts weiter als eine etwas aufwendige Umstellung der verschiedenen Faktoren, sie erlaubt es jedoch, eine einfache Bedingung für die Symmetrien von $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ anzugeben. Eine Abbildung L ist eine Symmetrie von $\bar{M}_{\alpha,f}^q$, wenn sie Symmetrie von allen $\Psi_{k\alpha}$ mit $1 \leq k \leq q$ ist bzw. mit allen $\Psi_{k\alpha}$ kommutiert, das heißt (vergleiche (3.1)):

$$\Psi_{k\alpha} \circ L = L \circ \Psi_{k\alpha} \quad \Rightarrow \quad \bar{M}_{\alpha,f}^q \circ L = L \circ \bar{M}_{\alpha,f}^q. \quad (4.38)$$

Angenommen $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ hat eine Translationssymmetrie

$$L_{\Delta x, \Delta u} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \Delta x \\ u + \Delta u \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

die mit allen $\Psi_{k\alpha}$ kommutiert. Zunächst muß ein solches $L_{\Delta x, \Delta u}$ mit $\Psi_K = \Psi_{q\alpha}$ selber kommutieren. Dies bedeutet aber, daß Δx eine ganze Zahl sein muß, wobei davon ausgegangen wurde, daß 1 die Hauptperiode der Funktion $f(x)$ ist. Also kommen nur Translationssymmetrien der Gestalt

$$L_{\Delta n, \Delta u} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \Delta n \\ u + \Delta u \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

mit $\Delta n \in \mathbb{Z}$ in Frage. Ferner ist ersichtlich, daß mit $L_{\Delta n, \Delta u}$ auch die Abbildung $\Phi_{k\alpha} \circ L_{\Delta n, \Delta u} \circ \Phi_{-k\alpha}$ mit allen $\Psi_{k\alpha}$ kommutiert. Also ist $\Phi_{k\alpha} \circ L_{\Delta n, \Delta u} \circ \Phi_{-k\alpha}$ ebenfalls eine Translationssymmetrie von $\bar{M}_{\alpha,f}^q$. Dies bedeutet aber, daß

$$\Phi_{k\alpha} \circ L_{\Delta n, \Delta u} \circ \Phi_{-k\alpha} = L_{\Delta n', \Delta u'} \quad (4.41)$$

für geeignete $\Delta n' \in \mathbb{Z}$ und $\Delta u' \in \mathbb{R}$ gelten muß. Aus der Kristallographie ist nun bekannt, daß diese Bedingung nur für $q \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ erfüllt werden kann. Mit anderen Worten, ein Gitter in der Ebene mit Translationssymmetrie kann nur zweizählige, dreizählige, vierzählige und sechszählige Rotationszentren haben, die das Gitter invariant lassen (siehe hierzu [20]).

$\bar{M}_{\alpha,f}^q$ kann also nur dann eine Translationssymmetrie $L_{\Delta x, \Delta u}$ besitzen, wenn $q \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ gilt. Die Fälle $q = 1$ und $q = 2$ erweisen sich insofern als uninteressant, als beide kein Stochastisches Netz erzeugen und sollen daher im folgenden nicht weiter berücksichtigt werden.

Für die verbleibenden drei Fälle zeigt sich nach kurzer Rechnung:

$q = 4$: In diesem Fall hat $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ Translationssymmetrien, die von $L_{0,1}$ und $L_{1,0}$ erzeugt werden, das heißt jede Translationssymmetrie kann als Komposition dieser beiden geschrieben werden. Die Translationsvektoren spannen ein quadratisches Gitter auf, dessen Elementarzelle ein 1×1 -Quadrat ist.

$q = 3, q = 6$: In diesen beiden Fällen hat $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ Translationssymmetrien, die von $L_{0,2/\sqrt{3}}$ und $L_{1,1/\sqrt{3}}$ erzeugt werden. Die Translationsvektoren spannen in beiden Fällen ein hexagonales Gitter auf, dessen Elementarzelle eine Raute mit Seitenlänge $2/\sqrt{3}$ ist.

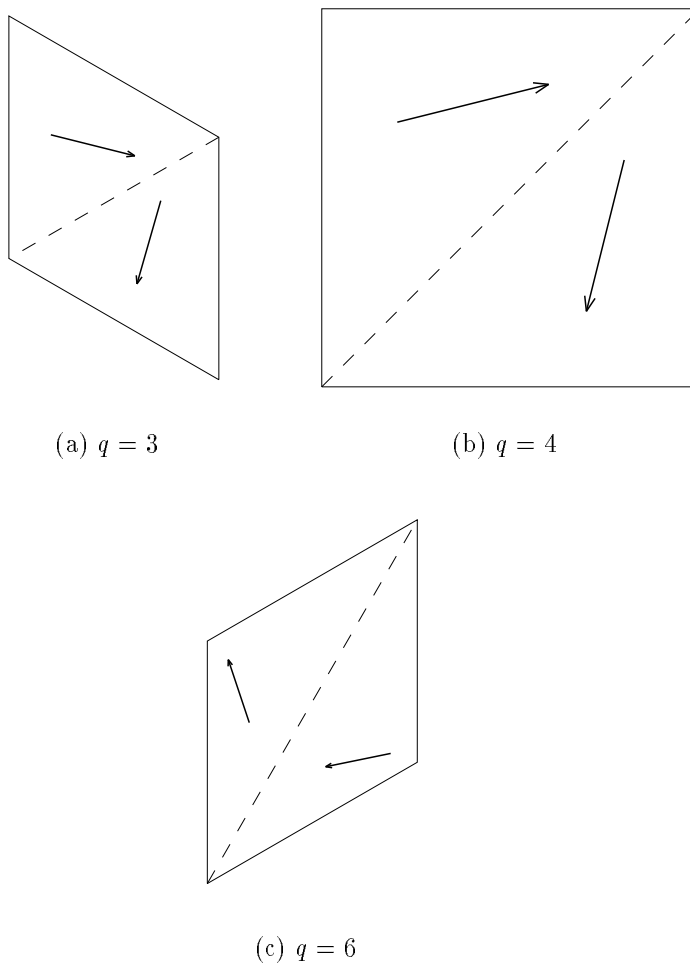
Bei der Betrachtung der Dynamik von $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ kann man sich also auf die Elementarzelle beschränken. Aufgrund der Translationssymmetrie kann man die Elementarzelle als Repräsentanten eines 2-Torus ansehen, auf dem die Dynamik stattfindet. Auf diese Weise erhält man eine geeignete Darstellung für die Dynamik. In der allgemeinen Sprache dynamischer Systeme bedeutet dies, daß $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ unter der Gruppe der Translationssymmetrien *symmetriereduziert* wurde. Zum allgemeinen Formalismus der Symmetriereduktion sei auf Anhang A.6 verwiesen.

Als nächstes soll die *Kristallsymmetriegruppe* der Abbildung $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ untersucht werden. Die Kristallsymmetriegruppe setzt sich zusammen aus den Translationssymmetrien und den restlichen linearen Symmetrien und Umkehrenden Symmetrien der Abbildung. Es ist klar, daß (Umkehrende) Symmetrien von $\bar{M}_{\alpha,f}$ auch (Umkehrende) Symmetrien von $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ sind. Somit sind in der Kristallsymmetriegruppe von $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ alle (Umkehrenden) Symmetrien von $\bar{M}_{\alpha,f}$ enthalten.

Es wurde bereits gezeigt, daß $\bar{M}_{\alpha,f}$ für beliebiges — also auch periodisches — $f(x)$ reversibel bezüglich der Umkehrenden Symmetrien $\bar{S}_0$ und $\bar{S}_1$ (siehe (4.12)) ist. Es ist offensichtlich, daß $\bar{S}_1$ eine von $f(x)$ unabhängige Spiegelung ist, während $\bar{S}_0$ im allgemeinen nicht linear ist. Somit ist $\bar{S}_1$ ein Element der Kristallsymmetriegruppe.

Abbildung 4.26 zeigt schematisch die Elementarzellen für $q \in \{3, 4, 6\}$ mit der Fixpunktmenge der Umkehrenden Symmetrie $\bar{S}_1$ (gestrichelte Linie). Die Elementarzelle ist dabei so plazierte, daß der Ursprung $(0, 0)$ in der Mitte liegt. Die Pfeile sollen veranschaulichen, wie $\bar{S}_1$ die Dynamik innerhalb der Elementarzelle beeinflußt. Die Kristallsymmetriegruppen, die von den Translationssymmetrien und der Umkehrenden Spiegelung $\bar{S}_1$ erzeugt werden, sind offenbar für alle $q \in \{3, 4, 6\}$ isomorph zueinander.

Um die Kristallsymmetriegruppen korrekt zu klassifizieren sei angemerkt, daß das Konzept der Umkehrenden Symmetrien eng verbunden ist mit dem Konzept der Spin-umkehrenden Symmetrien in magnetischen Gruppen (siehe hierzu ebenfalls [20]). In Übereinstimmung mit der Literatur soll hier die Schubikov-Belov-Notation verwandt werden. In dieser Notation erhält die in Abbildung 4.26


 Abbildung 4.26: pm' -Kristallsymmetriegruppe.

schematisch angedeutete Kristallsymmetriegruppe die Bezeichnung pm' (m' bezeichnet hierbei die Umkehrende Spiegelung $\bar{S}_1$).

Bis jetzt wurde allein die Periodizität von $f(x)$ ausgenutzt. Im folgenden soll $f(x)$ näher spezifiziert werden. Es wird sich zeigen, daß dann kompliziertere Kristallsymmetriegruppen auftreten können. Setzt man zusätzlich voraus, daß $f(x)$ wie im aperiodischen Fall ungerade ist, so hat $\bar{M}_{\alpha,f}$ und damit auch $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ die Symmetrie $-id$. Es gilt ja:

$$\begin{aligned}
 (\bar{M}_{\alpha,f} \circ (-id))(x, u) &= \bar{M}_{\alpha,f}(-x, -u) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ -u + f(-x) \end{pmatrix} \\
 &= - \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u + f(x) \end{pmatrix} \\
 &= ((-id) \circ \bar{M}_{\alpha,f})(x, u).
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Das bedeutet, im Ursprung gibt es ein zweizähliges Rotationszentrum. Zudem ist

bekannt, daß die Komposition einer Symmetrie mit einer Umkehrenden Symmetrie wieder eine Umkehrende Symmetrie ergibt. Folglich hat $\bar{M}_{\alpha,f}$ und damit $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ dann auch die Spiegelung

$$\bar{T}_1 = (-id) \circ \bar{S}_1 : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

als Umkehrende Symmetrie. Ferner ist die Komposition einer Symmetrie mit einer Symmetrie wiederum eine Symmetrie. Verkettet man die Symmetrie $-id$ mit einer der Translationssymmetrien und berücksichtigt man, daß man auf einem 2-Torus operiert, so ergeben sich noch zusätzlich die folgenden Rotationszentren:

$q = 4$: In diesem Fall erhält man zweizählige Rotationszentren an den Punkten $(n/2, m/2)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

$q = 3, q = 6$: In diesen beiden Fällen findet man zweizählige Rotationszentren an den Punkten $(n/\sqrt{3} + m\sqrt{3}/2, m/2)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Abbildung 4.27 zeigt die Elementarzellen für den Fall, daß $f(x)$ ungerade ist. Die gestrichelten Linien sind die Fixpunkt Mengen der Umkehrenden Spiegelungen $\bar{S}_1$ und $\bar{T}_1$ und die Punkte die zweizähligen Rotationszentren. Die zusätzlich eingezeichneten Pfeile sollen wiederum den Einfluß der verschiedenen Symmetrien und Umkehrenden Symmetrien auf die Dynamik symbolisch darstellen. In der Schubikov–Belov–Notation erhält die Symmetriegruppe, die von den Rotationszentren, Umkehrenden Spiegelungen und den Translationssymmetrien erzeugt wird, die Bezeichnung $cm'm'$.

Speziell für den Fall $q = 4$ läßt sich noch eine weitere Kristallsymmetrie herleiten. Setzt man voraus, daß $f(x)$ ungerade ist und zusätzlich die Eigenschaft $f(x + 1/2) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt, kann gezeigt werden, daß $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ auf dem Rand der Elementarzelle mehrere vierzählige Rotationszentren hat. Da dies ein wenig aufwendiger zu zeigen ist, soll diese Aussage hier als Satz formuliert werden (siehe [10]).

Satz 4.4 *Sei $q = 4$. Die Kick-Funktion $f(x)$ sei ungerade, periodisch mit der Periode 1 und erfülle die Bedingung $f(x + 1/2) = -f(x)$. Dann hat $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ ein umkehrendes vierzähliges Rotationszentrum an der Stelle $(0, 1/2)$.*

Beweis:

Zunächst einmal gilt nach Definition der Abbildung $\bar{M}_{\alpha,f}$:

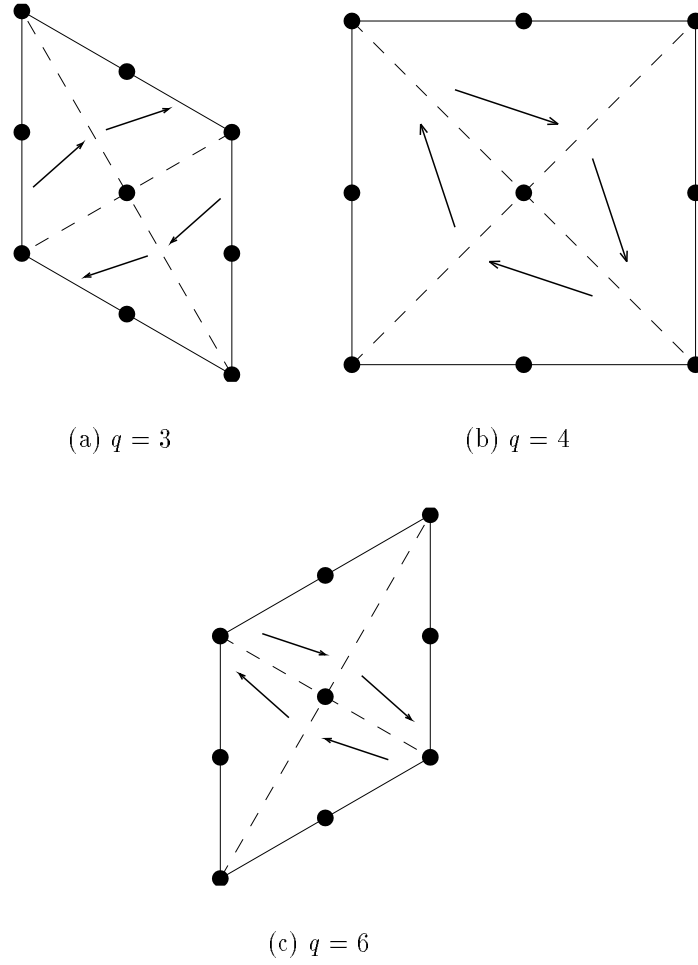
$$\bar{M}_{\alpha,f}^q = \bar{M}_{\pi/2,f}^4 = (\Phi_{\pi/2} \circ \Psi_K \circ \Phi_{\pi/2} \circ \Psi_K)^2.$$

Nun ist $\Phi_{\pi/2}$ eine Drehung um $-\pi/2$, das heißt, es gilt

$$\Phi_{-\pi/2}(x, u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = -\Phi_{\pi/2}(x, u).$$

Ferner wurde vorausgesetzt, daß $f(x)$ ungerade ist, also gilt

$$\Psi_K(-x, -u) = \begin{pmatrix} -x \\ -u + f(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -u - f(x) \end{pmatrix} = -\Psi_K(x, u).$$


 Abbildung 4.27: $cm'm'$ -Kristallsymmetriegruppe.

Somit kann $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\bar{M}_{\alpha,f}^q = \bar{M}_{\pi/2,f}^4 = (\Phi_{\pi/2} \circ \Psi_K \circ \Phi_{-\pi/2} \circ \Psi_K)^2 = (\Psi_{\pi/2} \circ \Psi_K)^2.$$

Hierbei ist $\Psi_{\pi/2}$ entsprechend (4.37b) definiert.

Um die zusätzliche Bedingung $f(x + 1/2) = -f(x)$ ausnutzen zu können, soll der Ursprung an den Punkt $(0, 1/2)$ verschoben werden. Sei

$$L : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ u + 1/2 \end{pmatrix}$$

eine Translation um $1/2$ in u -Richtung und die Abbildung $\check{M}$ definiert durch

$$\check{M} = L^{-1} \circ \bar{M}_{\pi/2,f} \circ L.$$

Dann gilt

$$\check{M}^4 = L^{-1} \circ \bar{M}_{\pi/2,f}^4 \circ L = L^{-1} \circ (\Psi_{\pi/2} \circ \Psi_K)^2 \circ L = (L^{-1} \circ \Psi_{\pi/2} \circ \Psi_K \circ L)^2.$$

Ferner hat man

$$(\Psi_K \circ L)(x, u) = \begin{pmatrix} x \\ u + 1/2 + f(x) \end{pmatrix} = (L \circ \Psi_K)(x, u)$$

und, da $f(x + 1/2) = -f(x)$ vorausgesetzt war,

$$\begin{aligned} (\Psi_{\pi/2} \circ L)(x, u) &= (\Phi_{\pi/2} \circ \Psi_K \circ \Phi_{-\pi/2} \circ L) = (\Phi_{\pi/2} \circ \Psi_K)(-u - 1/2, x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u - 1/2 \\ x + f(-u - 1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + f(u) \\ u + 1/2 \end{pmatrix} \\ &= (L \circ \Phi_{\pi/2})(-u, x - f(-u)) = (L \circ \Phi_{\pi/2} \circ \Psi_K^{-1} \circ \Phi_{-\pi/2})(x, u) \\ &= (L \circ \Psi_{\pi/2}^{-1}). \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also:

$$\check{M}^4 = (\Psi_{\pi/2}^{-1} \circ \Psi_K)^2.$$

Nun ist leicht einzusehen, daß $\check{M}^4$ im Nullpunkt eine Rotation um $\pi/2$ als Umkehrend Symmetrie hat:

$$\begin{aligned} \Phi_{\pi/2} \circ \check{M}^4 \circ \Phi_{-\pi/2} &= (\Phi_{\pi/2} \circ \Psi_{\pi/2}^{-1} \circ \Phi_{-\pi/2} \circ \Phi_{\pi/2} \circ \Psi_K \circ \Phi_{-\pi/2})^2 \\ &= (\Psi_K^{-1} \circ \Psi_{\pi/2})^2 = (\check{M}^4)^{-1} \end{aligned}$$

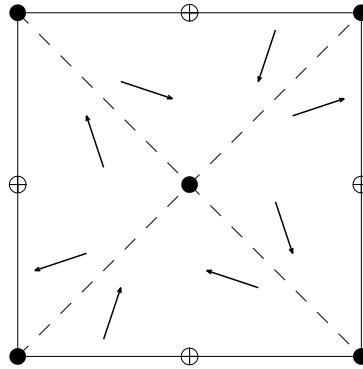
Damit ist gezeigt, daß $\bar{M}_{\pi/2, f}^4$ ein umkehrendes vierzähliges Rotationszentrum an der Stelle $(0, 1/2)$ besitzt.

□

Wendet man die anderen Symmetrien und Umkehrenden Symmetrien auf diese neue Umkehrende Symmetrie an, so ist leicht einzusehen, daß $\bar{M}_{\pi/2, f}^4$ an den Stellen $(n/2, m/2)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n + m$ ungerade umkehrende vierzählige Rotationszentren besitzt.

Abbildung 4.28 zeigt schematisch die besondere Situation für $q = 4$ und $f(x + 1/2) = -f(x)$. Wie in den vorherigen Abbildungen stellen die gestrichelten Linien die Umkehrenden Spiegelungen und die Punkte die zweizähligen Rotationszentren dar. Die gekreuzten Kreise markieren die eben nachgewiesenen Umkehrenden vierzähligen Rotationszentren. In der Schubikov–Belov–Notation erhält diese Kristallsymmetriegruppe die Bezeichnung $p4'gm'$.

Tabelle 4.4 zeigt noch einmal eine kurze Auflistung der Ergebnisse dieses Unterabschnitts. Es sei angemerkt, daß für den Spezialfall $f(x) = -K \sin(2\pi x)$ sowohl die Bedingung $f(x) = -f(-x)$ als auch die Bedingung $f(x + 1/2) = -f(x)$ erfüllt ist. Für eine sinusförmige Kick-Funktion lassen sich also sämtliche Ergebnisse anwenden.


 Abbildung 4.28: Kristallsymmetriegruppe $p4'gm'$ für $q = 4$.

Eigenschaft von f	q	Symmetriegruppe
—	3,4,6	pm'
$f(x) = -f(-x)$	3,4,6	$cm'm'$
$f(x) = -f(-x)$ $f(x + 1/2) = -f(x)$	4	$p4'gm'$

 Tabelle 4.4: Kristallsymmetriegruppen für periodisches $f(x)$.

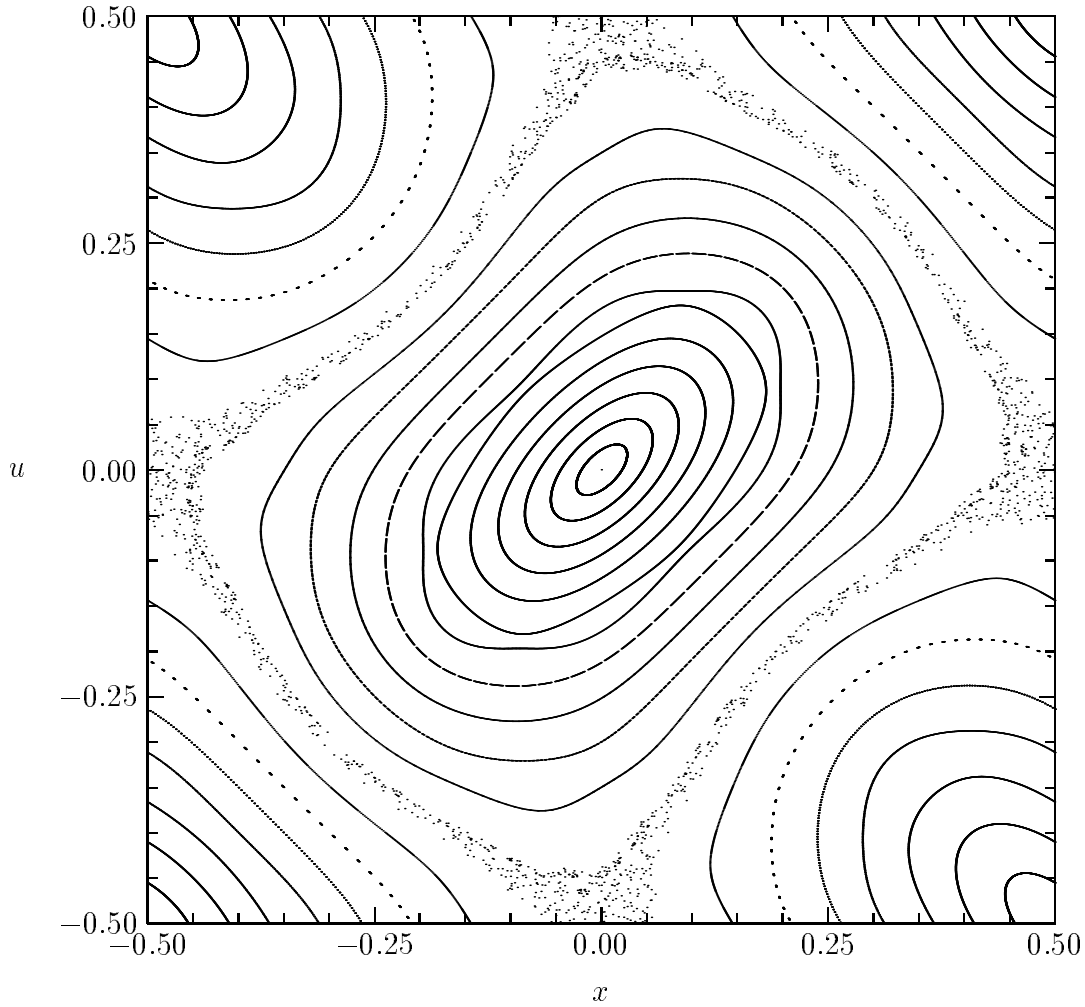
4.2.2 Das Stochastische Netz

Im vorherigen Unterabschnitt wurden nur die Symmetrien der q -ten Iterierten von $\bar{M}_{\alpha,f}$ untersucht, die Dynamik von $\bar{M}_{\alpha,f}$ selbst wurde bisher noch nicht analysiert. Im folgenden soll $\bar{M}_{\alpha,f}$ für die sinusförmige Kick-Funktion (4.34) untersucht werden. Das heißt, die Periode von $f(x)$ wurde bereits auf 1 skaliert, und allein die Stärke K der Kicks soll als Parameter variiert werden.

Wie bereits erwähnt, wurde $\bar{M}_{\alpha,f}$ von Zaslavsky und Mitarbeitern in zahlreichen Veröffentlichungen untersucht (zum Beispiel [3, 4, 8]). Aus diesem Grunde soll die Dynamik von $\bar{M}_{\alpha,f}$ an dieser Stelle nur kurz behandelt werden. Für genauere Ausführungen sei auf die oben zitierten Veröffentlichungen verwiesen.

Entsprechend den Ausführungen im vorherigen Unterabschnitt kann man die Betrachtungen für $q \in \{3, 4, 6\}$ auf eine Elementarzelle beschränken, da sich die Gesamtdynamik durch einfache Translation dieser Zelle ergibt, wobei allerdings Untersuchungen zur Diffusion nicht mehr möglich sind. Für $q = 4$ werden die Betrachtungen besonders einfach, da man sich auf den 2-Torus $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ beschränken kann und die 4-te Iterierte von $\bar{M}_{\alpha,f}$ die größte Symmetrie hat.

Abbildung 4.29 zeigt das Phasenportrait für $q = 4$ und $K = 0.191$ auf der

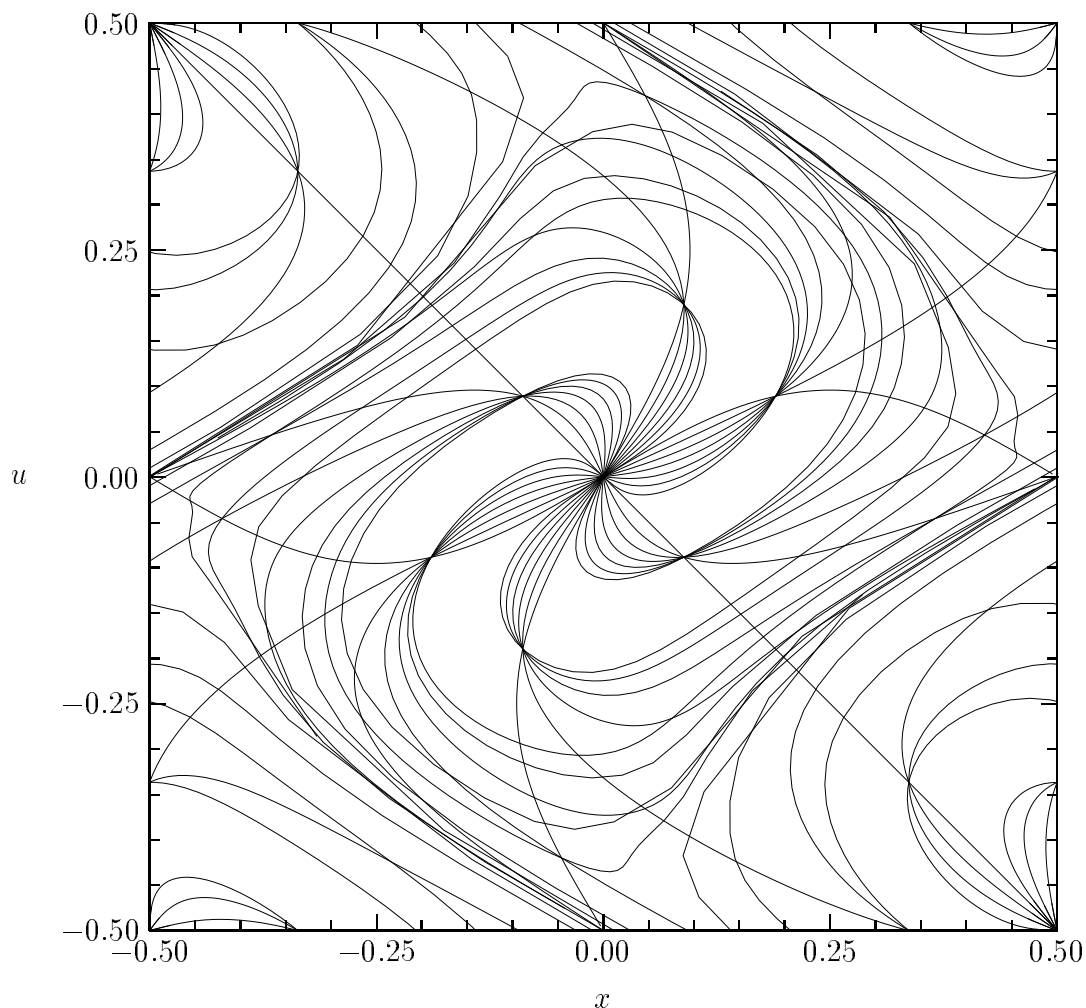

 Abbildung 4.29: Phasenportrait für $q = 4$ und $K = 0.191$.

Elementarzelle $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$. Man erkennt sehr schön die Auswirkungen der in Abbildung 4.28 schematisch dargestellten Symmetrien auf das System. So wird beispielsweise der zentrale elliptische Bereich durch die vierzähligen Rotationszentren auf den Randmitten (gekreuzte Kreise in Abbildung 4.28) jeweils auf die Ecken der Elementarzelle gedreht, wobei sich der Umlaufsinn umkehrt. Hierbei ist zu beachten, daß im vorherigen Unterabschnitt allein die Symmetrien der Abbildung $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ bestimmt wurden. Der zentrale Fixpunkt wird unter den Symmetrien also auf periodische Punkte der Periode 4 abgebildet.

Auch für eine periodische Kick-Funktion kann versucht werden, mit Hilfe von Symmetrielinien einen Überblick über das Phasenportrait zu erhalten (vergleiche Abbildung 4.3). Die Gleichungen (4.13) für die Symmetrielinien $\text{Fix}(\bar{S}_0)$ und $\text{Fix}(\bar{S}_1)$ können unverändert übernommen werden:

$$\text{Fix}(\bar{S}_0) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2; u = (K/2) \sin(2\pi x)\} \quad (4.44a)$$

$$\text{Fix}(\bar{S}_1) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2; u = -x \tan(\alpha/2)\}, \quad (4.44b)$$

Abbildung 4.30: Symmetrielinien für $q = 4$ und $K = 0.191$.

wobei der Einfachheit halber für die Kick-Funktion bereits (4.34) eingesetzt wurde. Es ist zu beachten, daß für $q = 4$ der Phasenraum auf den 2-Torus eingeschränkt ist, sich also die Symmetrielinien über den Rand hinaus fortsetzen können. Da sich für $q = 4$ jedoch $\text{Fix}(\bar{S}_0)$ als der Graph einer periodischen Funktion und $\text{Fix}(\bar{S}_1)$ als Diagonale ergeben, können derartige Betrachtungen unberücksichtigt bleiben.

Iteriert man die obigen Symmetrielinien, so erhält man entsprechend den Ausführungen in Kapitel 3 die Fixpunktmenge von $\bar{S}_n$, auf deren Schnittpunkten periodische Punkte liegen. Das Ergebnis dieser Berechnung ist in Abbildung 4.30 zu sehen. Aus numerischen Gründen wurden nur die erstens 24 Symmetrielinien, das heißt $\text{Fix}(\bar{S}_0)$ bis $\text{Fix}(\bar{S}_{23})$ bestimmt.

Auch hier müßten prinzipiell die Symmetrielinien der $\bar{T}_k$ mit berechnet werden, zumal da $\bar{T}_1$ im vorherigen Unterabschnitt eine besondere Bedeutung zukam (siehe (4.43)). Eine genaue Berechnung zeigt jedoch, daß auf diese Weise keine neuen periodischen Punkte gewonnen werden können: Die $\text{Fix}(\bar{T}_k)$ gleichen qualitativ

den $\text{Fix}(\tilde{S}_k)$. Aus diesem Grunde wurde darauf verzichtet, diese Symmetrien mit anzugeben.

Es darf nicht überraschen, daß in Abbildung 4.30 recht wenig von den im vorherigen Unterabschnitt bestimmten Symmetrien zu erkennen ist. In Abbildung 4.30 sind allein die Umkehrenden Symmetrien von $\bar{M}_{\alpha,f}$ gezeigt, nicht jedoch die von $\bar{M}_{\alpha,f}^4$. Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß eine verallgemeinerte Theorie der Umkehrenden Symmetrien existiert, mit deren Hilfe von bestimmten Eigenschaften von $\bar{M}_{\alpha,f}$ auf Symmetrien von $\bar{M}_{\alpha,f}^q$ geschlossen werden kann (siehe hierzu [21]). Dies soll jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

Stattdessen soll kurz untersucht werden, wie das Stochastische Netz für den Fall $q = 4$ erzeugt wird. Die Überlegungen aus dem vorherigen Unterabschnitt garantieren allein die Existenz einer Translationssymmetrie für $\bar{M}_{\alpha,f}^4$, nicht jedoch die Existenz eines chaotischen Orbits von $\bar{M}_{\alpha,f}$, der sich über den gesamten Phasenraum ausbreitet und dabei ein Stochastisches Netz erzeugt.

Es ist leicht nachzurechnen, daß an den Punkten

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

ein periodischer Orbit mit der Periode 4 existiert. Dieser hat das Residuum

$$R = -\frac{16\pi^4 K^4 + 24\pi^2 K^2}{4}, \quad (4.46)$$

das heißt, er ist für alle positiven K -Werte hyperbolisch. In Abbildung 4.31 sind die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten dieses periodischen Orbits abgebildet. Man erkennt deutlich, daß die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten heterokline Verbindungen eingehen und somit für das in Abbildung 4.29 erkennbare chaotische Band verantwortlich sind.

Betrachtet man die Dynamik in der Nähe eines dieser periodischen Punkte, so ist klar, daß an dieser Stelle ein chaotischer Orbit von einer Elementarzelle zur nächsten "weitergereicht" werden kann. Die instabilen Eigenrichtungen des periodischen Punktes zeigen sowohl in die Elementarzelle hinein, als auch aus ihr heraus. Der 4-periodische hyperbolische Orbit auf dem Rand der Elementarzelle ist also für die Entwicklung eines Stochastischen Netzes im Phasenraum verantwortlich. Abbildung 4.32 zeigt einen Ausschnitt dieses Netzes, wobei zu beachten ist, daß hier nur ein einziger Orbit zu sehen ist, nicht ein ganzes Ensemble, wie in Abbildung 4.29.

Für die aperiodische Kick-Funktion ergab sich die Breite der Kanäle des Stochastischen Netzes einfach als $2b$, wobei b der Parameter in der Kick-Funktion war. Möchte man für die Kick-Funktion (4.34) ebenfalls die Breite der Kanäle abschätzen, so muß man Störungsrechnung anwenden. In [3] wird die Breite h_4 der Kanäle des Netzes mit Hilfe der im folgenden Abschnitt erläuterten approximativen Hamilton-Funktion für $q = 4$ wie folgt abgeschätzt:

$$h_4 = 2 \frac{16\pi^2}{K} e^{-\pi^2/K}. \quad (4.47)$$

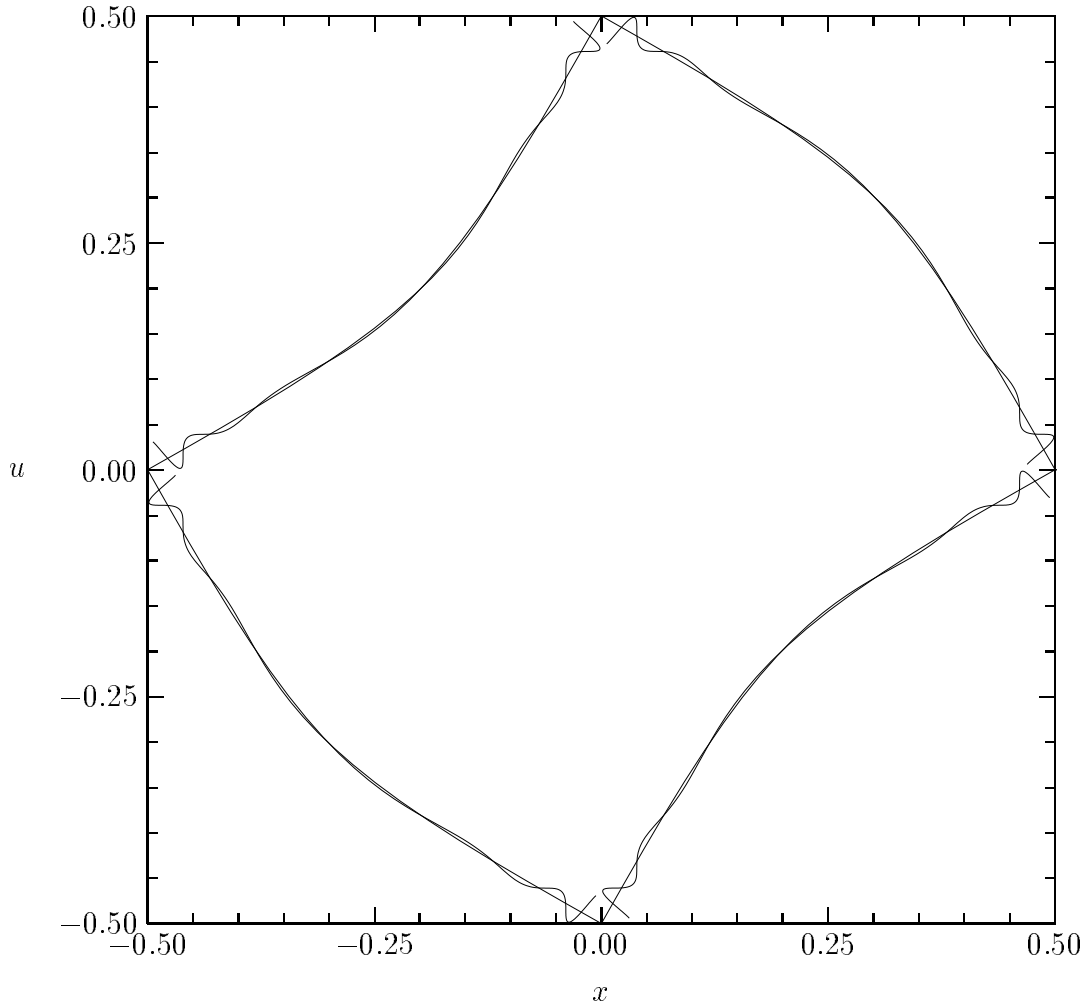


Abbildung 4.31: Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten des 4-Zyklus.

Die verbleibenden kristallsymmetrischen Fälle $q = 3$ und $q = 6$ lassen sich ganz analog behandeln. In Abbildung 4.33 ist das auf die Elementarzelle eingeschränkte Phasenportrait für $q = 6$ und $K = 0.191$ dargestellt. Ähnlich wie im Falle $q = 4$ existiert in der Mitte ein elliptischer Fixpunkt und diverse Zyklen, um den ein chaotischer Bereich liegt, der die verschiedenen Zellen des Netzes miteinander verbindet. Für den chaotischen Bereich ist dieses Mal ein hyperbolischer 6-Zyklus verantwortlich, dessen stabile und instabile Mannigfaltigkeiten miteinander heterokline Verbindungen eingehen.

Wie in Abbildung 4.34 zu sehen ist, reicht auch in diesem Fall ein einzelner Orbit aus, um im gesamten Phasenraum ein Stochastisches Netz zu erzeugen. Die Breite der Kanäle dieses Stochastischen Netzes läßt sich ebenfalls mit Hilfe der noch zu besprechenden approximativen Hamilton-Funktion ermitteln. Laut [3] gilt:

$$h_3, h_6 \propto e^{-2\sqrt{3}\pi^2/3K}. \quad (4.48)$$

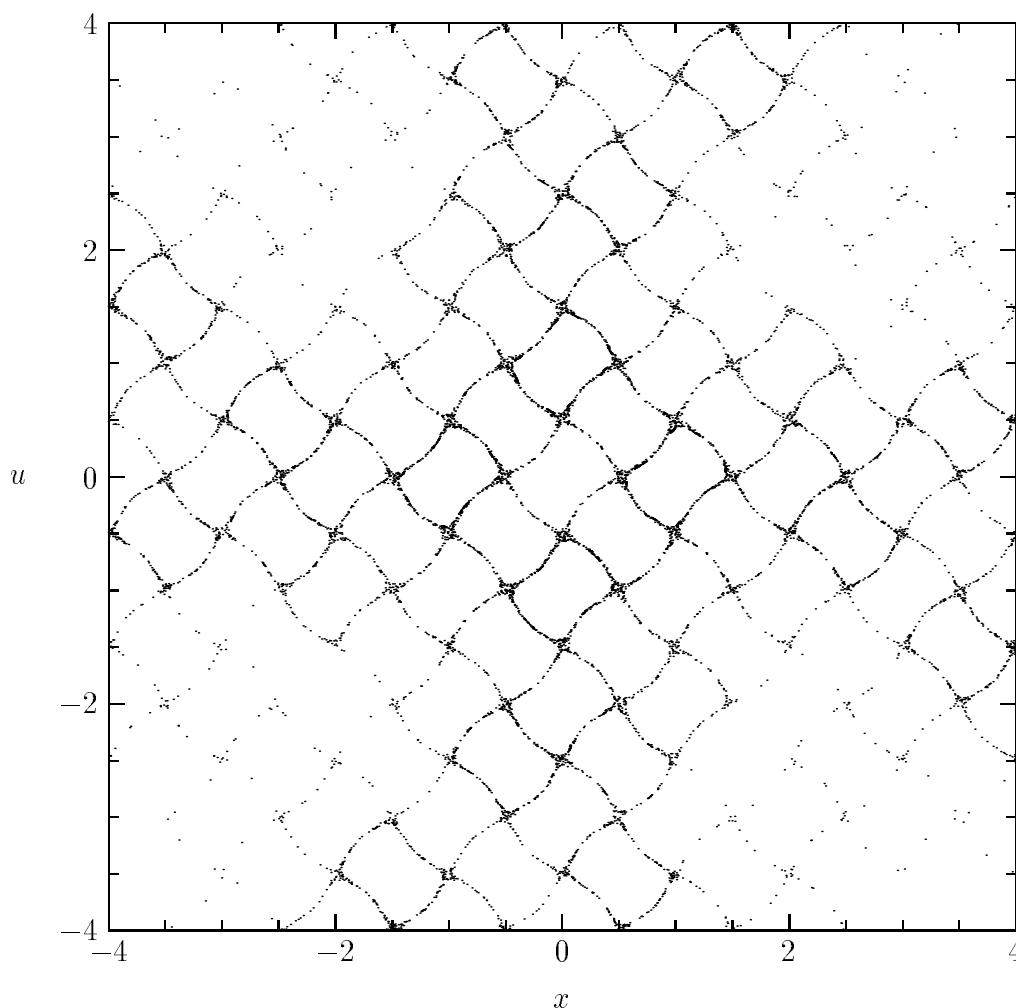


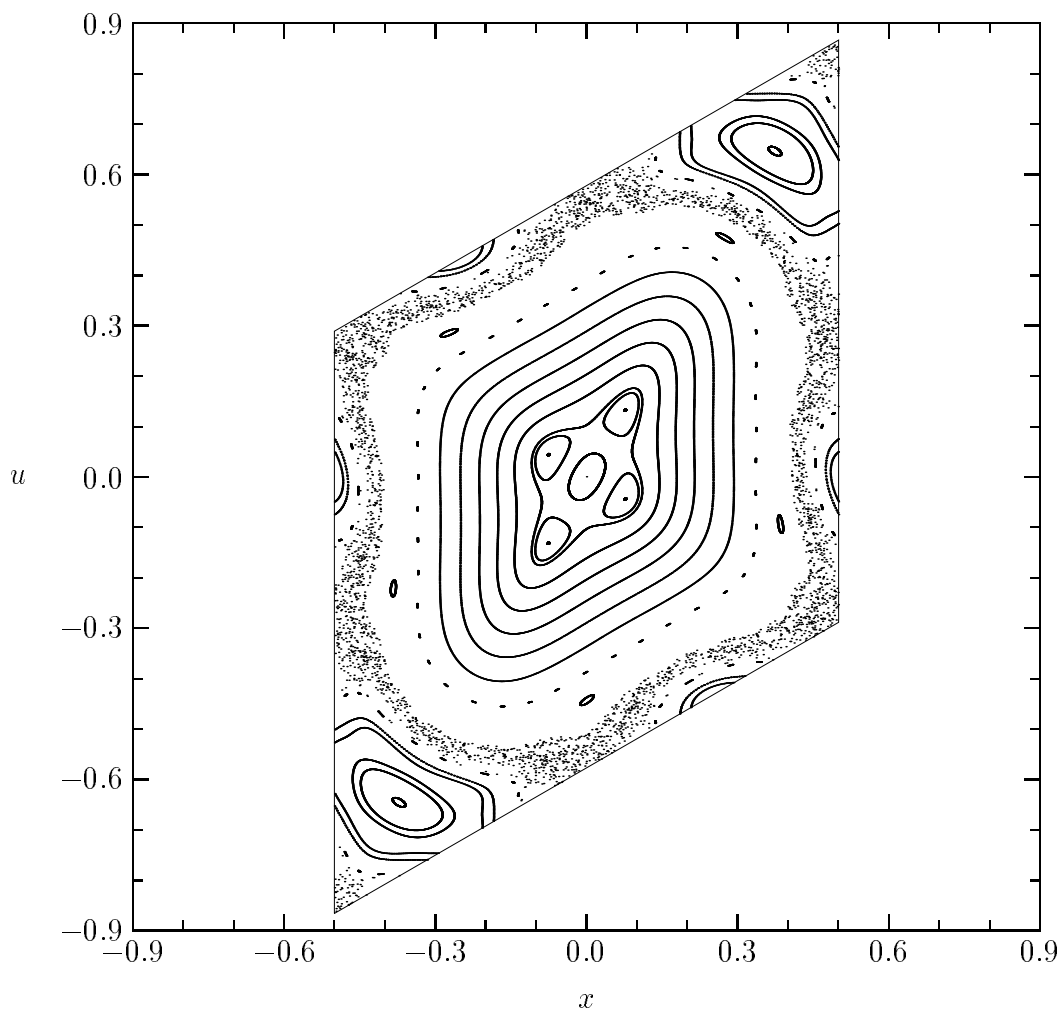
Abbildung 4.32: Orbit für $q = 4$ und $K = 0.191$. Startwerte $x_0 = 0.49$ und $u_0 = 0$. 100000 Iterationen.

Hierbei soll h_3 die Breite des Netzes für $q = 3$ und h_6 die Breite des Netzes für $q = 6$ bedeuten.

Für die quasikristallinen Fälle $q \notin \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ergibt sich ein gänzlich anderes Verhalten. Zum einen ist es nicht möglich, eine einfache Translationssymmetrie für irgendeine Iterierte der Abbildung zu finden, zum anderen kann die Breite der Kanäle nicht einheitlich abgeschätzt werden. Zudem existiert für kleinere K -Werte kein chaotischer Orbit, der in der Nähe des Nullpunktes startet und den gesamten Phasenraum überdeckt. Abbildung 4.35 zeigt einen derartigen Fall. Erst ab $K \approx 0.24$ kann ein Orbit gefunden werden, der sich über den gesamten Phasenraum erstreckt.

Das besondere Verhalten der quasikristallinen Fälle soll hier nicht weiter untersucht werden. Einzelheiten hierzu finden sich zum Beispiel in [3, 4, 8, 22].

Yu und Parmenter haben gezeigt [9], daß $\bar{M}_{\alpha, f}$ auch für andere periodische Kick-Funktionen $f(x)$ Stochastische Netze erzeugt, deren Struktur den hier vor-

Abbildung 4.33: Phasenportrait für $q = 6$ und $K = 0.191$.

gestellten Strukturen recht ähnlich ist (siehe übernächsten Unterabschnitt). Es ist klar, daß die im vorherigen Unterabschnitt vorgestellten Symmetrien gänzlich unabhängig von der speziell gewählten Kick-Funktion sind, sofern diese nur die in Tabelle 4.4 aufgeführten Voraussetzungen erfüllt.

Für das Folgende soll allein die generelle Struktur der Stochastischen Netze im Auge behalten werden. Die Diffusionsbetrachtungen, die bei derartigen Systemen eine nicht unerhebliche Rolle spielen, sollen hier nicht weiter verfolgt werden.

4.2.3 Stückweise lineare Kick-Funktion

In diesem Unterabschnitt soll kurz anhand der Kick-Funktion $f_{P_2}(x)$ (siehe (1.35)) demonstriert werden, daß $\bar{M}_{\alpha, f}$ auch für andere periodische Kick-Funktionen ein Stochastisches Netz erzeugt.

Abbildung 4.36 zeigt das Phasenportrait von $\bar{M}_{\alpha, f_{P_2}}$ für $q = 4$ und $K = 0.0811$. Vergleicht man diese Abbildung mit Abbildung 4.29 so erkennt man eine gute

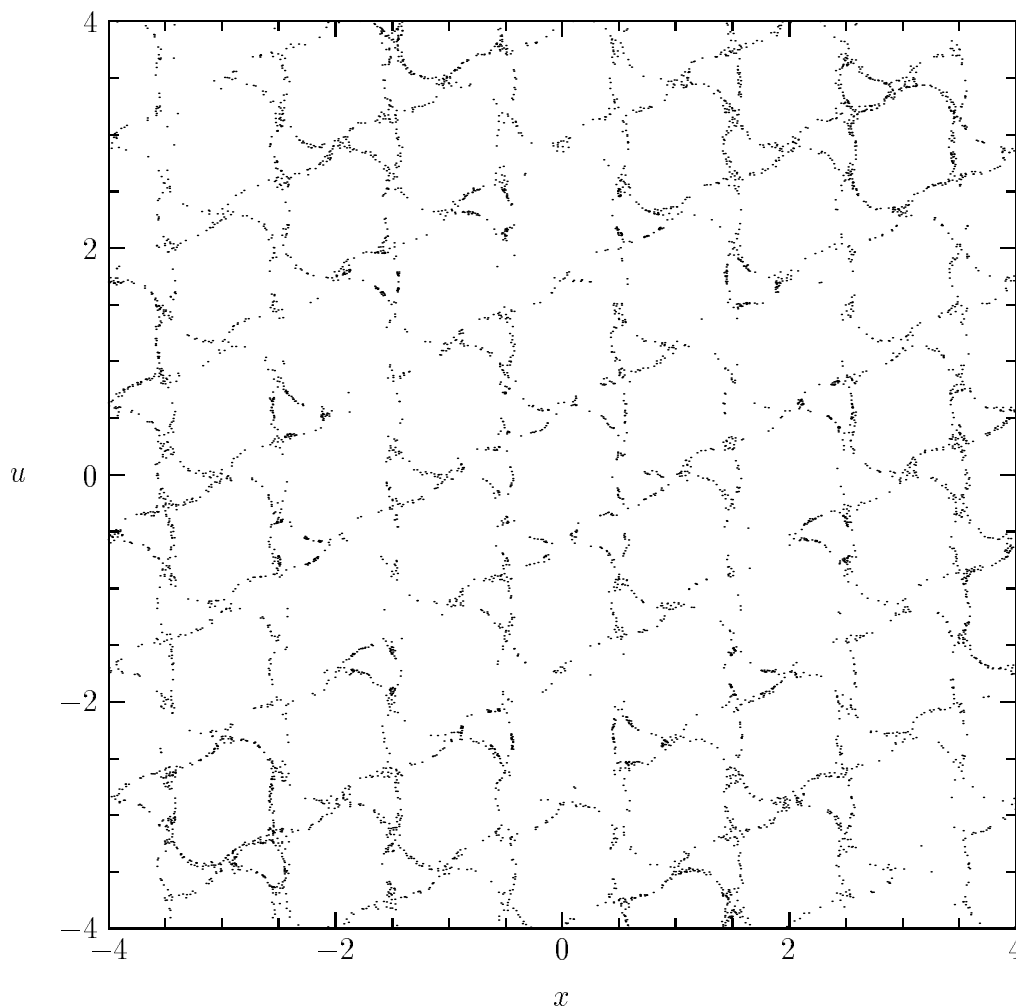


Abbildung 4.34: Orbit für $q = 6$ und $K = 0.191$. Startwerte $x_0 = 4.9$ und $u_0 = 0.2$. 200000 Iterationen.

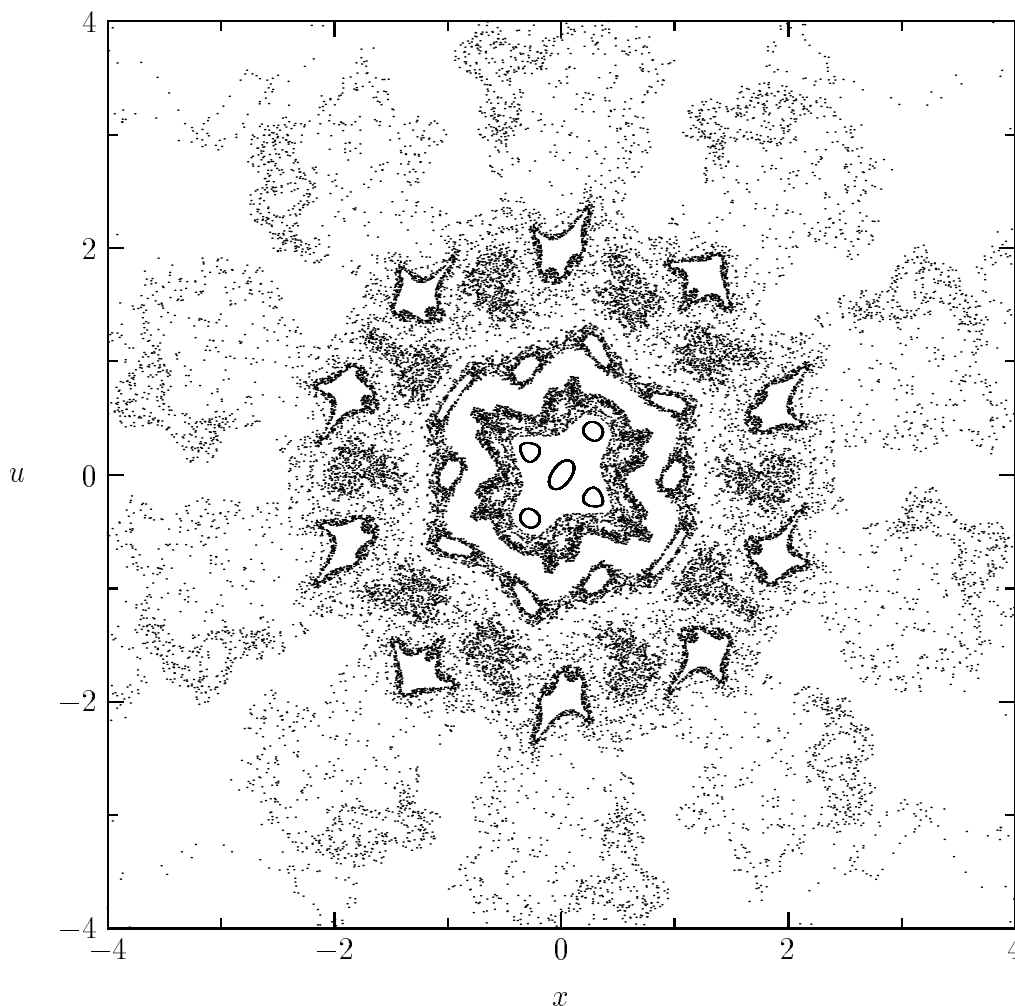
Übereinstimmung in den wesentlichen Strukturen. Auch $\bar{M}_{\alpha, f_{P_2}}$ hat einen chaotischen Orbit, der im Phasenraum ein Stochastisches Netz erzeugt. Der Aufbaumechanismus ist derselbe, wie im vorherigen Unterabschnitt erläutert.

Abbildung 4.37 zeigt als weiteres Beispiel das Phasenportrait von $\bar{M}_{\alpha, f_{P_2}}$ für $q = 6$ und $K = 0.0811$. Auch hier ist die Ähnlichkeit zu Abbildung 4.33 deutlich erkennbar.

4.2.4 Approximatives Hamilton-System erster Ordnung

Es hat sich gezeigt, daß sich im Falle einer periodischen Kick-Funktion, zum Beispiel $f(x) = -K \sin(2\pi x)$, die Dynamik der Poincaré-Abbildung $\bar{M}_{\alpha, f}$ sehr gut durch den Fluß des Hamilton-Systems

$$\bar{H}(x, u) = \sum_{k=1}^q V(x \cos k\alpha + u \sin k\alpha) \quad (4.49)$$

Abbildung 4.35: Phasenportrait für $q = 5$ und $K = 0.191$.

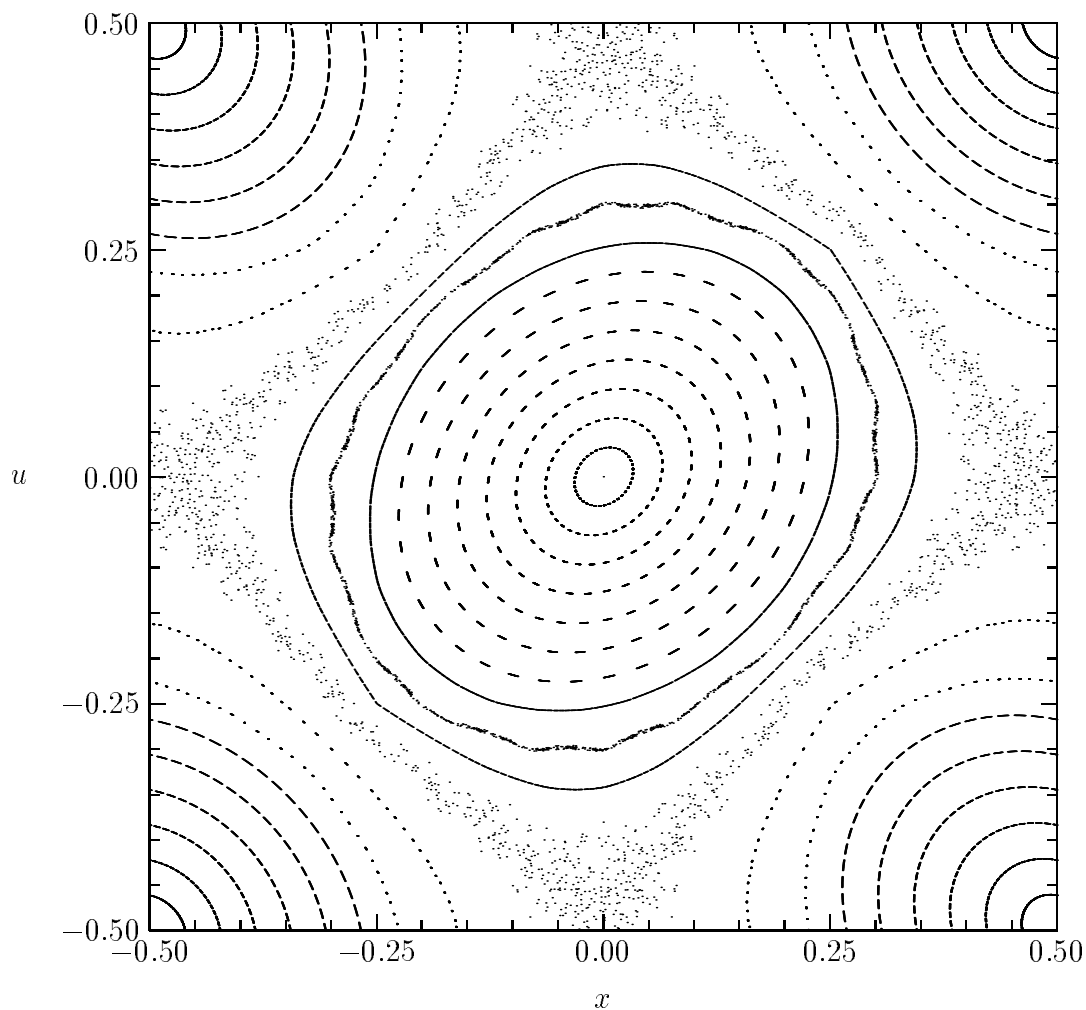
annähern läßt, wobei V das Kick-Potential sein soll. Zur Herleitung dieses Hamilton-Systems sei auf [3, 4] verwiesen.

Da diese Herleitung eine eher heuristische Argumentation benutzt, soll diese im folgenden nicht weiter berücksichtigt werden. Stattdessen soll nachgewiesen werden, daß der Fluß von $\bar{H}(x, u)$ die q -te Iterierte der Poincaré-Abbildung $\bar{M}_{\alpha, f}$ bis zu einer gewissen Ordnung approximiert (siehe hierzu [11]).

Zunächst einmal sind die Bewegungsgleichungen von $\bar{H}(x, u)$, wie bei jedem Hamilton-System, von der folgenden Gestalt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} &= \Gamma D\bar{H}(x, u) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=1}^q \begin{pmatrix} \cos k\alpha V'(x \cos k\alpha + u \sin k\alpha) \\ \sin k\alpha V'(x \cos k\alpha + u \sin k\alpha) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

wobei zu beachten ist, daß nach Definition $f = -V'$ gelten soll — das Kick-Potential sei an dieser Stelle bereits um den Faktor m/T^2 skaliert (vergleiche


 Abbildung 4.36: Phasenportrait zu $f_{P_2}(x)$ für $q = 4$ und $K = 0.0811$.

(1.19)). Somit gilt:

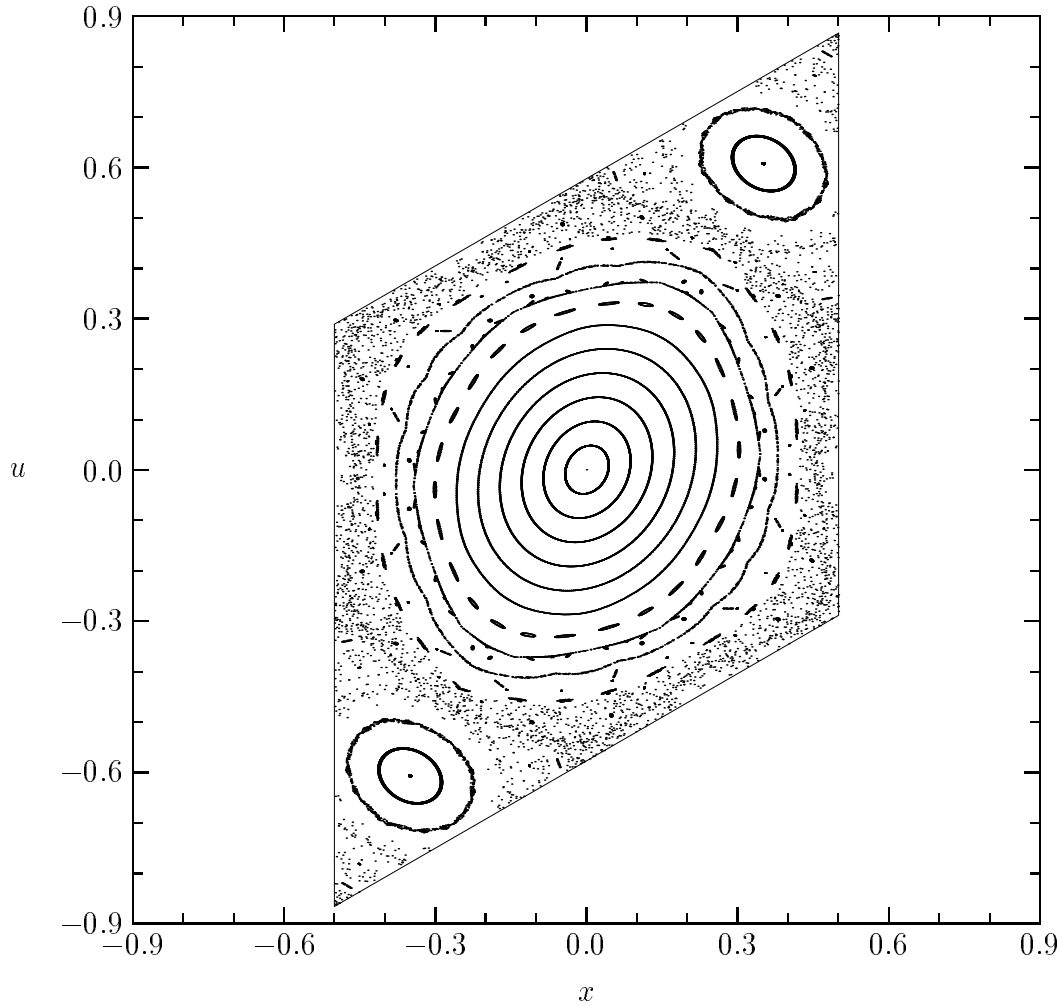
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^q \begin{pmatrix} -f(x \cos k\alpha + u \sin k\alpha) \sin k\alpha \\ f(x \cos k\alpha + u \sin k\alpha) \cos k\alpha \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Hieraus folgt nach kurzer Rechnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{q-1} \begin{pmatrix} f(x \cos k\alpha + y \sin k\alpha) \sin(q-k)\alpha \\ f(x \cos k\alpha + y \sin k\alpha) \cos(q-k)\alpha \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Der Fluß dieses Systems sei mit Φ_t bezeichnet. Nähert man diesen Fluß mit Hilfe des Euler-Verfahrens in diskreten Zeitabständen ε an, so erhält man näherungsweise die Abbildung:

$$\Phi_\varepsilon : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \varepsilon \sum_{k=0}^{q-1} \begin{pmatrix} f(x \cos k\alpha + y \sin k\alpha) \sin(q-k)\alpha \\ f(x \cos k\alpha + y \sin k\alpha) \cos(q-k)\alpha \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2). \quad (4.53)$$


 Abbildung 4.37: Phasenportrait zu $f_{P2}(x)$ für $q = 6$ und $K = 0.0811$.

Nun soll wie bisher die umskalierte Poincaré–Abbildung $\bar{M}_{\alpha,f}$ betrachtet werden. Die Kick–Funktion $f(x)$ soll jedoch in diesem speziellen Fall als kleine Störung betrachtet und daher formal mit einem Vorfaktor ε versehen werden. Insgesamt soll also die Abbildung

$$\bar{M}_{\alpha,\varepsilon f} : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u + \varepsilon f(x) \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

untersucht werden (vergleiche (4.2)). Die n -te Iterierte dieser Abbildung kann in der folgenden Gestalt geschrieben werden (vergleiche (1.24)):

$$\bar{M}_{\alpha,\varepsilon f}^n : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos n\alpha + u \sin n\alpha \\ -x \sin n\alpha + u \cos n\alpha \end{pmatrix} + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} f(x_k) \sin(n-k)\alpha \\ f(x_k) \cos(n-k)\alpha \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Setzt man $n = q$ und berücksichtigt, daß $q\alpha = 2\pi$ gilt, so erhält man mit

$$\bar{M}_{\alpha,\varepsilon f}^q : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \varepsilon \sum_{k=0}^{q-1} \begin{pmatrix} f(x_k) \sin(q-k)\alpha \\ f(x_k) \cos(q-k)\alpha \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

einen Ausdruck, der fast schon dem angenäherten Fluß Φ_ε gleicht. Es geht nur noch darum, eine geeignete Näherung für die $f(x_k)$ zu finden.

Entsprechend (4.55) gilt:

$$x_k = x \cos k\alpha + u \sin k\alpha + \varepsilon \sum_{l=0}^{k-1} f(x_l) \sin(k-l)\alpha. \quad (4.57)$$

Entwickelt man nun die Kick-Funktion $f(x)$ in eine Taylor-Reihe, so erhält man:

$$f(x_k) = f(x \cos k\alpha + u \sin k\alpha) + f'(x \cos \alpha + u \sin k\alpha) \varepsilon \sum_{l=0}^{k-1} f(x_l) \sin(k-l)\alpha + O(\varepsilon^2). \quad (4.58)$$

Setzt man dies in (4.56) ein und berücksichtigt dabei den Vorfaktor ε , so erhält man schließlich:

$$\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \varepsilon \sum_{k=0}^{q-1} \begin{pmatrix} f(x \cos k\alpha + u \sin k\alpha) \sin(q-k)\alpha \\ f(x \cos k\alpha + u \sin k\alpha) \cos(q-k)\alpha \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2 f'), \quad (4.59)$$

wobei $O(\varepsilon^2 f')$ andeuten soll, daß sowohl ε als auch $f'(x^{(k)})$ für alle x_k eines Orbits klein sein müssen, damit diese Näherung gilt. Vergleicht man (4.53) mit (4.59), so ist hiermit gezeigt, daß

$$\Phi_\varepsilon = \bar{M}_{\alpha, \varepsilon f} \quad (4.60)$$

bis zur Ordnung $\varepsilon^2 f'$ gilt. Der Fluß von $\bar{H}(x, u)$ approximiert also die q -te Iterierte der Poincaré-Abbildung $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}$.

Bei dieser Näherungsformel müssen nun verschieden Dinge beachtet werden. Als erstes sei darauf hingewiesen, daß für gerade q -Werte die Hamilton-Funktion $\bar{H}(x, u)$ den geraden Anteil der Kick-Funktion $f(x)$ nicht berücksichtigen kann. Jede Funktion kann als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion geschrieben werden. Spaltet man die Kick-Funktion entsprechend

$$f(x) = f_{gerade}(x) + f_{ungerade}(x) \quad (4.61)$$

auf, so muß für das Kick-Potential gelten:

$$V(x) = V_{ungerade}(x) + V_{gerade}(x) \quad (4.62a)$$

mit

$$f_{gerade}(x) = -V'_{ungerade}(x) \quad , \quad f_{ungerade}(x) = -V'_{gerade}(x). \quad (4.62b)$$

Der gerade Anteil von $f(x)$ wird also durch den ungeraden Anteil von $V(x)$ repräsentiert. Nun ist aber für gerades q die Summe in $\bar{H}(x, u)$ für die $V_{ungerade}$ -Terme gleich null, da sich immer Paare der Gestalt

$$V_{ungerade}(x \cos k\alpha + y \sin k\alpha) + V_{ungerade}(x \cos(q/2 + k)\alpha + y \sin(q/2 + k)\alpha) = 0 \quad (4.63)$$

ergeben. Für gerade q -Werte sollte also nur eine ungerade Kick-Funktion betrachtet werden.

Ferner zeigt es sich, daß $\bar{H}(x, u)$ nur für periodische Kick-Funktionen brauchbare Ergebnisse liefert. Berechnet man $\bar{H}(x, u)$ mit der aperiodischen Kick-Funktion aus Abschnitt 4.1, so ist in diesem $\bar{H}(x, u)$ die Struktur des von $\bar{M}_{\alpha, f}$ erzeugten Netzes nicht mehr erkennbar.

Dies hat verschiedene Gründe. Zunächst einmal ist festzustellen, daß für eine sinusförmige Kick-Funktion die Bedingung $\varepsilon f'(x) \ll 1$ leichter zu erfüllen ist als bei der aperiodischen Kick-Funktion. Es zeigte sich, daß sich im aperiodischen Fall das Stochastische Netz gerade entlang derjenigen Phasenraumbereiche (namentlich der Menge Ω^∞) ausbreitet, wo $f'(x_k)$ an vielen Stelle des Orbits sehr groß wird. Man kann daher nicht erwarten, daß die approximative Hamilton-Funktion $\bar{H}(x, u)$ auf diesem Phasenraumbereich eine verlässliche Näherung ist.

Der aufmerksame Leser mag nun kritisieren, daß im Falle der aperiodischen Kick-Funktion auf einem weiten Bereich des Phasenraumes $(\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty)$ $f'(x^{(k)}) = 0$ gilt, somit also das obige Hamilton-System die Dynamik sehr gut approximieren müßte. Bei einem derartigen Einwand wird jedoch vergessen, daß $\bar{H}$ mit der q -ten Iterierten von $\bar{M}_{\alpha, f}$ und nicht mit irgendeiner beliebigen Potenz davon verglichen wird. Das heißt, überall wo $\bar{M}_{\alpha, f}^q$ einen stabilen Fixpunkt hat, besitzt $\bar{H}$ ein Extremum, und der Fluß Φ_ε ist lokal um dieses Extremum herum geschlossen. Bei einer periodischen Kick-Funktion mit Kristallsymmetrie ergibt sich daraus kein Problem, da der zentrale Fixpunkt $(0, 0)$ unter der Translationssymmetrie verschoben wird und $\bar{M}_{\alpha, f}^q$ somit unendlich viele, auf einem Gitter angeordnete Fixpunkte hat. Bei der aperiodischen Kick-Funktion hat $\bar{M}_{\alpha, f}^q$ auf $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ nur den einen Fixpunkt $(0, 0)$, es scheint nur periodische Punkte höherer Periode zu geben (das heißt Fixpunkte von $\bar{M}_{\alpha, f}^{kq}$ mit $k \geq 2$). Somit müssen sich die Flußlinien von Φ_t in Kreisen um $(0, 0)$ anordnen und damit gerade wieder Gebiete in Ω^∞ schneiden.

Nichtsdestotrotz kann die approximative Hamilton-Funktion $\bar{H}$ für periodische Kick-Funktionen dazu benutzt werden, die Struktur des Netzes zu erklären. Abbildung 4.38 zeigt in farblicher Codierung die Höhenlinien von $\bar{H}$ für die Kick-Funktion (4.34), daß heißt für das Kick-Potential

$$V(x) = -\frac{K}{2\pi} \cos(2\pi x), \quad (4.64)$$

wobei $q = 4$ und $K = 0.191$ gesetzt wurde. Vergleicht man diese Darstellung mit dem zugehörigen Phasenportrait in Abbildung 4.29, so ist eine strukturelle Ähnlichkeit unübersehbar.

Offensichtlich entwickelt sich der chaotische Bereich in Abbildung 4.29 in der Nähe der Nullstellenmenge von $\bar{H}(x, u)$. Die approximative Hamilton-Funktion $\bar{H}(x, u)$ kann daher dazu verwandt werden, einen qualitativen Überblick über das Netz zu erhalten. So ist Abbildung 4.39 zu vergleichen mit Abbildung 4.32. Die Abbildungen 4.40 und 4.41 zeigen das gleiche für den Fall $q = 6$. Das heißt, Abbildung 4.40 ist zu vergleichen mit Abbildung 4.33 und Abbildung 4.41 mit Abbildung 4.34.

Mit Hilfe einer störungstheoretischen Abschätzung läßt sich aus $\bar{H}(x, u)$ zudem eine Abschätzung für die Breite der Kanäle des Netzes gewinnen. Siehe hierzu [3, 19].

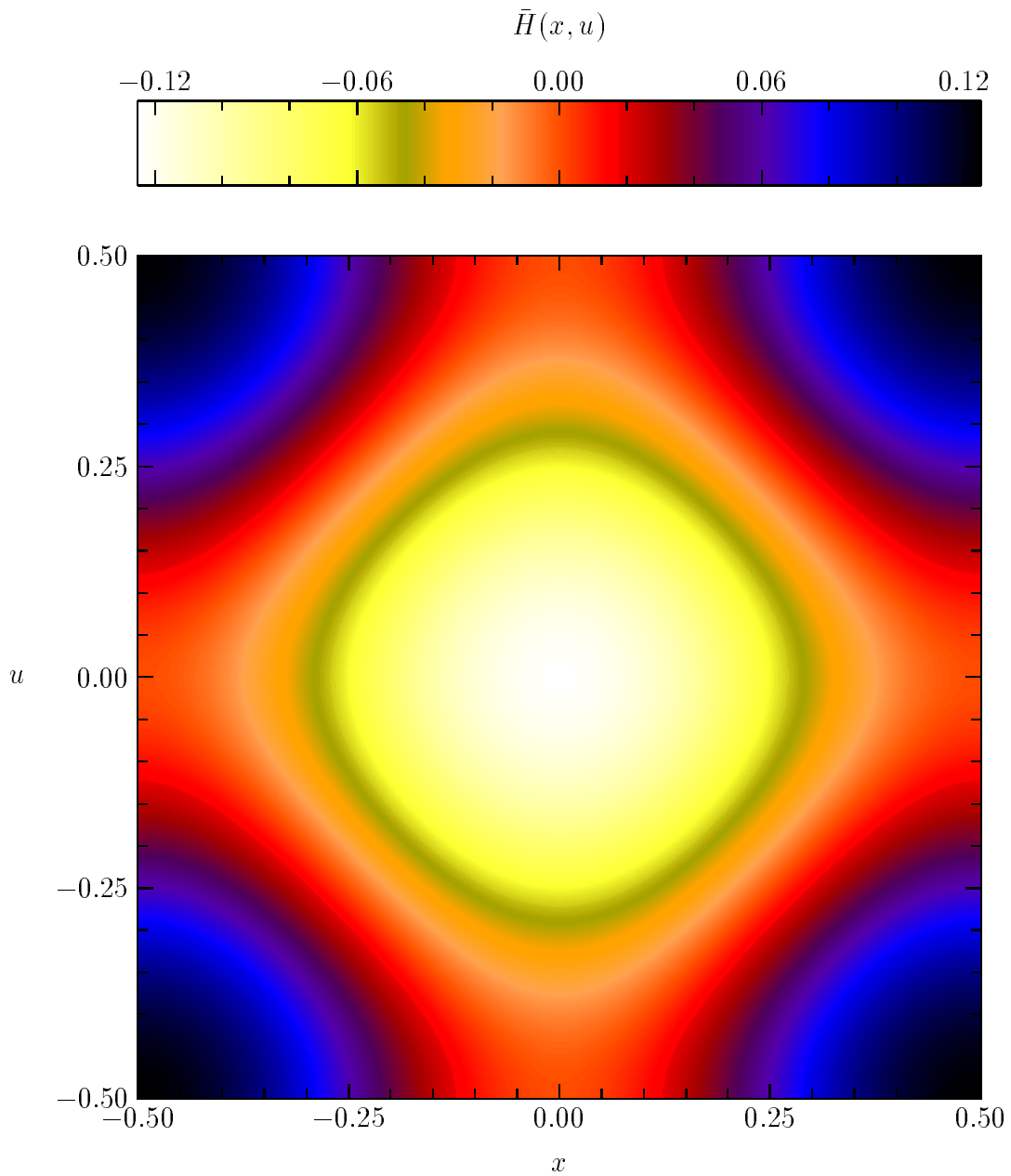


Abbildung 4.38: Approximatives Hamilton-System erster Ordnung für $q = 4$ und $K = 0.191$ (Elementarzelle).

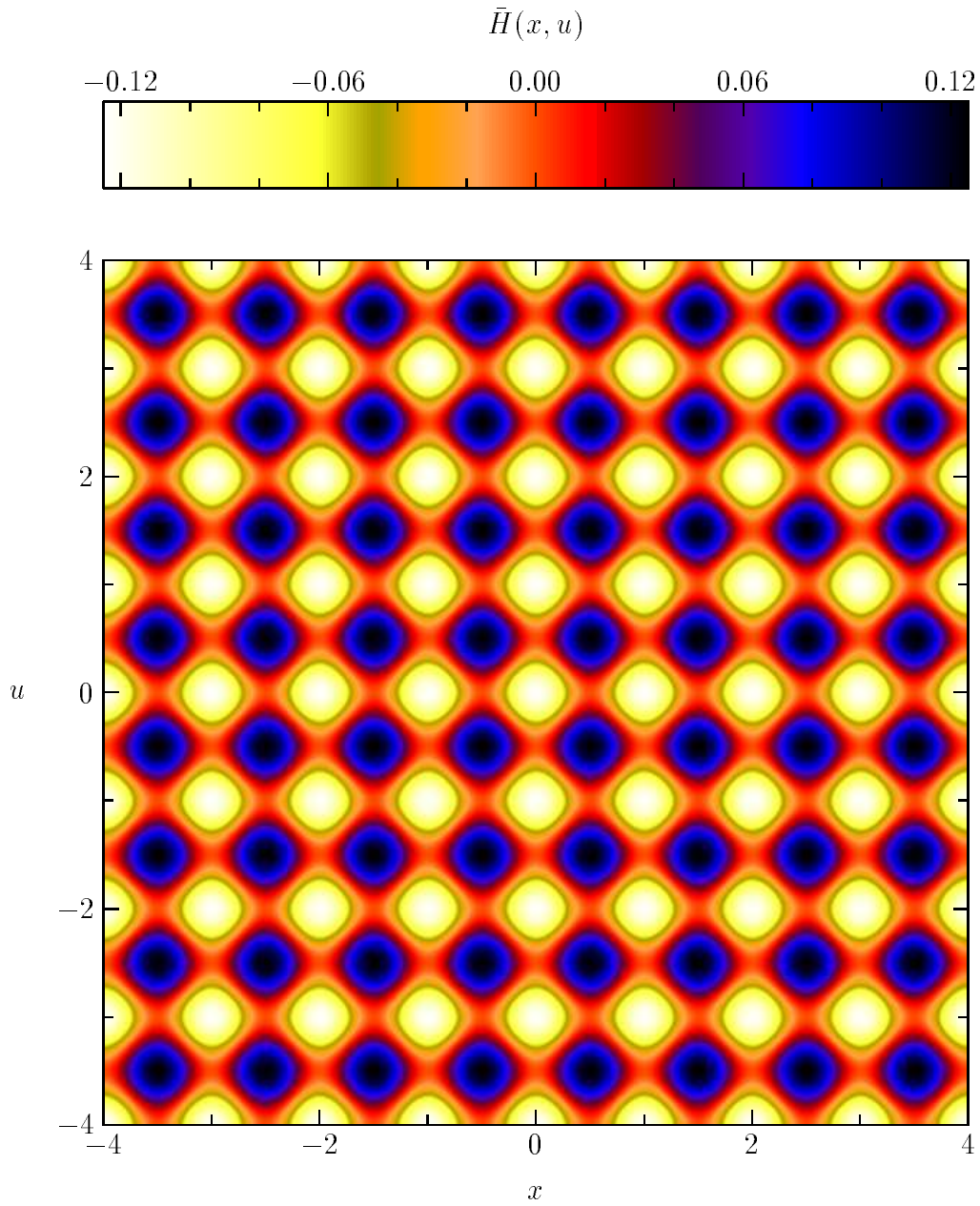


Abbildung 4.39: Approximatives Hamilton-System erster Ordnung für $q = 4$ und $K = 0.191$ (globaler Überblick).

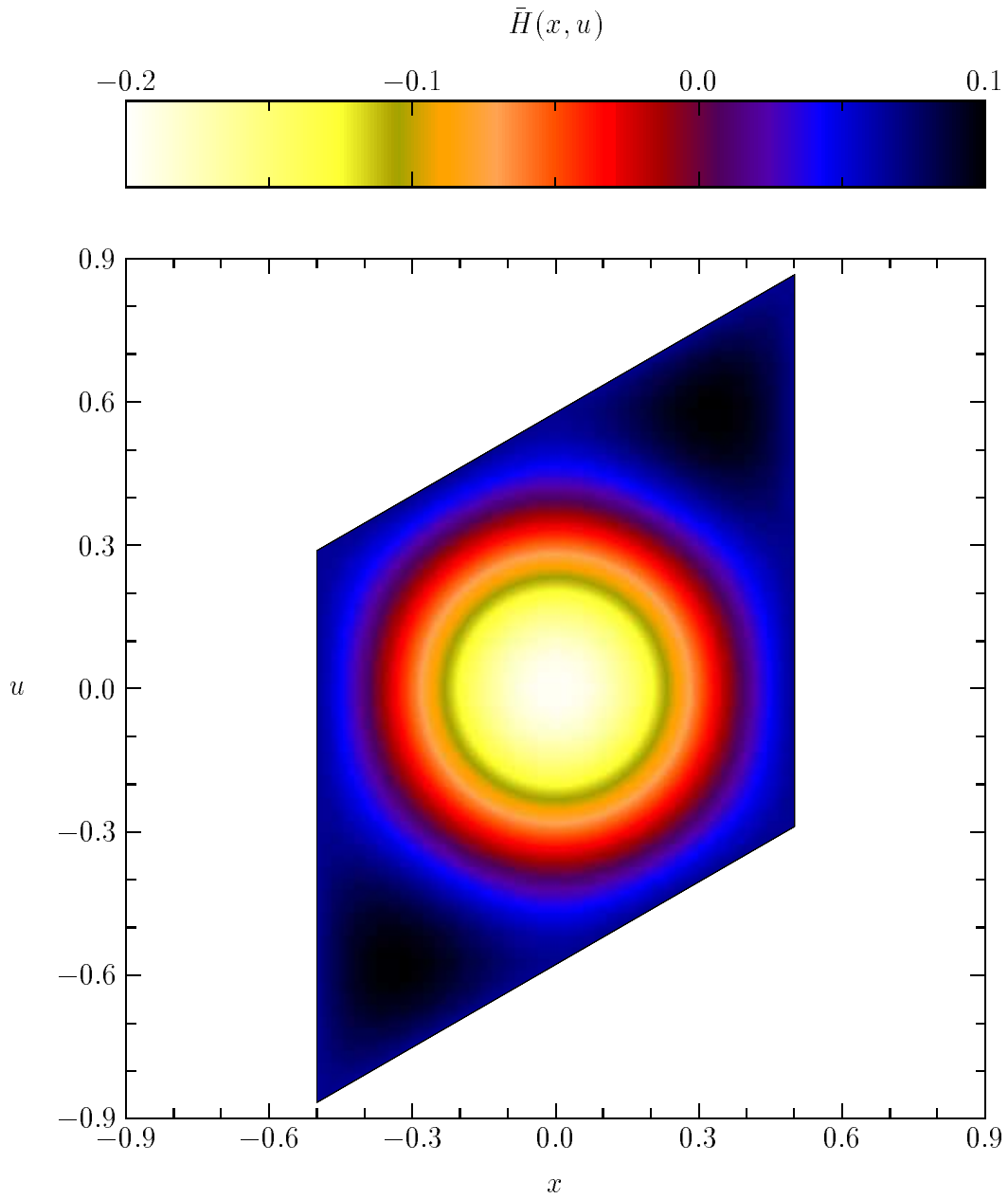


Abbildung 4.40: Approximatives Hamilton-System erster Ordnung für $q = 6$ und $K = 0.191$ (Elementarzelle).

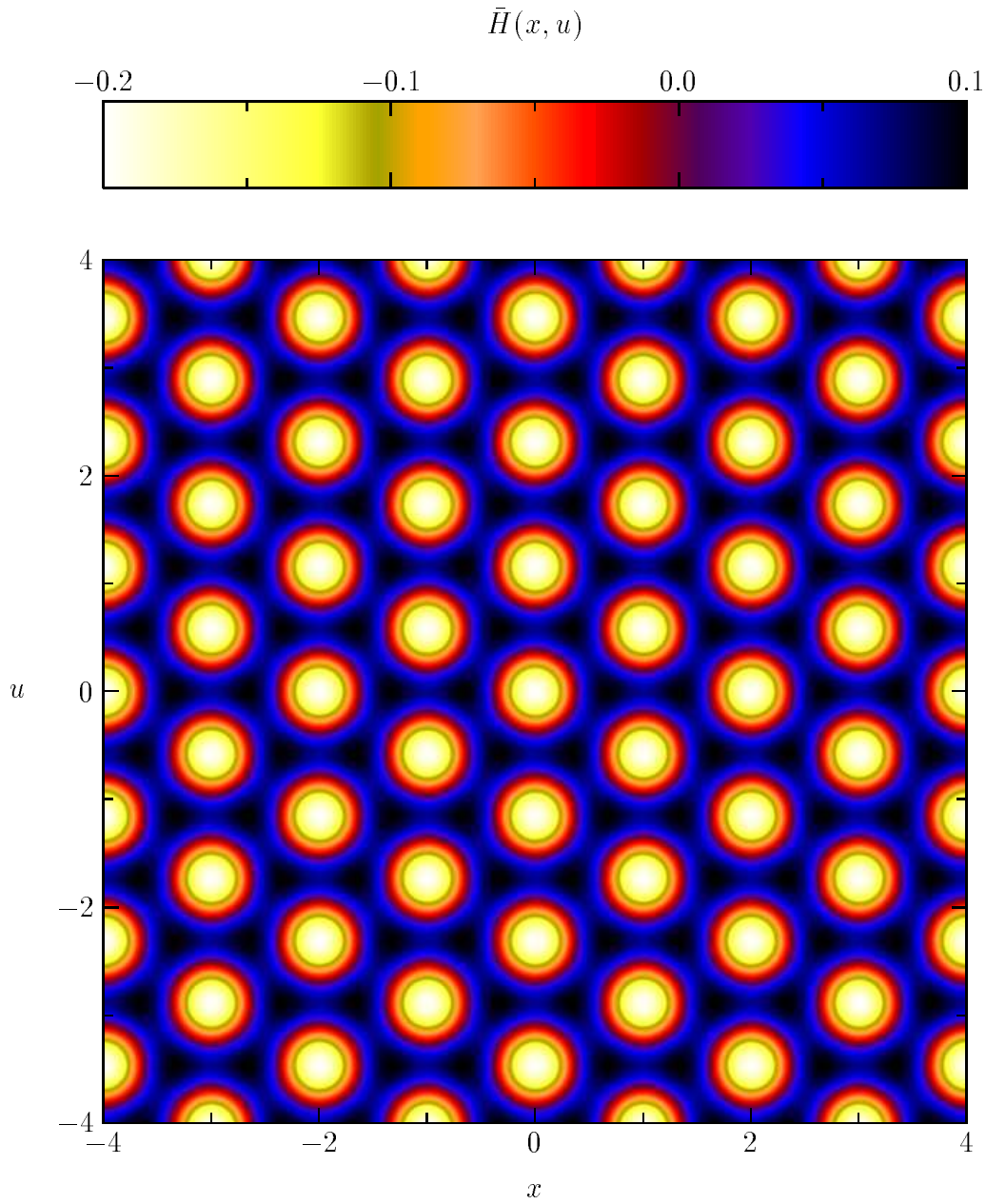


Abbildung 4.41: Approximatives Hamilton-System erster Ordnung für $q = 6$ und $K = 0.191$ (globaler Überblick).

4.2.5 Approximatives Hamilton-System höherer Ordnung

Die Überlegungen in diesem Unterabschnitt werden allein der Vollständigkeit halber angestellt. Es soll ein Verfahren angegeben werden, mit dessen Hilfe es prinzipiell möglich ist, die im vorherigen Unterabschnitt vorgestellte approximative Hamilton-Funktion $\bar{H}(x, u)$ zu verbessern. Für die bisher behandelten Fälle bringt dieses Verfahren jedoch keinen nennenswerten Vorteil.

Die folgenden Überlegungen gehen zurück auf die Arbeit von Lowenstein [18]. Gegeben sei wiederum die Abbildung $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}$, bei der die Kick-Funktion mit einem formalen Entwicklungsparameter ε versehen ist. Ziel ist es, eine Hamilton-Funktion $\bar{H}(x, u)$ zu finden, deren Fluß die q -te Iterierte von $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}$ approximiert, wobei die Korrekturen von $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^{kq}$ berücksichtigt werden sollen. Einer der Gründe, weshalb das im vorherigen Unterabschnitt vorgestellte Hamilton-System für den aperiodischen Fall schlechte Ergebnisse lieferte, lag ja darin begründet, daß allein $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q$ genähert wurde, nicht jedoch beliebige Potenzen $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^{kq}$.

Die gesuchte Hamilton-Funktion sei von der folgenden Gestalt:

$$\bar{H}(x, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n H^{(n)}(x, u). \quad (4.65)$$

Dabei sollen die $H^{(n)}$ eine wohldefinierte Bedeutung erhalten und rekursiv berechnet werden. Über die Konvergenz dieser Reihe soll jedoch keine Aussage getroffen werden. Der Abkürzung halber soll nachfolgend $\vec{x} = (x, u)$ gesetzt werden.

Es wird nun angenommen, daß ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ existiert, welches die Orbits von $\bar{M}_{\alpha, f}^q$ approximiert. Das heißt, zu jedem Orbit $\vec{x}$, $\bar{M}_{\alpha, f}^q(\vec{x})$, $\bar{M}_{\alpha, f}^{2q}(\vec{x})$, ... existiert ein kontinuierlicher von $\vec{v}(\vec{x})$ erzeugter Orbit $\vec{x}(t)$ so daß gilt:

$$\begin{aligned} \vec{x}(0) &= \vec{x} \\ \vec{x}(k) - \vec{x}(0) &= \bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^{kq}(\vec{x}) - \vec{x} = R_k(\vec{x}). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, aus diesen Bedingungen Beziehungen für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ abzuleiten. Zum einen kann man die linke Seite formal in eine Taylorreihe um $t = 0$ entwickeln:

$$k\dot{\vec{x}} + \frac{k^2}{2!}\ddot{\vec{x}} + \dots + \frac{k^n}{n!}\frac{d^n \vec{x}}{dt^n} + \dots = R_k(\vec{x}). \quad (4.67)$$

Dies ergibt für $k = 1, 2, 3, \dots$ eingesetzt ein lineares Gleichungssystem, bei dem man die $d^n \vec{x}/dt^n$ -Terme für $n > 1$ der Reihe nach eliminieren kann und so einen Ausdruck für $\dot{\vec{x}}$ erhält. Einfacher ist es, eine der Markov Formeln anzuwenden. In Gleichung A.8c findet man einen Ausdruck für $\dot{\vec{x}}$ (in der dortigen Notation muß $f = \vec{x}$, $h = 1$, $a_0 = 0$ und $f_p = \vec{x}(p) = R_p(\vec{x}(0)) + \vec{x}(0)$ in (A.6) eingesetzt werden):

$$\dot{\vec{x}}(t=0) = \Delta_0 - \frac{1}{2}\Delta_0^2 + \frac{1}{3}\Delta_0^3 - \frac{1}{4}\Delta_0^4 + \dots \quad (4.68a)$$

mit

$$\Delta_0^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (R_j(\vec{x}) + \vec{x}). \quad (4.68b)$$

Setzt man $r_k(\vec{x}) = \Delta_0^k$ (die Δ_0^k sind ja von $\vec{x}(0) = \vec{x}$ abhängig) und berücksichtigt man, daß

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} = 0 \quad \text{und} \quad R_0(\vec{x}) = \vec{x}(0) - \vec{x}(0) = 0 \quad (4.69)$$

sowie $\vec{v}(\vec{x}(t)) = \dot{\vec{x}}(t)$ gilt, so erhält man:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \dot{\vec{x}}(t=0) = r_1(\vec{x}) - \frac{1}{2}r_2(\vec{x}) + \frac{1}{3}r_3(\vec{x}) - \frac{1}{4}r_4(\vec{x}) + \dots \quad (4.70a)$$

mit

$$\begin{aligned} r_k(\vec{x}) &= \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} R_j(\vec{x}) = \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} (\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^{kq}(\vec{x}) - \vec{x}) \\ r_{k+1}(\vec{x}) &= r_k(\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q(\vec{x})) - r_k(\vec{x}). \end{aligned} \quad (4.70b)$$

Es ist leicht einzusehen, daß diese Reihenentwicklung gerade die in Gleichung (4.65) geforderte Ordnung in ε hat. Berücksichtigt man, daß

$$\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \varepsilon \sum_{k=0}^{q-1} \begin{pmatrix} f(x_k) \sin(q-k)\alpha \\ f(x_k) \cos(q-k)\alpha \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

gilt, so ist offensichtlich:

$$r_1(\vec{x}) = R_1(\vec{x}) = M_{\alpha, \varepsilon f}^q(\vec{x}) - \vec{x} = O(\varepsilon). \quad (4.72)$$

Unter Anwendung der Rekursionsformel in Gleichung (4.70b) zeigt sich schnell, daß dann auch

$$r_k(\vec{x}) = O(\varepsilon^k) \quad (4.73)$$

gelten muß.

Nun hat man mit einigem Aufwand eine Rekursionsformel für ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ hergeleitet, welches die Orbits von $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q$ approximiert. Es ist jedoch nach gar nicht gesagt, ob sich dieses Geschwindigkeitsfeld auch aus einer Hamilton-Funktion $\bar{H}$ herleiten läßt. Hinreichend und notwendig dafür ist, daß $\vec{v}$ divergenzfrei ist. Es zeigt sich, daß sich die Divergenzfreiheit von $\vec{v}$, wie auch nicht anderes zu erwarten, als Folge der Flächenerhaltung von $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}$ ergibt.

Satz 4.5 *Es ist möglich, die Abbildung $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q$ durch den Fluß einer Hamilton-Funktion der Gestalt (4.65) zu approximieren. Mit anderen Worten: Das in (4.70a) definierte Vektorfeld $\vec{v}$ ist divergenzfrei.*

Beweis:

Gegeben sei eine Entwicklung von $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q$ der folgenden Form:

$$\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q(\vec{x}) = \vec{x} + \sum_{k=1} \varepsilon^k g_k(\vec{x})$$

mit geeigneten Funktionen g_k . Berücksichtigt man die Darstellung (4.71), so sollte dies immer möglich sein. $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q$ ist flächenerhaltend, also gilt

$$\det D\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q = \frac{\partial \bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q(x)}{\partial x} \frac{\partial \bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q(u)}{\partial u} - \frac{\partial \bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q(x)}{\partial u} \frac{\partial \bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q(u)}{\partial x} = 1.$$

Setzt man für $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon}^q$ die oben vorausgesetzte Entwicklung ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich:

$$\nabla \cdot g_n + \sum_{k=1}^{n-1} [g_{n-k}^{(x)}, g_k^{(u)}] = 0.$$

Hierbei soll $[\cdot, \cdot]$ die Poisson-Klammer bezüglich x, u bedeuten. Es soll induktiv vorgegangen werden:

IA: Aus Unterabschnitt 4.2.4 ist bekannt, daß es eine Hamilton-Funktion $H^{(1)}$ gibt, deren Fluß $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q$ bis zur Ordnung ε approximiert.

IV: Es soll angenommen werden, daß eine Hamilton-Funktion

$$\bar{H} = \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon^k H^{(k)}$$

existiert, deren Fluß $\Phi_{\bar{H}} : \vec{x}(t) \mapsto \vec{x}(t+1)$ $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q$ bis zur Ordnung ε^{N-1} approximiert.

IA: Da $\Phi_{\bar{H}}$ und $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q$ bis zur Ordnung ε^{N-1} übereinstimmen sollen, muß gelten:

$$\Phi_{\bar{H}}(\vec{x}) = \vec{x} + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon^k g_k(\vec{x}) + \sum_{k=N} \varepsilon^k h_k(\vec{x}).$$

$\Phi_{\bar{H}}$ ist als Fluß einer Hamilton-Funktion natürlich ebenfalls flächenerhaltend, also kann auf diese Gleichung derselbe Trick wie oben angewandt werden:

$$\nabla \cdot \left\{ \begin{array}{ll} g_n & \text{für } n < N \\ h_n & \text{für } n \geq N \end{array} \right\} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left\{ \begin{array}{ll} g_{n-k}^{(x)} & \text{für } n-k < N \\ h_{n-k}^{(x)} & \text{für } n-k \geq N \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ll} g_k^{(u)} & \text{für } k < N \\ h_k^{(u)} & \text{für } k \geq N \end{array} \right\} \right] = 0$$

Für $n = N$ gilt dann:

$$\nabla \cdot h_N + \sum_{k=1}^{n-1} [g_{n-k}^{(x)}, g_k^{(u)}] = \nabla \cdot (h_N - g_N) = 0.$$

Die letzte Zeile besagt gerade nichts anderes, als daß die Divergenz des n -ten Entwicklungskoeffizienten von $\vec{v}$ verschwindet. Es ist also möglich zu $\bar{H}$ einen Summanden $H^{(N)}$ mit

$$\left(\frac{\partial H^{(N)}}{\partial x}, -\frac{\partial H^{(N)}}{\partial u} \right) = h_N - g_N$$

hinzuzufügen.

□

Man kann also eine Hamilton-Funktion von der Gestalt (4.65) finden, deren Fluß die Dynamik von $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^q$ approximiert und dabei Korrekturen von $\bar{M}_{\alpha, \varepsilon f}^{kq}$ berücksichtigt.

Das vorgestellte Rekursionsverfahren (4.70b) ist jedoch sehr aufwendig und liefert für aperiodische Kick-Funktionen keine besonders guten Ergebnisse (die Rekursion (4.70b) muß bis zu beliebig hohen Potenzen durchgeführt werden, um die Strukturen in den äußeren Randbereichen erfassen zu können). Für periodische Kick-Funktion hat man den Vorteil, (4.70b) mittels Fourier-Reihen zu vereinfachen. Speziell für die quasikristallinen Fälle hat sich dieses Verfahren als wichtig erwiesen (siehe [18]).

Kapitel 5

Der Grenzfall $\beta = \frac{\pi}{2}$

In diesem Kapitel soll der Grenzfall $\beta = \pi/2$ untersucht werden, das heißt die (y, v) -Dynamik $M_{\alpha, f}^{(y)}$, wie sie bereits im Abschnitt 1.6 eingeführt wurde. Entsprechend (1.25b) soll also die Abbildung

$$\hat{M}_f = M_{\alpha, f}^{(y)} : \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v + f(y) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

betrachtet werden. Wie es die Schreibweise bereits andeutet, ist der Wert des Parameters α bei diesem Grenzfall ohne Bedeutung.

Für $f(y) = -K \sin(2\pi y)$ (vergleiche (1.33) und (4.34)) geht $\hat{M}_f$ über in die wohlbekannte von Taylor und Chirikov eingeführte *Standardabbildung* [5], die in zahlreichen Veröffentlichungen untersucht wurde (siehe zum Beispiel [6]). In [23] wurde die Abbildung $\hat{M}_f$ unter dem Aspekt der chaotischen Streuung untersucht. Entscheidend für den Streuvorgang war dort jedoch, daß die Kick-Funktion $f(y)$ im Unendlichen verschwindet, also $f(y) \rightarrow 0$ für $|y| \rightarrow \infty$. Für die hier gewählten Kick-Funktionen ist diese Bedingung nicht erfüllt und $\hat{M}_f$ zeigt hier ein gänzlich anderes Verhalten, als es in [23] besprochen wurde.

5.1 Aperiodische Kick-Funktion

Entsprechend dem vorhergehenden Kapitel, soll zunächst $\hat{M}_f$ für die aperiodische Kick-Funktion von der Gestalt (4.3) untersucht werden. Es sei also

$$f(y) = -K \begin{cases} g(y) & \text{für } |y| < b \\ \text{sgn}(y) & \text{für } |y| \geq b \end{cases}, \quad (5.2)$$

wobei $g(y)$ wiederum eine ungerade, stetige Funktion mit $g(b) = 1$ sein soll. In Abschnitt 4.1 hat sich gezeigt, daß diese Kick-Funktion für $\beta = 0$ und lineares $g(y)$ ein Stochastisches Netz und dazwischen eine wohlgeordnete Struktur periodischer Punkte erzeugt. Der Fall $\beta = \pi/2$ verhält sich in dieser Beziehung gänzlich anders.

Zunächst einmal überlegt man sich, daß es auch bei der Abbildung $\hat{M}_f$ möglich ist, die Anzahl der Parameter der Kick-Funktion zu reduzieren. Analog zu den

Ausführungen in Abschnitt 4.1 ist auch $\hat{M}_f$ über eine einfache Umskalierung des Phasenraumes (vergleiche (4.10))

$$y \rightarrow Ky \quad , \quad v \rightarrow Kv, \quad (5.3)$$

topologisch konjugiert zu einer Abbildung $\hat{M}_{\hat{f}}$, bei der die Kick-Funktion $\hat{f}(y)$ den Parameterwert $K = 1$ hat. Speziell bei $\hat{M}_f$ wäre es unter Umständen sinnvoll, b konstant zu wählen und K variabel zu lassen; die freie Teichenbewegung würde sich dann für $K = 0$ als Grenzfall ergeben, umgekehrt erhält man diesen Grenzfall nur für $b \rightarrow \infty$. Jedoch im Hinblick auf die umfangreichen Überlegungen in Abschnitt 4.1, wo $2b$ gerade die Breite der Kanäle des Netzes war, sollen viele der nun folgenden Überlegungen für allgemeines b und K durchgeführt und für sämtliche Rechnungen $K = 1$ gesetzt werden.

Um einen Überblick über die periodischen Punkte zu erhalten, kann man zunächst versuchen, ähnlich wie im Fall $\beta = 0$, die Schnittpunkte von Symmetrielinien zu suchen. Entsprechend (3.26) sind die ersten beiden Umkehrenden Symmetrien für den Fall $\beta = \pi/2$ gegeben durch

$$\hat{S}_0 = -\hat{T}_0 : \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -v - f(y) \end{pmatrix} \quad (5.4a)$$

und

$$\hat{S}_1 = -\hat{T}_1 : \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}. \quad (5.4b)$$

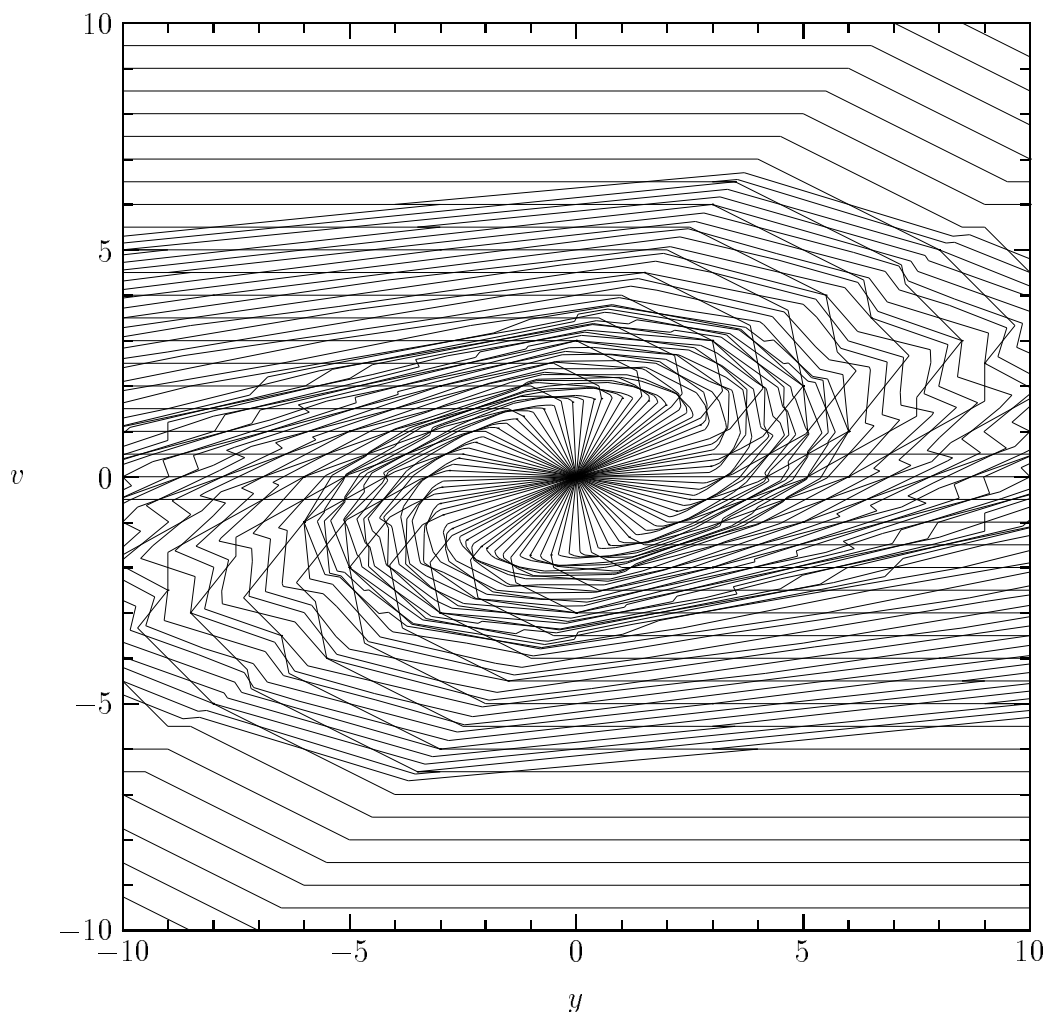
Damit sind die beiden ersten Symmetrielinien $\text{Fix } \hat{S}_0$ und $\text{Fix } \hat{S}_1$ von der folgenden Gestalt:

$$\text{Fix } \hat{S}_0 = \{(y, v) \in \mathbb{R}^2; v = -f(y)/2\} \quad (5.5a)$$

$$\text{Fix } \hat{S}_1 = \{(y, v) \in \mathbb{R}^2; v = 0\}. \quad (5.5b)$$

$\text{Fix } \hat{S}_0$ ist also der Graph der Funktion $-f(y)/2$ und $\text{Fix } \hat{S}_1$ die y -Achse. Alle weiteren Symmetrielinien ergeben sich nach Kapitel 3 als Iterierte dieser beiden Mengen.

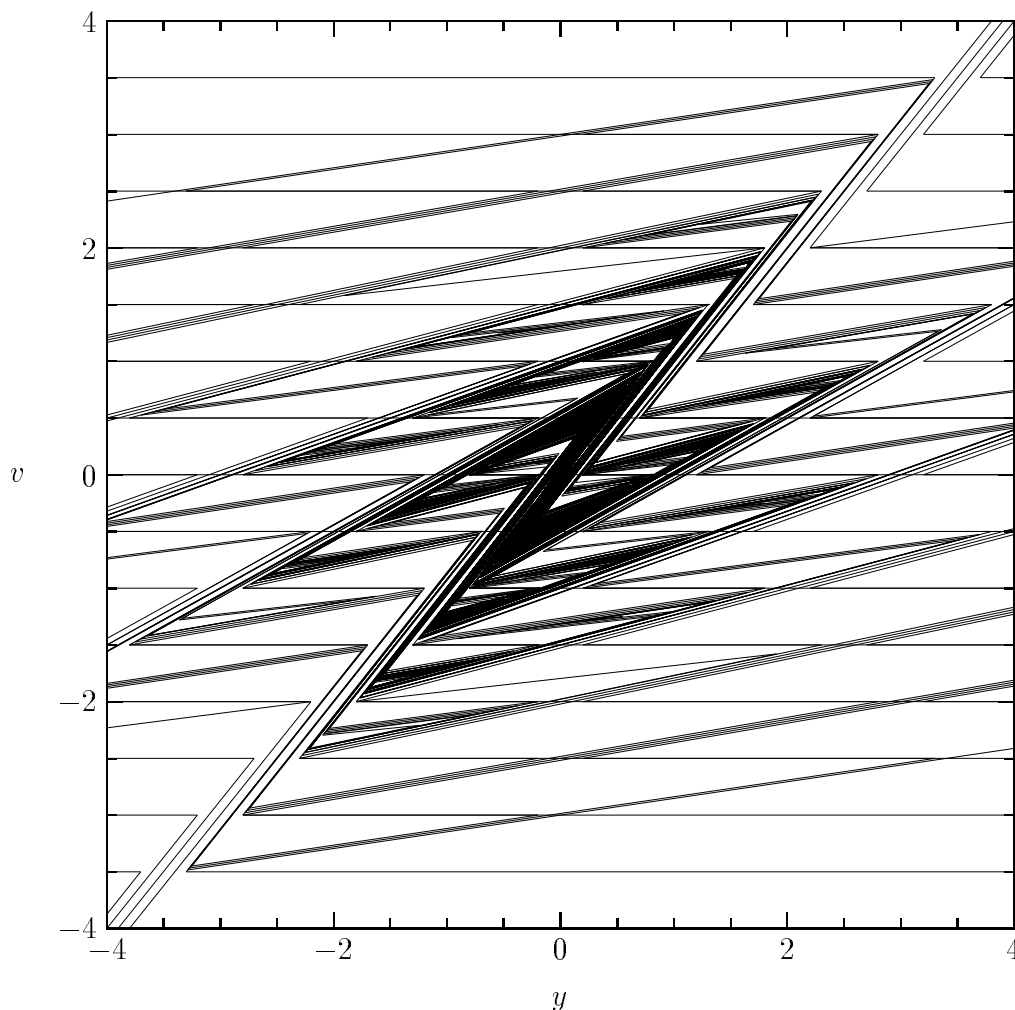
Zur Berechnung der Symmetrielinien ist es notwendig, die Funktion $g(y)$ festzulegen. Wie in Abschnitt 4.1 soll $g(y)$ linear gewählt werden (siehe (4.14)). Abbildung 5.1 zeigt die ersten 40 Symmetrielinien des Systems für einen verhältnismäßig großen Wert von b . Deutlich ist ein großer elliptischer Bereich um den Ursprung herum, der nur einen einzigen symmetrischen periodischen Punkt enthält, zu erkennen. Um diesen Bereich herum bildet sich ein kompliziertes Muster symmetrischer periodischer Punkte, das bei weiterer Iteration den Phasenraum fast vollständig ausfüllt. In Abbildung 5.2 sind die ersten 20 Symmetrielinien für einen kleinen b -Wert dargestellt. Man erkennt, daß es für diesen b -Wert keinen elliptischen Bereich um den Ursprung gibt und sich außerhalb eine verhältnismäßig regelmäßiges Muster symmetrischer periodischer Punkte bildet. Eine Analyse zeigt, daß die meisten dieser periodischen Punkte parabolisch sind. Ferner scheint die


 Abbildung 5.1: Symmetrielinien für $b = 3$.

Ebene weit geringer ausgefüllt zu sein als in Abbildung 5.1. Dieser Eindruck täuscht jedoch; iteriert man die Symmetrielinien weiter, so wird die Ebene schon nach wenigen weiteren Iteration dicht ausgefüllt. Da sich nach 20 Iterationen bereits über 100000 Linienstücke ergeben, wurde darauf verzichtet, diese Bilder darzustellen.

Es ist also prinzipiell möglich, die Dynamik mit Hilfe von Symmetrielinien zu untersuchen, jedoch verliert man bei den vielen Schnittpunkten leicht den Überblick. Aus diesem Grunde soll im folgenden ein anderer Zugang zu den periodischen Punkten der Dynamik vorgestellt werden. Die nachfolgenden Überlegungen gelten wieder für beliebiges $g(y)$.

Entsprechend der Wahl der Kick-Funktion $f(y)$ erscheint es sinnvoll, den Phasenraum in drei Bereiche aufzuteilen: in einen Bereich mit $y \leq -b$ (Bereich A), einen mit $|y| < b$ (Bereich B) und einen mit $y \geq b$ (Bereich C), siehe Abbildung 5.3. Man kann nun jedem Orbit eine Folge von Symbolen A, B und C zuordnen, entsprechend der Reihenfolge, in der er diese Gebiete passiert. Es ist jedoch


 Abbildung 5.2: Symmetrielinien für $b = 0.2$.

ersichtlich, daß man umgekehrt nicht jeder solchen Symbolfolge auch eindeutig einen Orbit zuordnen kann. Es gibt beispielsweise keinen Orbit, der die Symbolfolge $AAA \dots$ hat. Ferner kann es unterschiedliche Orbits mit derselben Symbolfolge geben. In dem in Abbildung 5.1 erkennbaren elliptischen Bereich gibt es beispielsweise unendlich viel Orbits mit der Symbolfolge $BBB \dots$. Trotz dieser Einschränkungen lassen sich mit Hilfe dieser Symbolfolgen notwendige Bedingungen für periodische Punkte herleiten. Dies soll nun besprochen werden.

Wird die n -te Iterierte von $\hat{M}_f$ wie in (1.27) geschrieben, so kann $\hat{M}_f^n$ auf den Bereichen A und C direkt angegeben werden, da die Kick-Funktion $f(y)$ dort konstant ist. Dies ergibt auf den ersten Blick noch keinen großen Vorteil, da man zur Bestimmung einer Symbolfolge immer noch einen Orbit ausrechnen muß, sie wird sich jedoch im folgenden bei der Suche nach periodischen Orbits als nützlich erweisen.

Ein periodischer Orbit ist trivialerweise auch durch eine periodische Symbolfolge gekennzeichnet. Um einen bestimmten periodischen Orbit zu finden, kann

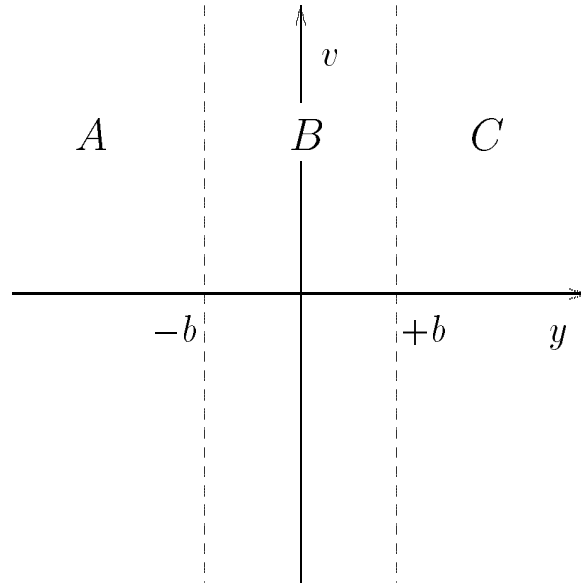


Abbildung 5.3: Einteilung des Phasenraumes (siehe Text).

man versuchen, eine passende Symbolfolge vorzugeben, entsprechend Gleichungen (1.27) notwendige Bedingungen für die Startwerte zu finden und anschließend zu ermitteln, welche davon auch wirklich die vorgegebene Symbolfolge realisieren. Dies soll nun an einem Beispiel ausführlich vorgeführt werden.

Gesucht seien die Anfangsdaten eines periodischen Orbits der Periode $2n$, der punktsymmetrisch zum Ursprung $(0,0)$ sein und die Symbolfolge $BC^{n-1}BA^{n-1}$ haben soll. Genauer gesagt, würde bereit die Bedingung, daß die ersten n Symbole dieses Orbits BC^{n-1} sind, genügen; die restlichen Symbole ergeben sich dann aus der geforderten Punktsymmetrie. Da die Funktion $g(y)$ bis jetzt noch nicht festgelegt wurde, soll der Startpunkt auf $(0, v)$ festgelegt werden; es gilt ja $g(0) = 0$. Es soll also $y_0 = 0$ und damit $f(y_0) = f(0) = 0$ gelten. Aufgrund der vorgegebenen Symbolfolge muß $f(y_k) = -K$ für $1 \leq k \leq n$ gelten. Da der Orbit punktsymmetrisch sein soll, ergibt sich entsprechen (1.27) das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ -v \end{pmatrix} &= \hat{M}_f^n(0, v) = \begin{pmatrix} nv \\ v \end{pmatrix} - K \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-k \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} nv - K \frac{n(n-1)}{2} \\ v - K(n-1) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

woraus sofort folgt, daß $v = K(n-1)/2$ gelten muß. Nun muß geprüft werden, ob ein an dieser Stelle startender Orbit auch wirklich die geforderte Symbolfolge hat. Zunächst einmal ist klar, daß der Orbit nach der ersten Iteration den Bereich B verlassen muß; also:

$$\hat{M}_f(0, v) = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} \in C \quad \Rightarrow \quad v = K \frac{n-1}{2} \geq b. \quad (5.7)$$

Somit scheiden bereits einige entsprechend (5.6) mögliche Startwerte aus. Als nächstes muß gefordert werden, daß der Orbit für $n - 1$ Iterationen im Bereich C verbleibt, also $y_l \geq b$ für $1 \leq l \leq n - 1$ gilt:

$$\begin{aligned} b \leq y_l &= \hat{M}^l(0, v) \cdot \vec{e}_y = lv - K \sum_{k=0}^{l-1} (l - k) \\ &= lK \frac{n-1}{2} - K \frac{l(l-1)}{2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Man macht sich klar, daß diese Ungleichung automatisch erfüllt ist, sofern $v = K(n-1)/2 \geq b$ gilt. Aufgrund der Punktsymmetrie der Abbildung $\hat{M}_f$, die aus der Bedingung folgt, daß $f(y)$ ungerade ist, hat der so gefundene Orbit mit der zusätzlichen Nebenbedingung (5.7) tatsächlich die geforderte Symbolfolge.

Als nächstes kann die Stabilität des Orbits berechnet werden. Nach der Kettenregel gilt

$$D\hat{M}_f^{2n}(y_0, v_0) = D\hat{M}_f(y_{2n-1}, v_{2n-1}) \cdot \dots \cdot D\hat{M}_f(y_0, v_0). \quad (5.9)$$

Es sei angemerkt, daß die Jacobi-Matrizen $D\hat{M}_f$ allein von der Kick-Funktion $f(y)$ und damit nur von den y_k abhängen. Da $f(y)$ in den Bereichen A und C konstant ist, sind dort die Jacobi-Matrizen $D\hat{M}_f(y_k)$ bereits durch die Symbolfolge vorgegeben. Für den gerade gefundenen Orbit gilt:

$$D\hat{M}_f^{2n} = D_A^{n-1} \cdot D_B \cdot D_C^{n-1} \cdot D_B \quad (5.10)$$

mit

$$\begin{aligned} D_A = D_C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D_A^{n-1} = D_C^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D_B &= \begin{pmatrix} 1 - Kg'(0) & 1 \\ -Kg'(0) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Daraus folgt nach kurzer Rechnung für das Residuum

$$R = \frac{1}{4}(2 - \text{Tr}(D\hat{M}_f^{2n})) = Kg'(0)n - \frac{1}{4}K^2g'(0)^2n^2. \quad (5.12)$$

Sofern $g'(0) \neq 0$ vorausgesetzt wird, kann also immer ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gefunden werden, so daß $R < 0$ für $n > n_0$ gilt. Das heißt, der periodische Orbit ist hyperbolisch, sofern seine Periode groß genug ist. Das ist aufgrund (5.6) der Fall, wenn er weit genug vom Ursprung entfernt ist.

Man kann nun versuchen, nach diesem Verfahren periodische Orbits mit anderer Symbolfolge zu suchen. Da die Funktion $g(y)$ jedoch bisher noch nicht festgelegt wurde, können neben den Orbits mit der Symbolfolge $BC^{n-1}BA^{n-1}$ nur noch Orbits mit der Symbolfolge C^nA^n direkt angegeben werden. Tabelle 5.1 zeigt eine Zusammenfassung sämtlicher periodischer Orbits, die sich zu allgemeinem $g(y)$ finden lassen. Dabei haben die Orbits mit der Symbolfolge C^nA^n , das heißt die

Symbolfolge	Startpunkt	Nebenbedingung	Residuum
$BC^{n-1}BA^{n-1}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ K\frac{n-1}{2} \end{pmatrix}$	$v = K\frac{n-1}{2} \geq b$	$Kg'(0)n - \frac{1}{4}K^2g'(0)^2n^2$
C^nA^n	$\begin{pmatrix} y \\ K\frac{n-2}{2} \end{pmatrix}$	$y \approx K\frac{n}{4}$ $v > 2b$	1

Tabelle 5.1: Daten periodischer Orbits für allgemeines $g(y)$ zu vorgegebenen Symbolfolgen.

Orbits, die gar nicht in das Phasenraumgebiet B eintauchen, eine Sonderstellung. Jeder dieser Punkte ist parabolisch (das Residuum ist 1) — gänzlich unabhängig von der Funktion $g(y)$. Ist $(\bar{y}, \bar{v})$ ein solcher periodischer Punkt der Periode $2n$, so verhält sich $\hat{M}_f$ in einer kleinen Umgebung um diesen Punkt herum wie

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - \bar{y} \\ v - \bar{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{v} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Hat man also einen periodischen Punkt mit der Symbolfolge C^nA^n gefunden, so gibt es in einer kleinen Umgebung um diesen Punkt herum eine ganze Linie von Punkten parallel zur y -Achse, die ebenfalls periodisch mit der Periode $2n$ sind und dieselbe Symbolfolge haben. Der Mittelpunkt einer dieser Linien liegt gerade bei $y = Kn/4$, dies ist mit der Nebenbedingung $y \approx Kn/4$ gemeint.

Um nun weitere Aussagen treffen zu können, ist es unumgänglich, die Funktion $g(y)$ vorzugeben; für die vorhergehenden Aussagen mußte allein der Wert von $g(y)$ und die Ableitung an der Stelle 0 bekannt sein. Im folgenden soll daher wie in Unterabschnitt 4.1.3 $g(y)$ linear gewählt werden. Das heißt, von nun an soll die in (1.29) vorgestellte Kick-Funktion $f_{A1}(y)$ betrachtet werden.

Diese Wahl der Funktion $g(y)$ hat den Vorteil, daß die Abbildung $\hat{M}_f$ stückweise linear wird und damit die Stabilität eines Orbits einzig und allein von dessen Symbolfolge abhängt; die Matrix D_B wird unabhängig von y :

$$D_B = \begin{pmatrix} 1 - \frac{K}{b} & 1 \\ -\frac{K}{b} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Versucht man nun, entsprechend der oben besprochenen Vorgehensweise notwendige Bedingungen für die Anfangsdaten eines periodischen Orbits aufzustellen, so hat man ferner den Vorteil, immer ein lineares Gleichungssystem zu erhalten, daß sich mit Hilfe eines algebraischen Computerprogrammes recht einfach aufstellen und lösen läßt. Bei einer komplizierteren Gestalt von $g(y)$ — etwa sinusförmig oder kubisch — würde sich in jedem Fall ein nichtlineares Gleichungssystem ergeben, das sich nur in den wenigsten Fällen explizit lösen ließe.

Tabelle 5.2 zeigt eine Auflistung aller periodischen Orbits, die sich mit Hilfe der obigen Methode für lineares $g(y)$ auf einfache Weise aufspüren lassen. Dabei wurden einerseits punktsymmetrische Orbits mit Periode $2n$ und andererseits nicht-punktsymmetrische Orbits mit Periode $n + m$ gesucht. Die Nebenbedingungen und Residuen zu den Symbolfolgen $B^2C^{n-2}B^2A^{n-2}$ und $B^2C^{n-2}B^2A^{m-2}$ sind aufgrund der Länge der Ausdrücke nicht in der Tabelle mit aufgeführt. Für $B^2C^{n-2}B^2A^{n-2}$ ergibt sich beispielsweise als Residuum

$$R = \left(\frac{K^3}{b^3} - \frac{K^2}{b^2} - \frac{K^4}{4b^4} \right) n^2 + \left(\frac{2K}{b} - \frac{K^2}{b^2} - \frac{K^3}{b^3} + \frac{K^4}{2b^4} \right) n + \frac{K^2}{b^2} - \frac{K^4}{4b^4} \quad (5.15)$$

und als Nebenbedingung, daß sich der Startpunkt des Orbits innerhalb eines kleinen Phasenraumgebietes in der Nähe der v -Achse, das durch einen Polygon begrenzt ist, befindet. Prinzipiell sind auch Symbolfolgen von der Gestalt $B^3C^{n-3}B^3A^{m-3}$, $B^4C^{n-4}B^4A^{m-4}$, ... auf die besprochene Weise zu finden, jedoch wird es immer aufwendiger, das lineare Gleichungssystem aufzustellen. Im folgenden soll daher untersucht werden, wann Orbits mit diesen Symbolfolgen überhaupt möglich sind.

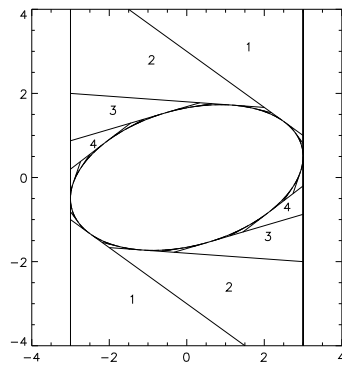
Eine Symbolfolge von der Gestalt $B^kC^{n-k}B^kA^{m-k}$ setzt voraus, daß der Orbit erst bei der k -ten Iteration den Phasenraumbereich B verläßt. Dies ist jedoch nur für einen geringen Teil der in B startenden Orbits überhaupt möglich, die meisten verlassen B bereits bei der ersten Iteration oder verbleiben dort für immer.

Abbildung 5.4 zeigt die Regionen im Phasenraumbereich B , innerhalb deren ein periodischer Orbit mit der Symbolfolge $B^kC^{n-k}B^kA^{m-k}$ starten muß; die verschiedenen Werte von k sind, soweit es der Platz erlaubt, in die jeweiligen Regionen eingetragen. Man erkennt, daß für alle b -Werte die Orbits mit großen positiven und negativen v -Werten alle den Bereich B nach einer Iteration verlassen. Um den Nullpunkt herum bildet sich ein annähernd elliptischer Bereich, in dem alle startenden Orbits für immer im Bereich B verbleiben, also die Symbolfolge $BBB \dots$ haben. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da der zentrale Fixpunkt $(0,0)$ das Residuum

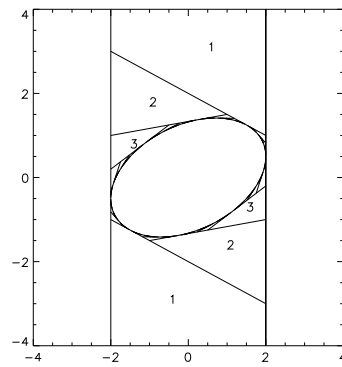
$$R = \frac{K}{4b} \stackrel{K \equiv 1}{=} \frac{1}{4b} \quad (5.16)$$

hat und damit für alle $b > 1/4$ elliptisch ist. Für $b < 1/4$ wird der zentrale Fixpunkt invers hyperbolisch, und $(0,0)$ ist der einzige Punkt mit der Symbolfolge $BBB \dots$.

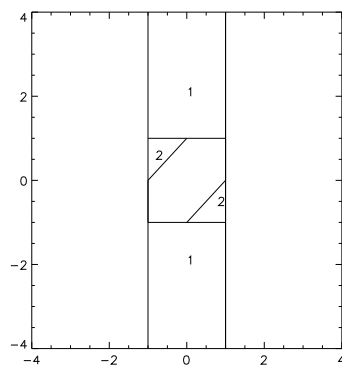
Beschränkt man sich zunächst auf die Fälle $b > 1/4$, so ist klar, daß die meisten im Phasenraumgebiet B startenden Orbits entweder dieses Gebiet nach der ersten Iteration verlassen oder für immer dort verbleiben, für den Spezialfall $b = 0.5$ sind dies sogar die beiden einzigen Möglichkeiten. Einige wenige Orbits verbleiben bis zu 4. oder höheren Iteration in B , jedoch wird das Anfangsgebiet immer kleiner und spielt nur nahe am Rand des elliptischen Bereiches noch eine Rolle. Daher macht es durchaus Sinn, die explizite Berechnung der periodischen Orbits wie in Tabelle 5.2 auf Orbits mit Symbolfolgen $B^kC^{n-k}B^kA^{m-k}$ für $k \leq 2$ zu beschränken. Die wesentliche Struktur des Phasenportraits läßt sich damit durchaus befriedigend erklären.



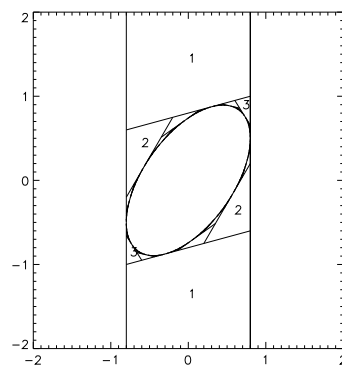
(a) $b = 3$



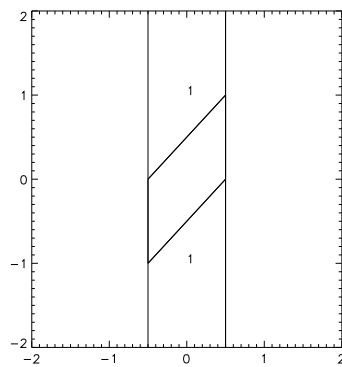
(b) $b = 2$



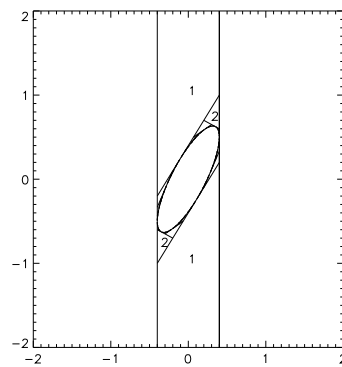
(c) $b = 1$



(d) $b = 0.8$



(e) $b = 0.5$



(f) $b = 0.4$

Abbildung 5.4: Startregionen zu verschiedenen Parameterwerten b .

Symbolfolge	Startpunkt	Nebenbedingung	Residuum
$C^n A^n$	$\begin{pmatrix} y \\ K \frac{n-2}{2} \end{pmatrix}$	$y \approx K \frac{n}{4}$ $v > 2b$	1
$BC^{n-1} BA^{n-1}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ K \frac{n-1}{2} \end{pmatrix}$	$v = K \frac{n-1}{2} \geq b$	$\frac{Kn}{b} - \frac{n^2 K^2}{4b^2}$
$B^2 C^{n-2} B^2 A^{n-2}$	$\begin{pmatrix} -\frac{K(n-2)b}{4b-2K} \\ K \frac{n-2}{2} \end{pmatrix}$	(...)	(...)
$BC^{n-1} BA^{m-1}$	$\begin{pmatrix} \frac{(m-n)b}{2} \\ K \frac{m-1}{2} \end{pmatrix}$	$ y < b$ bzw. $ m-n \leq 1$ $v = \frac{m-1}{2} \geq b$	$\frac{K(2bm+2nb-Knm)}{4b^2}$
$B^2 C^{n-2} B^2 A^{m-2}$	$\begin{pmatrix} \frac{(bm-Km-nb+2K)b}{4b-2K} \\ K \frac{m-2}{2} \end{pmatrix}$	(...)	(...)

Tabelle 5.2: Daten periodischer Orbits für lineares $g(y)$ zu vorgegebenen Symbolfolgen.

Der Fall $b = 3$ soll näher untersucht werden, alle übrigen Fälle $b > 1/4$ lassen sich mit leichten Variationen ähnlich behandeln. Für $b = 3$ ist der zentrale Fixpunkt elliptisch und entsprechend Abbildung 5.4 erhält man um diesen Fixpunkt herum einen Bereich, in dem alle startenden Orbits die Symbolfolge $BBB \dots$ haben. Das heißt, die Dynamik dort ist durch die lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \mapsto D_B \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{K}{b} & 1 \\ -\frac{K}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

gegeben, die für $b = 3$ eine einfache elliptische Bewegung um $(0,0)$ beschreibt.

Als nächstes sollen die periodischen Orbits mit Symbolfolge $BC^{n-1} BA^{m-1}$ betrachtet werden, das heißt alle Orbits, die innerhalb des in Abbildung 5.4(a) mit 1 markierten Gebietes starten. Laut Tabelle 5.2 können nur Orbits mit $|m-n| \leq 1$ die Nebenbedingung erfüllen. Das Residuum dieser periodischen Punkte ist dann

$$R = \frac{2bm + 2bn - nm}{4b^2} \stackrel{b=3}{=} \frac{6(n+m) - nm}{36}. \quad (5.18)$$

Es ist klar, daß für $n, m \geq 7$ all diese periodischen Punkte hyperbolisch werden ($R < 0$), für $1 \leq n, m \leq 5$ sind jedoch auch elliptische Fälle möglich ($0 < R < 1$). Sieht man den parabolischen Fällen $n = m = 6$, $n = 6, m = 7$ oder $n = 5, m = 6$ ($R = 1$) ab, so sind dies die einzigen Möglichkeiten.

Für die periodischen Orbits mit der Symbolfolge $B^2 C^{n-2} B^2 A^{m-2}$ gilt eine entsprechend kompliziertere Formel für das Residuum. Eine numerische Rechnung

ergibt, daß alle im Fall $b = 3$ auftretenden Orbits mit dieser Symbolfolge hyperbolisch sind. Interessant ist dabei, daß in dem Phasenraumgebiet, wo diese Orbits vorkommen, die Orbits mit der Symbolfolge $BC^{n-1}BA^{m-1}$ elliptisch werden.

Abbildung 5.5 zeigt Teile der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten aller oben genannten periodischen Punkte, sofern sie hyperbolisch sind; die Kreise markieren die elliptischen Orbits. Der Übersichtlichkeit halber wurde darauf verzichtet, die parabolischen Orbits mit einzuzeichnen. Man erkennt, daß sich die invarianten Mannigfaltigkeiten in zahlreichen heteroklinen Punkten überschneiden. Weit außerhalb bilden die invarianten Mannigfaltigkeiten ein dichtes Netzwerk, das — verfolgt man die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten weit genug — praktisch keine Lücken aufzuweisen scheint; in diesem Bereich verhält sich die Dynamik überwiegend chaotisch. Um den Nullpunkt herum bildet sich, wie schon erwähnt, ein elliptischer Bereich, in dem die Dynamik regulär ist. Um diesen Bereich herum existieren Ketten, in denen sich elliptische Punkte mit der Symbolfolge $BC^{n-1}BA^{m-1}$ und hyperbolischen Punkten mit der Symbolfolge $B^2C^{n-2}B^2A^{m-2}$ gegenseitig abwechseln. Diese Struktur erinnert an ein *Birkhoff-Szenario*.

Dies darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß hier kein echtes Birkhoff-Szenario vorliegt. Für ein Birkhoff-Szenario ist es notwendig, daß die *Windungszahl* (siehe nachfolgender Abschnitt) der invarianten Kurven um den zentralen elliptischen Fixpunkt mit wachsendem Radius abnimmt bzw. zunimmt, diese Bedingung wird auch als *Twist-Bedingung* bezeichnet. Da $\hat{M}_f$ hier stückweise linear gewählt wurde, ist die Windungszahl der invarianten Kreise jedoch konstant und somit unabhängig vom Radius. Somit ist die Twist-Bedingung für dieses System nicht erfüllt.

Es darf ferner nicht vergessen werden, daß hier nur ein kleiner Teil der periodischen Orbits erfaßt wurde. So erzeugen die Orbits mit Symbolfolgen $B^kC^{n-k}B^kA^{m-k}$ für $k \geq 3$ gerade in der Nähe des Ursprungs noch zusätzliche Strukturen, die in Abbildung 5.5 nicht erfaßt werden. Zudem ist der äußere chaotische Bereich von parabolischen Orbits durchsetzt, das heißt es existieren marginal stabile Punkte.

Abbildung 5.6 zeigt das Phasenportrait für $b = 3$ anhand willkürlich ausgewählter Orbits. Bei genauerem Hinsehen wird die Ähnlichkeit zu Abbildung 5.5 offenkundig, man erkennt jedoch, daß in Abbildung 5.5 längst noch nicht die gesamte Struktur erfaßt ist. In der Nähe des Ursprungs treten noch zusätzliche Strukturen auf, die maßgeblich von den Orbits mit Symbolfolgen $B^kC^{n-k}B^kA^{m-k}$ für $k \geq 3$ geprägt werden.

Abbildung 5.7 zeigt eine Ausschnittvergrößerung des Phasenportraits für $b = 3$ um einen der elliptischen periodischen Punkte. Man erkennt, daß die invarianten Kurven um den Punkt ebenfalls eine vom Radius unabhängige Windungszahl — in Bezug auf diesen Punkt — haben. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da eine beliebige iterierte $\hat{M}_f^n$ ebenfalls stückweise linear ist und sich somit in einer kleinen Umgebung ebenfalls linear verhält. Also ist auch für diese periodischen Punkte die Twist-Bedingung nicht erfüllt. Folglich sind die elliptischen periodischen Punkte nicht, wie bei einem Birkhoff-Szenario üblich, von Stabilitätsinseln

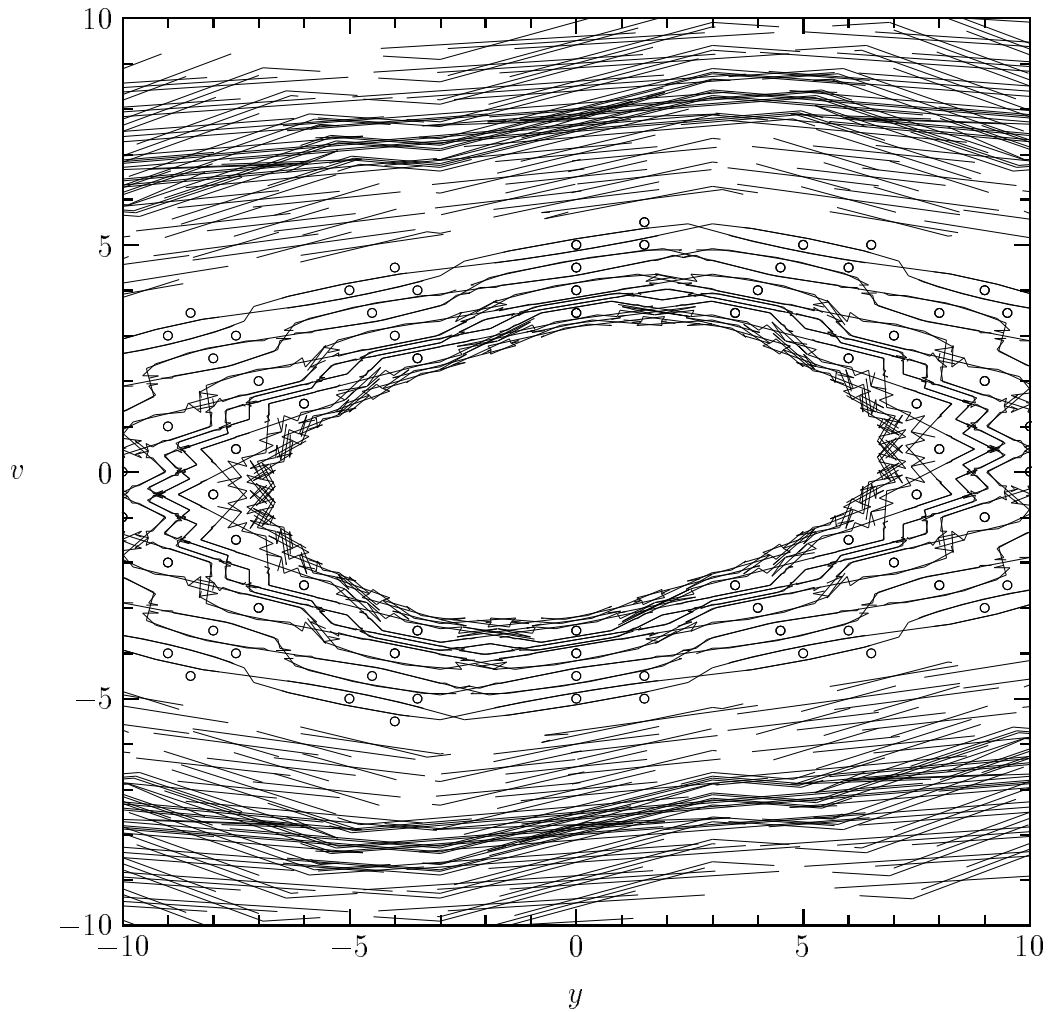


Abbildung 5.5: Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten für verschiedene periodische Orbits zu $b = 3$.

höherer Ordnung umgeben, die diesen Punkt umlaufen.

In den Abbildungen 5.8 und 5.9 ist das Phasenportrait für $b = 2$ und $b = 1$ zu sehen. Der Fall $b = 2$ unterscheidet sich nicht wesentlich von dem Fall $b = 3$, außer daß einige der elliptischen Orbits instabil geworden sind und die gesamte Struktur weiter nach innen gerückt ist.

Der Fall $b = 1$ hingegen ist ein Sonderfall, wie bereits anhand von Abbildung 5.4(c) zu erkennen war. Für $b = 1$ sind nur periodische Orbits mit der Symbolfolge $B^k C^{m-k} B^k A^{n-k}$ mit $k \leq 2$ zulässig. Das Residuum für die Orbits mit $BC^{n-1}BA^{m-1}$ ist

$$R = \frac{2bm + 2bn - nm}{4b^2} \stackrel{b=1}{=} 2(n + m) - nm. \quad (5.19)$$

Es zeigt sich, daß bis auf den parabolischen Orbit $n = m = 4$ alle diese periodischen Orbits hyperbolisch sind. Für das Auftreten von Stabilitätsinseln in

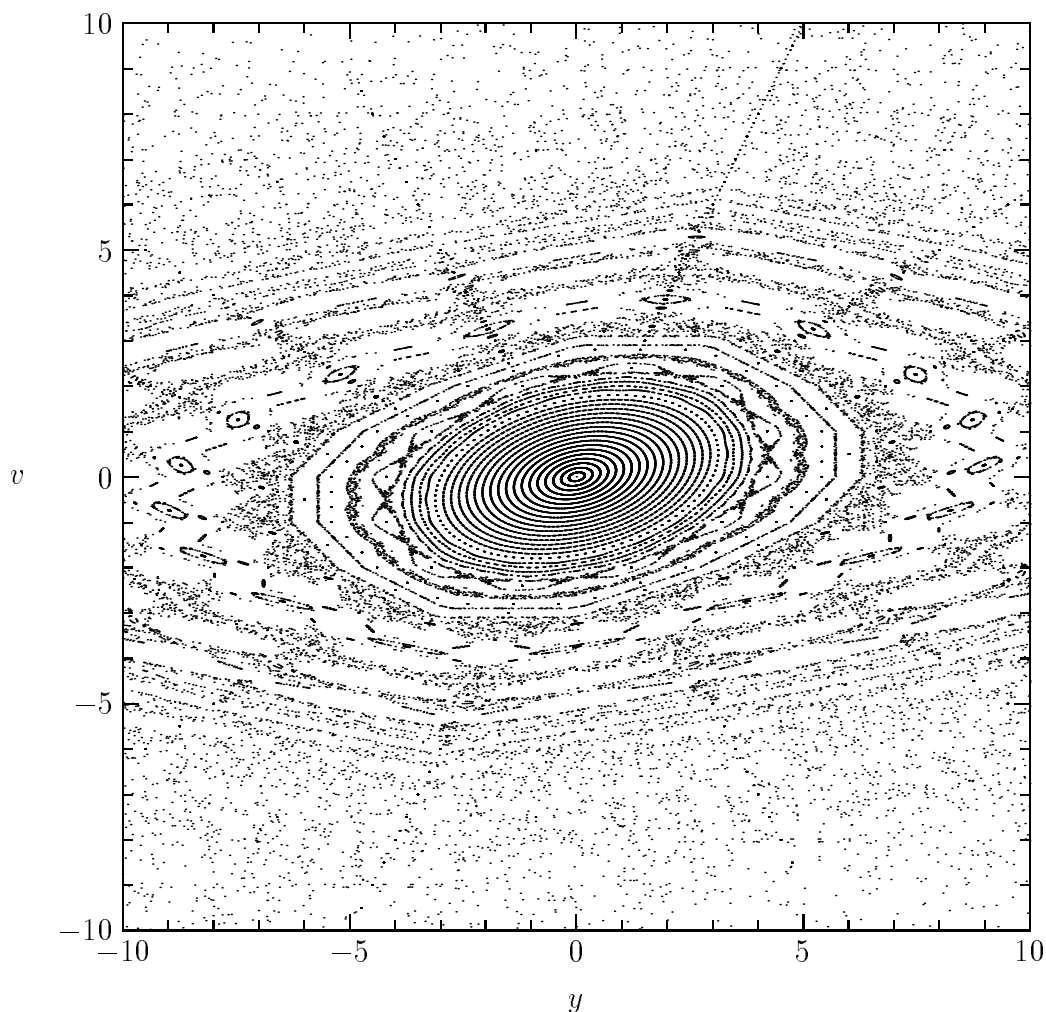
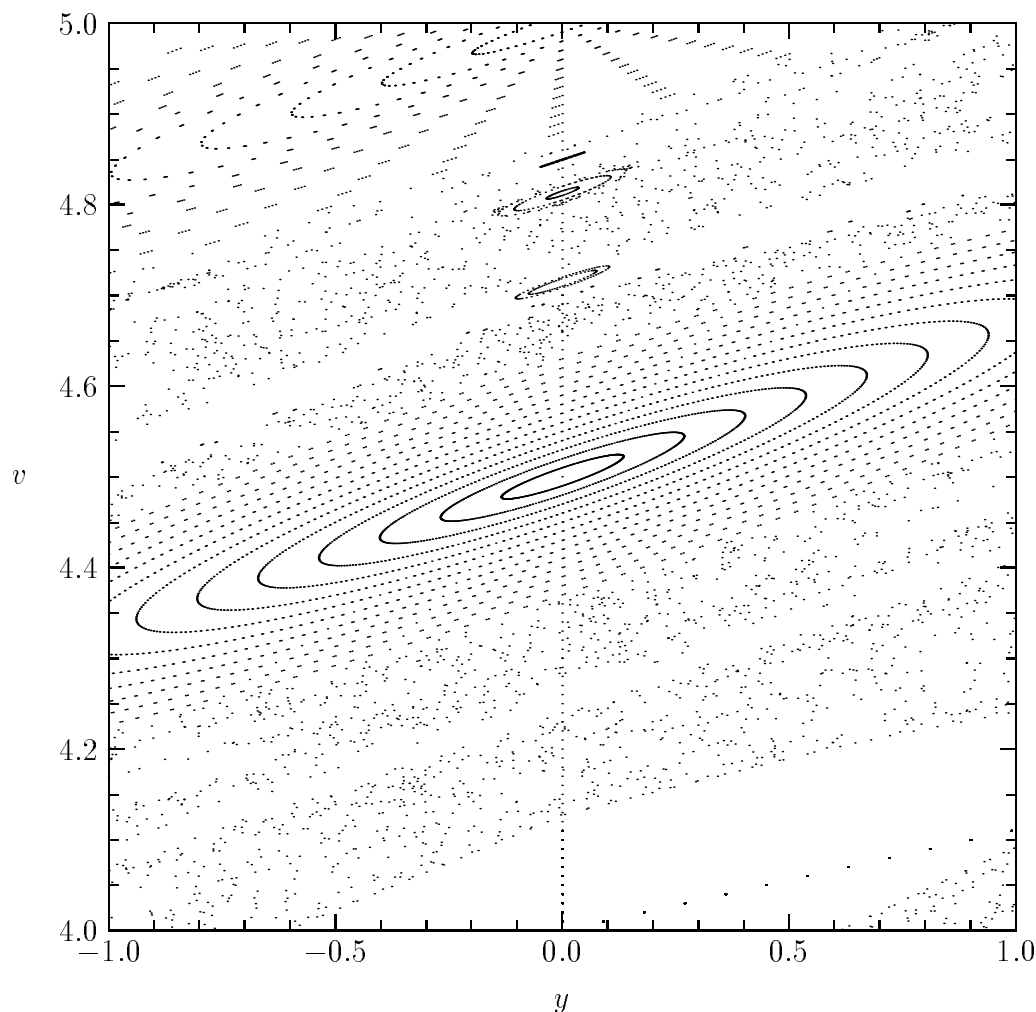

 Abbildung 5.6: Phasenportrait für $b = 3$.

Abbildung 5.6 war es aber gerade notwendig, daß die Orbits mit $BC^{n-1}BA^{m-1}$ für gewisse n, m -Werte elliptisch waren. Damit ist der schlagartige Übergang von der regulären zur chaotischen Dynamik erklärt.

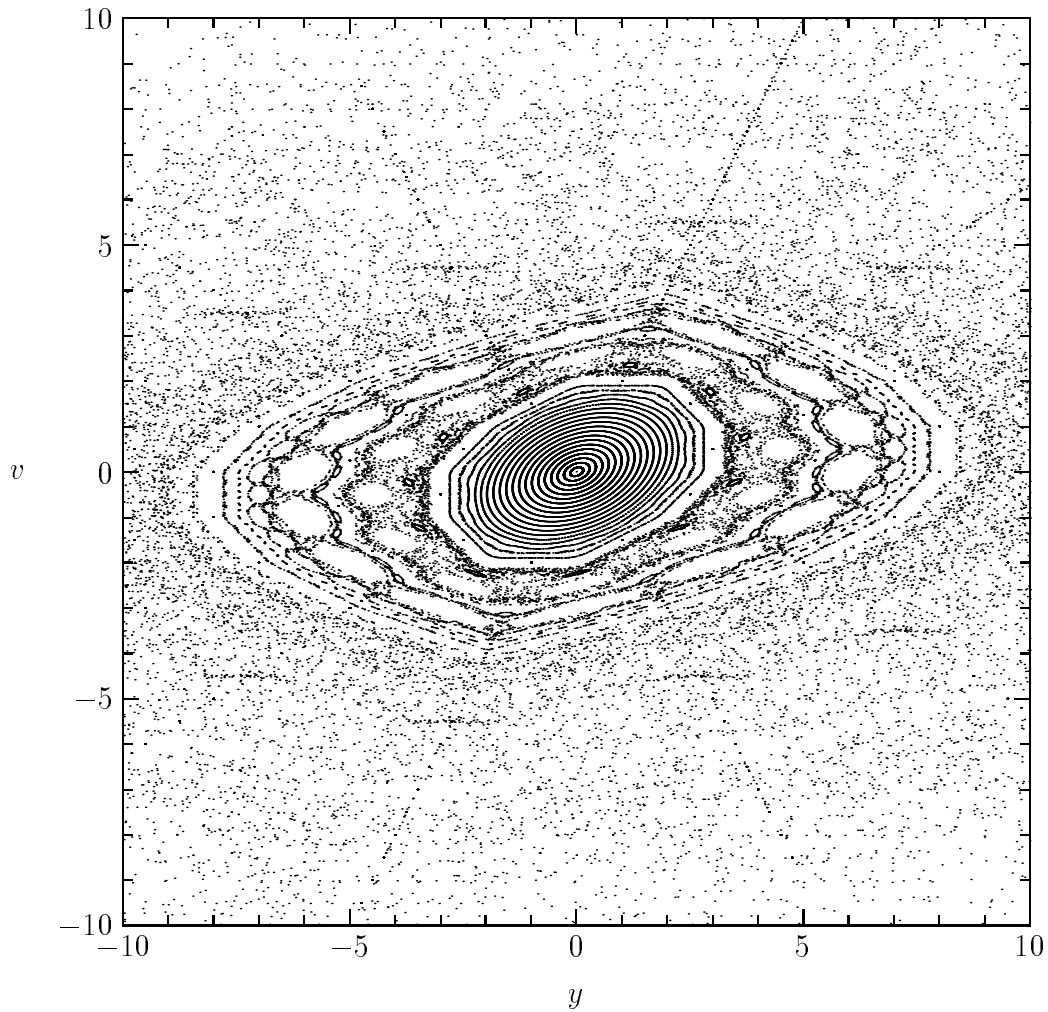
Um den zentralen elliptischen Bereich existiert, wie in Abbildung 5.9 erkennbar, noch ein zusätzlicher Phasenraumbereich, in dem sich die Dynamik regulär verhält. Dieser Bereich ist von den periodischen Orbits mit Symbolfolgen $B^2C^{n-2}B^2A^{m-2}$ geprägt (in Abbildung 5.4(c) mit 2 markiert), die in diesem Fall parabolisch sind.

In den Abbildungen 5.10 und 5.11 ist das Phasenportrait der Dynamik für zwei b -Werte kleiner 1 zu sehen. Der Fall $b = 0.8$ unterscheidet sich von der wesentlichen Struktur her kaum von den Fällen $b = 2$ und $b = 3$, es ist jedoch nur eine einzige Kette abwechselnd elliptischer und hyperbolischer periodischer Punkte erkennbar. Der Fall $b = 0.5$ ist wieder ein Spezialfall, der sich von dem Fall $b = 1$ dadurch unterscheidet, daß nur periodische Orbits mit Symbolfolgen $BC^{n-1}BA^{m-1}$ auftreten können, die alle hyperbolisch sind; Orbits mit $B^kC^{n-k}B^kA^{m-k}$ für $k \geq 2$ können


 Abbildung 5.7: Phasenportrait für $b = 3$ (Ausschnittvergrößerung).

nach Abbildung 5.4(e) nicht auftreten. Die Dynamik außerhalb des zentralen elliptischen Bereiches wird also ohne Übergang chaotisch, zusätzliche Strukturen treten für $b = 0.5$ nicht in Erscheinung.

Für $b < 1/4$ wird der zentrale Fixpunkt invers hyperbolisch, wodurch der elliptische Bereich regulärer Dynamik um den Ursprung endgültig verschwindet. Abbildung 5.12 zeigt die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit des zentralen Fixpunktes. Man erkennt, daß sich beide Mannigfaltigkeiten in zahlreichen homoklinen Punkten schneiden. Wie in Unterabschnitt 4.1.3 ausführlich erläutert, folgt hieraus, daß die Dynamik in der Nähe des Ursprungs chaotisch ist. Bedenkt man, daß überdies noch sämtliche periodischen Orbits mit Symbolfolgen $BC^{n-1}BA^{m-1}$ hyperbolisch sind und ihre stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten sich heteroklin überschneiden, so ist offensichtlich, daß sich die Dynamik auf dem gesamten Phasenraum chaotisch verhält. Die parabolischen Orbits mit Symbolfolgen $C^n A^m$, die bei jedem b -Wert vorhanden sind, dürfen jedoch auch hierbei nicht vergessen


 Abbildung 5.8: Phasenportrait für $b = 2$.

werden. Trotz des chaotischen Verhaltens ist es immer noch möglich, im Phasenraum marginal stabile Punkte zu finden.

Zusammengefaßt läßt sich also über die Dynamik von $\hat{M}_f$ sagen, daß sie für sehr kleine b -Werte überwiegend chaotisch ist und für größere b -Werte ein Phasenportrait erzeugt, das zum Teil an ein Birkhoff-Szenario erinnert. Dabei ist die Dynamik für alle b -Werte von parabolischen Orbits durchsetzt, die marginal stabil sind. Damit verhält sich $\hat{M}_f$ umkehrt wie die Dynamik von $\bar{M}_{\alpha,f}$ im Grenzfall $\beta = 0$. Es zeigte sich, daß $\bar{M}_{\alpha,f}$ für kleine b -Werte ein Stochastisches Netz mit hohem Anteil regulärer Dynamik erzeugt, also genau dann, wenn $\hat{M}_f$ überwiegend chaotisch ist. Gerade dieses Verhalten wird die Analyse der Fälle $0 < \beta < \pi/2$ erschweren.

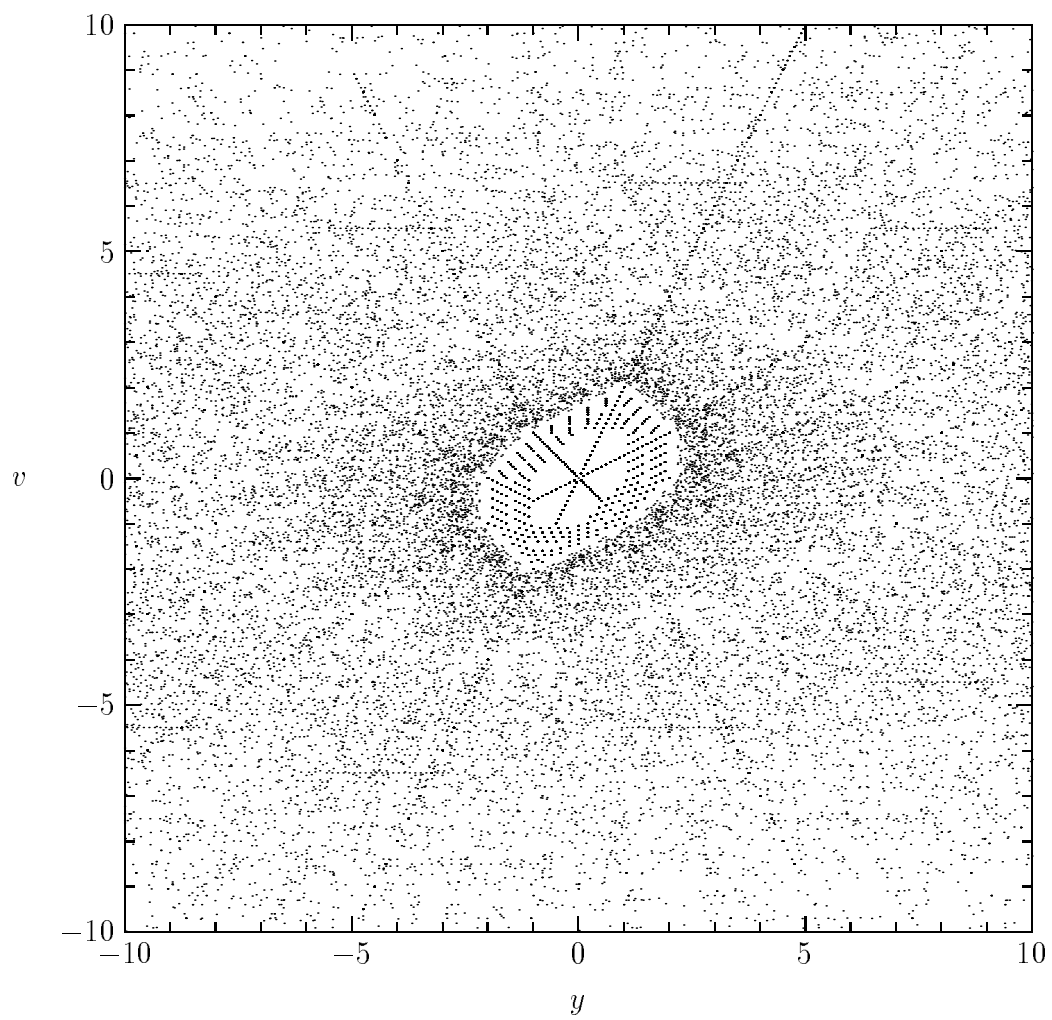


Abbildung 5.9: Phasenportrait für $b = 1$.

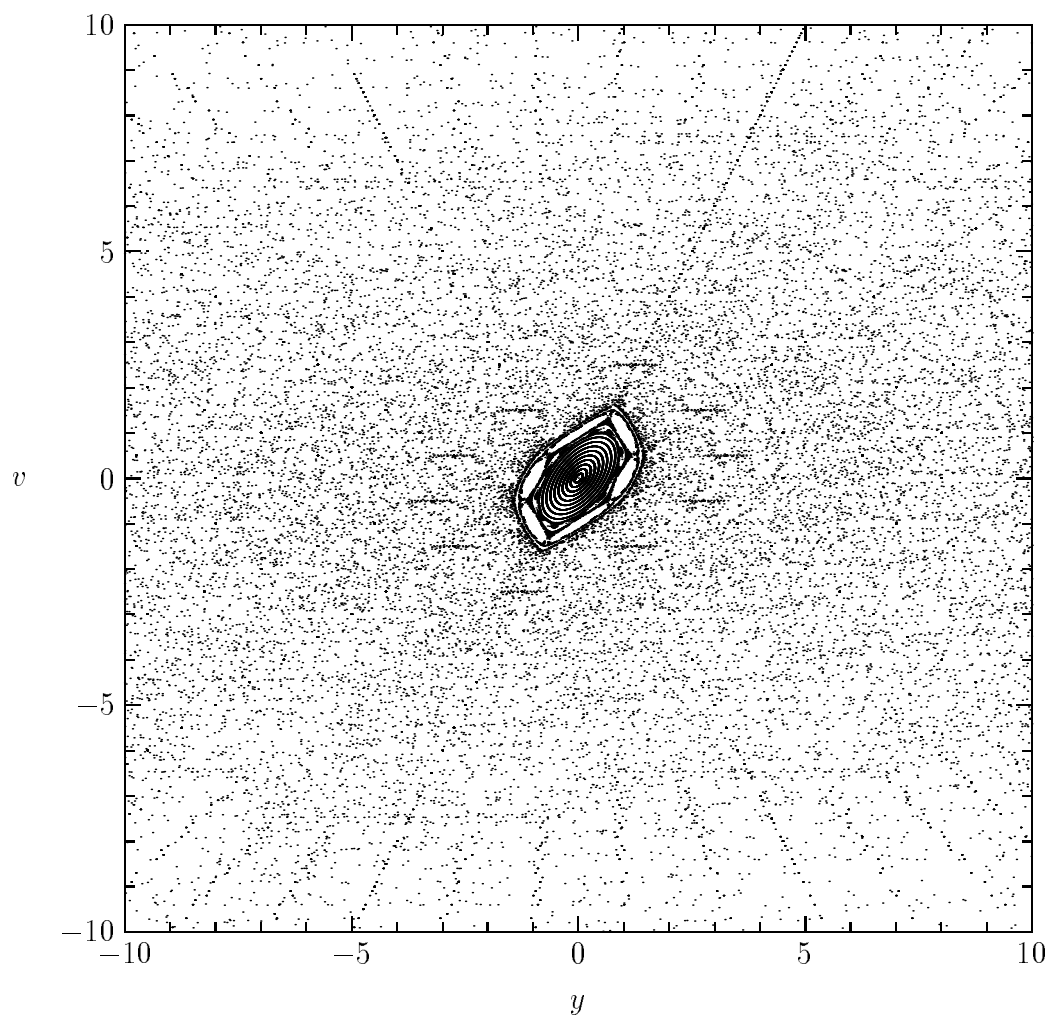


Abbildung 5.10: Phasenportrait für $b = 0.8$.

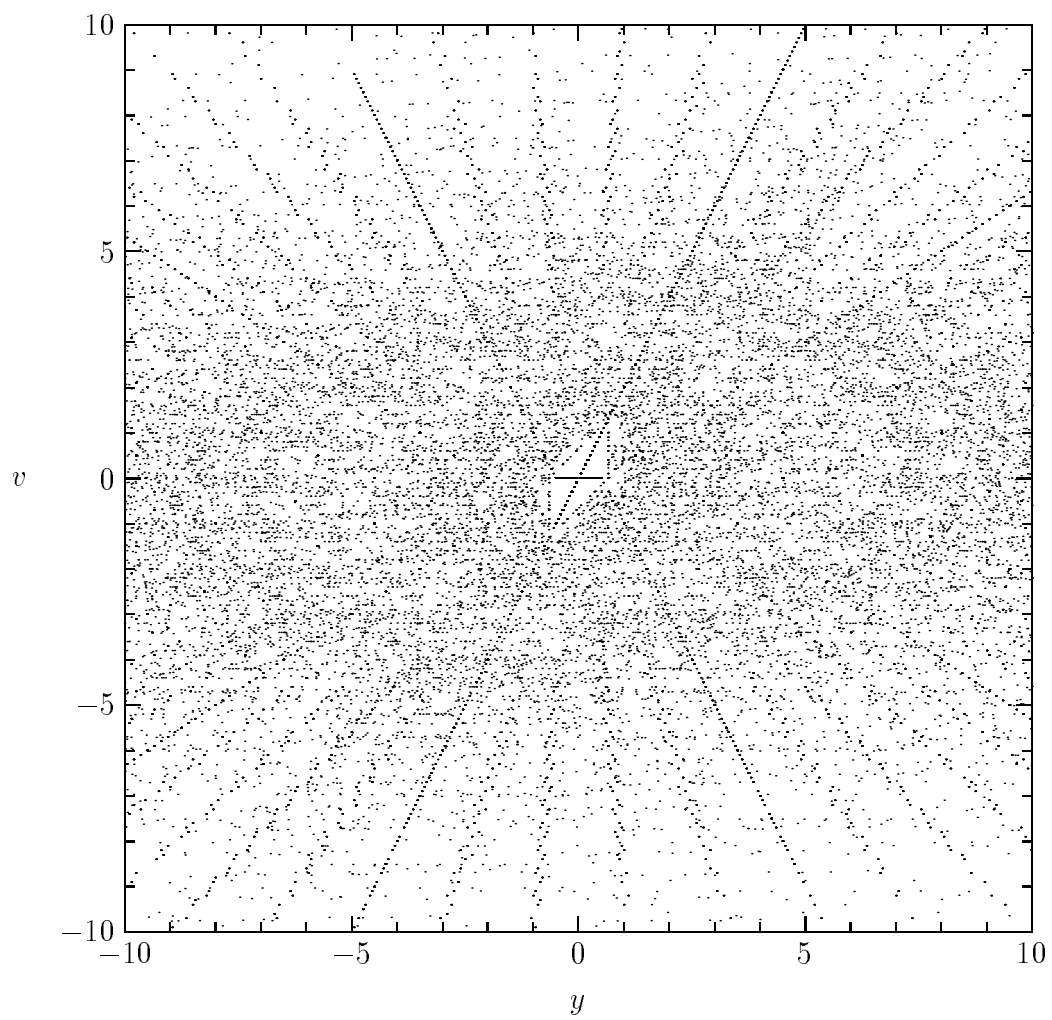


Abbildung 5.11: Phasenportrait für $b = 0.5$.

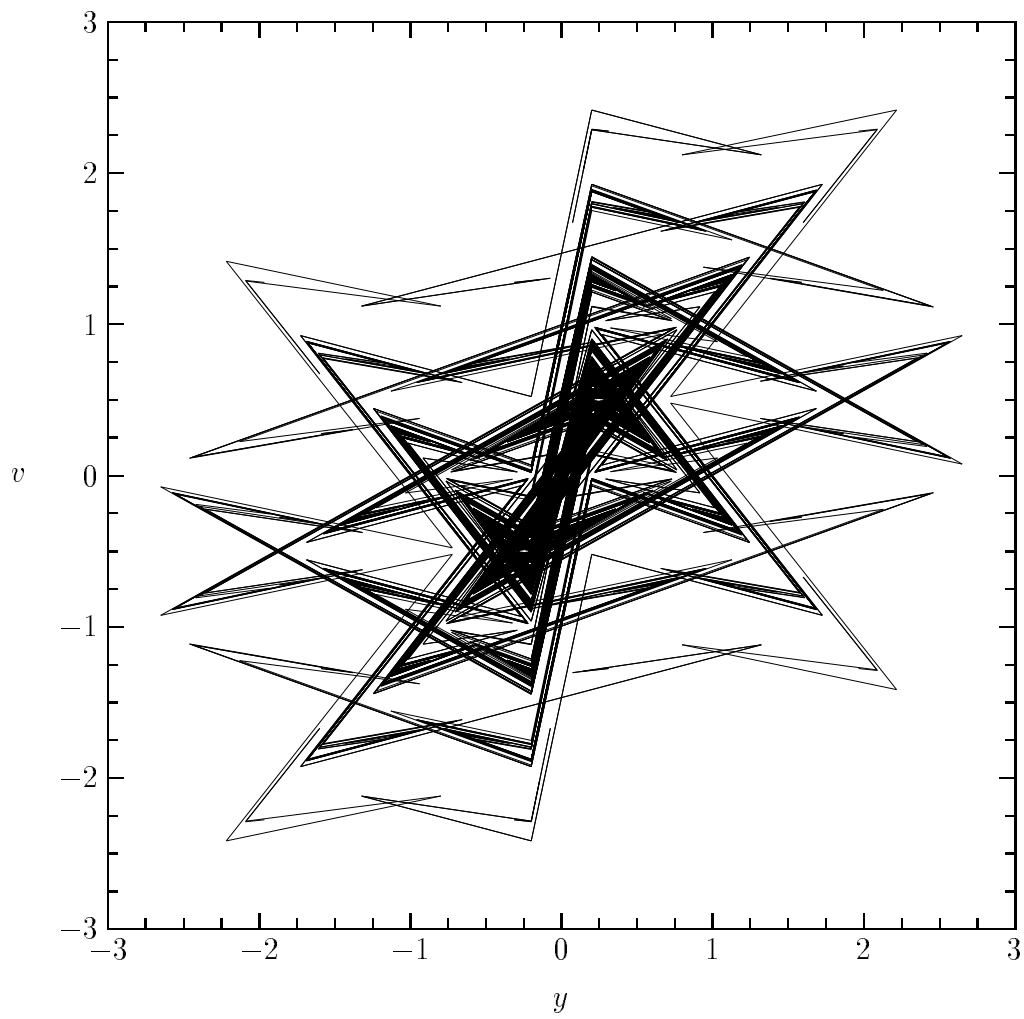


Abbildung 5.12: Stabile und instabile Mannigfaltigkeit des zentralen Fixpunktes für $b = 0.2$.

5.2 Periodische Kick-Funktion

Als erstes sei darauf hingewiesen, daß wie in Abschnitt 4.2 ohne Einschränkung davon ausgegangen werden darf, daß die Kick-Funktion $f(y)$ die Periode 1 hat. Hat man ein $f(y)$ mit Periode $b \neq 0$ gegeben, so ist $\hat{M}_f$ über die Umskalierung (vergleiche (4.35))

$$\frac{y}{b} \rightarrow y \quad , \quad \frac{v}{b} \rightarrow v \quad (5.20)$$

topologisch konjugiert zu einem $\hat{M}_{\hat{f}}$, wobei $\hat{f}(y)$ die Periode 1 hat.

Im Falle einer mit der Periode 1 periodischen Kick-Funktion $f(y)$ hat die Abbildung $\hat{M}_f$ die folgenden Translationssymmetrien:

$$L_n^{(y)} : \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y + n \\ v \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$; es gilt ja

$$\begin{aligned} (\hat{M}_f \circ L_n^{(y)})(y, v) &= \hat{M}_f(y + n, v) \\ &= (y + n + v + f(y + n), v + f(y + n)) \\ &= L_n^{(y)}(y + v + f(y), v + f(y)) = (L_n^{(y)} \circ \hat{M}_f)(y, v). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Führt man bezüglich dieser Symmetrien eine Symmetriereduktion durch (siehe Anhang A.6), so ist es möglich, die Dynamik von $\hat{M}_f$ auf den Zylinder $[-1/2, 1/2] \times \mathbb{R}$ zu reduzieren, ohne daß relevante Informationen verloren gehen. Mit dieser Reduktion sind dann

$$L_n^{(v)} : \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ v + n \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ ebenfalls Translationssymmetrien von $\hat{M}_f$; es gilt ja

$$\begin{aligned} (\hat{M}_f \circ L_n^{(v)})(y, v) &= (y + v + n + f(y), v + n + f(y)) \\ &= L_n^{(v)}(y + v + f(y), v + f(y)) = (L_n^{(v)} \circ \hat{M}_f)(y, v), \end{aligned} \quad (5.24)$$

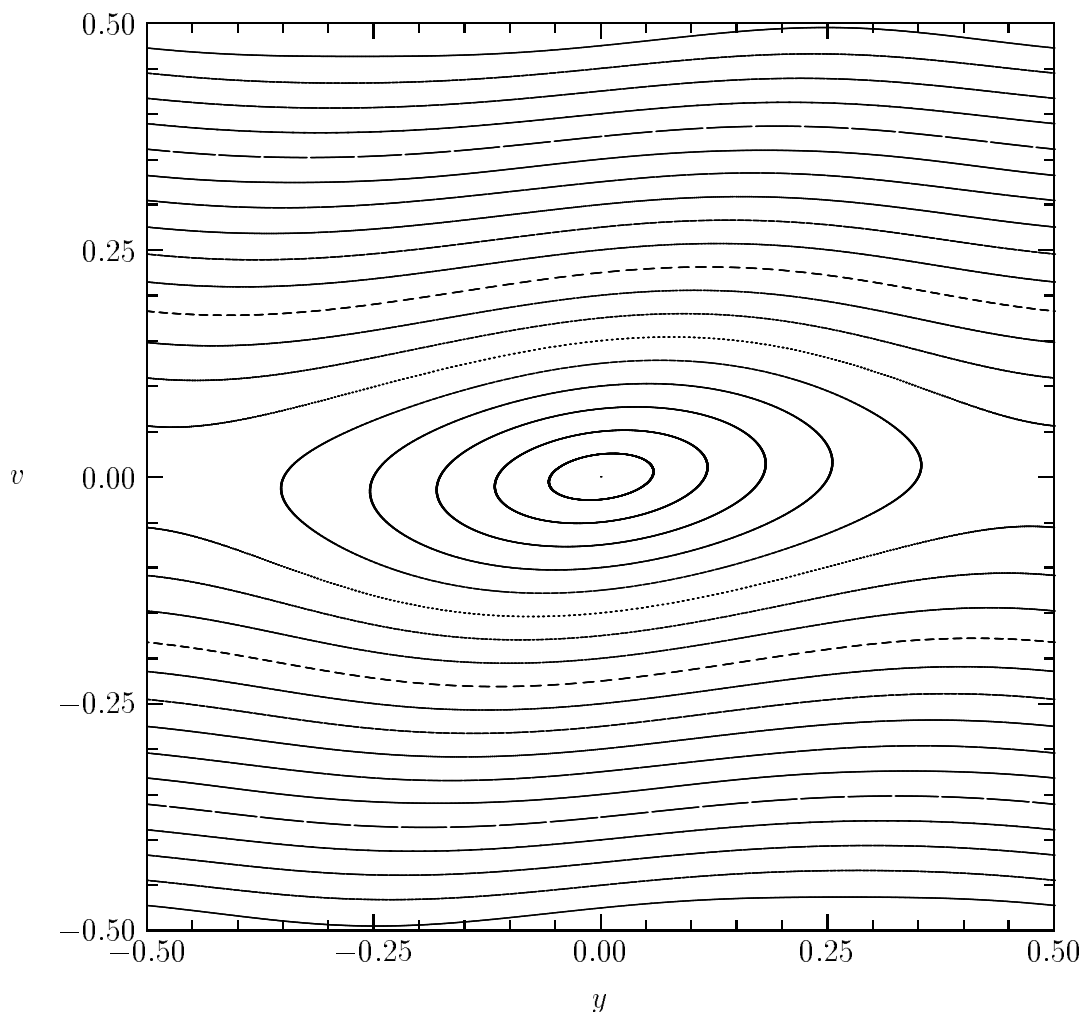
wobei zu beachten ist, daß $y \equiv y + n$ gilt, sofern die Dynamik zuvor auf den Zylinder reduziert wurde. Es ist also prinzipiell möglich, $\hat{M}_f$ auf den 2-Torus $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ einzuschränken. Jedoch sind dann Untersuchungen zur Diffusion nicht mehr möglich.

Für Abbildungen auf dem Zylinder gibt es die sehr ausgereifte Theorie der sogenannten *Twist-Abbildungen*, zu denen auch $\hat{M}_f$ zählt. Anstatt diese Theorie hier in aller Ausführlichkeit zu referieren, sei auf [6] verwiesen, wo sich ein umfangreiches Kapitel mit den Twist-Abbildungen beschäftigt.

Stattdessen soll in diesem Abschnitt kurz anhand der periodischen Kick-Funktion $f_{P1}(y)$ (siehe (1.33)), das heißt

$$f(y) = -K \sin(2\pi y), \quad (5.25)$$

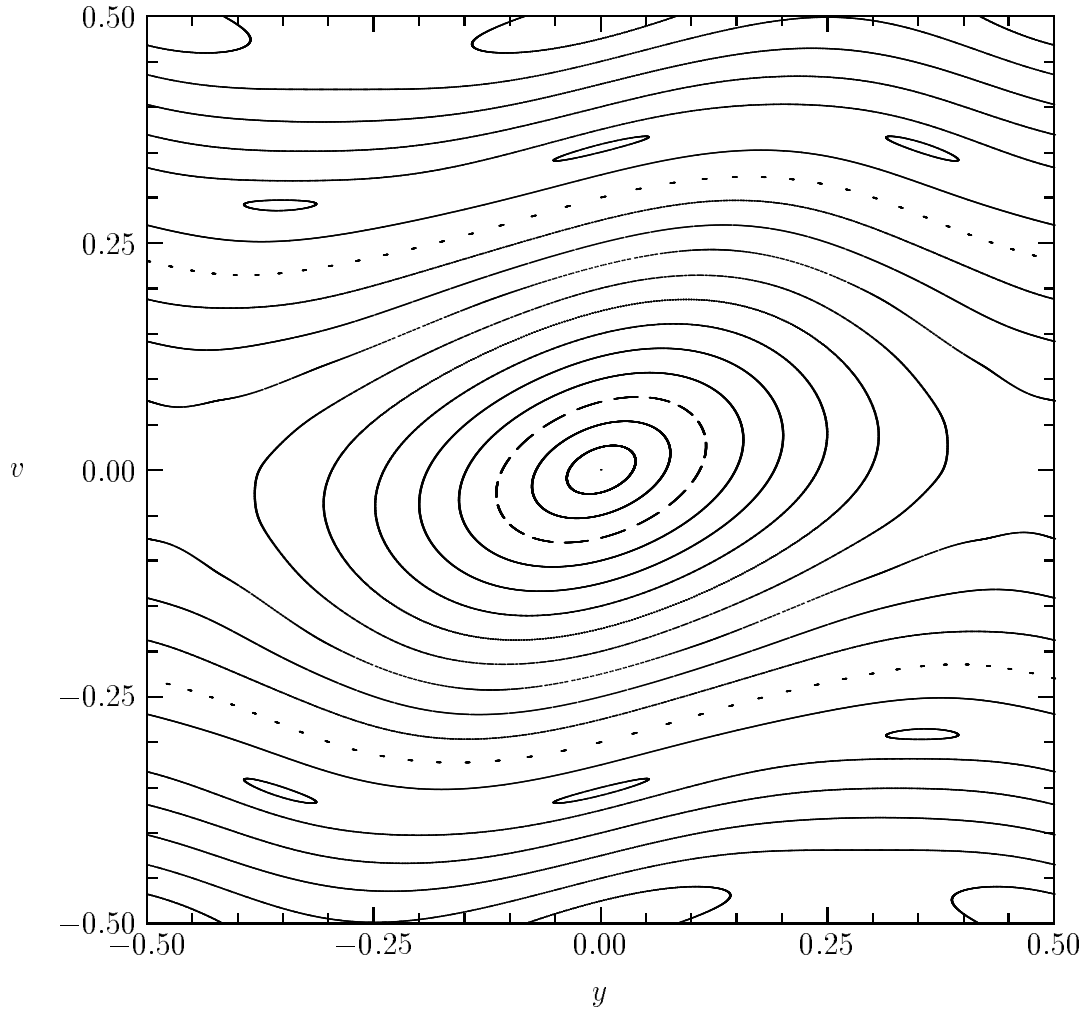
demonstriert werden, wie sich $\hat{M}_f$ typischerweise verhalten kann. Das heißt es soll kurz die Dynamik der Standardabbildung vorgestellt werden.


 Abbildung 5.13: Phasenportrait der Standardabbildung für $K = 0.03183$.

Der Abkürzung halber soll im folgenden für $\hat{M}_f$ mit der Kick-Funktion (5.25) $\hat{M}_K$ geschrieben werden. Wie bereits erwähnt, ist $\hat{M}_{K=0}$ (freie Teilchenbewegung) integrabel, das heißt, es gibt ein Integral der Bewegung, also eine Phasenraumfunktion, die unter der Abbildung invariant ist (Impuls des Teilchens). Für $K > 0$ gibt es kein derartiges Integral der Bewegung. Es ist nun üblich zu untersuchen, wie sich die Standardabbildung in der Nähe des integrablen Falls verhält und wieviel von der integrablen Struktur erhalten bleibt.

Die Abbildungen 5.13 bis 5.16 zeigen typische Phasenportraits der Standardabbildung anhand von im Prinzip willkürlich gewählten Orbits zu langsam anwachsendem K . Alle Abbildungen sind auf den 2-Torus $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ eingeschränkt, da Diffusionsbetrachtungen in dieser Arbeit nicht durchgeführt werden sollen. Mit dieser Einschränkung erhält man auf einfache Weise einen Überblick über den gesamten Phasenraum.

Genauso wie für den aperiodischen Fall, kann man auch für die Standardabbildung eine Analyse der Symmetrielinien durchführen. Speziell in diesem Fall ist

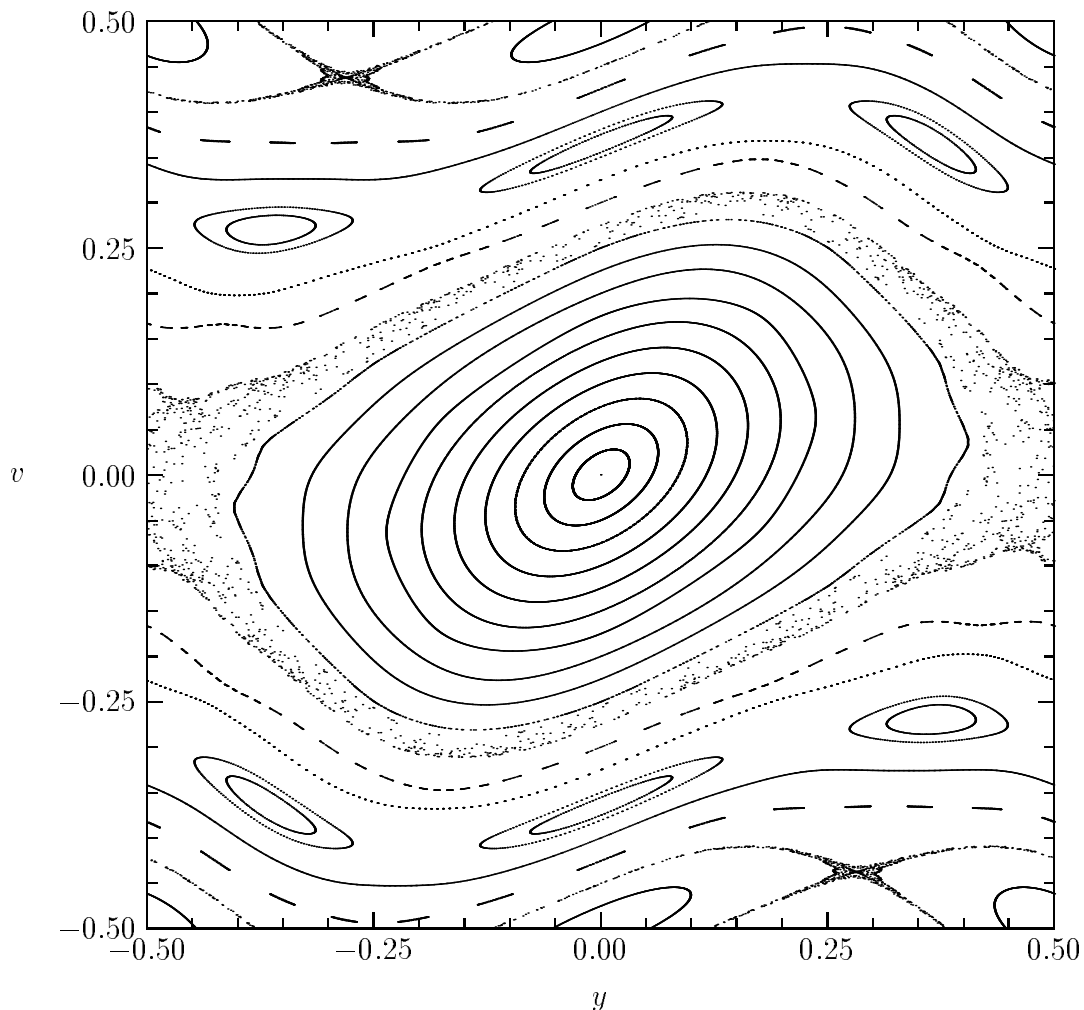

 Abbildung 5.14: Phasenportrait der Standardabbildung für $K = 0.07958$.

es jedoch sinnvoller die Umkehrenden Symmetrien $\hat{T}_k = -\hat{S}_k$ anstelle der bisher üblichen $\hat{S}_k$ zu betrachten, da die Symmetrielinien der $\hat{T}_k$ einen größeren Teil des Phasenraumes überdecken. Der Vollständigkeit halber müßten auch die $\hat{S}_k$ mit betrachtet werden, jedoch können durch sie keine neuen periodischen Punkte gefunden werden. Um die Abbildungen überschaubar zu halten, wurde darauf verzichtet, diese Symmetrielinien mit zu berechnen.

Die Gleichungen (5.4) für die Umkehrenden Symmetrien $\hat{T}_0$ und $\hat{T}_1$ können unverändert aus dem vorherigen Abschnitt übernommen werden. Bei der Berechnung der Fixpunktmengen muß jedoch beachtet werden, daß $\hat{M}_K$ auf den 2-Torus eingeschränkt ist und die Kick-Funktion eine periodische Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(1/2) = 0$ ist:

$$\text{Fix}(\hat{T}_0) = \left\{ (y, v) \in \mathbb{R}^2; y = 0 \vee y = \frac{1}{2} \right\} \quad (5.26a)$$

$$\text{Fix}(\hat{T}_1) = \left\{ (y, v) \in \mathbb{R}^2; y = \frac{v}{2} \vee v = \frac{1}{2}(v+1) \right\}. \quad (5.26b)$$


 Abbildung 5.15: Phasenportrait der Standardabbildung für $K = 0.12732$.

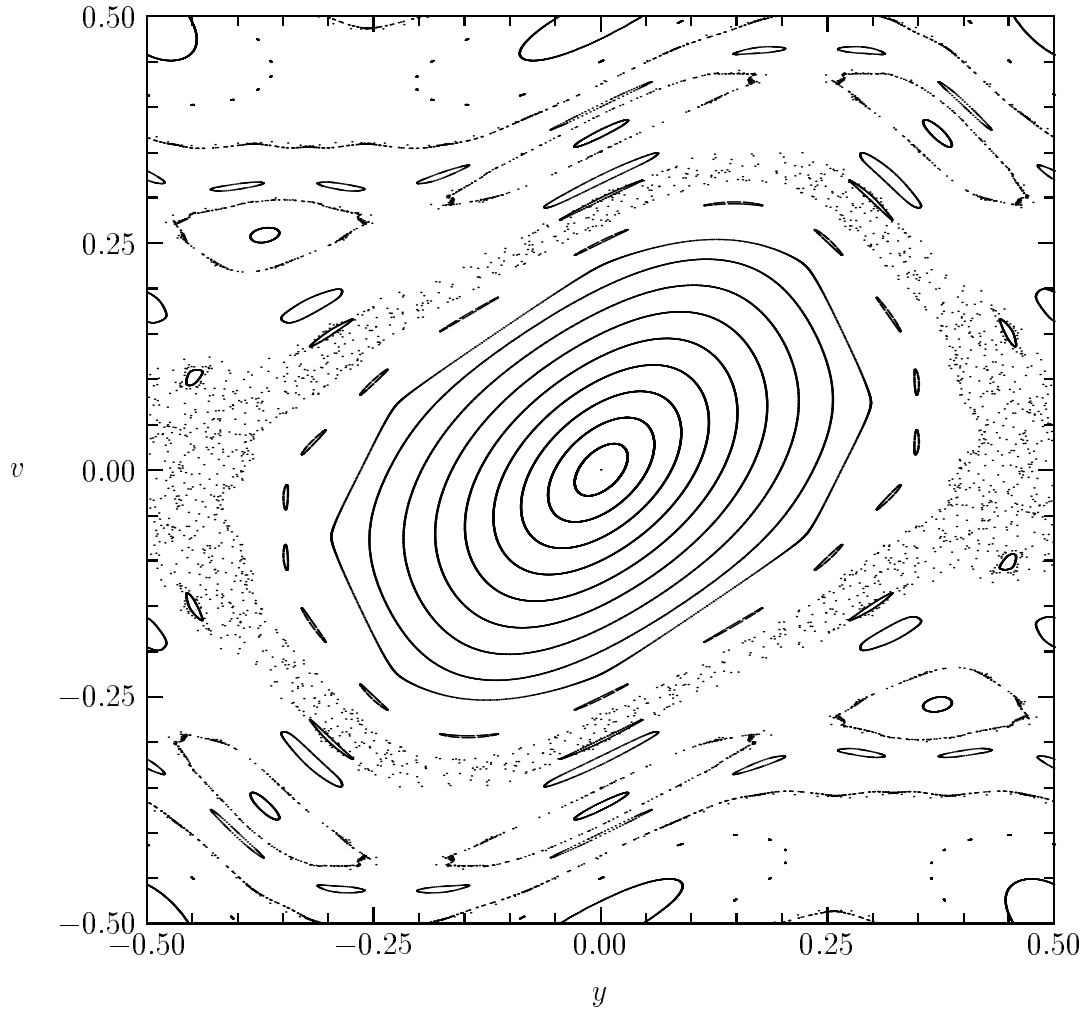
Man beachte, daß auf dem 2-Torus $y = 1/2$ mit $y = -1/2$ identifiziert wird und entsprechend $v = 1/2$ mit $v = -1/2$.

Die Abbildungen 5.17 und 5.18 zeigen jeweils die ersten 50 Symmetrielinien — das heißt $\text{Fix } \hat{T}_0$ bis $\text{Fix } \hat{T}_{49}$ — der Standardabbildung. Dabei wurden die K -Werte so gewählt, daß Abbildung 5.17 dem Phasenportrait in Abbildung 5.14 korrespondiert und Abbildung 5.18 der Abbildung 5.15. Man erkennt, daß die wichtigsten periodischen Punkte auch auf diese Weise gewonnen werden können. Siehe hierzu zum Beispiel [24].

Speziell für die Standardabbildung $\hat{M}_K$ ist diese Vorgehensweise jedoch wenig sinnvoll, da sich die verschiedenen periodischen Punkte mit Hilfe der KAM-Theorie erklären lassen. Für den integrablen Fall definiert man die Windungszahl ω durch

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{M}_{K=0}(y, v)^n}{n}, \quad (5.27)$$

wobei zur Berechnung des Limes $\hat{M}_{K=0}$ auf dem gesamten $\mathbb{R}^2$ betrachtet wird

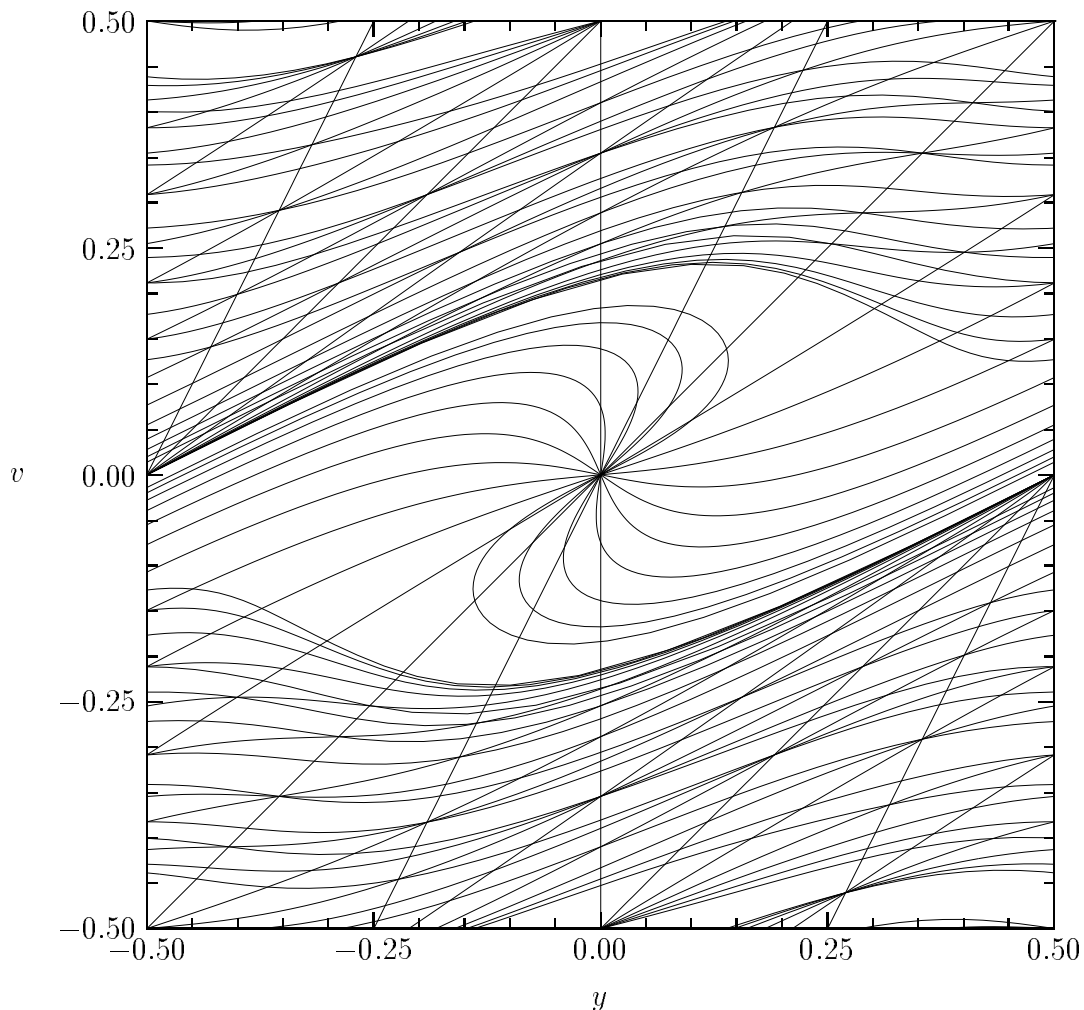

 Abbildung 5.16: Phasenportrait der Standardabbildung für $K = 0.1546405$.

und nicht auf den 2-Torus $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ eingeschränkt ist. Für die Standardabbildung ergibt sich nach kurzer Rechnung $\omega = v$. Das KAM-Theorem besagt, daß die invarianten Kurven mit genügend irrationalem ω unter Störung, das heißt $K > 0$, erhalten bleiben. Genauer: Die invariante Kurve bleibt unter Störung erhalten, wenn für eine Konstante C und ein $\tau > 1$ für alle $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 - (0, 0)$ gilt:

$$|n\omega - m| > \frac{C}{n^\tau}. \quad (5.28)$$

Das heißt, ω darf sich nur schwer durch eine rationale Zahl approximieren lassen. (5.28) wird auch als *Diophantische Bedingung* bezeichnet. Mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung läßt sich zeigen, daß die irrationalste Zahl, das heißt die Zahl, die sich am schlechtesten durch eine rationale Zahl approximieren läßt, der “goldene Schnitt”

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (5.29)$$


 Abbildung 5.17: Symmetrielinien der Standardabbildung für $K = 0.07958$.

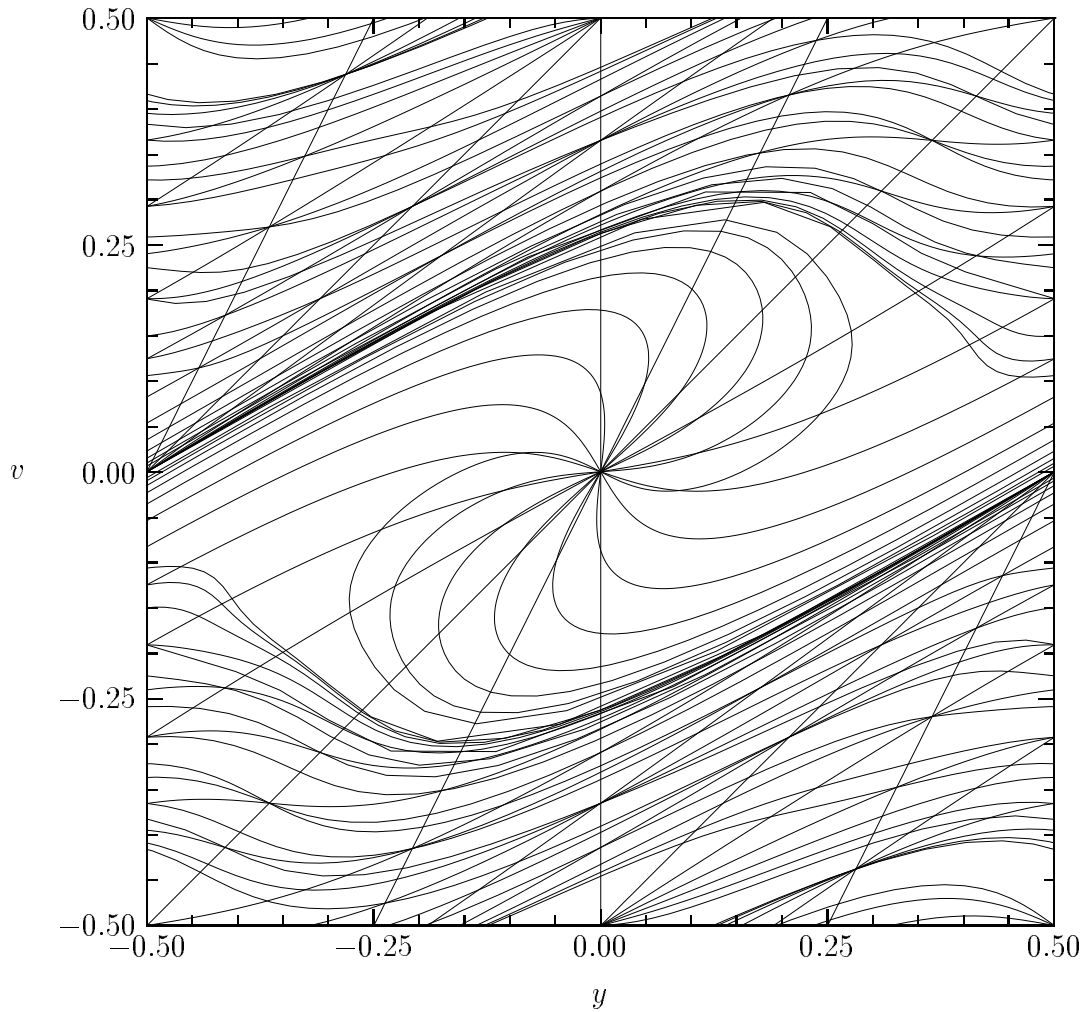
ist; somit bleibt die invariante Kurve mit dieser Windungszahl am längsten erhalten. Es kann numerisch gezeigt werden, daß diese letzte invariante Kurve bei

$$K_c \approx \frac{0.971635406}{2\pi} \approx 0.15464058 \quad (5.30)$$

zerstört wird. Abbildung 5.16 zeigt das Phasenportrait in der Nähe dieses kritischen K -Wertes, in dem die letzte invariante Kurve noch zu erkennen ist.

Das Poincaré–Birkhoff–Theorem besagt nun, daß alle invariante Kurven mit rationaler Windungszahl r/s in $2ks$ periodische Punkte aufbrechen, von denen ks elliptisch und ks hyperbolisch sind, die jeweils abwechselnd auftreten. Die Abbildungen 5.13 bis 5.16 demonstrieren dieses Verhalten recht eindrucksvoll.

Um jeden dieser neu entstandenen elliptischen periodischen Punkte herum gibt es ebenfalls invariante Kurven, für die man auch Windungszahlen definieren kann. Man spricht hierbei von invarianten Kurven zweiter Ordnung. In einer gewissen Umgebung um diese periodischen Punkte herum läßt sich also ebenfalls die obi-


 Abbildung 5.18: Symmetrielinien der Standardabbildung für $K = 0.12732$.

ge Theorie anwenden und man erhält eine ähnliche Struktur im verkleinerten Maßstab. Entsprechend dem Poincaré–Birkhoff–Theorem entstehen dann um die periodischen Punkte herum ebenfalls Ketten von abwechselnd elliptischen und hyperbolischen periodischen Punkte, bei denen invariante Kurven dritte Ordnung entstehen. Auf diese Weise erhält man eine selbstähnliche Struktur im Phasenportrait, die allgemein als KAM–Szenario bezeichnet wird.

Für eine ausführlichere Behandlung der Standardabbildung sei auf [5, 6] verwiesen. Genauere Erläuterungen zum Poincaré–Birkhoff–Theorem und der daraus resultierenden selbstähnlichen Struktur, können in dem Buch von Schuster [25] nachgelesen werden.

Zusammengefaßt läßt sich über die Standardabbildung $\hat{M}_K$ sagen, daß die Dynamik auch für recht große Störungen K durch invariante Kreise auf gewisse Teile des Phasenraumes eingeschränkt ist und es recht viele Stabilitätsinseln gibt, die erst für sehr große K zerstört werden.

Kapitel 6

Die Fälle $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

We are entering a world where the old rules no longer apply.

PHILIP SANDERS

In diesem Kapitel soll die vierdimensionale Abbildung $M_{\alpha,\beta,f}$ (siehe (1.20)) als Ganzes untersucht werden. Dabei soll die Situation in der Nähe der in den vorherigen beiden Kapiteln untersuchten Grenzfälle im Vordergrund stehen. Das heißt, es soll untersucht werden, wie die Dynamik von $\bar{M}_{\alpha,f}$ durch die Dynamik von $\hat{M}_f$ beeinflusst wird und umgekehrt.

Zunächst jedoch einige Worte zur graphischen Darstellung der Dynamik. In allen folgenden Abbildungen sollen die (x, u) -Ebene und die (y, v) -Ebene immer getrennt untereinander dargestellt werden. Da die beiden zweidimensionalen Abbildungen $M_{\alpha,\beta,f}^{(x)}$ und $M_{\alpha,\beta,f}^{(y)}$ für $0 < \beta < \pi/2$ allein durch die Kick-Funktion f gekoppelt sind und in den vorherigen Abschnitten diese beiden Dynamiken recht ausführlich getrennt voneinander untersucht wurden, macht eine derartige Darstellung des vierdimensionalen Phasenraumes durchaus Sinn. Jedoch ist damit noch nicht gesagt, daß diese Projektion im Hinblick auf die vierdimensionale Problemstellung auch tatsächlich günstig ist.

6.1 Aperiodische Kick-Funktion

Bevor Spezialfälle der Dynamik untersucht werden, sei zunächst darauf hingewiesen, daß eine Analyse der Umkehrenden Symmetrien bei der vierdimensionalen Abbildung wenig sinnvoll ist. Entsprechend (3.24) und (1.19) sind die ersten beiden Umkehrenden Symmetrien

$$S_0 : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -u - \cos \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \\ y \\ -v - \sin \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \end{pmatrix} \quad (6.1a)$$

und

$$S_1 : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\frac{\sin \alpha}{\alpha} & 0 & 0 \\ -\alpha \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix}. \quad (6.1b)$$

Damit ergibt sich für die ersten beiden Symmetriefflächen (als Verallgemeinerung der Symmetrielinien im Zweidimensionalen):

$$\text{Fix}(S_0) = \left\{ (x, u, y, v) \in \mathbb{R}^4; \begin{array}{l} u = -\frac{1}{2} \cos \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \\ v = -\frac{1}{2} \sin \beta f(x \cos \beta + y \sin \beta) \end{array} \right\} \quad (6.2a)$$

$$\text{Fix}(S_1) = \left\{ (x, u, y, v) \in \mathbb{R}^4; \begin{array}{l} u = -x \alpha \tan(\alpha/2) \\ v = 0 \end{array} \right\}. \quad (6.2b)$$

Das heißt, für $0 < \beta < \pi/2$ liegt $\text{Fix}(S_0)$ so im vierdimensionalen Raum, daß in der Projektion sowohl die (x, u) - als auch die (y, v) -Ebene überdeckt werden. $\text{Fix}(S_1)$ liegt hingegen so, daß man in der Projektion mit jeweils einer einfachen Linie in den beiden Ebenen verbleibt. Man kann sich klar machen, daß es keine lineare Projektion (das heißt kein anderes Ebenenpaar) gibt, so daß sowohl $\text{Fix}(S_0)$ also auch $\text{Fix}(S_1)$ in beiden Projektionsebenen einfache Linien sind. Eine Analyse der Symmetriefflächen konnte aus diesem Grund nicht durchgeführt werden. Stattdessen soll untersucht werden, wie sich das vierdimensionale System in der Nähe der bereits untersuchten Grenzfälle verhält.

Im folgenden soll allein die in (1.29) angegebene Kick-Funktion f_{A1} betrachtet werden. In Analogie zu den Abschnitten 4.1 und 5.1 soll auch hier der Parameter b variiert werden und für alle Berechnungen $K = 1$ gelten. Als erstes soll untersucht werden, wie die Dynamik von $\bar{M}_{\alpha, f}$, die im Abschnitt 4.1 untersucht wurde, von $\hat{M}_f$ für kleine β -Werte beeinflusst wird. Es wird sich zeigen, daß bereits für kleine, von null verschiedenen β -Werte die idealen Strukturen, die in 4.1 auftraten, zerstört werden.

Schreibt man die vierdimensionale Abbildung wie in (1.21) nach (x, u) - und (y, v) -Dynamik getrennt auf, so ist offensichtlich, daß die (x, u) -Dynamik für kleine β nur für große y -Werte von der (y, v) -Dynamik beeinflusst wird; der Wert der Kick-Funktion f richtet sich praktisch ausschließlich nach x . Solange y klein bleibt, ist zu erwarten, daß sich die (x, u) -Dynamik annähernd so verhält, wie im Spezialfall $\beta = 0$. Die (y, v) -Dynamik dagegen wird für kleine β -Werte von der Kick-Funktion f nur wenig beeinflusst, deren Werte hauptsächlich durch x festgelegt sind.

Man kann also nicht erwarten, daß sich in diesem Fall $M_{\alpha, \beta, f}^{(y)}$ entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 5.1 verhält. $M_{\alpha, \beta, f}^{(y)}$ muß an dieser Stelle gesondert behandelt werden. Da $M_{\alpha, \beta, f}^{(x)}$ im wesentlichen aus einer Drehung besteht, ist zu erwarten, daß die x -Werte eines beliebigen Orbits um null oszillieren. Da sich ferner f für große $|x|$ wie eine Signum-Funktion verhält, ist zu erwarten, daß die Werte von f sich für kleine y im Mittel gerade aufheben. Erst für größere y -Werte nimmt f ein einheitliches Vorzeichen an. Startet man also einen Orbit mit kleinem y , so verhält sich die Abbildung $M_{\alpha, \beta, f}^{(y)}$ zunächst wie die Bewegung eines freien

Teilchens mit leichter Oszillation in v -Richtung bis y groß genug ist, um einen Einfluß zu haben.

Abbildung 6.1 zeigt die ersten 30000 Iterationen eines typischen Orbits für kleines β . In v -Richtung bleibt der Orbit für lange Zeit annähernd konstant und beginnt erst für y -Werte größer als 200 typisch parabelförmig abzuknicken. Die (x, u) -Dynamik orientiert sich im wesentlichen an der Dynamik für $\beta = 0$, wobei zu beachten ist, daß hier die Dynamik nicht entsprechend (1.15) skaliert ist, wodurch das Netz ein wenig verzerrt erscheint. Nur in der Nähe des Randes sind bereits Aufbaufehler in der Netzstruktur zu erkennen.

Verfolgt man den Orbit für etwa 500000 Iterationen, so bleibt die Netzstruktur in der Nähe des Ursprungs verhältnismäßig stabil, während ein Großteil der (x, u) -Ebene dicht mit Punkten ausgefüllt wird. Der Orbit orientiert sich für mehrere Tausend Iterationsschritte hauptsächlich an der (x, u) -Dynamik, bis die Störung durch die (y, v) -Dynamik groß genug ist. Ist y groß genug, so kann in der (x, u) -Ebene ein Orbit die Menge Ω^∞ verlassen, also vom chaotischen Bereich in den regulären gelangen und umgekehrt. Im folgenden soll eine Abschätzung dafür gefunden werden, wie lange sich ein Orbit an der (x, u) -Dynamik orientiert.

Zunächst soll untersucht werden, wie ein Orbit mit Startpunkt $\vec{p}_0$, der für $\beta = 0$ in der (x, u) -Dynamik periodisch ist, sich für kleine β -Werte verhält. Von entscheidender Bedeutung ist, wie nahe der Orbit an die u -Achse heran kommt, also die Größe

$$x_{min} = \min_{k \in \mathbb{Z}} \left| M_{\alpha, \beta, f}^k(\vec{p}_0) \cdot \vec{e}_x \right|. \quad (6.3)$$

Für einen in der (x, u) -Dynamik periodischen Orbit ist $x_{min} > 0$ eine wohldefinierte Größe, für einen chaotischen Orbit hingegen ist zu erwarten, daß x_{min} gegen null geht. Ist nun β von null verschieden, so ist für einen bei $\beta = 0$ periodischen Orbit zu erwarten, daß sich der x -Wert von Iteration zu Iteration sehr rasch ändert, während y langsam anwächst. x kommt also innerhalb weniger Iterationsschritte in die Nähe der u -Achse, während y verhältnismäßig konstant ist.

Man kann erwarten, daß ein bei $\beta = 0$ periodischer Orbit dann gestört wird, wenn

$$|y_k| \sin \beta > x_{min} \cos \beta \quad \text{mit } y_k = M_{\alpha, \beta, f}^k(\vec{p}_0) \cdot \vec{e}_y \quad (6.4)$$

gilt. Für kleine β gilt $\sin \beta \approx \beta$ und $\cos \beta \approx 1$, folglich kann die Bedingung auch zu $\beta |y_k| > x_{min}$ vereinfacht werden. Startet der Orbit zudem in der Nähe der v -Achse, so wird die (y, v) -Dynamik für viele Iterationsschritte nur unwesentlich von der Kick-Funktion f beeinflusst, kann daher als freie Teilchenbewegung angenähert werden:

$$y_k \approx y_0 + kv_0 \quad , \quad v_k \approx v_0. \quad (6.5)$$

Es wird sich zeigen, daß diese Näherung verhältnismäßig grob ist, für die folgende Abschätzung jedoch vollkommen ausreicht. Es ist also zu erwarten, daß sich der Orbit für n Iterationen an der (x, u) -Dynamik orientiert, wobei sich n wie folgt abschätzen läßt:

$$|y_n| \approx |y_0 + nv_0| \approx \frac{x_{min}}{\beta}. \quad (6.6)$$

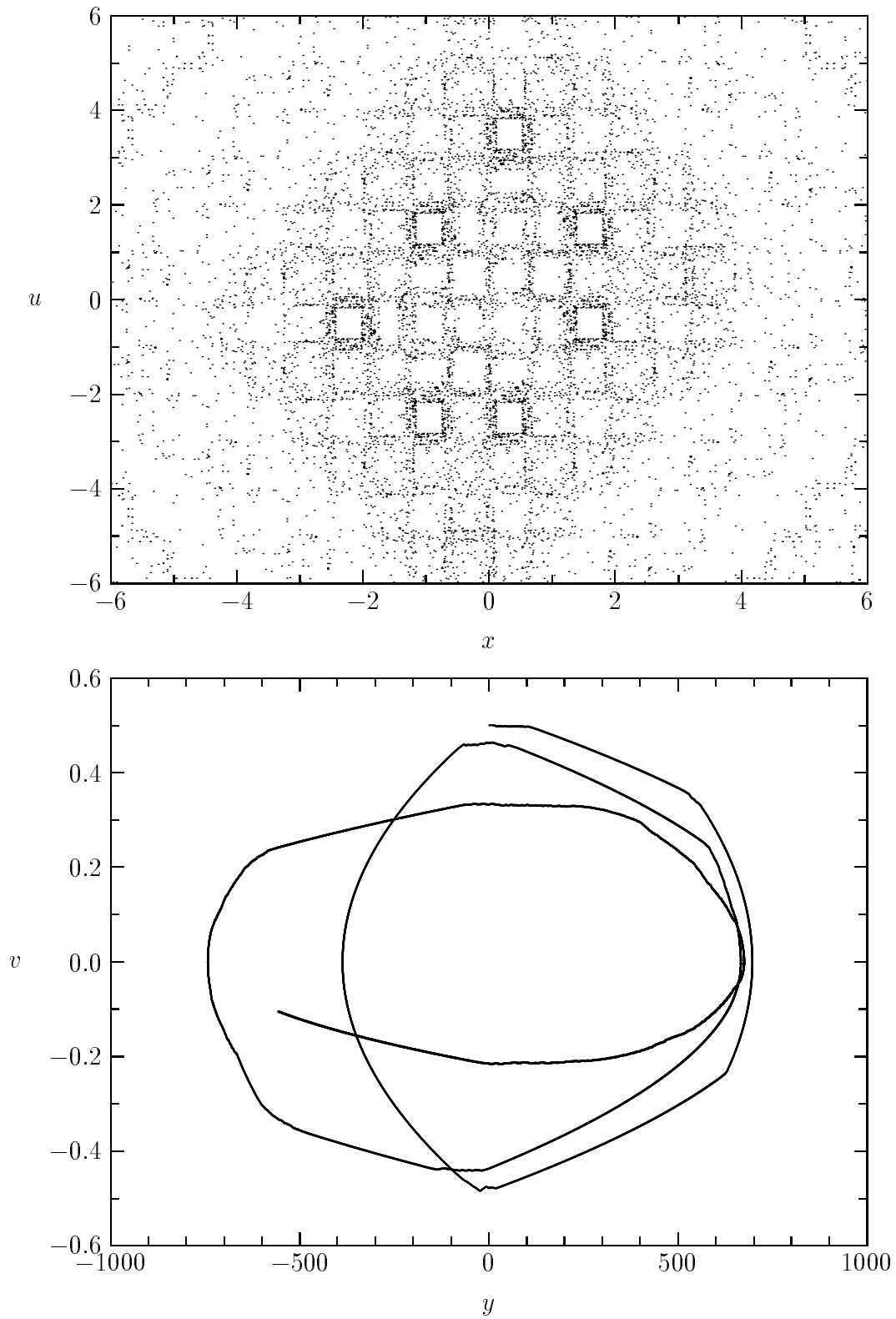


Abbildung 6.1: Orbit für $q = 4, b = 0.1$ und $\beta = 0.001$. Startpunkt $x_0 = 0, u_0 = 0.1, y_0 = 0, v_0 = 0.5$. 30000 Iterationen.

Setzt man zusätzlich voraus, daß y_0 und v_0 dasselbe Vorzeichen haben, so gilt:

$$n \approx \frac{x_{\min} - \beta|y_0|}{\beta|v_0|}. \quad (6.7)$$

Abbildung 6.2 zeigt einen Orbit, der in der (x, u) -Dynamik periodisch ist. Zur Verdeutlichung, daß dieser Orbit in der vierdimensionalen Dynamik selber nicht periodisch ist, wurde dieses Mal der triviale (y, v) -Anteil mitgezeichnet. Für diesen Orbit ergibt sich

$$x_{\min} \approx 0.192958 \quad \Rightarrow \quad n \approx 385. \quad (6.8)$$

In Abbildung 6.3 ist der Orbit mit denselben Anfangswerten für kleines $\beta \neq 0$ dargestellt. Nach 385 Iterationen erkennt man bereits einige deutliche Abweichungen von Abbildung 6.2. Die Abschätzung in (6.8) war also ein wenig zu groß, ist aber von der Größenordnung her richtig. Ein Fehler in der Abschätzung war, daß $\beta|y_k| < x_{\min}$ wirklich die oberste Grenze für eine Störung darstellt, tatsächlich wird der Orbit bereits für kleinere $|y_k|$ gestört und aus der Bahn geworfen. Ferner erkennt man in Abbildung 6.3 einen leichten Anstieg in v -Richtung. Dies liegt daran, daß der gewählte Orbit nicht um die u -Achse gleichverteilt ist: 28 Punkte des periodischen Orbits haben positive x -Werte und 32 Punkte negative x -Werte. Abschätzung (6.5) ließe sich also dadurch verbessern, diese Verteilung mit in Betracht zu ziehen.

Festgehalten werden soll zunächst, daß jeder in der (x, u) -Dynamik periodische Orbit bereits für kleine von null verschiedene β -Werte nach wenigen Hundert Iterationen zerstört wird.

Betracht man hingegen einen in der (x, u) -Dynamik chaotischen Orbit, so sind die obigen Überlegungen nicht mehr anwendbar, da $x_{\min}$ im allgemeinen gegen null geht. Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 4.1 liegt ein chaotischer Orbit in der Menge Ω^∞ , und der Bereich Λ^0 um die u -Achse herum ist Bestandteil der Menge Ω^∞ . Kommt ein chaotischer Orbit in den Bereich Λ^0 , das heißt in den Bereich mit kleinen x -Werten, so wird er anfällig für Störungen durch die (y, v) -Dynamik, kann die Menge Ω^∞ dadurch jedoch nicht verlassen. Damit der chaotische Orbit die Menge Ω^∞ verlassen kann, muß er außerhalb des Bereiches Λ_0 liegen, also einen x -Wert größer b besitzen. Berücksichtigt man weiter, daß sich ein chaotischer Orbit über die gesamte (x, u) -Ebene erstreckt, also nur verhältnismäßig selten in die Nähe des Ursprungs gelangt, so ist klar, daß die Struktur eines chaotischen Orbits für kleine β wesentlich "stabiler" ist, als die eines periodischen Orbits, wie bereits an Abbildung 6.1 zu sehen war.

Dieses Verhalten für kleine β -Werte macht es schwierig, im vierdimensionalen System periodische Orbits zu finden. Da alle (x, u) -periodischen Orbits bereits nach wenigen Iterationen zerstört werden, war es nicht möglich, außerhalb der Menge Ω^∞ einen stabilen periodischen Orbit zu finden. Innerhalb der Menge Ω^∞ hingegen scheint es keine Stabilitätsinseln zu geben. Man kann also nicht erwarten, im vierdimensionalen System für kleine β -Werte einen stabilen periodischen Orbit zu finden.

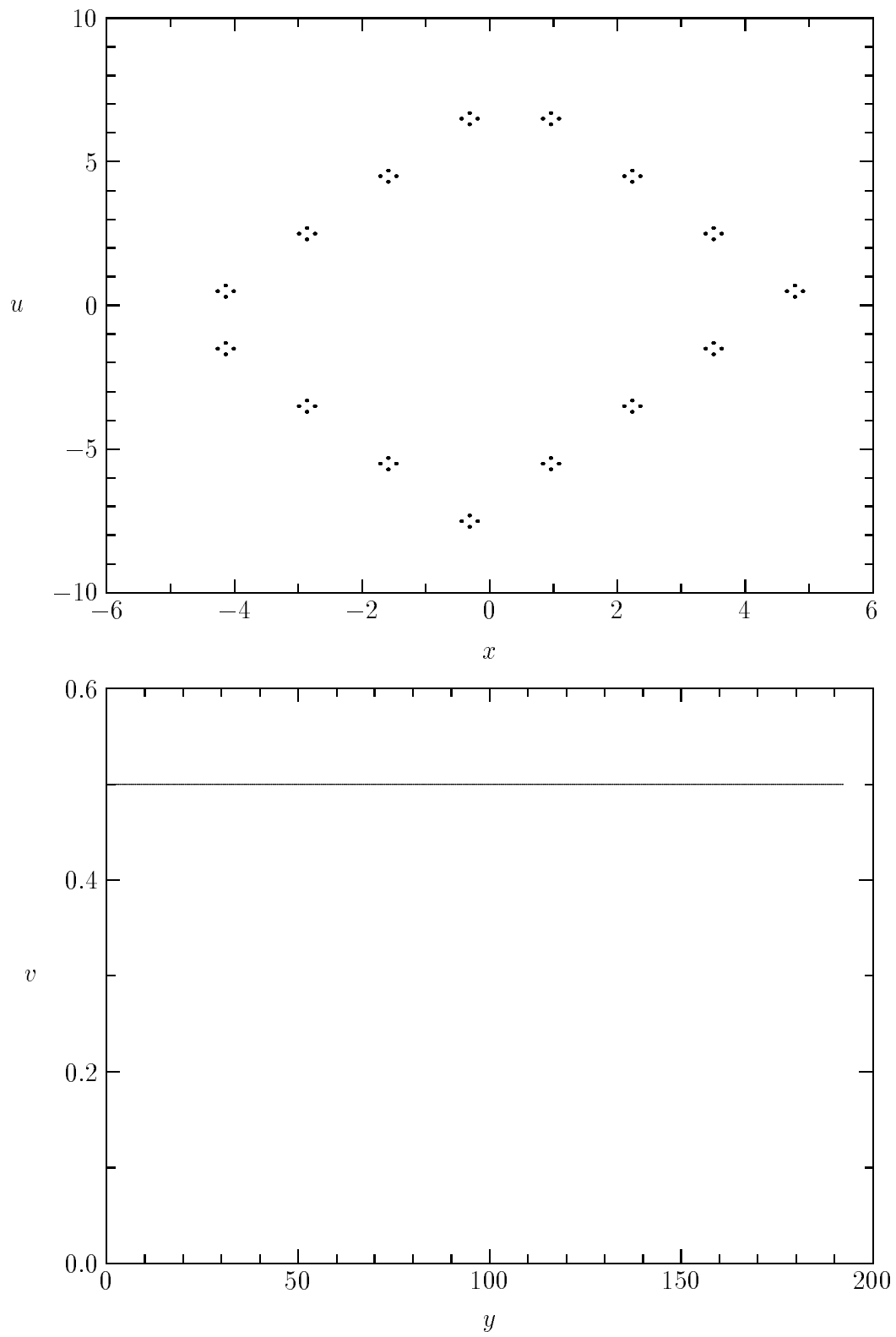


Abbildung 6.2: (x, u) -periodischer Orbit für $q = 4, b = 0.1$ und $\beta = 0$. Startpunkt $x_0 = 4.9, u_0 = 0.5, y_0 = 0, v_0 = 0.5$. 385 Iterationen.

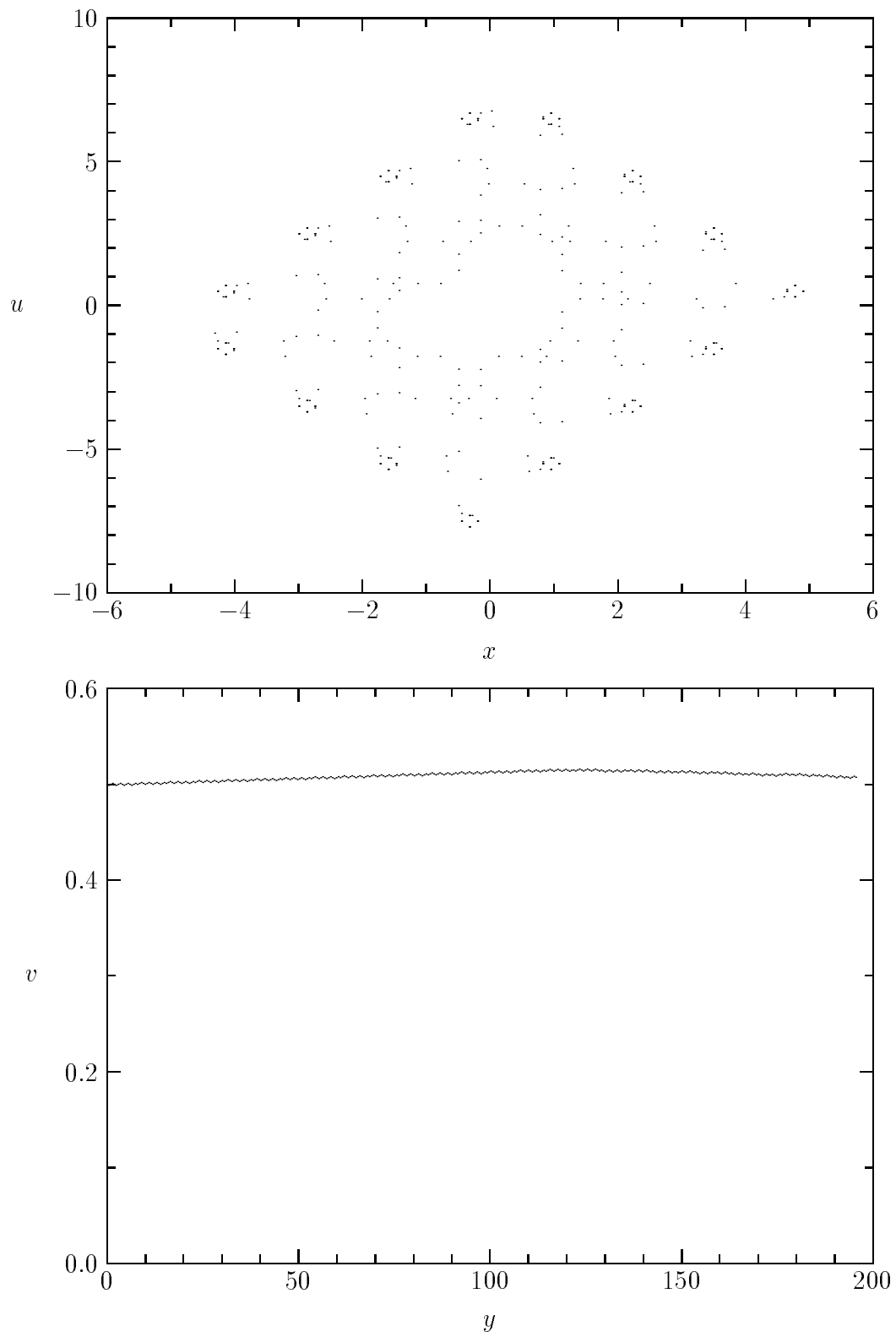


Abbildung 6.3: Gestörter (x, u) -periodischer Orbit: wie Abbildung 6.2, jedoch $\beta = 0.001$.

Für β -Werte nahe bei $\frac{\pi}{2}$ zeigt sich ein anderes Verhalten. Abbildung 6.4 zeigt einen in der (y, v) -Ebene quasiperiodischen Orbit für $\beta = \pi/2$, der in der (x, u) -Ebene 4-periodisch ist. Abbildung 6.5 zeigt denselben Orbit für $\beta = \pi/2 - 0.1$. Sieht man von dem Verhalten in der (x, u) -Ebene ab, so wurde der Orbit von der relativ großen Störung nur geringfügig beeinflusst.

Zunächst einmal ist anzumerken, daß in Abbildung 6.4 ein Orbit um einen elliptischen periodischen Orbit gewählt wurde. Dieser elliptische periodische Orbit ist, im Gegensatz zu dem Fall $\beta = 0$, auch in der vierdimensionalen Abbildung periodisch, die (x, u) -Dynamik ist ja für $\beta = \pi/2$ nichts weiter, als eine Drehung um den Winkel $\alpha = 2\pi/q$. Aus diesem Grunde bleibt die (x, u) -Dynamik beschränkt, das heißt, ein Orbit kann nicht beliebig große x -Werte annehmen. Sofern der Orbit in der (x, u) -Ebene nicht zu weit vom Ursprung entfernt gestartet wird, kann die (x, u) -Dynamik für β -Werte nahe bei $\pi/2$ nur unwesentlich auf die (y, v) -Dynamik einwirken. Die (x, u) -Dynamik wird dagegen bereits für kleine Abweichungen von $\pi/2$ empfindlich gestört. Man kann sich anschaulich klar machen, daß sich der Einfluß der (y, v) -Dynamik im Mittel gerade aufhebt und die x -Werte weiterhin beschränkt bleiben.

Ähnlich wie für $\beta = 0$ kann man auch in diesem Fall abschätzen, wie weit ein Orbit in der (x, u) -Ebene vom Ursprung entfernt sein darf, um die (y, v) -Dynamik nicht entscheidend zu beeinflussen. Die (y, v) -Dynamik wird entscheidend gestört werden, wenn

$$|x_k| \cos \beta > y_{min} \quad (6.9)$$

gilt, wobei y_{min} der minimale Abstand des ungestörten Orbits in y -Richtung an die Grenze $y = b$ bzw. $y = -b$ bedeuten soll; also:

$$y_{min} = \min \left\{ \min_{k \in \mathbb{Z}} |y_k - b|, \min_{k \in \mathbb{Z}} |y_k + b| \right\}. \quad (6.10)$$

Für β -Werte in der Nähe von $\pi/2$ gilt in erster Näherung $\cos \beta = \pi/2 - \beta$, und es kann davon ausgegangen werden, daß gilt:

$$|x_k| < \sqrt{x_0^2 + \frac{u_0^2}{\alpha^2}} + \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (6.11)$$

für vernachlässigbar kleines ε , da $M_{\alpha, f}^{(x)}$ in erster Näherung eine "elliptische" Drehung ist. Es ist zu beachten, daß hier nicht die skalierte Version der Abbildung benutzt wird, also $M_{\alpha, f}^{(x)}$ nicht eine einfache Drehung ist. Man kann also erwarten, daß alle Orbits mit

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{u_0^2}{\alpha^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) < y_{min}, \quad (6.12)$$

die nahe bei einem elliptischen (y, v) -periodischen Punkt liegen, stabil bleiben.

Für den oben gewählten Orbit ergibt sich numerisch $y_{min} \approx 2.1$. Abbildung 6.6 zeigt einen Orbit mit $\sqrt{x_0^2 + u_0^2/\alpha^2} = 2$. Man erkennt, daß der Orbit bereits merklich gestört ist. Die obige Abschätzung liefert daher wiederum nur qualitativ richtige Ergebnisse.

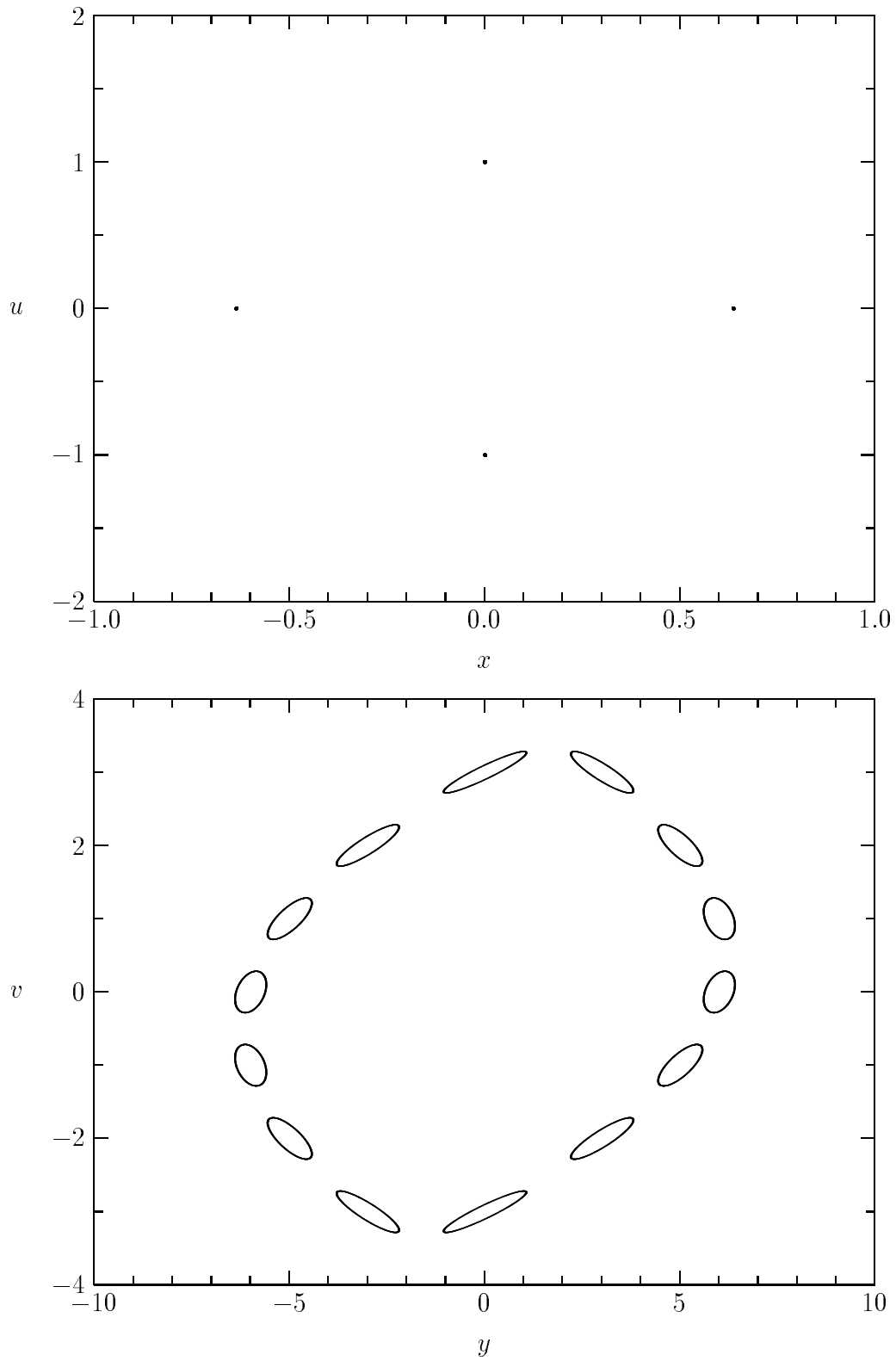


Abbildung 6.4: (y, v) -quasiperiodischer Orbit für $q = 4$, $b = 2$ und $\beta = \frac{\pi}{2}$. Startpunkt $x_0 = 0$, $u_0 = 1$, $y_0 = 0$, $v_0 = 3.1$. 5000 Iterationen.

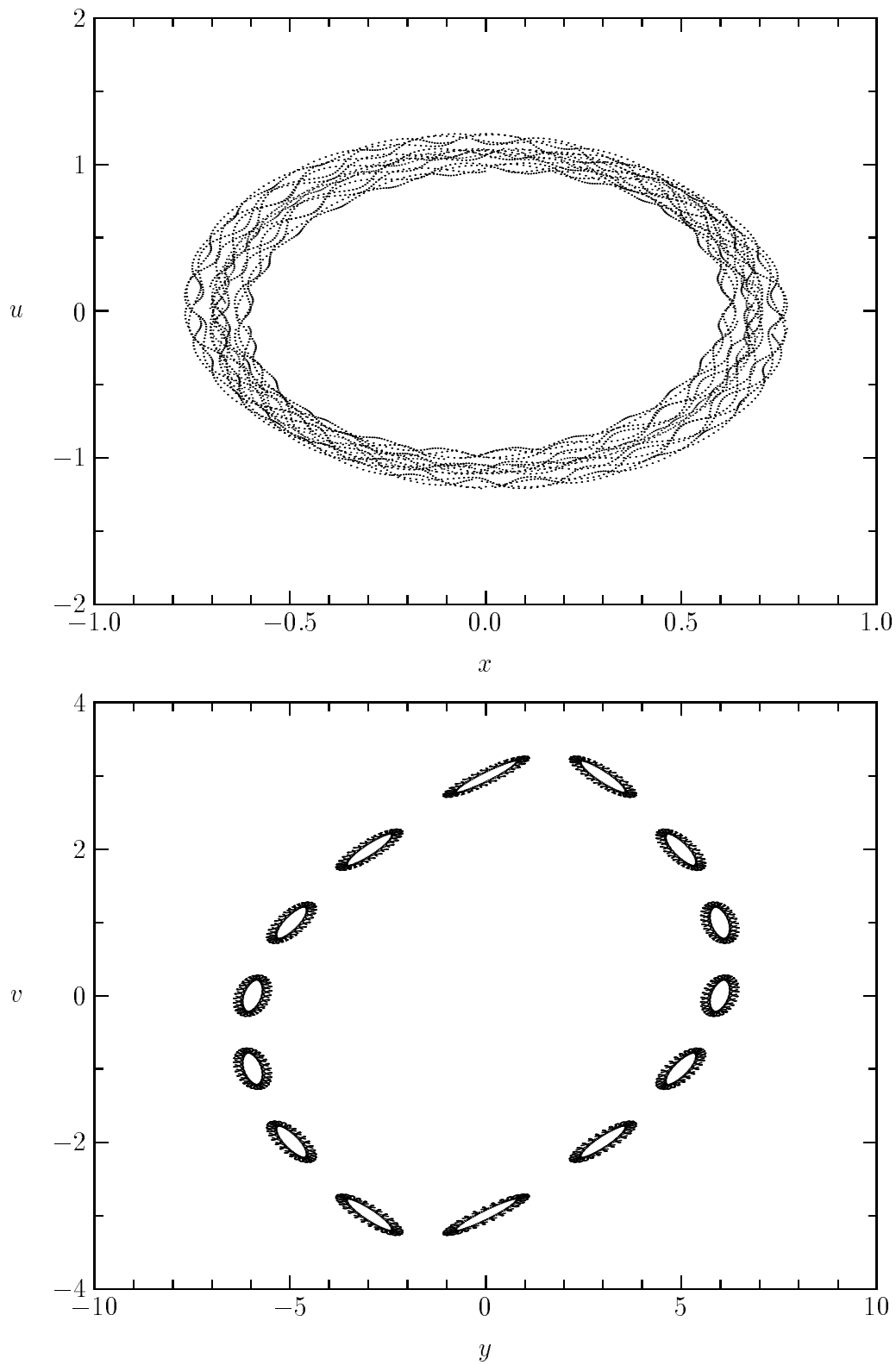


Abbildung 6.5: Gestörter (y, v) -quasiperiodischer Orbit: wie Abbildung 6.4, jedoch $\beta = \frac{\pi}{2} - 0.1$ und 10000 Iterationen.

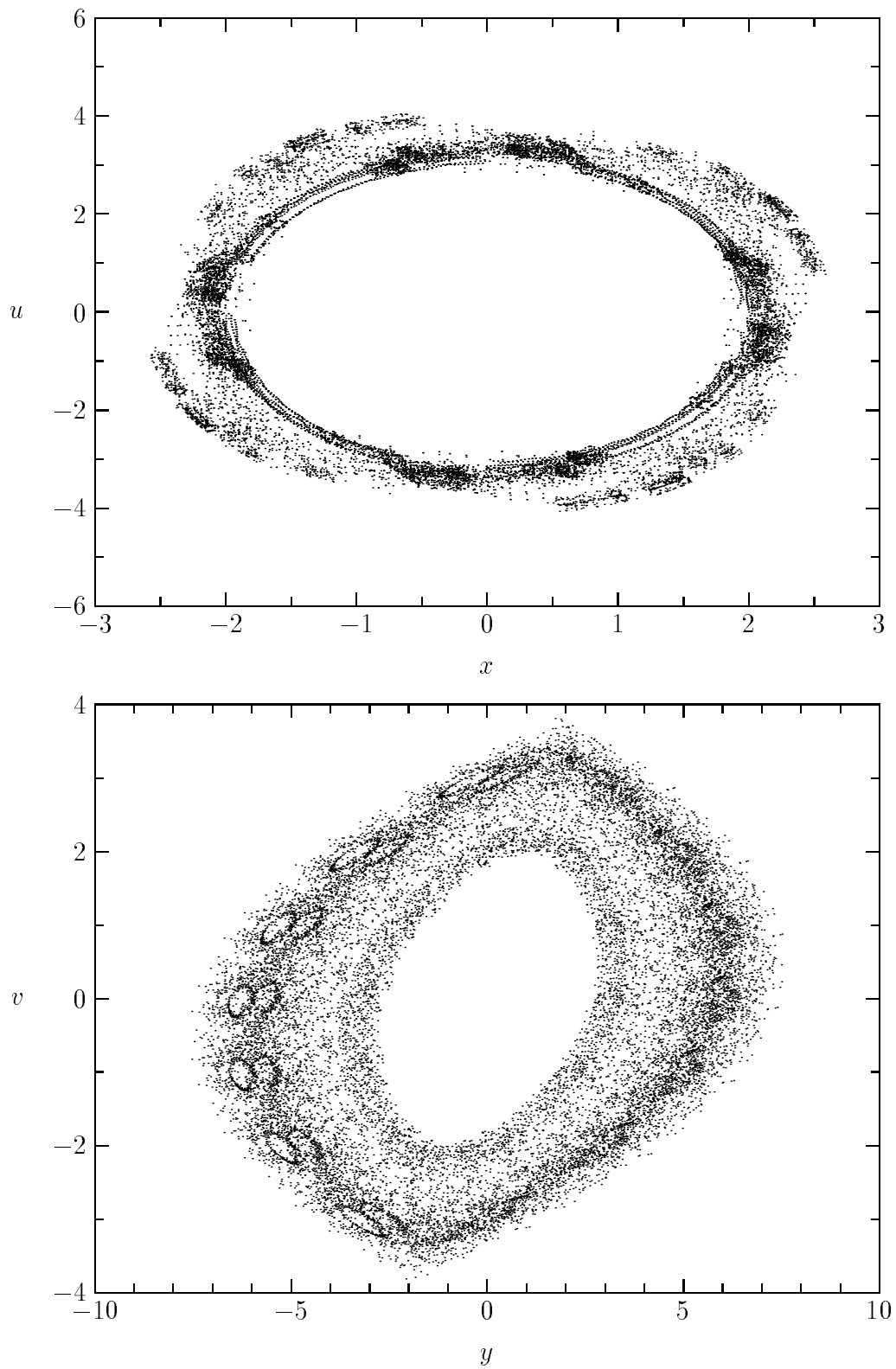


Abbildung 6.6: Gestörter (y, v) -quasiperiodischer Orbit für $q = 4$, $b = 2$ und $\beta = \frac{\pi}{2} - 0.1$. Startpunkt $x_0 = 3$, $u_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_0 = 3.1$. 20000 Iterationen.

Als nächstes kann untersucht werden, wie sich das System bei $\beta = \pi/4$ verhält. In diesem Fall ist $\cos \beta = \sin \beta = 1/\sqrt{2}$, folglich leisten $M_{\alpha,\beta,f}^{(x)}$ und $M_{\alpha,\beta,f}^{(y)}$ den gleichen Beitrag zur Kick-Funktion und werden auch in der gleichen Größenordnung von ihr beeinflusst. In Kapitel 4 hat sich gezeigt, daß die (x, u) -Dynamik $M_{\alpha,\beta,f}^{(x)}$ für kleine b -Werte ein Stochastisches Netz erzeugt, für große b -Werte hingegen nicht. Die (y, v) -Dynamik $M_{\alpha,\beta,f}^{(y)}$ ist für kleine b -Werte hingegen chaotisch und enthält nur für größere b -Werte stabile Bereiche. Es ist daher schwierig, einen b -Wert zu wählen, der klein genug ist, um in der (x, u) -Ebene die Struktur eines Netzes zu erhalten, jedoch so groß, daß die Dynamik in der (y, v) -Ebene nicht bereits von sich aus chaotisch ist.

Die Abbildung 6.7 zeigt einen Orbit mit Parameterwerten, die unter Berücksichtigung der Skalierung sinnvoll erscheinen. In der (x, u) -Ebene scheint es einige Lücken zu geben, diese werden bei weiterer Iteration jedoch ebenfalls dicht ausgefüllt. Ansonsten ist keine übergeordnete Struktur erkennbar. Ähnliche Bilder ergeben sich auch für andere Parameterwerte die unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse günstig erscheinen.

Berechnet man die Eigenwerte der vierdimensionalen Jacobi-Matrix des zentralen Fixpunktes für $q = 4$ und $\beta = \pi/4$, so erkennt man, daß der Fixpunkt in Abhängigkeit von b entweder rein elliptisch oder rein hyperbolisch ist. Das heißt, die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten sind entweder nicht vorhanden oder zweidimensional. Damit in der (x, u) -Ebene ein Stochastisches Netz erzeugt wird, ist es aber gerade nötig, daß der zentrale Fixpunkt hyperbolisch ist. Um zugleich in der (y, v) -Ebene Stabilität zu erhalten, müßte der Fixpunkt hingegen elliptisch sein. Dieses ist im Fall $\beta = \pi/4$ nicht miteinander vereinbar.

6.2 Periodische Kick-Funktion

Wie in den Abschnitten 4.2 und 5.2 sollen auch hier sämtliche Beispiele anhand der in (1.33) angegebenen Kick-Funktion f_{P1} vorgeführt werden. Die mit dieser Kick-Funktion definierte vierdimensionale Abbildung $M_{\alpha,\beta,f}$ wurde in leicht abgewandelter Form erstmalig von Zaslavsky und Mitarbeitern zur Untersuchung ihres besonderen diffusiven Verhaltens eingeführt [1, 2]. Im Rahmen dieser Arbeit soll allein die Dynamik von $M_{\alpha,\beta,f}$ kurz vorgestellt werden und keinerlei Betrachtungen in Bezug auf die Diffusion angestellt werden.

Zunächst jedoch einige Überlegungen, die für beliebige periodische Kick-Funktionen f gültig sind. Der Einfachheit halber kann auch im Vierdimensionalen angenommen werden, daß f die Periode 1 hat, was durch die übliche Umskalierung des Phasenraumes immer erreicht werden kann. Wie man schnell nachrechnet, sind die Abbildungen

$$L_n^{(y)} : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ u \\ y + \frac{n}{\sin \beta} \\ v \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ und $\beta > 0$ Symmetrien von $M_{\alpha,\beta,f}$. Damit kann der Phasenraum,

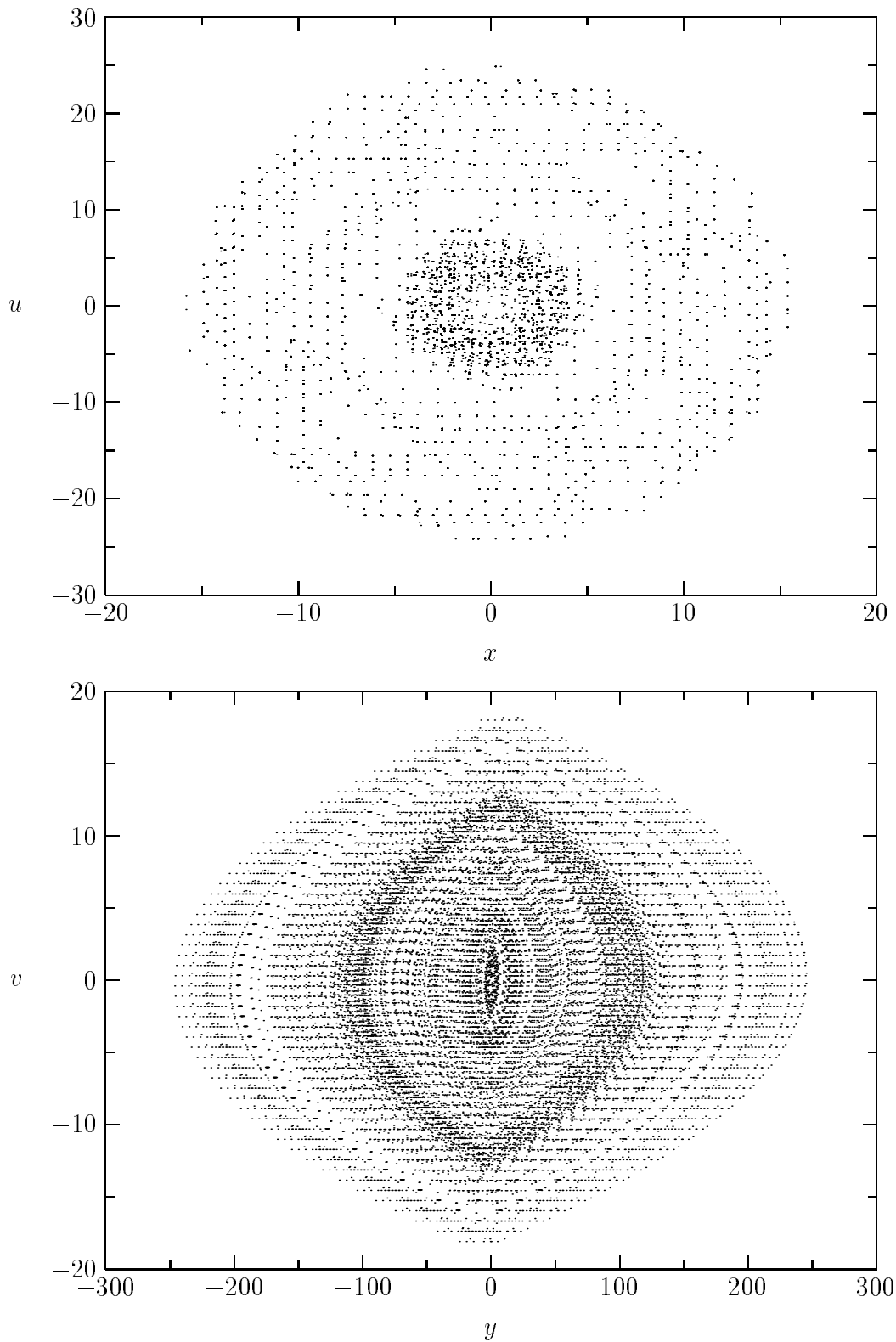


Abbildung 6.7: Orbit für $q = 4$, $b = 0.4$ und $\beta = \pi/4$. Startpunkt $x_0 = 0$, $u_0 = 1$, $y_0 = 0$, $v_0 = 1$. 20000 Iterationen

nach entsprechender Symmetriereduktion (siehe Anhang A.6), auf den Zylinder $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-1/2 \sin \beta, 1/2 \sin \beta] \times \mathbb{R}$ eingeschränkt werden.

Ähnlich wie in Abschnitt 5.2 sind mit dieser Einschränkung auch die Abbildungen

$$L_m^{(v)} : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v + \frac{m}{\sin \beta} \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ und $\beta > 0$ Symmetrien von $M_{\alpha,\beta,f}$, da die y -Achse bereits auf das Intervall $[-1/2 \sin \beta, 1/2 \sin \beta]$ reduziert wurde. Interessiert man sich allein für die Dynamik (ohne Diffusion) des Systems kann man die Abbildung $M_{\alpha,\beta,f}$ also ohne weiteres auf $\mathbb{R}^2 \times [-1/2 \sin \beta, 1/2 \sin \beta]^2$ einschränken.

Im folgenden sei $q = 4$ festgelegt. Es ist prinzipiell möglich, die nachfolgenden Rechnungen in ähnlicher Form auch für die Fälle $q = 3$ und $q = 6$ durchzuführen. Ziel der folgenden Überlegungen ist es, auch für die (x, u) -Dynamik zwei Translationssymmetrien herzuleiten und damit ganz analog zu Abschnitt 4.2 die Dynamik auf eine Elementarzelle einzuschränken.

Die Vorgehensweise entspricht der aus Abschnitt 4.2: $M_{\alpha,\beta,f}$ setzt sich zusammen aus einem Fluß Φ_α und einer Kick-Abbildung $\Psi_{\beta,f}$:

$$M_{\alpha,\beta,f} = \Phi_\alpha \circ \Psi_{\beta,f}. \quad (6.15)$$

Der Deutlichkeit halber sind an die einzelnen Abbildungen die Abhängigkeiten von den Parametern mit aufgeführt. Folglich kann die q -te Iterierte von $M_{\alpha,\beta,f}$ in der folgenden Form geschrieben werden:

$$M_{\alpha,\beta,f}^q = (\Phi_\alpha \circ \Psi_{\beta,f})^q = \Phi_\alpha^q \prod_{k=q-1}^0 \Psi_{\beta,f}^{(k)} \quad (6.16a)$$

mit

$$\Psi_{\beta,f}^{(k)} = \Phi_\alpha^{-k} \circ \Psi_{\beta,f} \circ \Phi_\alpha^k. \quad (6.16b)$$

Hierbei soll das Produkt $\prod$ wiederum eine Abkürzung für die Komposition bedeuten und von links nach rechts geschrieben werden, das heißt $\Psi_{\beta,f}^{(0)} = \Psi_{\beta,f}$ steht am Schluß. Diese Darstellung ist das verallgemeinerte Analogon zu (4.37) aus Abschnitt 4.2, nur mit dem Unterschied, daß Φ_α in diesem Fall keine einfache Drehung mehr ist und damit auch nicht $\Phi_{k\alpha} = \Phi_\alpha^k$ gilt.

Es kann nun genauso wie im Zweidimensionalen argumentiert werden: Eine Abbildung L ist dann eine Symmetrie von $M_{\alpha,\beta,f}^q$, wenn L mit allen $\Psi_{\beta,f}^{(k)}$ sowie mit Φ_α^q kommutiert, daß heißt, wenn

$$\Psi_{\beta,f}^{(k)} \circ L = L \circ \Psi_{\beta,f}^{(k)} \quad , \quad \Phi_\alpha^q \circ L = L \circ \Phi_\alpha^q \quad (6.17)$$

für alle $0 \leq k < q$ gilt.

Es ist leicht mit vollständiger Induktion zu zeigen, daß

$$\Phi_\alpha^k : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \frac{\sin k\alpha}{\alpha} & 0 & 0 \\ -\alpha \sin k\alpha & \cos k\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Für $q = 4$, das heißt $\alpha = \pi/2$, müssen nur die Fälle $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ ausgewertet werden, wenn man sich auf Translationen in der (x, u) -Ebene beschränkt. Man verifiziert, daß die Abbildungen

$$L_{n,m}^{(x,u)} : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \frac{n}{\cos \beta} \\ u + \frac{\alpha m}{\cos \beta} \\ y \\ v \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

für $n, m \in \mathbb{Z}$ und $\beta < \pi/2$ Symmetrien von $M_{\alpha,\beta,f}^4$ sind. Folglich kann man sich wiederum auf in der (x, u) -Ebene auf die Elementarzelle beschränken.

Um einen vollständigen Überblick über die Dynamik von $M_{\alpha,\beta,f}^4$ zu erhalten, genügt es also, die Abbildung auf dem 4-Torus

$$\left[-\frac{1}{2 \cos \beta}, \frac{1}{2 \cos \beta} \right] \times \left[-\frac{\alpha}{2 \cos \beta}, \frac{\alpha}{2 \cos \beta} \right] \times \left[-\frac{1}{2 \sin \beta}, \frac{1}{2 \sin \beta} \right] \times \left[-\frac{1}{2 \sin \beta}, \frac{1}{2 \sin \beta} \right] \quad (6.20)$$

zu betrachten. Zunächst einmal ist es erfreulich, daß sich für die beiden Grenzfälle $\beta = 0$ und $\beta = \pi/2$ bis auf Umskalierung die bereits bekannten Ergebnisse reproduzieren. Jedoch divergieren bei diesem Übergang jeweils zwei Grenzen, so daß der 4-Torus zu einem $T^2 \times \mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^2 \times T^2$ entartet. Dies überrascht zunächst ein wenig, da sich die Dynamik für die Grenzfälle $\beta = 0$ und $\beta = \pi/2$ prinzipiell ebenfalls auf einen 4-Torus einschränken läßt. Nähert man sich jedoch beispielsweise dem Wert $\beta = 0$, so geht die y -Periode der zweidimensionalen Kick-Funktion $F(x, y)$ in Abhängigkeit von β gegen unendlich. Dieser Effekt muß von den Symmetrien natürlich berücksichtigt werden.

Es ist nun sinnvoll, die Abbildung $M_{\alpha,\beta,f}$ so zu skalieren, daß sich als Phasenraum einfach der 4-Torus $[-1/2, 1/2]^4$ ergibt. Im folgenden seien die Koordinaten wie folgt skaliert:

$$x \cos \beta \rightarrow x, \quad \frac{u \cos \beta}{\alpha} \rightarrow u, \quad y \sin \beta \rightarrow y, \quad v \sin \beta \rightarrow v. \quad (6.21)$$

Die sich aus dieser Skalierung ergebende Abbildung werde mit $\check{M}_{\alpha,\beta,f}$ bezeichnet. Es gilt:

$$\check{M}_{\alpha,\beta,f} : \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u + \frac{\cos^2 \beta}{\alpha} f(x + y) \\ y \\ v + \sin^2 \beta f(x + y) \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Es sei angemerkt, daß diese Skalierung allein sinnvoll ist, um eine einfache Darstellung des Phasenraumes zu erhalten. Für Untersuchungen nahe den Grenzfällen $\beta = 0$ und $\beta = \pi/2$, wie sie im vorherigen Abschnitt durchgeführt wurden, ist sie denkbar ungeeignet, da die Skalierung (6.21) dort divergiert. Für $\beta = 0$ muß in (6.22) $y = 0$ und $v = 0$ gesetzt werden, da sonst die Abbildung $\tilde{M}_{\alpha,\beta,f}$ zu falschen Ergebnissen führt. Bei $\beta = \pi/2$ muß entsprechend $x = 0$ und $u = 0$ gesetzt werden.

Da die Abbildung vierdimensional ist, können die Phasenportraits nicht mehr einfach dargestellt werden. Für die Phasenportraits in Abschnitt 4.2 und 5.2 mußten nur eine Reihe von Startpunkten definiert und iteriert werden. Dies führte zu überschaubaren Ergebnissen, da die invarianten Kurven um die elliptischen Fixpunkte herum, den Phasenraum in Bereiche unterteilen zwischen denen ein beliebiger Orbit nicht springen kann. Im höherdimensionalen kann ein Orbit jedoch über die zusätzlichen Freiheitsgrade die invarianten Kurven umlaufen.

Abbildung 6.8 zeigt eine solche invariante Kurve für $\beta = 0$. Da $y = v = 0$ gilt, wurde der (y, v) -Anteil der Dynamik nicht mit abgebildet, es darf jedoch nicht vergessen werden, daß die abgebildete invariante Kurve zu anderen Anfangswerten y und v weder periodisch noch quasiperiodisch ist. Ferner ist zu beachten, daß hier der K -Wert nicht mit dem Parameter K aus Abschnitt 4.2 übereinstimmt, sondern mit einem Vorfaktor $1/\alpha$ umskaliert ist.

Wie in Abbildung 6.9 zu sehen ist, kann man für kleine β -Werte leicht einen stabilen Orbit finden, der die obige invariante Kurve zu $\beta = 0$ quasiperiodisch umläuft. Würde man so vorgehen, wie bei den Phasenportraits in Abschnitt 4.2 und 5.2, so würden sich die Abbildungen schnell mit Punkten füllen, bis von der Stabilität nichts mehr zu erkennen ist.

An Abbildung 6.10 kann man erkennen, wie “flach” der Stabilitätsbereich für $\beta = 0.1$ in v -Richtung ist. Obgleich der Orbit nahe dem Orbit aus Abbildung 6.9 startet, zeigt sich bereits ein qualitativ anderes Verhalten. Zunächst einmal zeigt der Orbit kein reguläres Verhalten, man erkennt jedoch, daß sich der Orbit für viele Iterationsschritte auf einen gewissen Bereich im Phasenraum einschränkt und sich dort annähernd stabil verhält. Dieses Phänomen wird von Zaslavsky als “chaotic jet” bezeichnet [2] und hat entscheidenden Einfluß auf das diffusive Verhalten des Systems. Auf die genaueren Details soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden.

Abbildung 6.11 zeigt ein weiteres mögliches Verhalten der Dynamik. Der Orbit erzeugt in der (x, u) -Ebene eine netzartige Struktur, die jedoch nicht mehr auf einfache Weise wie in Abschnitt 4.2 mit Hilfe von heteroklinen Sattelverbindungen erklärt werden kann. Die äußere Gestalt des Netzes ist auch eine gänzlich andere, als die bisher bekannte. Um die schwache Oszillation des (y, v) -Anteils der Dynamik in v -Richtung zu verdeutlichen, wurde eine Vergrößerung des relevanten v -Bereichs abgebildet.

Ähnliche komplizierte Netzstrukturen können auch für $\beta = \pi/4$ gefunden werden, wie in Abbildung 6.12 zu sehen ist. Auch hier kann die Struktur des Stochastischen Netzes nicht mit der im Zweidimensionalen verglichen werden. Es wurde in v -Richtung ebenfalls eine Ausschnittsvergrößerung gewählt, um die Dynamik

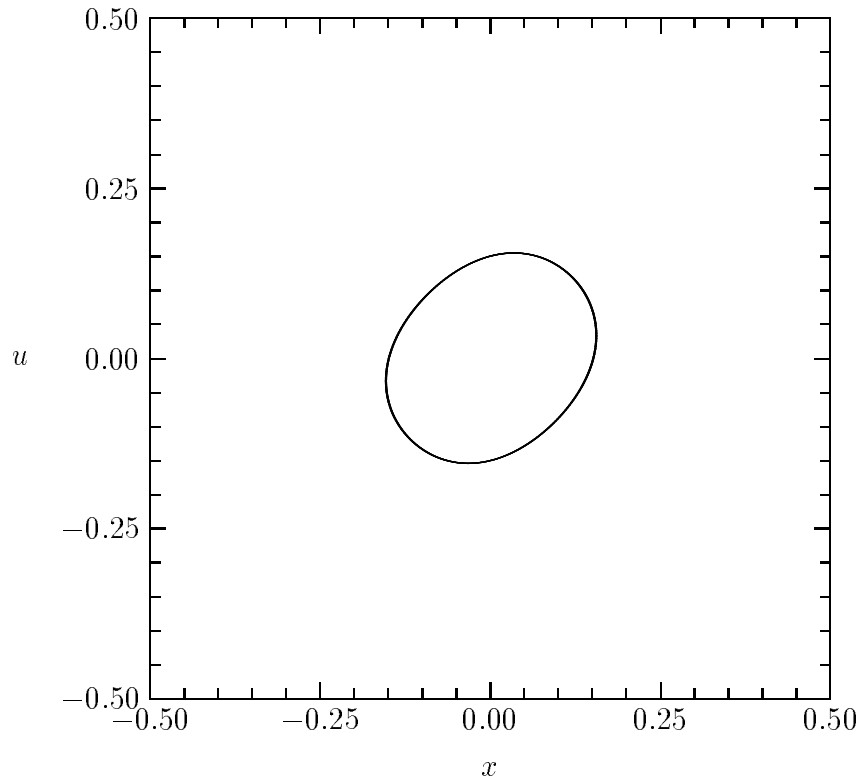


Abbildung 6.8: Stabiler Orbit für $q = 4, K = 0.1273$ und $\beta = 0$. Startpunkt $x_0 = 0, u_0 = 0.15, y_0 = 0, v_0 = 0$. 2000 Iterationen.

in der (y, v) -Ebene besser darstellen zu können. Es ist zu beachten, daß der Parameter K hier verhältnismäßig klein gewählt wurde, für größere K -Werte ist es schwierig, noch netzartige Strukturen zu finden.

Betrachtet man nun die Dynamik in der Nähe des Grenzfalles $\beta = \pi/2$, so zeigt sich ein wesentlich komplizierteres Verhalten. Ähnlich wie in Abbildung 6.9 wurden bei Abbildung 6.13 die Anfangsdaten eines Orbits gewählt, der im Grenzfall $\beta = \pi/2$ eine invariante Kurve ist. Man erkennt, daß der so gewählte Orbit bereits bei kleiner Abweichung von $\beta = \pi/2$ sich in der (y, v) -Ebene chaotisch verhält. Ein Zusammenhang mit der Dynamik der Standardabbildung konnte nicht gefunden werden.

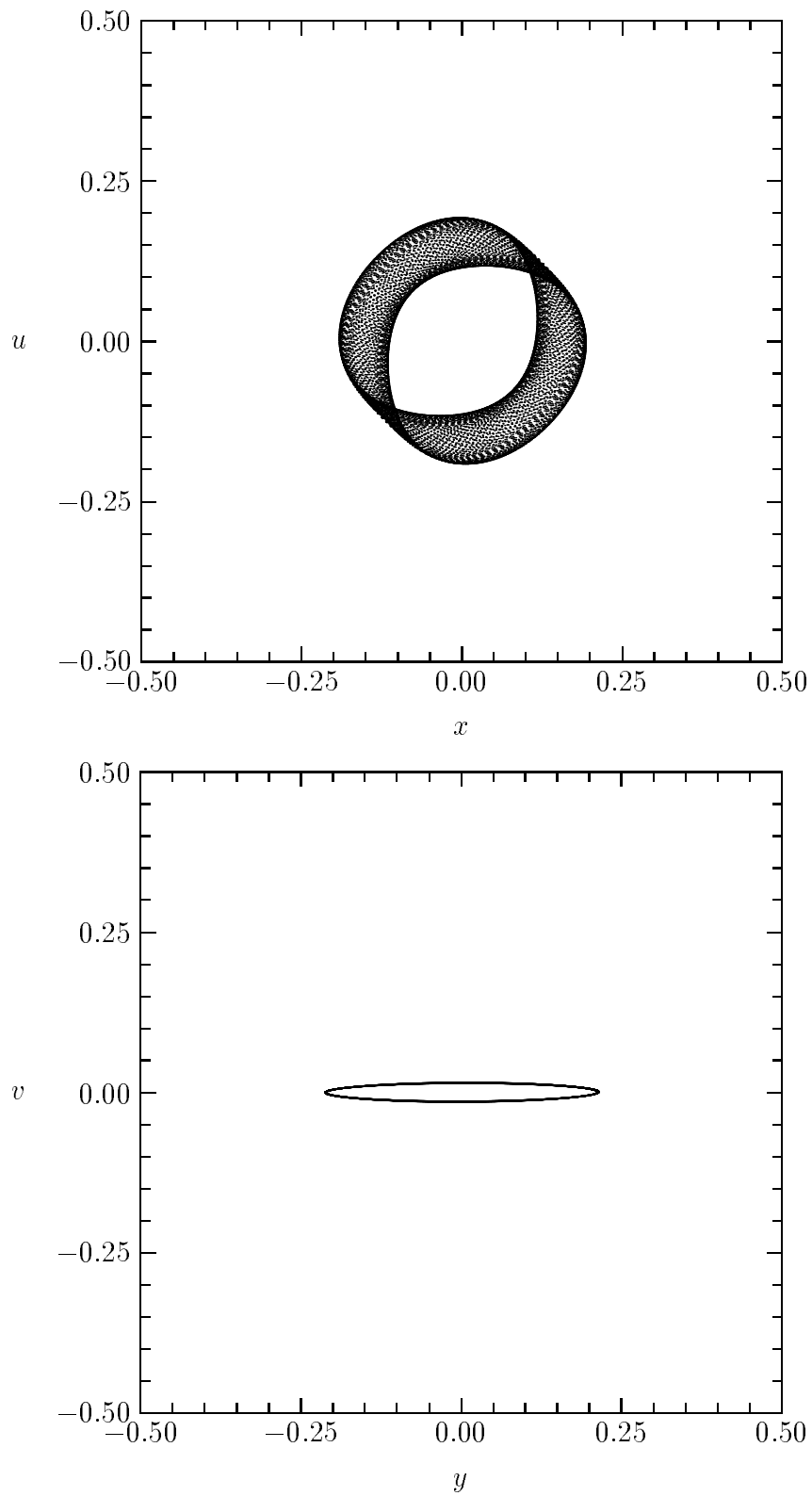


Abbildung 6.9: Gestörter Orbit für $q = 4, K = 0.1273$ und $\beta = 0.1$. Startpunkt $x_0 = 0, u_0 = 0.15, y_0 = 0, v_0 = 0.015$. 20000 Iterationen.

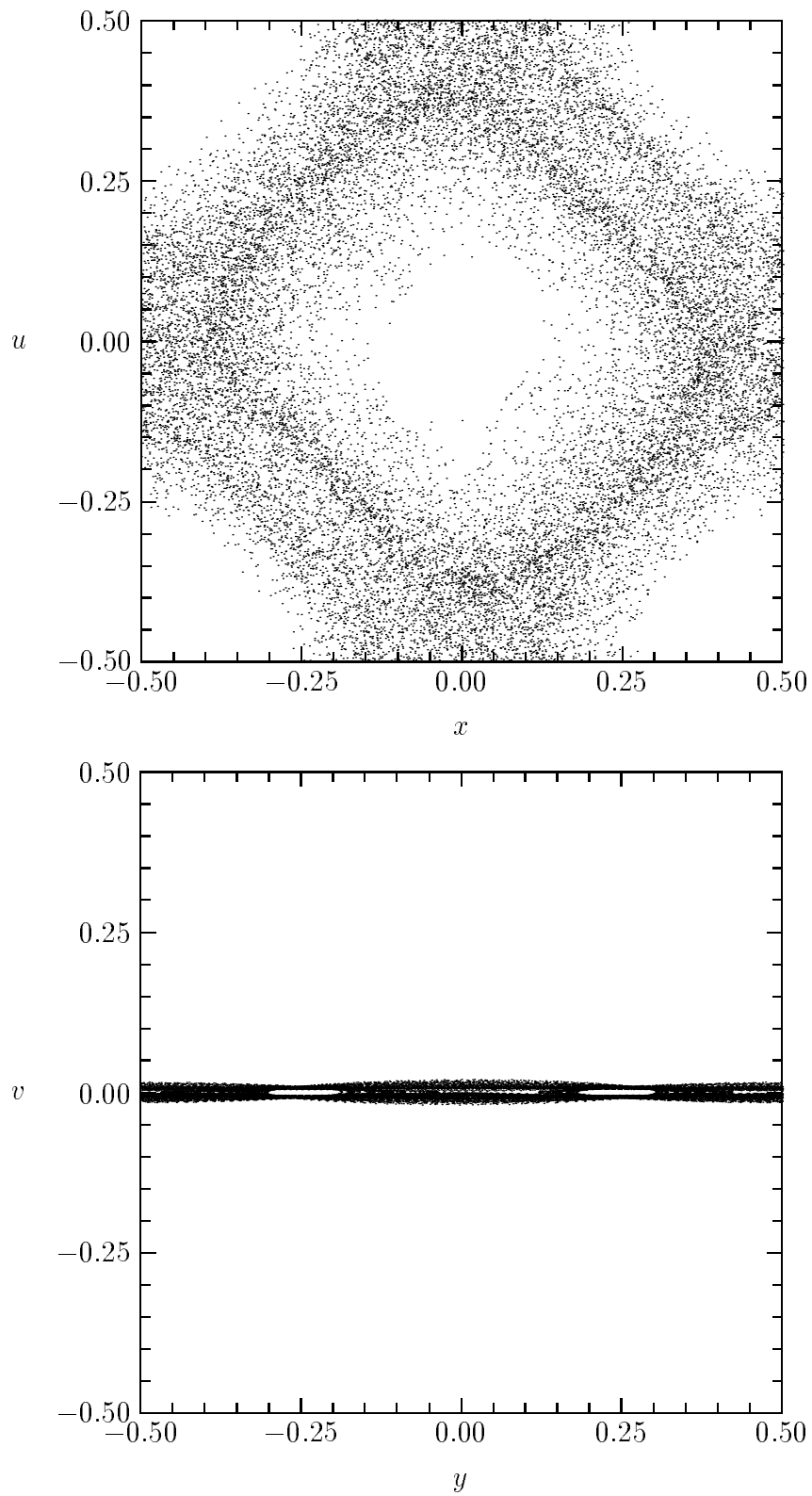


Abbildung 6.10: Gestörter Orbit für $q = 4, K = 0.1273$ und $\beta = 0.1$. Startpunkt $x_0 = 0, u_0 = 0.15, y_0 = 0, v_0 = 0.02$. 20000 Iterationen.

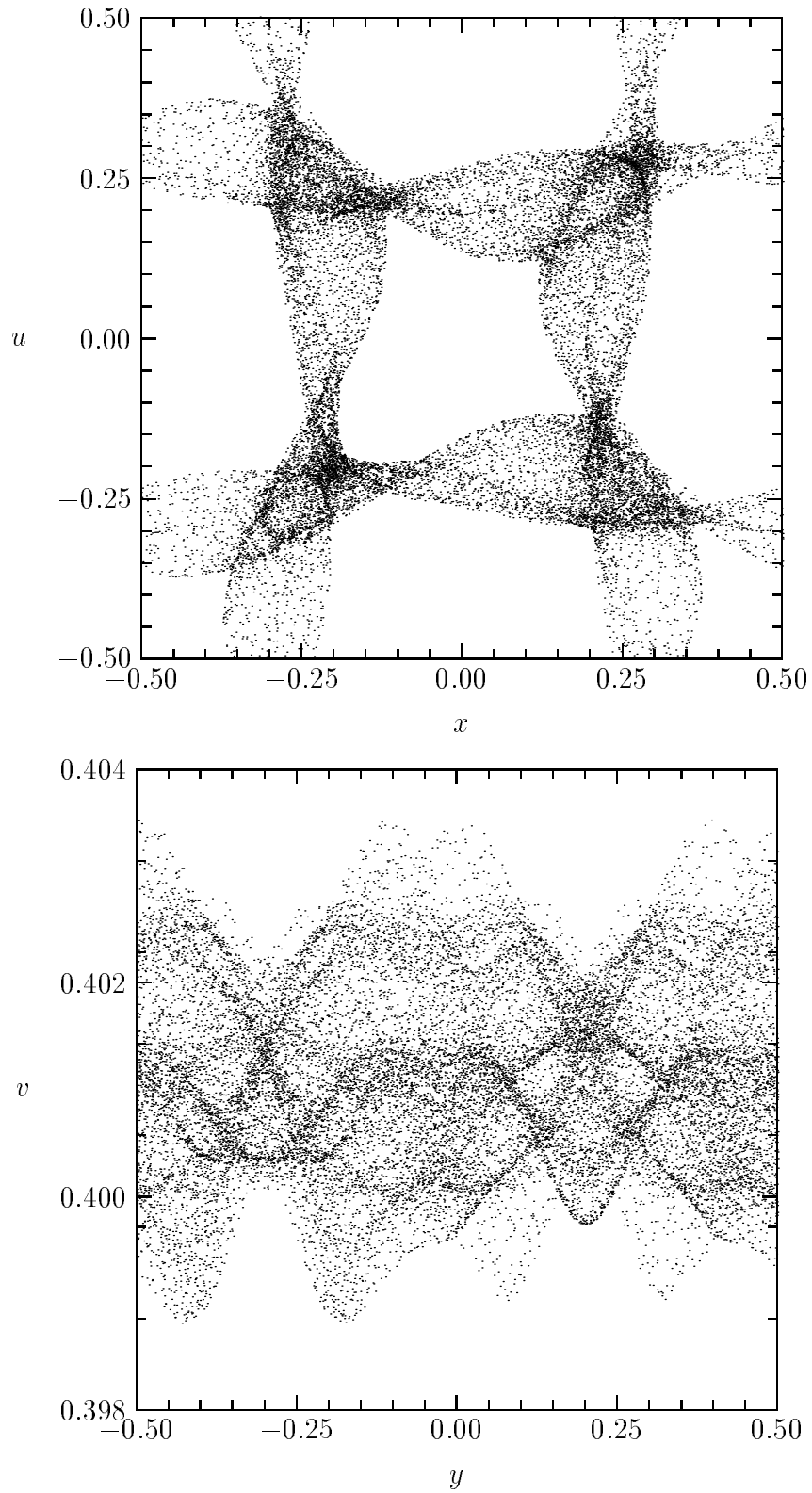


Abbildung 6.11: Gestörter Orbit für $q = 4, K = 0.1273$ und $\beta = 0.1$. Startpunkt $x_0 = 0, u_0 = 0.3, y_0 = 0, v_0 = 0.35$. 20000 Iterationen.

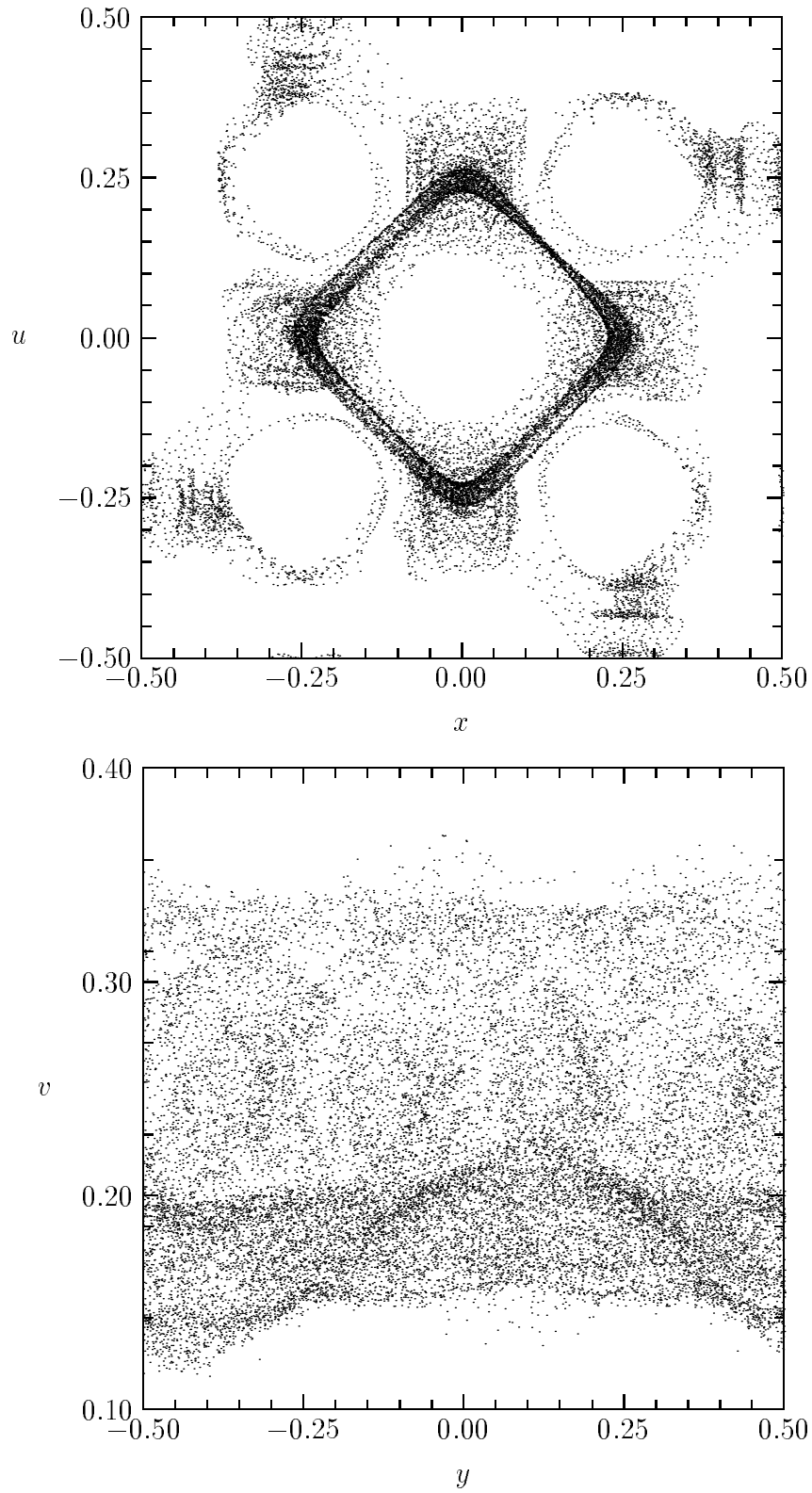


Abbildung 6.12: Orbit für $q = 4, K = 0.0477$ und $\beta = \pi/4$. Startpunkt $x_0 = 0, u_0 = 0.25$ $y_0 = 0, v_0 = 0.2$. 20000 Iterationen.

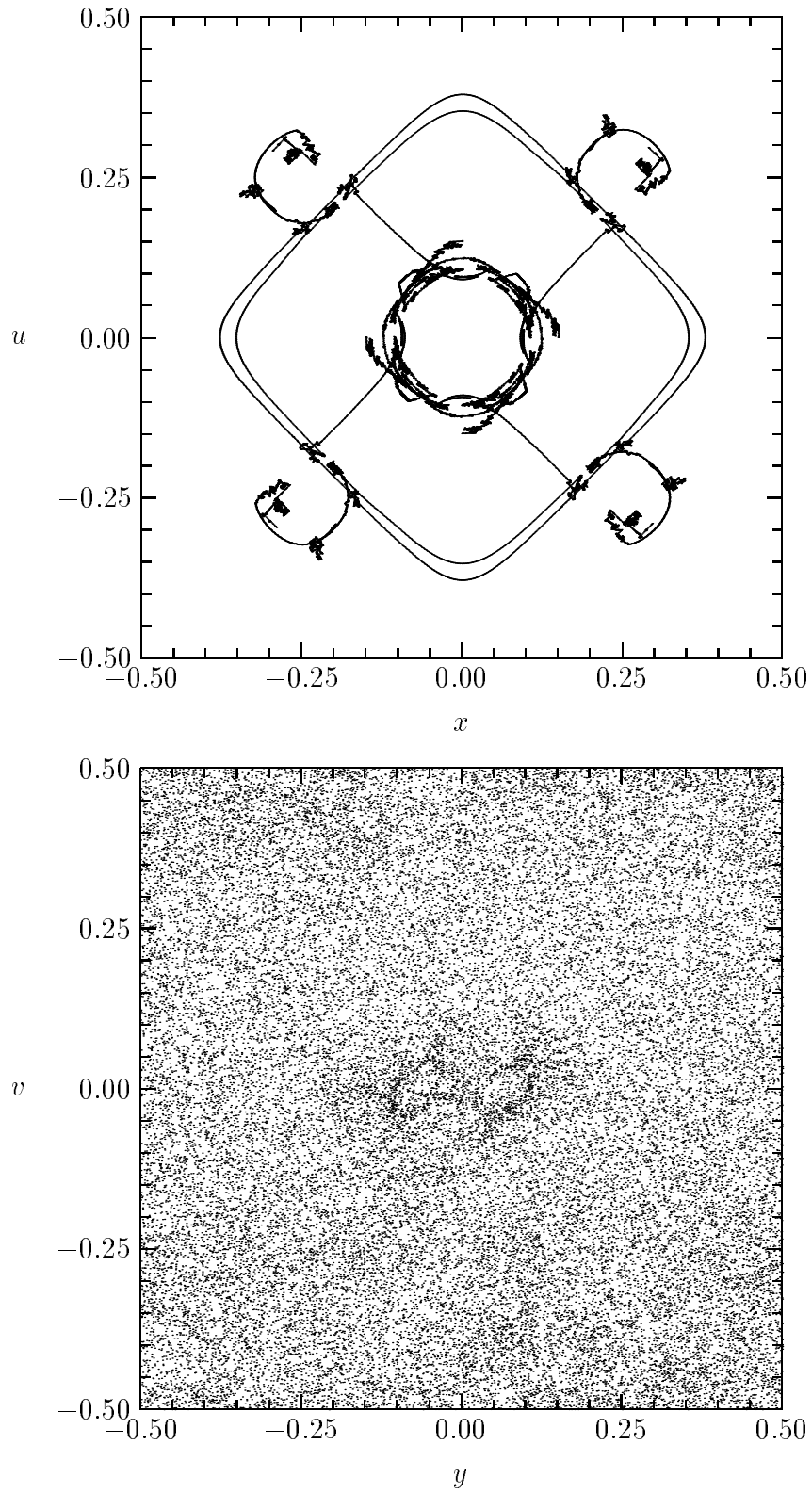


Abbildung 6.13: Gestörter Orbit für $q = 4, K = 0.1273$ und $\beta = \pi/2 - 0.1$. Startpunkt $x_0 = 0, u_0 = 0.15, y_0 = 0, v_0 = 0.2$. 40000 Iterationen.

Schluß

Es ist weit mehr Arbeit, eine Interpretation zu interpretieren als die Dinge selbst; und es gibt weit mehr Bücher über Bücher als über jedes andere Thema.

MICHAEL EYQUEM DE MONTAIGNE

In dieser Arbeit wurde die Dynamik eines geladenen Teilchens in einem speziellen transversalen elektromagnetischen Feld durch eine vierdimensionale Abbildung modelliert. Dieses System wurde von Zaslavsky und Mitarbeitern für eine periodische (sinusförmige) Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes (Kick-Funktion) vorgestellt und diskutiert [1, 2]. In der vorliegenden Arbeit wurde eine aperiodische (signumförmige) Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes zu Grunde gelegt. Trotz gewisser Gemeinsamkeiten zeigten sich in der Dynamik erhebliche Unterschiede.

Im Vordergrund standen die Analyse des Phasenportraits der Abbildung für verschiedene Werte der Parameter α und β sowie b bzw. K . Es wurde keine Untersuchung des diffusiven Energiewachstums durchgeführt, die in derartigen Systemen möglich ist und eine nicht unerhebliche physikalische Bedeutung hat.

In Kapitel 2 konnte bewiesen werden, daß das betrachtete System topologisch konjugiert zu einer einparametrischen Schar von Systemen ist, die formal dieselbe Gestalt haben. Im Grenzfall $\beta = 0$ ist in dieser Schar das von Krug und Schwägerl untersuchte System [7] mit enthalten.

Ins Auge fallen die umfangreichen Ausführungen im Kapitel 4 über den Grenzfall $\beta = 0$. Es konnte gezeigt werden, daß die Abbildung auch für eine aperiodische Kick-Funktion ein Stochastisches Netz erzeugt, dessen Aufbaumechanismus jedoch grundverschieden von dem der Netzabbildung ist. Die komplizierte Struktur der periodischen Punkte im regulären Teil der Dynamik konnte für die kristallsymmetrischen Fälle bis ins letzte Detail erklärt werden, und es wurde eine Methode angegeben, die sich auch auf die verbleibenden quasikristallinen Fälle anwenden läßt. Die Chaotizität auf dem Stochastischen Netz konnte jedoch nur empirisch verifiziert werden. Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß sich in der Diplomarbeit von Hippel über einen dreidimensionalen Oszillator [26] Netzstrukturen mit ganz ähnlichem Aufbaumuster ergaben. Das im vierten Kapitel vorgestellte System läßt sich daher als idealisiertes Modell für derartige Netze auffassen.

Die Untersuchungen des Grenzfalles $\beta = \pi/2$ im fünften Kapitel ergaben, daß die Dynamik für aperiodische Kick-Funktionen kein Birkhoff-Szenario aufweist.

Dennoch konnten die wichtigsten periodischen Punkte gefunden werden und grob gezeigt werden, auf welchen Bereichen des Phasenraumes sich die Dynamik regulär bzw. chaotisch verhält. Aufgrund der komplizierten marginalstabilen Struktur des Phasenportraits konnte auch hier die Chaotizität der Dynamik nur empirisch nachgewiesen werden. Ein direkter Vergleich mit der Dynamik der Standardabbildung scheiterte an dieser Stelle.

Bei den Untersuchungen der vierdimensionalen Abbildung im sechsten Kapitel waren nur vergleichsweise unscharfe Aussagen möglich, fast alle Untersuchungen sind numerischer Natur. Es konnte jedoch plausibel gemacht werden, daß sich die Dynamik für aperiodische Kick-Funktionen als höchst anfällig gegenüber leichten Störungen erweist. So werden die im vierten Kapitel erläuterten Strukturen bereits für kleine Abweichungen von diesem Grenzfall zerstört. Obgleich die periodischen Kick-Funktionen und speziell die sinusförmigen in der gesamten Arbeit eine eher untergeordnete Rolle spielen, konnten einige bekannte Ergebnisse auf den vierdimensionalen Fall übertragen werden. So war es möglich, für eine Iterierte der vierdimensionalen Abbildung Translationssymmetrien zu finden, mit deren Hilfe sich der Phasenraum auf einen 4-Torus einschränken läßt.

Anhang A

Mathematischer Anhang

*Wenn das einzige Werkzeug, das man besitzt,
ein Hammer ist, betrachtet man bald jedes
Problem als einen Nagel.*

ANONYM

A.1 Verallgemeinerte Spiegelungen im n -dimensionalen Raum

Sei im folgenden V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle x, y \rangle$ und $\dim V = n$.

Definition A.1 Sei $H \subset V$ ein Unterraum von V mit $\dim H = m < n$. Dann heiße H eine m -Ebene in V .

Definition A.2 Sei H eine m -Ebene, dann ist das Orthogonalkomplement $H^\perp$ definiert durch

$$H^\perp = \{x \in V; \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in H\}.$$

Da der Vektorraum V euklidisch vorausgesetzt wurde, läßt sich V immer als direkte Summe eines Unterraumes H und dessen Orthogonalkomplement $H^\perp$ schreiben; also:

$$V = H \oplus H^\perp.$$

Eine Spiegelung an einer m -Ebene H wird wie folgt definiert:

Definition A.3 Eine lineare Abbildung φ_H heißt Spiegelung an der m -Ebene H , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $\varphi_H(x) = x \quad \forall x \in H$
- (ii) $\varphi_H(x) = -x \quad \forall x \in H^\perp$
- (iii) $\varphi_H^2 = id$

Es gelten die folgenden Sätze:

Satz A.1 *Es gibt genau eine Spiegelung an der m -Ebene H .*

Satz A.2 *Sei φ_H eine Spiegelung an der m -Ebene H , so gilt $\det \varphi_H = (-1)^{n-m}$.*

Dieser Satz impliziert, daß ein Spiegelung im vierdimensionalen an einer zwei-dimensionalen Ebene die Determinante 1 hat.

A.2 Unstetige Kick-Funktionen

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß sich das fundamentale Lemma 4.1 aus Abschnitt 4.1 mit vergleichbar geringfügigem Aufwand auch für unstetige Kick-Funktionen f beweisen läßt. Das Lemma soll in derselben Gestalt bewiesen werden wie in 4.1, allein mit dem Unterschied, daß f nicht mehr als stetig vorausgesetzt werden soll.

Der Beweis erfolgt mittels Induktion nach i :

IA $i = 0$: Angenommen es gebe $\tilde{t} \in [0, 1]$ mit $f(x_0(\tilde{t})) \neq f(x_0(0))$. Für den Fall $x_0(0) > b$ muß dann $x_0(\tilde{t}) \leq b$ gelten, da f auf dem Bereich $x > b$ den Konstanten Wert c_1 annimmt. Da γ ein stetiger Weg ist, muß es dann aber ein $\hat{t} \in [0, \tilde{t}]$ geben, so daß $|x_0(\hat{t})| = |\gamma(\hat{t}) \cdot \vec{e}_x| \leq b$ ist, also $\gamma(\hat{t}) \notin \mathbb{R}^2 - \Omega^k$, was im Widerspruch zu Voraussetzung steht. Der Fall $x_0(0) < -b$ wird genauso behandelt.

IV: Die Behauptung sei für $0 \leq i \leq k - 2$ bereits bewiesen.

IS $i \rightarrow i + 1$: Nach IV ist $f(x_j(t)) = f(x_j(0))$ für alle $0 \leq j \leq i$, also $\tilde{\gamma} := M^{i+1} \circ \gamma$ ein stetiger Weg. Angenommen es gebe ein $\tilde{t} \in [0, 1]$ mit $f(x_{i+1}(\tilde{t})) \neq f(x_{i+1}(0))$. Für den Fall $x_{i+1}(0) > b$ muß dann $x_{i+1}(\tilde{t}) < b$ gelten (s.o.). Da nach Definition $x_{i+1}(\tilde{t}) = \tilde{\gamma}(\tilde{t}) \cdot \vec{e}_x$ gilt und $\tilde{\gamma}$ stetig ist, muß es dann auch ein $\hat{t} \in [0, \tilde{t}]$ geben, mit $|\tilde{\gamma}(\hat{t}) \cdot \vec{e}_x| \leq b$ dies ist aber gleichbedeutend damit, daß $\gamma(\hat{t}) \notin \mathbb{R}^2 - \Omega^k$ liegt, da $i + 1 \leq k$ vorausgesetzt war. Also erneut ein Widerspruch zur Voraussetzung.

□

Sämtliche Überlegungen, die auf Lemma 4.1 beruhen, das heißt praktisch alle Aussagen über die periodischen Punkte in $\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$, gelten also auch für unstetige Kick-Funktionen f . Die Bedingung, daß die Funktion g ungerade ist und $g(b) = 1$ erfüllt, ist demnach für die Dynamik außerhalb von Ω^∞ ohne Bedeutung.

A.3 Additionstheoreme im regelmäßigen q -Eck

Bei der Betrachtung des Grenzfalles $\beta = 0$ tauchen wiederholt Summen von der Form

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(m - k)\alpha \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(m - k)\alpha$$

auf. Es empfiehlt sich daher, diese Summen allgemein zu bestimmen. Multipliziert man die zweite Summe mit der imaginären Einheit i und addiert beide miteinander, so kommt man unter Zuhilfenahme der Euler-Beziehung zu der Form:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(m-k)\alpha} = e^{im\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-i\alpha})^k.$$

Man beachte, daß bei der Summation der Real- und Imaginärteil nicht miteinander vermischen. Die Summe hat die Gestalt einer endlichen geometrischen Reihe, für die es eine allgemeine Entwicklung gibt. Es gilt für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Im folgenden soll davon ausgegangen werden, daß $\alpha = 2\pi/q$ mit $q \neq 1$ gilt, das heißt es gilt unter anderem $e^{-i\alpha} \neq 1$. Also hat man

$$\begin{aligned} e^{im\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ik\alpha} &= e^{im\alpha} \frac{e^{-in\alpha} - 1}{e^{-i\alpha} - 1} = \frac{(e^{i(m-n)\alpha} - e^{im\alpha})(e^{i\alpha} - 1)}{(e^{-i\alpha} - 1)(e^{i\alpha} - 1)} \\ &= \frac{e^{i(m-n+1)\alpha} - e^{i(m+1)\alpha} - e^{i(m-n)\alpha} + e^{im\alpha}}{2(1 - \cos \alpha)}. \end{aligned}$$

Spaltet man dieses Ergebnis nach Real- und Imaginärteil auf, so erhält man die gesuchten Ausdrücke für die oben genannten Summen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(m-k)\alpha &= \frac{\cos(m-n+1)\alpha - \cos(m+1)\alpha - \cos(m-n)\alpha + \cos m\alpha}{2(1 - \cos \alpha)} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \sin(m-k)\alpha &= \frac{\sin(m-n+1)\alpha - \sin(m+1)\alpha - \sin(m-n)\alpha + \sin m\alpha}{2(1 - \cos \alpha)}. \end{aligned}$$

Für den Fall $\alpha = 2\pi/q$ und $m = n = q$ gilt dann nach Einsetzen in diesen beiden Formeln:

$$\sum_{k=0}^{q-1} \cos(q-k)\alpha = \sum_{k=0}^{q-1} \sin(q-k)\alpha = 0 \quad (\text{A.1})$$

Ist q gerade und $m = n = q/2$, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{q/2-1} \cos(q/2-k)\alpha = -1 \quad , \quad \sum_{k=0}^{q/2-1} \sin(q/2-k)\alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \cot \frac{\alpha}{2}. \quad (\text{A.2})$$

Mit der hier vorgestellten Methode lassen sich auch die folgenden beiden Relationen beweisen:

$$\sum_{k=0}^{q-1} \cos\left(\frac{2\pi nk}{q} + \beta\right) = \sum_{k=0}^{q-1} \sin\left(\frac{2\pi nk}{q} + \beta\right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

für beliebiges $\beta \in \mathbb{R}$, $n, q \in \mathbb{N}$ mit $q > 1$ und n kein Vielfaches von q . Multipliziert man die zweite Summe wieder im i und addiert beide Summen, so erhält man:

$$\sum_{k=0}^{q-1} e^{i\frac{2\pi nk}{q} + i\beta} = e^{i\beta} \sum_{k=0}^{q-1} e^{i\frac{2\pi nk}{q}} = e^{i\beta} \sum_{k=0}^{q-1} \left(e^{i\frac{2\pi n}{q}} \right)^k. \quad (\text{A.4})$$

Dies ist wiederum eine endliche geometrische Reihe. Da n kein Vielfaches von q sein sollte, gilt offensichtlich $e^{i\frac{2\pi n}{q}} \neq 1$, damit ist die oben genannte Entwicklung für geometrische Reihen anwendbar, und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{q-1} e^{i\frac{2\pi nk}{q}} = \frac{e^{i\frac{2\pi n}{q}q} - 1}{e^{i\frac{2\pi n}{q}} - 1} = \frac{1 - 1}{e^{i\frac{2\pi n}{q}} - 1} = 0.$$

Damit sind die Beziehungen A.3 gezeigt.

A.4 Vollständiger Beweis von Lemma 4.2

In diesem Abschnitt soll das Lemma 4.2 auf Seite 47 vollständig bewiesen werden. Viele Beweisschritte benötigen die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts und werden nicht in aller Ausführlichkeit durchgeführt.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll das Lemma hier noch einmal neu formuliert und von Anfang an bewiesen werden. Für das Verständnis des Beweises ist es jedoch sinnvoll, das auf den Seiten 47ff vorgestellte Grundprinzip verstanden zu haben. Das Lemma soll in der folgenden Form bewiesen werden:

Lemma A.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ eine beliebige beschränkte Menge. Dann gibt es eine beschränkte (meßbare) Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ mit $U \subset D$ und*

$$\bar{M}_{\alpha,f}^n(U) \subset D \quad (\text{A.5})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Der Beweis soll konstruktiv erfolgen. Zunächst wird eine Menge D konstruiert, die unter der Abbildung

$$L_\alpha : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u - \text{sgn}(x) \end{pmatrix}$$

invariant ist, das heißt $L_\alpha(D) \subset D$. (Streng genommen kann sogar $L_\alpha(D) = D$ gezeigt werden, aber das ist für die Aussage des Satzes unerheblich.) D soll durch Vorgabe des Randes konstruiert werden. Wird der Rand unter L_α auf sich selbst abgebildet, so wird D auf D abgebildet. Es wird sich zeigen, daß die Unstetigkeitsstelle $x = 0$ (u -Achse) bei dieser Überlegung keine Rolle spielt.

Ferner soll der Rand von D als Polygon konstruiert werden, so daß L_α Eckpunkte wieder auf Eckpunkte abbildet. Sofern keine der Kanten des Polygons die

u -Achse transversal schneidet, wird dann der Rand von D wieder auf den Rand abgebildet, da L_α stückweise linear ist.

Für die Konstruktion benötigt man einen Ausdruck für die i -te Iterierte von L_α . Man erhält aus (1.24) nach Umskalierung und Einsetzen von $f(x) = -\operatorname{sgn}(x)$:

$$L_\alpha^i : \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos i\alpha + u \sin i\alpha - \sum_{k=0}^{i-1} \operatorname{sgn}(x_k) \sin(i-k)\alpha \\ -x \sin i\alpha + u \cos i\alpha - \sum_{k=0}^{i-1} \operatorname{sgn}(x_k) \cos(i-k)\alpha \end{pmatrix} \quad (*)$$

mit $x_k = L_\alpha^k(x, u) \cdot \vec{e}_x$.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

q gerade:

Wähle ein beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$ und setze

$$r = \frac{m+1}{1 - \cos \alpha}.$$

Dieses m bzw. r sei mindestens so groß, daß für $(x_0, u_0) = (0, r)$ in der Entwicklung (*) $\operatorname{sgn}(x_i) = 1$ für $0 \leq i \leq q/2 - 1$ und $\operatorname{sgn}(x_{q/2}) = -1$ gilt, wobei der Einfachheit halber $\operatorname{sgn}(0) = 1$ gesetzt wird. Mit anderen Worten, es soll $x_i \geq 0$ für $0 \leq i \leq q/2 - 1$ und $x_{q/2} < 0$ gelten. Das ist für $i = 0$ nach Voraussetzung (Anfangsbedingung) der Fall; für $1 \leq i \leq q/2 - 1$ ist gemäß (*) und wegen $\alpha = 2\pi/q$

$$x_i = L_\alpha^i(0, r) \cdot \vec{e}_x = r \sin i\alpha - \sum_{k=0}^{i-1} \sin(i-k)\alpha > 0$$

für hinreichend großes r bzw. hinreichend großes m iterativ erfüllbar. Für $i = q/2$ hat man $x_i < 0$ wegen $\sin(q\alpha/2) = 0$.

Ausgehend von $(x_0, u_0) = (0, r)$ werden nun die ersten Punkte des Polygons wie folgt konstruiert:

$$\begin{aligned} a_{0,j,l} &= \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} + j \sum_{k=0}^{q/2-1} \begin{pmatrix} \sin(q/2-k)\alpha \\ \cos(q/2-k)\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $0 \leq l \leq q/2$ und $0 \leq j \leq m$. Zum Beweis der letzten Gleichheit sei auf den Anhang A.3 verwiesen. Nach Definition von r gilt:

$$a_{0,m,q/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + (m+1) \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (**)$$

Gerade um diese Beziehung zu erfüllen, muß r wie oben gewählt werden.

Man erkennt, daß nach Definition der Punkte $a_{0,j,0} = a_{0,j-1,q/2}$ für $1 \leq j \leq m$ gilt. Somit hat man die ersten $\nu = (q/2 + 1)(m+1) - m$ Punkte des Polygons konstruiert, die alle in dem von der u -Achse und $(\sin \alpha, \cos \alpha)$ aufgespannten Sektor liegen, wobei die Punkte wie folgt angeordnet werden:

$$a_{0,0,0}, \dots, a_{0,0,q/2} = a_{0,1,0}, \dots, a_{0,1,q/2} = a_{0,2,0}, \dots, a_{0,m,0}, \dots, a_{0,m,q/2}$$

Als nächstes sollen diese Punkte unter der Abbildung L_α iteriert werden:

$$a_{i,j,l} = L_\alpha^i(a_{0,j,l})$$

für $0 \leq i \leq q/2 - 1$. Anders als auf den Seiten 47ff erläutert, sollen die $a_{0,j,l}$ hier nicht q mal, sondern nur $q/2 - 1$ mal iteriert werden. Da L_α punktsymmetrisch zum Ursprung ist, muß auch D punktsymmetrisch zum Ursprung sein. Wie sich im folgenden zeigen wird, ist es aus beweistechnischer Sicht günstig, diese Symmetrie auszunutzen.

Da r bzw. m hinreichend groß gewählt wurde, kann in (*) $\text{sgn}(x_k) = 1$ für alle Punkte $a_{0,j,l}$ angenommen werden. Damit läßt sich für die $a_{i,j,l}$ prinzipiell ein geschlossener Ausdruck angeben. Unter anderem gilt (siehe hierzu auch Anhang A.3):

$$a_{q/2-1,j,l} = \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ -r \cos \alpha \end{pmatrix} - (j+1) \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \\ 1 \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{l-2} \begin{pmatrix} \sin(l-1-k)\alpha \\ \cos(l-1-k)\alpha \end{pmatrix}.$$

Mit (**) folgt hieraus:

$$a_{q/2-1,m,l} = - \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{l-2} \begin{pmatrix} \sin(l-1-k)\alpha \\ \cos(l-1-k)\alpha \end{pmatrix} = -a_{0,0,l-1}. \quad (***)$$

Folglich ist $a_{q/2-1,m,l} \cdot \vec{e}_x \leq 0$. Und ferner gilt:

$$a_{q/2-1,m-1,q/2} = \begin{pmatrix} r \sin \alpha - (m+1) \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \\ -r \cos \alpha - (m+1) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r + 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist daher sinnvoll, das Polygon an dem Punkt $a_{q/2-1,m-1,q/2}$ enden zu lassen. Ordnet man nun die Punkte entsprechend

$$a_{0,0,0}, \dots, a_{0,m,q/2}, a_{1,0,0}, \dots, a_{q/2-1,0,0}, \dots, a_{q/2-1,m-1,q/2}$$

an, so sind die ersten $q\nu/2 - q/2$ Punkte des Polygons konstruiert. Alle so konstruierten Punkte liegen rechts von der u -Achse, sie beginnen bei $a_{0,0,0} = (0, r)$ und enden bei $a_{q/2-1,m-1,q/2} = (0, -r + 1)$.

Diese so konstruierten Punkten werden nun am Ursprung $(0, 0)$ gespiegelt und unter Beibehaltung der Anordnung miteinander verbunden. Man erhält auf diese Weise ein geschlossenes Polygon mit $(q-1)\nu$ Punkten.

Es bleibt zu zeigen, daß dieses Polygon unter L_α wieder auf sich selbst abgebildet wird. Da L_α stückweise linear ist und nach Konstruktion von $a_{0,0,0}$ sowie $a_{q/2-1,m-1,q/2}$ keines der Linienstücke die u -Achse transversal schneidet, genügt es zu zeigen, daß L_α die Punkte des Polygons aufeinander abbildet.

Man geht der Reihe nach vor: Nach Konstruktion ist klar, daß

$$L(a_{i,j,l}) = a_{i+1,j,l}$$

für $0 \leq i \leq q/2 - 3$, $0 \leq j \leq m$ und $0 \leq l \leq q/2$ gilt. Für $i = q/2 - 2$ ist diese Beziehung nur für $0 \leq j \leq m - 1$ und $0 \leq l \leq q/2$ erfüllt. In (***) wurde aber schon gezeigt, daß

$$L(a_{q/2-2,m,l}) = a_{q/2-1,m,l} = -a_{0,0,l-1}$$

für $1 \leq l \leq q/2$ gilt. Da $a_{q/2-2,m-1,q/2} = a_{q/2-2,m,0}$ gilt, ist hiermit bereits gezeigt, daß alle Punkte $a_{i,j,l}$ für $0 \leq i \leq q/2-2$ wieder auf Punkte des Polygons abgebildet werden. Es bleibt noch der Fall $i = q/2-1$ zu klären. Es gilt (siehe hierzu wiederum in Anhang A.3):

$$\begin{aligned} a_{q/2,j,l} &= L(a_{q/2-1,j,l}) = L^{q/2}(a_{0,j,l}) \\ &= - \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} - (j+1) \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha}{1-\cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} = -a_{0,j+1,l} \end{aligned}$$

für $0 \leq j \leq m-1$.

Damit ist für alle Punkte des Polygons rechts von der u -Achse gezeigt, daß sie unter einmaliger L_α -Iteration wieder auf Punkte des Polygons abgebildet werden. Entsprechendes muß für die am Ursprung gespiegelten Punkte gelten, da L_α punktsymmetrisch ist. Damit ist der Rand von D konstruiert und man macht sich schnell klar, daß die Unstetigkeitsstelle $x = 0$ von L_α bei einem so konstruierten Rand keine Rolle spielt.

q ungerade:

Dieser Fall ist ähnlich zu behandeln, wie der Vorherige, erweist sich jedoch als ein wenig komplizierter. Gegeben sei ein beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$. Setze dann

$$r = \frac{m+1}{1-\cos(\alpha/2)}.$$

Wie im vorherigen Fall sei m bzw. r mindestens so groß, daß für $(x_0, u_0) = (0, r)$ sowohl $\text{sgn}(x_k) = 1$ für $0 \leq k \leq (q-1)/2$ als auch $\text{sgn}(x_{(q+1)/2}) = -1$ gilt. Das heißt, es soll $x_k \geq 0$ für $0 \leq k \leq (q-1)/2$ und $x_{(q+1)/2} < 0$ gelten. Man macht sich ganz analog zum vorherigen Fall klar, daß m bzw. r immer entsprechend groß gewählt werden kann.

Ausgehend von $(0, r)$ werden nun die folgenden Punkten des Polygons konstruiert:

$$a_{0,j,l} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha + 2 \sin(\alpha/2)}{1-\cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix}$$

für $0 \leq l \leq (q-1)/2$ und $0 \leq j \leq m$ sowie

$$\begin{aligned} a_{0,j,l} &= a_{0,j,(q-1)/2} - \sum_{k=0}^{l-(q+1)/2} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{l-(q+1)/2} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} + (j+1/2) \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha + 2 \sin(\alpha/2)}{1-\cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $(q+1)/2 \leq l \leq q$ und $0 \leq j \leq m$. Zum Beweis der letzten Gleichheit sei wieder auf Anhang A.3 verwiesen. Es kann ferner gezeigt werden, daß $a_{0,j,q} = a_{0,j+1,0}$ und

$$a_{0,m,q} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + (m+1) \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha + 2 \sin(\alpha/2)}{1-\cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin(\alpha/2) \\ r \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

gilt. Gerade um diese Beziehung zu erfüllen, muß r wie oben gewählt werden. Die $a_{0,j,l}$ werden wie folgt angeordnet:

$$a_{0,0,0}, \dots, a_{0,0,q} = a_{0,1,0}, \dots, a_{0,m,0}, \dots, a_{0,m,q}$$

Damit sind die ersten $(q+1)(m+1) - m$ Punkte des Polygons gegeben. Alle Punkte liegen in dem von der u -Achse und $(\sin(\alpha/2), \cos(\alpha/2))$ aufgespannten Sektor.

Die Punkte werden nun an der Achse $(\sin(\alpha/2), \cos(\alpha/2))$ gespiegelt. Es soll gelten:

$$a_{1,j,l} = \begin{pmatrix} r \sin(\alpha/2) \\ r \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha \sin(\alpha/2) - 1}{1 - \cos \alpha} \end{pmatrix}$$

für $0 \leq l \leq (q+1)/2$ und $0 \leq j \leq m$ sowie

$$\begin{aligned} a_{1,j,l} &= a_{1,j,(q+1)/2} - \sum_{k=0}^{l-(q+1)/2-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \sin(\alpha/2) \\ r \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{l-(q+1)/2-1} \begin{pmatrix} \sin(l-k)\alpha \\ \cos(l-k)\alpha \end{pmatrix} \\ &\quad + (j+1/2) \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha \sin(\alpha/2) - 1}{1 - \cos \alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $(q+1)/2 + 1 \leq l \leq q$ und $0 \leq j \leq m$. Hierbei wurde bereits so indiziert, daß die Punkte in analoger Weise angeordnet werden können. Man macht sich schnell klar, daß

$$a_{1,m,q} = \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \end{pmatrix}$$

gilt. Damit sind die ersten $\nu = 2(q+1)(m+1) - 2m - 1$ Punkte des Polygons konstruiert, die alle in dem von der u -Achse und $(\sin \alpha, \cos \alpha)$ aufgespannten Sektor liegen.

Aus beweistechnischer Sicht ist es wiederum einfacher, die Punktsymmetrie der Abbildung L_α auszunutzen. Die so definierten Punkte sollen also nicht wie in den Ausführungen auf den Seiten 47ff q mal iteriert werden, sondern nur $(q-1)/2$ mal:

$$a_{i,j,l} = L_\alpha(a_{i-2,j,l}) = \begin{cases} L_\alpha^{i/2}(a_{0,j,l}) & i \text{ gerade} \\ L_\alpha^{(i-1)/2}(a_{1,j,l}) & i \text{ ungerade} \end{cases}$$

für $0 \leq i \leq q$.

Unter Ausnutzung der Entwicklung (*) und der Ergebnisse aus Anhang A.3 folgt dann:

$$\begin{aligned} a_{q-1,j,l} &= L(a_{q-3,j,l}) = L^{(q-1)/2}(a_{0,j,l}) \\ &= \begin{pmatrix} r \sin(\alpha/2) \\ r \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{q-1}{2} + l - k\right)\alpha \\ \cos\left(\frac{q-1}{2} + l - k\right)\alpha \end{pmatrix} \\ &\quad + (j+1/2) \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha + 2 \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $0 \leq l \leq (q-1)/2$ und

$$\begin{aligned} a_{q-1,j,l} &= \begin{pmatrix} r \sin(\alpha/2) \\ -r \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l-(q+1)/2} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{q-1}{2} + l - k\right) \alpha \\ \cos\left(\frac{q-1}{2} + l - k\right) \alpha \end{pmatrix} \\ &\quad + (j+1) \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha + 2 \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $(q+1)/2 \leq l \leq q$. Hieraus ergibt sich nach kurzer Rechnung:

$$a_{q-1,m,(q-1)/2} = \begin{pmatrix} r \sin(\alpha/2) \\ -r \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} + (m+1) \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha + 2 \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r+1 \end{pmatrix}.$$

Es ist also sinnvoll, den Polygonzug bei $a_{q-1,m,(q-1)/2}$ enden zu lassen. Die Punkte werden in der bekannten Weise angeordnet:

$$a_{0,0,0}, \dots, a_{0,m,q} = a_{1,0,0}, \dots, a_{1,m,q}, \dots, a_{q-1,0,0}, \dots, a_{q-1,m,(q-1)/2}$$

Damit sind die ersten $(q+1)\nu/2 - (\nu+1)/2 - (q-1)/2$ Punkte des Polygons konstruiert, die alle rechts von der u -Achse liegen. Das so konstruierte Polygon beginnt ganz analog zum vorherigen Fall bei $(0, r)$ und endet bei $(0, -r+1)$.

Diese Punkte werden an Ursprung gespiegelt und man erhält ein geschlossenes Polygon mit $q(\nu-1)$ Punkten. Es bleibt zu zeigen, daß dieses Polygon unter L_α invariant ist. Man geht der Reihe nach vor: Nach Definition ist klar, daß

$$a_{i+2,j,l} = L(a_{i,j,l})$$

für $0 \leq i \leq q-4$, $0 \leq j \leq m$ und $0 \leq l \leq q$ gilt. Für $i = q-3$ tritt die erste Ausnahmesituation ein. Die obige Gleichung gilt für $i = q-3$, $0 \leq j \leq m-1$ und $0 \leq l \leq q$ sowie für $i = q-3$, $j = m$ und $0 \leq l \leq (q-1)/2$. Für $(q+1)/2 \leq l \leq q$ gilt:

$$\begin{aligned} a_{q-1,m,l} &= L(a_{q-3,m,l}) = L^{(q-1)/2}(a_{0,m,l}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{l-(q+1)/2-1} \begin{pmatrix} \sin\left(l - \frac{q+1}{2} - k\right) \alpha \\ \cos\left(l - \frac{q+1}{2} - k\right) \alpha \end{pmatrix} = -a_{0,0,l-(q+1)/2}. \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} a_{q,j,l} &= L_\alpha(a_{q-2,j,l}) = L_\alpha^{(q-1)/2}(a_{1,j,l}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l+(q-1)/2-(q+1)/2} \begin{pmatrix} \sin\left(l + \frac{q-1}{2} - k\right) \alpha \\ \cos\left(l + \frac{q-1}{2} - k\right) \alpha \end{pmatrix} \\ &\quad + (j+1/2) \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha + 2 \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ 1 \end{pmatrix} = -a_{0,j,l+(q-1)/2} \end{aligned}$$

für $0 \leq l \leq (q+1)/2$ und

$$\begin{aligned} a_{q,j,l} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{l-(q+1)/2-1} \begin{pmatrix} \sin\left(l - \frac{q+1}{2} - k\right) \alpha \\ \cos\left(l - \frac{q+1}{2} - k\right) \alpha \end{pmatrix} \\ &\quad + (j+1) \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha + 2 \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ 1 \end{pmatrix} = -a_{0,j+1,l-(q+1)/2} \end{aligned}$$

für $(q+1)/2 + 1 \leq l \leq q$ und $0 \leq j \leq m-1$. Anhand der Definitionen macht man sich schnell klar, daß $a_{0,m+1,l} = a_{1,0,l}$ für $0 \leq l \leq (q-1)/2$ gilt, folglich ist die letzte Gleichung auch für $j = m$ gültig, muß nur entsprechend interpretiert werden.

Man verbleibt mit den folgenden beiden Fällen:

$$\begin{aligned} a_{q+1,j,l} &= L(a_{q-1,j,l}) = L^{(q+1)/2}(a_{0,j,l}) \\ &= \begin{pmatrix} -r \sin(\alpha/2) \\ -r \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{l+(q+1)/2-(q+1)/2-1} \begin{pmatrix} \sin\left(l + \frac{q+1}{2} - k\right) \alpha \\ \cos\left(l + \frac{q+1}{2} - k\right) \alpha \end{pmatrix} \\ &\quad + (j+1/2) \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ -\frac{\cos \alpha + 2 \sin \alpha \sin(\alpha/2) - 1}{1 - \cos \alpha} \end{pmatrix} = -a_{1,j,l+(q+1)/2} \end{aligned}$$

für $0 \leq l \leq (q-1)/2, 0 \leq j \leq m$ und

$$\begin{aligned} a_{q+1,j,l} &= \begin{pmatrix} -r \sin(\alpha/2) \\ -r \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{l-(q-1)/2-1} \begin{pmatrix} \sin\left(l - \frac{q-1}{2} - k\right) \alpha \\ \cos\left(l - \frac{q-1}{2} - k\right) \alpha \end{pmatrix} \\ &\quad + (j+1) \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha \sin(\alpha/2)}{1 - \cos \alpha} \\ -\frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha \sin(\alpha/2) - 1}{1 - \cos \alpha} \end{pmatrix} = -a_{1,j+1,l-(q-1)/2} \end{aligned}$$

für $(q+1)/2 \leq l \leq q, 0 \leq j \leq m-1$. Da für den letzten Fall $j = m$ bereits nicht mehr zum Polygon gehört, ist damit gezeigt, daß der so definierte Rand unter L_α invariant ist.

Allgemeines q :

Die folgenden Überlegungen sind dieselben, wie auf den Seiten 47ff, sie sind hier der Vollständigkeit halber übernommen worden.

Sei eine beschränkte Menge $U \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ geben. Dann gibt es eine nach obigem Schema konstruierte Menge D mit $U \subset D$, sofern $m \in \mathbb{N}_0$ genügend groß gewählt wird. (Streng genommen muß an dieser Stelle gezeigt werden, daß oben konstruierter Rand von D immer einen minimalen Abstand zum Ursprung hat, der linear mit m ansteigt.) Es gilt also

$$U \subset D \cap \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty.$$

Nach Definition der Menge Ω^∞ und der Abbildung L_α gilt offensichtlich

$$\bar{M}_{\alpha,f}|\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty = L_\alpha|\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty.$$

Die Menge D wurde so konstruiert, daß sie unter L_α invariant ist, das heißt

$$L_\alpha(D) \subset D.$$

Folglich gilt:

$$\bar{M}_{\alpha,f}(U) = L_\alpha(U) \subset D.$$

Ferner ist die Menge Ω^∞ invariant unter $\bar{M}_{\alpha,f}$, es gilt also:

$$\bar{M}_{\alpha,f}(\mathbb{R}^2 - \Omega^\infty) = \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty.$$

Da $U \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$ ist, folgt damit, daß auch

$$\bar{M}_{\alpha,f}(U) \subset \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty$$

gilt. Somit gilt also

$$\bar{M}_{\alpha,f}(U) \subset D \cap \mathbb{R}^2 - \Omega^\infty.$$

$\bar{M}_{\alpha,f}(U)$ erfüllt damit dieselbe Voraussetzung, wie die Menge U und die obigen Schlüsse können wiederholt werden. Mittels vollständiger Induktion kann auf diese Weise gezeigt werden, daß

$$M_{\alpha,f}^n(U) \subset D$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt. Hiermit ist das Lemma bewiesen.

□

A.5 Markovs Formeln

Markovs Formeln sind eine direkt Folge von Newtons Differenzenformel, man findet sie zum Beispiel in [27] auf Seite 883. Gegeben sei eine $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion f , ein Punkt a_0 im Definitionsgebiet und ein Abstand $h \in \mathbb{R}$. Dann wird die folgende Notation eingeführt:

$$a_p = a_0 + ph \quad f_p = f(a_p) = f(a_0 + ph) \quad (\text{A.6a})$$

und

$$\begin{aligned} \Delta_n^1 &= \Delta_n = \Delta(f_n) = f_{n+1} - f_n \\ \Delta_n^2 &= \Delta_{n+1}^1 - \Delta_n^1 = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n \\ \Delta_n^3 &= \Delta_{n+1}^2 - \Delta_n^2 = f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n \\ &\vdots \\ \Delta_n^k &= \Delta_{n+1}^{k-1} - \Delta_n^{k-1} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f_{n+k-j}. \end{aligned} \quad (\text{A.6b})$$

Newtons Differenzenformel besagt dann:

$$f(a_0 + ph) = f_0 + p\Delta_0 + \binom{p}{2} \Delta_0^2 + \dots + \binom{p}{n} \Delta_0^n + R_n \quad (\text{A.7a})$$

mit

$$R_n = \int_{a_0}^{a_n} f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \frac{(x-a_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad a_0 < \xi < a_n. \quad (\text{A.7b})$$

Durch Ableiten dieser Formel ergeben sich dann die Formeln von Markov:

$$f'(a_0 + ph) = \frac{1}{h} \left[\Delta_0 + \frac{2p-1}{2} \Delta_0^2 + \frac{3p^2-6p+2}{6} \Delta_0^3 + \dots + \frac{d}{dp} \binom{p}{n} \Delta_0^n \right] + R'_n \quad (\text{A.8a})$$

mit

$$R'_n = h^n f^{(n+1)}(\xi) \frac{d}{dp} \binom{p}{n+1} + h^{n+1} \binom{p}{n+1} \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi), \quad a_0 < \xi < a_n, \quad (\text{A.8b})$$

woraus sich im einzelnen ableitet:

$$\begin{aligned} h f'_0 &= \Delta_0 - \frac{1}{2} \Delta_0^2 + \frac{1}{3} \Delta_0^3 - \frac{1}{4} \Delta_0^4 + \dots \\ h^2 f_0^{(2)} &= \Delta_0^2 - \Delta_0^3 + \frac{11}{12} \Delta_0^4 - \frac{5}{6} \Delta_0^5 + \dots \\ h^3 f_0^{(3)} &= \Delta_0^3 - \frac{3}{2} \Delta_0^4 + \frac{7}{4} \Delta_0^5 - \frac{15}{8} \Delta_0^6 + \dots \\ h^4 f_0^{(4)} &= \Delta_0^4 - 2 \Delta_0^5 + \frac{17}{6} \Delta_0^6 - \frac{7}{2} \Delta_0^7 + \dots \\ h^5 f_0^{(5)} &= \Delta_0^5 - \frac{5}{2} \Delta_0^6 + \frac{25}{6} \Delta_0^7 - \frac{35}{6} \Delta_0^8 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.8c})$$

A.6 Symmetriereduktion

In diesem Abschnitt soll kurz erläutert werden, wie der Begriff der Symmetriereduktion streng mathematisch zu verstehen ist. Die Ausführungen orientieren sich vom Ansatz her an den Arbeiten von Cvitanović und Eckhardt [28] sowie Robbins [29], sind jedoch auf die gegebene Situation zugeschnitten.

Sei Γ eine topologische Mannigfaltigkeit (der Phasenraum) und $M : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine beliebige stetige Abbildung (die Dynamik). $G(M) \subset C^0(\Gamma, \Gamma)$ sei die Menge aller Symmetrien von M , das heißt für alle $g \in G(M)$ gilt:

$$g \circ M = M \circ g. \quad (\text{A.9})$$

Satz A.3 $G(M)$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition.

Beweis:

Da $G(M)$ eine Teilmenge der Gruppe $C^0(\Gamma, \Gamma)$ ist, genügt es zu zeigen, daß $G(M)$ bezüglich der Komposition abgeschlossen ist und die Eins enthält, das heißt, daß $G(M)$ eine Untergruppe von $C^0(\Gamma, \Gamma)$ ist. Es gilt

$$id_\Gamma \circ M = M \circ id_\Gamma;$$

folglich ist $id_\Gamma \in G(M)$. Seien nun $g_1, g_2 \in G(M)$, dann gilt:

$$(g_1 \circ g_2) \circ M = g_1 \circ (M \circ g_2) = M \circ (g_1 \circ g_2);$$

also ist $g_1 \circ g_2 \in G(M)$.

□

Bevor die Symmetriereduktion definiert werden kann, sind zunächst einige Begriffe aus der Algebra notwendig. Im folgenden sei G eine beliebige Gruppe mit neutralem Element e und P eine beliebige Menge. Die nachfolgenden Definitionen und Sätze orientieren sich an der gängigen Literatur (zum Beispiel [30]).

Zunächst sollen ohne viel Erläuterung kurz die Begriffe der Äquivalenzrelation und der Äquivalenzklasse wiederholt werden:

Definition A.4 Eine Relation $\sim$ auf einer Menge P heißt Äquivalenzrelation, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

- (a) $a \sim a$ für alle $a \in P$ (Reflexivität)
- (b) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ für alle $a, b \in P$ (Symmetrie)
- (c) $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ für alle $a, b, c \in P$ (Transitivität) .

Definition A.5 Die Menge

$$[x] = \{a \in P; a \sim x\}$$

heißt Äquivalenzklasse zu $x \in P$. Die Menge aller Äquivalenzklassen von P wird mit

$$P / \sim = \{[x]; x \in P\}$$

bezeichnet. Die Abbildung

$$\pi : P \rightarrow P / \sim \quad x \mapsto [x]$$

heißt kanonische Projektion von P auf $P / \sim$.

Nun soll kurz gezeigt werden, wie sich aus einer gegebenen Gruppe eine Äquivalenzrelation ergibt. Hierzu ist der allgemeine Begriff der Operation einer Gruppe auf einer Menge notwendig.

Definition A.6 Die Operation einer Gruppe G auf einer Menge P ist eine Abbildung $\alpha : G \times P \rightarrow P$ (als Abkürzung werde $g(p) = \alpha(g, p)$ geschrieben), die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (a) $e(p) = p$ für alle $p \in P$
- (b) $(g' \cdot g)(p) = g'(g(p))$ für alle $g, g' \in G$ und alle $p \in P$.

Definition A.7 Die Menge

$$G \cdot p = \{g(p); g \in G\}$$

heißt die Bahn von $p \in P$ unter der Operation von G auf P .

Satz A.4 *Sei G eine beliebige Gruppe, die auf der Menge P operiert. Dann ist die Relation*

$$p_1 \sim p_2 \Leftrightarrow (\exists g \in G \text{ mit } g(p_1) = p_2)$$

eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklasse von p ist die Bahn von p , das heißt

$$[p] = G \cdot p.$$

Beweisskizze:

Es müssen alle drei Bedingungen aus Definition A.4 nachgerechnet werden. Die Bedingung der Reflexivität ist identisch mit der Bedingung, daß $e(p) = p$ für alle $p \in P$ gilt. Die Symmetrie und Transitivität ergeben sich direkt aus $(g \cdot h)(p) = g(h(p))$. Die Definitionen für die Äquivalenzklasse und der Bahn sind nach Definition identisch. □

Hiermit sind bereits alle mathematischen Hilfsmittel für eine Symmetriereduktion gegeben. Offenbar ist die Menge $G(M)$ der Symmetrien von M eine Gruppe, die auf dem Phasenraum Γ operiert — die Elemente von $G(M)$ sind ja Abbildungen von Γ nach Γ und erfüllen trivialerweise die in Definition A.6 geforderten Eigenschaften.

Damit ist dann aber auch in der besprochenen Weise eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben, bei der alle Punkte für “äquivalent” erklärt werden, zwischen denen eine Symmetrie aus $G(M)$ vermittelt. Mit anderen Worten, die Äquivalenzklasse eines Punktes $p \in \Gamma$ besteht aus allen Punkten, die zu p symmetrisch sind.

Man definiert die Symmetriereduktion der Abbildung M unter der Symmetriegruppe $G(M)$ nun wie folgt:

$$M_{\sim} : \Gamma / \sim \rightarrow \Gamma / \sim, \quad p \mapsto (\pi \circ M \circ \pi^{-1})(p). \quad (\text{A.10})$$

Dabei soll $M_{\sim}$ als symmetriereduzierte Abbildung von M bezeichnet werden. Es ist zu beachten, daß die kanonische Projektion π zwar surjektiv, jedoch nicht injektiv ist (es sei denn, $G(M)$ bestünde nur aus der Eins); das heißt, es muß die Wohldefiniertheit des obigen Ausdrucks gezeigt werden. Es ist a priori noch gar nicht klar, ob die verschiedenen Urbilder $\pi^{-1}(p)$ auch tatsächlich auf dasselbe abgebildet werden.

Beweis der Wohldefiniertheit von (A.10):

Sei $\tilde{p} \in \Gamma / \sim$ gegeben. Seien p_1 und p_2 zwei verschiedene Urbilder von $\tilde{p}$ unter π , das heißt $\pi(p_1) = [p_1] = \tilde{p}$ und $\pi(p_2) = [p_2] = \tilde{p}$. Dann ist zu zeigen, daß $(\pi \circ M)(p_1) = (\pi \circ M)(p_2)$ gilt.

Zunächst folgt aus $[p_1] = [p_2]$, daß $p_1 \sim p_2$ gilt. Folglich gibt es ein $g \in G(M)$ mit $g(p_1) = p_2$. Damit gilt aber

$$M(p_2) = (M \circ g)(p_1) = (g \circ M)(p_1) = g(M(p_1)),$$

also $M(p_1) \sim M(p_2)$, woraus sofort folgt, daß $\pi(M(p_1)) = \pi(M(p_2))$ gilt. □

Anhang B

Bilderbuch

Die nächtlichen Sterne sind nicht deshalb weniger schön, weil wir jetzt ihre Entfernung und Größe messen und ihre Ausmaße und ihr Alter berechnen können.

COLIN RENFREW

In diesem Anhang soll eine kleine Zusammenstellung der — entsprechend dem ästhetischen Empfinden des Autors — schönsten Orbits gegeben werden. Sämtliche Parameter, die nötig sind, um diese Orbits zu reproduzieren, werden zwar mit angegeben, sollen hier allerdings keine sonderliche Bedeutung haben.

Die Abbildungen B.1 bis B.6 zeigen Orbits von $M_{\alpha, f_{A1}}^{(x)}$ im Grenzfall $\beta = 0$. Man beachte, daß die Dynamik hier nicht entsprechend (1.15) skaliert ist und die Abbildungen somit gegenüber denen in Kapitel 4 leicht verzerrt sind.

Abbildungen B.7 bis B.9 zeigen Orbits der vierdimensionalen Abbildung $M_{\alpha, \beta, f_{A1}}$ für $0 < \beta < \pi/2$.

In Abbildungen B.10 und B.11 sind zwei Phasenportraits von $M_{\alpha, f_{P1}}^{(x)}$ (nicht skaliert) für zwei quasikristalline Fälle gezeigt.

Abbildung B.12 und B.13 zeigen jeweils einen Orbit von $\check{M}_{\alpha, \beta, f_{P1}}$ im Sinne von (6.22), das heißt von $M_{\alpha, \beta, f_{P1}}$ in der Skalierung (6.21). Da in beiden Fällen jedoch $q \neq 4$ gewählt wurde, kann die Dynamik nur auf $\mathbb{R}^2 \times [-1/2, 1/2]^2$ betrachtet werden. (Die Translationssymmetrien in der (x, u) -Ebene wurden ja nur für $q = 4$ nachgewiesen.)

Es können längst nicht alle Bilder gezeigt werden, die sich bei der Ausarbeitung als interessant erwiesen haben. Man erhält jedoch einen Eindruck davon, wie reichhaltig die Dynamik des hier betrachteten Systems ist.

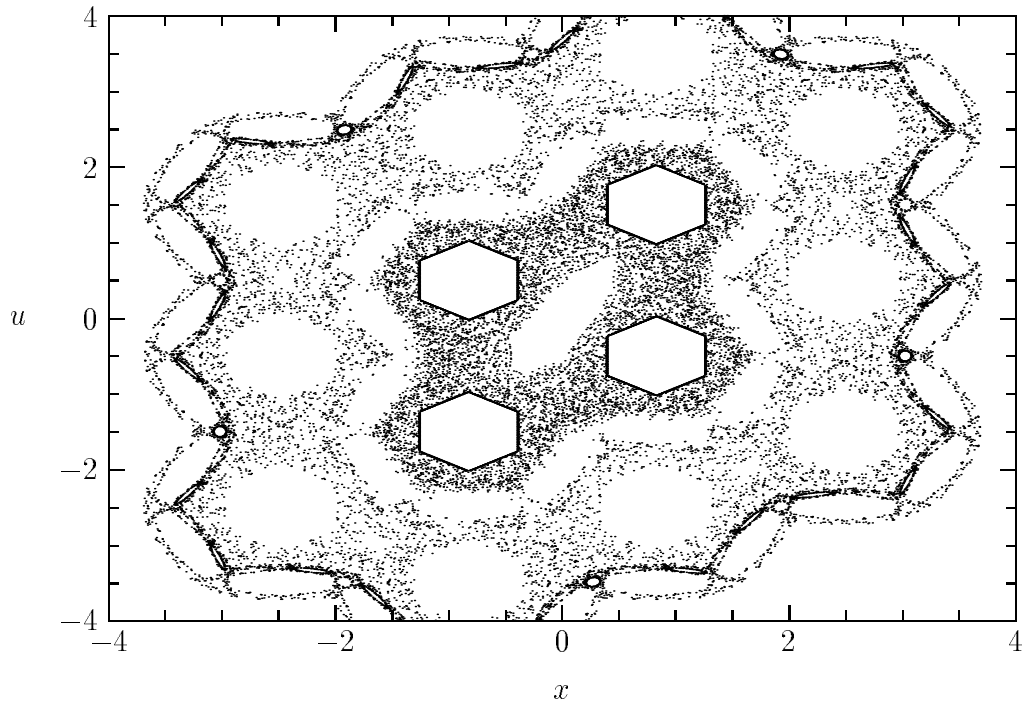


Abbildung B.1: Orbit für $q = 6$, $K = 1$ und $b = 0.4$. Startwerte $x_0 = 0$ und $u_0 = 1$. 30000 Iterationen.

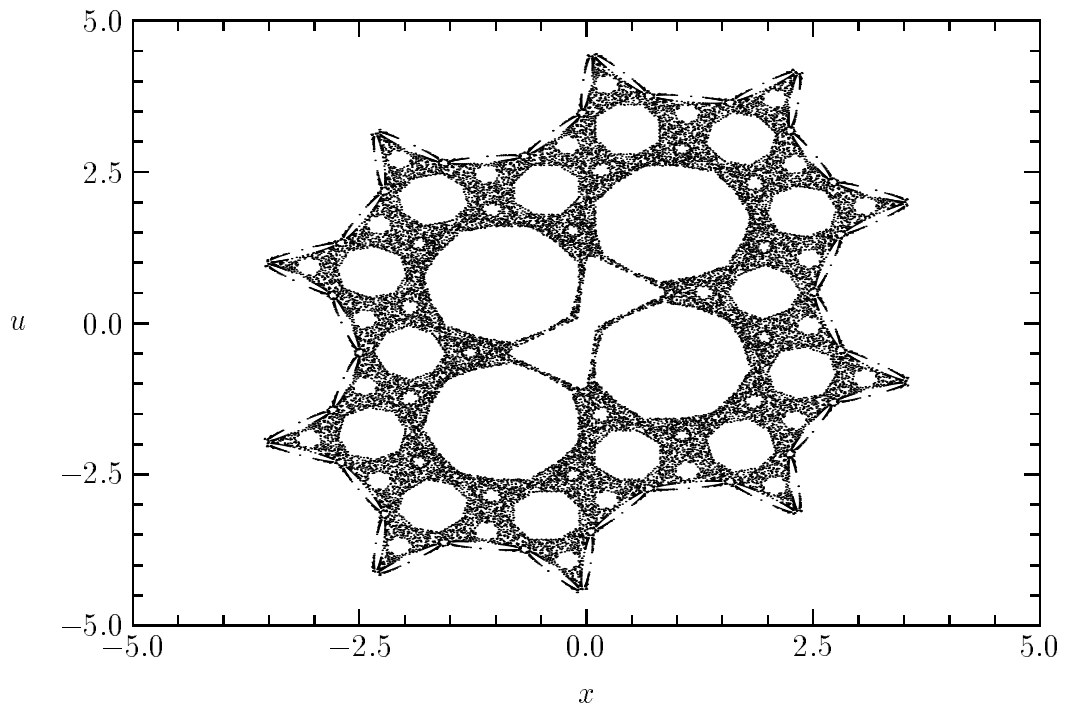


Abbildung B.2: Orbit für $q = 5.6$, $K = 1$ und $b = 0.1$. Startwerte $x_0 = 0$ und $u_0 = 1.42$. 30000 Iterationen.

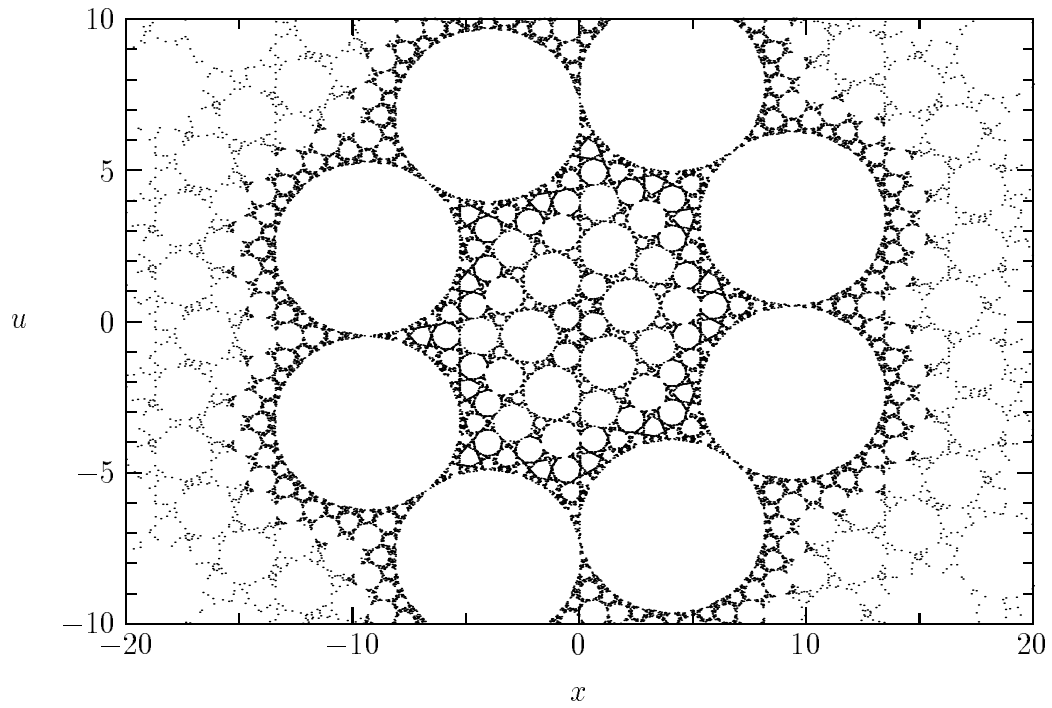


Abbildung B.3: Orbit für $q = 9$, $K = 1$ und $b = 0.01$. Startwerte $x_0 = 0$ und $u_0 = 0.01$. 30000 Iterationen.

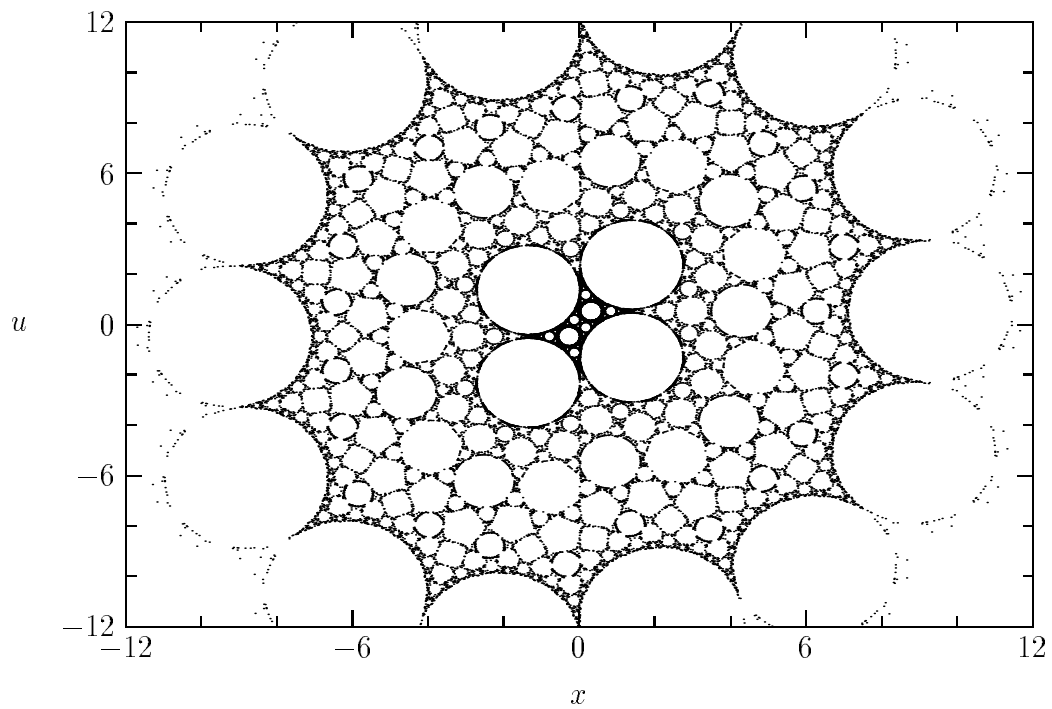


Abbildung B.4: Orbit für $q = 4.85$, $K = 1$ und $b = 0.01$. Startwerte $x_0 = 0$ und $u_0 = 0.31$. 30000 Iterationen.

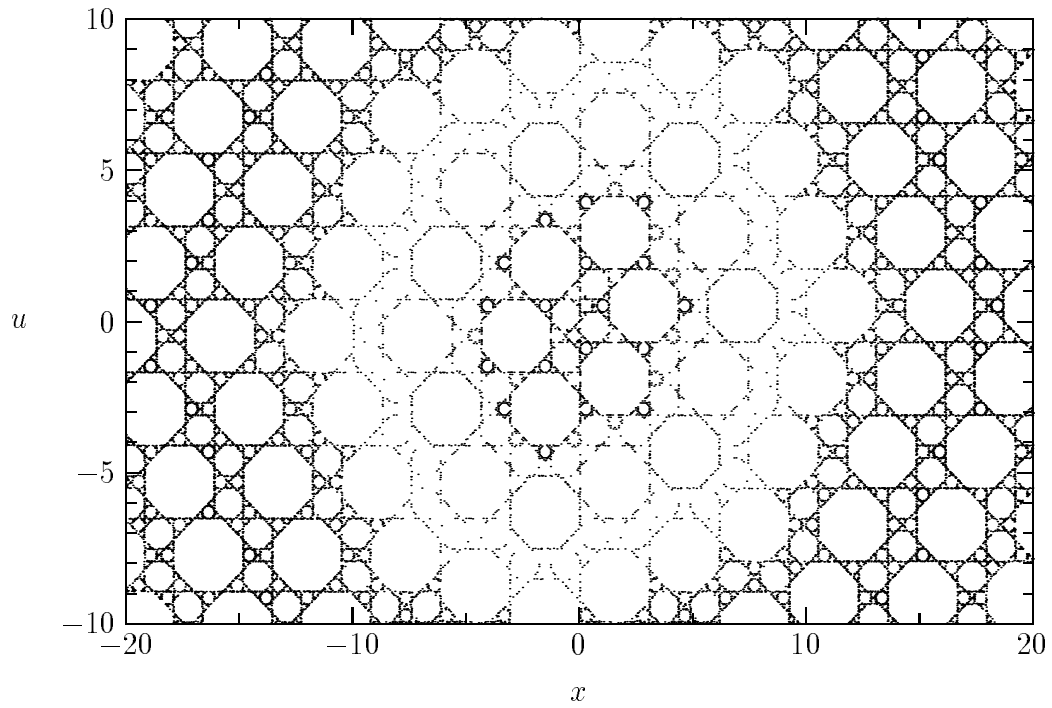


Abbildung B.5: Orbit für $q = 8$, $K = 1$ und $b = 0.02$. Startwerte $x_0 = 0$ und $u_0 = 0.01$. 100000 Iterationen.

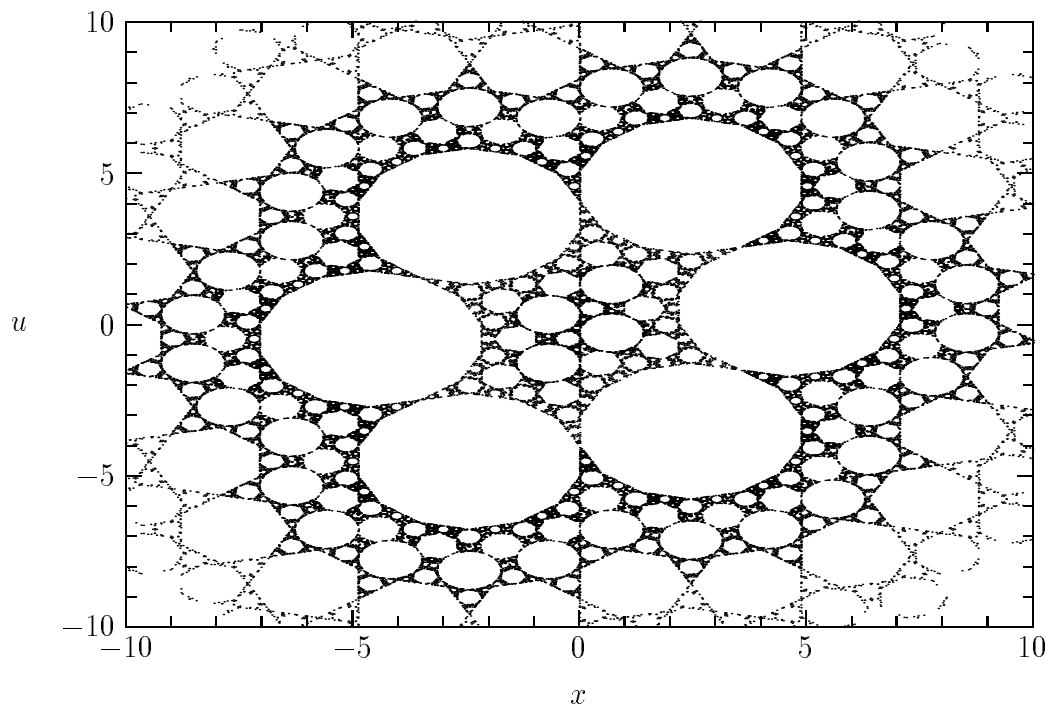


Abbildung B.6: Orbit für $q = 7$, $K = 1$ und $b = 0.01$. Startwerte $x_0 = 0$ und $u_0 = 0.01$. 50000 Iterationen.

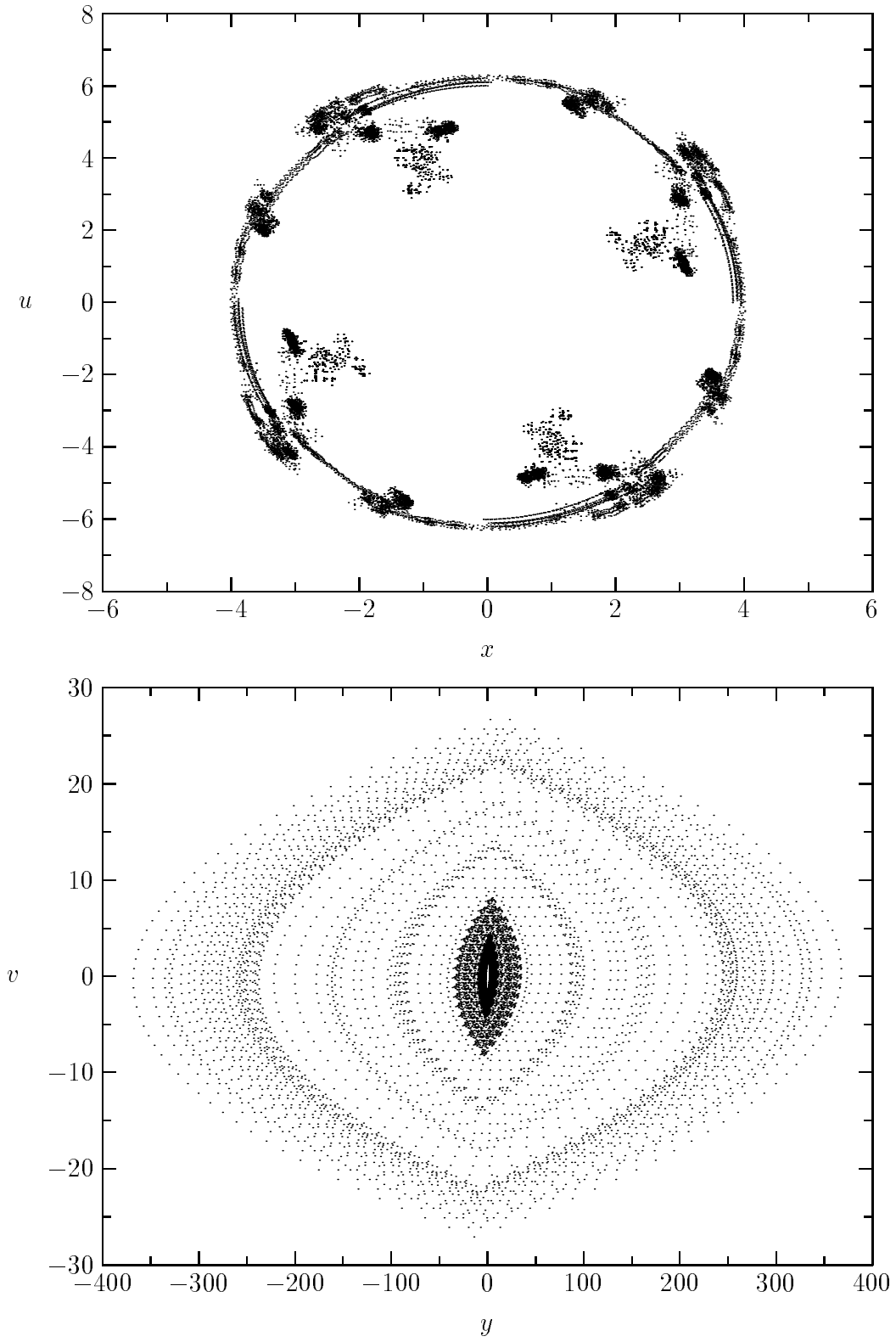


Abbildung B.7: Orbit für $q = 4$, $K = 1$, $\beta = \pi/2 - 0.1$ und $b = 2$. Startwerte $x_0 = 0$, $u_0 = 6$, $y_0 = 0$ und $v_0 = 3.1$. 30000 Iterationen.

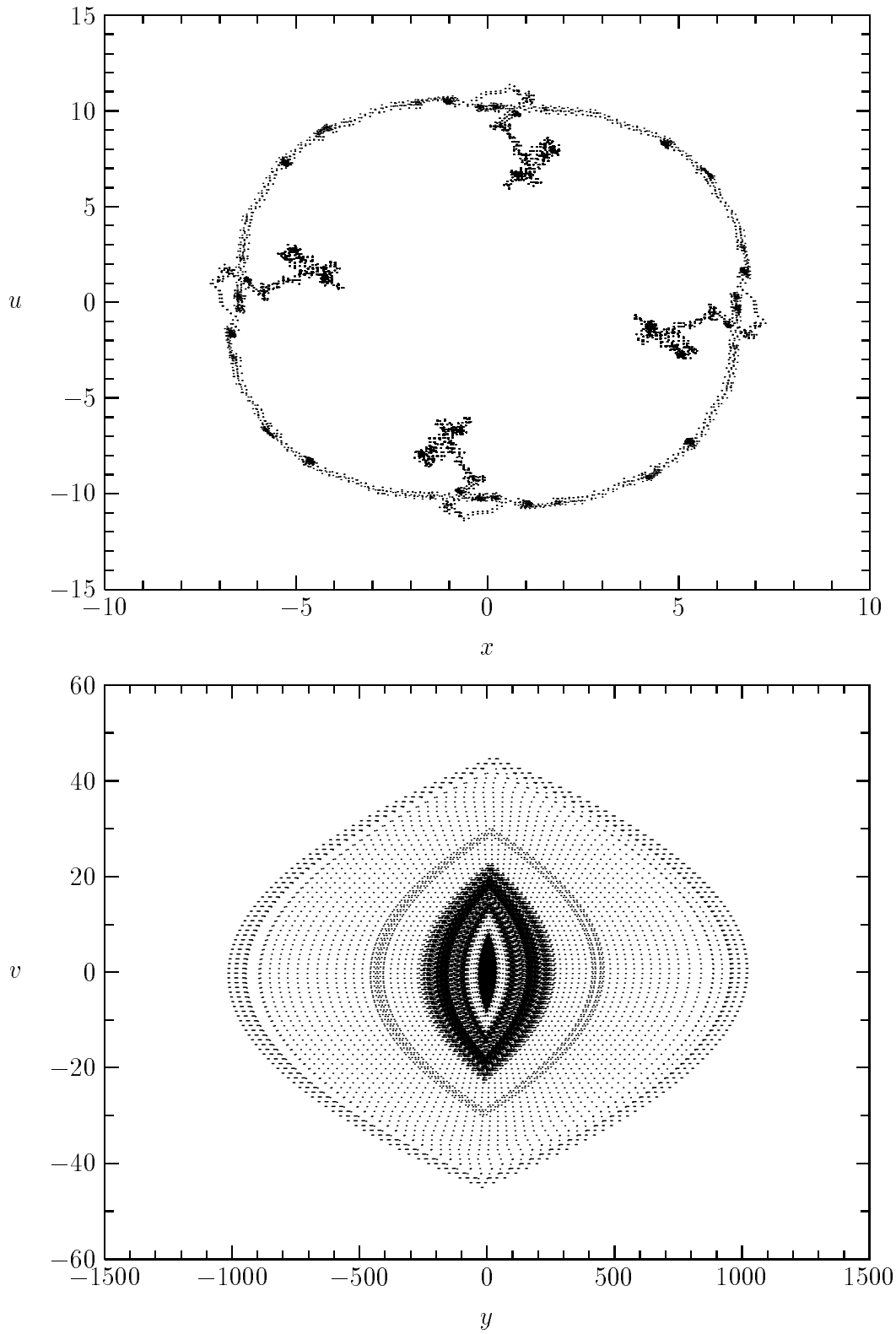


Abbildung B.8: Orbit für $q = 4$, $K = 1$, $\beta = \pi/2 - 0.1$ und $b = 2$. Startwerte $x_0 = 0$, $u_0 = 10$, $y_0 = 0$ und $v_0 = 3.1$. 30000 Iterationen.

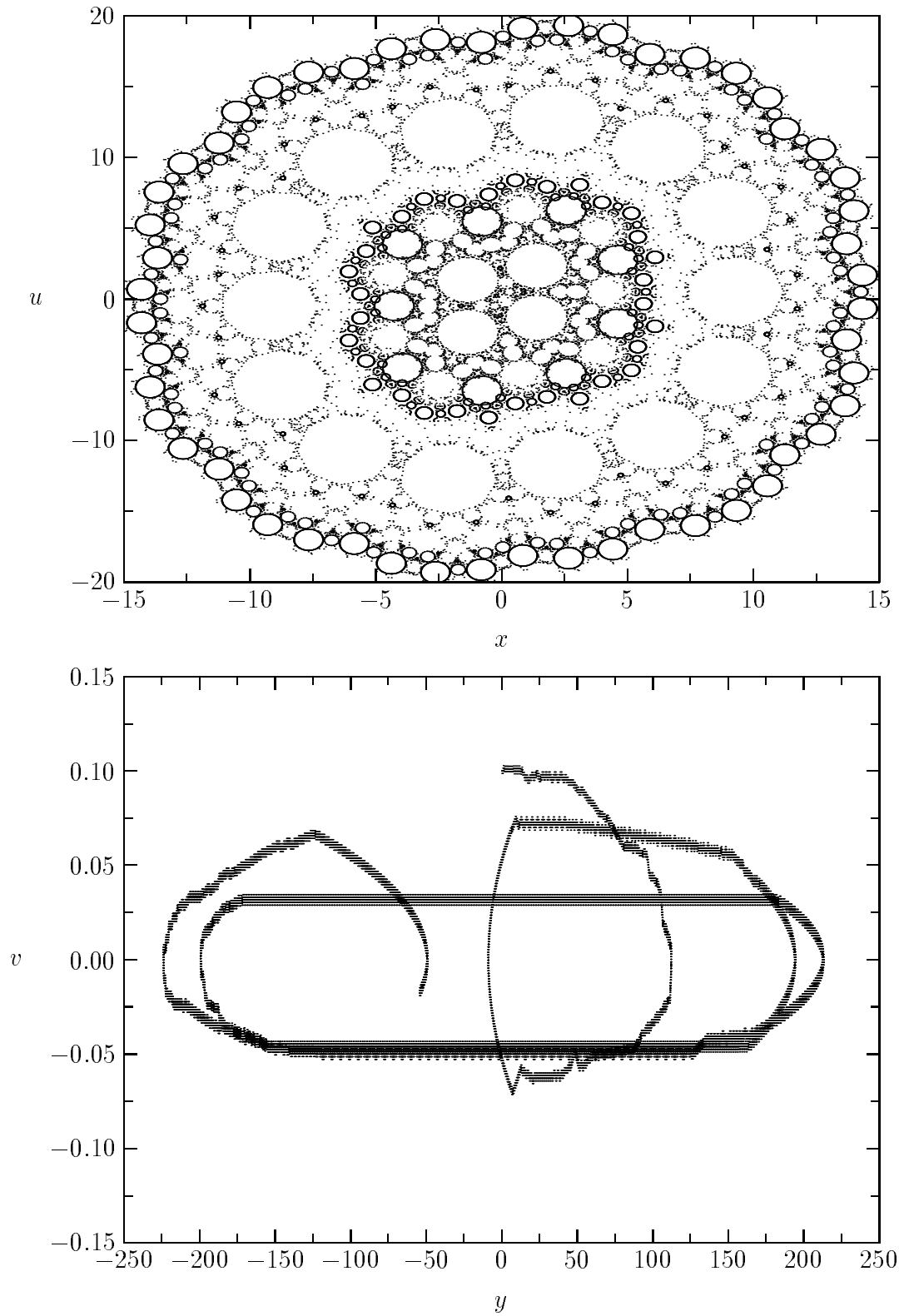
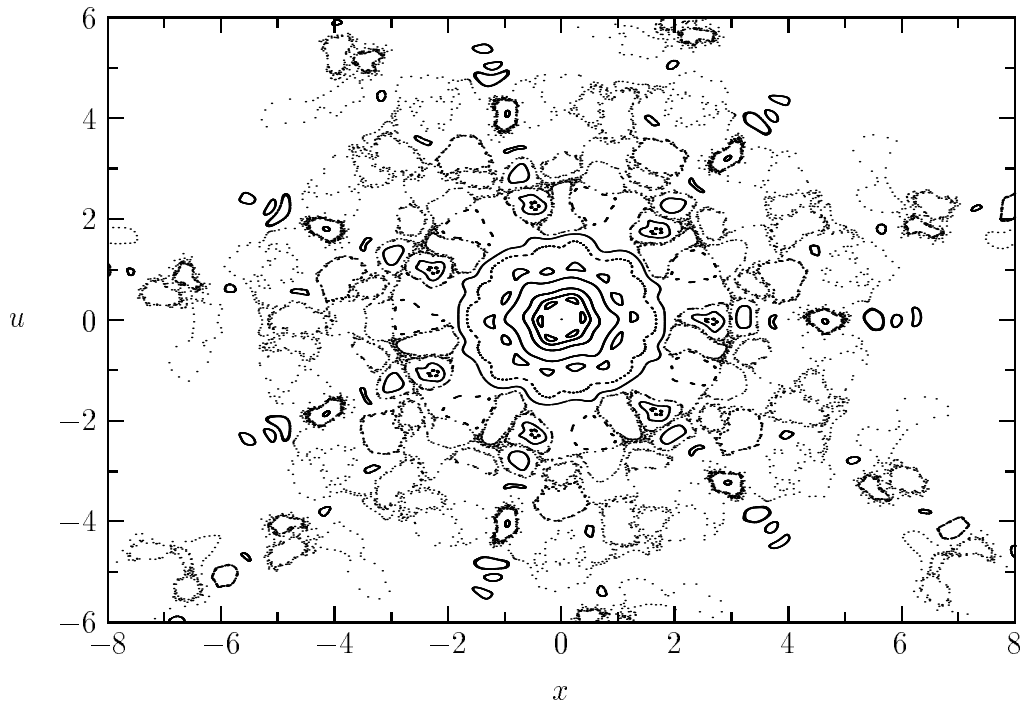
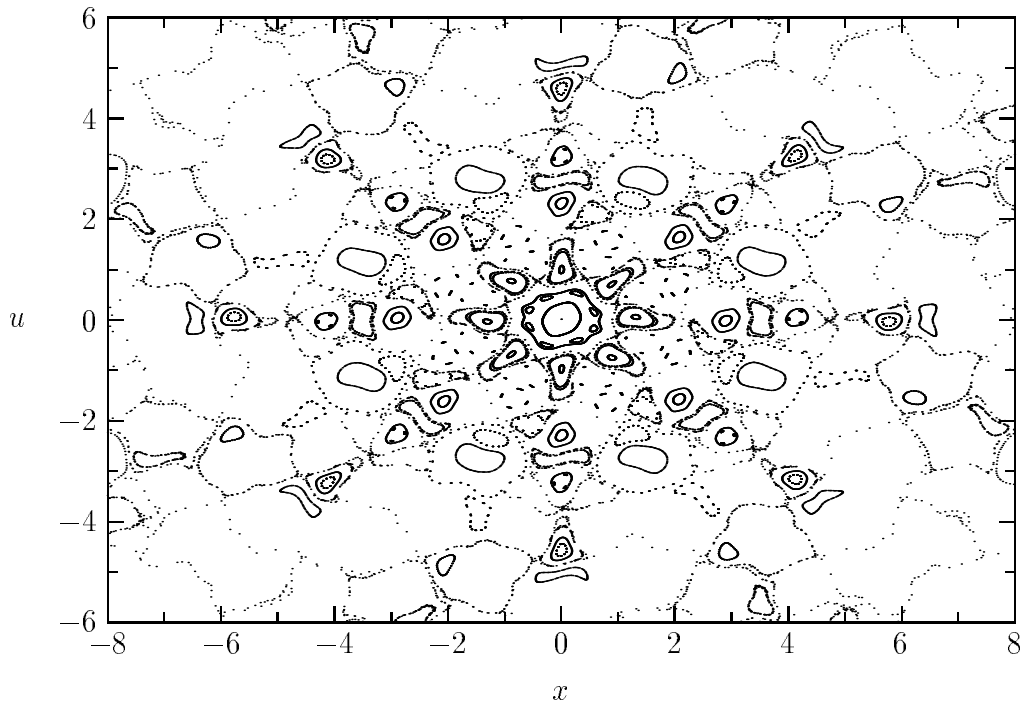


Abbildung B.9: Orbit für $q = 4.85$, $K = 1$, $\beta = 0.0014$ und $b = 0.01$. Startwerte $x_0 = 0$, $u_0 = 0.31$, $y_0 = 0$ und $v_0 = 0.1$. 50000 Iterationen.

Abbildung B.10: Phasenportrait für $q = 7$ und $K = 0.1$.Abbildung B.11: Phasenportrait für $q = 8$ und $K = 0.1$.

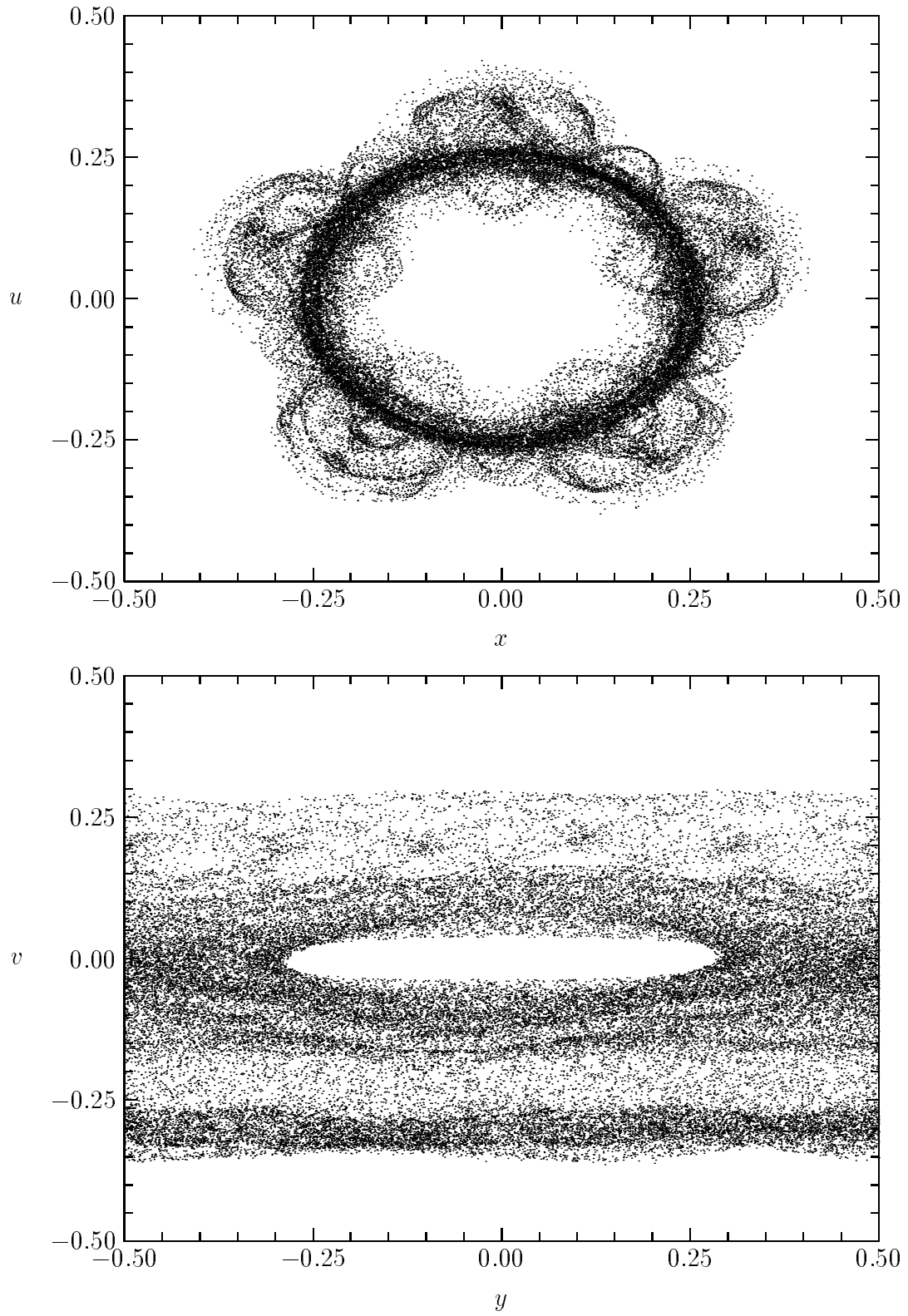


Abbildung B.12: Orbit für $q = 5$, $\beta = 0.78$ und $K = 0.3$. Startwerte $x_0 = 0$, $u_0 = 0.25$, $y_0 = 0$ und $v_0 = 0.2$. 50000 Iterationen.

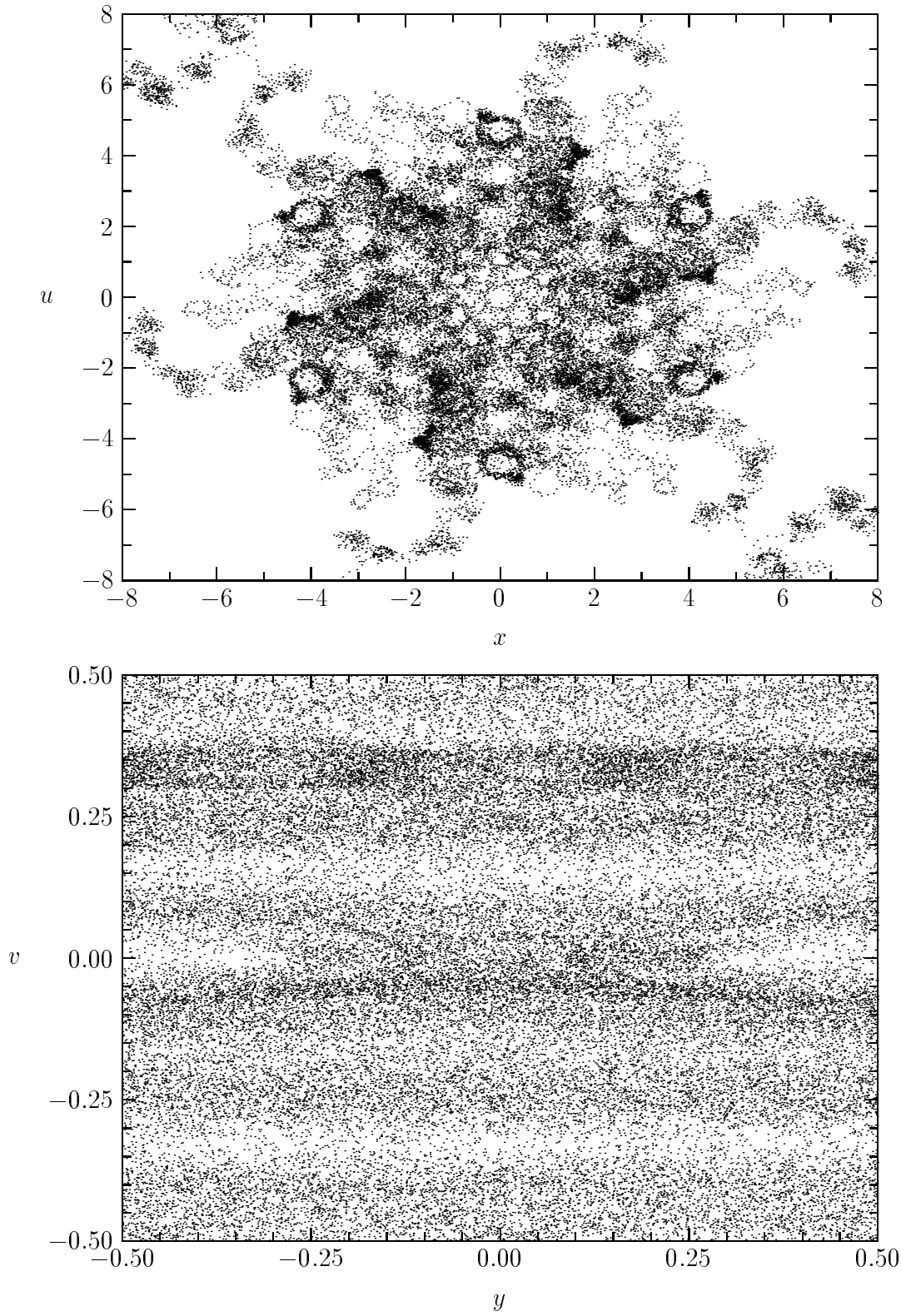


Abbildung B.13: Orbit für $q = 6$, $\beta = 0.4$ und $K = 0.8$. Startwerte $x_0 = 0$, $u_0 = 0.3$, $y_0 = 0$ und $v_0 = 0.35$. 50000 Iterationen.

Literaturverzeichnis

- [1] G. M. Zaslavsky, M. Y. Zakharov, A. I. Neishtadt, D. A. Usikov und A. A. Chernikov, *Multidimensional Hamiltonian chaos*, Sov. Phys. JETP **69** (1991) 885–897.
- [2] V. V. Afanasiev, R. Z. Sagdeev und G. M. Zaslavsky, *Chaotic jets with multifractal space–time random walk*, Chaos **1** (1991) 143–159.
- [3] G. M. Zaslavsky, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov und A. A. Chernikov, *Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns*, Band 1 von Cambridge Nonlinear Science Series, Cambridge University Press, 1991.
- [4] A. A. Chernikov, R. Z. Sagdeev und G. M. Zaslavsky, *Stochastic webs*, Physica D **33** (1988) 65–76.
- [5] B. V. Chirikov, *A universal instability of many–dimensional oscillator systems*, Phys. Rep. **52** (1979) 265–379.
- [6] J. D. Meiss, *Symplectic maps, variational principles, and transport*, Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 795–848.
- [7] M. Schwägerl und J. Krug, *Subdiffusive transport in stochastic webs*, Physica D **52** (1991) 142–156.
- [8] G. M. Zaslavsky, M. Y. Zakharov, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov und A. A. Chernikov, *Stochastic webs and diffusion of particles in a magnetic field*, Sov. Phys. JETP **64** (1986) 294–303.
- [9] L. Y. Yu und R. H. Parmenter, *Some new systems that generate a uniform stochastic web*, Chaos **2** (1992) 581–588.
- [10] J. S. W. Lamb, *Crystallographic symmetries of stochastic webs*, J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1992) 2921–2933.
- [11] I. Hoveijn, *Symplectic reversible maps, tiles and chaos*, Chaos, Soliton & Fractals **2** (1992) 81–90.
- [12] J. S. W. Lamb, *Reversing symmetries in dynamical systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992) 925–937.
- [13] J. A. G. Roberts und G. R. W. Quispel, *Chaos and time–reversal symmetry*, Phys. Rep. **216** (1992) 63–177.

- [14] J. Finn, PhD thesis, Physics Dept. University of Maryland, 1974.
- [15] H. Kook und J. D. Meiss, *Periodic orbits for reversible, symplectic mappings*, Physica D **35** (1989) 65–86.
- [16] J. M. Greene, R. S. McKay, F. Vivaldi und M. J. Feigenbaum, *Universal behaviour in families of area-preserving maps*, Physica D **3** (1981) 468–486.
- [17] J. Guckenheimer und P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Band 42 von Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1985.
- [18] J. H. Lowenstein, *Interpolating Hamiltonians for a stochastic-web with quasicrystalline symmetry*, Chaos **2** (1992) 413–422.
- [19] A. A. Chernikov, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov und G. M. Zaslavsky, *Weak Chaos and Structures*, Band 8 von Soviet Scientific Reviews / Section C, Harwood Academic Publishers London, New York, 1989.
- [20] W. Ludwig und C. Falter, *Symmetries in Physics*, Band 64 von Springer Series in Solid-State Science, Springer Berlin, 1988.
- [21] J. S. W. Lamb und G. R. W. Quispel, *Reversing k -symmetries in dynamical systems*, Physica D **73** (1994) 277–304.
- [22] G. M. Zaslavsky, M. Y. Zakharov, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov und A. A. Chernikov, *Generation of ordered structures with a symmetry axis from a Hamiltonian dynamics*, Sov. Phys. JETP Letters **44** (1986) 451–456.
- [23] A. Beeker, *Ein eindimensionales Kicksystem zur Modellierung irregulärer Streuung*, Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms Universität Münster, 1990.
- [24] J. M. Greene, *A method for determining a stochastic transition*, J. Math. Phys. **20** (1979) 1183–1201.
- [25] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos*, Physik-Verlag Weinheim, 1984.
- [26] C. Hippel, *Stochastische Netze: Struktur und diffusives Wachstum*, Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms Universität Münster, 1994.
- [27] M. Abramowitz und I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications New York, 1972.
- [28] P. Cvitanović und B. Eckhardt, *Symmetry decomposition of chaotic dynamics*, Nonlinearity **6** (1993) 277–311.
- [29] J. M. Robbins, *Discrete symmetries in periodic-orbit theory*, Phys. Rev. A **40** (1989) 2128–2136.
- [30] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Massachusetts, London, 1971.

Hiermit bestätige ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.