Normalformen und Quasiintegrale für magnetische Flaschen

Diplomarbeit
vorgelegt von
Ulf Martin Engel

Institut für Theoretische Physik I
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

— 9. September 1993 —

Magisches Theater

Eintritt nicht für jedermann

— nicht für jedermann

Nur für Verrückte!

Hermann Hesse
Der Steppenwolf

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Seit den sechziger Jahren erfährt die klassische Mechanik eine unerwartete Renaissance. Die exponentiell anwachsende Rechenleistung der verfügbaren Computer ermöglicht es seitdem, in zunehmendem Maße auch solche Systeme en detail zu untersuchen, die sich vorher aufgrund ihrer analytisch nicht erfaßbaren komplizierten Dynamik einer eingehenden Untersuchung entzogen. Insbesondere die nichtintegrablen Systeme — Systeme, für die es keine vollständige Lösung in geschlossener Form gibt — können nun intensiver studiert werden und geben ihre oft unübersehbar komplexe, chaotische Dynamik dem Betrachter preis. Nicht von ungefähr gehen die Entwicklung der Computertechnologie und das Aufkommen der „Chaostheorie“ Hand in Hand.

Im allgemeinen wird ein physikalisches dynamisches System durch einen Satz von miteinander gekoppelten Differentialgleichungen beschrieben. Das Mittel der Wahl zur computergestützten Untersuchung eines solchen Systems ist in der Regel die numerische Integration, mit deren Hilfe man anstelle einer analytischen Lösung des Problems Trajektorien im Phasenraum erhält, die dann weitergehend zu analysieren sind. Beispielsweise können Poincaré-Schnitte angefertigt oder Ljapunov-Exponenten berechnet werden und vieles andere mehr. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von „experimenteller Mathematik“. Wir wollen dieser Vorgehensweise keinesfalls ihre Berechtigung absprechen, im Gegenteil werden wir selbst ausgiebig von ihr Gebrauch machen. Die vorliegende Arbeit zeigt aber unter anderem auch, daß der Computer in der Theorie dynamischer Systeme nicht nur für numerische Zwecke nutzbringend eingesetzt werden, sondern auch entscheidend zur *theoretischen* Analyse beitragen kann. Diese wesentliche, bislang eher im Hintergrund stehende Anwendungsmöglichkeit wird besonders plastisch am Beispiel der Normalformentheorie.

Wie viele Ideen in der Theorie dynamischer Systeme geht auch der Grundgedanke der Normalformentheorie auf Poincaré zurück. Der Ansatz dieser Theorie besteht in dem Versuch, das zu untersuchende dynamische System durch eine Folge systematischer Umformungen in eine möglichst einfache — *normale* — Form zu transformieren. Was kann „Einfachheit“ im Rahmen der oben angesprochenen Differentialgleichungssysteme bedeuten? Poincaré zielte zunächst auf die vollständige Linearisierung des Vektorfeldes der Differentialgleichung. Unter gewissen Bedingungen (Nichtresonanz) gelingt dieses Vorhaben, und die Lösung des Problems wird trivial. Dies war einer der Kernpunkte von Poincarés Dissertation. Im allgemeinen, resonanten Fall gelingt aber die Linearisierung nicht, und man muß sich mit dem weniger ehrgeizigen Ziel bescheiden, das Vektorfeld so weit wie möglich zu vereinfachen. Als eine seiner *méthodes nouvelles* beschreibt Poincaré ein entsprechendes Verfahren in [Po92].

Bisher haben wir von allgemeinen Differentialgleichungssystemen gesprochen. Im Rahmen der Normalformentheorie Hamiltonscher dynamischer Systeme vereinfacht man dagegen nicht das Vektorfeld der kanonischen Differentialgleichungen, sondern wendet sich der Hamilton-Funktion selbst zu. Nach den Vorarbeiten von Poincaré entwarf Birkhoff [Bi66] als erster die Grundzüge dieser Variante der Normalformentheorie. Es gab dann eine Vielzahl weiterer Veröffentlichungen, von denen wir hier nur die Schlüsselarbeiten von Gustavson [Gu66], Dragt und Finn [DrFi79] und Stegemerten [St91] nennen.

Die Analyse der Hamilton-Funktion anstelle des Vektorfeldes hat den entscheidenden Vorteil, daß man nach erfolgter Normalisierung wichtige physikalische Eigenschaften des Systems — in Gestalt eines zweiten (formalen) Integrals der Bewegung — direkt aus der Hamilton-Funktion ablesen kann. Insbesondere bei Systemen mit nur zwei Freiheitsgraden der Bewegung kann die Hamiltonsche Normalformentheorie zur vollständigen Integration, also zur Lösung des Problems führen. Und selbst wenn das System nichtintegrabel oder höherdimensional ist, gelingt es mit Hilfe des formalen Integrals doch, die Systemeigenschaften genauer zu charakterisieren. Beispielsweise interessiert man sich in konkreten Situationen oft für das mittel- und langfristige Verhalten eines nichtintegrablen Systems. Dieses Verhalten läßt sich unter gewissen Bedingungen trotz der sehr komplexen Dynamik erstaunlich genau mit Hilfe des zweiten Integrals vorhersagen, auch wenn es lediglich näherungsweise konstant, also ein „Quasiintegral“ ist. Die Normalformentheorie ordnet sich damit harmonisch in eines der zentralen Themengebiete der klassischen Mechanik ein: die Suche nach weiteren Integralen der Bewegung.

Dem Computer fällt im Rahmen der skizzierten Theorie die Aufgabe zu, die vereinfachende Transformation der Hamilton-Funktion durchzuführen. Wir können zwar die bei dieser Normalisierung zu berücksichtigenden Regeln analytisch formulieren, aber die praktische Durchführung erfordert so viele — jeweils für sich triviale — Rechenschritte, daß eine Berechnung „von Hand“ aussichtslos erscheint, wenn man hinreichend genaue Ergebnisse erzielen möchte. Dies gilt um so mehr, als wir in dieser Arbeit einen verallgemeinerten Normalformenkalkül diskutieren, der die Theorie Birkhoffs und Gustavsons zwar beträchtlich erweitert, aber auch den Umfang der erforderlichen Rechnungen potenziert.

Das vorrangige Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der umfassenden Analyse einer Klasse von Modellsystemen, der sogenannten magnetischen Flaschen, die mit dem klassischen Gustavsonschen Normalformenkalkül nicht behandelt werden können. Um in die Problematik einzuführen, stellen wir in Kapitel 1 zunächst die Poincarésche Theorie vor und zeigen, warum sie im Rahmen der Hamilton-Mechanik inadäquat ist. Folgerichtig gehen wir dann zur Theorie Gustavsons über, deren Anwendungsbereich zwar auf Hamilton-Funktionen eines gewissen Typs beschränkt ist, anhand derer aber die Ideen und Verfahrensweisen der Normalformentheorie für Hamilton-Funktionen vergleichsweise einfach dargestellt werden können. Wir besprechen als nächstes die auf Dragt, Finn und Stegemerten zurückgehende Theorie, die auf alle in Gestalt einer Potenzreihe vorliegenden Hamilton-Funktionen angewendet werden kann. Insbesondere zeigen wir, wie sich im Rahmen dieser Theorie für alle Hamilton-Systeme ein zweites Integral der Bewegung bestimmen läßt.

In Kapitel 2 leiten wir die Hamilton-Funktionen der drei als Modellsysteme dienenden Magnetflaschen her, auf die wir im folgenden den Normalformenkalkül anwenden wollen. Unter einer magnetischen Flasche verstehen wir ein Magnetfeld, in dem die gebundene Bewegung eines geladenen Teilchens möglich ist. Wir richten dabei unser Hauptaugenmerk auf die von Brown und Gabrielse eingeführte Magnetflasche [BrGa86]. Daneben diskutieren wir auch die auf Dragt und Finn zurückgehende „Mirror Machine“ und das Størmer-Problem [St55]. Am Beispiel des letztgenannten Systems zeigen wir, daß die direkte Anwendung der Normalformentheorie in der hier diskutierten Form unmöglich ist, wenn die Hamilton-Funktion nicht in Gestalt einer Potenzreihe vorliegt. Wir zeigen aber auch, wie man dieses Problem umgehen kann.

Das Kapitel 3 ist der konventionellen Analyse der Dynamik in der Brown-Gabrielse-Flasche gewidmet. Wir weisen unter anderem nach, daß die Dynamik in diesem System tatsächlich gebunden ist und führen mit Hilfe von Poincaré-Schnitten den numerischen Nachweis der Nichtintegrabilität des Systems.

Kapitel 4 bildet den Kern der vorliegenden Arbeit. Die Bedeutung dieses Kapitels liegt vor allem darin, daß hier zum ersten Mal die Normalformentheorie in der von Stegemerten vorgeschlagenen Formulierung angewandt wird. Wir beschreiben detailliert, wie die Hamilton-Funktionen magnetischer Flaschen in Normalform zu überführen sind und bestimmen mit Hilfe der in diesem Kapitel entwickelten Techniken ein Quasiintegral für das Brown-Gabrielse-System. Die Güte, das heißt die Konstanz, dieses Quasiintegrals wird im Rahmen einer *lokalen* Analyse diskutiert. In einem weiteren Abschnitt über die *globale* Analyse des Quasiintegrals schlagen wir drei neue

Verfahren vor, die das Quasiintegral verwenden, um das Phasenportrait des Systems zu untersuchen und zu klassifizieren. Im Zuge dieser Darstellung zeigen wir die Schwächen eines entsprechenden, von Kaluža und Robnik [KaRo92] vorgeschlagenen Verfahrens auf.

Wir beenden die Arbeit in Kapitel 5 mit einer kursorischen Untersuchung typischer Quasiintegrale von Magnetflaschen, um einen Eindruck von dem Zusammenhang zwischen der Gestalt der Hamilton-Funktion und den Divergenzeigenschaften des Quasiintegrals zu erhalten.

In Anhang A geben wir schließlich, aufbauend auf Vorarbeiten von Galin [Ar89, Anhang 6], die formalen Integrale der Bewegung für sämtliche (bis auf eine) Normalformen von Hamilton-Funktionen an.

Kapitel 1

Theorie der Normalformen und Quasiintegrale

Everything should be made as simple as possible,
but not simpler.

Albert Einstein

In diesem Kapitel diskutieren wir Verfahren, mittels derer ein Hamiltonsches dynamisches System,

$$\begin{array}{rcr} \dot{\boldsymbol{q}} & = & D_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \\ \dot{\boldsymbol{p}} & = & -D_{\boldsymbol{q}} H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \end{array} \quad , \tag{1.1}$$

also ein System von $2n$ gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung, das sich aus einer Hamilton-Funktion $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ herleiten läßt, gezielt vereinfacht werden kann. Wir betrachten an dieser Stelle noch kein spezielles physikalisches System, sondern halten die Diskussion so allgemein wie möglich. Dementsprechend sind hier die $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^n$ ein beliebiger vollständiger Satz von zueinander kanonisch-konjugierten Koordinaten bzw. Impulsen.

Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf autonome Systeme. Die hier dargestellten Verfahren lassen sich aber prinzipiell auch auf zeitabhängige Systeme übertragen. Man vergleiche hierzu beispielsweise [Ar83, Oz88].

Die jeglicher „Normalformentheorie“ zugrunde liegende Idee ist es, das betrachtete System so weit wie möglich zu vereinfachen, ohne dabei charakteristische Systemeigenschaften zu verlieren. Man möchte eine ganze Klasse von Objekten auf einen einzigen typischen und möglichst einfachen Vertreter dieser Klasse zurückführen. Dabei ist entscheidend, daß man aus den Eigenschaften der Normalform diejenigen des zu untersuchenden Systems folgern können muß [NaSc61]. Man fordert also die — in jedem einzelnen Fall noch genauer zu spezifizierende — Äquivalenz des Ausgangssystems und seiner Normalform.

Was nun „Vereinfachung" konkret bedeutet, hängt von der Art des zu untersuchenden Systems ab. Es gibt entsprechende Theorien für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, diskrete Abbildungen, Matrizen usw. In der linearen Algebra wird beispielsweise die Jordansche Normalform einer quadratischen Matrix diskutiert (siehe zum Beispiel [Fi86]): Jede komplexe (n,n)-Matrix A kann durch eine Ähnlichkeitstransformation (die in diesem Fall die angesprochene Äquivalenz sicherstellt) mit einer unitären (n,n)-Matrix X auf Jordansche Normalform J gebracht werden,

$$A = XJX^* = X \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r \end{pmatrix} X^* \tag{1.2a}$$

mit

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix} , \quad k = 1, 2, \ldots, r \quad , \tag{1.2b}$$

wobei die Dimension des Jordan-Blockes J_k der algebraischen Vielfachheit des Eigenwertes λ_k als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A entspricht. J stellt eine erhebliche Vereinfachung gegenüber A dar und geht eindeutig und umkehrbar aus A hervor. Normalformentheorie für Differentialgleichungen oder Hamilton-Funktionen ist aber im allgemeinen erheblich komplizierter als Normalformentheorie für Matrizen, weil die benötigten Transformationen, anders als X in Gl. (1.2a), nichtlinear sind.

Der historischen Entwicklung folgend und um das weitere Vorgehen zu motivieren, gehen wir zunächst auf die von Poincaré [Po92] begründete Normalformentheorie beliebiger, nicht notwendigerweise Hamiltonscher Differentialgleichungen ein. Wir stützen uns dabei vor allem auf die modernere Diskussion in [Ar83].

Es zeigt sich bald, daß es vorteilhaft ist, nicht das Vektorfeld der Differentialgleichung, sondern die entsprechende Hamilton-Funktion zu untersuchen, falls das vorliegende System ein Hamilton-System ist. Deshalb diskutieren wir im Anschluß an die allgemeine Theorie die spezielle Normalformentheorie für Hamilton-Systeme. Die klassische Theorie geht auf Birkhoff [Bi66] zurück. Eine modernere und allgemeinere Darstellung der Birkhoffschen Theorie gab Gustavson [Gu66]; in dieser Form wird die Normalformentheorie für Hamilton-Funktionen bis heute vielfach angewendet (vgl. [SaVe85, Oz88, KaRo92]). Allerdings kann auch die Gustavsonsche Theorie nicht auf sämtliche Hamilton-Funktionen angewendet werden.

Dragt und Finn [DrFi76a, DrFi79] formulierten den Gustavsonschen Formalismus in der Sprache der Lie-Transformationstheorie [Ga68, De69, Ca81, LiLi92], welche eine erheblich übersichtlichere Darstellung der Transformation auf Normalform ermöglicht. Im Gegensatz zu Gustavsons Methode, bei der die Erzeugende der Transformation sowohl von den alten als auch den neuen Koordinaten abhängt, treten bei Dragt und Finn solche „gemischten" Variablensätze nicht auf. Darüber hinaus gelingt mit Hilfe von Lie-Transformationen die Erweiterung der Hamiltonschen Normalformentheorie auf beliebige Hamilton-Funktionen, die in Form einer formalen Potenzreihe vorliegen. Die ersten Schritte in diese Richtung wurden ebenfalls von Dragt und Finn in [DrFi79] unternommen und von Stegemerten [St91] und Meyer und Hall [MeHa92] zu einer umfassenden Theorie ausgebaut.

Eines der zentralen Anliegen der Theorie dynamischer Systeme ist die Bestimmung von Integralen der Bewegung, soweit diese überhaupt existieren. Ein Integral der Bewegung (oder auch: Konstante der Bewegung) ist eine Funktion $I(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$, die entlang jeder Flußlinie (Trajektorie) des Differentialgleichungssystems (1.1) konstant ist. Die Existenz eines solchen Integrals der Bewegung bedeutet eine erhebliche Vereinfachung der Dynamik, weil dadurch jede Trajektorie auf eine der durch $I(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) =$ konst. definierten Hyperflächen im Phasenraum beschränkt ist. Somit wird die Dimension des betrachteten Problems um eins reduziert. Dementsprechend ist die Kenntnis eines weiteren Integrals (zusätzlich zu den ohnehin schon bekannten Integralen) gleichbedeutend mit einer wesentlichen zusätzlichen Information über das System. Die Existenz mehrerer voneinander unabhängiger Integrale der Bewegung[1] $I_j(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ zieht eine weitere Vereinfachung nach sich, denn die Trajektorien können in diesem Fall den *Durchschnitt* der durch die Invarianz der I_j gegebenen Hyperflächen nicht verlassen. Wenn es sogar n voneinander unabhängige Integrale der Bewegung gibt, also ebensoviele wie Freiheitsgrade der Bewegung, dann gilt im Fall gebundener Bewegung das Liouville-Arnold-Theorem [Ar89]. Es besagt, daß die Trajektorien (quasi-) periodisch auf einem n-Torus verlaufen, so daß die Dynamik des Systems vollständig geordnet und nicht chaotisch ist.

Die Suche nach weiteren Integralen der Bewegung ist demnach ein wichtiges Verfahren zur Analyse dynamischer Systeme. Speziell im Fall zweier Freiheitsgrade der Bewegung ($n = 2$) bedeutet die Existenz eines zweiten Integrals der Bewegung — neben $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ — die vollständige Integrabilität des

[1]Zur Definition der „Unabhängigkeit" von Integralen der Bewegung vergleiche Abschnitt 1.2.4.

Systems. In [Hi87] findet man eine umfassende Darstellung der bekannten Methoden für die Suche nach diesem zweiten Integral für $n = 2$. Es bleibt aber festzustellen, daß es kein allgemeines Verfahren für diese Suche gibt. Ohnehin sind die meisten Hamilton-Systeme nicht integrabel.

Wie hängen nun die Normalformentheorie und die Suche nach Integralen der Bewegung zusammen? Im Hénon-Heiles-System, einem zweidimensionalen autonomen Hamilton-System, findet man [HeHe64] unter gewissen Bedingungen empirisch, das heißt durch die numerische Integration der kanonischen Gleichungen und Analyse des so entstehenden Phasenportraits, die Existenz eines zweiten Integrals der Bewegung. Für eine Vielzahl von weiteren Modellsystemen gibt es gleichlautende Befunde. Unter anderem um diese Ergebnisse zu erklären, entwarf Gustavson seine Normalformentheorie. Deren Anwendung ermöglicht die konsistente Konstruktion von Näherungsformeln für die experimentell gefundenen Integrale. Eine wesentliche Anwendung auch der Dragt-Finn-Stegemertenschen Normalform eines Hamilton-Systemes ist die systematische Konstruktion eines formalen Integrals der Bewegung, das — neben der Hamilton-Funktion — eine zweite Konstante der Bewegung darstellt, falls die Normalformtransformation konvergiert. Damit erweist sich die zunächst als *l'art pour l'art* anmutende Normalformentheorie als mächtiges Werkzeug in der Theorie dynamischer Systeme.

Man spricht allerdings in diesem Zusammenhang von *Quasiintegralen* anstelle von Integralen der Bewegung, weil man mit Hilfe der Normalformentheorie im allgemeinen nur Näherungsformeln für die gesuchten Integrale bestimmen kann.

1.1 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Normalformentheorie für allgemeine autonome Differentialgleichungssysteme, die sich also nicht notwendigerweise gemäß Gl. (1.1) aus einer Hamilton-Funktion ableiten lassen müssen. Abschnitt 1.1.1 dient der Vorstellung der Theorie, Abschnitt 1.1.2 zeigt dann die gravierenden Nachteile, die diese Variante der Normalformentheorie aufweist, wenn sie auf Hamilton-Systeme angewandt wird.

1.1.1 Allgemeine Theorie

Wir betrachten ein kontinuierliches autonomes dynamisches System, also N gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) , \quad \boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^N \quad , \tag{1.3}$$

wobei wir zusätzlich annehmen, daß das System im Ursprung einen Fixpunkt hat[2]:

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad . \tag{1.4}$$

Alle folgenden Überlegungen sind *lokal* in dem Sinn, daß das Vektorfeld lediglich in der Nähe des Fixpunktes untersucht wird und die durchzuführenden Koordinatentransformationen nur in einer Umgebung des Fixpunktes „beliebig genau“ angegeben werden können.

Wir beschränken uns auf Vektorfelder $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$, die als vektorwertige Potenzreihe vorliegen:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \sum_{l \geq 1} \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{z}) \quad . \tag{1.5}$$

Diese Potenzreihe wird gebildet durch die vektorwertigen homogenen Polynome vom Grad l in den Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_N$:

$$\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{z}) \; = \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{m_1, m_2, \ldots, m_N \geq 0 \\ m_1 + m_2 + \cdots + m_N = l}} a^{(i)}_{m_1, m_2, \ldots, m_N} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_N^{m_N} \, \boldsymbol{e}_i \tag{1.6}$$

mit den reellen Koeffizienten $a^{(i)}_{m_1, m_2, \ldots, m_N}$ und den kanonischen Basisvektoren $\boldsymbol{e}_i$ des $\mathbf{R}^N$. $\boldsymbol{F}_l$ ist ein Element des Raumes $\mathcal{H}_l$ der vektorwertigen homogenen Polynome vom Grad l in N Variablen. Wir nennen den Vektorraum aller vektorwertigen Polynome $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$ in N Variablen $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{l=1}^{\infty} \mathcal{H}_l \quad . \tag{1.7}$$

Mit Hilfe der Multiindex-Notation vereinfachen wir die Darstellung von $\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{z})$,

$$\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{z}) \; = \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\boldsymbol{m}| = l} a^{(i)}_{\boldsymbol{m}} \, \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}} \, \boldsymbol{e}_i \quad , \tag{1.8}$$

[2]Falls das System allgemeiner in der Nähe des Fixpunktes $\boldsymbol{z}_0 \neq \mathbf{0}$ analysiert werden soll, kann man immer durch die Transformation $\boldsymbol{z} \mapsto \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0$ zu Gl. (1.4) übergehen.

wobei wir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m} &\in \mathbf{N}_0^N \quad , \\ |\boldsymbol{m}| &= \sum_{j=1}^{N} m_j \quad , \\ \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}} &= \prod_{j=1}^{N} z_j^{m_j} \quad , \\ a_{\boldsymbol{m}}^{(i)} &= a_{m_1,m_2,\ldots,m_N}^{(i)} \end{aligned} \tag{1.9}$$

gesetzt haben.

Der lineare Anteil des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$ kann mit Hilfe der Jacobi-Matrix

$$L := D_{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0}) \tag{1.10}$$

auch in der Form

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{z}) = L\boldsymbol{z} \tag{1.11}$$

geschrieben werden. Die (N, N)-Matrix L ist für die Normalformentheorie von entscheidender Bedeutung.

Die fundamentale, der gesamten Normalformentheorie für Differentialgleichungen zugrunde liegende Idee Poincarés war es, das Vektorfeld durch eine — in der Regel unendliche — Folge von Transformationen systematisch zu linearisieren. Wenn dieses Programm ohne Abstriche durchgeführt werden kann[3], wenn man also eine (lokal) invertierbare Koordinatentransformation $\boldsymbol{T}$ mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} \; : \; \mathbf{R}^N &\to \mathbf{R}^N \\ \tilde{\boldsymbol{z}} &\mapsto \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}(\tilde{\boldsymbol{z}}) \end{aligned} \tag{1.12}$$

findet, die Gl. (1.3) vollständig linearisiert,

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{z}}} = L\tilde{\boldsymbol{z}} \quad , \tag{1.13}$$

dann ist auch Gl. (1.3) schon vollständig gelöst. Denn die allgemeine Lösung $\tilde{\boldsymbol{z}}(t; \tilde{\boldsymbol{z}}_0)$ der transformierten Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\tilde{\boldsymbol{z}}(t = 0) = \tilde{\boldsymbol{z}}_0$ ist [HiSm74]

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{z}}(t; \tilde{\boldsymbol{z}}_0) &= \exp(tL)\, \tilde{\boldsymbol{z}}_0 \\ &\equiv \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} L^j \right) \tilde{\boldsymbol{z}}_0 \quad , \end{aligned} \tag{1.14}$$

und man hat damit für die allgemeine Lösung von Gl. (1.3):

$$\boldsymbol{z}(t; \boldsymbol{z}_0) = \left(\boldsymbol{T} \circ \exp(tL) \circ \boldsymbol{T}^{-1} \right) \boldsymbol{z}_0 \tag{1.15a}$$

[3] Das *Hartman-Grobman-Theorem* [GuHo83] weist die Linearisierbarkeit von Gl. (1.3) mittels eines Homöomorphismus $\boldsymbol{T}$ in der Nähe eines *hyperbolischen* Fixpunktes nach.

bzw.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{z}_0 & \xrightarrow{\text{Fluß von } \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})} & \boldsymbol{z}(t;\boldsymbol{z}_0) \\ \boldsymbol{T}^{-1}\Big\downarrow & & \Big\uparrow\boldsymbol{T} \\ \tilde{\boldsymbol{z}}_0 & \xrightarrow{\exp(tL)} & \tilde{\boldsymbol{z}}(t;\tilde{\boldsymbol{z}}_0) \end{array} \quad . \tag{1.15b}$$

Es bleibt also zu zeigen, ob und wie die linearisierende Transformation (1.12) bestimmt werden kann. Hierfür untersuchen wir zunächst, wie sich die Transformation $\boldsymbol{z} \mapsto \tilde{\boldsymbol{z}}$,

$$\boldsymbol{z} = \tilde{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) \tag{1.16}$$

mit $\boldsymbol{T}_m \in \mathcal{H}_m, m \geq 2$, auf die Differentialgleichung auswirkt. Unter (1.16) geht Gl. (1.3) über in

$$\Big(\mathrm{id}_N + D\boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}})\Big)\dot{\tilde{\boldsymbol{z}}} = \sum_{l\geq 1} \boldsymbol{F}_l\left(\tilde{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}})\right) \quad , \tag{1.17}$$

wobei id_N für die N-dimensionale identische Abbildung steht. Bei Vernachlässigung von Termen höheren Grades als m (angedeutet durch das Symbol $\mathcal{O}\left(|\tilde{\boldsymbol{z}}|^{m+1}\right)$) erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{z}}} &= \Big(\mathrm{id}_N + D\boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}})\Big)^{-1} \sum_{l\geq 1} \boldsymbol{F}_l\left(\tilde{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}})\right) \\ &= \Big(\mathrm{id}_N - D\boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}})\Big) \sum_{l\geq 1} \Big(\boldsymbol{F}_l(\tilde{\boldsymbol{z}}) + D\boldsymbol{F}_l(\tilde{\boldsymbol{z}})\boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}})\Big) + \mathcal{O}\left(|\tilde{\boldsymbol{z}}|^{m+1}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{m-1} \boldsymbol{F}_l(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \Big[\boldsymbol{F}_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) + L\boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) - D\boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}})\,(L\tilde{\boldsymbol{z}})\Big] + \mathcal{O}\left(|\tilde{\boldsymbol{z}}|^{m+1}\right). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Dieses Ergebnis ist sehr interessant. Es verdeutlicht, daß die Transformation (1.16)

(i) die Terme des Vektorfeldes mit kleinerem Grad als m invariant läßt,

(ii) den zwischen den eckigen Klammern stehenden Anteil vom Grad m ergibt,

(iii) auch im Fall $\boldsymbol{F}_l = \boldsymbol{0}$ für alle $l > m$ Terme mit größerem Grad als m zur Folge haben kann.

Punkt (i) ermöglicht die Anwendung eines iterativen Verfahrens für die Normalisierung des Vektorfeldes: Für $m = 2, 3, \ldots$ transformieren wir sukzessive mittels einer „Erzeugenden“ $\boldsymbol{T}_m$. Dabei ist durch (i) sichergestellt, daß das Ergebnis der vorangegangenen Transformationen $\boldsymbol{T}_l$ mit $l < m$, d. h. die weitestmögliche Eliminierung der Grad l-Terme des Vektorfeldes, durch $\boldsymbol{T}_m$ nicht mehr verändert wird.

Mit Hilfe von (ii) können wir genauer formulieren, was „Normalisierung" in diesem Zusammenhang überhaupt bedeuten kann. Im Sinne der Poincaréschen Idee wollen wir mit der von $\boldsymbol{T}_m$ erzeugten Transformation die Vektorfeldanteile vom Grad m zum Verschwinden bringen, also

$$\boldsymbol{F}_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) + L\boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) - D\boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}})\,(L\tilde{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{0} \tag{1.19}$$

lösen. Dabei sind $\boldsymbol{F}_m$ und L gegeben, $\boldsymbol{T}_m$ ist gesucht.

Zur Diskussion von Gl. (1.19) definieren wir

$$\tilde{\boldsymbol{F}}_m := \boldsymbol{F}_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) + L\boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) - D\boldsymbol{T}_m(\tilde{\boldsymbol{z}})\,(L\tilde{\boldsymbol{z}}) \tag{1.20}$$

und führen den *zu dem linearen Vektorfeld* $L\tilde{\boldsymbol{z}}$ *adjungierten Lie-Operator* ad_L ein als die *Lie-Klammer* mit $L\tilde{\boldsymbol{z}}$ [GuHo83, LiLi92]:

$$\begin{array}{llcll} \mathrm{ad}_L\colon & \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} & \\ & \boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{z}}) & \mapsto & \mathrm{ad}_L(\boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{z}})) & := [\boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{z}}), L\tilde{\boldsymbol{z}}] \\ & & & & = D\boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{z}})(L\tilde{\boldsymbol{z}}) - L\boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{z}}) \quad . \end{array} \tag{1.21}$$

ad_L ist eine lineare Abbildung auf dem Vektorraum der vektorwertigen Polynome. Wir benötigen diesen Operator oft mit dem eingeschränkten Definitionsbereich $\mathcal{H}_m$ und definieren deshalb

$$\mathcal{B}_m := \mathrm{ad}_L\Big|_{\mathcal{H}_m} \quad . \tag{1.22}$$

$\mathcal{B}_m$ hängt nur vom linearen Anteil des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ ab (und natürlich von m). Dies hat die Invarianz von $\mathcal{H}_m$ unter $\mathcal{B}_m$ zur Folge: $\mathcal{B}_m(\mathcal{H}_m) \subseteq \mathcal{H}_m$.

Damit erhalten wir für die zu lösende Gl. (1.19):

$$\boldsymbol{F}_m - \mathcal{B}_m(\boldsymbol{T}_m) = \tilde{\boldsymbol{F}}_m \tag{1.23a}$$

mit der Nebenbedingung

$$\tilde{\boldsymbol{F}}_m = 0 \quad . \tag{1.23b}$$

Eine Gleichung dieses Typs heißt nach Arnold [Ar83] *homologische Gleichung*. $\mathcal{B}_m$ und $\boldsymbol{F}_m$ sind bekannt, $\boldsymbol{T}_m$ ist zu bestimmen. Die Formulierung von Gl. (1.19) in der Form von Gl. (1.23) erscheint an dieser Stelle unnötig kompliziert. Im Hinblick auf die im Anschluß zu besprechende Verallgemeinerung der Bedingung $\tilde{\boldsymbol{F}}_m = \boldsymbol{0}$, Gl. (1.23b'), erweist sich diese Darstellung aber tatsächlich als sinnvoll.

Falls für diese Gleichung eine Lösung $\boldsymbol{T}_m$ existiert, findet man sie mit Hilfe der Zerlegung von $\mathcal{H}_m$ in den Bildvektorraum $\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_m) := \mathcal{B}_m(\mathcal{H}_m)$ von $\mathcal{B}_m$ und einen dazu komplementären Untervektorraum $\mathcal{N}_m$:

$$\mathcal{H}_m = \mathcal{N}_m \oplus \mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_m) \quad . \tag{1.24}$$

Eine solche Zerlegung läßt sich immer finden, sie ist aber in der Regel nicht eindeutig. Falls $\mathcal{B}_m$ bijektiv ist, besteht $\mathcal{N}_m$ nur aus dem Nullvektor. Gl. (1.24) induziert eine Zerlegung von $\boldsymbol{F}_m$:

$$\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{F}'_m + \boldsymbol{F}''_m \tag{1.25a}$$

mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}'_m &\in \mathcal{N}_m \\ \boldsymbol{F}''_m &\in \mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_m) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{F}''_m = \mathcal{B}_m(\boldsymbol{U}_m),\ \boldsymbol{U}_m \in \mathcal{H}_m \quad . \end{aligned} \tag{1.25b}$$

Man beachte an dieser Stelle, daß auch $\boldsymbol{U}_m$ nicht eindeutig aus $\boldsymbol{F}''_m$ hervorgeht. Vielmehr ist $\boldsymbol{U}_m$ lediglich bis auf einen Summanden aus dem Kern von $\mathcal{B}_m$ festgelegt. Mit Gl. (1.25) erhalten wir für die homologische Gleichung (1.23a):

$$\mathcal{B}_m\,(\boldsymbol{U}_m - \boldsymbol{T}_m) + \left(\boldsymbol{F}'_m - \tilde{\boldsymbol{F}}_m\right) = 0 \quad . \tag{1.26}$$

Diese ist genau dann unter der Nebenbedingung (1.23b) lösbar, wenn $\boldsymbol{F}'_m = \mathbf{0}$ ist, wenn also $\boldsymbol{F}_m \in \mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_m)$ gilt. Die Lösung ist dann durch $\boldsymbol{T}_m = \boldsymbol{U}$ gegeben.

Die Bedingung $\boldsymbol{F}'_m = \mathbf{0}$ ist im allgemeinen *nicht* erfüllt. Wenn $\boldsymbol{F}'_m \neq \mathbf{0}$ ist, dann kann man die homologische Gleichung zwar nicht mehr mit $\tilde{\boldsymbol{F}}_m = \mathbf{0}$ lösen, wohl aber sie dieser Lösung so nahe wie möglich bringen, indem man lediglich fordert, daß die schwächere Nebenbedingung

$$\tilde{\boldsymbol{F}}_m \in \mathcal{N}_m \tag{1.23b'}$$

erfüllt wird. Eine — nicht eindeutige — Lösung der homologischen Gleichung unter dieser schwächeren Nebenbedingung (1.23b') findet man mit

$$\boldsymbol{T}_m = \boldsymbol{U}_m \tag{1.27a}$$

sowie

$$\tilde{\boldsymbol{F}}_m = \boldsymbol{F}'_m \quad . \tag{1.27b}$$

Wir haben demnach nicht nur die erzeugende Funktion $\boldsymbol{T}_m$ der Transformation geeignet zu wählen, sondern wir müssen auch $\tilde{\boldsymbol{F}}_m$ so bestimmen, daß es im Kern von $\mathcal{B}_m$ liegt. $\tilde{\boldsymbol{F}}_m$ kann gegebenenfalls auch $\mathbf{0}$ sein; dies hängt von dem anfangs in Gl. (1.3) vorgegebenen Vektorfeld $\boldsymbol{F}$ ab.

Die durch die Transformation (1.16) nicht wegtransformierbaren Anteile $\boldsymbol{F}'_m$ heißen *resonant*. Eine Motivation dieser Bezeichnungsweise findet sich beispielsweise in [Wi90]. Man vergleiche auch die im nächsten Abschnitt abgeleitete Resonanzbedingung (1.40).

Mit einer Induktion nach m erhalten wir somit

Satz 1.1 (Poincaré-Dulac) : *Jede Differentialgleichung (1.3) mit einem Vektorfeld in Form einer vektorwertigen Potenzreihe kann mittels der formalen Koordinatentransformation* $\boldsymbol{z} \mapsto \tilde{\boldsymbol{z}}$ *mit*

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}(\tilde{\boldsymbol{z}}) := \Big[(\mathrm{id}_N + \boldsymbol{T}_2) \circ (\mathrm{id}_N + \boldsymbol{T}_3) \circ \cdots \Big] \tilde{\boldsymbol{z}} \tag{1.28}$$

auf ihre Normalform

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{z}}} = L\tilde{\boldsymbol{z}} + \sum_{m \geq 2} \boldsymbol{F}'_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) \tag{1.29}$$

reduziert werden, wobei die $\boldsymbol{F}'_m$ *sämtlich resonant sind:* $\boldsymbol{F}'_m \in \mathcal{N}_m$. *Wegen der Nichteindeutigkeit des Komplementärraumes* $\mathcal{N}_m$ *ist auch die Normalform in der Regel nicht eindeutig festgelegt.*

Die Anwendung des Poincaré-Dulac-Theorems in der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes beweist den formalen Teil des Hartman-Grobman-Theorems. Daß die linearisierende Transformation nicht nur eine formale Potenzreihe, sondern sogar ein Homöomorphismus ist, läßt sich auf diese Weise allerdings nicht nachweisen [GuHo83].

Die Transformation eines Vektorfeldes auf seine Normalform kann eine wesentliche Vereinfachung darstellen. Bifurkationstheorie wäre beispielsweise nicht möglich ohne die Klassifizierung von Vektorfeldern mit den Mitteln der Normalformentheorie [IoAd92]. Im Hinblick auf die Konstruktion einer vollständigen Lösung der Differentialgleichung gemäß Gl. (1.15a) stellt jedoch jeder resonante Term des Vektorfeldes eine unüberwindliche Hürde dar, weil er die Linearisierung unmöglich macht.

Die Normalformentheorie ist eine *formale* Theorie: Die einzelnen Beiträge $\boldsymbol{T}_m$ zur Erzeugenden und die resonanten Terme $\boldsymbol{F}'_m$ des Vektorfeldes können zwar sukzessive für alle Grade m bestimmt werden, aber über das Konvergenzverhalten von $\boldsymbol{T}$ bzw. $\sum_{m\geq 2} \boldsymbol{F}'_m$ kann im allgemeinen keine Aussage gemacht werden, und oft divergieren diese Reihen. Konvergenzaussagen in einigen speziellen Fällen gehen auf Poincaré und Siegel zurück und werden in [SiMo71, Ar83] erörtert. Beispiele divergenter Transformationen auf Normalform — im Rahmen der Dragt-Finn-Stegemertenschen Normalformentheorie für Hamilton-Systeme — werden in den Kapiteln 4 und 5 diskutiert. Selbst im Fall der Divergenz reichen aber oft schon die niedrigsten Terme der Normalform und der damit konstruierten näherungsweisen Lösung aus, um beispielsweise das Phasenportrait des Systems qualitativ angeben zu können [Ar83].

1.1.2 Resonanz bei Hamiltonschen Vektorfeldern

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß das Auftreten von Resonanztermen bei Hamiltonschen Vektorfeldern nicht ausgeschlossen werden kann, so daß es im allgemeinen nicht möglich ist, mit der dargestellten Normalisierungsprozedur die Hamiltonschen Differentialgleichungen vollständig zu lösen.

Wir bringen zunächst die kanonischen Gleichungen (1.1) auf die Gestalt der Gl. (1.3), indem wir

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N \ , \quad N = 2n \tag{1.30}$$

setzen und damit zu

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}} &= \begin{pmatrix} D_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \\ -D_{\boldsymbol{q}} H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \end{pmatrix} \\ &= J D_{\boldsymbol{z}} H(\boldsymbol{z}) \end{aligned} \tag{1.31}$$

übergehen. J bezeichnet hier die symplektische Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_n \\ -\mathrm{id}_n & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{1.32}$$

Wenn wir uns, analog zur Diskussion für allgemeine Vektorfelder, auf Hamilton-Funktionen beschränken, die als Potenzreihe vorliegen und in $\mathbf{0}$ einen kritischen Punkt haben, ergibt die Linearisierung von (1.31) um $\mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}} &= J D_{\boldsymbol{z}} H_2(\boldsymbol{z}) + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^2\right) \\ &= L\boldsymbol{z} + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^2\right) \end{aligned} \tag{1.33}$$

mit der *Hamilton-Matrix* [Oz88]

$$L = J \ \mathrm{Hess}(H_2(\boldsymbol{z})) \quad , \tag{1.34}$$

wobei $H_2(\boldsymbol{z})$ für den quadratischen Anteil von $H(\boldsymbol{z})$ steht und $\mathrm{Hess}(H_2)$ die Hesse-Matrix von $H_2(\boldsymbol{z})$ bezeichnet:

$$\Big[\mathrm{Hess}(H_2(\boldsymbol{z}))\Big]_{ij} = \frac{\partial^2 H_2(\boldsymbol{z})}{\partial z_i \partial z_j} \ , \quad 1 \le i, j \le 2n \quad . \tag{1.35}$$

In [St87] wird gezeigt, daß die Flußabbildung $M(t) = \exp(Lt)$ des linearisierten Hamilton-Systems symplektisch ist:

$$M^T J M = J \quad . \tag{1.36}$$

Wegen der Symplektizität ist mit μ auch $\frac{1}{\mu}$ Eigenwert von $M(t)$, denn

$$M\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v} \quad \overset{(1.36)}{\Longrightarrow} \quad M^T(J\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\mu}(J\boldsymbol{v}) \quad , \tag{1.37}$$

und M und M^T haben dieselben Eigenwerte. Dies hat schließlich zur Folge, daß die Eigenwerte von L nur als Paare $\lambda, -\lambda$ auftreten.

Um nachzuweisen, daß Anteile des Hamiltonschen Vektorfeldes resonant sein können, müssen wir die Nichtinvertierbarkeit von $\mathcal{B}_l$ zeigen: $\mathrm{Im}(\mathcal{B}_l) \neq \mathcal{H}_l$. Wir führen diesen Nachweis hier nur für den Fall, daß L diagonalisierbar ist: Der Fall nichttrivialer Jordanblöcke von L wird in [Ar83, ArPl90] diskutiert und führt zum gleichen Ergebnis.

$\{\boldsymbol{e}_j | j = 1, 2, \ldots, 2n\}$ sei eine Basis, in der L diagonal ist:

$$L\boldsymbol{e}_j = \lambda_j \boldsymbol{e}_j \quad . \tag{1.38}$$

Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren $\left\{\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{e}_j \middle| |\boldsymbol{m}| = l, j = 1, 2, \ldots, 2n\right\}$ von $\mathcal{H}_l$ unter $\mathcal{B}_l$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_l(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{e}_j) &= D(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{e}_j)L\boldsymbol{z} - L\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{e}_j \\ &= (\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\lambda} - \lambda_j)(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{e}_j) \quad , \end{aligned} \tag{1.39}$$

wobei wir noch $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n})^T$ gesetzt und das gewöhnliche Skalarprodukt im $\mathbf{R}^{2n}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{2n} a_i b_i$, verwendet haben. $(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\lambda} - \lambda_j)$ ist also ein Eigenwert von $\mathcal{B}_l$ zum Eigenvektor $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{e}_j$. Genau dann, wenn die Eigenwerte λ_i von L die *Resonanzbedingung*

$$\lambda_j = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\lambda} \tag{1.40}$$

für ein $\boldsymbol{m}$ mit $|\boldsymbol{m}| = l \geq 2$ und für ein $1 \leq j \leq 2n$ erfüllen, wenn $\mathcal{B}_l$ also den Eigenwert 0 hat, gilt $\mathcal{N}_l \neq \emptyset$, und die homologische Gleichung kann nicht mehr in jedem Fall gelöst werden, weil $\mathcal{B}_l$ nicht invertierbar ist.

Die Resonanzbedingung ist für Hamilton-Systeme immer erfüllt: $\lambda_1 = \lambda$ und $\lambda_2 = -\lambda$ seien eines der Eigenwertpaare, deren Existenz wir oben nachgewiesen haben. Mit $\boldsymbol{m} = (2, 1, 0, \ldots, 0)^T$ und $j = 1$ ist dann Gl. (1.40) erfüllt.

Damit ist klar, daß die Normalformentheorie allgemeiner Vektorfelder, angewandt auf *Hamiltonsche* Vektorfelder, kein geeignetes Werkzeug zur Vereinfachung darstellt, denn die Linearisierbarkeit ist auf diesem Wege keineswegs sichergestellt. Zwar führt auch die Normalformentheorie für Hamilton-Funktionen nicht auf eine Linearisierung, aber die geforderte Vereinfachung gelingt hier auf andere Weise, wie wir in Abschnitt 1.2 sehen werden.

1.2 Normalformen und Quasiintegrale für Hamilton-Systeme

In Abschnitt 1.1 haben wir beschrieben, wie man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf systematische Weise vereinfachen und damit der vollständigen Lösung näher bringen kann. Die dortige Vorgehensweise läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn das Differentialgleichungssystem aus einer Hamilton-Funktion hergeleitet werden kann. Denn in diesem Fall müssen wir nicht ein *Vektorfeld* transformieren, sondern lediglich eine *skalare Funktion*, eben die Hamilton-Funktion. Ebenso lassen sich für Hamilton-Systeme die Transformationen einfacher spezifizieren, nämlich durch Angabe einer wiederum skalaren erzeugenden Funktion.

Der entscheidende Vorteil der Normalformentheorie für Hamilton-Systeme gegenüber der allgemeinen Theorie liegt aber darin, daß das System der Lösung wesentlich näher gebracht werden kann. Dies geschieht hier allerdings nicht durch vollständige Linearisierung, sondern durch die Konstruktion eines „weiteren“ Integrals der Bewegung.

1.2.1 Lie-Transformationen

Wir betrachten ein autonomes Hamilton-System (1.1) mit n Freiheitsgraden der Bewegung. Die Hamilton-Funktion $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ liege in Form einer formalen Potenzreihe vor und habe nur Summanden mit einem (Total-) Grad, der mindestens 2 ist. Wir berücksichtigen also nur solche Systeme, die einen Fixpunkt haben und legen diesen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit[4], in den Ursprung.

Um eine kompaktere Notation zu erreichen, benutzen wir, ebenso wie in Abschnitt 1.1.2, den $2n$-Vektor

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2n} \tag{1.30}$$

und können damit für die Hamilton-Funktion schreiben:

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \equiv H(\boldsymbol{z}) = \sum_{l\geq 2} H_l(\boldsymbol{z}) \quad . \tag{1.41}$$

Die H_l sind homogene Polynome vom Grad l in den Phasenraumkoordinaten $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ bzw. $\boldsymbol{z}$:

$$H_l(\boldsymbol{z}) = \sum_{|\boldsymbol{m}|=l} h_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{L}_l \quad ; \tag{1.42}$$

[4]Vgl. hierzu die Fußnote auf Seite 11.

$\mathcal{L}_l$ bezeichnet den Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad l in $2n$ Variablen. Die Dimension dieses Vektorraumes ist um den Faktor $1/2n$ kleiner als die seines Pendants $\mathcal{H}_l$, was dadurch bedingt ist, daß die Elemente von $\mathcal{L}_l$ *skalare* Polynome sind, im Gegensatz zu den *vektorwertigen* Polynomen in $\mathcal{H}_l$. Da die Polynomräume $\mathcal{H}_l$ und $\mathcal{L}_l$ für größere Grade l sehr hochdimensional werden [PlEA78],

$$\dim(\mathcal{L}_l) = \binom{2n+l-1}{2n-1} \quad , \tag{1.43}$$

erweist sich die Reduktion der Dimension beim Übergang von $\mathcal{H}_l$ zu $\mathcal{L}_l$ bei praktischen Berechnungen als sehr nützlich: In Kapitel 4 werden beispielsweise Polynome vom Grad 14 betrachtet, was bei $n = 2$ auf $\dim(\mathcal{L}_{14}) = 680$ führt.

Wir definieren noch den (unendlichdimensionalen) Vektorraum aller formalen Potenzreihen als die direkte Summe der $\mathcal{L}_l$:

$$\mathcal{L} := \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{L}_l \quad . \tag{1.44}$$

Analog zu der Vorgehensweise in Abschnitt 1.1.1 diskutieren wir zunächst eine wichtige Klasse von Transformationen, die das wesentliche Hilfsmittel für die Darstellung der Normalformentheorie und die Durchführung der Transformation einer Hamilton-Funktion auf Normalform sind. Dabei stützen wir uns vor allem auf die Darstellung in [DrFi76a, DrFi79].

Wir beginnen mit der

Definition 1.1: *Der zu der Potenzreihe $F \in \mathcal{L}$ adjungierte Lie-Operator ist*

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_F : \ \mathcal{L} &\to \mathcal{L} \\ G &\mapsto \mathrm{ad}_F(G) = \{G, F\} \quad . \end{aligned} \tag{1.45}$$

$\{\cdot,\cdot\}$ symbolisiert hierbei die Poisson-Klammer:

$$\{G, F\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \tag{1.46a}$$

$$= \begin{pmatrix} D_{\boldsymbol{q}} G \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot J \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ D_{\boldsymbol{p}} F \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ D_{\boldsymbol{p}} G \end{pmatrix} \cdot (-J) \begin{pmatrix} D_{\boldsymbol{q}} F \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$= (D_{\boldsymbol{z}} G) \cdot J \, (D_{\boldsymbol{z}} F) \quad . \tag{1.46b}$$

Speziell für den Lie-Operator, der zum quadratischen Anteil H_2 der Hamilton-Funktion adjungiert ist, setzen wir

$$\mathcal{A}_m = \mathrm{ad}_{H_2}\Big|_{\mathcal{L}_m} \quad , \quad m = 2, 3, \ldots \quad . \tag{1.47}$$

$\mathcal{A}_m(G)$ steht also für die Poisson-Klammer des Grad m-Polynoms G mit H_2. Wichtig ist die Invarianz von $\mathcal{L}_m$ unter $\mathcal{A}_m$: Für $F \in \mathcal{L}_l$ und $G \in \mathcal{L}_m$ ist $\mathrm{ad}_F(G) \in \mathcal{L}_{l+m-2}$, so daß im Spezialfall $F = H_2$ gilt: $\mathcal{A}_m(\mathcal{L}_m) \subseteq \mathcal{L}_m$ für alle $m \geq 2$. Der lineare Operator $\mathcal{A}_m$ auf dem Vektorraum $\mathcal{L}_m$ spielt in der Normalformentheorie für Hamilton-Systeme eine ähnlich bedeutsame Rolle wie der zu einem linearen Vektorfeld adjungierte Lie-Operator $\mathcal{B}_m$ (1.22) in der Normalformentheorie für Vektorfelder.

Um eine Hamilton-Funktion Schritt für Schritt auf ihre — noch zu definierende — Normalform zu transformieren, benötigen wir ein Gegenstück für die in Abschnitt 1.1.1 verwendete Transformation (1.16). Hierfür definieren wir den linearen Operator $\exp(\mathrm{ad}_F)$:

Definition 1.2 *Die der Potenzreihe $F \in \mathcal{L}$ assoziierte Lie-Transformation ist*

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{ad}_F): \quad \mathcal{L} &\to \mathcal{L} \\ H &\mapsto \exp\left(\mathrm{ad}_F\right)(H) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} {\mathrm{ad}_F}^i(H) \quad , \end{aligned} \tag{1.48}$$

mit

$$ {\mathrm{ad}_F}^0 = \mathrm{id}_{2n} \tag{1.49a}$$

und

$$\begin{aligned} {\mathrm{ad}_F}^i(G) &= \mathrm{ad}_F\left({\mathrm{ad}_F}^{i-1}\right)(G) \\ &= \{\{\cdots\{\{G\underbrace{,F\},F\},\cdots,F\},F\}}_{i\text{-mal}} \quad . \end{aligned} \tag{1.49b}$$

Es wird sich zeigen, daß Transformationen vom Typ (1.48) ein sehr bequemes und einfach zu handhabendes Hilfsmittel für die Normalformentheorie darstellen. Zunächst müssen wir aber sicherstellen, daß die Verwendung von Lie-Transformationen im Rahmen der Hamilton-Mechanik sinnvoll ist, insbesondere, daß sie *kanonisch* sind [De69].

Wir gehen von einem Satz kanonischer Phasenraumkoordinaten $z_i, i = 1, 2, \ldots, 2n$, aus und transformieren diese mittels der der Potenzreihe F assoziierten Lie-Transformation:

$$\tilde{z}_i := \exp\left(\mathrm{ad}_F\right) z_i \quad . \tag{1.50}$$

Um die Kanonizität dieser Transformation nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij} \\ \{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \end{aligned} \tag{1.51}$$

bzw., mit Gl. (1.46b),

$$\{z_i, z_j\} = J_{ij} \tag{1.52}$$

unter (1.50) erhalten bleiben.

Wir untersuchen zunächst allgemein, wie sich Poisson-Klammern unter Lie-Transformationen verhalten. F, G und H seien aus $\mathcal{L}$. Dann gilt, weil für Poisson-Klammern die Jacobi-Identität erfüllt ist[5]:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_F\{G, H\} &= \{\{G, H\}, F\} \\ &= -\{\{H, F\}, G\} - \{\{F, G\}, H\} \\ &= \{G, \mathrm{ad}_F(H)\} + \{\mathrm{ad}_F(G), H\} \quad . \end{aligned} \tag{1.53}$$

Mit einer Induktion nach i folgt dann

$$\mathrm{ad}_F{}^i\{G, H\} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \left\{\mathrm{ad}_F{}^j(G), \mathrm{ad}_F{}^{i-j}(H)\right\} \quad , \tag{1.54}$$

so daß man schließlich für die gesamte Lie-Transformation erhält:

$$\begin{aligned} \exp\left(\mathrm{ad}_F\right)\{G, H\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}_F{}^i\{G, H\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \left\{\mathrm{ad}_F{}^j(G), \mathrm{ad}_F{}^{i-j}(H)\right\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{1}{k!} \left\{\mathrm{ad}_F{}^i(G), \mathrm{ad}_F{}^k(H)\right\} \\ &= \{\exp\left(\mathrm{ad}_F\right)(G), \exp\left(\mathrm{ad}_F\right)(H)\} \quad . \end{aligned} \tag{1.55}$$

Die Lie-Transformierte der Poisson-Klammer zweier Funktionen ist also gerade die Poisson-Klammer der Lie-Transformierten dieser Funktionen. Dies nutzen wir jetzt für den Nachweis der Kanonizität aus. In den neuen, durch

[5] Die Tatsache, daß die Poisson-Klammern die Jacobi-Identität erfüllen, macht $\mathcal{L}$ mit der Produktoperation $\{\cdot, \cdot\}$ zu einer Lie-Algebra [Hu87].

die Transformation (1.50) erhaltenen Variablen $\tilde{z}_i, \tilde{z}_j$ ergeben sich die folgenden Poisson-Klammern:

$$\begin{aligned} \{\tilde{z}_i, \tilde{z}_j\} &= \{\exp(\mathrm{ad}_F)\, z_i, \exp(\mathrm{ad}_F)\, z_j\} \\ &= \exp(\mathrm{ad}_F)\, \{z_i, z_j\} \\ &= \{z_i, z_j\} \quad . \end{aligned} \tag{1.56}$$

Im letzten Schritt haben wir noch ausgenutzt, daß die Poisson-Klammer von z_i und z_j eine Zahl ist (entweder 0 oder 1) und deswegen von $\exp(\mathrm{ad}_F)$ nicht verändert wird. Gl. (1.56) zeigt die Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern unter der Lie-Transformation (1.50) und damit deren Kanonizität[6].

Um eine anschauliche Interpretation der Lie-Transformation $\exp(\mathrm{ad}_F)$ entwickeln zu können, benötigen wir im folgenden die Inverse dieses Operators. Sie ist auch bei der praktischen Berechnung von Integralen der Bewegung in Abschnitt 1.2.4 unerläßlich. Es gilt:

$$(\exp(\mathrm{ad}_F))^{-1} = \exp(\mathrm{ad}_{-F}) \tag{1.57}$$

Zum Beweis berechnen wir die Produktabbildung $\exp(\mathrm{ad}_{-F})\exp(\mathrm{ad}_F)$ und zeigen, daß sie gleich der Identität id_{2n} ist. Dabei benutzen wir, daß ad_F und ad_{-F} vertauschen: $\mathrm{ad}_F\mathrm{ad}_{-F} = \mathrm{ad}_{-F}\mathrm{ad}_F$.

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{ad}_{-F})\exp(\mathrm{ad}_F) &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!} {\mathrm{ad}_{-F}}^i {\mathrm{ad}_F}^j \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} {\mathrm{ad}_{-F}}^k {\mathrm{ad}_F}^{i-k} \\ &= \mathrm{id}_{2n} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (\mathrm{ad}_{-F} + \mathrm{ad}_F)^i \quad . \end{aligned}$$

Mit $\mathrm{ad}_{-F} + \mathrm{ad}_F = 0$ folgt dann die Behauptung.

Nachdem wir in Gl. (1.56) die Kanonizität der Lie-Transformation (1.50) gezeigt haben, beweisen wir jetzt, daß die Hamilton-Funktion H unter einer solchen kanonischen Transformation in die neue Hamilton-Funktion $\exp(\mathrm{ad}_{-F})(H)$ übergeht. Zunächst weisen wir die Beziehung

$$H\Big(\exp(\mathrm{ad}_F)(\boldsymbol{z})\Big) = \exp(\mathrm{ad}_F)\Big(H(\boldsymbol{z})\Big) \quad . \tag{1.58}$$

nach. (Auf der linken Seite dieser Gleichung ist mit $\exp(\mathrm{ad}_F)(\boldsymbol{z})$ die Anwendung des Operators $\exp(\mathrm{ad}_F)$ auf jede der Komponenten z_i des Vektors $\boldsymbol{z}$

[6] In [ChEA83] wird ein anderer Beweis für die Kanonizität von Lie-Transformationen beschrieben.

gemeint.) Wir schreiben die linke Seite von Gl. (1.58) als

$$\sum_{l\geq 2}\sum_{|\boldsymbol{m}|=l} h_{\boldsymbol{m}}\Big(\exp(\mathrm{ad}_F)(\boldsymbol{z})\Big)^{\boldsymbol{m}} \quad ,$$

und weil $\exp(\mathrm{ad}_F)$ ein linearer Operator ist, gilt für die rechte Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{ad}_F)\Big(H(\boldsymbol{z})\Big) &= \exp(\mathrm{ad}_F)\left(\sum_{l\geq 2}\sum_{|\boldsymbol{m}|=l} h_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}}\right)\\ &= \sum_{l\geq 2}\sum_{|\boldsymbol{m}|=l} h_{\boldsymbol{m}}\exp(\mathrm{ad}_F)\,(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}}) \quad .\end{aligned}$$

Damit bleibt für den Beweis von Gl. (1.58) nur noch zu zeigen, daß

$$\Big(\exp(\mathrm{ad}_F)(\boldsymbol{z})\Big)^{\boldsymbol{m}} = \exp(\mathrm{ad}_F)\,(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}})$$

gilt. Diese Beziehung folgt aber sofort aus $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}} = z_1^{m_1}\cdots z_{2n}^{m_{2n}}$ und aus der folgenden elementaren Eigenschaft einer auf das Produkt zweier Potenzreihen G_1, G_2 wirkenden Lie-Transformation:

$$\exp(\mathrm{ad}_F)(G_1G_2) = \exp(\mathrm{ad}_F)(G_1)\exp(\mathrm{ad}_F)(G_2) \quad ; \tag{1.59}$$

der Beweis dieser Eigenschaft erfolgt völlig analog zur Herleitung der Beziehung (1.55). Wir haben damit Gl. (1.58) nachgewiesen und können sie für die Berechnung der neuen, durch die Lie-Transformation erzeugten Hamilton-Funktion $\tilde{H}(\tilde{\boldsymbol{z}})$ benutzen. Wegen der Gln. (1.50,1.57) ist

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\tilde{\boldsymbol{z}}) &= H\Big(\boldsymbol{z}(\tilde{\boldsymbol{z}})\Big)\\ &= H\Big(\exp(\mathrm{ad}_{-F(\tilde{\boldsymbol{z}})})(\tilde{\boldsymbol{z}})\Big) \quad ,\end{aligned}$$

so daß wir schließlich unter Benutzung von Gl. (1.58) das erhalten, was zu beweisen war:

$$\tilde{H}(\tilde{\boldsymbol{z}}) = \exp(\mathrm{ad}_{-F(\tilde{\boldsymbol{z}})})\Big(H(\tilde{\boldsymbol{z}})\Big) \quad . \tag{1.60}$$

Die Bedeutung von Gl. (1.58) bzw. von Gl. (1.60) liegt darin, daß wir mit ihrer Hilfe der Lie-Transformation (1.50) eine ganz neue anschauliche Interpretation geben können: Wir sehen jetzt in $\boldsymbol{z}\mapsto\exp(\mathrm{ad}_F)(\boldsymbol{z})$ eine Transformation, die eine Funktion H in eine andere Funktion $\exp(\mathrm{ad}_{-F})(H)$ transformiert. Wegen Gl. (1.56) wissen wir, daß diese Transformation kanonisch ist. Damit ist die Dynamik des durch die alte Hamilton-Funktion $H(\boldsymbol{z})$ beschriebenen Systems äquivalent zur Dynamik des neuen Hamilton-Systems $\exp\Big(\mathrm{ad}_{-F(\boldsymbol{z})}\Big)\,(H(\boldsymbol{z}))$, wenn man beide Systeme in den Koordinaten $\boldsymbol{z}$ bzw. $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ betrachtet. Von diesem „aktiven“ Standpunkt aus interpretiert man die Transformation (1.50) nicht mehr als einen Wechsel der Variablen, sondern als die Umformung eines Hamilton-Systems in ein anderes, dazu äquivalentes, wobei das Koordinatensystem unverändert bleibt.

1.2.2 Die Birkhoff-Gustavson-Normalform

Wir kommen nun zur grundlegenden Idee der Normalformentheorie für Hamilton-Systeme. Das Ziel ist es, die Hamilton-Funktion dahingehend zu vereinfachen, daß man ein zweites Integral der Bewegung angeben kann.[7] Insbesondere für Systeme mit zwei Freiheitsgraden der Bewegung ($n = 2$) ist klar, daß das Auffinden eines zweiten Integrals eine wesentliche Vereinfachung darstellt, denn damit wäre das Problem bereits vollständig gelöst: Das System besäße die größtmögliche Anzahl voneinander unabhängiger Integrale und das Liouville-Arnold-Theorem wäre anwendbar, falls die Bewegung gebunden ist. Zudem könnten wir den 2-Torus, auf dem alle Trajektorien verlaufen, durch die beiden bekannten Integrale vollständig charakterisieren und hätten somit ein vollständige geometrische Beschreibung des Phasenflusses. Im Rahmen der Gustavsonschen Normalformentheorie [Gu66] versucht man, die Hamilton-Funktion so zu transformieren, daß der quadratische Anteil $H_2(\boldsymbol{z})$ der transformierten Hamilton-Funktion zu einem Integral der Bewegung wird.

Wir stellen Gustavsons Verfahren hier nicht in seiner ursprünglichen Formulierung dar, sondern bedienen uns der Lie-Transformationstheorie. Stegemerten [St91] demonstriert, daß man auf diese Weise die gleichen Ergebnisse erhält wie bei Verwendung von Gustavsons Formulierung. Der entscheidende Vorteil unserer Vorgehensweise liegt darin, daß alle auftretenden Ausdrücke erheblich einfacher und übersichtlicher notiert werden können. Zudem werden wir so auf natürliche Weise zu der in Abschnitt 1.2.3 dargestellten Verallgemeinerung geführt.

Definition 1.3 *Es sei eine Hamilton-Funktion $H(\boldsymbol{z})$ in Form einer Potenzreihe (1.41) gegeben, deren quadratischer Summand die Form*

$$H_2(\boldsymbol{z}) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\omega_\nu}{2} \left(z_\nu^2 + z_{n+\nu}^2 \right) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\omega_\nu}{2} \left(q_\nu^2 + p_\nu^2 \right) \quad . \tag{1.61}$$

hat, mit $\omega_\nu > 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n$.

Man sagt, daß $H(\boldsymbol{z})$ in Gustavson-Normalform bis zum Grad m ist, wenn gilt:

$$\mathcal{A}_l\,(H_l) = 0 \quad \textit{für} \quad l = 2, 3, \ldots, m. \tag{1.62a}$$

$H(\boldsymbol{z})$ ist in Gustavson-Normalform, wenn gilt:

$$\mathcal{A}_l\,(H_l) = 0 \quad \textit{für} \quad l \geq 2. \tag{1.62b}$$

[7] Für ein autonomes Hamilton-System, und auf solche beschränken wir uns hier, ist offensichtlich schon ein erstes Integral bekannt: die Hamilton-Funktion selbst.

Man beachte, daß jede Hamilton-Funktion vom Typ (1.61) von vornherein in Gustavson-Normalform bis zum Grad 2 ist.

Im Rahmen der Gustavsonschen Theorie werden also nur solche Systeme behandelt, die in niedrigster Ordnung (1.61) durch n harmonische Oszillatoren mit den Frequenzen ω_ν beschrieben werden können. Die Anteile der Hamilton-Funktion mit größerem Grad als 2, $\sum_{l\geq 3} H_l(\boldsymbol{z})$, beschreiben die Anharmonizitäten und anharmonischen Kopplungen dieser Oszillatoren, die im allgemeinen zu einer beliebig komplizierten Dynamik führen. Der Grund für die einschränkende Forderung nach diesem H_2-Typ wird im folgenden Abschnitt 1.2.3 diskutiert.

Es liegt auf der Hand, daß diese Normalformdefinition im Hinblick auf die gewünschte Vereinfachung des Systems sinnvoll ist, denn offensichtlich ist der quadratische Anteil der Hamilton-Funktion ein Integral der Bewegung, wenn $H(\boldsymbol{z})$ in Gustavson-Normalform ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_l(H_l) = 0 \quad \forall\, l \qquad &\Leftrightarrow \qquad \{H, H_2\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad H_2(\boldsymbol{z}) = \text{konst.} \end{aligned} \tag{1.63}$$

Hierbei ist es wesentlich, daß das Integral H_2 wirklich eine bisher nicht verfügbare Information über das System beinhaltet: Unter gewissen Bedingungen, die wir in Abschnitt 1.2.4 diskutieren werden, sind H und H_2 zwei voneinander unabhängige Integrale der Bewegung im Sinne von Arnold [Ar83]. Die Situation ist allerdings etwas komplizierter, als es auf den ersten Blick scheint.

Wenn eine beliebige Hamilton-Funktion vom Typ (1.61) gegeben ist, dann ist $H_2(\boldsymbol{z})$ selbstverständlich noch kein Integral der Bewegung. Vielmehr müssen wir $H(\boldsymbol{z})$ zunächst auf Normalform transformieren und erst *nach* dieser Transformation, in den entsprechenden neuen Koordinaten $\tilde{z}_i$, ist $\tilde{H}_2(\tilde{\boldsymbol{z}}) \equiv H_2(\boldsymbol{z}(\tilde{\boldsymbol{z}}))$ konstant. Transformiert man dann diese Konstante der Bewegung zurück auf die ursprünglichen Koordinaten z_i, so erhält man das zweite Integral der Bewegung als eine Funktion von $\boldsymbol{z}$, die im allgemeinen nicht nur aus quadratischen Termen besteht.

Um eine gegebene Hamilton-Funktion H in eine neue Hamilton-Funktion G zu transformieren, die in Gustavson-Normalform ist, bedienen wir uns einer (unendlichen) Folge von Lie-Transformationen $\exp(\mathrm{ad}_{F_m})$, die jeweils einem Grad m-Polynom mit $m \geq 3$ assoziiert sind:

$$G = \exp(\mathrm{ad}_{F_m})(H) \quad . \tag{1.64}$$

Wir ordnen diese Gleichung nach Graden, wobei wir berücksichtigen, daß für $F_m \in \mathcal{L}_m$ und $H_l \in \mathcal{L}_l$ gilt: ${\mathrm{ad}_{F_m}}^j(H_l) \in \mathcal{L}_{l+j(m-2)}$. Für $j = 1$ und $l = 2, 3, \ldots$ hat man also $l + j(m-2) = l + m - 2 = m, m+1, \ldots$, und mit $j > 1$ und

$l \geq 2$ ergibt sich wegen $m \geq 3$: $l + j(m-2) \geq m+1$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} G_2 + G_3 + \cdots &= \left(\mathrm{id}_{2n} + \mathrm{ad}_{F_m} + \frac{1}{2}\mathrm{ad}_{F_m}{}^2 + \cdots\right)(H_2 + H_3 + \cdots) \\ &= H_2 + \cdots + H_m + \mathrm{ad}_{F_m}(H_2) + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^{m+1}\right) \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichung muß bereits Grad für Grad erfüllt sein, und es folgt für die Summanden der Grade 2 bis m der neuen Hamilton-Funktion:

$$G_l = H_l \quad \text{für} \quad 2 \leq l < m \tag{1.65a}$$

$$G_m = H_m + \mathrm{ad}_{F_m}(H_2) \quad , \tag{1.65b}$$

in vollständiger Analogie zu Gl. (1.18), so daß sich auch die dortigen Schlußfolgerungen (i)–(iii) übertragen und die Konstruktion einer Normalisierungsprozedur ermöglichen.

Die Hamilton-Funktion H sei bis zum Grad $m-1$ in Gustavson-Normalform. Die Transformation (1.64) ergibt wegen Gl. (1.65a) eine neue Hamilton-Funktion G, die ebenfalls in Normalform bis mindestens zum Grad $m-1$ ist. Unter Berücksichtigung von Gl. (1.65b) können wir durch eine geeignete Wahl von F_m außerdem erreichen, daß G sogar in Normalform bis zum Grad m ist. Mit $\mathrm{ad}_{F_m}(H_2) = -\mathrm{ad}_{H_2}(F_m)$ erhalten wir aus Gl. (1.65b) die Gleichung

$$H_m = G_m + \mathcal{A}_m(F_m) \quad , \tag{1.66a}$$

die unter der Nebenbedingung

$$\mathcal{A}_m(G_m) = 0 \quad \text{bzw.} \quad G_m \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_m) \tag{1.66b}$$

zu lösen ist. Analog zur Situation in Abschnitt 1.1 sind H_m und $\mathcal{A}_m$ gegeben; F_m und G_m sind gesucht. $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_m)$ ist der Kern des Operators $\mathcal{A}_m$:

$$\mathrm{Ker}(A_m) = \left\{P \in \mathcal{L}_m \middle| \mathcal{A}_m(P) = 0\right\} \quad . \tag{1.67}$$

Ebenso wie in der Normalformentheorie für Vektorfelder haben wir also eine *homologische Gleichung* (1.66a) zu lösen. Aus den bekannten H_m und $\mathcal{A}_m$ sind die Grad m-Polynome G_m und F_m zu bestimmen. Die Lösung gelingt mit Hilfe der Zerlegung von $\mathcal{L}_m$ in die direkte Summe des Kernes und des Bildes von $\mathcal{A}_m$:

$$\mathcal{L}_m = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_m) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}_m) \quad . \tag{1.68}$$

$H_m \in \mathcal{L}_m$ kann also in eindeutiger Weise in seinen Kern- und Bildanteil aufgespalten werden:

$$H_m = H'_m + H''_m \tag{1.69}$$

mit

$$\begin{aligned} H'_m &\in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_m) \\ H''_m &\in \mathrm{Im}(\mathcal{A}_m) \quad , \end{aligned} \tag{1.70}$$

so daß wir zur Lösung der homologischen Gleichung

$$G_m = H'_m \tag{1.71a}$$

setzen müssen. G_m ist als der Kernanteil von H_m eindeutig festgelegt. Aus dem Bildanteil von H_m erhalten wir die Erzeugende F_m in Gestalt eines Polynoms aus $\mathcal{L}_m$, das der Gleichung

$$\mathcal{A}_m(F_m) = H''_m \tag{1.71b}$$

genügt. F_m ist nur bis auf einen Summanden aus dem Kern von $\mathcal{A}_m$ bestimmt und damit im allgemeinen nicht eindeutig.

Wir weisen jetzt die Gültigkeit der Zerlegung (1.68) nach und zeigen im Verlauf des Beweises auch, wie ein Urbild von H''_m unter $\mathcal{A}_m$ gefunden werden kann. Für $\mathcal{A}_m$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m(\cdot) &= \{\cdot, H_2\} \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu \left(p_\nu \frac{\partial}{\partial q_\nu} - q_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right)(\cdot) \quad . \end{aligned} \tag{1.72}$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdruckes verwenden wir die kanonische Transformation $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \mapsto (\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\boldsymbol{p}})$:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{q}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{q} - i\boldsymbol{p}) \\ \tilde{\boldsymbol{p}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{p} - i\boldsymbol{q}) \quad . \end{aligned} \tag{1.73}$$

Gl. (1.72) gibt $\mathcal{A}_m$ in den Koordinaten $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ an. Wir bezeichnen mit $\tilde{\mathcal{A}}_m$ die Darstellung von $\mathcal{A}_m$ in den neuen Koordinaten $(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\boldsymbol{p}})$ und erhalten unter Berücksichtigung von $\frac{\partial}{\partial q_\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_\nu} - i \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_\nu} \right)$ und $\frac{\partial}{\partial p_\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{p}_\nu} - i \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_\nu} \right)$:

$$\tilde{\mathcal{A}}_m = \sum_{\nu=1}^{n} i\omega_\nu \left(\tilde{q}_\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_\nu} - \tilde{p}_\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_\nu} \right) \Bigg|_{\mathcal{L}_m} \quad . \tag{1.74}$$

Die Anwendung von $\tilde{\mathcal{A}}_m$ auf einen der Basisvektoren $\tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}} \tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}}$ (mit $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \in \mathbf{N}_0^n$ und $|\boldsymbol{j}| + |\boldsymbol{k}| = m$) von $\mathcal{L}_m$ ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_m \left(\tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}} \tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}} \right) &= i \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu (j_\nu - k_\nu) \, \tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}} \tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}} \\ &= i \, (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \, \tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}} \tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}} \quad , \end{aligned} \tag{1.75}$$

wobei $(\cdot, \cdot)$ für das kanonische Skalarprodukt im $\mathbf{R}^n$ steht: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Die letzte Gleichung ist eine Eigenwertgleichung mit dem Eigenvektor $\tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}} \tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}}$ zum Eigenwert $i \, (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$. Demnach können wir den Kern und das

Bild von $\tilde{\mathcal{A}}_m$ angeben als die lineare Hülle derjenigen $\tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}}\tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}}$, für die der Eigenwert null bzw. von null verschieden ist:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\left(\tilde{\mathcal{A}}_m\right) &= \operatorname{span}\left\{\tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}}\tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}} \;\middle|\; (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}) = 0\right\} \\ \operatorname{Im}\left(\tilde{\mathcal{A}}_m\right) &= \operatorname{span}\left\{\tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}}\tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}} \;\middle|\; (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}) \neq 0\right\} \quad .\end{aligned} \tag{1.76}$$

Weil die $\tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}}\tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}}$ eine Basis von $\mathcal{L}_m$ bilden, beweist Gl. (1.76) die Zerlegung

$$\mathcal{L}_m = \operatorname{Ker}\left(\tilde{\mathcal{A}}_m\right) \oplus \operatorname{Im}\left(\tilde{\mathcal{A}}_m\right) \quad . \tag{1.77}$$

und damit auch Gl. (1.68).

Gl. (1.76) zeigt auch, wie man die Zerlegung von H_m gemäß Gl. (1.69) findet und wie das für Gl. (1.71b) benötigte Urbild von H''_m bestimmt werden kann. Dazu muß zunächst H_m auf die Variablen $(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\boldsymbol{p}})$ transformiert werden:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_m(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\boldsymbol{p}}) &= H_m\Big(\boldsymbol{q}(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\boldsymbol{p}}), \boldsymbol{p}(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\boldsymbol{p}})\Big) \\ &= \sum_{|\boldsymbol{j}|+|\boldsymbol{k}|=m} \tilde{h}_{\boldsymbol{jk}}\tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}}\tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}} \quad ,\end{aligned} \tag{1.78}$$

mit neuen Koeffizienten $\tilde{h}_{\boldsymbol{jk}}$. Dann gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned}\tilde{H}'_m &= \sum_{\substack{|\boldsymbol{j}|+|\boldsymbol{k}|=m \\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=0}} \tilde{h}_{\boldsymbol{jk}}\tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}}\tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}} \in \operatorname{Ker}\left(\tilde{\mathcal{A}}_m\right) \\ \tilde{H}''_m &= \sum_{\substack{|\boldsymbol{j}|+|\boldsymbol{k}|=m \\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\neq 0}} \tilde{h}_{\boldsymbol{jk}}\tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}}\tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}} \in \operatorname{Im}\left(\tilde{\mathcal{A}}_m\right) \quad ,\end{aligned} \tag{1.79}$$

und wir müssen für $\tilde{G}_m$ und $\tilde{F}_m$ wählen:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_m &= \tilde{H}'_m \\ \tilde{F}_m &= \tilde{\mathcal{A}}_m^{-1}\left(\tilde{H}''_m\right) = \sum_{\substack{|\boldsymbol{j}|+|\boldsymbol{k}|=m \\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\neq 0}} \frac{\tilde{h}_{\boldsymbol{jk}}}{i(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})}\,\tilde{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{j}}\tilde{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{k}} \quad .\end{aligned} \tag{1.80}$$

Wiederum ist zwar $\tilde{G}_m$ eindeutig festgelegt, nicht aber $\tilde{F}_m$. Schließlich erhält man die gesuchten G_m und F_m mit Hilfe der Transformation (1.73): $G_m = \tilde{G}_m\Big(\tilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \tilde{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})\Big)$ und $F_m = \tilde{F}_m\Big(\tilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \tilde{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})\Big)$.

Insgesamt haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1.2 *Jede Hamilton-Funktion $H(\boldsymbol{z})$ in Gestalt einer formalen Potenzreihe (1.41), deren Term niedrigster Ordnung die Form (1.61) hat, kann durch eine formale kanonische Transformation in eine äquivalente Hamilton-Funktion $G(\boldsymbol{z})$ mit*

$$G = \left[\cdots \circ \exp\left(\mathrm{ad}_{F_4}\right) \circ \exp\left(\mathrm{ad}_{F_3}\right) \right] (H) \tag{1.81}$$

und $F_m \in \mathcal{L}_m$ transformiert werden, die in Gustavson-Normalform ist.

Dieser Satz wurde schon von Gustavson in [Gu66] angegeben. Allerdings ist Gustavsons Darstellung erheblich schwerfälliger, weil sie nicht auf der Theorie der Lie-Transformationen beruht, sondern für die kanonischen Transformationen erzeugende Funktionen vom F_2-Typ (vgl. [Go80]) verwendet. In der Formulierung, die in der vorliegenden Arbeit benutzt wird, findet sich Satz 1.2 beispielsweise auch in [St91].

1.2.3 Die Dragt-Finn-Stegemerten-Normalform

Der in Abschnitt 1.2.2 beschriebene Normalformenkalkül ist nur auf Hamilton-Funktionen anwendbar, deren quadratischer Anteil die Gestalt (1.61) hat. Den Grund für diese Einschränkung machen wir uns an einem einfachen Beispiel klar. Wir betrachten ein Teilchen mit einem Freiheitsgrad der Bewegung ($n = 1$), das sich in niedrigster Ordnung frei bewegt:

$$H_2(q,p) = \frac{1}{2}p^2 \quad . \tag{1.82}$$

Der zu $H_2(q,p)$ adjungierte Lie-Operator ergibt sich als

$$\mathcal{A}_m(\cdot) = \left\{ \cdot, \frac{1}{2}p^2 \right\} = p\frac{\partial}{\partial q}(\cdot) \quad . \tag{1.83}$$

Es zeigt sich, daß schon für $m = 3$ die Zerlegung (1.68) nicht möglich ist. Eine Basis von $\mathcal{L}_3$ ist beispielsweise $\{p^3, p^2q, pq^2, q^3\}$. Die Anwendung von $\mathcal{A}_3$ auf die Elemente dieser Basis ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3(p^3) &= 0 \\ \mathcal{A}_3(p^2q) &= p^3 \\ \mathcal{A}_3(pq^2) &= 2p^2q \\ \mathcal{A}_3(q^3) &= 3pq^2 \quad , \end{aligned} \tag{1.84}$$

so daß wir für den Kern und das Bild von $\mathcal{A}_3$

$$\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}_3) = \mathrm{span}\left\{p^3\right\} \tag{1.85a}$$

$$\mathrm{Im}\,(\mathcal{A}_3) = \mathrm{span}\left\{p^3, p^2q, pq^2\right\} \tag{1.85b}$$

erhalten. Offensichtlich ist

$$\mathcal{L}_3 \neq \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}_3) \oplus \mathrm{Im}\,(\mathcal{A}_3) \quad . \tag{1.86}$$

Für beliebige quadratische Terme der Hamilton-Funktion ist also die Gültigkeit der Zerlegung (1.68) keineswegs sichergestellt. Aber nur wegen dieser Zerlegung ist die Definition der Gustavson-Normalform sinnvoll, denn erst Gl. (1.68) ermöglicht die Lösung der homologischen Gleichung (1.66a) und damit die Durchführung einer normalisierenden Transformation.

Vor diesem Hintergrund benötigen wir also eine von $\mathcal{A}_m$ erzeugte Zerlegung von $\mathcal{L}_m$, die für alle $\mathcal{A}_m$, das heißt für alle möglichen quadratischen Anteile H_2 der Hamilton-Funktion gültig ist. Die für die Lösung dieser Frage entscheidende Idee wird in [DrFi79] beschrieben: Wir betrachten einen endlich-dimensionalen unitären Vektorraum V mit dem Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Zu jedem linearen Operator O auf V ist über $(x|Oy) = (O^*x|y)\ \forall\ x, y \in V$ der entsprechende adjungierte Operator O^* definiert. Die aus der linearen Algebra bekannte *Fredholmsche Alternative* [MeHa92] besagt, daß dann

$$V = \mathrm{Ker}\,(O^*) \oplus \mathrm{Im}\,(O) \tag{1.87}$$

gilt. Das bedeutet für die uns interessierenden Polynomräume:

$$\mathcal{L}_m = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}_m^*) \oplus \mathrm{Im}\,(\mathcal{A}_m) \quad , \tag{1.88}$$

ungeachtet der speziellen Gestalt von H_2 bzw. $\mathcal{A}_m$.

Mit dieser Zerlegung von $\mathcal{L}_m$ können wir nun ein erweitertes Normalformenkonzept einführen.

Definition 1.4 *Eine in Form einer formalen Potenzreihe (1.41) gegebene Hamilton-Funktion $H(\boldsymbol{z})$ ist in Dragt-Finn-Stegemerten-Normalform bis zum Grad m, wenn gilt:*

$$\mathcal{A}_l^*\,(H_l) = 0 \quad \textit{für} \quad l = 3, 4, \ldots, m \quad . \tag{1.89a}$$

$H(\boldsymbol{z})$ ist in Dragt-Finn-Stegemerten-Normalform, wenn gilt:

$$\mathcal{A}_l^*\,(H_l) = 0 \quad \textit{für} \quad l \geq 3 \quad . \tag{1.89b}$$

Wir werden abkürzend auch von der *DFS-Normalform* sprechen.

Ein wichtiger Unterschied zwischen dieser Definition und derjenigen der Gustavson-Normalform, Gl. (1.62), besteht darin, daß Gl. (1.89) nicht für $l = 2$ erfüllt sein muß und es im allgemeinen auch nicht ist. H_2 auf

Normalform gemäß Gl. (1.89) zu transformieren, z. B. mittels einer Lie-Transformation, wäre sinnlos, denn mit einer Änderung von H_2 änderte sich auch der Operator $\mathcal{A}_l$! Dagegen ist die entsprechende Gleichung im Gustavsonschen Fall für $l = 2$ immer erfüllt. Dies ist im Rahmen der Gustavsonschen Theorie auch notwendig, damit H_2 ein Integral der Bewegung ist. Dieser Unterschied zwischen den beiden diskutierten Normalformbegriffen wird im folgenden Abschnitt 1.2.4 eine wichtige Rolle spielen. Dort werden wir zeigen, wie man auch für eine Hamilton-Funktion in DFS-Normalform ein Integral der Bewegung angeben kann, in Analogie zum Integral H_2 der Gustavson-Theorie.

Die Definition 1.4 ist in dieser Allgemeinheit noch nicht praktisch anwendbar. Es bleibt noch, ein geeignetes Skalarprodukt auf den Räumen $\mathcal{L}_m$ zu spezifizieren, mit dessen Hilfe $\mathcal{A}_m$ definiert und explizit angegeben werden kann. Diese Wahl kann nach Gesichtspunkten der Zweckmäßigkeit geschehen, man unterliegt dabei keinen weiteren Einschränkungen. Das folgende Skalarprodukt [Ba61] erweist sich dabei als besonders nützlich. Es wurde von Elphick et al. [ElEA87] in die Normalformentheorie eingebracht und von Stegemerten, Meyer und Hall [St91, MeHa92] wieder aufgegriffen[8].

Für ein Polynom $R(\boldsymbol{z}) = \sum_{|\boldsymbol{j}|=m} r_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}} \in \mathcal{L}_m$ mit $\boldsymbol{j} \in \mathbf{N}_0^{2n}$ und ein entsprechend definiertes Polynom $S(\boldsymbol{z}) \in \mathcal{L}_m$ setzen wir

$$\begin{aligned} (\cdot|\cdot):\ \mathcal{L}_m \times \mathcal{L}_m &\rightarrow \mathbf{C} \\ (R,S) &\mapsto (R|S) := \sum_{|\boldsymbol{j}|=m} \overline{r_{\boldsymbol{j}}} \frac{\partial^m}{\partial^{j_1} z_1 \partial^{j_2} z_2 \cdots \partial^{j_{2n}} z_{2n}} S(\boldsymbol{z}) \quad , \end{aligned} \tag{1.90}$$

wobei $\overline{}$ die komplexe Konjugation bedeutet. Man überzeugt sich durch Nachrechnen leicht davon, daß die so definierte Sesquilinearform $(\cdot|\cdot)$ die erforderlichen Eigenschaften eines Skalarproduktes hat und damit $\mathcal{L}_m$ zu einem unitären Vektorraum macht.

Im folgenden wollen wir $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{A}_m^*$ in einer einfach zu benutzenden Form darstellen. Zunächst betrachten wir $\mathcal{A}_m$ und benutzen die Darstellung (1.46b) der Poisson-Klammer sowie die Definition (1.33) der Hamilton-Matrix:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m(\cdot) &= \{\cdot, H_2\} \\ &= D_{\boldsymbol{z}}(\cdot) \cdot J\,(D_{\boldsymbol{z}} H_2) \\ &= D_{\boldsymbol{z}}(\cdot) \cdot L\boldsymbol{z} \quad . \end{aligned} \tag{1.91}$$

[8] Dragt und Finn verwenden in [DrFi79] ein ähnliches Skalarprodukt, das aber zu einer erheblich umständlicheren Formulierung der Theorie führt. Die Vorteile des Skalarproduktes (1.90) zeigen sich weiter unten bei der Berechnung von $\mathcal{A}_m^*$.

Eine analoge Darstellung von $\mathcal{A}_m^*$ zu finden, ist etwas aufwendiger. Wir beginnen mit der Definition des zu $\mathcal{A}_m$ adjungierten Operators,

$$(\mathcal{A}_m^* R|S) = (R|\mathcal{A}_m S) \tag{1.92}$$

mit $R, S \in \mathcal{L}_m$. Für $\mathcal{A}_m$ verwenden wir die explizite Darstellung (1.91) und interpretieren dann den Ausdruck $\mathcal{A}_m\,(S(\boldsymbol{z}))$ als die Ableitung einer Funktion nach einem Parameter t:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m\,(S(\boldsymbol{z})) &= D_{\boldsymbol{z}}\,(S(\boldsymbol{z}))\boldsymbol{\cdot} L\boldsymbol{z} \\ &= \left.\frac{d}{dt} S\left(e^{Lt}\boldsymbol{z}\right)\right|_{t=0} \quad . \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$(\mathcal{A}_m^* R|S) = \left.\frac{d}{dt}\left(R\left(e^{L^*t}\boldsymbol{z}\right)\middle|S\right)\right|_{t=0} \quad ,$$

wobei wir noch die für beliebige lineare Abbildungen M auf $\mathbf{C}^{2n}$ geltende Eigenschaft $(R \circ M^*|S) = (R|S \circ M)$ des Skalarproduktes (1.90) und $M^* := \left(e^{Lt}\right)^* = e^{L^*t}$ ausgenutzt haben. Schließlich erhalten wir nach Ausführung der Ableitung für $t = 0$

$$(\mathcal{A}_m^* R|S) = (D_{\boldsymbol{z}}(R)\boldsymbol{\cdot} L^*\boldsymbol{z}|S) \quad ,$$

so daß wir für $\mathcal{A}_m^*$ gefunden haben:

$$\mathcal{A}_m^*(\cdot) = D_{\boldsymbol{z}}(\cdot)\boldsymbol{\cdot} L^*\boldsymbol{z} \quad . \tag{1.93}$$

Diese Formel stimmt bis auf die Adjungierung (Transposition und komplexe Konjugation) der Matrix L mit der Darstellung (1.91) von $\mathcal{A}_m$ überein. Die Darstellungen (1.91) und (1.93) von $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{A}_m^*$ findet man in ähnlicher Form auch in [ElEA87]. Dragt und Finn gelingt es mit dem von ihnen definierten Skalarprodukt nicht, eine allgemeine Darstellung von $\mathcal{A}_m^*$ anzugeben; sie beschränken ihre Diskussion deshalb auf auf einen speziellen H_2-Typ.

Wir kehren kurz zu dem Beispiel vom Anfang dieses Abschnitts zurück und demonstrieren die Gültigkeit der Zerlegung (1.88) im Fall $m = 3$ für das H_2 der Gl. (1.82). $\mathcal{A}_m^*$ ergibt sich zu

$$\mathcal{A}_m^*(\cdot) = \begin{pmatrix} \partial(\cdot)/\partial q \\ \partial(\cdot)/\partial p \end{pmatrix} \boldsymbol{\cdot} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = q\frac{\partial}{\partial p}(\cdot) \quad ,$$

so daß wir für den Kern von $\mathcal{A}_3^*$ erhalten:

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{A}_3^*) = \operatorname{span}\left\{q^3\right\} \quad .$$

Somit folgt zusammen mit Gl. (1.85b) die gewünschte Zerlegung von $\mathcal{L}_3$.

Es stellt sich natürlich die Frage, ob auch $\mathcal{A}_m^*$ ein zu irgendeinem Polynom $H_2^* \in \mathcal{L}_2$ adjungierter Lie-Operator ist. Man überzeugt sich durch Nachrechnen leicht davon, daß dies für

$$H_2^*(\boldsymbol{z}) := \frac{1}{2}\boldsymbol{z}\cdot J^{-1}L^*\boldsymbol{z} \tag{1.94}$$

der Fall ist. Denn es gilt nach (1.46b)

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{H_2^*}(\cdot) &= \{\cdot, H_2^*\} \\ &= D_{\boldsymbol{z}}(\cdot)\cdot J\left(D_{\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{z}\cdot J^{-1}L^*\boldsymbol{z}\right)\right) \quad , \end{aligned}$$

und wegen der Symmetrie von $J^{-1}L^*$ ist $D_{\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{z}\cdot J^{-1}L^*\boldsymbol{z}\right) = J^{-1}L^*\boldsymbol{z}$, so daß Gl. (1.93) folgt. ($J^{-1}L^*$ ist symmetrisch, weil $J^{-1}L^* = J\,\overline{\mathrm{Hess}(H_2)}J$ ist und $J^T = -J$ gilt.)

Man beachte auch hier die Ähnlichkeit von H_2^* in Gl. (1.94) und des entsprechenden Ausdrucks für den quadratischen Anteil der Hamilton-Funktion:

$$H_2(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{z}\cdot J^{-1}L\boldsymbol{z} \quad . \tag{1.95}$$

Nachdem wir uns die benötigten Hilfsmittel verschafft haben, können wir eine zu Gustavsons Satz analoge Aussage machen:

Satz 1.3 (Stegemerten) *Jede Hamilton-Funktion $H(\boldsymbol{z})$ in Gestalt einer formalen Potenzreihe (1.41) kann durch eine formale kanonische Transformation gemäß Gl. (1.81) in eine äquivalente Hamilton-Funktion $G(\boldsymbol{z})$ transformiert werden, die in DFS-Normalform ist.*

Der Beweis dieses Satzes ist im wesentlichen identisch mit dem Beweis von Satz 1.2. Lediglich bei der Lösung der homologischen Gleichung (1.66a) sind anstelle von Gl. (1.66b) die Nebenbedingung

$$G_m \in \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}_m^*) \tag{1.66b'}$$

und statt der $\mathcal{L}_m$-Zerlegung (1.68) deren Entsprechung (1.88) zu verwenden. Unabhängig von Stegemerten wurde Satz 1.3 auch in [MeHa92] bewiesen.

Wir gehen an dieser Stelle noch kurz auf den Zusammenhang zwischen der Gustavsonschen und der DFS-Normalform ein. Für ein H_2 vom Gustavson-Typ (1.61) ist

$$L = J\,\mathrm{Hess}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\omega_\nu}{2}(z_\nu^2 + z_{n+\nu}^2)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_n \\ -\mathrm{id}_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Omega = \mathrm{diag}\,(\omega_1, \ldots, \omega_n)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{1.96}$$

so daß für die adjungierte Matrix L^* gilt:

$$L^* = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} = -L \quad . \tag{1.97}$$

Wir erhalten schließlich wegen (1.94,1.95) bzw. (1.91,1.93):

$$H_2^*(\boldsymbol{z}) = -H_2(\boldsymbol{z}) \tag{1.98}$$

$$\mathcal{A}_m^* = -\mathcal{A}_m \quad . \tag{1.99}$$

Damit ist klar, daß eine Hamilton-Funktion, die in Gustavson-Normalform ist, auch in DFS-Normalform vorliegt, denn in diesem Spezialfall sind die Kernvektorräume von $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{A}_m^*$ identisch.

Im folgenden Abschnitt zeigen wir, daß die Normalformentheorie für Hamilton-Systeme physikalisch relevant ist: Die wichtigste Anwendung dieser Theorie ist die Konstruktion von Integralen der Bewegung.

1.2.4 Formale Integrale und Quasiintegrale der Bewegung

Die wesentliche Motivation zur Einführung der Gustavson-Normalform war die Suche nach einem weiteren Integral der Bewegung, das man sich in der Tat mit der Gustavsonschen Theorie in Gestalt von $\tilde{H}_2(\tilde{\boldsymbol{z}})$ verschaffen konnte. Mit $\tilde{H}_2(\tilde{\boldsymbol{z}})$ ist hier der quadratische Anteil der durch die Transformation $\boldsymbol{z} \mapsto \tilde{\boldsymbol{z}}$ auf Normalform gebrachten Hamilton-Funktion gemeint. In [Gu66] wird gezeigt, daß eine Hamilton-Funktion mit einem quadratischen Anteil vom Gustavson-Typ (1.61) über $\tilde{H}_2(\tilde{\boldsymbol{z}})$ hinaus noch weitere unabhängige Integrale der Bewegung[9] besitzen kann.

Genauer gilt folgende Aussage: Wir betrachten eine Hamilton-Funktion, die in Gustavson-Normalform ist und deren Frequenzen ω_ν in *r-facher Resonanz* sind, mit $0 \leq r < n$. Das heißt, die Frequenzen genügen r linear

[9] Nach [ChLe84] sind k Funktionen $H(\boldsymbol{z}) = I_1(\boldsymbol{z}), I_2(\boldsymbol{z}), \ldots, I_k(\boldsymbol{z})$ voneinander unabhängige Integrale der Bewegung, wenn ihre Gradienten $D_{\boldsymbol{z}} I_i(\boldsymbol{z})$, $i = 1, \ldots, k$ auf einer offenen und dichten Teilmenge des Phasenraumes linear unabhängig sind und wenn die $I_i(\boldsymbol{z})$ jeweils paarweise in Involution sind, d. h. wenn ihre Poisson-Klammern verschwinden:

$$\{I_i, I_j\} = 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \leq i, j \leq k \quad .$$

unabhängigen Kommensurabilitätsbedingungen

$$\sum_{\nu=1}^{r} a_{\mu\nu}\omega_\nu = 0 \ , \quad \mu = 1, 2, \ldots, r \tag{1.100}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_{\mu\nu} \in \mathbf{Z}$. Man kann die $(a_{\mu\nu})$ als Einträge einer (r, n)-Matrix A auffassen, die vollen Rang r hat und

$$A\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \tag{1.101}$$

erfüllt. Dann gibt es genau $n-r$ unabhängige formale Integrale der Bewegung, und diese können in der Gestalt

$$I_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{2} \left(z_\nu^2 + z_{n+\nu}^2 \right) \tag{1.102}$$

angegeben werden, wobei $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbf{R}^n$ ein beliebiger Vektor ist, der

$$A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \tag{1.103}$$

erfüllt. *Formal* sind diese Integrale deswegen, weil hier über die Konvergenzeigenschaften der sie darstellenden Potenzreihen keine Aussage gemacht wird. Vgl. die nachfolgende Diskussion auf S. 38.

Diese Aussage ist eine direkte Folge der Tatsache, daß $H(\boldsymbol{z})$ in Gustavson-Normalform ist: Zum Beweis untersucht man den Ausdruck $\{H, I_{\mathrm{G}}\}$ in den „diagonalisierenden“ Phasenraumkoordinaten $\tilde{\boldsymbol{z}}$ aus Gl. (1.73). Es zeigt sich dann sofort, daß diese Poisson-Klammer genau dann verschwindet, wenn die α_ν der Bedingung (1.103) genügen.

Für eine Hamilton-Funktion in DFS-Normalform stellt sich die Situation nicht mehr so überschaubar dar. In Analogie zur Gustavsonschen Theorie liegt es nahe zu vermuten, daß H_2^*, welches in der DFS-Theorie die Rolle von H_2 übernimmt, ein Integral der Bewegung sei. Dies gilt aber nicht, denn es ist

$$\begin{aligned} \{H, H_2^*\} &= \sum_{l \geq 2} \mathcal{A}_l^*(H_l) \\ &= \mathcal{A}_2^*(H_2) \\ &= \{H_2, H_2^*\} \quad . \end{aligned} \tag{1.104}$$

Die letzte Poisson-Klammer verschwindet im allgemeinen nicht. Hier zeigt sich die Bedeutung der Tatsache, daß die die DFS-Normalform definierende Gleichung (1.89) nicht für $l = 2$ erfüllt sein muß.

Bei der Untersuchung von sogenannten magnetischen Flaschen (vgl. Kapitel 2) sind Hamilton-Funktionen mit

$$H_2(\boldsymbol{z}) = \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{2} z_{n+\nu}^2 + \sum_{\nu=l+1}^{n} \frac{\omega_\nu}{2} \left(z_\nu^2 + z_{n+\nu}^2 \right) \tag{1.105}$$

von großer Bedeutung. Für dieses H_2 ergibt sich $\{H, H_2^*\} = \sum_{\nu=1}^{l} z_\nu z_{n+\nu} \neq 0$. Dragt und Finn [DrFi79] fanden aber auch in dieser Situation ein weiteres Integral der Bewegung, falls $H(\boldsymbol{z})$ in DFS-Normalform ist:

$$I_{\mathrm{DF}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\nu=l+1}^{n} \frac{\omega_\nu}{2} \left(z_\nu^2 + z_{n+\nu}^2 \right) \quad . \tag{1.106}$$

In Abschnitt 4.1.1 werden wir dieses Resultat mit den Methoden der DFS-Theorie herleiten.

Über die speziellen, von Gustavson (Gl. (1.61)) bzw. Dragt und Finn (Gl. (1.105)) betrachteten Hamilton-Funktionen hinaus gibt es weitere Funktionen in $\boldsymbol{z}$, die als quadratische Anteile $H_2(\boldsymbol{z})$ von Potenzreihen-Hamilton-Funktionen auftreten können[10]. Die Verallgemeinerung des Dragt-Finnschen Resultates auf ein beliebiges dieser $H_2(\boldsymbol{z})$ gelingt mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung von L. Wir gehen von der allgemein gültigen Darstellung (1.95) des quadratischen Anteils der Hamilton-Funktion aus:

$$H_2(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{z} \cdot J^{-1} L \boldsymbol{z} \quad . \tag{1.95}$$

H_2 und damit auch $\mathcal{A}_m$ werden durch die $(2n, 2n)$-Matrix L eindeutig festgelegt. Wir spalten L mit Hilfe der *Jordan-Chevalley-Zerlegung* [Hu87] in einen (über $\mathbf{C}$) diagonalisierbaren Anteil D und einen nilpotenten Anteil N auf:

$$L = D + N \quad . \tag{1.107}$$

Nach dem Satz über die Jordansche Normalform (1.2) sind die Existenz und Eindeutigkeit dieser Zerlegung klar, wenn man in Gl. (1.2) $A := L$ setzt und

$$D = X \begin{pmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_r \end{pmatrix} X^* \quad \text{mit} \quad D_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & 0 \\ & \lambda_k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, r$$

bzw.

$$N = X \begin{pmatrix} N_1 & & & 0 \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & N_r \end{pmatrix} X^* \quad \text{mit} \quad N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, r$$

wählt. Offensichtlich ist N nilpotent: Es gibt eine Zahl $n_0 \in \mathbf{N}_0$, so daß $N^{n_0} = 0$ ist ($n_0 \leq 2n$). In Verallgemeinerung von Gl. (1.106) definieren wir als den „diagonalisierbaren Anteil" von H_2:

$$I_{\mathrm{DFS}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{z} \cdot J^{-1} D \boldsymbol{z} \quad . \tag{1.108}$$

Es gilt der

[10] Die vollständige Klassifizierung der Normalformen quadratischer Hamilton-Funktionen geht auf D. M. Galin zurück und wird beispielsweise in [Ar89, Anhang 6] diskutiert. Man vergleiche auch Anhang A.

Satz 1.4 (Stegemerten) : *Für eine Hamilton-Funktion $H(\boldsymbol{z})$ in DFS-Normalform ist der diagonalisierbare Anteil I_{DFS} (1.108) des quadratischen Termes von $H(\boldsymbol{z})$ ein formales Integral der Bewegung.*

Ein Beweis des Satzes findet sich in [St91, MeHa92]. Man weist wieder für alle $m \geq 2$ das Verschwinden von $\{H_m, I_{\mathrm{DFS}}\}$ nach, wobei die Nilpotenz von N und des entsprechenden Lie-Operators $D_{\boldsymbol{z}}(\cdot){\cdot}N\boldsymbol{z}$ ausgenutzt wird.

In Anhang A benutzen wir die Galinsche Klassifizierung der quadratischen Hamilton-Funktionen, um für (fast) alle Hamilton-Funktionen aus $\mathcal{L}$ die entsprechenden Integrale I_{DFS} zu bestimmen.

An dieser Stelle zeigt sich noch einmal ein Charakteristikum der Normalformentheorie: Es werden Aussagen über Elemente des hochdimensionalen Vektorraumes $\mathcal{L}_m$ gemacht, wobei vor allem Eigenschaften des im Vergleich zu $\mathcal{L}_m$ niedrigdimensionalen $\mathbf{R}^{2n}$ in die Argumentation eingehen. Konkret heißt dies bei der Bestimmung von Integralen der Bewegung, daß lediglich die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer $(2n, 2n)$-Matrix gefunden werden muß, um aus der in Normalform befindlichen Hamilton-Funktion ein Integral der Bewegung zu bestimmen, dessen Grad m-Anteile Elemente des $\binom{2n+m-1}{2n-1}$-dimensionalen Raumes $\mathcal{L}_m$ sind. Eine entsprechende Eigenschaft macht man sich auch bei der Transformation auf Normalform zunutze: Um den Grad, bis zu dem sich die Hamilton-Funktion in Normalform befindet, um eins zu erhöhen, muß man Elemente des hochdimensionalen Vektorraumes $\mathcal{L}_m$ manipulieren. Diese Aufgabe wird dadurch vereinfacht, daß die wesentlichen Gleichungen (1.91) und (1.93) Strukturen (von L bzw. L^*) in dem nur $2n$-dimensionalen Vektorraum $\mathbf{R}^{2n}$ betreffen.

Ein zweiter wichtiger Punkt, der an dieser Stelle nicht außer acht gelassen werden darf, ist die Tatsache, daß sowohl $I_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{z})$ als auch $I_{\mathrm{DFS}}(\boldsymbol{z})$ lediglich *formale* Integrale der Bewegung darstellen. Zwar kann man jede Hamilton-Funktion in Potenzreihengestalt in DFS-Normalform überführen, indem man Grad für Grad homologische Gleichungen löst und entsprechend Lie-transformiert. Daß aber das Resultat dieser sukzessiven Transformationen für $m \to \infty$ konvergiert, ist keineswegs sichergestellt. Beispielsweise kann im Falle eines nichtintegrablen Systems mit zwei Freiheitsgraden der Bewegung die Normalform-Transformation nicht konvergieren, weil man sonst ein zweites Integral der Bewegung erhielte. Dessen Existenz ist aber für ein nichtintegrables System gerade ausgeschlossen.

Wir gehen an dieser Stelle noch auf den Begriff des *Quasiintegrals* ein. Selbst in dem Fall, daß die Transformation der Hamilton-Funktion auf Normalform konvergiert, werden wir in der Praxis die Berechnung der Normalform und damit auch des Integrals bei einem endlichen Grad m abbrechen, weil die homologische Gleichung für jeden Grad neu gelöst werden muß und man in der Regel kein allgemeines, für alle m gültiges Transformationsgesetz findet. Deshalb erhalten wir nur eine Approximation $G^{(m)}(\boldsymbol{z})$,

$$G^{(m)} = \exp(\mathrm{ad}_{F_m})\exp(\mathrm{ad}_{F_{m-1}})\cdots\exp(\mathrm{ad}_{F_3})(H) \quad , \tag{1.109}$$

die bis zum Grad m in Normalform ist. Im Grenzübergang $m \to \infty$ erhielte man die vollständig normalisierte Hamilton-Funktion

$$G^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} G^{(m)} = \cdots\exp(\mathrm{ad}_{F_4})\exp(\mathrm{ad}_{F_3})(H) \quad . \tag{1.110}$$

Es gilt

$$G^{(m)}(\boldsymbol{z}) = G^{(\infty)}(\boldsymbol{z}) + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^{m+1}\right) \quad , \tag{1.111}$$

denn die Normalisierung für größere Grade als m ändert die Terme mit dem Grad $l \leq m$ nicht mehr. Die Rücktransformation des diagonalisierbaren Anteils von $H_2(\boldsymbol{z})$ auf die ursprünglichen Koordinaten[11] ergibt dann, unter Ausnutzung der Formel (1.57) für die Inverse einer Lie-Transformation,

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{DFS}}^{(m)}(\boldsymbol{z}) &= \exp(\mathrm{ad}_{-F_3})\exp(\mathrm{ad}_{-F_4})\cdots\exp(\mathrm{ad}_{-F_m})(I_{\mathrm{DFS}}) \\ &= I_{\mathrm{DFS}}^{(\infty)}(\boldsymbol{z}) + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^{m+1}\right) \quad . \end{aligned} \tag{1.112}$$

Dementsprechend kann das praktisch berechnete Integral der Bewegung $I_{\mathrm{DFS}}^{(m)}(\boldsymbol{z})$ nur konstant bis auf Terme der Ordnung $m+1$ sein, wenn die Hamilton-Funktion lediglich bis zum Grad m auf Normalform gebracht wurde.

Gl. (1.112) verdeutlicht, daß das formale Integral $I_{\mathrm{DFS}}^{(\infty)}(\boldsymbol{z})$ bzw. die entsprechenden Quasiintegrale $I_{\mathrm{DFS}}^{(m)}(\boldsymbol{z})$ im allgemeinen eine sehr komplizierte algebraische Struktur aufweisen, im Gegensatz zur Darstellung (1.108) des Integrals als quadratisches Polynom in den Koordinaten $\tilde{\boldsymbol{z}}$. Diese Komplizierung ist bedingt durch die (unendlich vielen) bei der Rücktransformation benötigten Lie-Transformationen $\exp(\mathrm{ad}_{-F_k})$.

Bei der Berechnung von Quasiintegralen für konkrete Beispielsysteme — in den Kapiteln 4 und 5 — wird sich zeigen, daß die Oszillation des Quasiintegrals aufgrund des Fehlerterms $\mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^{m+1}\right)$ in Gl. (1.112) schon für kleine Werte von m unbedeutend werden kann. Andererseits ist es auch möglich, daß der Fehlerterm selbst für kleine $|\boldsymbol{z}|$ und größere m dominiert und $I_{\mathrm{DFS}}^{(m)}(\boldsymbol{z})$ somit nicht annähernd konstant wird. Welcher dieser Fälle eintritt, hängt von

[11] Bisher haben wir die Transformation $\exp(\mathrm{ad}_{F_m})$ von einem „aktiven" Standpunkt aus betrachtet und sie als eine Transformation interpretiert, die bei festliegendem Koordinatensystem eine Hamilton-Funktion in eine andere transformiert. Man kann aber auch eine „passive" Position einnehmen, und den Vorgang als eine Koordinatentransformation bei unveränderter Hamilton-Funktion ansehen. Dieser zweite Standpunkt wird der gewöhnliche sein, wenn man für ein gegebenes System ein (näherungsweises) Integral der Bewegung berechnen will. In diesem Licht betrachtet ist es klar, daß das gefundene Integral schließlich auf die ursprünglichen Koordinaten umzurechnen ist.

der Chaotizität des relevanten Gebietes des Phasenraumes ab. Wir werden uns diesem Problem in Kapitel 4 zuwenden.

Selbst im Fall der Nichtkonvergenz der Normalformtransformation stellen aber die niedrigsten Terme der Normalform in der Regel ein sehr nützliches Hilfsmittel zur Analyse des Phasenportraits dar und ermöglichen die Untersuchung von periodischen Orbits, invarianten Tori und deren Bifurkationen [ShRe82, Ro84].

Kapitel 2

Magnetische Flaschen

Doch warum heftet sich mein Blick auf jene Stelle?
Ist jenes Fläschchen dort den Augen ein Magnet?

Johann Wolfgang Goethe
Faust I

In diesem Kapitel werden der Begriff der magnetischen Flasche eingeführt und einige Beispielsysteme diskutiert.

Unter einer magnetischen Flasche versteht man ein System, das ein geladenes Teilchen mittels magnetischer Felder einschließen kann; das heißt, in einer magnetischen Flasche ist eine gebundene Bewegung des Teilchens möglich. Eine ausführliche Diskussion dieser Systemklasse findet sich in [No63].

Es ist bekannt und hat sogar bereits Eingang in die populärwissenschaftliche Literatur gefunden (vgl. [Ga93]), daß man geladene Teilchen in einer Kombination statisch-stationärer elektrischer und magnetischer Felder einfangen kann; man spricht dabei auch von sogenannten Ionenfallen, weil diese Systeme vor allem zur Untersuchung von Ionen eingesetzt werden. Ein einfacher Vertreter dieser Systemklasse ist die Penning-Falle, die durch ein homogenes Magnetfeld in Kombination mit einem elektrischen Quadrupolfeld gebildet wird. In einer solchen Anordnung ist eine gebundene Bewegung möglich [BrGa86, St91]. Der Einschluß als solcher ist dabei nicht allein entscheidend, sondern die Tatsache, daß er bei sehr niedrigen Energien realisiert werden kann: Zum Beispiel werden auch in den aus der Hochenergiephysik bekannten Speicherringen Teilchen durch Magnetfelder eingeschlossen; dies geschieht dort allerdings, wie der Name schon andeutet, bei hohen Energien. Die Bedeutung von Ionenfallen liegt deswegen vor allem darin, daß man in ihnen einzelne Teilchen „beliebig“ lange bei niedrigen Energien beobachten und somit sehr genaue Messungen an ihnen durchführen kann. Zum Beispiel gelang mit Hilfe einer Penning-Falle eine der bislang genauesten Messungen des g-Faktors des Elektrons [BrGa86]. Eine andere aktuelle Anwendung ist die Erzeugung von Antiwasserstoff am CERN. Hierzu wird zunächst ein Antiproton in einer Penning-Falle gespeichert, bevor man es mit einem Positron rekombinieren läßt [ZiHä93, Ga93].

Die in der vorliegenden Arbeit zu untersuchenden magnetischen Flaschen sind spezielle Ionenfallen, bei denen man lediglich stationäre axialsymmetrische magnetische Felder verwendet. Eine magnetische Flasche dieses Typs wird beispielsweise auch in [Ch79] diskutiert. Um diese Systeme systematisch zu beschreiben, wollen wir uns des Hamiltonschen (kanonischen) Formalismus bedienen. Dafür bestimmen wir zunächst eine zweckmäßige Entwicklung des Vektorpotentials für das $\boldsymbol{B}$-Feld. Damit können wir dann die Hamilton-Funktion einer magnetischen Flasche angeben und einige Beispielsysteme diskutieren.

2.1 Kanonische Formulierung

Wir werden uns in dieser Arbeit auf stationäre magnetische Felder im Vakuum beschränken. Außerdem setzen wir — wegen der leichteren experimentellen Realisierbarkeit und wegen der erheblichen Erleichterung der notwendigen Rechnungen — Axialsymmetrie des $\boldsymbol{B}$-Feldes voraus.

Die Bewegung eines Teilchens (mit der Masse m und der Ladung q) in einem reinen Magnetfeld kann durch die Hamilton-Funktion[1]

$$H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\left\{\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right\}^2 \tag{2.1}$$

beschrieben werden [Go80]. Dabei ist $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ das Vektorpotential der magnetischen Induktion:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \quad . \tag{2.2}$$

Wegen der Stromfreiheit und Stationarität gilt

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad ;$$

[1] Wie in [Dr65, Se90] gezeigt wird, beschreibt diese Hamilton-Funktion die Teilchendynamik nicht nur im Rahmen der klassischen Mechanik, sondern auch im relativistischen Fall, wenn man m als die relativistische Masse $\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ interpretiert.

damit ist $\boldsymbol{B}$ als das Gradientenfeld eines skalaren magnetischen Potentials Φ darstellbar:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r}) \quad . \tag{2.3}$$

Mit der homogenen Maxwell-Gleichung

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$$

folgt dann, daß dieses Potential Φ die Laplace-Gleichung erfüllt,

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \quad ,$$

so daß eine Entwicklung von Φ nach Eigenfunktionen des Laplace-Operators, den Kugelflächenfunktionen, naheliegt [No90b]. Für diese Multipolentwicklung ist es zweckmäßig, Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) zu verwenden:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=\pm} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm}^k R_l^k(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \tag{2.4}$$

mit reellen Koeffizienten a_{lm}^k. Bei den $R_l^k(r)$ handelt es sich um einen vollständigen Satz von Lösungen der Radialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)(rR(r)) = 0 \quad ,$$

zum Beispiel

$$R_l^k(r) := \begin{cases} r^l & \\ & \text{für} \\ r^{-l-1} & \end{cases} \begin{matrix} k=+ \\ \\ k=- \end{matrix} \quad , \tag{2.5}$$

mit $l \geq 0$. Die $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ sind die Kugelflächenfunktionen,

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \sim P_l^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi} \quad , \tag{2.6}$$

in die die zugeordneten Legendre-Polynome $P_l^m(\zeta)$ eingehen. Weil wir uns auf axialsymmetrische Systeme beschränken wollen, müssen wir in der Multipolentwicklung nur φ-unabhängige Summanden berücksichtigen, $a_{lm}^k = 0$ für $m \neq 0$, und benötigen nur noch die gewöhnlichen Legendre-Polynome $P_l(\zeta) = P_l^0(\zeta)$. Wir benutzen im folgenden, der Axialsymmetrie angepaßt, Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) und definieren[2]

$$\Phi_l^k(\rho, z) := \begin{cases} r^l \quad P_l(\cos\vartheta) & \\ & \text{für} \\ r^{-l-1} P_l(\cos\vartheta) & \end{cases} \begin{matrix} k=+ \\ \\ k=- \end{matrix} \quad . \tag{2.7}$$

In der Tat ist Φ_l^k eine Funktion von ρ und z (und nicht von φ), denn die Umrechnung von Kugel- auf Zylinderkoordinaten ergibt $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ und

[2] Obwohl wir prinzipiell Zylinderkoordinaten verwenden wollen, werden wir gegebenenfalls zur Vereinfachung der Schreibweise Funktionen in Abhängigkeit von r und ϑ anstelle von ρ und z angeben. Diese beiden Darstellungsweisen sind natürlich äquivalent.

$\cos\vartheta = z/\sqrt{\rho^2+z^2}$. Weil $P_l(\zeta)$ ein Polynom vom Grad l in ζ ist und weil darüber hinaus $P_l(\zeta)$ gerade/ungerade ist, wenn l gerade/ungerade ist[3], ist $\Phi_l^+(\rho,z)$ sogar ein Polynom in ρ und z, und zwar ist es homogen vom (Total-) Grad l. $\Phi_l^-(\rho,z)$ ist komplizierter; es handelt sich um den Quotienten der von ρ und z abhängenden echt gebrochenrationalen Funktion (vgl. [BrSe85, S. 171]) $r^l P_l(\cos\vartheta)/r^{2l}$ und $\sqrt{\rho^2+z^2}$. Φ_l^+ ist im Koordinatenursprung regulär, wohingegen Φ_l^- dort divergiert.

Damit läßt sich das skalare Potential als

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=\pm}\sum_{l=0}^{\infty} a_l^k \Phi_l^k(\rho,z) \tag{2.8}$$

schreiben, wobei wir einfachheitshalber $a_l^k = a_{l0}^k$ gesetzt haben. Für die Hamilton-Funktion benötigen wir aber nicht das skalare, sondern das entsprechende Vektorpotential $\boldsymbol{A}$. Mit den Gln. (2.2) und (2.3) gilt:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \quad . \tag{2.9}$$

Die Axialsymmetrie und die Lorentz-Eichung $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$ berücksichtigend, setzen wir für $\boldsymbol{A}$ an:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A(\rho,z)\boldsymbol{e}_\varphi \quad . \tag{2.10}$$

Wir entwickeln $\boldsymbol{A}$ analog zu Φ,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=\pm}\sum_{l=0}^{\infty} b_l^k A_l^k(\rho,z)\boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.11}$$

(wiederum mit Koeffizienten b_l^k aus $\mathbf{R}$), so daß Gl. (2.9) schon für jeden Summanden der Entwicklung erfüllt ist:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(b_l^k A_l^k(\rho,z)\boldsymbol{e}_\varphi\right) = -\boldsymbol{\nabla}\left(a_l^k\Phi_l^k(\rho,z)\right) \quad . \tag{2.12}$$

Wie wir in Anhang B zeigen, wird diese Differentialgleichung nach geeigneter Wahl der Koeffizienten b_l^k gelöst durch

$$A_l^k(\rho,z) := \begin{cases} r^l \quad P_l^1(\cos\vartheta) & \\ r^{-l-1} P_l^1(\cos\vartheta) & \text{für} \\ 0 & \\ r^{-1} \quad \cot\vartheta & \end{cases} \begin{array}{l} k=+, l\geq 1 \\ k=-, l\geq 1 \\ k=+, l=0 \\ k=-, l=0 \end{array} \quad . \tag{2.13}$$

Wir geben in Tabelle 2.1 die ersten Terme dieser Multipolentwicklung für $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ an. In Tabelle 2.2 führen wir die entsprechenden Magnetfelder

$$\boldsymbol{B}_l^k(\rho,z) = \boldsymbol{\nabla}\times\left(A_l^k(\rho,z)\boldsymbol{e}_\varphi\right) \tag{2.14}$$

auf. Das gesamte $\boldsymbol{B}$-Feld kann dann gemäß

[3] Dies folgt zum Beispiel aus der Formel von Rodriguez, vgl. [AbSt72].

$A_l^k(\rho,z)$	$k=+$	$k=-$
$l=0$	0	$\dfrac{z}{\rho\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}}$
$l=1$	ρ	$\dfrac{\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$
$l=2$	$3\rho z$	$\dfrac{3\rho z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{5/2}}$
$l=3$	$6\rho z^2-\dfrac{3}{2}\rho^3$	$\dfrac{3\rho\left(4z^2-\rho^2\right)}{2\left(\rho^2+z^2\right)^{7/2}}$

Tabelle 2.1: $\boldsymbol{A}$-Multipole für $0 \leq l \leq 3$. Der Faktor $\boldsymbol{e}_\varphi$ (vgl. Gl. (2.11)) ist hier der Einfachheit halber weggelassen.

$\boldsymbol{B}_l^k(\rho,z)$	$k=+$	$k=-$
$l=0$	$\mathbf{0}$	$-\dfrac{\rho\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$
$l=1$	$2\boldsymbol{e}_z$	$\dfrac{3\rho z\boldsymbol{e}_\rho+\left(2z^2-\rho^2\right)\boldsymbol{e}_z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{5/2}}$
$l=2$	$3\left(-\rho\boldsymbol{e}_\rho+2z\boldsymbol{e}_z\right)$	$\dfrac{3\left(4\rho z^2-\rho^3\right)\boldsymbol{e}_\rho+3\left(2z^3-3\rho^2 z\right)\boldsymbol{e}_z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{7/2}}$
$l=3$	$6\left[-2\rho z\boldsymbol{e}_\rho+\left(2z^2-\rho^2\right)\boldsymbol{e}_z\right]$	$\dfrac{3\left(-15\rho^3 z+20\rho z^3\right)\boldsymbol{e}_\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{9/2}} +\dfrac{3\left(3\rho^4-24\rho^2z^2+8z^4\right)\boldsymbol{e}_z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{9/2}}$

Tabelle 2.2: $\boldsymbol{B}$-Multipole für $0 \leq l \leq 3$. Die zu $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ gehörenden Terme der Multipolentwicklung werden als Monopol-, Dipol-, Quadrupol-, Oktupol-, ... Term bezeichnet.

$$\boldsymbol{B}(\rho,z)=\sum_{k=\pm}\sum_{l=0}^{\infty}b_l^k\boldsymbol{B}_l^k(\rho,z) \tag{2.15}$$

entwickelt werden.

Man kann an Gl. (2.13) eine wesentliche Eigenschaft des Vektorpotentials im axialsymmetrischen Fall ablesen: Offensichtlich hängt die Winkelverteilung (die „Charakteristik") des Potentials $A_l^k\boldsymbol{e}_\varphi$, und damit auch des entsprechenden $\boldsymbol{B}$-Feldes, nur von l und nicht von k ab. l bestimmt die „Geometrie" des Feldes, ob es also zum Beispiel vom Dipol-, Quadrupol- oder von einem anderen Typ ist. Für jedes l gibt es zwei Potentiale (gekennzeichnet durch $k=+$ bzw. $k=-$), die zwar die gleiche Winkelverteilung aufweisen, sich aber in ihrer r-Abhängigkeit unterscheiden.

Man beachte hierbei, daß sich die algebraischen Eigenschaften von Φ_l^k übertragen: A_l^+ ist ein homogenes Polynom vom (Total-) Grad l in den Variablen ρ und z; A_l^- ist der Quotient zweier homogener (ρ,z)-Polynome vom Grad l und $2l$, dividiert durch $\sqrt{\rho^2+z^2}$. Insbesondere divergiert auch A_l^- im Koordinatenursprung, während A_l^+ dort regulär ist.

Mit der so gefundenen Multipolentwicklung für das magnetische Vektorpotential können wir jetzt die Hamilton-Funktion für eine axialsymmetrische magnetische Flasche aus Gl. (2.1) umschreiben in

$$\begin{aligned} & H(\rho,\varphi,z,p_\rho,p_\varphi,p_z)= \\ &= \frac{1}{2m}\left\{\left(p_\rho\boldsymbol{e}_\rho+\frac{p_\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi+p_z\boldsymbol{e}_z\right)-qA(\rho,z)\boldsymbol{e}_\varphi\right\}^2 \\ &= \frac{1}{2m}\left\{p_\rho^2+\left(\frac{p_\varphi}{\rho}-q\sum_{k=\pm}\sum_{l=0}^{\infty}b_l^kA_l^k(\rho,z)\right)^2+p_z^2\right\} \quad . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Als eine direkte Folge der Zylindersymmetrie ist φ zyklisch in H; deswegen ist p_φ ein Integral der Bewegung:

$$\dot{p}_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial\varphi}\equiv 0 \quad . \tag{2.17}$$

Man kann deshalb eine magnetische Flasche als ein parameterabhängiges (nämlich p_φ-abhängiges) dynamisches System mit zwei Freiheitsgraden der Bewegung ansehen:

$$H=H(\rho,z,p_\rho,p_z;p_\varphi) \quad . \tag{2.18}$$

Nachdem man eine Lösung für dieses von sechs auf vier Phasenraumdimensionen reduzierte System gefunden hat — wegen der Reduktion der Dimensionalität findet man eine Lösung in der Regel erheblich einfacher — läßt sich

$\varphi(t)$ vergleichsweise problemlos durch Integration berechnen: Die Hamiltonsche Gleichung für φ lautet

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{m}\left(\frac{p_\varphi}{\rho^2} - \frac{q}{\rho}\sum_{k,l} b_l^k A_l^k\right) \quad , \tag{2.19}$$

so daß man mit den nun bekannten $\rho(t)$ und $z(t)$ erhält:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{p_\varphi}{\rho^2(t')} - \frac{q}{\rho(t')}\sum_{k,l} b_l^k A_l^k\left(\rho(t'), z(t')\right)\right) dt' \quad . \tag{2.20}$$

Man beachte, daß der generalisierte Impuls p_φ hier nicht die z-Komponente $L_z = m\rho^2\dot{\varphi}$ des Drehimpulses ist. Vielmehr gilt:

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} + q\rho A(\rho, z) \quad . \tag{2.21}$$

Aus diesem Grunde ist nicht etwa die axiale Drehimpulskomponente eine Erhaltungsgröße, sondern dieser relativ unanschauliche, zusätzlich vom Vektorpotential abhängende Ausdruck. Wenn man sich auf die im Ursprung divergenten Magnetfelder mit $k = -$ und $l \geq 1$ beschränkt, für die

$$\left|\rho A_l^-(\rho, z)\right| = \frac{|\sin\vartheta P_l^1(\cos\vartheta)|}{r^l} \leq \frac{\text{konst.}}{r^l} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.22}$$

gilt, ist die Drehimpulskomponente L_z im Grenzwert großer Abstände vom Ursprung näherungsweise eine Konstante der Bewegung:

$$\lim_{r\to\infty} L_z = \lim_{r\to\infty}\left(p_\varphi - q\rho A(\rho, z)\right) = p_\varphi = \text{konst.} \quad . \tag{2.23}$$

Dies ist recht anschaulich, weil das $\boldsymbol{B}$-Feld im Unendlichen verschwindet und das Teilchen somit kräftefrei wird. Analog hierzu ist L_z im Fall $k = +$ für kleine r näherungsweise konstant, weil $\rho A_l^+(\rho, z) = \mathcal{O}(r^{l+1})$.

Für unsere Überlegungen in Bezug auf die Normalformentheorie ist die folgende Beobachtung wesentlich: Die Gustavsonsche und auch die DFS-Normalformentheorie können zunächst nur auf solche magnetische Flaschen angewandt werden, für die erstens $p_\varphi = 0$ gilt, und bei denen zweitens keine im Ursprung divergierenden Anteile des Vektorpotentials beitragen. (Das heißt, es muß gelten: $b_l^- = 0 \;\; \forall \;\; l \geq 0$). Nur wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, liegt die Hamilton-Funktion (2.16) als *Potenzreihe* in ρ, z, p_ρ und p_z vor, und nur in diesem Fall können wir H auf Gustavsonsche oder Dragt-Finn-Stegemertensche Normalform transformieren.

Wir werden allerdings in Abschnitt 2.4 sehen, wie man sich selbst in den schwierigeren Fällen behelfen kann, in denen die Normalformentheorie nicht *direkt* anwendbar ist, weil mindestens eine der beiden genannten Bedingungen nicht erfüllt ist. Das dortige Ergebnis vorwegnehmend, stellen wir aber schon an dieser Stelle fest, daß ein solches Hindernis in der Regel nur mit einigem Aufwand zu umgehen ist. Der Lösungsansatz in diesen Fällen wird sein, daß man die Hamilton-Funktion in eine Potenzreihe entwickelt und die Entwicklung nach endlich vielen Gliedern abbricht. Damit diese *Näherung* der Hamilton-Funktion sinnvoll ist, muß man gegebenenfalls vorher auf geeignete kanonische Variablen transformieren, deren Beträge im Verlauf der zu untersuchenden Orbits nicht zu groß werden.

2.2 Die magnetische Flasche nach Brown und Gabrielse

Brown und Gabrielse betrachten in [BrGa86] eine Anordnung zur Speicherung von Ionen, die im wesentlichen aus einem homogenen Magnetfeld $B_0\boldsymbol{e}_z$ besteht, dem ein „Flaschen-Term“ in Gestalt eines inhomogenen $\boldsymbol{B}$-Feldanteils überlagert wird:

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{BG}}(\rho, z) := B_0\boldsymbol{e}_z + B_2\left[-\rho z\boldsymbol{e}_\rho + \left(z^2 - \frac{1}{2}\rho^2\right)\boldsymbol{e}_z\right] \quad . \tag{2.24}$$

Brown und Gabrielse befassen sich nur mit dem (einfacheren) Fall, in dem B_0 und B_2 das gleiche Vorzeichen haben, in dem also der inhomogene Feldanteil nahe der z-Achse den homogenen verstärkt. Im Gegensatz dazu behandeln wir hier gleichzeitig beide möglichen Fälle, $B_0B_2 \gtrless 0$, soweit es um die Herleitung und Vereinfachung der Hamilton-Funktion geht.

Weil die Anordnung offensichtlich axiale Symmetrie aufweist (und zusätzlich evakuiert sein soll), muß sich dieses Magnetfeld in die Multipolentwicklung des vorangegangenen Abschnitts einordnen lassen. In der Tat findet man mit Hilfe von Tabelle 2.2 sofort, daß man

$$\begin{aligned}
b_1^+ &= \frac{1}{2}B_0 \\
b_3^+ &= \frac{1}{12}B_2 \\
b_l^+ &= 0 \quad \text{für} \quad l = 2 \ \text{ und } \ l \geq 4 \\
b_l^- &= 0 \quad \text{für} \quad l \geq 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

zu wählen hat, um $\boldsymbol{B}_{\mathrm{BG}}$ gemäß den Gln. (2.11) und (2.14) zu entwickeln.

Der inhomogene Feldanteil ist demnach ein Oktupolterm, so daß es verständlich wird, warum Brown und Gabrielse gerade dieses $\boldsymbol{B}$-Feld (2.24) betrachten: Sowohl der homogene als auch der Oktupol-Feldanteil sind experimentell einfach zu realisieren.

Es ist nützlich, sich eine anschauliche Vorstellung von der Dynamik eines geladenen Teilchens in diesem Magnetfeld zu verschaffen. Hierfür berechnen wir zunächst die funktionale Gestalt $z(\rho)$ der $\boldsymbol{B}_{\mathrm{BG}}$-Feldlinien in der (ρ, z)-Ebene. Wir folgern aus der allgemeinen Feldliniengleichung

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{r}(s)\right) \tag{2.26}$$

(mit einem Parameter s) für das Brown-Gabrielse-Magnetfeld $\boldsymbol{B}_{\mathrm{BG}} = B_{\mathrm{BG},\rho}\boldsymbol{e}_\rho + B_{\mathrm{BG},z}\boldsymbol{e}_z$ die Differentialgleichung

$$\frac{dz_{\mathrm{BG}}}{d\rho} = \frac{B_{\mathrm{BG},z}(\rho, z_{\mathrm{BG}})}{B_{\mathrm{BG},\rho}(\rho, z_{\mathrm{BG}})} = \frac{B_0 + B_2\left(z_{\mathrm{BG}}^2 - \frac{1}{2}\rho^2\right)}{-B_2\rho z_{\mathrm{BG}}} \quad .$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung erhält man als

$$z_{\mathrm{BG}}(\rho) = \pm\sqrt{-\frac{B_0}{B_2} + \frac{\rho^2}{4} + \frac{C}{\rho^2}} \quad \text{mit} \quad C = \text{konst.}, \ \rho \neq 0 \quad . \tag{2.27}$$

Hierbei ist $z_{\mathrm{BG}}(\rho)$ nur für solche ρ definiert, für die der Radikand in Gl. (2.27) nicht negativ ist. Diese $\boldsymbol{B}_{\mathrm{BG}}$-Feldlinien sind für $B_0 = B_2 = 1$ und $B_0 = -B_2 = 1$ in den Abbildungen 2.1 und 2.2 dargestellt[4]. Wäre das Magnetfeld homogen, dann führte das Teilchen aufgrund der Lorentz-Kraft eine Spiralbewegung mit der Zyklotronfrequenz qB/m um eine Feldlinie herum aus. Natürlich ist das Brown-Gabrielse-Magnetfeld (2.24) nicht homogen, aber qualitativ folgt das Teilchen trotzdem spiralend einer Feldlinie, solange das Feld nicht „zu inhomogen“ wird, also zum Beispiel, solange das Teilchen nicht zu weit vom Koordinatenursprung entfernt ist. Wie man aus den Abbildungen entnehmen kann, gelangt das Teilchen aber irgendwann in einen Raumbereich, in dem sich die Feldlinien einander nähern und das Magnetfeld immer stärker wird, so daß das Teilchen zurückgeworfen wird und der Feldlinie in umgekehrter Richtung folgt. Diese anschaulichen Überlegungen bedürfen natürlich einer genaueren Begründung; wir werden diese Begründung in Kapitel 3 geben.

Wir nutzen jetzt Gl. (2.16) aus, um die dem Magnetfeld $\boldsymbol{B}_{\mathrm{BG}}$ entsprechende Hamilton-Funktion anzugeben; dabei wählen wir zusätzlich

$$p_\varphi = 0 \quad , \tag{2.28}$$

im Einklang mit unserer Forderung nach einer Hamilton-Funktion, die „einfach“ genug ist, um mit dem Normalformen-Formalismus behandelt werden

[4]Für $|B_0| \neq 1$ oder $|B_2| \neq 1$ ergeben sich ähnliche Bilder, die in Abhängigkeit davon, ob B_0 und B_2 gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, entweder der Abbildung 2.1 oder der Abbildung 2.2 entsprechen.

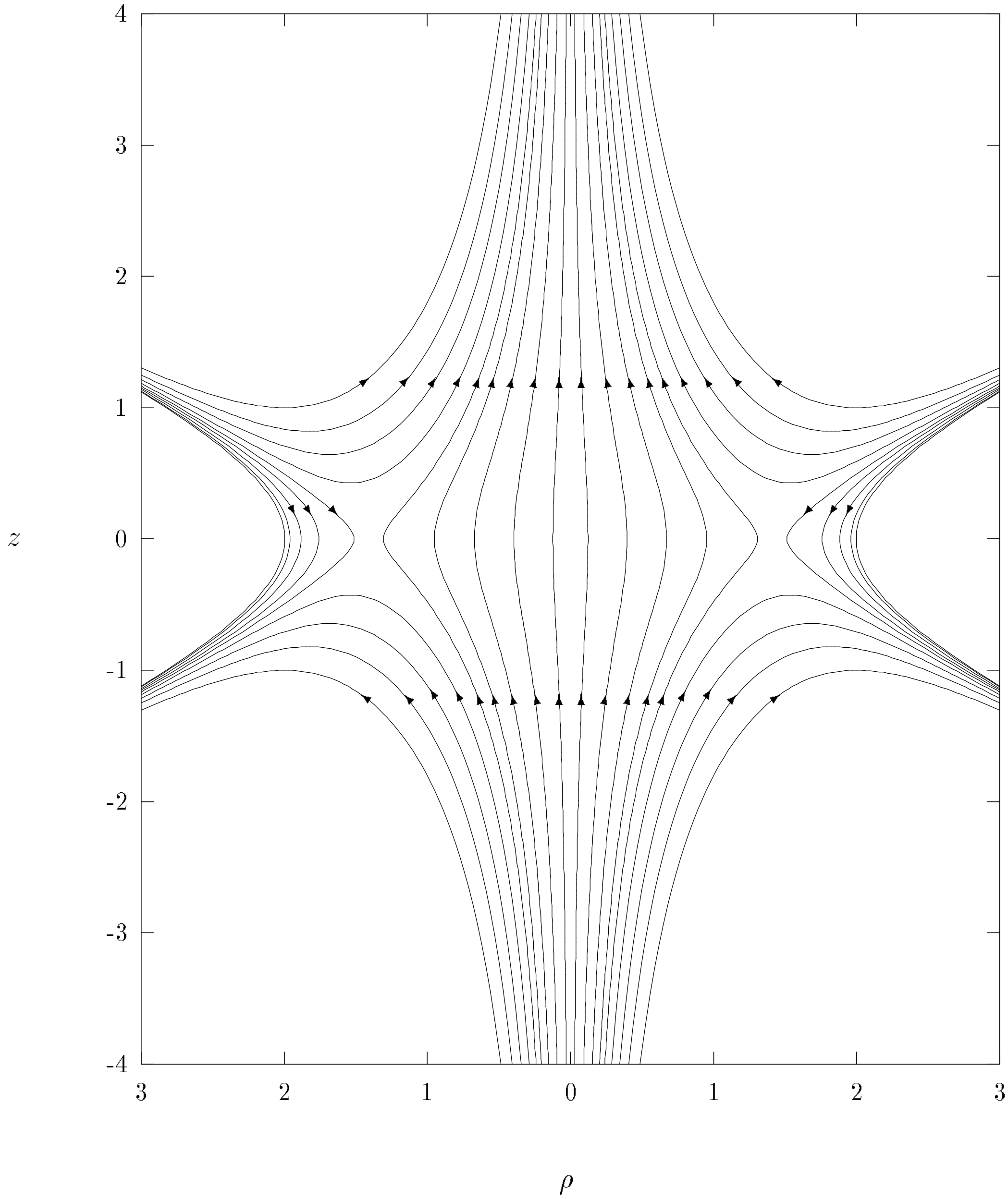


Abbildung 2.1: Feldliniendiagramm für das Magnetfeld $\boldsymbol{B}_{\mathrm{BG}}$ der Brown-Gabrielse-Magnetflasche mit $B_0 = B_2 = 1$. Wegen der axialen Symmetrie ergibt sich das vollständige dreidimensionale Bild durch Rotation der Feldlinien um die z-Achse.

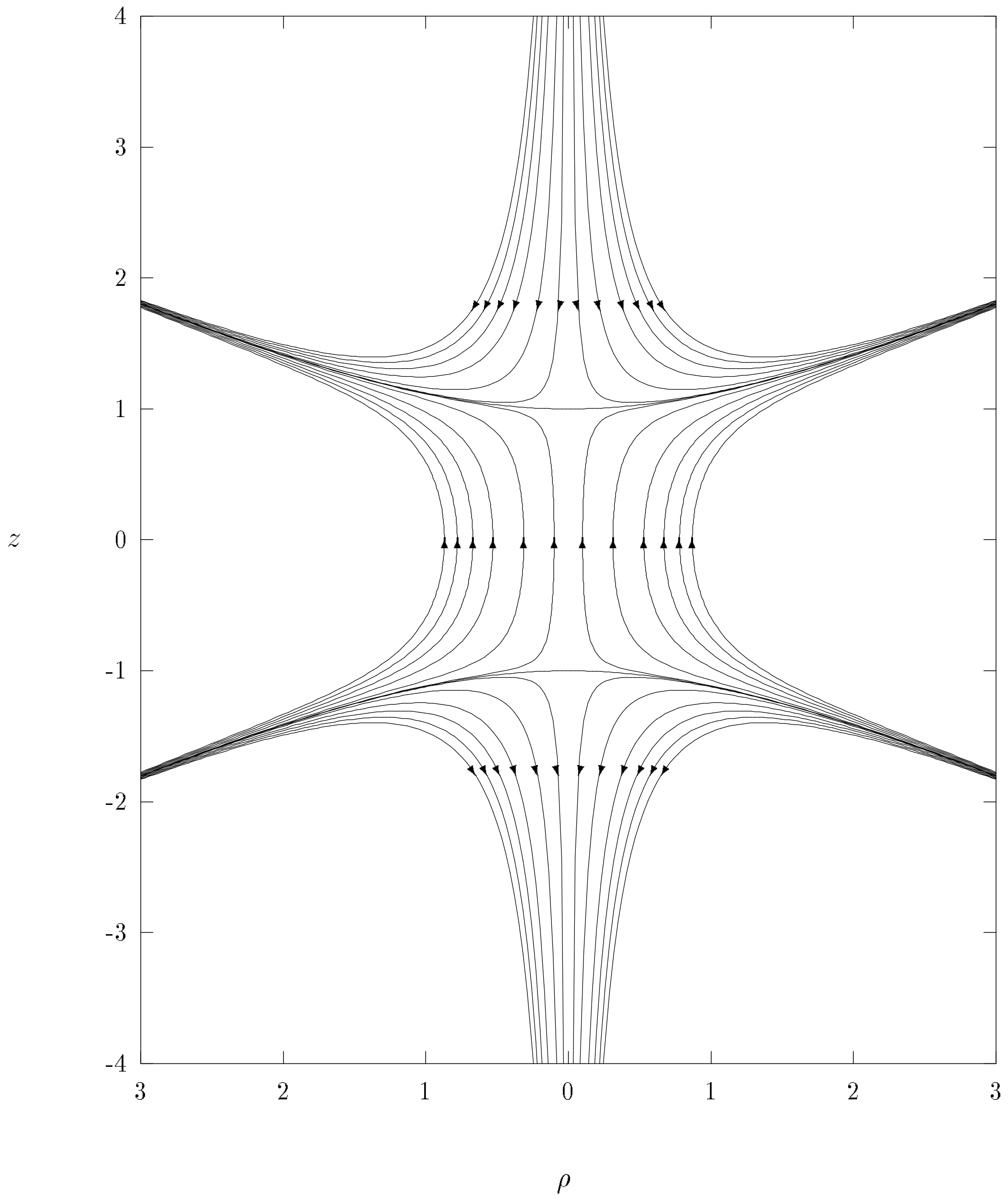


Abbildung 2.2: Feldliniendiagramm für das Magnetfeld $\boldsymbol{B}_{\mathrm{BG}}$ der Brown-Gabrielse-Magnetflasche mit $B_0 = -B_2 = 1$. Wegen der axialen Symmetrie ergibt sich das vollständige dreidimensionale Bild durch Rotation der Feldlinien um die z-Achse.

zu können (vgl. Seite 47f). Denn wäre der Azimutalimpuls von null verschieden, so erhielten wir einen zu $1/\rho^2$ proportionalen Summanden in der Hamilton-Funktion, und H läge nicht in Gestalt einer Potenzreihe vor — die Normalformentheorie wäre nicht direkt anwendbar.

Unter Berücksichtigung von Gl. (2.28) und von Gl. (2.25) für die Koeffizienten der Multipolentwicklung erhalten wir die Hamilton-Funktion der Brown-Gabrielse-Magnetflasche als

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{BG}}(\rho, z, p_\rho, p_z) = \\ = \frac{1}{2m}\Bigg\{ p_\rho^2 + p_z^2 + \frac{q^2 B_0^2}{4}\rho^2 + \frac{q^2 B_0 B_2}{2}\left(\rho^2 z^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right) \\ + \frac{q^2 B_2^2}{4}\left(\rho^2 z^4 - \frac{1}{2}\rho^4 z^2 + \frac{1}{16}\rho^6\right)\Bigg\} \quad . \end{aligned} \tag{2.29}$$

Wir wählen als Masseneinheit die Teilchenmasse m und als Ladungseinheit seine Ladung q. Das heißt, wir setzen formal $m = 1$ und $q = 1$. Darüber hinaus skalieren wir die Längen und die Zeit so, daß H_{BG} möglichst einfach wird. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem, ob der Oktupolanteil des $\boldsymbol{B}$-Feldes das Dipol-$\boldsymbol{B}$-Feld verstärkt oder abschwächt, ob also B_0 und B_2 gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Wir messen den Ort in Einheiten von

$$\begin{matrix} \sqrt{\dfrac{B_0}{2B_2}} \\ \sqrt{-\dfrac{B_0}{2B_2}} \end{matrix} \quad , \quad \text{falls} \quad \begin{matrix} B_0 B_2 > 0 \\ B_0 B_2 < 0 \end{matrix}$$

und die Zeit in Einheiten von $\dfrac{2}{B_0}$, das heißt, wir setzen (jeweils im Fall $B_0 B_2 \gtrless 0$):

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\pm\frac{B_0}{2B_2}}\rho' \\ z &= \sqrt{\pm\frac{B_0}{2B_2}}z' \\ t &= \frac{2}{B_0}t' \quad . \end{aligned} \tag{2.30}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise ersetzen wir im folgenden die gestrichenen wieder durch ungestrichene Größen. Damit ergibt sich die Hamilton-Funktion als

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{BG}}(\rho, z, p_\rho, p_z) &= \frac{B_0^3}{8B_2}\left\{\pm\frac{1}{2}\left(p_\rho^2+\rho^2\right)\pm\frac{1}{2}p_z^2+\frac{1}{2}\rho^2 z^2\right. \\ &\left. -\frac{1}{8}\rho^4\pm\frac{1}{8}\rho^2 z^4\mp\frac{1}{16}\rho^4 z^2\pm\frac{1}{128}\rho^6\right\}, \qquad (2.31) \\ &\text{falls}\quad B_0 B_2 \gtrless 0 \quad . \end{aligned}$$

Abschließend skalieren wir noch die Energie gemäß

$$H_{\mathrm{BG}} = \pm\frac{B_0^3}{8B_2}H'_{\mathrm{BG}}\,, \quad \text{falls} \quad B_0 B_2 \gtrless 0 \qquad (2.32)$$

(Dabei ändert die Energie durch die Skalierung ihr Vorzeichen nicht!), lassen die Strichmarkierung wieder weg und verbleiben schließlich mit

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{BG}}(\rho, z, p_\rho, p_z) &= \frac{1}{2}\left(p_\rho^2+\rho^2\right)+\frac{1}{2}p_z^2\pm\frac{1}{2}\rho^2 z^2 \\ &\mp\frac{1}{8}\rho^4+\frac{1}{8}\rho^2 z^4-\frac{1}{16}\rho^4 z^2+\frac{1}{128}\rho^6 \quad , \qquad (2.33) \\ &\text{falls}\quad B_0 B_2 \gtrless 0 \quad . \end{aligned}$$

Der quadratische Anteil dieser Hamilton-Funktion zeigt, daß man das Brown-Gabrielse-System in erster Näherung durch eine harmonische Oszillation in ρ-Richtung und eine freie Bewegung in z-Richtung beschreiben kann. Die Kopplungsterme, die hier von vierter und sechster Ordnung sind, führen dann aber zu der oben angedeuteten gebundenen Bewegung (falls ρ von null verschieden ist).

Im Hinblick auf die Normalformentheorie ist es wichtig zu bemerken, daß dieses System *nicht* mit dem Gustavsonschen Formalismus behandelt werden kann, denn dort geht man ja davon aus, daß das betrachtete System in niedrigster Ordnung durch (in diesem Fall zwei) harmonische Oszillatoren beschrieben wird. Hier deutet sich schon die Bedeutung der Dragt-Finn-Stegemertenschen Theorie an, die für *alle* in Form einer Potenzreihe vorliegenden Hamilton-Funktionen anwendbar ist.

2.3 Die „Mirror Machine“ nach Dragt und Finn

In den beiden vorangegangenen Abschnitten haben wir gesehen, wie man sich auf systematische Weise ein Magnetfeld verschaffen kann, in dem der dauerhafte Einschluß eines geladenen Teilchens möglich ist. Ein mögliches Resultat war die oben diskutierte Magnetflasche nach Brown-Gabrielse.

Welche Eigenschaften des oben diskutierten Feldes $\boldsymbol{B}_{\mathrm{BG}}$ sind nun wesentlich für den Einschluß des Teilchens? Dies ist eine sinnvolle und wichtige Frage, solange man nicht ein konkretes System beschreiben, sondern ganz allgemein magnetische Flaschen und deren charakteristische Eigenschaften diskutieren will. Wir suchen also ein Magnetfeld, das ebenso wie $\boldsymbol{B}_{\mathrm{BG}}$ zu einer gebundenen Bewegung des Teilchens führt, dabei aber „einfacher" ist. Dies ist insbesondere für die sich anschließende Berechnung der entsprechenden Normalform von Bedeutung, denn der Vergleich einiger Normalformtransformationen in Kapitel 5 wird zeigen, daß die Normalform einer Hamilton-Funktion und ihr Quasiintegral um so einfacher sind, je einfacher die Hamilton-Funktion selbst ist. (In diesem Zusammenhang nennen wir eine Hamilton-Funktion einfach, wenn sie aus nur wenigen Summanden besteht.)

Aus Abbildung 2.1 kann man entnehmen, daß die einfachste Bewegung im Magnetfeld $\boldsymbol{B}_{\mathrm{BG}}$ (im Falle $B_0 B_2 > 0$) in der Nähe einer Feldlinie nahe der z-Achse stattfindet: Die Feldlinien verlaufen dort fast parallel zur z-Achse, mit lediglich einer leichten Wölbung in positiver ρ-Richtung. Mittels „trial and error" findet man [DrFi79], daß das Magnetfeld $\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}$, welches man aus (2.24) durch Fortlassen des Termes $-\frac{1}{2}B_2\rho^2\boldsymbol{e}_z$ erhält,

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}(\rho, z) := B_0\boldsymbol{e}_z + B_2\left[-\rho z\boldsymbol{e}_\rho + z^2\boldsymbol{e}_z\right] \quad , \qquad (2.34)$$

genau diese Feldlinienstruktur aufweist; bei $\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}$ gibt es keine Feldlinien, die für große $|z|$ nicht gegen die z-Achse konvergieren. Dies läßt sich auch aus der Gleichung ablesen, der die $\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}$-Feldlinien genügen:

$$z_{\mathrm{DF}}(\rho) = \pm\sqrt{-\frac{B_0}{B_2} + \frac{C}{\rho^2}} \quad (C = \text{konst.}, \quad \rho \neq 0) \quad . \qquad (2.35)$$

(Die Herleitung dieser Formel für $z_{\mathrm{DF}}(\rho)$ erfolgt analog zur Berechnung von $z_{\mathrm{BG}}(\rho)$ in Abschnitt 2.2.) Man vergleiche hierzu die Abbildung 2.3, die das Dragt-Finnsche Magnetfeld zeigt, mit Abbildung 2.1. Dragt und Finn sprechen von diesem System als einer „Mirror Machine". Dieser Name beschreibt anschaulich die Bewegung eines Teilchens. Es läuft, einer Feldlinie folgend, nach oben, wird irgendwann durch die konvergierenden Feldlinien „gespiegelt", läuft zurück nach unten, erleidet dort das gleiche Schicksal, und so fort. Die Bewegung ist wie im Falle des Brown-Gabrielse-Systems die Überlagerung einer Translation entlang einer Feldlinie und der Rotation um diese Feldlinie herum.

Der offensichtliche Vorteil, ein — zumindest formelmäßig — einfacheres Magnetfeld zu erhalten, wird hier durch den Nachteil erkauft, daß sich $\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}$ *nicht* in die in Abschnitt 2.1 diskutierte Multipolentwicklung einpaßt. Denn laut Tabelle 2.2 ist $\boldsymbol{B}_3^+$ der einzig mögliche Grad-zwei-Anteil eines $\boldsymbol{B}$-Feldes, das dieser Entwicklung genügt. Der Anteil von $\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}$ vom Grad zwei ist aber per Konstruktion von $\boldsymbol{B}_3^+$ verschieden.

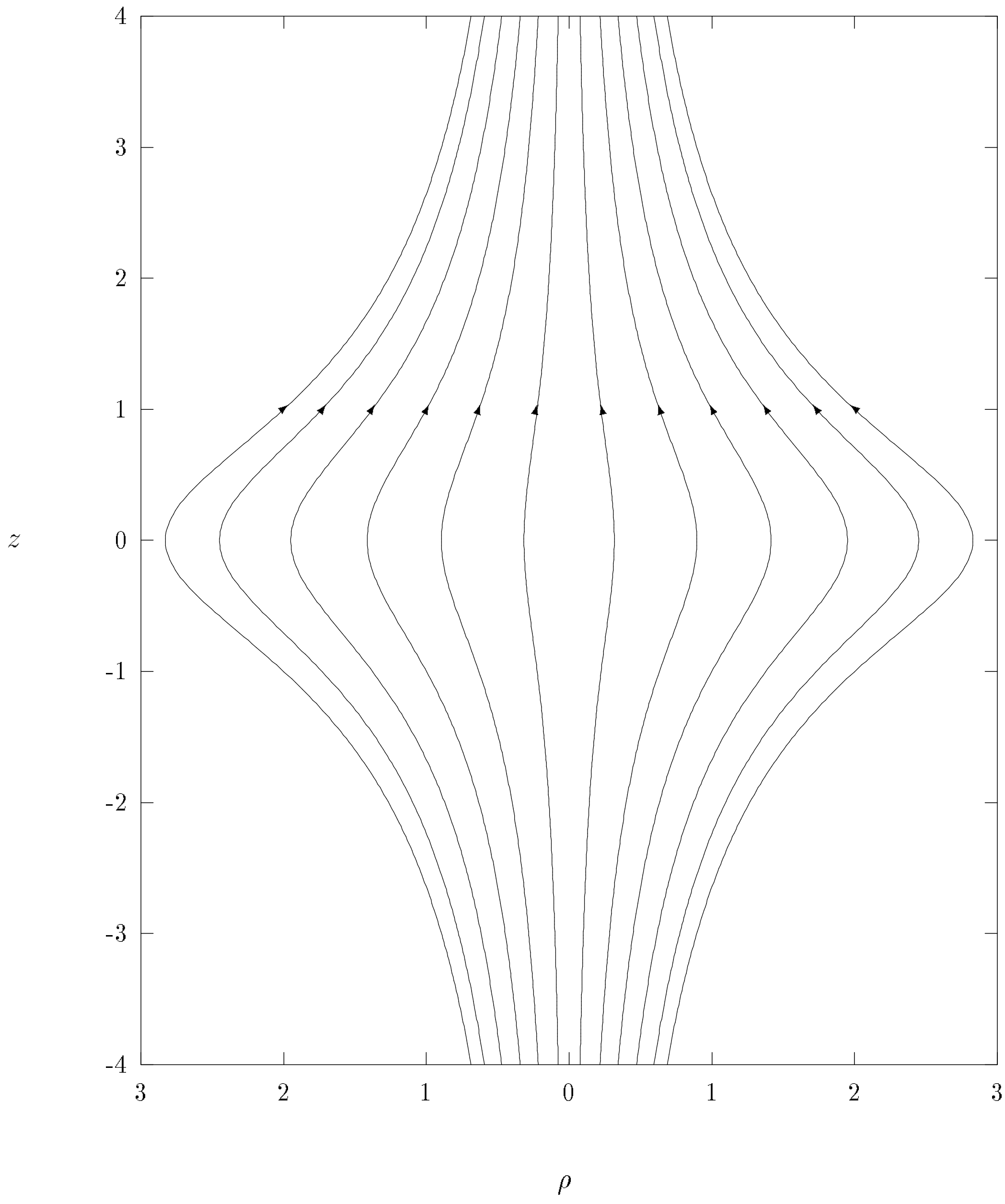


Abbildung 2.3: Feldliniendiagramm für das Magnetfeld $\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}$ der Dragt-Finn-Magnetflasche mit $B_0 = B_2 = 1$. Wegen der axialen Symmetrie ergibt sich das vollständige dreidimensionale Bild durch Rotation der Feldlinien um die z-Achse.

Ist $\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}$ demnach unphysikalisch und damit für uns irrelevant? Nein, denn zunächst einmal besagt die Diskrepanz zwischen Gl. (2.34) und Tabelle 2.2 lediglich, daß die in Abschnitt 2.1 gemachten Annahmen hier nicht zutreffen. So läßt sich zum Beispiel das Postulat der Stromfreiheit nicht mehr aufrechterhalten (wenn man weiterhin nur stationäre Felder zulassen will), weil für das Dragt-Finn-Magnetfeld aus der inhomogenen Maxwell-Gleichung $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$ folgt:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = -\frac{B_2}{\mu_0}\rho \boldsymbol{e}_\varphi \neq \boldsymbol{0} \quad . \tag{2.36}$$

Man kann sich $\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}$ als durch diese axialsymmetrische Stromdichte $\boldsymbol{j}$ erzeugt denken. Auch die homogene Maxwell-Gleichung $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ wird durch $\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}$ erfüllt. Allerdings verschwindet die Rotation des Magnetfeldes nicht mehr, deshalb hat es kein skalares magnetisches Potential, und die Betrachtungen aus Abschnitt 2.1 sind nicht anwendbar.

Wir wollen jetzt die Hamilton-Funktion der Dragt-Finn-Magnetflasche herleiten und benötigen dafür ein Vektorpotential $\boldsymbol{A}_{\mathrm{DF}}$ zu $\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}$. Um

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{DF}}(\rho, z) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}_{\mathrm{DF}}(\boldsymbol{r}) \tag{2.37}$$

zu lösen, setzen wir wieder an:

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{DF}}(\boldsymbol{r}) = A_{\mathrm{DF}}(\rho, z)\boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.38}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{\mathrm{DF}}}{\partial z} &= B_2 \rho z \\ \frac{1}{\rho}A_{\mathrm{DF}} + \frac{\partial A_{\mathrm{DF}}}{\partial \rho} &= B_0 + B_2 z^2 \quad . \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgern wir

$$A_{\mathrm{DF}}(\rho, z) = \frac{B_2}{2}\left(\rho z^2 + f(\rho)\right)$$

(mit einer nur von ρ abhängenden Funktion $f(\rho)$) und erhalten durch Kombination mit der zweiten Gleichung

$$f'(\rho) + \frac{1}{\rho}f(\rho) = \frac{2B_0}{B_2} \quad .$$

Die allgemeine Lösung für f ist

$$f(\rho) = \frac{C}{\rho} + \frac{B_0}{B_2}\rho \quad \text{mit} \quad C = \text{konst.}$$

Wir wählen mit $C = 0$ die einfachste Lösung und erhalten schließlich für das gesuchte Vektorpotential

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{DF}}(\rho, z) = \left(\frac{B_0}{2}\rho + \frac{B_2}{2}\rho z^2\right)\boldsymbol{e}_\varphi \quad . \tag{2.39}$$

Der Vergleich mit dem Term $\boldsymbol{A}_3^+$ der Multipolentwicklung zeigt, daß hier das Weglassen des Summanden $-\frac{1}{2}B_2\rho^2\boldsymbol{e}_z$ beim Magnetfeld dem Vernachlässigen des Vektorpotential-Termes $-\frac{1}{8}B_2\rho^3$ entspricht.

Wenn wir Gl. (2.39) in die allgemeine Formel (2.16) für axialsymmetrische Magnetflaschen einsetzen und wie bei der Brown-Gabrielse-Flasche $p_\varphi = 0$ annehmen, ergibt sich für die Hamilton-Funktion der Dragt-Finn-Flasche:

$$H_{\mathrm{DF}}(\rho, z, p_\rho, p_z) = \frac{1}{2m}\left\{p_\rho^2 + p_z^2 + \frac{q^2B_0^2}{4}\rho^2 + \frac{q^2B_0B_2}{2}\rho^2z^2 + \frac{q^2B_2^2}{4}\rho^2z^4\right\}. \tag{2.40}$$

Wir setzen wieder $m = q = 1$ und skalieren wie in den Gln. (2.30) und (2.32), wobei wir uns aber auf den Fall $B_0B_2 > 0$ beschränken[5], und erhalten

$$H_{\mathrm{DF}}(\rho, z, p_\rho, p_z) = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \rho^2\right) + \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{1}{2}\rho^2z^2 + \frac{1}{8}\rho^2z^4 \quad . \tag{2.41}$$

Auch diese Hamilton-Funktion kann offensichtlich nicht mit den Mitteln Gustavsonschen Normalformentheorie behandelt werden.

2.4 Das Størmer-Problem

Als drittes Beispiel für die Systemklasse der magnetischen Flaschen betrachten wir das Størmer-Problem, die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem (im Ursprung divergenten) magnetischen Dipolfeld. Das prominenteste Magnetfeld dieser Art ist das Erdmagnetfeld, das oberhalb der Erdoberfläche in guter Näherung ein reines Dipolfeld ist. Seit Beginn des Jahrhunderts untersucht man, wie sich die Ionen des Sonnenwindes in diesem Magnetfeld bewegen und dabei zum Beispiel das Polarlicht erzeugen[6]. Besonders mit dem Aufkommen der Raumfahrt gewann dieses Problem an Bedeutung, als man feststellte, daß die Erde von zwei Strahlungsgürteln, den Van-Allen-Gürteln, umgeben ist, in denen viele Protonen und Elektronen „eingefangen" sind. Und auch heute noch findet dieser Aspekt des Størmer-Problems Beachtung. So wurde zum Beispiel kürzlich ein dritter Van-Allen-artiger Strahlungsgürtel der Erde entdeckt [Je92].

[5]Die Beschränkung auf den Fall $B_0B_2 > 0$ erscheint sinnvoll, wenn man die physikalische Motivation bei der Einführung des Dragt-Finn-Magnetfeldes bedenkt.

[6]Eine Bilanz nach 50 Jahren Forschungsarbeit findet sich in einem Buch von Størmer [St55], der das Problem als erster mathematisch formulierte.

2.4.1 Bestimmung der Hamilton-Funktion

Für die Beschreibung des zu dem Dipolmoment $\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{e}_z$ gehörenden Dipolmagnetfeldes

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{M})\,\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{M}}{r^3}\right) \tag{2.42}$$

haben wir im Rahmen der Multipolentwicklung von Abschnitt 2.1 offensichtlich zu wählen:

$$\begin{aligned} b_l^+ &= 0 \quad \text{für} \quad l \geq 0 \\ b_1^- &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \\ b_l^- &= 0 \quad \text{für} \quad l \neq 1 \quad , \end{aligned} \tag{2.43}$$

wie man aus Tabelle 2.2 entnehmen kann.

Eine Formel $r_{\mathrm{S}}(\vartheta)$ für die Feldlinien des Størmer-Magnetfeldes $\boldsymbol{B}_{\mathrm{S}}$ berechnet man am einfachsten in Kugelkoordinaten. Wir schreiben das Magnetfeld als $B_{\mathrm{S},r}\boldsymbol{e}_r + B_{\mathrm{S},\vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta$ und schließen aus Gl. (2.26)

$$\frac{dr_{\mathrm{S}}}{d\vartheta} = \frac{B_{\mathrm{S},r}(r_{\mathrm{S}},\vartheta)}{B_{\mathrm{S},\vartheta}(r_{\mathrm{S}},\vartheta)} = 2r_{\mathrm{S}}\cot\vartheta \quad .$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung erhalten wir als

$$r_{\mathrm{S}}(\vartheta) = (q_2+1)\sin^2\vartheta \qquad \text{mit} \qquad q_2 = \text{konst.} \tag{2.44}$$

Der Grund für die ungewöhnliche Schreibweise des konstanten Vorfaktors als $q_2 + 1$ wird im Zusammenhang mit den in Abschnitt 2.4.3 einzuführenden Dipolarkoordinaten klar werden. In Abbildung 2.4 sind die wohlbekannten Størmer-Magnetfeldlinien der Gl. (2.44) dargestellt.

Mit dem zu $\boldsymbol{B}_{\mathrm{S}}$ gehörenden Vektorpotential

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{S}}(\rho, z) = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{\rho}{r^3}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.45}$$

erhält man aus Gl. (2.16) die entsprechende Størmer-Hamilton-Funktion als

$$H_{\mathrm{S}}(\rho, z, p_\rho, p_z) = \frac{1}{2m}\left\{p_\rho^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \frac{q\mu_0 M}{4\pi}\frac{\rho}{r^3}\right)^2 + p_z^2\right\} \quad . \tag{2.46}$$

Durch eine geeignete Skalierung vereinfachen wir diese Hamilton-Funktion, wobei wir einen etwas anderen Weg als in [Se90] beschreiten. Dort wurden die Ortsraumkoordinaten mit der sogenannten Størmer-Einheit

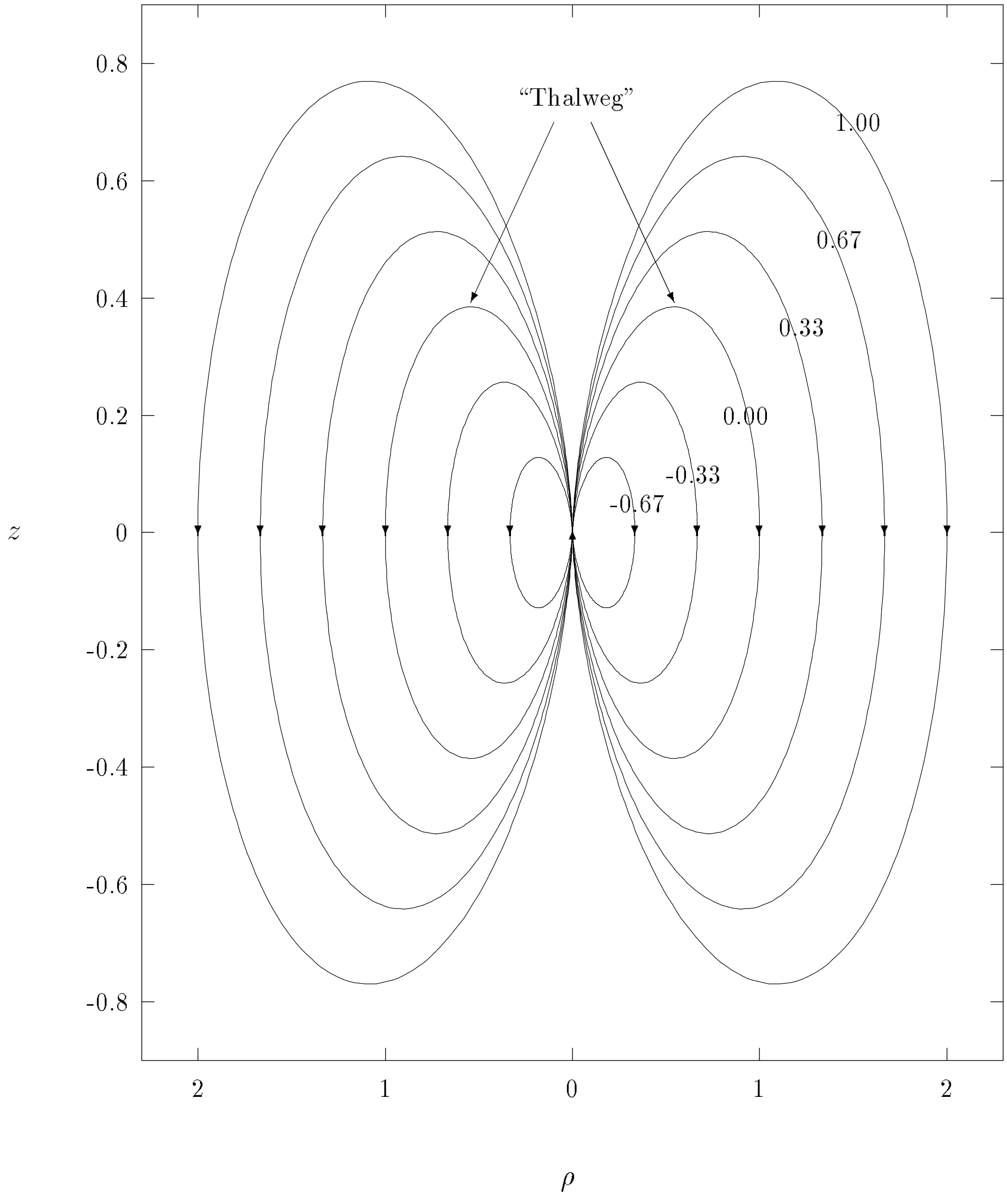


Abbildung 2.4: Feldliniendiagramm für das Magnetfeld $\boldsymbol{B}_\mathrm{S}$ des Størmer-Problems. Diese Feldlinien sind gleichzeitig q_2-Koordinatenlinien der Dipolarkoordinaten (q_1, q_2); dementsprechend wurden die Linien mit ihrem q_2-Wert gekennzeichnet. Der „Thalweg" ist diejenige Koordinatenlinie, für die $q_2 = 0$ gilt. (Weitere Erläuterungen zu den Dipolarkoordinaten folgen unten.)

$\sqrt{\frac{q\mu_0 M}{4\pi m v}}$ (mit $v = |\dot{\boldsymbol{r}}|$) skaliert, was letztlich auf eine Hamilton-Funktion führt, die die Bewegung bei der konstanten Energie 1/2 beschreibt. p_φ verbleibt als ein frei wählbarer Parameter des Systems. Hingegen ziehen wir hier — im Einklang mit [DrFi79] und analog zu den anderen oben betrachteten Modellsystemen — eine Skalierung vor, die auf eine Hamilton-Funktion führt, die nicht mehr parameterabhängig ist und statt dessen einem System mit einer nicht-konstanten, frei wählbaren Energie entspricht. Dazu skalieren wir wie in [CoVl75] Längen mit

$$r_0 := \frac{q\mu_0 M}{4\pi p_\varphi} \quad , \tag{2.47}$$

das heißt, wir führen gestrichene Größen ein, indem wir

$$\begin{aligned} \rho &= r_0 \rho' \\ z &= r_0 z' \end{aligned} \tag{2.48}$$

setzen und außerdem

$$\begin{aligned} t &= \frac{m r_0^2}{p_\varphi} t' \\ H_\mathrm{S} &= \frac{p_\varphi^2}{m r_0^2} H'_\mathrm{S} \end{aligned} \tag{2.49}$$

benutzen, so daß wir schließlich zu der folgenden skalierten Hamilton-Funktion für das Størmer-Problem gelangen (die Strichmarkierungen werden wieder der Einfachheit halber weggelassen):

$$H_\mathrm{S}(\rho, z, p_\rho, p_z) = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{r^3}\right)^2 \quad . \tag{2.50}$$

Man kann diese Funktion auffassen als die Hamilton-Funktion eines Teilchens mit zwei Freiheitsgraden der Bewegung, das sich im „Størmer-Potential“

$$V_\mathrm{S}(\rho, z) := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{r^3}\right)^2 \tag{2.51}$$

bewegt.

2.4.2 Diskussion des Størmer-Potentials

Im Hinblick auf die Dynamik eines Teilchens, das durch H_S beschrieben wird, diskutieren wir kurz das zugehörige Potential V_S.

Wir bestimmen zunächst die Nullstellen (gekennzeichnet durch den Index $_\mathrm{N}$) von V_S. Diese sind durch

$$r_\mathrm{N}^3 - \rho_\mathrm{N}^2 = 0 \quad ,$$

also durch

$$r_{\mathrm{N}}(\vartheta) = \sin^2(\vartheta) \qquad (\text{für} \quad \vartheta \neq 0, \pi) \tag{2.52}$$

gegeben. Weil V_{S} für alle ρ und z nichtnegativ ist, beschreibt $r_{\mathrm{N}}(\vartheta)$ gerade die Punkte im Konfigurationsraum mit minimalem Potential. Der Vergleich mit Gl. (2.44) zeigt, daß alle diese Potentialminima auf der gleichen Feldlinie des Magnetfeldes $\boldsymbol{B}_{\mathrm{S}}$ liegen; diese spezielle Feldlinie ist durch $q_2 = 0$ charakterisiert. Abbildung 2.5 stellt V_{S} dreidimensional dar und gibt eine anschauliche Vorstellung von der Lage der Kurve minimalen Potentials. Es handelt sich um eine vom Koordinatenursprung ausgehende Schleife, wobei aber der Ursprung selbst kein Potentialminimum ist. Die Darstellung von V_{S} als „Potentialgebirge“ über der (ρ, z)-Ebene motiviert die Bezeichnung von $r_{\mathrm{N}}(\vartheta)$ als „Thalweg“[7]. Eine elementare Rechnung ergibt, daß der einzige weitere kritische Punkt von V_{S} ein Sattelpunkt ist, der bei

$$(\rho_{\mathrm{Sattel}}, z_{\mathrm{Sattel}}) = (2, 0)$$

liegt. Das Potential hat an dieser Stelle den Wert $V(\rho_{\mathrm{Sattel}}, z_{\mathrm{Sattel}}) = \frac{1}{32}$.

Weil die Gesamtenergie eines Teilchens, als Summe von kinetischer und potentieller Energie, nicht kleiner als das Potential an irgendeiner Stelle des dynamisch erlaubten Raumbereiches sein kann, ist die Bewegung gebunden, wenn die Gesamtenergie nicht größer als $\frac{1}{32}$ ist und die Anfangsbedingungen in der (ρ, z)-Ebene nahe genug am „Thalweg“ liegen. In diesem Fall sind die Teilchenbahnen offensichtlich auf einen Raumbereich um den „Thalweg“ herum eingeschränkt.

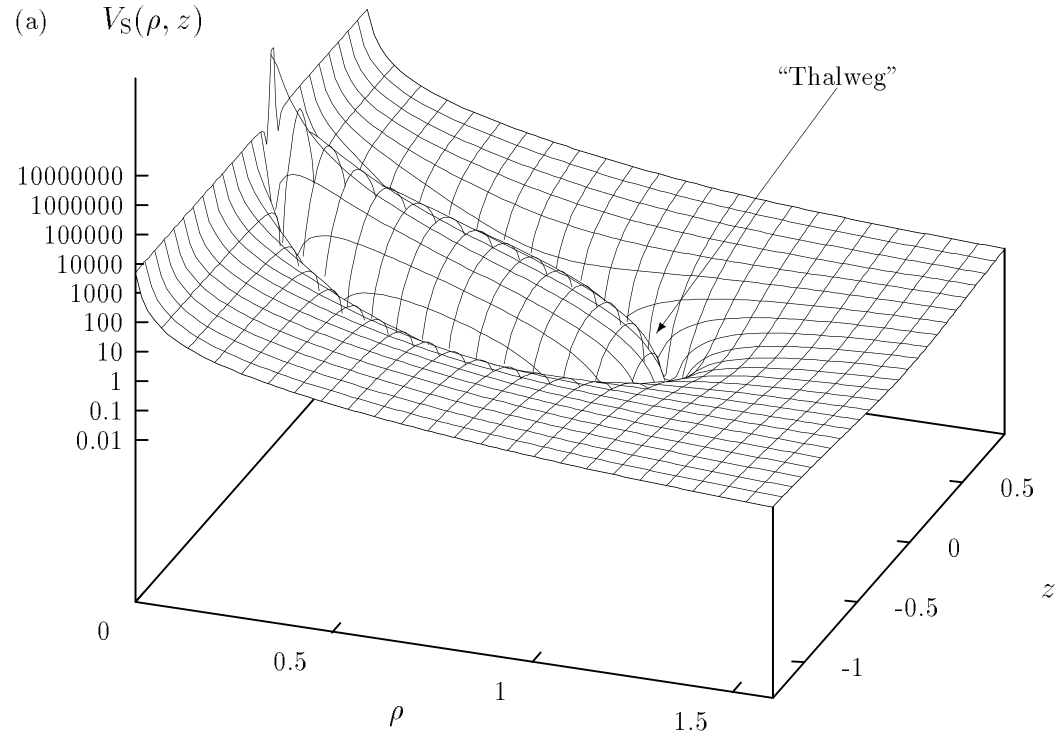
2.4.3 Transformation auf Dipolarkoordinaten

Durch die Skalierung haben wir die Hamilton-Funktion vereinfacht, indem wir „unwesentliche“ Zahlenfaktoren eliminiert haben. Leider ist aber auch die so erhaltene vereinfachte Hamilton-Funktion noch zu kompliziert, als daß wir sie direkt mit dem Normalformen-Formalismus analysieren könnten, denn offensichtlich liegt H_{S} nicht als Potenzreihe vor. Eine wesentliche Voraussetzung der Transformation auf Normalform ist damit nicht erfüllt.

Zur Lösung dieses Problems erinnern wir uns daran, daß wir ohnehin keine exakte Formel für die Normalform oder für ein drittes (formales) Integral[8] des Størmer-Problems angeben wollen. Vielmehr wollen wir diese Größen

[7] Diese Begriffsbildung vollzog sich vor fast 100 Jahren, und so hat sich in der englischsprachigen Literatur die altertümliche deutsche Schreibweise „Thalweg“ eingebürgert, die bis heute verwendet wird.

[8] Die „ersten“ beiden Integrale der Bewegung für das Størmer-Problem sind die Energie und p_φ.



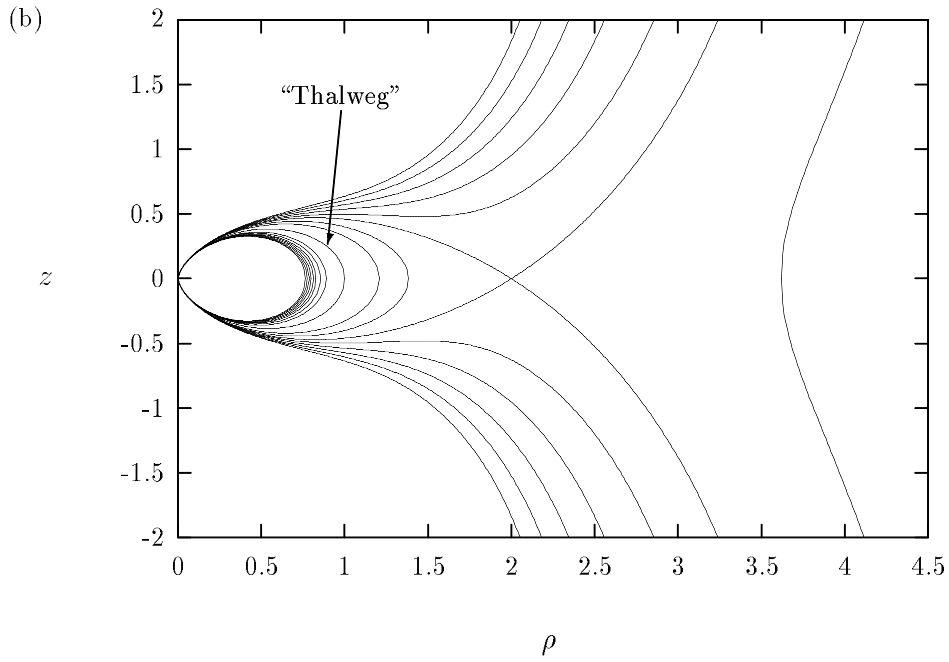


Abbildung 2.5: (a) Das Potential $V_S(\rho, z)$ des Størmer-Problems, aufgetragen über der (ρ, z)-Ebene. (b) Höhenliniendiagramm des Størmer-Potentials $V_S(\rho, z)$.

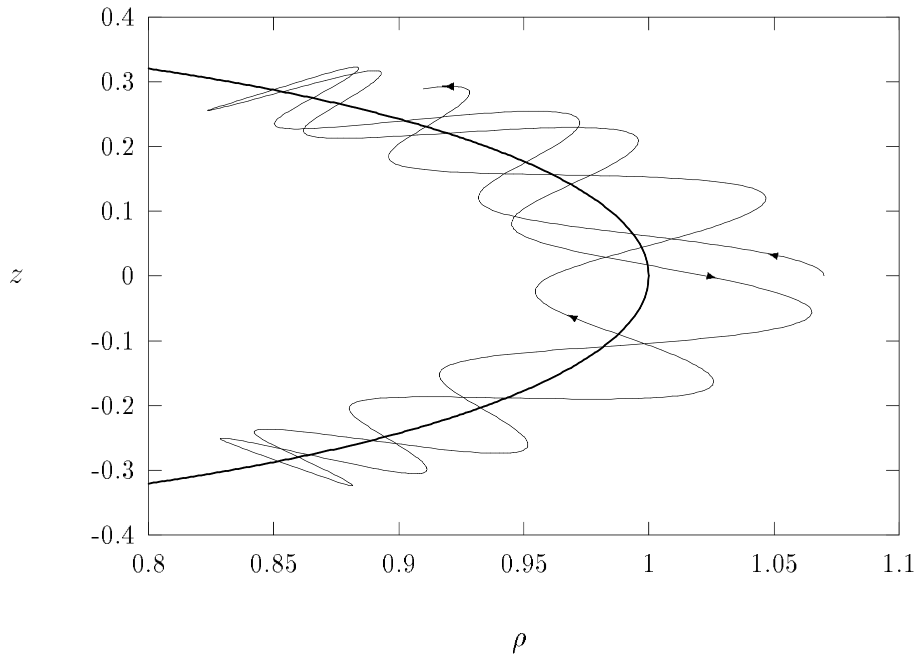


Abbildung 2.6: Gebundene Bewegung eines Teilchens mit der Energie $E = 0.0025$ im Størmer-Magnetfeld, dargestellt in Zylinderkoordinaten (ρ, z). Anfangsbedingungen: $\rho = 1.07$, $z = 0$, $p_\rho = 0$, $p_z = 0.035522$. Die fettgedruckte Linie soll hier den „Thalweg“ andeuten.

näherungsweise berechnen, und zwar in der Form von Potenzreihenentwicklungen, die nach endlich vielen Summanden abgebrochen werden. Es liegt also nahe, in einem ersten Schritt auch die Hamilton-Funktion des Størmer-Problems in eine Potenzreihe zu entwickeln und genauso viele Terme dieser Entwicklung zu berücksichtigen, wie wir für die gewünschte Genauigkeit des Quasiintegrals benötigen. Wenn wir zum Beispiel das Quasiintegral bis zur Ordnung k bestimmen wollen, müssen wir zunächst H_S bis zur Ordnung k entwickeln.

Es stellt sich nun vor allem die Frage, welcher Koordinaten man sich für die Hamilton-Funktion bedienen soll, damit man die Reihenentwicklungen ab einer gewissen Ordnung abbrechen kann, ohne einen zu großen Fehler zu erhalten. So sind zum Beispiel die Zylinderkoordinaten (ρ, z) ungeeignet, denn das Teilchen wird, annähernd einer Feldlinie folgend, relativ stark sowohl in ρ- als auch in z-Richtung oszillieren; dies wird in Abbildung 2.6 für einen typischen Orbit veranschaulicht. Statt dessen suchen wir Koordinaten (q_1, q_2), die der Teilchenbewegung besser angepaßt sind und sich mit kleinerer Amplitude ändern. Wir haben schon früher gesehen, daß die Bewegung des Teilchens durch eine Translation längs einer Feldlinie, überlagert mit der Rotation um diese Feldlinie herum, beschrieben werden kann. Deshalb verwenden wir die von Dragt eingeführten *orthogonalen Dipolarkoordinaten* (vgl. [Dr65, DrFi79]),

$$q_1 := \frac{z}{r^3} = \frac{\cos\vartheta}{r^2} \tag{2.53a}$$

$$q_2 + 1 := \frac{r^3}{\rho^2} = \frac{r}{\sin^2\vartheta} \quad , \tag{2.53b}$$

die diesem Bewegungstypus Rechnung tragen, denn Gl. (2.53b) stimmt mit Gl. (2.44) überein: Die q_2-Koordinatenlinien, also die Linien mit konstantem q_2, sind die Dipol-Feldlinien. q_1 beschreibt die Translation entlang den Feldlinien, während q_2 für die Bewegung senkrecht zu ihnen steht.

Die Transformation auf Dipolarkoordinaten führt dazu, daß die Dynamik in zwei in erster Näherung voneinander unabhängige Oszillationen zerlegt wird; die Oszillation in q_2-Richtung (um die Feldlinie herum) ist schneller als diejenige in q_1-Richtung (entlang der Feldlinie). Dabei ist entscheidend, daß diese neuen Koordinaten um die Null herum oszillieren — um dies zu erreichen, steht in Gl. (2.53b) auf der linken Seite $q_2 + 1$, im Gegensatz zu Dragts ursprünglicher Definition $q_2 = r^3/\rho^2$. Wichtig ist auch, daß q_1 und q_2 mit nicht zu großer Amplitude oszillieren — wie zu fordern ist, wenn eine Reihenentwicklung der Hamilton-Funktion sinnvoll sein soll. Abbildung 2.7, die den gleichen Orbit wie Abbildung 2.6 in Dipolarkoordinaten zeigt, veranschaulicht diesen Sachverhalt.

Bei der Transformation von Zylinder- auf Dipolarkoordinaten in Gl. (2.53) handelt es sich nur um eine Punkttransformation im Konfigurationsraum. Für die vollständige Angabe der entsprechenden *kanonischen* Transformation fehlen noch Transformationsformeln für die zu q_1 und q_2 kanonisch-konjugierten Impulse p_1 und p_2. Wir benötigen diese Transformationsformeln, um die Størmersche Hamilton-Funktion in Dipolarkoordinaten formulieren zu können. Zur Berechnung dieser Formeln suchen wir zunächst eine erzeugende Funktion vom F_2-Typ für die kanonische Transformation:

$$F_2 = F_2(\rho, z, p_1, p_2) \quad .$$

Dabei muß für F_2 gelten (vgl. zum Beispiel [No90a]):

$$p_\rho = \frac{\partial F_2}{\partial \rho} \tag{2.54a}$$

$$p_z = \frac{\partial F_2}{\partial z} \tag{2.54b}$$

$$q_1 = \frac{\partial F_2}{\partial p_1} = \frac{\cos\vartheta}{r^2} \tag{2.54c}$$

$$q_2 = \frac{\partial F_2}{\partial p_2} = \frac{r}{\sin^2\vartheta} - 1 \quad . \tag{2.54d}$$

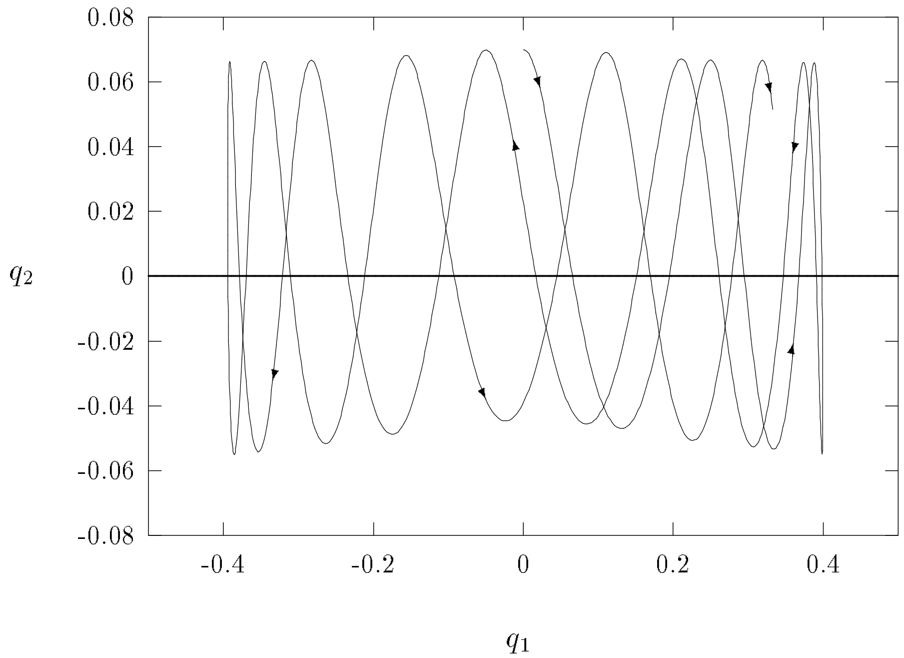


Abbildung 2.7: Der gleiche Orbit wie in Abbildung 2.6, hier dargestellt in Dipolarkoordinaten. Die fettgedruckte Linie ist wieder der „Thalweg".

Wir setzen für F_2 so einfach wie möglich an (und verstehen r und ϑ bzw. ρ und z im folgenden als Funktionen von q_1 und q_2),

$$\begin{aligned} F_2(\rho, z, p_1, p_2) &= q_1(\rho, z)\, p_1 + q_2(\rho, z)\, p_2 \\ &= \left(\frac{\cos\vartheta}{r^2}\right) p_1 + \left(\frac{r}{\sin^2\vartheta} - 1\right) p_2 \quad , \end{aligned} \tag{2.55}$$

wodurch die Gln. (2.54c) und (2.54d) automatisch erfüllt sind. Die Auswertung der Gln. (2.54a) und (2.54b) ergibt dann

$$\begin{aligned} p_\rho &= \left(\frac{\partial \cos\vartheta}{\partial \rho}\frac{1}{\rho^2} - \frac{2\cos\vartheta}{r^3}\frac{\partial r}{\partial \rho}\right) p_1 + \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}\frac{1}{\sin^2\vartheta} - \frac{2r}{\sin^3\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta}{\partial \rho}\right) p_2 \\ &= \left(-\frac{3\cos\vartheta}{(q_2+1)^3\sin^5\vartheta}\right) p_1 + \left(\frac{3}{\sin\vartheta} - \frac{2}{\sin^3\vartheta}\right) p_2 \end{aligned} \tag{2.56}$$

und

$$\begin{aligned} p_z &= \left(\frac{\partial \cos\vartheta}{\partial z}\frac{1}{r^2} - \frac{2\cos\vartheta}{r^3}\frac{\partial r}{\partial z}\right) p_1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{1}{\sin^2\vartheta} - \frac{2r}{\sin^3\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta}{\partial z}\right) p_2 \\ &= \left(\frac{3}{(q_2+1)^3\sin^4\vartheta} - \frac{2}{(q_2+1)^3\sin^6\vartheta}\right) p_1 + \left(\frac{3\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right) p_2 \quad . \end{aligned} \tag{2.57}$$

Durch Umstellen dieser beiden Gleichungen nach p_1 und p_2 könnte man explizite Formeln für die zu den Dipolarkoordinaten gehörenden kanonischen Impulse angeben. Das ist in unserem Fall aber gar nicht nötig, weil wir lediglich die Hamilton-Funktion auf die neuen Phasenraumvariablen umschreiben wollen. Die alten Impulse p_ρ und p_z treten in der alten Hamilton-Funktion nur als Summe ihrer Quadrate auf, so daß wir auch nur diese Summe als Funktion von q_1, q_2, p_1 und p_2 benötigen:

$$\begin{aligned}
&p_\rho^2 + p_z^2 = \\
&= \left\{ \left(\frac{3\cos\vartheta}{(q_2+1)^3 \sin^5\vartheta} \right)^2 + \left(\frac{3}{(q_2+1)^3\sin^4\vartheta} - \frac{2}{(q_2+1)^3\sin^6\vartheta} \right)^2 \right\} p_1^2 \\
&\quad + \left\{ \left(\frac{3}{\sin\vartheta} - \frac{2}{\sin^3\vartheta} \right)^2 + \left(\frac{3\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} \right)^2 \right\} p_2^2 \\
&\quad + \left\{ 2\left(\frac{3}{\sin\vartheta} - \frac{2}{\sin^3\vartheta} \right) \left(-\frac{3\cos\vartheta}{(q_2+1)^3\sin^5\vartheta} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2\left(\frac{3\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} \right) \left(\frac{3}{(q_2+1)^3\sin^4\vartheta} - \frac{2}{(q_2+1)^3\sin^6\vartheta} \right) \right\} p_1 p_2 \\
&= \frac{1+3\cos^2\vartheta}{(q_2+1)^6\sin^{12}\vartheta}\, p_1^2 + \frac{1+3\cos^2\vartheta}{\sin^6\vartheta}\, p_2^2 \quad .
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Für das Potential V_S erhalten wir in Dipolarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_\mathrm{S}(q_1,q_2) &:= V_\mathrm{S}\left(\rho(q_1,q_2), z(q_1,q_2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(q_2+1)\sin^3\vartheta} - \frac{1}{(q_2+1)^2\sin^3\vartheta} \right)^2 \\
&= \frac{q_2^2}{2(q_2+1)^4\sin^6\vartheta} \quad .
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Damit haben wir das Resultat, daß sich die Størmersche Hamilton-Funktion (2.46) nach der durch F_2 erzeugten kanonischen Transformation auf Dipolarkoordinaten als

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_\mathrm{S}(q_1,q_2,p_1,p_2) &:= H_\mathrm{S}\Big(\rho(q_1,q_2,p_1,p_2), z(q_1,q_2,p_1,p_2), \\
&\qquad p_\rho(q_1,q_2,p_1,p_2), p_z(q_1,q_2,p_1,p_2)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{p_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{h_2}\right)^2 \right\} + \tilde{V}_\mathrm{S}(q_1,q_2)
\end{aligned} \tag{2.60}$$

schreiben läßt mit

$$
\begin{aligned}
h_1^2 &:= \frac{(q_2+1)^6 \sin^{12}\vartheta}{1+3\cos^2\vartheta} \\
h_2^2 &:= \frac{\sin^6\vartheta}{1+3\cos^2\vartheta} \quad .
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

In den Gln. (2.59–2.61) stellt ϑ nur eine abkürzende Schreibweise für $\vartheta(q_1, q_2)$ dar, wobei der Zusammenhang zwischen q_1, q_2 und ϑ durch Gl. (2.53) gegeben ist.

Nachdem wir die Hamilton-Funktion $\tilde{H}_\mathrm{S}$ in Dipolarkoordinaten formuliert haben, können wir sie jetzt nach den — als klein angesehenen — q_1, q_2, p_1 und p_2 entwickeln. Zuerst zeigen wir aber noch, daß eine solche Entwicklung in der Tat sinnvoll ist, weil man durch die Wahl der Energie immer erreichen kann, daß p_1 und p_2 beliebig klein sind und bleiben. Wir leiten aus Gl. (2.61) die Ungleichungen $h_1^2 \leq (q_2+1)^6$ und $h_2^2 \leq 1$ ab und folgern damit aus Gl. (2.60), daß bei der Energie $\tilde{H}_\mathrm{S} = \tilde{E}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
p_1^2 + p_2^2 &\leq \left\{ \left(\frac{p_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{h_2}\right)^2 \right\} (q_2+1)^6 \\
&= 2\left(\tilde{E} - \tilde{V}_\mathrm{S}(q_1,q_2)\right)(q_2+1)^6 \\
&\leq 2\tilde{E}\,(q_2+1)^6 \quad .
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt die Behauptung, weil q_2 für gebundene Orbits beschränkt ist, wie wir oben gesehen haben. Solange man sich also auf solche Trajektorien beschränkt, deren Energie hinreichend klein ist und die genügend nahe am „Thalweg“ starten, werden alle vier Phasenraumkoordinaten q_1, q_2, p_1 und p_2 klein bleiben.

In Anhang C führen wir die Berechnung der Potenzreihenentwicklung für $\tilde{H}_\mathrm{S}$ durch. Als Resultat ergibt sich die folgende Näherungsformel für die Størmersche Hamilton-Funktion in Dipolarkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{H}_\mathrm{S}(q_1,q_2,p_1,p_2) = \\
&= \; 0.5p_1^2 + 0.5p_2^2 + 0.5q_2^2 - 3q_2p_1^2 - 2q_2^3 + 10.5q_2^2p_1^2 + 5q_2^4 + 3q_1^2p_2^2 \\
&\quad + 4.5q_1^2p_1^2 + 1.5q_1^2q_2^2 - 28q_2^3p_1^2 - 10q_2^5 + 12q_1^2q_2p_2^2 - 9q_1^2q_2p_1^2 \\
&\quad + 63q_2^4p_1^2 + 17.5q_2^6 + 18q_1^2q_2^2p_2^2 + 13.5q_1^2q_2^2p_1^2 - 4.5q_1^4p_2^2 \\
&\quad + 1.5q_1^4p_1^2 - 3q_1^4q_2^2 - 126q_2^5p_1^2 - 28q_2^7 + 12q_1^2q_2^3p_2^2 - 18q_1^2q_2^3p_1^2 \\
&\quad - 36q_1^4q_2p_2^2 + 3q_1^4q_2p_1^2 - 12q_1^4q_2^3 + 231q_2^6p_1^2 + 42q_2^8 + 3q_1^2q_2^4p_2^2 \\
&\quad + 22.5q_1^2q_2^4p_1^2 - 126q_1^4q_2^2p_2^2 + 1.5q_1^4q_2^2p_1^2 - 18q_1^4q_2^4 + 20q_1^6p_2^2 \\
&\quad + 2.5q_1^6p_1^2 + 14q_1^6q_2^2 - 396q_2^7p_1^2 - 60q_2^9 - 27q_1^2q_2^5p_1^2 \\
&\quad - 252q_1^4q_2^3p_2^2 - 12q_1^4q_2^5 + 240q_1^6q_2p_2^2 + 15q_1^6q_2p_1^2 + 112q_1^6q_2^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+643.5q_2^8p_1^2 + 82.5q_2^{10} + 31.5q_1^2q_2^6p_1^2 - 315q_1^4q_2^4p_2^2 - 3q_1^4q_2^6 \\
&+ 1320q_1^6q_2^2p_2^2 + 37.5q_1^6q_2^2p_1^2 + 392q_1^6q_2^4 - 115.5q_1^8p_2^2 - 27q_1^8p_1^2 \\
&- 82.5q_1^8q_2^2 - 1001q_2^9p_1^2 - 110q_2^{11} - 36q_1^2q_2^7p_1^2 - 252q_1^4q_2^5p_2^2 \\
&+ 4400q_1^6q_2^3p_2^2 + 50q_1^6q_2^3p_1^2 + 784q_1^6q_2^5 - 1848q_1^8q_2p_2^2 \\
&- 270q_1^8q_2p_1^2 - 990q_1^8q_2^3 + 1501.5q_2^{10}p_1^2 + 143q_2^{12} + 40.5q_1^2q_2^8p_1^2 \\
&- 126q_1^4q_2^6p_2^2 + 9900q_1^6q_2^4p_2^2 + 37.5q_1^6q_2^4p_1^2 + 980q_1^6q_2^6 \\
&- 13860q_1^8q_2^2p_2^2 - 1215q_1^8q_2^2p_1^2 - 5445q_1^8q_2^4 + 756q_1^{10}p_2^2 \\
&+ 214.5q_1^{10}p_1^2 + 546q_1^{10}q_2^2 + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^{13}\right) \quad , \qquad (2.62)
\end{aligned}
$$

wobei das Symbol $\mathcal{O}(|\boldsymbol{z}|^{13})$ wieder andeuten soll, daß wir alle Summanden mit einem größeren Totalgrad als 12 in q_1, q_2, p_1 und p_2 vernachlässigen.

Damit liegt auch die Størmersche Hamilton-Funktion in einer Form vor, in der sie mit den Mitteln der Normalformentheorie untersucht werden kann. Wir bemerken, daß $\tilde{H}_\mathrm{S}$ ebensowenig im Rahmen der Gustavsonschen Theorie behandelbar ist wie die Hamilton-Funktionen, die wir in den vorangegangenen Abschnitten besprochen haben. Erst die Dragt-Finn-Stegemerten-Theorie schafft hier Abhilfe und ermöglicht die Untersuchung von $\tilde{H}_\mathrm{S}$[9].

Das Beispiel des Størmer-Problems zeigt, daß auch Systeme, deren Hamilton-Funktion nicht in Form einer Potenzreihe vorliegt, der Analyse mittels Normalformentheorie zugänglich sind. Es ist aber offenkundig, daß die in diesen Fällen notwendige Umformulierung der Hamilton-Funktion große Schwierigkeiten bereiten kann.

[9] In [CoVl75] wird eine andere Variante der Untersuchung der Størmer-Hamilton-Funktion (2.62) mittels Normalformen angegeben: Um die Behandlung im Rahmen des Gustavsonschen Formalismus zu ermöglichen, wird die Hamilton-Funktion in eine andere transformiert, deren quadratischer Anteil vom Typ (1.61) ist. Eine solche Transformation der Hamilton-Funktion gelingt aber bei anderen Systemen im allgemeinen nicht, so daß auch hier die in jedem Fall durchführbare verallgemeinerte Normalformentheorie vorzuziehen ist.

Kapitel 3

Dynamik in der Brown-Gabrielse-Magnetflasche

Cette étude qualitative (des équations différentielles) aura par elle-même un intérêt de premier ordre.
HENRI POINCARÉ, 1881

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Untersuchung der von Brown und Gabrielse eingeführten Magnetflasche, die wir in Abschnitt 2.2 vorgestellt haben. In diesem Kapitel untersuchen wir qualitativ die Dynamik eines Teilchens in der Brown-Gabrielse-Flasche. Dabei machen wir noch keinen Gebrauch von der in Kapitel 1 vorgestellten Normalformentheorie; diese kommt dann in Kapitel 4 zur Anwendung.

Zunächst diskutieren wir die Potentialfunktion, die unsere Flasche beschreibt und zeigen, daß die Bewegung in diesem Potential in der Regel gebunden ist. Dann wenden wir uns den Symmetrien des Systems zu und weisen schließlich anhand einiger Poincaré-Schnitte den irregulär-chaotischen Charakter der Dynamik nach.

3.1 Das Potential V_{BG}

Die Hamilton-Funktion H_{BG} der Brown-Gabrielse-Magnetflasche haben wir in Gl. (2.33) angegeben. Wir beschränken uns im folgenden auf den in Abschnitt 2.2 diskutierten Fall $B_0 B_2 > 0$; die Analyse des Falles $B_0 B_2 < 0$ verliefe vollständig analog zu den Untersuchungen des vorliegenden Kapitels. Die im folgenden betrachtete Hamilton-Funktion lautet demnach:

$$\begin{aligned} H_{\text{BG}}(\rho, z, p_\rho, p_z) \;=\; & \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \rho^2\right) + \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{1}{2}\rho^2 z^2 \\ & - \frac{1}{8}\rho^4 + \frac{1}{8}\rho^2 z^4 - \frac{1}{16}\rho^4 z^2 + \frac{1}{128}\rho^6 \quad . \end{aligned} \tag{3.1}$$

H_{BG} beschreibt ein Teilchen mit zwei Freiheitsgraden der Bewegung. Hierbei ist zu beachten, daß die Koordinate ρ im Gegensatz zu z keine gewöhnliche kartesische Koordinate ist, sondern den Abstand von der z-Achse bezeichnet. Deshalb kann ρ eigentlich nicht negativ werden. Es ist aber trotzdem sinnvoll, negative ρ-Werte zuzulassen, weil auch ρ dann wie eine gewöhnliche kartesische Koordinate behandelt werden kann.

Um dieses Vorgehen zu verdeutlichen, betrachten wir eine Trajektorie, die zur Zeit $t = 0$ die z-Achse durchläuft: $\rho(0) = 0$. Wegen der Wahl $p_\varphi = 0$ in Gl. (2.28) sind solche Trajektorien möglich, denn nur im Fall $p_\varphi \neq 0$ verhindert der Term $(p_\varphi/\rho)^2$ in der Hamilton-Funktion (2.16) das Erreichen der z-Achse. Wir untersuchen, wie sich der Winkel φ mit der Zeit ändert. Zunächst folgt, unter Berücksichtigung der Gln. (2.21,2.25,2.11) und von Tabelle 2.1,

$$|\dot\varphi| = \left| -\frac{qA(\rho, z)}{m\rho} \right| = \left| \frac{q}{2m}\left(B_0 + B_2\left(z^2 - \frac{1}{4}\rho^2\right)\right) \right| < \infty \quad \forall \quad \rho \neq 0 \quad ;$$

somit ist $\varphi(t)$ für $\rho(t) \neq 0$ stetig. Für $\rho = 0$ ist φ aber nicht definiert. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder ist $\dot\rho(0) = 0$, dann bleibt das Teilchen für alle Zeiten auf der z-Achse und bewegt sich frei, weil in der Hamilton-Funktion alle Terme bis auf $\frac{1}{2}p_z^2$ verschwinden. Oder aber es gilt $\dot\rho(0) \neq 0$. Dann schneidet das Teilchen die z-Achse, und φ macht einen Sprung um π, ist also nicht stetig in $\rho = 0$. Diesem „Durchpendeln“ durch die z-Achse tragen wir dadurch Rechnung, daß wir negative ρ-Werte zulassen. In Abbildung 3.1 veranschaulichen wir diese Verallgemeinerung von ρ. Damit können wir H_{BG} als die Hamilton-Funktion eines Systems mit zwei Freiheitsgraden der Bewegung in ρ- und z-Richtung ansehen, bei dem die Koordinate ρ keinen besonderen Beschränkungen mehr unterliegt.

Wir zerlegen die Hamilton-Funktion (2.33) in die Summe ihres kinetischen Anteils und eines Potentials $V_{\text{BG}}(\rho, z)$,

$$H_{\text{BG}}(\rho, z, p_\rho, p_z) = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + p_z^2\right) + V_{\text{BG}}(\rho, z) \tag{3.2}$$

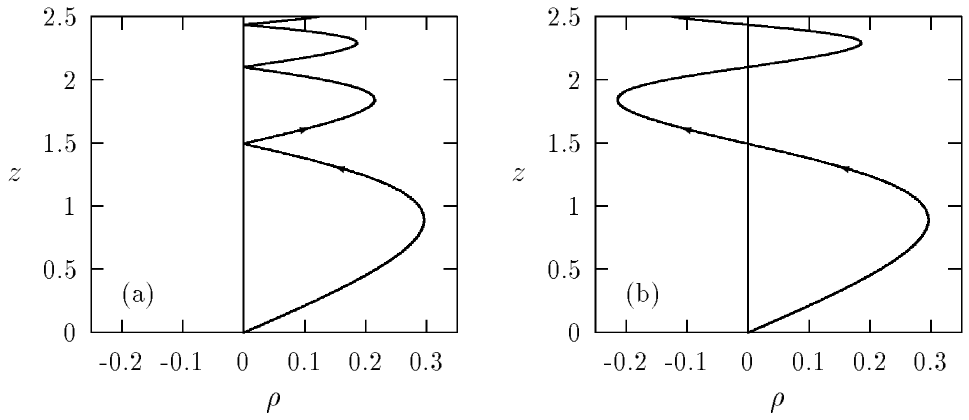


Abbildung 3.1: Veranschaulichung des Überganges auf positive *und* negative Werte von ρ anhand eines Orbits in der Brown-Gabrielse-Magnetflasche. (a) In Zylinderkoordinaten gilt $\rho \geq 0$. (b) In verallgemeinerter Darstellung ist auch $\rho < 0$ möglich.

mit

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{BG}}(\rho, z) &= \frac{1}{2}\rho^2 + +\frac{1}{2}\rho^2 z^2 - \frac{1}{8}\rho^4 + \frac{1}{8}\rho^2 z^4 - \frac{1}{16}\rho^4 z^2 + \frac{1}{128}\rho^6 \\ &= \frac{1}{2}\rho^2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{4}\rho^2\right)\right]^2 \quad , \end{aligned} \tag{3.3}$$

und wenden uns im folgenden der Untersuchung dieses Potentials zu.

Abbildung 3.2 zeigt die Äquipotentiallinien von V_{BG}. Das Potential ist positiv semidefinit. Die Berechnung der kritischen Punkte von V_{BG} durch Nullsetzen des Gradienten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} V_{\mathrm{BG}}(\rho, z) &= \rho \left(1 + \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{4}\rho^2\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{3}{4}\rho^2\right)\right) \boldsymbol{e}_\rho \\ &\quad + \rho^2 z \left(1 + \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{4}\rho^2\right)\right) \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{3.4}$$

ergibt zwei Sattelpunkte $(\rho_{\mathrm{S}_{1,2}}, z_{\mathrm{S}_{1,2}}) = (\pm\sqrt{8/3}, 0)$ mit der Potentialhöhe $V_{\mathrm{BG}}(\rho_{\mathrm{S}}, z_{\mathrm{S}}) = 16/27$. Außerdem sind auch die Punkte $(\rho_{\mathrm{N}}, z_{\mathrm{N}})$ der drei durch

$$\rho_{\mathrm{N}_1} = 0 \tag{3.5a}$$

und

$$\left(z_{\mathrm{N}_{2,3}}(\rho)\right)^2 = -2 + \frac{1}{4}\rho^2 \tag{3.5b}$$

beschriebenen Kurven kritische Punkte; auf diesen drei eindimensionalen Mannigfaltigkeiten hat das Potential den Wert null.

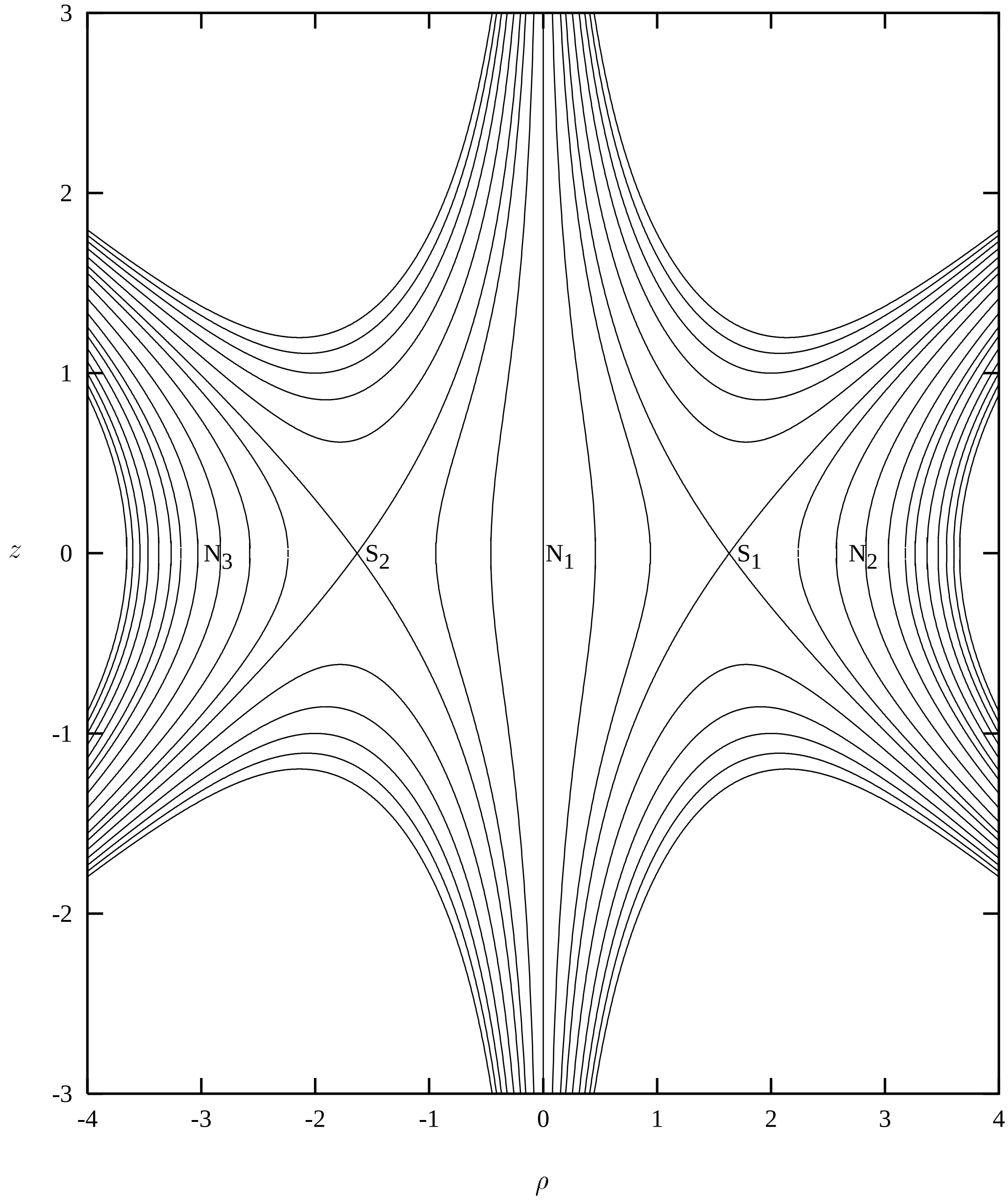


Abbildung 3.2: Höhenliniendiagramm des Potentials $V_{\mathrm{BG}}(\rho, z)$ der Brown-Gabrielse-Magnetflasche. Die Markierungen $\mathrm{N}_{1,2,3}$ bezeichnen die Kurven mit $V_{\mathrm{BG}} = 0$. $\mathrm{S}_{1,2}$ sind die beiden Sattelpunkte.

Wir untersuchen zunächst, inwiefern die Bezeichnung des durch Gl. (3.1) beschriebenen Systems als magnetische „Flasche" gerechtfertigt ist.

3.1.1 Nachweis gebundener Bewegung

In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, ob in dem Brown-Gabrielse-Potential V_{BG} *gebundene* Bewegungen möglich sind. Zur Beantwortung dieser Frage sucht man gewöhnlich isolierte lokale Minima des Potentials, weil diese Ljapunov-stabil sind und somit in einer hinreichend kleinen Umgebung eine gebundene Bewegung ermöglichen [Ar89]. Dieses Verfahren ist aber im Falle von V_{BG} nicht anwendbar, weil es keine isolierten Minima gibt. Vielmehr sind die Punkte minimalen Potentials hier die durch die Gln. (3.5a,3.5b) beschriebenen Kurven $\mathrm{N}_{1,2,3}$ in der (ρ, z)-Ebene. Darüber hinaus ist der zugängliche Teil des Konfigurationsraumes sogar für Teilchen mit niedriger Energie E nicht beschränkt, wie die Abbildung 3.2 zeigt: Das Gebiet mit $V_{\mathrm{BG}}(\rho, z) \leq E$ erstreckt sich in der Nähe der z-Achse und ebenso entlang der Linien $\mathrm{N}_{2,3}$ bis ins Unendliche. Deshalb ist der gebundene Charakter der Teilchenbahnen nicht offensichtlich.

Andererseits veranschaulicht aber die Abbildung 3.2, daß fast alle Trajektorien — alle bis auf diejenigen, die auf der z-Achse mit verschwindendem Radialimpuls p_ρ starten — irgendwann auf eine der „Potentialwände" stoßen, die die Potentialmulden um $\mathrm{N}_{1,2,3}$ herum einschließen. Die Trajektorien werden dort reflektiert, was schließlich nach einigen solcher Reflexionen dazu führt, daß die ursprünglich auslaufende Trajektorie wieder in die Nähe des Ursprungs zurückkehrt. In Abbildung 3.3 zeigen wir diesen Einschlußmechanismus an einem typischen Beispiel.

Im folgenden geben wir eine genauere Begründung dieser anschaulichen Betrachtungen. Dazu untersuchen wir die sich aus Gl. (3.1) ergebenden Hamiltonschen Gleichungen:

$$\dot{\rho} = p_\rho \tag{3.6a}$$

$$\dot{z} = p_z \tag{3.6b}$$

$$\dot{p}_\rho = -\rho - \rho z^2 + \frac{1}{2}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho z^4 + \frac{1}{4}\rho^3 z^2 - \frac{3}{64}\rho^5 \tag{3.6c}$$

$$\dot{p}_z = -\rho^2 z - \frac{1}{2}\rho^2 z^3 + \frac{1}{8}\rho^4 z \quad . \tag{3.6d}$$

Wir betrachten als erstes ein Teilchen mit der Energie E, das sich entlang der Potentialmulde N_1 in positiver z-Richtung bewegt und um die z-Achse oszilliert. Wir weisen nach, daß das Teilchen bei hinreichend großem $|z|$

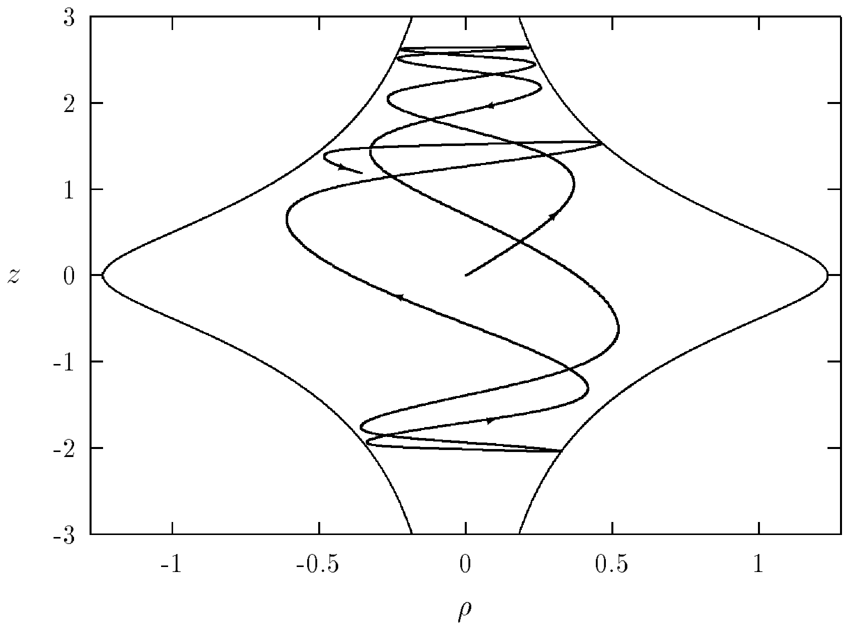


Abbildung 3.3: Demonstration des Einschlußmechanismus in der Brown-Gabrielse-Magnetflasche anhand eines typischen gebundenen Orbits. Die der Energie des Teilchens ($E = 0.5$) entsprechende Äquipotentiallinie von $V_{\rm BG}$ ist als dünne Linie eingezeichnet.

schließlich umkehren und in das Zentrum zurücklaufen muß. Für große z erhalten wir aus Gl. (3.6d):

$$\dot{p}_z \approx -\frac{1}{2}\rho^2 z^3 \quad .$$

Das Potential $V_{\rm BG}$ ergibt für große z:

$$V_{\rm BG}(\rho, z) \approx \frac{1}{8}\rho^2 z^4 \quad ,$$

woraus wir wegen $V_{\rm BG}(\rho, z) \leq E$

$$\rho^2 \lesssim \frac{8E}{z^4} \quad \text{für} \quad z \gg 1$$

folgern. Mit der Definition

$$V_{\rm as}(z) := 4E \log z \tag{3.7}$$

erhalten wir schließlich:

$$\dot{p}_z \lesssim -\frac{4E}{z} = -\frac{d}{dz}V_{\rm as}(z) \quad . \tag{3.8}$$

Im asymptotischen Bereich wirkt demnach auf das Teilchen eine stärkere rücktreibende Kraft in z-Richtung als durch das eindimensionale Potential $V_{\mathrm{as}}(z)$ erzeugt wird. Weil aber schon $V_{\mathrm{as}}(z)$ zu einer gebundenen Bewegung führt — denn dieses Potential wächst unbeschränkt mit z — kann das Teilchen entlang N_1 in positiver z-Richtung nicht entweichen. Aus Symmetriegründen ist das Teilchen dann auch in negativer z-Richtung gebunden.

Wir diskutieren nun die Möglichkeit eines „Escapes" entlang der durch Gl. (3.5b) beschriebenen Potentialminima $\mathrm{N}_{2,3}$. Dabei betrachten wir zunächst nur denjenigen Ast des Minimums N_2, der im ersten Quadranten liegt. Für die andere Hälfte von N_2 und für N_3 folgt dann das gleiche Resultat, wiederum wegen der Symmetrie des Potentials.

Für große $\rho, z > 0$ folgt aus Gl. (3.5b) $z_{\mathrm{N}_2} \approx \frac{1}{2}\rho$. Deshalb ist es günstig, zu neuen Koordinaten (x_1, x_2) überzugehen, die aus (ρ, z) durch eine Drehung um den Winkel $\psi := \arctan \frac{1}{2}$ hervorgehen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \\ &= s \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Hierbei haben wir $\cos\psi = 2\sin\psi$ und die Abkürzung $s := \sin\psi = 1/\sqrt{5}$ verwendet. Anschaulich bedeutet diese Koordinatentransformation, daß die ρ-Achse mit der Asymptote $z = \frac{1}{2}\rho$ zur Deckung gebracht ($\rho \rightsquigarrow x_1$) und die z-Achse entsprechend mitgedreht wird ($z \rightsquigarrow x_2$).

Bevor wir die kanonischen Gleichungen (3.6) in den neuen Koordinaten auswerten, leiten wir eine für das Folgende nützliche Abschätzung her. In der Umgebung der Nullpotentiallinie N_2 wird der zugängliche Bereich des Konfigurationsraumes — definiert durch die Bedingung $V_{\mathrm{BG}} \leq E$ — mit zunehmendem x_1 schmaler (vgl. Abbildung 3.2). $|x_2|_{\max}(x_1)$ sei der größtmögliche Betrag von x_2 im zugänglichen Bereich an der Stelle x_1. Mit wachsendem x_1 wird $|x_2|_{\max}(x_1)$ also immer kleiner. Um dies quantitativ zu erfassen, definieren wir als erstes

$$z_E(\rho) := \sqrt{\frac{1}{4}\rho^2 - 2 - \frac{\sqrt{8E}}{\rho}} \quad . \tag{3.10}$$

Wie man der Gl. (3.3) entnehmen kann, parametrisiert $z_E(\rho)$ die im ersten Quadranten rechts von N_2 verlaufende Höhenlinie des Potentials V_{BG} zum Potentialwert E. Den vertikalen Abstand zwischen der Asymptote $z = \frac{1}{2}\rho$ und $z_E(\rho)$ nennen wir $\Delta(\rho)$:

$$\Delta(\rho) := \frac{1}{2}\rho - z_E(\rho) \quad . \tag{3.11}$$

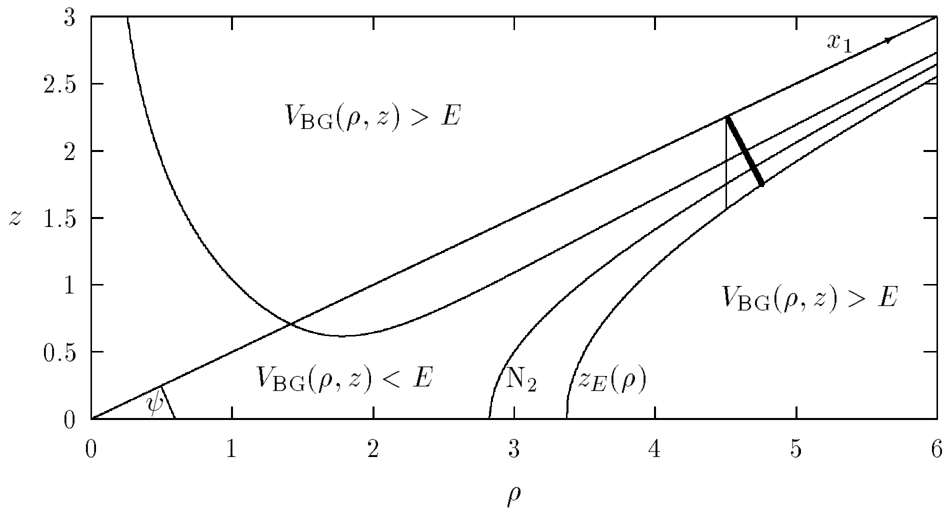


Abbildung 3.4: Zur Näherung (3.13) für $|x_2|_{\max}(x_1)$ bei $E = 1.0$. Skizziert sind die Äquipotentiallinien mit $V_{\rm BG} = 0$ (also N_2) und $V_{\rm BG} = E$ sowie die x_1-Achse. Ein Beispiel für $|x_2|_{\max}(x_1)$ ist mit einer fetten Linie angedeutet; das entsprechende $\Delta(\rho)$ erscheint als dünne vertikale Linie.

Abbildung 3.4 veranschaulicht diese Größen. Offensichtlich gilt für hinreichend große x_1:

$$|x_2|_{\max}(x_1) < \Delta\Big(\rho(x_1, x_2)\Big) \quad , \tag{3.12}$$

denn beide Höhenlinien $V_{\rm BG}(\rho, z) = E$ verlaufen für genügend große ρ unterhalb der Asymptote $z = \frac{1}{2}\rho$, wie wiederum Gl. (3.3) zeigt. $\Delta(\rho)$ kann nach Potenzen von $1/\rho$ entwickelt werden:

$$\Delta(\rho) = \frac{2}{\rho} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \quad .$$

Unter Vernachlässigung der x_2-Abhängigkeit können wir ρ als Funktion von x_1 allein interpretieren, weil nach Gl. (3.9) für große x_1 gilt: $\rho = 2sx_1 - sx_2 \approx 2sx_1$. Damit erhalten wir für $|x_2|_{\max}(x_1)$:

$$\begin{aligned} |x_2|_{\max}(x_1) &< \frac{2}{\rho} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \\ &= \frac{1}{sx_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x_1^2}\right) \quad \text{für} \quad x_1 \gg 1 \quad . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Mit Hilfe dieser Näherung können wir jetzt untersuchen, wie sich die kanonischen Gleichungen in den neuen Koordinaten darstellen.

Aus Gl. (3.6) erhalten wir den folgenden Ausdruck für $\ddot{x}_1$:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -4s^2x_1 + 2s^2x_2 - 30s^4x_1^2x_2 + 5s^4x_1x_2^2 - 50s^6x_1^3x_2^2 \\
&\quad + 5s^4x_2^3 - \frac{75}{4}s^6x_1^2x_2^3 + \frac{275}{16}s^6x_1x_2^4 + \frac{75}{32}s^6x_2^5 \\
&\approx s^2x_1\left\{-4 - 30s^2x_1x_2 - 50s^4x_1^2x_2^2\right\} \quad \text{für} \quad x_1 \gg 1 \quad . \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Näherung (3.13) ausgenutzt, um x_2 gegen x_1 abzuschätzen. Der Inhalt der geschweiften Klammer ist wegen derselben Näherung kleiner als $C := -4 + 6/\sqrt{5} < 0$. Dies beweist schließlich, daß die Bewegung in x_1-Richtung gebunden ist, weil das Teilchen für große x_1 eine rücktreibende Kraft erfährt, die stärker ist als die (harmonische) Kraft s^2Cx_1:

$$\ddot{x}_1 \lesssim s^2Cx_1 \quad \text{für} \quad x_1 \gg 1 \ . \qquad (3.15)$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt, daß nur auf der z-Achse ein Entweichen möglich ist. In Abbildung 3.5 demonstrieren wir an einem typischen Orbit den gebundenen Charakter der Bewegung. Es kann gegebenenfalls recht lange dauern, bis das Teilchen in den Kanälen $\mathrm{N}_{2,3}$ zur Umkehr gezwungen wird.

3.1.2 Symmetrien und Reversibilität

Weil V_{BG} nur quadratisch von ρ und z abhängt, ist V_{BG} symmetrisch bezüglich der ρ- und der z-Achse:

$$\begin{aligned}
V_{\mathrm{BG}}(\rho, z) &= V_{\mathrm{BG}}(\rho, -z) \\
V_{\mathrm{BG}}(\rho, z) &= V_{\mathrm{BG}}(-\rho, z) \quad .
\end{aligned} \qquad (3.16)$$

Wir nutzen jetzt diese Eigenschaften des Potentials zur Charakterisierung des durch H_{BG} beschriebenen Hamilton-Systems aus.

Aus der Hamilton-Funktion $H_{\mathrm{BG}}(\rho, z, p_\rho, z) = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + p_z^2\right) + V_{\mathrm{BG}}(\rho, z)$ ergeben sich die folgenden kanonischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= p_\rho \\
\dot{z} &= p_z \\
\dot{p}_\rho &= -\frac{\partial V_{\mathrm{BG}}}{\partial \rho}(\rho, z) \\
\dot{p}_z &= -\frac{\partial V_{\mathrm{BG}}}{\partial z}(\rho, z)
\end{aligned} \qquad (3.17)$$

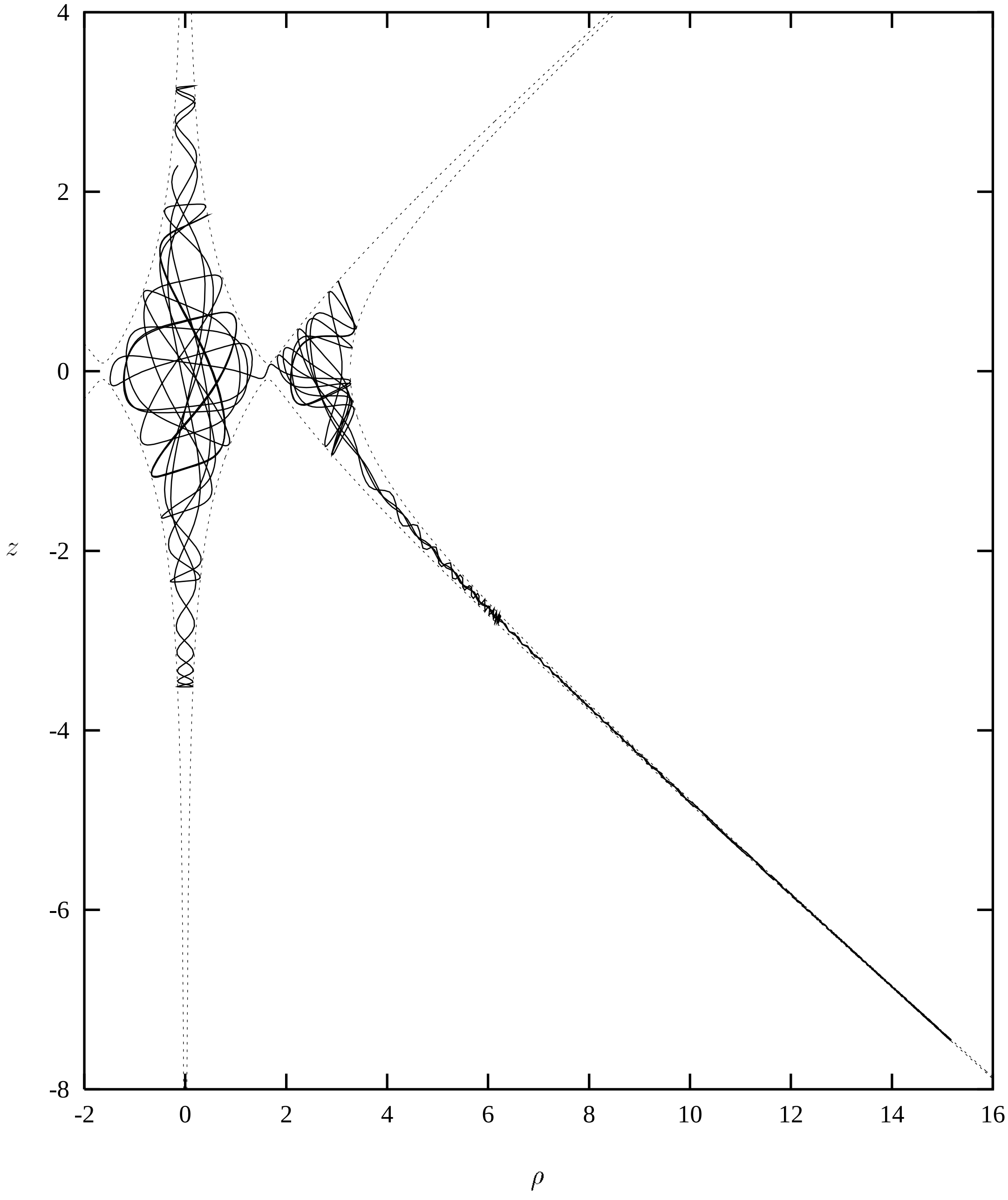


Abbildung 3.5: Ein gebundener Orbit in der Brown-Gabrielse-Flasche bei der Energie $E = 0.6$, knapp oberhalb der Sattelpunktsenergie $16/27 \approx 0.5926$. Die Äquipotentiallinien $V_{\mathrm{BG}}(\rho, z) = 0.6$ sind als gestrichelte Linien eingezeichnet. Entlang N_2 ist kein Escape möglich. In dem hier betrachteten Beispiel wird das Teilchen schließlich bei $\rho \approx 15$ reflektiert.

bzw.

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) := \begin{pmatrix} p_\rho \\ p_z \\ -\dfrac{\partial V_{\mathrm{BG}}}{\partial \rho}(\rho, z) \\ -\dfrac{\partial V_{\mathrm{BG}}}{\partial z}(\rho, z) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

in der Schreibweise von Abschnitt 1.1.2. Dabei haben wir $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_4) \in \mathbf{R}^4$ gesetzt mit

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho \\ z_2 &= z \\ z_3 &= p_\rho \\ z_4 &= p_z \quad . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Nach [Mo73] nennt man ein vierdimensionales dynamisches System $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$ *reversibel*, wenn es eine lineare Abbildung $R : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ gibt, für die gilt:

$$R^2 = \mathrm{id}_4 \tag{3.20a}$$

$$\boldsymbol{F}(R\boldsymbol{z}) = -R\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) \quad . \tag{3.20b}$$

Die Abbildung R wird als *Reflexion* bezeichnet. Die Bedeutung der Eigenschaft (3.20b) liegt darin, daß mit $\boldsymbol{z}(t)$ auch $R\boldsymbol{z}(-t)$ eine Lösung von Gl. (3.18) ist, denn es gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(R\boldsymbol{z}(-t)\right) = -R\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{z}(-t)\right) = \boldsymbol{F}\left(R\boldsymbol{z}(-t)\right) \quad . \tag{3.21}$$

Wir beschränken uns hier auf Reflexionen der Form

$$R = \mathrm{diag}\,(r_1, r_2, r_3, r_4)$$

mit reellen r_i. Gl. (3.20a) zieht dann $r_i = \pm 1$ nach sich, und aus Gl. (3.20b) und den Hamiltonschen Gleichungen (3.18) folgt $r_3 = -r_1$, $r_4 = -r_2$. Außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{\mathrm{BG}}}{\partial \rho}(r_1\rho, z) &= r_1 \frac{\partial V_{\mathrm{BG}}}{\partial \rho}(\rho, z) \\ \frac{\partial V_{\mathrm{BG}}}{\partial z}(\rho, r_2 z) &= r_2 \frac{\partial V_{\mathrm{BG}}}{\partial z}(\rho, z) \quad , \end{aligned} \tag{3.22}$$

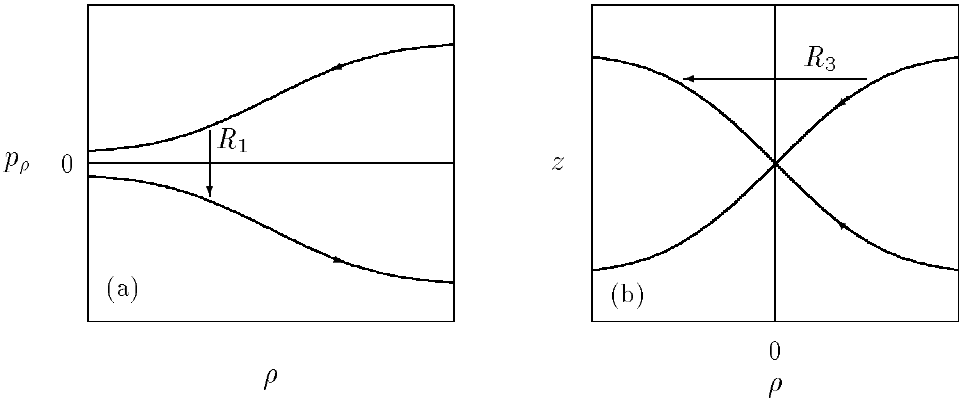


Abbildung 3.6: Zeitumkehrsymmetrie (R_1) und Reflexionssymmetrie (R_3).

weil V_{BG} ein Polynom ist, in dem ρ und z nur quadratisch auftreten. Es folgt, daß die folgenden vier R_i Reflexionen für das Brown-Gabrielse-System sind:

$$\begin{aligned} R_1 &= \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1) \\ R_2 &= \operatorname{diag}(1, -1, -1, 1) \\ R_3 &= \operatorname{diag}(-1, 1, 1, -1) \\ R_4 &= \operatorname{diag}(-1, -1, 1, 1) \quad . \end{aligned} \tag{3.23}$$

R_1 beschreibt die Zeitumkehrsymmetrie: Eine Trajektorie im Ortsraum, in umgekehrter Richtung durchlaufen, ist wiederum eine gültige Trajektorie. Denn R_1 läßt die Ortskoordinaten gleich und ändert die Vorzeichen der Impulse. Dieser Sachverhalt wird in Abbildung 3.6a skizziert. R_2 und R_3 sind Reflexionssymmetrien, die die Symmetrie des Potentials bzgl. der ρ- und der z-Achse wiederspiegeln. R_2 entspricht im Konfigurationsraum der Spiegelung der Trajektorie an der ρ-Achse und zusätzlicher Zeitumkehr; entsprechendes gilt für R_3 und die z-Achse. Abbildung 3.6b veranschaulicht R_3. Bei R_4 handelt es sich schließlich um eine Punktspiegelung am Ursprung des Konfigurationsraumes.

Wir haben damit gefunden, daß mit der Lösung

$$\Big(\rho(t), z(t), p_\rho(t), p_z(t)\Big)^T \tag{3.24a}$$

auch

$$\Big(\rho(-t), z(-t), -p_\rho(-t), -p_z(-t)\Big)^T \tag{3.24b}$$

$$\Big(\rho(-t), -z(-t), -p_\rho(-t), p_z(-t)\Big)^T \tag{3.24c}$$

$$\Big(-\rho(-t), z(-t), p_\rho(-t), -p_z(-t)\Big)^T \qquad (3.24d)$$

$$\Big(-\rho(-t), -z(-t), p_\rho(-t), p_z(-t)\Big)^T \qquad (3.24e)$$

Lösungen der kanonischen Gleichungen sind.

Durch Kombination zweier Reflexionen kann man weitere Lösungen der kanonischen Gleichungen erhalten. Es sei $\boldsymbol{z}(t)$ eine Lösung von Gl. (3.18). Wir konstruieren daraus mit Hilfe von Gl. (3.21) die neue Lösung $R_i\boldsymbol{z}(-t)$, wobei $R_i, i = 1, \ldots, 4$ eine der Reflexionen aus Gl. (3.23) ist. Die nochmalige Anwendung der Reversibilitätsbedingung (3.20b) mit R_j ergibt dann die weitere Lösung $R_jR_i\boldsymbol{z}(t)$. Eine neue Lösung dieses Typs zeichnet sich gegenüber der in Gl. (3.21) beschriebenen Lösung $R_i\boldsymbol{z}(-t)$ dadurch aus, daß wir hier keine Zeitumkehr vorzunehmen haben. $R_jR_i\boldsymbol{z}(t)$ beschreibt also eine Trajektorie, die man durch Anwendung der Flußabbildung Φ_t in *positiver* Zeitrichtung erhält.

Es gibt sechs Möglichkeiten, jeweils zwei R_i miteinander zu kombinieren:

$$\begin{array}{rclcl} R_1R_2 & = & R_3R_4 & = & \mathrm{diag}\,(1,-1,1,-1) \\ R_1R_3 & = & R_2R_4 & = & \mathrm{diag}\,(-1,1,-1,1) \\ R_1R_4 & = & R_2R_3 & = & \mathrm{diag}\,(-1,-1,-1,-1) \quad . \end{array} \qquad (3.25)$$

Dementsprechend treten Trajektorien im Phasenraum immer als 4-Tupel von simultanen Lösungen dieses Typs auf:

$$\Big(\rho(t), z(t), p_\rho(t), p_z(t)\Big)^T \qquad (3.26a)$$

$$\Big(\rho(t), -z(t), p_\rho(t), -p_z(t)\Big)^T \qquad (3.26b)$$

$$\Big(-\rho(t), z(t), -p_\rho(t), p_z(t)\Big)^T \qquad (3.26c)$$

$$\Big(-\rho(t), -z(t), -p_\rho(t), -p_z(t)\Big)^T \quad . \qquad (3.26d)$$

Für die praktische Analyse des Systems sind die hier angesprochenen Symmetrieeigenschaften sehr nützlich. Sie ermöglichen es, den numerischen Aufwand für die Berechnung der im nachfolgenden Abschnitt zu besprechenden Poincaré-Schnitte erheblich zu reduzieren.

3.2 Poincaré-Schnitte

Wir haben die Hamiltonschen Gleichungen (3.6) numerisch integriert, wobei wir ein Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren der Ordnung 6 mit automatischer

Schrittweitenanpassung verwendet haben [EnRe87].

Zur Analyse der so erhaltenen Trajektorien im vierdimensionalen Phasenraum bedienen wir uns des Hilfsmittels der *Poincaré-Schnitte*. Weil die Hamilton-Funktion eine Konstante der Bewegung ist, verläuft der Fluß auf einer dreidimensionalen Energie-Hyperfläche im Phasenraum. Die Schnittfläche, auf der wir eine Poincaré-Abbildung definieren können, ist demnach zweidimensional.

Die Poincaré-Abbildung stellt ein sehr nützliches Instrument zur Untersuchung der Dynamik dar [He83, GuHo83]. Sie reduziert die Dimension des zu untersuchenden Problems um eins — hier: von drei auf zwei — und ist deshalb erheblich einfacher zu handhaben als die vollständige Flußabbildung im Phasenraum. Insbesondere die graphische Darstellung von Trajektorien wird vereinfacht. Andererseits verliert man durch den Übergang vom Phasenraum auf die Poincaré-Fläche nicht wesentlich an Information über das System, denn die entscheidenden Strukturen des Flusses im Phasenraum lassen sich in der Dynamik der Poincaré-Abbildung wiederfinden. Beispielsweise besteht eine eindeutige Korrespondenz zwischen periodischen Orbits im Phasenraum und Fixpunkten der Poincaré-Abbildung.

3.2.1 Definition der Poincaré-Abbildung

Die in Abschnitt 3.1 vorgenommene Analyse, insbesondere die Abbildungen 3.3 und 3.5, deuteten schon darauf hin, daß — zumindest bei Energien unterhalb der Sattelpunktsenergie 16/27 — die Dynamik in der Brown-Gabrielse-Flasche im Zentralbereich um N_1 herum typischerweise aus der Überlagerung zweier Oszillationen besteht: einer schnellen Oszillation in ρ-Richtung und einer viel langsameren Oszillation in z-Richtung. Dieses Verhalten läßt sich damit begründen, daß das Teilchen in ρ-Richtung schon in niedrigster (quadratischer) Ordnung gebunden ist, anders als in z-Richtung:

$$H_{\mathrm{BG}}(\rho, z, p_\rho, p_z) = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \rho^2\right) + \frac{1}{2}p_z^2 + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^4\right) \quad . \tag{3.27}$$

Es ist deshalb sinnvoll, als Poincaré-Schnittfläche $\Sigma \subset \mathbf{R}^4$ die (z, p_z)-Ebene zu wählen. Genauer haben wir:

$$\Sigma_E := \left\{(\rho, z, p_\rho, p_z)^T \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \rho = 0;\ p_\rho > 0;\ H_{\mathrm{BG}}(0, z, p_\rho, p_z) = E\right\} \quad . \tag{3.28}$$

Dabei sind z, p_ρ und p_z nicht unabhängig voneinander wählbar, vielmehr ist der Radialimpuls p_ρ aus der Bedingung $H_{\mathrm{BG}} = E$, also

$$\begin{aligned} p_\rho(z, p_z) &= \sqrt{2\,(E - V_{\mathrm{BG}}(0, z)) - p_z^2} \\ &= \sqrt{2E - p_z^2} \quad , \end{aligned} \tag{3.29}$$

zu bestimmen. Σ_E ist demnach durch

$$\Sigma_E = \left\{ (0, z, p_\rho, p_z)^T \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; |p_z| < \sqrt{2E};\; p_\rho = \sqrt{2E - p_z^2} \right\} \tag{3.30}$$

gegeben[1]. Man beachte an dieser Stelle noch, daß wir in der Definition (3.28) bzw. in Gl. (3.30) $p_\rho > 0$ fordern, den Fall $p_\rho = \rho = 0$ also ausschließen. Dies ist sinnvoll, denn die resultierende Dynamik ist in diesem Fall eine geradlinig-gleichförmige Bewegung entlang der z-Achse und somit uninteressant. Wir bemerken außerdem, daß Σ_E in z-Richtung nicht beschränkt ist, im Einklang mit der Möglichkeit, daß sich eine Trajektorie im Konfigurationsraum entlang N_1 beliebig weit vom Zentrum entfernen kann.

Die *Poincaré-Abbildung* P ist wie gewöhnlich definiert als die Wiederkehrabbildung für die Punkte der Poincaré-Fläche:

$$\begin{aligned} P \;:\; \Sigma_E &\to \Sigma_E \\ P(\boldsymbol{z}) &= \Phi_{\tau(\boldsymbol{z})}(\boldsymbol{z}) \quad ; \end{aligned} \tag{3.31}$$

dabei ist Φ_t der (Phasen-) Fluß des Systems (3.6) und $\tau(\boldsymbol{z})$ die Zeit bis zur ersten Wiederkehr der in $\boldsymbol{z}$ startenden Trajektorie zur Poincaré-Fläche.

Wir definieren hier die Poincaré-Fläche und dementsprechend die Poincaré-Abbildung nur für Energien E mit $0 < E < V_{\mathrm{BG}}(\rho_{\mathrm{S}}, z_{\mathrm{S}}) = 16/27$. Denn weil V_{BG} nicht negativ werden kann, hätte $E = 0$ zur Folge, daß die einzigen Lösungen der kanonischen Gleichungen Fixpunkte (im Ortsraum auf den Kurven $\mathrm{N}_{1,2,3}$ liegend) wären — eine triviale Situation mit relativ uninteressanter Dynamik. Die Sattelpunktsenergie $E = 16/27$ schließen wir aus, weil es in diesem Fall Punkte in Σ_E gibt, für die die Wiederkehrzeit unendlich groß wird: Die beiden Sattelpunkte $\mathrm{S}_{1,2}$ des Potentials entsprechen dann Fixpunkten $(\rho_{\mathrm{S}_{1,2}}, z_{\mathrm{S}_{1,2}}, 0, 0)^T$ des Flusses Φ_t. Für größere Energien als 16/27 ist nicht mehr sichergestellt, daß jede mit $\rho = 0$ startende Trajektorie wieder zur Poincaré-Fläche zurückgelangt. Auch hier sind Singularitäten, das heißt Unstetigkeiten der Poincaré-Abbildung zu erwarten.

Zunächst ist nun zu überprüfen, ob die so definierte Abbildung P die Anforderungen erfüllt, die man gewöhnlich an eine Poincaré-Abbildung stellt. So

[1] Eine andere mögliche Wahl für die Σ_E wäre die (ρ, p_ρ)-Ebene. Auch hiermit erhielte man eine gültige Poincaré-Abbildung mit endlichen Wiederkehrzeiten. Es ergäbe sich aber der für die praktische numerische Untersuchung gravierende Nachteil, daß diese Wiederkehrzeiten sehr viel größer wären.

fordert man beispielsweise, daß der Fluß Φ_t die Poincaré-Fläche überall transversal schneidet und daß *jeder* Punkt $\boldsymbol{z} \in \Sigma_E$ durch den Fluß nach endlicher Zeit $\tau(\boldsymbol{z})$ wieder auf Σ_E abgebildet wird. Die erste Bedingung stellt sicher, daß P stetig und gegebenenfalls sogar differenzierbar ist [PaMe82]. Und nur wenn die Wiederkehrzeit $\tau(\boldsymbol{z})$ für alle $\boldsymbol{z}$ endlich ist, kann man sicher sein, daß die vollständige Dynamik durch die Poincaré-Abbildung repräsentiert wird.

Um diese Eigenschaften zu überprüfen, untersuchen wir die Radialbeschleunigung $\dot{p}_\rho$. Nach Gl. (3.6c) gilt

$$\dot{p}_\rho = -\rho \left[1 + \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{4}\rho^2\right)\right]\left[1 + \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{3}{4}\rho^2\right)\right] \quad . \tag{3.32}$$

Im zentralen Teil des Ortsraumes, der durch die Äquipotentiallinien mit der Sattelpunktsenergie 16/27 begrenzt ist, sind die durch die beiden eckigen Klammern gegebenen Faktoren größer als null: Nullsetzen der ersten Klammer, $1 + \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{4}\rho^2\right) = 0$, ergibt die Darstellung (3.5b) der Nullpotentiallinien $\mathrm{N}_{2,3}$; deshalb liegen diejenigen Punkte (ρ, z), für die die erste Klammer kleiner als null wird, *rechts* von N_2 und *links* von N_3 im Ortsraum. Die Punkte (ρ, z), für die die zweite Klammer verschwindet, ergeben Kurven ähnlicher Gestalt, die die ρ-Achse in den Sattelpunkten $\mathrm{S}_{1,2}$ schneiden und sich ebenfalls zu großen $|\rho|$-Werten hin öffnen. Insgesamt gilt also für den uns interessierenden Teil des Phasenraumes $\dot{p}_\rho \gtrless 0$, falls $\rho \lessgtr 0$ ist. Dies beweist die Rückkehr aller Trajektorien zur z-Achse nach jeweils endlicher Zeit. Der Schnitt der Trajektorien mit dieser Achse ist transversal, denn wäre $p_\rho = 0$ auf der z-Achse, so verliefe der gesamte Orbit auf dieser Achse, und solche Orbits haben wir von vornherein ausgeschlossen. Damit haben wir schließlich auch gezeigt, daß Σ_E transversal vom Fluß Φ_t geschnitten wird.

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns der numerischen Analyse der Brown-Gabrielse-Magnetflasche zuwenden und den Nachweis dafür führen, daß die Dynamik dieses Systems unter gewissen Bedingungen chaotisch ist.

3.2.2 Numerischer Nachweis der Nichtintegrabilität

Die in Abschnitt 3.1.2 besprochenen Symmetrieeigenschaften der Brown-Gabrielse-Magnetflasche ermöglichen es, die Iteration der Poincaré-Abbildung und die graphische Darstellung der Resultate sehr effektiv durchzuführen.

Zunächst definieren wir zur Vereinfachung der Notation

$$\boldsymbol{s} := \begin{pmatrix} z \\ p_z \end{pmatrix} \quad . \tag{3.33}$$

$\boldsymbol{s}$ beschreibt in eindeutiger Weise einen Punkt in der Poincaré-Fläche. Wir wählen einen Startwert $\boldsymbol{s}_0 \in \Sigma_E$ und berechnen einen Orbit $\{\boldsymbol{s}_i \in \Sigma_E; i \geq 0\}$ durch Iteration von P:

$$\boldsymbol{s}_i = \begin{pmatrix} z_i \\ p_{z,i} \end{pmatrix} := P^i(\boldsymbol{s}) \ , \quad i \geq 0 \ . \tag{3.34}$$

Der *Poincaré-Schnitt* — auch: *Poincaré-Plot* — entsteht aus der Darstellung der Punkte $\boldsymbol{s}_i$ mehrerer solcher Orbits in der Poincaré-Fläche.

Indem wir die in Abschnitt 3.1.2 diskutierten Symmetrien ausnutzen, können wir ohne großen Aufwand erheblich mehr Punkte in den Poincaré-Plot eintragen als lediglich die $\boldsymbol{s}_i$: Zunächst entnehmen wir aus (3.26c), daß wir die Bedingung $p_\rho > 0$ bei der Erstellung des Poincaré-Plots gar nicht anwenden müssen. Denn (3.26c) besagt, daß aus der Existenz des Orbits (3.34) auch die Existenz eines anderen Orbits in Σ_E folgt, der die gleichen Koordinaten z und p_z hat, sich aber in p_ρ um ein Vorzeichen von (3.34) unterscheidet. Damit können wir *jeden* Durchstoßpunkt der Trajektorie $\Phi_t(\boldsymbol{s}_0))$ durch die Poincaré-Fläche im Poincaré-Plot markieren.

Aus (3.26b) schließen wir, daß auch der am Ursprung von Σ_E punktgespiegelte Orbit ein anderer gültiger Orbit von P ist. An (3.24b,3.24c) sehen wir schließlich, daß wir weitere gültige Orbits in Σ_E erhalten, indem wir die Punkte von (3.34) an der z- und der p_z-Achse spiegeln. Denn die Verfolgung des Flusses in negativer Zeitrichtung, die in (3.24) durch den Parameter $(-t)$ angedeutet wird, entspricht der Iteration der Inversen P^{-1} der Poincaré-Abbildung. Die Existenz dieser Inversen ist ganz allgemein dadurch sichergestellt, daß man den Fluß eines Differentialgleichungssystems immer sowohl in positiver als auch in negativer Zeitrichtung verfolgen kann.

Wir haben Poincaré-Schnitte für verschiedene Energien unterhalb der Sattelpunktsenergie 16/27 durchgeführt. Die Ergebnisse dieser numerischen Untersuchungen sind in den Abbildungen 3.7 bis 3.14 dargestellt; dabei haben wir die oben angesprochenen Symmetrien des Systems ausgenutzt. Insgesamt ergibt sich beim Erhöhen des Systemparameters Energie ein typisches *KAM-Szenario*.

Die Kolmogorov-Arnold-Moser-Theorie — kurz: KAM-Theorie[2] — macht Aussagen darüber, welche Tori eines integrablen Hamilton-Systems unter einer kleinen Störung erhalten bleiben, wobei Deformationen der erhaltenen Tori möglich sind. Zunächst stellen wir fest, daß bei einem vierdimensionalen integrablen Hamilton-System die gebundenen Trajektorien auf zweidimensionalen Tori im Phasenraum verlaufen. Im Poincaré-Schnitt zeigen sich diese

[2] Ausführliche Darstellungen dieser wichtigen Theorie findet man beispielsweise in [Sc89, LiLi92, GuHo83, Ar89].

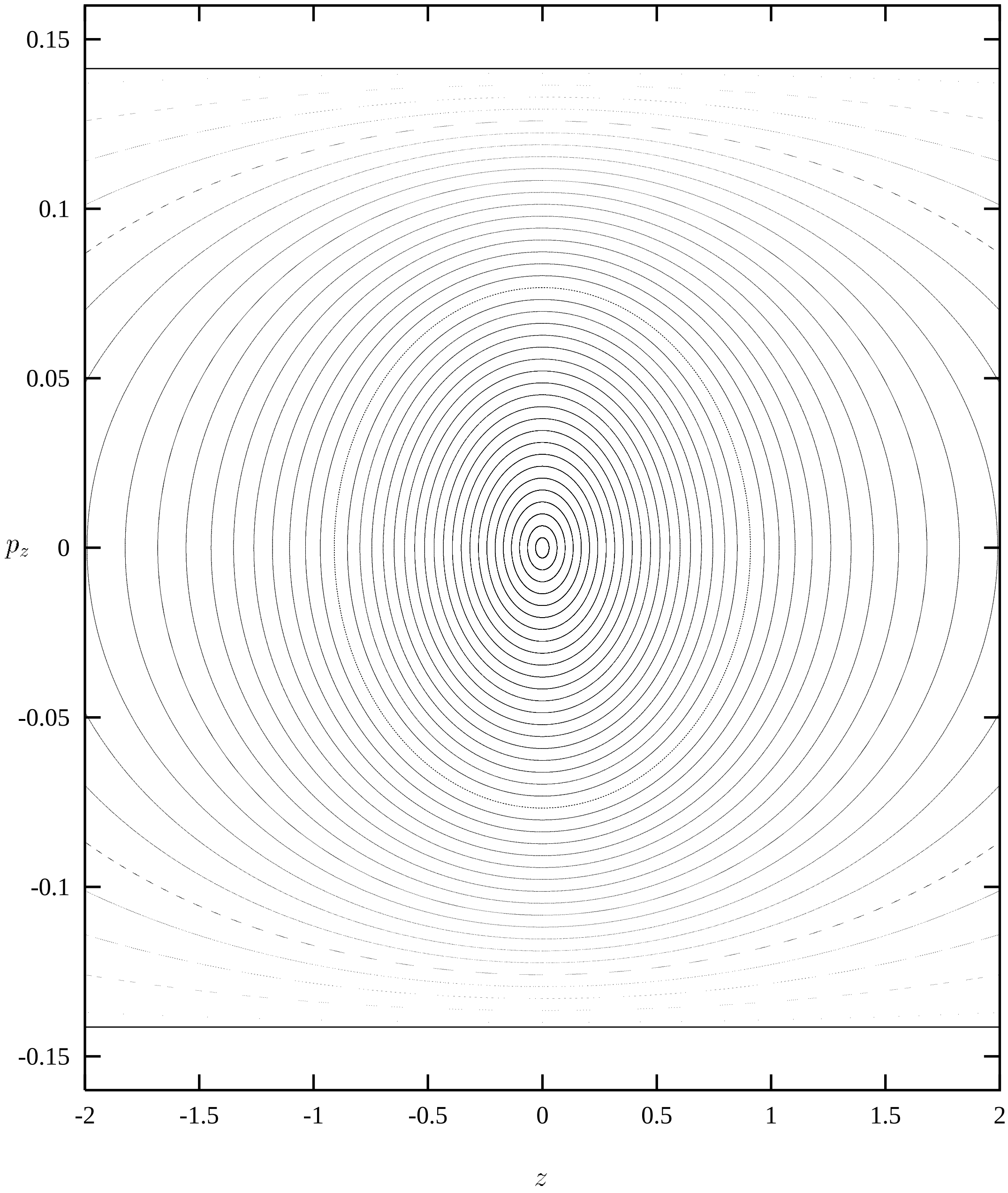


Abbildung 3.7: Poincaré-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.01$. Für 40 äquidistante Startwerte auf der positiven p_z-Achse wurde die Poincaré-Abbildung jeweils 3000-mal iteriert. Der Rand der Poincaré-Fläche ist mit durchgezogenen Linien markiert.

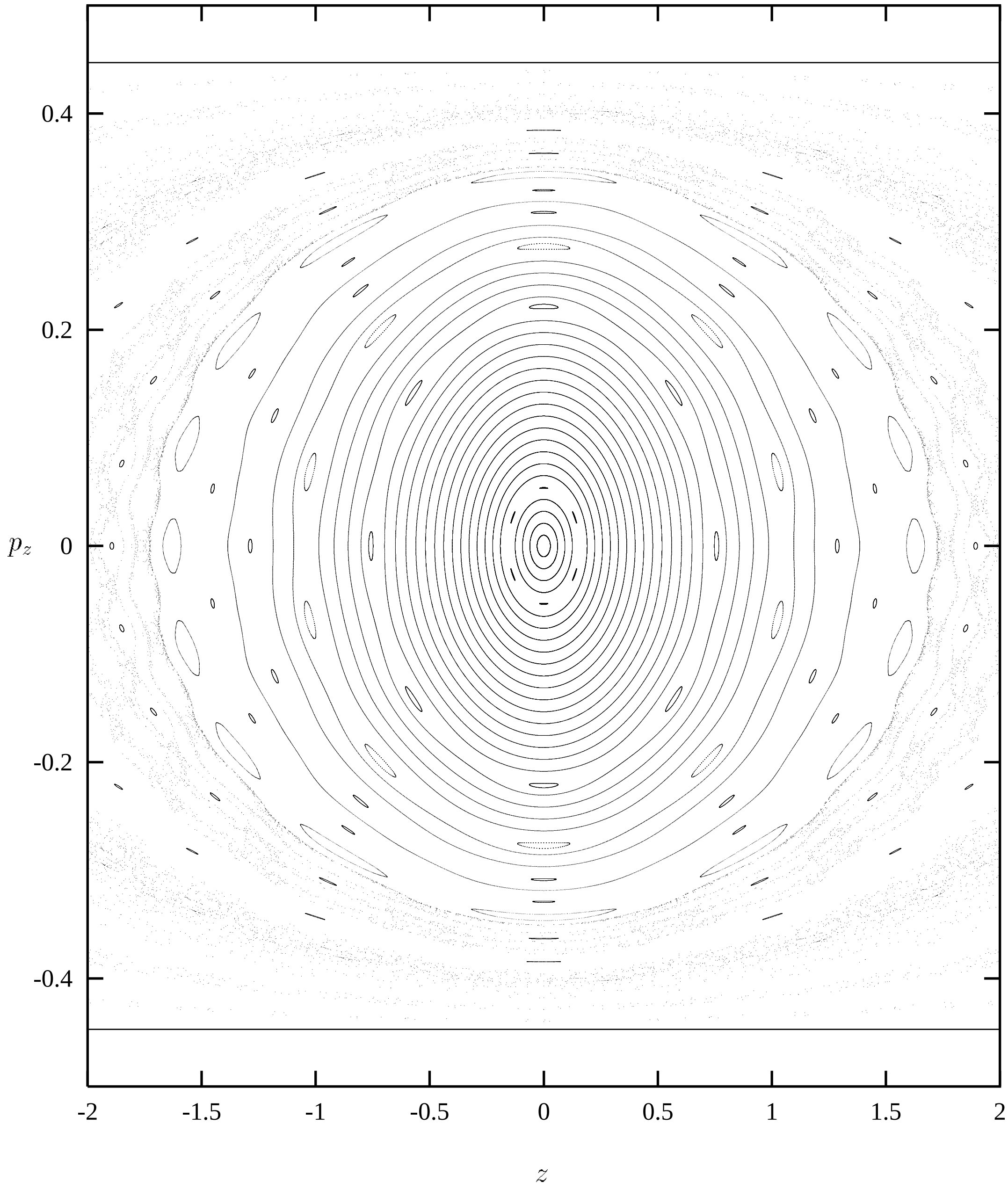


Abbildung 3.8: Poincaré-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.10$. Für 40 äquidistante Startwerte auf der positiven p_z-Achse wurde die Poincaré-Abbildung jeweils 3000-mal iteriert. Der Rand der Poincaré-Fläche ist mit durchgezogenen Linien markiert.

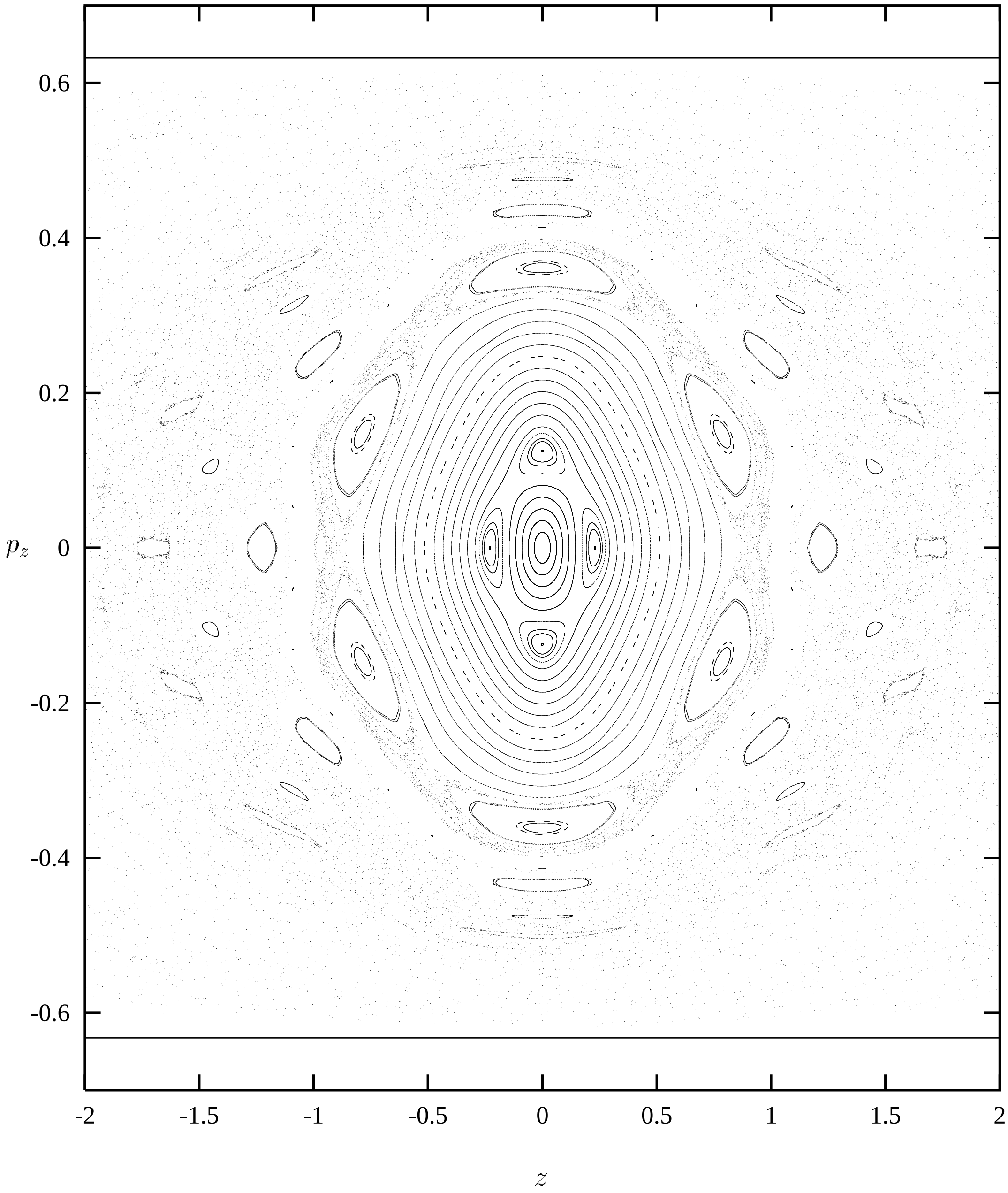


Abbildung 3.9: Poincaré-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.20$. Für 40 äquidistante Startwerte auf der positiven p_z-Achse wurde die Poincaré-Abbildung jeweils 2000-mal iteriert. Der Rand der Poincaré-Fläche ist mit durchgezogenen Linien markiert.

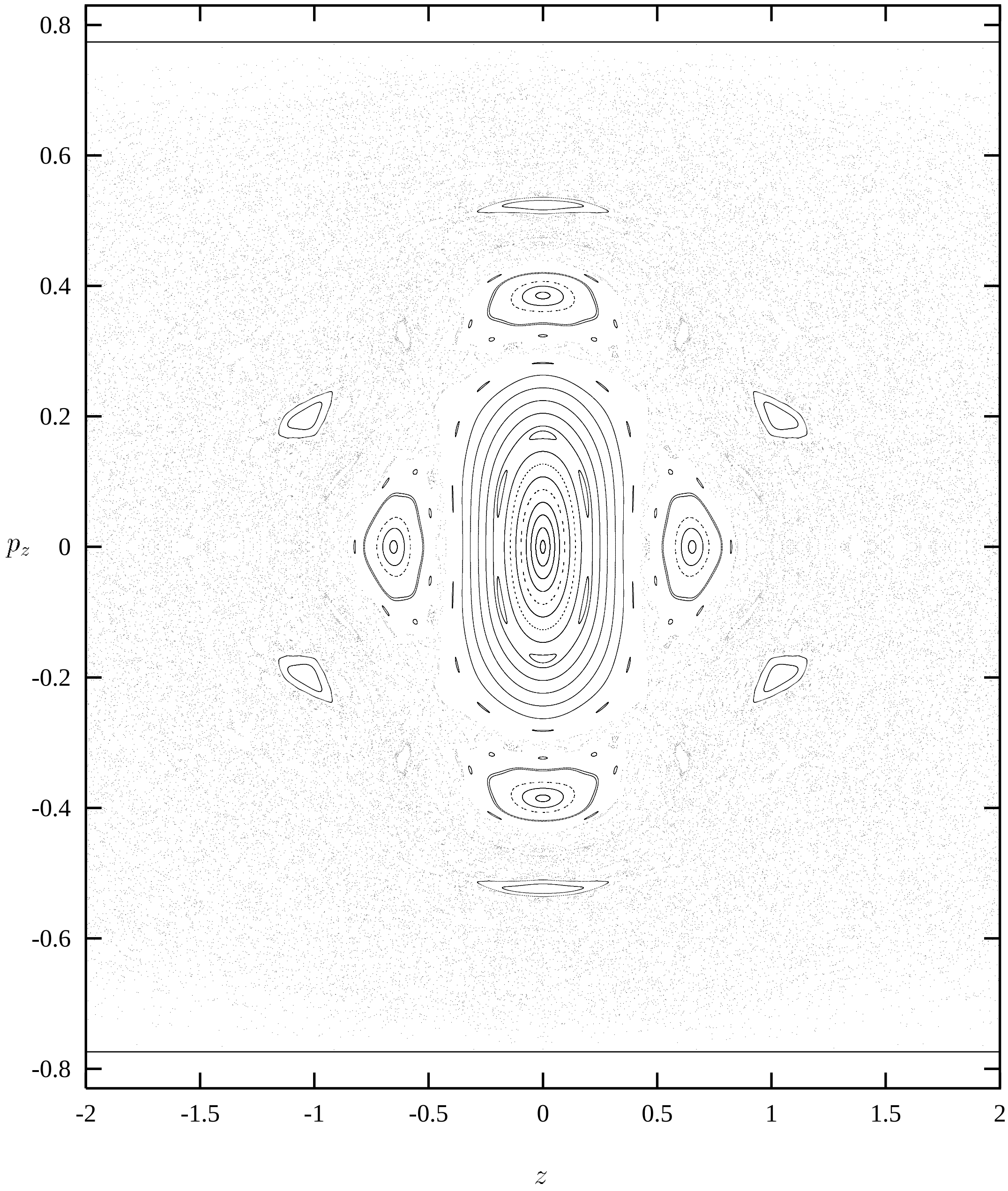


Abbildung 3.10: Poincaré-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.30$. Für 40 äquidistante Startwerte auf der positiven p_z-Achse wurde die Poincaré-Abbildung jeweils 3000-mal iteriert. Der Rand der Poincaré-Fläche ist mit durchgezogenen Linien markiert.

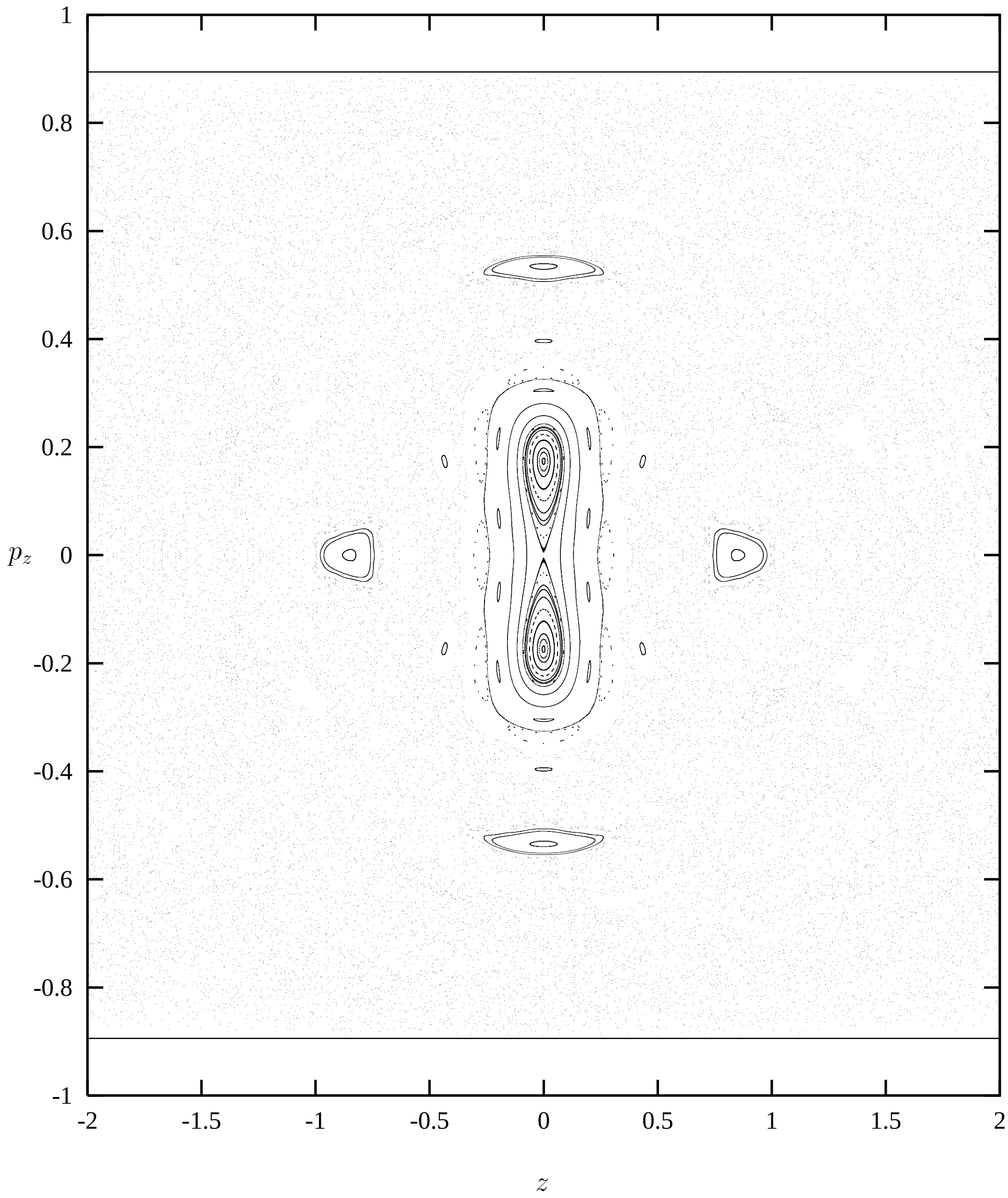


Abbildung 3.11: Poincaré-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.40$. Für 40 äquidistante Startwerte auf der positiven p_z-Achse wurde die Poincaré-Abbildung jeweils 3000-mal iteriert. Der Rand der Poincaré-Fläche ist mit durchgezogenen Linien markiert.

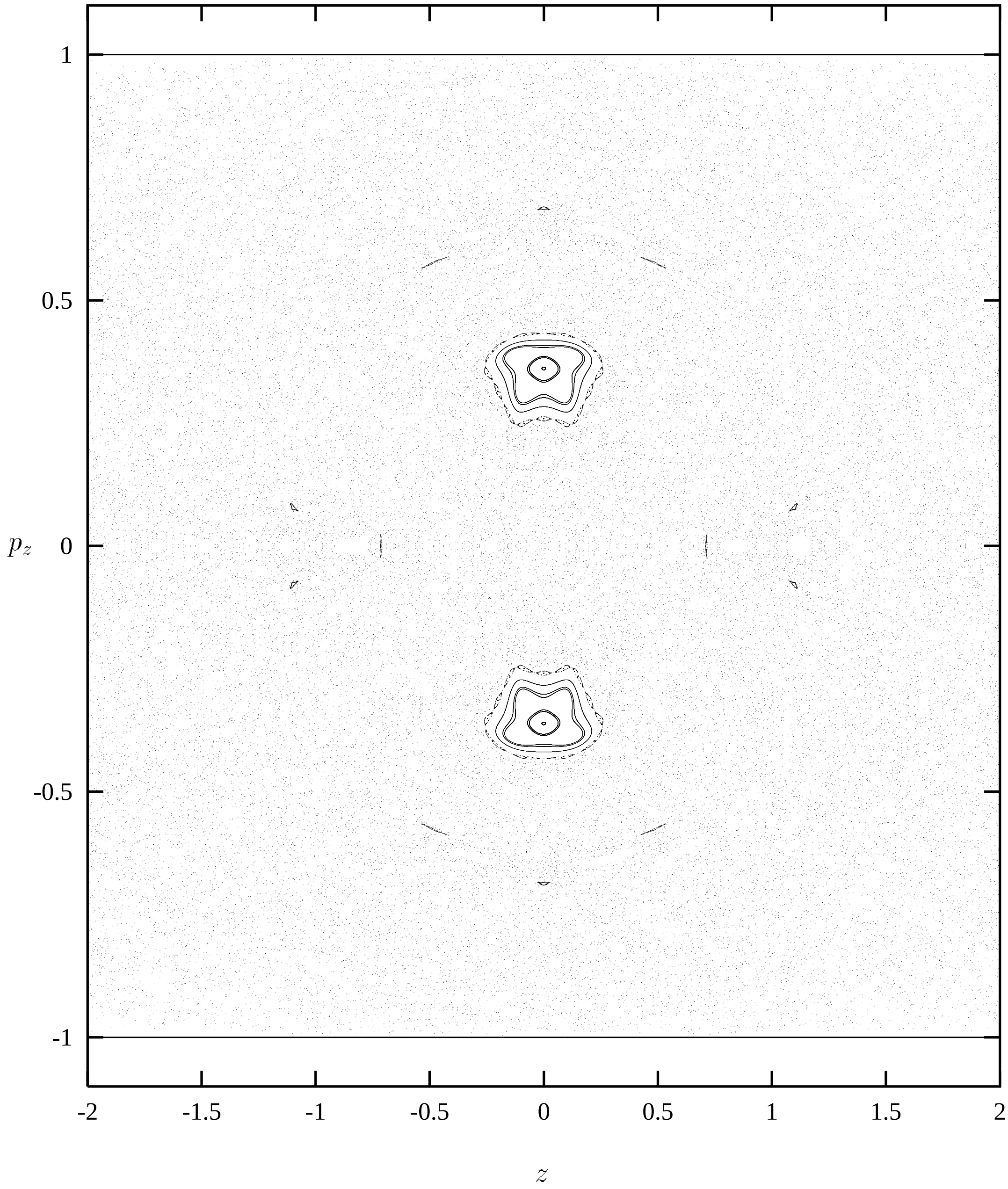


Abbildung 3.12: Poincaré-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.50$. Für 40 äquidistante Startwerte auf der positiven p_z-Achse wurde die Poincaré-Abbildung jeweils 3000-mal iteriert. Der Rand der Poincaré-Fläche ist mit durchgezogenen Linien markiert.

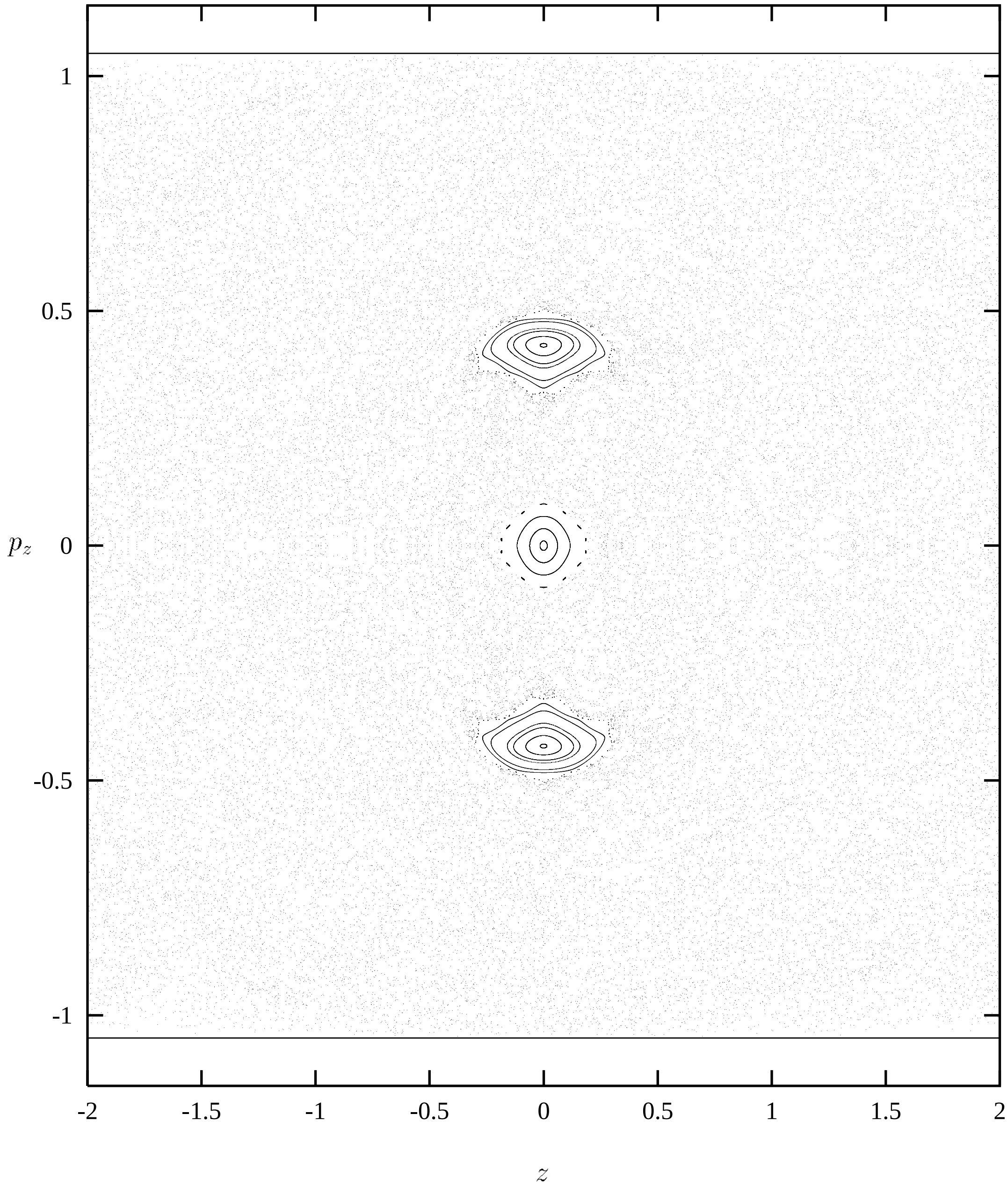


Abbildung 3.13: Poincaré-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.55$. Für 40 äquidistante Startwerte auf der positiven p_z-Achse wurde die Poincaré-Abbildung jeweils 3000-mal iteriert. Der Rand der Poincaré-Fläche ist mit durchgezogenen Linien markiert.

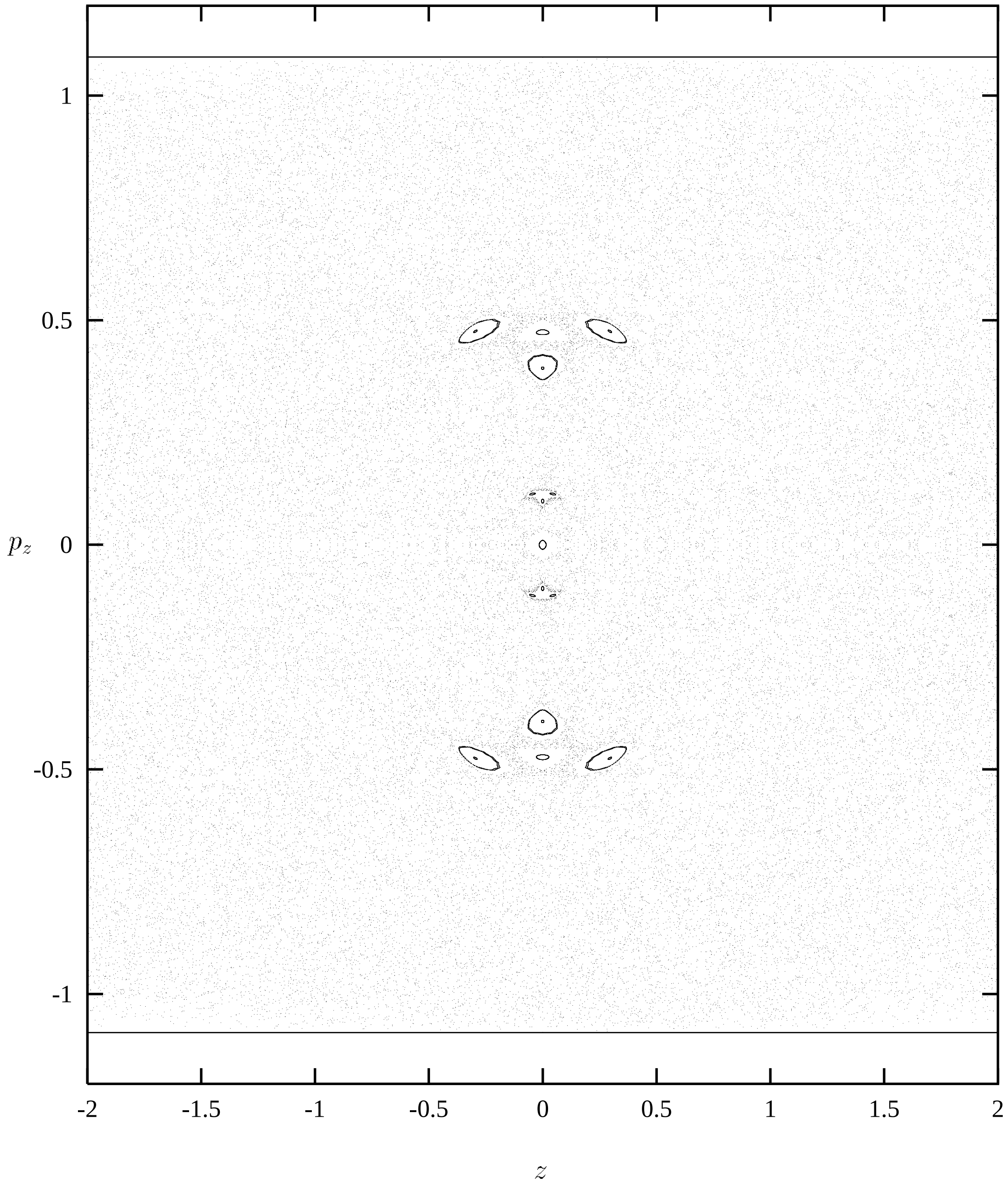


Abbildung 3.14: Poincaré-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.59$, knapp unterhalb der Sattelpunktsenergie $16/27 \approx 0.5926$. Für 40 äquidistante Startwerte auf der positiven p_z-Achse wurde die Poincaré-Abbildung jeweils 3000-mal iteriert. Der Rand der Poincaré-Fläche ist mit durchgezogenen Linien markiert.

Tori als *invariante Linien* — man vergleiche hierzu die konzentrischen geschlossenen Kurven in Abbildung 3.7 [3]. Die Dynamik auf jedem dieser Tori wird durch zwei Frequenzen charakterisiert. Das System erfüllt die *KAM-Bedingung*, wenn das Verhältnis der beiden Frequenzen, die Windungszahl, „hinreichend irrational" ist. Wir wollen diese Bedingung hier nicht genauer angeben, weisen aber darauf hin, daß die KAM-Bedingung bei zunehmender Störung im allgemeinen strenger wird. Wenn die KAM-Bedingung und einige weitere „technische" Bedingungen erfüllt sind, dann besagt das KAM-Theorem, daß der entsprechende Torus trotz der Störung des Systems erhalten bleibt.

Im Fall einer rationalen Windungszahl r/s können wir angeben, was mit der entsprechenden invarianten Linie geschieht, deren Persistenz ja gerade nicht durch das KAM-Theorem sichergestellt wird. Hier gilt das Theorem von Poincaré und Birkhoff: Unter einer Störung bricht der „rationale Torus" auf und es entstehen ks elliptische und ks hyperbolische s-periodische Punkte der Poincaré-Abbildung. Dabei ist k eine natürliche Zahl; meistens gilt $k = 1$ [He83]. Die $2ks$ neu entstandenen periodischen Punkte befinden sich dort in der Poincaré-Fläche, wo vorher die noch nicht aufgebrochene invariante Linie lag. Zwischen jeweils zwei elliptischen Punkten liegt ein hyperbolischer Punkt. Eine *Poincaré-Birkhoff-Kette* — auch: „Inselkette" — ist entstanden.

Jeder elliptische periodische Punkt einer Poincaré-Birkhoff-Kette ist seinerseits wieder von invarianten Linien zweiter Ordnung umgeben. Diese Linien unterliegen ebenfalls dem KAM- und dem Poincaré-Birkhoff-Theorem, brechen bei weiter vergrößerter Störung auf und bilden Inselketten zweiter Ordnung. Durch Fortsetzung dieses Szenarios ergibt sich eine sehr komplizierte ineinander geschachtelte Struktur aus invarianten Linien, elliptischen und hyperbolischen periodischen Punkten. Wegen der auf komplexe Weise ineinander verwobenenen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten[4] der hyperbolischen periodischen Punkte ist die Dynamik in der Umgebung dieser Punkte hochgradig kompliziert und hängt sensibel von den Anfangsbedingungen des betrachteten Orbits ab. Deswegen werden diese Gebiete als „stochastische Gebiete" bezeichnet. Sie sind für die chaotische Komponente der Bewegung verantwortlich und zeigen sich im Poincaré-Plot als Bereiche

[3] Das in Abbildung 3.7 dargestellte System, die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.01$, ist mit Sicherheit nicht mehr integrabel. Wie weiter unten erklärt wird, sind aber wegen des noch geringen Wertes des Störparameters E erst vergleichsweise wenige invariante Tori aufgebrochen, und die schon entstandenen Inselketten sind noch sehr schmal. Deshalb unterscheidet sich der in dieser Abbildung dargestellte Poincaré-Plot nicht wesentlich von dem eines wirklich integrablen Systems.

[4] Die Schnittpunkte der stabilen und der instabilen Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen periodischen Punktes werden *homokline Punkte* genannt; Schnittpunkte von stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten, die zu unterschiedlichen periodischen Punkten gehören, heißen *heterokline Punkte*. Die Dynamik in der Umgebung dieser Punkte ist ein Paradigma für die chaotische Dynamik eines nichtintegrablen Hamilton-Systems.

mit scheinbar regellos verteilten Punkten. Offensichtlich existieren in den stochastischen Gebieten nur noch sehr wenige oder sogar gar keine invarianten Linien. Demnach verläuft die entsprechende Dynamik im Phasenraum typischerweise nicht auf 2-Tori, und das System ist nicht integrabel.

Das oben beschriebene KAM-Szenario läßt sich eindeutig in unseren Abbildungen 3.7 bis 3.14 wiederfinden. Trotz größer werdender Störung bleiben invariante Linien erhalten (man spricht von „KAM-Linien"), andererseits nimmt deren Anzahl mit wachsendem E ab, während die KAM-Bedingung (vermutlich) strenger wird. Man erkennt auch die Entstehung von Poincaré-Birkhoff-Ketten erster und zweiter Ordnung. Die Inselketten dritter und höherer Ordnung sind in der Regel bereits so klein, daß man sie in den gezeigten Abbildungen nicht mehr erkennen kann. Wir haben somit anhand der Poincaré-Plots einen numerischen Nachweis für die Existenz stochastischer Gebiete und damit für die Nichtintegrabilität des Systems erbracht.

Es ist an dieser Stelle wichtig festzuhalten, daß wir für das Brown-Gabrielse-System zwar einerseits ein typisches KAM-Szenario finden, andererseits aber weder eine Zerlegung in einen integrablen und einen Störanteil der Hamilton-Funktion angeben, noch die KAM-Bedingung überprüfen können. Unsere Ergebnisse werden also *nicht* durch das KAM-Theorem erklärt! Es ist aber von Robinson [Ro70], Zehnder [Ze73] und Newhouse [Ne77] gezeigt worden, daß das oben beschriebene KAM-Szenario ganz allgemein eine richtige Beschreibung der Situation in der Nähe eines elliptischen Fixpunktes ist, auch wenn die Bedingungen des KAM-Theorems nicht erfüllt sind. In jedem nichtintegrablen System sind die elliptischen Fixpunkte von invarianten Linien umgeben, auf denen die Bewegung quasiperiodisch, also regulär ist. Darüber hinaus existieren ebenfalls immer Poincaré-Birkhoff-Ketten aus elliptischen und hyperbolischen periodischen Punkten, die die Fixpunkte umschließen. Damit ist auch im nichtintegrablen allgemeinen Fall sichergestellt, daß es stochastische Gebiete und die das KAM-Szenario kennzeichnende Koexistenz von regulärer und chaotischer Dynamik gibt.

Wir bemerken an dieser Stelle noch, daß der Ursprung $\boldsymbol{s} = (0,0)^T$ der Poincaré-Fläche für alle E ein Fixpunkt der Poincaré-Abbildung ist. Denn startet man einen Orbit mit der Anfangsbedingung $\boldsymbol{z}(t=0) = \left(0,0,\sqrt{2E},0\right)^T$, dann erhält man aus Gl. (3.6) $z(t) = p_z(t) = 0$ für alle Zeiten. Der Orbit verläßt demnach die ρ-Achse nie, so daß für alle seine Schnittpunkte mit der z-Achse $\boldsymbol{s} = (0,0)^T$ gilt. Besondere Beachtung verdient die Entwicklung des Stabilitätstypus dieses Fixpunktes: Bei niedrigen Energien handelt es sich natürlich um einen elliptischen Fixpunkt. Bei einer knapp unterhalb von $E = 0.4$ liegenden Energie verwandelt er sich in einen instabilen Fixpunkt, um dann bei einem Energiewert zwischen $E = 0.5$ und $E = 0.55$ wieder stabil zu werden. Man vergleiche hierzu die Abbildungen 3.11, 3.12 und 3.13.

Nachdem wir uns in diesem Kapitel einen qualitativen Überblick über die Dynamik in der Brown-Gabrielse-Magnetflasche verschafft haben, gilt es nun, den in Kapitel 1 entwickelten Formalismus der Normalformentheorie anzuwenden. Wir werden im folgenden Kapitel sehen, daß es in der Tat möglich ist, mit seiner Hilfe weitergehende Informationen über unser System zu erhalten.

Kapitel 4

Normalform und Quasiintegral der Brown-Gabrielse-Magnetflasche

In Kapitel 1 haben wir die Theorie der Normalformen und Quasiintegrale für Hamilton-Systeme diskutiert. Die sich anschließenden Kapitel 2 und 3 dienten der Einführung der magnetischen Flaschen und der Diskussion eines typischen Vertreters dieser Systemklasse, der Brown-Gabrielse-Magnetflasche, mit konventionellen Methoden. In diesem Kapitel führen wir die beiden Stränge zusammen und benutzen die Dragt-Finn-Stegemertensche Normalformentheorie, um die Brown-Gabrielse-Flasche eingehender zu analysieren.

Zunächst betrachten wir ganz allgemein den für Magnetflaschen typischen quadratischen Term der Hamilton-Funktion und diskutieren ausführlich die in diesem Fall durchzuführende Normalformtransformation. Wir erhalten für die Brown-Gabrielse-Flasche ein Quasiintegral, das wir bis zur vierzehnten Ordnung angeben. Dieses „zweite Integral“ erweist sich als sehr nützlich sowohl zur Analyse einzelner Trajektorien in unserer Modellflasche, als auch zur Charakterisierung ausgedehnter Gebiete der Poincaré-Fläche. Schließlich schlagen wir drei neue Verfahren vor, mit deren Hilfe man — unter Benutzung des Quasiintegrals — Poincaré-Schnitte detaillierter untersuchen und verstehen kann.

4.1 Transformation auf Normalform und Berechnung des Quasiintegrals

In diesem Abschnitt konkretisieren wir die Überlegungen des Abschnitts 1.2.4 bzw. des Anhanges A und berechnen das formale DFS-Integral der Brown-Gabrielse-Magnetflasche. Zuvor beschreiben wir die wesentlichen Details der Normalisierungsprozedur für die Brown-Gabrielse-Hamilton-Funktion (3.1).

4.1.1 Die Normalformtransformation

Der quadratische Anteil von H_{BG} ist

$$H_2(\rho, z, p_\rho, p_z) = \frac{1}{2}\left(\rho^2 + p_\rho^2 + p_z^2\right) \tag{4.1}$$

— wir lassen den Index $_{\mathrm{BG}}$ für den Rest dieses Abschnitts zur Vereinfachung fort. Auch die anderen beiden in Kapitel 2 vorgestellten Modellsysteme sind von diesem Typ.

Wir setzen

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z \\ \rho \\ p_z \\ p_\rho \end{pmatrix} \quad . \tag{4.2}$$

Diese Zuordnung bedeutet eine Vertauschung der ρ- und der z-Komponenten gegenüber Gl. (3.19) in Kapitel 3. Wir ziehen im vorliegenden Kapitel 4 die in Gl. (4.2) verwendete Definition vor, weil sie der in der Literatur über magnetische Flaschen [DrFi79, St91] üblichen Notation entspricht.

H_2, ausgedrückt in den neuen Koordinaten z_i, nimmt dann die folgende Form an:

$$H_2(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2}\left(z_2^2 + z_3^2 + z_4^2\right) \quad . \tag{4.3}$$

Anstatt aber diese zweidimensionale Hamilton-Funktion zu diskutieren, gehen wir für die folgenden Überlegungen zu der Verallgemeinerung (1.105) von Gl. (4.3) über [DrFi79]:

$$H_2(\boldsymbol{z}) = \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{2} z_{n+\nu}^2 + \sum_{\nu=l+1}^{n} \frac{\omega_\nu}{2}\left(z_\nu^2 + z_{n+\nu}^2\right) \quad . \tag{4.4}$$

Für $l = 1$, $n = 2$ und $\omega_2 = 1$ erhalten wir hieraus wieder Gl. (4.3).

Wir nennen ein H, dessen quadratischer Anteil die Form (4.4) mit $l \geq 1$ hat, eine *Magnetflaschen-Hamilton-Funktion.* Selbstverständlich bleibt aber dieser Typ von Hamilton-Funktion nicht nur den magnetischen Flaschen vorbehalten. Die Benennung deutet lediglich an, daß die in der Theorie der magnetischen Flaschen auftretenden Hamilton-Funktionen typischerweise die in Gl. (4.4) beschriebene Gestalt annehmen — zum Beispiel haben alle drei in Kapitel 2 vorgestellten Modellsysteme Hamilton-Funktionen dieses Typs. Anschaulich beschreiben die ersten l Summanden des Magnetflaschen-H_2 eine (in niedrigster Ordnung) freie Bewegung, wogegen die restlichen $n-l$ Summanden harmonische Oszillatoren mit der Frequenz ω_ν darstellen.

Magnetflaschen-Hamilton-Funktionen können nicht mit der Gustavsonschen Normalformentheorie untersucht werden, denn die wesentliche Voraussetzung (1.61) ist nicht erfüllt: Um dieser Voraussetzung zu genügen, müßte $l=0$ sein, und diesen Fall schließen wir hier gerade aus. Erst mit der DFS-Theorie wird demnach der Normalformenkalkül auf die hier betrachtete Systemklasse anwendbar.

Die in den Abschnitten 1.2.2 und 1.2.3 diskutierte Transformation auf DFS-Normalform muß an dieser Stelle nicht mehr ausführlich beschrieben werden. Zur Erinnerung wiederholen wir hier nur diejenigen Aspekte, die sich bei der praktischen Durchführung als problematisch erweisen. Bei jedem Schritt der Normalformtransformation müssen wir zur Lösung der homologischen Gleichung $G_m = H_m - \mathcal{A}_m(F_m)$ den Grad m-Anteil H_m der Hamilton-Funktion $H = \sum_{k\geq 3} H_k$ in die Summe

$$H_m = H'_m + H''_m \tag{4.5a}$$

zerlegen, wobei für die beiden Summanden gilt:

$$H'_m \quad \in \quad \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}^*_m) \tag{4.5b}$$

$$H''_m \quad \in \quad \mathrm{Im}\,(\mathcal{A}_m) \quad . \tag{4.5c}$$

Die Lie-Transformation, die die alte Hamilton-Funktion H in die neue Hamilton-Funktion G transformiert, wobei G in DFS-Normalform bis zum Grad m ist, lautet dann

$$G = \exp(\mathrm{ad}_{F_m})(H) \quad , \tag{4.6a}$$

mit der aus

$$H''_m = \mathcal{A}_m\,(F_m) \tag{4.6b}$$

zu bestimmenden Erzeugenden F_m.

Bei der Bestimmung eines Urbildes F_m von H''_m handelt es sich um ein nichttriviales Problem. Man hat hier zwar „nur“ ein lineares Gleichungssystem zu lösen, was beispielsweise mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren immer gelingt, aber die Dimension des Problems ist sehr groß: $\dim \mathcal{L}_m =$

$\binom{2n+m-1}{2n-1}$. Man hat demnach Hunderte oder sogar Tausende von linearen Gleichungen gleichzeitig zu erfüllen. Dies stellt bis heute auch für die mächtigsten Systeme der symbolischen Computer-Algebra ein schwieriges Problem dar, denn die Invertierung einer (d, d)-Matrix benötigt typischerweise $\mathcal{O}(d^3)$ Rechenoperationen [St89]. Andererseits wollen wir um der Rechengenauigkeit willen kein numerisches Näherungsverfahren (Iterationsverfahren) verwenden. Im folgenden stellen wir ein Verfahren dar, mit dem wir den Rechenaufwand für die Invertierung von $\mathcal{A}_m$ drastisch reduzieren können, indem wir die spezielle Struktur des Problems ausnutzen und es auf ein wesentlich einfacheres zurückführen. Damit können wir Gl. (4.6b) vergleichsweise schnell und sehr genau lösen und somit die Normalformtransformation durchführen.

Für die Darstellung des Differentialoperators $\mathcal{A}_m$ gemäß Gl. (1.91) benötigen wir als erstes die Hamilton-Matrix L:

$$\begin{aligned} L &= J\,\mathrm{Hess}\,(H_2(\boldsymbol{z})) \\ &= \left(\begin{array}{cc} 0_n & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \omega_{l+1} & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & \omega_n \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\omega_{l+1} & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & -\omega_n \end{matrix}} & 0_n \end{array}\right) . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Um mit dieser unhandlichen $(2n, 2n)$-Matrix besser arbeiten zu können, transformieren wir sie auf eine einfachere Gestalt. Vor einer ähnlichen Aufgabe standen wir schon einmal, in Abschnitt 1.2.2. Dort galt es, die Zerlegung (1.68) des Vektorraumes $\mathcal{L}_m$ nachzuweisen, was durch die Transformation (1.73) gelang, die den Differentialoperator $\mathcal{A}_m$ im Rahmen der Gustavson-Theorie diagonalisiert. $\mathcal{A}_m$ wurde mittels Gl. (1.73) auf Diagonalgestalt gebracht, weil diese Transformation die Hamilton-Matrix L diagonalisierte, und $\mathcal{A}_m$ gemäß Gl. (1.91) direkt aus L hervorgeht: $\mathcal{A}_m(\cdot) = D_{\boldsymbol{z}}(\cdot)\boldsymbol{\cdot} L\boldsymbol{z}$.

Wir übertragen diese Idee jetzt auf die magnetischen Flaschen. Im allgemeinen ist nicht zu erwarten, daß L diagonalisierbar ist. Wir können L aber immer in Jordansche Normalform (in ihrer komplexen Version) überführen. L und damit auch $\mathcal{A}_m$ werden dadurch in einem gewissen Sinne so einfach wie möglich, so daß sich diese Transformation als erster Schritt der Analyse anbietet.

Zunächst entkoppeln wir L in einen Anteil, der dem Gustavsonschen H_2

entspricht (gekennzeichnet durch die Frequenzen ω_ν), und in den Anteil der freien Bewegung, der durch die $\frac{1}{2}p_\nu^2$-Anteile der Hamilton-Funktion beschrieben wird. Dafür verwenden wir die $(2n,2n)$-Permutationsmatrix P:

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{i_{2n}}^T \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ l \\ n+1 \\ \vdots \\ n+l \\ l+1 \\ \vdots \\ n \\ n+l+1 \\ \vdots \\ 2n \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^{2n} \quad ; \tag{4.8}$$

die $\boldsymbol{e}_i$ sind die kanonischen Basisvektoren des $\mathbf{R}^{2n}$. Man überzeugt sich leicht davon, daß Linksmultiplikation einer $(2n,2n)$-Matrix L mit P die Zeilen von L in der folgenden Weise vertauscht: Die i_1-te Zeile wird zur ersten Zeile, die i_2-te Zeile wird zur zweiten Zeile usw. Rechtsmultiplikation von L mit P^T bewirkt entsprechend die Permutation der Spalten von L.

Die Anwendung von P auf die Hamilton-Matrix L ergibt:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= PLP^T \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{N} & 0 \\ 0 & \tilde{D} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.9a}$$

mit der $(2l,2l)$-Matrix $\tilde{N}$ und der $(2n-2l,2n-2l)$-Matrix $\tilde{D}$:

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} 0_l & \mathrm{id}_l \\ 0_l & 0_l \end{pmatrix} \tag{4.9b}$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0_{n-l} & \boxed{\begin{matrix} \omega_{l+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{l+2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_n \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} -\omega_{l+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\omega_{l+2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\omega_n \end{matrix}} & 0_{n-l} \end{pmatrix} \quad . \tag{4.9c}$$

Die damit erreichte Entkopplung der Anteile $\tilde{N}$ und $\tilde{D}$ von $\tilde{L}$ erleichtert die Jordanisierung von L erheblich, weil nun beide Teilmatrizen $\tilde{N}$ und $\tilde{D}$ getrennt auf Jordansche Normalform gebracht werden können. Auf die Matrix

$\tilde{N}$ muß dazu lediglich eine weitere Zeilen- und Spaltenpermutation angewandt werden, um die Einsen in die erste Nebendiagonale zu verschieben. $\tilde{D}$ wird durch eine zu Gl. (1.73) analoge Transformation diagonalisiert. Wir erhalten:

$$\tilde{\tilde{L}} = X^* \tilde{L} X \tag{4.10a}$$

mit

$$\tilde{\tilde{L}} = \operatorname{diag}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{l\text{-mal}}, i\omega_{l+1}, \ldots, i\omega_n, -i\omega_{l+1}, \ldots, -i\omega_n \Bigg) \tag{4.10b}$$

und

$$X^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_{l+1}^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{e}_{l+2}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_l^T \\ \boldsymbol{e}_{2l}^T \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\boldsymbol{e}_{2l+1}^T - i \boldsymbol{e}_{n+l+1}^T \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\boldsymbol{e}_{n+l}^T - i \boldsymbol{e}_{2n}^T \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-i\boldsymbol{e}_{2l+1}^T + \boldsymbol{e}_{n+l+1}^T \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-i\boldsymbol{e}_{n+l}^T + \boldsymbol{e}_{2n}^T \right) \end{pmatrix} . \tag{4.10c}$$

Insgesamt gilt dann für die Jordan-Normalform der Hamilton-Matrix L

$$\tilde{\tilde{L}} = M^* L M \tag{4.11a}$$

mit der in Gl. (4.10b) angegebenen Jordan-Matrix $\tilde{\tilde{L}}$ und der Transformationsmatrix

$$M^* = X^* P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_{n+1}^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{e}_{n+2}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_l^T \\ \boldsymbol{e}_{n+l}^T \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{e}_{l+1}^T - i\boldsymbol{e}_{n+l+1}^T\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{e}_n^T - i\boldsymbol{e}_{2n}^T\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i\boldsymbol{e}_{l+1}^T + \boldsymbol{e}_{n+l+1}^T\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i\boldsymbol{e}_n^T + \boldsymbol{e}_{2n}^T\right) \end{pmatrix}, \tag{4.11b}$$

die L in $\tilde{\tilde{L}}$ überführt. Die unitäre Matrix M geht durch Transposition und komplexe Konjugation aus M^* hervor: $M = P^T X$.

Wie Gl. (4.10b) zeigt, sind der nilpotente Anteil von $\tilde{\tilde{L}}$ durch die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der diagonalisierbare Anteil durch die Eigenwerte $\pm i\omega_\nu$ gekennzeichnet. Dementsprechend haben wir für den diagonalisierbaren Anteil D und den nilpotenten Anteil N von L:

$$D = \begin{pmatrix} 0_n & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \omega_{l+1} & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \omega_n \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\omega_{l+1} & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & -\omega_n \end{matrix}} & 0_n \end{pmatrix} \tag{4.12a}$$

$$N = \left(\begin{array}{cc} 0_n & \boxed{\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{array}} \\ 0_n & 0_n \end{array} \right) \quad , \tag{4.12b}$$

so daß wir die explizite Gestalt der Jordan-Chevalley-Zerlegung

$$L = D + S \tag{4.12c}$$

gefunden haben.

Mit Gl. (4.12a) ist dann auch der Nachweis erbracht, daß das von Dragt und Finn gefundene I_{DF} (siehe Gl. (1.106)) wirklich ein Integral der Bewegung für in DFS-Normalform befindliche Magnetflaschen-Hamilton-Funktionen ist, denn es gilt:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{DFS}}(\boldsymbol{z}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{z} \cdot \left(J^{-1} D \boldsymbol{z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{z} \cdot \left(\operatorname{diag}\left(0, \ldots, 0, \omega_{l+1}, \ldots, \omega_n, 0, \ldots, 0, \omega_{l+1}, \ldots, \omega_n\right) \boldsymbol{z}\right) \\ &= \sum_{\nu=l+1}^{n} \frac{\omega_\nu}{2} \left(z_\nu^2 + z_{n+\nu}^2\right) \\ &= I_{\mathrm{DF}}(\boldsymbol{z}) \quad . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Das formale Integral der Brown-Gabrielse-Magnetflasche ist demnach

$$I_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}\left(z_2^2 + z_4^2\right) = \frac{1}{2}\left(\rho^2 + p_\rho^2\right) \quad . \tag{4.14}$$

Wenn man lediglich an dem Integral der Bewegung für Magnetflaschen interessiert wäre, dann wären die oben dargestellten langwierigen Umformungen unnötig, denn einerseits kann man der Matrix $\tilde{L}$ schon fast „ansehen", wie ihr diagonalisierbarer Anteil beschaffen ist — auf diese Weise wird das Integral I_{DF} beispielsweise in [St91] gefunden. Andererseits könnte man auch die Ergebnisse des Anhanges A anwenden und damit I_{BG} sofort aus der Hamilton-Funktion (4.4) ablesen, ohne L überhaupt berechnen zu müssen.

Unabhängig von der Bestimmung des DFS-Integrals ist aber die durch M gegebene Koordinatentransformation ein nützliches Hilfsmittel für die Invertierung von $\mathcal{A}_m$, die für die Lösung von Gl. (4.6b) benötigt wird. Dies wird deutlich, wenn man die Transformation

$$\boldsymbol{z} \mapsto \tilde{\boldsymbol{z}} = M^* \boldsymbol{z} \tag{4.15}$$

durchführt. Der Operator $\mathcal{A}_m$, den wir in den neuen Koordinaten $\tilde{\boldsymbol{z}}$ mit $\tilde{\mathcal{A}}_m$ bezeichnen, ist nach dieser Transformation sehr viel einfacher, weil L durch (4.15) in das einfachere $\tilde{\tilde{L}}$ überführt wird.

Wir notieren $\mathcal{A}_m$ zunächst in den alten Koordinaten $\boldsymbol{z}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_m(\cdot) &= \{\cdot, H_2(\boldsymbol{z})\}\Big|_{\mathcal{L}_m} \\ &= \left[\sum_{\nu=1}^{l} z_{n+\nu}\frac{\partial}{\partial z_\nu}(\cdot) + \sum_{\nu=l+1}^{n} \omega_\nu \left(z_{n+\nu}\frac{\partial}{\partial z_\nu}(\cdot) - z_\nu \frac{\partial}{\partial z_{n+\nu}}(\cdot)\right)\right]_{\mathcal{L}_m} . \quad (4.16)\end{aligned}$$

Die Anwendung der Transformation (4.15) ergibt dann nach einer Rechnung, die völlig analog zu der Berechung von $\tilde{\mathcal{A}}_m$ in Gl. (1.74) verläuft:

$$\tilde{\mathcal{A}}_m = \left[\sum_{\nu=1}^{l} \tilde{z}_{2\nu}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}_{2\nu-1}} + \sum_{\nu=l+1}^{n} i\omega_\nu \left(\tilde{z}_{l+\nu}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}_{l+\nu}} - \tilde{z}_{n+\nu}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}_{n+\nu}}\right)\right]_{\mathcal{L}_m} . \quad (4.17)$$

Durch (4.15) ist mit L auch $\mathcal{A}_m$ „so weit wie möglich diagonalisiert“ worden, wie man der zweiten Summe entnehmen kann. Wir gehen auf Seite 106 anhand eines Beispiels genauer auf diese Eigenschaft von $\tilde{\mathcal{A}}_m$ ein.

Um uns ein genaueres Bild von der Wirkungsweise von $\tilde{\mathcal{A}}_m$ zu verschaffen, wenden wir den Operator auf einen der Basisvektoren $\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}$ von $\mathcal{L}_m$ an:

$$\tilde{\mathcal{A}}_m\left(\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}\right) = \sum_{\nu=1}^{l} j_{2\nu-1}\frac{\tilde{z}_{2\nu}}{\tilde{z}_{2\nu-1}}\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}} + \sum_{\nu=l+1}^{n} i\omega_\nu\left(j_{\nu+l} - j_{\nu+n}\right)\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}} . \quad (4.18)$$

Wir interpretieren für das Folgende die Basisvektoren $\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}$ von $\mathcal{L}_m$ als die kanonischen Basisvektoren des $\mathbf{C}^d$ mit $d = \binom{2n+m-1}{2n-1}$ und sehen dementsprechend $\tilde{\mathcal{A}}_m$ als die (d,d)-Matrix, die die Elemente von $\mathbf{C}^d$ gemäß Gl. (4.18) abbildet. Der Einfachheit halber bezeichnen wir also den Differentialoperator $\tilde{\mathcal{A}}_m$ und seine Matrixdarstellung mit dem gleichen Symbol $\tilde{\mathcal{A}}_m$. Gl. (4.18) besagt dann, daß der zweite Summand den Eintrag $\sum_{\nu=l+1}^{n} i\omega_\nu\left(j_{\nu+l} - j_{\nu+n}\right)$ auf der Diagonalen der Matrix ergibt, wohingegen der erste Summand mehrere von null verschiedene Außerdiagonalkomponenten von $\tilde{\mathcal{A}}_m$ zur Folge hat.

Bevor wir $\tilde{\mathcal{A}}_m$ weiter analysieren können, müssen wir noch festlegen, in welcher Reihenfolge die Monome $\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}$ den kanonischen Basisvektoren des $\mathbf{C}^d$ zugeordnet werden. Wir können diese Zuordnung beliebig wählen. Dabei ist zu beachten, daß eine geeignete Zuordnung die Matrixdarstellung von $\tilde{\mathcal{A}}_m$ entscheidend vereinfachen kann. Aus [Gu66] ist die *Gustavson-Anordnung* der Monome $\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}$ bekannt: $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{0}} \equiv 1$ bekommt den Gustavson-Index $k(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{0}}) = 1$. Für $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{l} \in \mathbf{N}_0^{2n}$ definiert man $k(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}}) > k(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{l}})$, wenn es ein $i_0 > 0$ gibt, so daß $j_{i_0} > l_{i_0}$ und $j_i = l_i$ für alle $0 < i < i_0$ gilt. Mit dieser Abbildungsvorschrift erhält man einen bijektiven Zusammenhang zwischen den Monomen $\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}$ aus $\mathcal{L}$

und den natürlichen Zahlen k. Für die Monome vom Grad $0 < m < 4$ haben wir diese Zuordnung in Tabelle 4.1 angegeben. (Außer dem Gustavson-Index k ist dort auch der „Magnetflaschenindex“ κ tabelliert, den wir weiter unten einführen werden.)

Mit den Gustavson-Indizes ist dann eine Anordnung der Monome in $\mathcal{L}_m$ gegeben, die wir zum Beispiel verwenden können, um $\tilde{\mathcal{A}}_m$ in Matrixgestalt zu schreiben. Als ein Beispiel geben wir die Matrixdarstellung von $\tilde{\mathcal{A}}_3$ im Fall $n = 2$, $l = 1$ an. Für diesen Wert von n ist $d = \dim(\mathcal{L}_3) = \binom{6}{3} = 20$. Wir verwenden hier die Abkürzung $\omega := \omega_2$ und schreiben Nullen, die nicht auf der Diagonalen liegen, nicht aus:

$$\tilde{\mathcal{A}}_3 = \begin{pmatrix}
-3i\omega &&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
& -i\omega &&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&& i\omega &&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&& 3i\omega &&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&& -2i\omega &&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
&&&&& 0 &&&&& 1 &&&&&&&&& \\
&&&&&& 2i\omega &&&&& 1 &&&&&&&& \\
&&&&&&& -i\omega &&&&& 1 &&&&&&& \\
&&&&&&&& i\omega &&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&&&&&& 0 &&&&& 1 &&&&& \\
&&&&&&&&&& -2i\omega &&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&& 0 &&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&& 2i\omega &&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&& -i\omega && 2 &&&& \\
&&&&&&&&&&&&&& i\omega && 2 &&& \\
&&&&&&&&&&&&&&& 0 && 2 && \\
&&&&&&&&&&&&&&&& -i\omega &&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&& i\omega && \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&& 0 & 3 \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&& 0
\end{pmatrix} . \tag{4.19}$$

Man vergleiche diese Matrix, die nur sehr wenige von null verschiedene Einträge abseits der Hauptdiagonalen aufweist, mit der Formel (4.16) für $\mathcal{A}_3$ in den ursprünglichen Koordinaten $\boldsymbol{z}$. Gl. (4.16) impliziert, daß kein Eintrag der Matrix, die $\mathcal{A}_m$ darstellt, auf der Diagonalen liegt. Dagegen haben wir durch die Transformation (4.15) fast alle Einträge auf der Diagonalen von $\tilde{\mathcal{A}}_m$ versammelt.

Darüber hinaus ist $\tilde{\mathcal{A}}_m$ für alle n, l und m eine rechte obere Dreiecksmatrix, wenn man die Gustavsonsche Monom-Indizierung zugrunde legt. Man erkennt diese Eigenschaft anhand von Gl. (4.18). Der zweite Summand in dieser Gleichung ergibt einen Beitrag auf der Diagonalen von $\tilde{\mathcal{A}}_m$, wie wir schon früher erkannt haben. Der erste Summand führt auf Beiträge der Form

$$j_{2\nu-1} \frac{\tilde{z}_{2\nu}}{\tilde{z}_{2\nu-1}} \tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}} = j_{2\nu-1} \tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{l}}$$

mit

$$\boldsymbol{l} = \left(j_1, \ldots, j_{2\nu-2}, j_{2\nu-1} - 1, j_{2\nu} + 1, j_{2\nu+1}, \ldots, j_{2n}\right)^T \quad ,$$

$\boldsymbol{j}^T$	$k(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}})$	$\kappa(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}})$	$\boldsymbol{j}^T$	$k(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}})$	$\kappa(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}})$
(0,0,0,0)	1	1	(0,0,0,4)	36	36
(0,0,0,1)	2	2	(0,0,1,3)	37	37
(0,0,1,0)	3	3	(0,0,2,2)	38	38
(0,1,0,0)	4	4	(0,0,3,1)	39	39
(1,0,0,0)	5	5	(0,0,4,0)	40	40
(0,0,0,2)	6	6	(0,1,0,3)	41	41
(0,0,1,1)	7	7	(0,1,1,2)	42	43
(0,0,2,0)	8	8	(0,1,2,1)	43	45
(0,1,0,1)	9	9	(0,1,3,0)	44	47
(0,1,1,0)	10	11	(0,2,0,2)	45	49
(0,2,0,0)	11	13	(0,2,1,1)	46	52
(1,0,0,1)	12	10	(0,2,2,0)	47	55
(1,0,1,0)	13	12	(0,3,0,1)	48	58
(1,1,0,0)	14	14	(0,3,1,0)	49	62
(2,0,0,0)	15	15	(0,4,0,0)	50	66
(0,0,0,3)	16	16	(1,0,0,3)	51	42
(0,0,1,2)	17	17	(1,0,1,2)	52	44
(0,0,2,1)	18	18	(1,0,2,1)	53	46
(0,0,3,0)	19	19	(1,0,3,0)	54	48
(0,1,0,2)	20	20	(1,1,0,2)	55	50
(0,1,1,1)	21	22	(1,1,1,1)	56	53
(0,1,2,0)	22	24	(1,1,2,0)	57	56
(0,2,0,1)	23	26	(1,2,0,1)	58	59
(0,2,1,0)	24	29	(1,2,1,0)	59	63
(0,3,0,0)	25	32	(1,3,0,0)	60	67
(1,0,0,2)	26	21	(2,0,0,2)	61	51
(1,0,1,1)	27	23	(2,0,1,1)	62	54
(1,0,2,0)	28	25	(2,0,2,0)	63	57
(1,1,0,1)	29	27	(2,1,0,1)	64	60
(1,1,1,0)	30	30	(2,1,1,0)	65	64
(1,2,0,0)	31	33	(2,2,0,0)	66	68
(2,0,0,1)	32	28	(3,0,0,1)	67	61
(2,0,1,0)	33	31	(3,0,1,0)	68	65
(2,1,0,0)	34	34	(3,1,0,0)	69	69
(3,0,0,0)	35	35	(4,0,0,0)	70	70

Tabelle 4.1: Gustavson-Index $k(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}})$ und Magnetflaschenindex $\kappa(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}})$ der Monome $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{j}}$ vom Grad 0 bis 4 ($n = 2$).

so daß gilt:

$$k(\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{l}}) < k(\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}) \quad .$$

Obwohl demnach $\tilde{\mathcal{A}}_m$ eine Dreiecksmatrix ist, können wir das lineare Gleichungssystem (4.6b) nicht einfach durch gewöhnliches Rückwärtseinsetzen lösen, indem wir zuerst die $(2n)$-te Gleichung lösen, dann die $(2n-1)$-te usw. Denn die Diagonalelemente der Matrix sind nicht sämtlich von null verschieden, was während des Rückwärtseinsetzens dazu führt, daß man einige Komponenten des Lösungsvektors *wählen* muß. Erst bei nachfolgenden Schritten des Verfahrens erweist sich dann, ob diese Wahl sinnvoll war oder zu Widersprüchen führt[1]. Es kann also a priori kein konsistentes Lösungsverfahren für eine Matrix der hier vorliegenden Form angegeben werden, wenn man nicht wie beim Gaußschen Verfahren eliminieren möchte. Dies wollen wir wegen des erforderlichen großen Aufwandes aber gerade vermeiden.

Die Lösung des Problems gelingt durch die Einführung einer anderen Anordnung der Monome von $\mathcal{L}_m$. Wir nennen diese Variation der Gustavsonschen Zuordnung die *Magnetflaschenanordnung* der Monome von $\mathcal{L}_m$, weil sie dem Operator $\tilde{\mathcal{A}}_m$, der sich aus einer Magnetflaschen-Hamilton-Funktion ergibt, angepaßt ist.

Die dem Folgenden zugrunde liegende Idee besteht darin, daß die Lösung einer linearen Gleichung $\tilde{\mathcal{A}}_m(F_m) = H''_m$ einfach und mit geringem Aufwand gelingt, wenn die einzigen von null verschiedenen Einträge der (d,d)-Matrix $\tilde{\mathcal{A}}_m$ auf der Haupt- und der ersten oberen Nebendiagonalen liegen. In diesem Fall kann man die einzelnen Gleichungen durch ein dem Rückwärtseinsetzen ähnliches Verfahren mit sehr wenigen (nämlich $\mathcal{O}(d)$) Rechenoperationen lösen, ohne daß dabei Inkonsistenzen auftreten können. Wir gehen hier nicht näher auf dieses Verfahren ein, denn obwohl es sehr einfach ist, wäre seine Darstellung an dieser Stelle wenig instruktiv. Wie wir sehen werden, nimmt $\tilde{\mathcal{A}}_m$ für die Magnetflaschenanordnung der Monome $\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}$ die beschriebene Gestalt an, so daß wir das Problem der Invertierung von $\tilde{A}_m$ bzw. der Lösung von Gl. (4.6b) einfach und schnell lösen können.

Diese Vorgehensweise hat allerdings den Nachteil, daß wir uns bei der Einführung der Magnetflaschen-Anordnung auf den Fall $l = 1$ beschränken müssen. Für $l = 1$ erhalten wir aus Gl. (4.18)

$$\tilde{\mathcal{A}}_m\left(\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}\right) = j_1 \frac{\tilde{z}_2}{\tilde{z}_1} \tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}} + \sum_{\nu=2}^{n} i\omega_\nu \left(j_{\nu+l} - j_{\nu+n}\right) \tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}} \quad . \tag{4.20}$$

[1] Ein Beispiel für diese Problematik findet sich in Gl. (4.19). Wenn man durch Rückwärtseinsetzen die Gleichung $\tilde{\mathcal{A}}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h}$ lösen will, hat man im ersten Schritt f_{20} willkürlich zu wählen. Im darauffolgenden Schritt muß die Gleichung $0 \cdot f_{19} + 3 \cdot f_{20} = h_{19}$ erfüllt sein. Ob diese Gleichung tatsächlich gilt, hängt aber offensichtlich von (dem vorher *gewählten*) f_{20} ab.

Der den Gustavson-Index $k(\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}})$ ersetzende *Magnetflaschenindex* $\kappa(\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}})$ wird durch die folgende Konstruktionsvorschrift definiert:

1. Für Monome vom Grad m beginnt man jeweils mit $\boldsymbol{j} = (0, \ldots, 0, m)^T$ und setzt

$$\kappa(\tilde{z}_{2n}^{m}) = \dim \mathcal{L}_0 + \dim \mathcal{L}_1 + \cdots + \dim \mathcal{L}_{m-1} + 1 \quad , \tag{4.21}$$

   ebenso wie bei den Gustavsonschen Indizes k.

2. (a) Der Nachfolger $\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{l}}$ des Monoms $\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}$ (d.h. $\kappa(\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{l}}) = \kappa(\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}) + 1$) wird ebenso bestimmt wie bei Gustavson, es sei denn, es gilt $j_2 \neq 0$; in diesem Fall gehen wir zu Punkt 2b über.

   (b) Wenn $j_2 \neq 0$ ist, dann definieren wir den Nachfolger von $\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}$ als $\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{l}}$ mit $\boldsymbol{l} = (j_1 + 1, j_2 - 1, j_3, \ldots, j_{2n})^T$. Dieser Punkt 2b wird solange wiederholt, bis $j_2 = 0$ ist. Dann gehen wir zurück zu Punkt 2a und verwenden dort als Ausgangspunkt dasjenige $\boldsymbol{j}$, das beim letzten Übergang von Punkt 2a nach Punkt 2b übergeben wurde.

Es kommt natürlich vor, daß man nach der Regel 2a ein Monom erhält, das schon vorher gemäß Regel 2b eingeordnet wurde. In diesem Fall geht man sofort zum (im Gustavsonschen Sinn) nachfolgenden Monom über und wendet wieder Regel 2a an.

Auf diese Weise erhält man eine gegenüber Gustavson abgewandelte Anordnung der Monome. Der Zusammenhang zwischen $\tilde{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{j}}$ und κ ist bijektiv, wie wir es zu fordern haben. Man vergleiche Tabelle 4.1 für eine Gegenüberstellung der k- und κ-Indizes der Monome vom Grad 0 bis 4.

Wie wir es beabsichtigt haben, liegt die Wirkung der zusätzlich eingeführten Regel 2b darin, daß bei Verwendung der Magnetflaschenanordnung alle Außerdiagonalelemente von $\tilde{\mathcal{A}}_m$ auf der ersten oberen Nebendiagonalen zu liegen kommen. Wir demonstrieren diese Eigenschaft wiederum anhand von $\tilde{\mathcal{A}}_3$. Bei Verwendung der Magnetflaschenindizes gilt:

$$\tilde{\mathcal{A}}_3 = \begin{pmatrix}
-3i\omega \\
& -i\omega \\
& & i\omega \\
& & & 3i\omega \\
& & & & -2i\omega & 1 \\
& & & & & -2i\omega \\
& & & & & & 0 & 1 \\
& & & & & & & 0 \\
& & & & & & & & 2i\omega & 1 \\
& & & & & & & & & 2i\omega \\
& & & & & & & & & & -i\omega & 1 \\
& & & & & & & & & & & -i\omega & 2 \\
& & & & & & & & & & & & -i\omega \\
& & & & & & & & & & & & & i\omega & 1 \\
& & & & & & & & & & & & & & i\omega & 2 \\
& & & & & & & & & & & & & & & i\omega \\
& & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 2 \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 3 \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix} . \tag{4.22}$$

Man vergleiche diese Matrix mit der Darstellung in Gl. (4.19).

Mit dem in dieser Gestalt vorliegenden $\tilde{\mathcal{A}}_m$ ist es nun vergleichsweise einfach, die für die Normalformtransformation entscheidende Gl. (4.6b) zu lösen und die Erzeugende F_m zu bestimmen. Darüber hinaus bietet die Darstellung von $\tilde{\mathcal{A}}_m$ mittels der Magnetflaschenanordnung noch in einer anderen Hinsicht einen wesentlichen Vorteil: In dieser Darstellung ist es besonders einfach, eine Basis der Untervektorräume $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}_m^*)$ und $\mathrm{Im}\,(\mathcal{A}_m)$ zu berechnen[2]. Wir benötigen diese Basen, um den Grad m-Anteil H_m der Hamilton-Funktion gemäß Gl. (4.5) aufspalten zu können — eine unabdingbare Voraussetzung für die Aufstellung und Lösung der homologischen Gleichung.

Wir haben jetzt die für eine effiziente Normalisierung von $H(\boldsymbol{z})$ benötigten Hilfsmittel bereitgestellt. Wir merken an dieser Stelle noch einmal an, daß der Durchführung der Normalformtransformation auch dann nichts im Wege steht, wenn die in diesem Abschnitt gemachten Annahmen (Magnetflaschen-Hamilton-Funktion, $l = 1$) nicht zutreffen. Man muß dann aber, bedingt durch die hohe Dimension von $\mathcal{L}_m$, großen numerischen Aufwand in Kauf nehmen, den wir hier vermeiden konnten.

Schließlich stellen wir fest, daß die in diesem Abschnitt besprochene Problematik im Fall der Gustavsonschen Normalform irrelevant ist. Das Gustavsonsche H_2 stellt den Grenzfall des Magnetflaschen-H_2 mit $l = 0$ dar. Wenn $l = 0$ ist, dann ist $\tilde{\mathcal{A}}_m$ schon diagonal, wie wir in Abschnitt 1.2.2 gesehen

[2] Die Berechnung einer Basis von $\mathrm{Im}(\tilde{\mathcal{A}}_m)$ gelingt beispielsweise durch die Anwendung des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens [Fi86] auf die Spaltenvektoren von $\tilde{\mathcal{A}}_m$.

haben. Sowohl die Invertierung von $\tilde{\mathcal{A}}_m$ als auch die Zerlegung von $\mathcal{L}_m$ in Kern- und Bildvektorraum von $\mathcal{A}_m$ sind dann vergleichsweise triviale Aufgaben. Man vergleiche hierzu die Gln. (1.79) und (1.80).

4.1.2 Berechnung des Quasiintegrals

Wir haben ein umfangreiches Computerprogramm entwickelt, das die DFS-Normalformentheorie anwendet und dabei die Überlegungen des Abschnitts 4.1.1 berücksichtigt. Damit sind wir in der Lage, beliebige Hamilton-Funktionen des Magnetflaschen-Typs (4.4) mit $l = 1$ auf DFS-Normalform zu transformieren und das Quasiintegral $I_{\rm DFS}^{(m)}$ zu berechnen.

Mit Hilfe dieses Programmes gelang es uns, die Hamilton-Funktion der Brown-Gabrielse-Magnetflasche auf DFS-Normalform bis zum Grad vierzehn zu transformieren und das entsprechende formale Integral $I_{\rm BG}$ ebenfalls bis zur vierzehnten Ordnung einschließlich zu berechnen[3]. Dies ist die höchste Ordnung aller uns bekannten Normalformtransformationen. Nur in [KaRo92] wird bis zu ebenso hohen Graden normalisiert. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß das dort betrachtete Hénon-Heiles-System durch eine Hamilton-Funktion vom Gustavson-Typ (1.61) beschrieben wird, wodurch der für die Transformation auf Normalform notwendige Rechenaufwand erheblich geringer als bei dem hier diskutierten System ist (vgl. S. 110).

Der Nomenklatur des Abschnitts 1.2.4 entsprechend nennen wir die auf DFS-Normalform gebrachte Hamilton-Funktion der Brown-Gabrielse-Magnetflasche $G_{\rm BG}$. Als Resultat unserer Rechnungen erhalten wir die Potenzreihendarstellung von $G_{\rm BG}$ bis zum Grad 14; $G_{\rm BG}^{(14)}$ besteht aus 103 Monomen. Das daraus durch Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten berechnete Quasiintegral $I_{\rm BG}^{(14)}$ setzt sich aus 415 Summanden zusammen. Wir geben hier nur die Terme zweiter bis vierter Ordnung dieser Potenzreihen an und verweisen für die vollständige Auflistung aller Terme auf Anhang D.

$$
\begin{aligned}
G_{\rm BG}(\rho, z, p_\rho, p_z) \;=\;& 0.5p_z^2 + 0.5p_\rho^2 + 0.5\rho^2 - 0.046875p_\rho^4 \\
& - 0.09375\rho^2 p_\rho^2 - 0.046875\rho^4 + 0.25z^2 p_\rho^2 + 0.25z^2\rho^2 \\
& + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^6\right) \quad . \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{\rm BG}(\rho, z, p_\rho, p_z) \;=\;& 0.5p_\rho^2 + 0.5\rho^2 + 0.046875p_\rho^4 + 0.125p_z^2 p_\rho^2 \\
& + 0.09375\rho^2 p_\rho^2 - 0.125\rho^2 p_z^2 - 0.078125\rho^4 + 0.5z\rho p_z p_\rho
\end{aligned}
$$

[3] Da die im folgenden auftretenden Quasiintegrale sämtlich vom DFS-Typ sind, schreiben wir von nun an den Index DFS nicht mehr aus. Statt dessen indizieren wir das Integral der Brown-Gabrielse-Magnetflasche mit BG, das der Dragt-Finnschen Mirror Machine mit DF usw.

$$-0.25z^2p_\rho^2 + 0.25z^2\rho^2 + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^6\right) \quad . \tag{4.24}$$

In diesem Zusammenhang ist es interessant, wie unterschiedlich komplex die auftretenden Polynome sind. Für diese Überlegung betrachten wir die Normalformtransformation von dem auf Seite 39 besprochenen „passiven" Standpunkt. Wir bezeichnen die ursprünglichen Koordinaten mit $\boldsymbol{z}$ und die neuen Koordinaten, in denen die Hamilton-Funktion in DFS-Normalform ist, mit $\tilde{\boldsymbol{z}}$. Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Monome an, die jeweils zur Darstellung der Hamilton-Funktion bzw. des formalen Integrals der Bewegung (bis zum Grad 14 einschließlich) benötigt werden.

Koordinaten	Hamilton-Funktion	formales Integral
$\boldsymbol{z}$	8	415
$\tilde{\boldsymbol{z}}$	103	2

Wir gehen von einer einfachen Hamilton-Funktion H_{BG} aus und transformieren sie in eine viel kompliziertere Hamilton-Funktion G_{BG} mit 103 Summanden. Aus dieser extrahieren wir das sehr einfache formale Integral I_{BG}, das in den $\tilde{\boldsymbol{z}}$-Koordinaten aus lediglich zwei Summanden besteht, aber durch die Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten $\boldsymbol{z}$ sehr kompliziert wird und nun von 415 Monomen gebildet wird.

Die Attribute „einfach" und „kompliziert" beziehen sich hier nur auf die funktionale Gestalt der Polynome. Man könnte natürlich fragen, inwiefern der Übergang von H_{BG} zu einer viel komplizierteren Hamilton-Funktion G_{BG} eine Vereinfachung (im eigentlichen Sinn) des betrachteten dynamischen Systems bedeutet — denn Vereinfachung ist ja das Generalthema der Normalformentheorie (siehe zum Beispiel Seite 7ff). Die Auflösung dieses scheinbaren Widerspruches liegt darin, daß analytische Einfachheit im allgemeinen nicht dynamische Einfachheit impliziert — und umgekehrt. Die dynamische Einfachheit der komplizierten Normalform beruht darauf, daß für G_{BG} ein zweites (formales) Integral in Gestalt des diagonalisierbaren Anteils von G_2 leicht zu finden ist. In diesem Sinn befindet sich für ein normalisiertes Hamilton-System (mit zwei Freiheitsgraden der Bewegung) die maximale dynamische Information schon im *linearen* Anteil der kanonischen Bewegungsgleichungen. In einem übertragenem Sinn werden wir somit Poincarés Anspruch nach der vollständigen Linearisierung der Bewegungsgleichungen (siehe Seite 12) gerecht. Man vergleiche auch die Diskussion in Abschnitt 1.2.4.

Wir führen noch einige Besonderheiten des Resultates (4.23,4.24) an.

Wie wir im Zusammenhang mit Gl. (1.71b) erläutert haben, ist F_m durch die Gleichung $\mathcal{A}_m(F_m) = H''_m$ nicht eindeutig festgelegt — man kann jeweils einen beliebigen Summanden $K_m \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_m)$ zu F_m hinzuaddieren. Um trotzdem eine eindeutige Normalformtransformation (die ja durch F_m definiert ist) zu erhalten, haben wir im Laufe der Berechnungen F_m stets aus dem Bildvektorraum von $\mathcal{A}^*_m$ gewählt. Unter dieser zusätzlichen Bedingung wird auch das Quasiintegral (4.24) eindeutig.

I_{BG} ist eine gerade Funktion, weil schon die Hamilton-Funktion H_{BG} eine gerade Funktion ist. Für den Grad $m = 2k+1$, $k > 1$ ist für H_{BG} die homologische Gleichung (1.66a) trivial, und wir erhalten als Erzeugende $F_{2k+1} = 0$. In der Nomenklatur von Abschnitt 1.2 gilt dann $G_{2k+1} = H_{2k+1} = 0$.

Da wir die Berechnungen in doppelter Genauigkeit durchgeführt haben, sind die numerischen Werte der Koeffizienten in Gl. (4.23,4.24) sehr genau. Die Berechnung der Poisson-Klammer von H_{BG} und $I^{(14)}_{\mathrm{BG}}$ — die verschwinden muß, weil I_{BG} ein formales Integral für das Brown-Gabrielse-System ist — zeigt, daß numerische Fehler in den Koeffizienten frühestens ab der zwölften Dezimale auftreten. Die meisten Koeffizienten sind aber noch erheblich genauer bekannt.

Stegemertens Satz 1.4 stellt lediglich sicher, daß I_{BG} ein formales Integral der Bewegung für das Brown-Gabrielse-System ist. Er macht keine Aussage darüber, ob I_{BG} auch *unabhängig* von der Hamilton-Funktion H_{BG} ist. (Man vergleiche hierzu die Fußnote auf Seite 35.) Zwar ist I_{BG} nach Konstruktion in Involution mit H_{BG}, aber über die lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Gradienten dieser beiden Funktionen können wir keine Aussage machen. Man kann aber trotzdem dahingehend spekulieren, daß I_{BG} und die Hamilton-Funktion tatsächlich unabhängig voneinander sind: Die Potenzreihenentwicklung von I_{BG} unterscheidet sich kraß von dem Polynom H_{BG}, so daß es ein großer Zufall wäre, wenn $I^{(m)}_{\mathrm{BG}}$ ausgerechnet gegen eine Funktion konvergierte, deren Gradient ein Vielfaches des Gradienten der Hamilton-Funktion ist. Wir gehen deswegen im Zuge der folgenden Diskussion davon aus, daß die beiden Integrale H_{BG} und I_{BG} voneinander unabhängig sind.

In den folgenden Abschnitten 4.2 und 4.3 werden wir die Eigenschaften von I_{BG} eingehend untersuchen.

4.2 Lokale Analyse des Quasiintegrals

Die charakteristische Eigenschaft eines Integrals der Bewegung ist seine Konstanz entlang von Trajektorien im Phasenraum. Bei einem *formalen* Integral der Bewegung ist dieses Verhalten im allgemeinen nicht zu erwarten, wie wir in Abschnitt 1.2.4 besprochen haben. Es ist keineswegs sichergestellt, daß die Potenzreihenentwicklung für das Integral, die wir als Resultat der Normalformtransformation erhalten, mit wachsendem Approximationsgrad m konvergiert. Wenn das formale Integral I_{DFS} unabhängig von H und das System nichtintegrabel ist — was in der Regel der Fall ist — dann darf die normalisierende Transformation nicht konvergieren, denn dies stünde im Widerspruch zur Nichtintegrabilität. Mit anderen Worten: Das formale Integral stellt den Versuch dar, ein Integral zu approximieren, das gegebenenfalls gar nicht existiert. Trotzdem kann auch ein divergentes formales Integral die Situation im Phasenraum mit hoher Genauigkeit widerspiegeln [Mo68]. Wir werden diese Tatsache anhand von I_{BG} ausführlich belegen.

Eine weitere Komplikation ergibt sich dadurch, daß uns im Rahmen dieser Theorie nur *Quasiintegrale* zugänglich sind. Wir können die Transformation auf Normalform nur bis zu einem endlichen Grad $m_{\max}$ durchführen und erhalten dementsprechend prinzipiell nur eine Näherung des formalen Integrals. Dieser Umstand erschwert die Analyse des formalen Integrals, denn selbst wenn man für die Folge von Quasiintegralen $I^{(m)}$, $2 \leq m \leq m_{\max}$ Konvergenz nachweisen kann, hat man im allgemeinen keine Möglichkeit, Aussagen auch für $m > m_{\max}$ zu machen. Divergenz für größere m als $m_{\max}$ kann also nicht ad hoc ausgeschlossen werden.

Vor diesem Hintergrund führen wir eine neue Bezeichnungsweise ein, die für die Untersuchung der Konvergenzeigenschaften von $I^{(m)}$ nützlich ist: Wir beschränken den Begriff „Konvergenz" auf den uns zugänglichen Wertebereich von m und nennen ein Quasiintegral $I^{(m)}(\boldsymbol{z})$ *konvergent* an der Stelle $\boldsymbol{z}$, wenn dort

$$\left|I^{(2m+2)}(\boldsymbol{z}) - I^{(2m)}(\boldsymbol{z})\right| \leq \left|I^{(2m)}(\boldsymbol{z}) - I^{(2m-2)}(\boldsymbol{z})\right| \quad \text{für} \quad 1 < m < \frac{m_{\max}}{2} \tag{4.25}$$

gilt. Anderenfalls heißt $I^{(m)}(\boldsymbol{z})$ *divergent*. Bei dieser Definition haben wir berücksichtigt, daß $I^{(m)}$ eine gerade Funktion ist und wir ungerade Polynomgrade m deshalb nicht einbeziehen müssen.

Wir untersuchen jetzt die Qualität des in Abschnitt 4.1.2 hergeleiteten Quasiintegrals $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$. Vorab erinnern wir daran, daß wir in Kapitel 3 die Nichtintegrabilität des Brown-Gabrielse-Systems nachgewiesen haben. Weil dieses autonome Hamilton-System zwei Freiheitsgrade der Bewegung hat und mit H_{BG} schon ein erstes Integral der Bewegung bekannt ist, kann kein zweites, von H_{BG} unabhängiges Integral existieren. Wenn das nach der DFS-Theorie berechnete formale Integral unabhängig von der Hamilton-Funktion ist, dann muß demnach I_{BG} bei allen Energien E und für alle $\boldsymbol{z}$ divergieren — im gewöhnlichen Sinn des Begriffes Divergenz. Im Sinn von Gl. (4.25) ist aber immer noch Konvergenz des Quasiintegrals möglich. Wir zeigen im folgenden, daß sie bei bei niedrigen Energien die Regel ist und auch bei höheren

Energien nicht ausgeschlossen werden kann.

Im ersten Schritt der Analyse von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ prüfen wir, inwieweit diese Polynome entlang den Lösungskurven der kanonischen Gleichungen (3.6) konstant sind. Das hierfür benutzte Verfahren wird beispielsweise auch in [DrFi79, St91] angewandt.

Das Quasiintegral $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ ist eine Funktion der Phasenraumkoordinaten ρ, z, p_ρ und p_z. Indem wir einen Punkt des Phasenraumes — der Einfachheit halber betrachten wir nur Punkte $\boldsymbol{s} = (z, p_z)^T$ aus der Poincaré-Fläche $\Sigma_E \subset \mathbf{R}^4$ — als Startwert einer Trajektorie ansehen, diese durch numerische Integration berechnen und dann $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ längs der Trajektorie auswerten, erhalten wir das Quasiintegral als Funktion der Zeit:

$$I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t; \boldsymbol{s}) := I_{\mathrm{BG}}^{(m)}\left(\Phi_t(\boldsymbol{s})\right) \quad . \tag{4.26}$$

In der Regel variiert $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t; \boldsymbol{s})$ für alle $\boldsymbol{s}$ als Funktion der Zeit, denn selbst wenn I_{BG} ein (nicht nur formales) Integral der Bewegung ist, kann man erst im Grenzübergang $m \to \infty$ erwarten, daß das Quasiintegral $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ konstant wird. Um so eher gehen wir auch im Fall der Nichtkonvergenz davon aus, daß $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t; \boldsymbol{s})$ zeitlich oszilliert. Divergenz im Sinn von Gl. (4.25) zeigt sich dann meistens dadurch, daß die Amplitude dieser Oszillationen mit m anwächst. Es ist aber auch möglich, daß das Quasiintegral zunächst im Sinn von Gl. (4.25) konvergiert und erst für größere m divergent wird.

In den Abbildungen 4.1 bis 4.6 haben wir jeweils das Quasiintegral der Brown-Gabrielse-Magnetflasche als Funktion der Zeit in verschiedenen Approximationen ($m = 2, 4, \ldots, 14$) dargestellt; dabei wurden die Energie E und der Startwert $\boldsymbol{s}$ systematisch variiert. Offensichtlich hängen die Konvergenzeigenschaften der Quasiintegrale empfindlich sowohl von der Energie (also dem Systemparameter, dessen Erhöhung zu sich ausbreitendem Chaos führt), als auch von dem Startpunkt $\boldsymbol{s}$ der betrachteten Trajektorie ab. Diese Tatsache steht in enger Analogie zu den Eigenschaften der Poincaré-Abbildung, die ebenfalls in Abhängigkeit von E und $\boldsymbol{s}$ reguläre oder chaotische Dynamik zeigt, wie man den Poincaré-Schnitten in Abschnitt 3.2.2 entnehmen kann.

Die Abbildungen 4.1, 4.2 und 4.3 zeigen, bei jeweils gleicher Energie $E = 0.01$, schnelle Konvergenz des Quasiintegrals, langsame Konvergenz beziehungsweise Divergenz von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t; \boldsymbol{s})$. Bei der gleichen Energie ergibt sich demnach ein ganz unterschiedliches Konvergenzverhalten, je nachdem, wie weit der Startpunkt der Trajektorie vom Ursprung der Poincaré-Fläche entfernt ist.

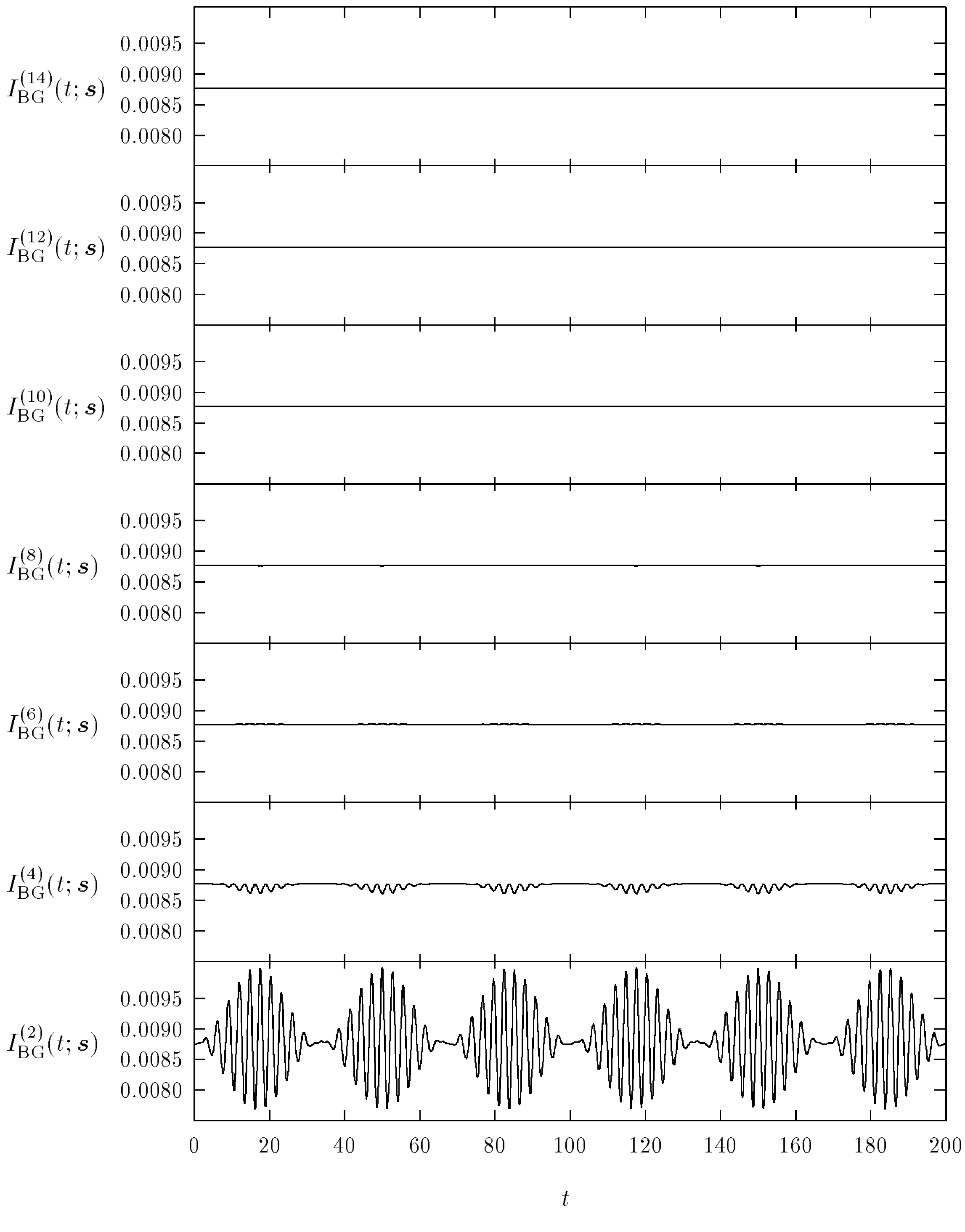


Abbildung 4.1: Quasiintegral $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$ der Brown-Gabrielse-Magnetflasche als Funktion der Zeit; $E = 0.01$, $m = 2, 4, \ldots, 14$, $\boldsymbol{s} = (0, 0.05)^T$.

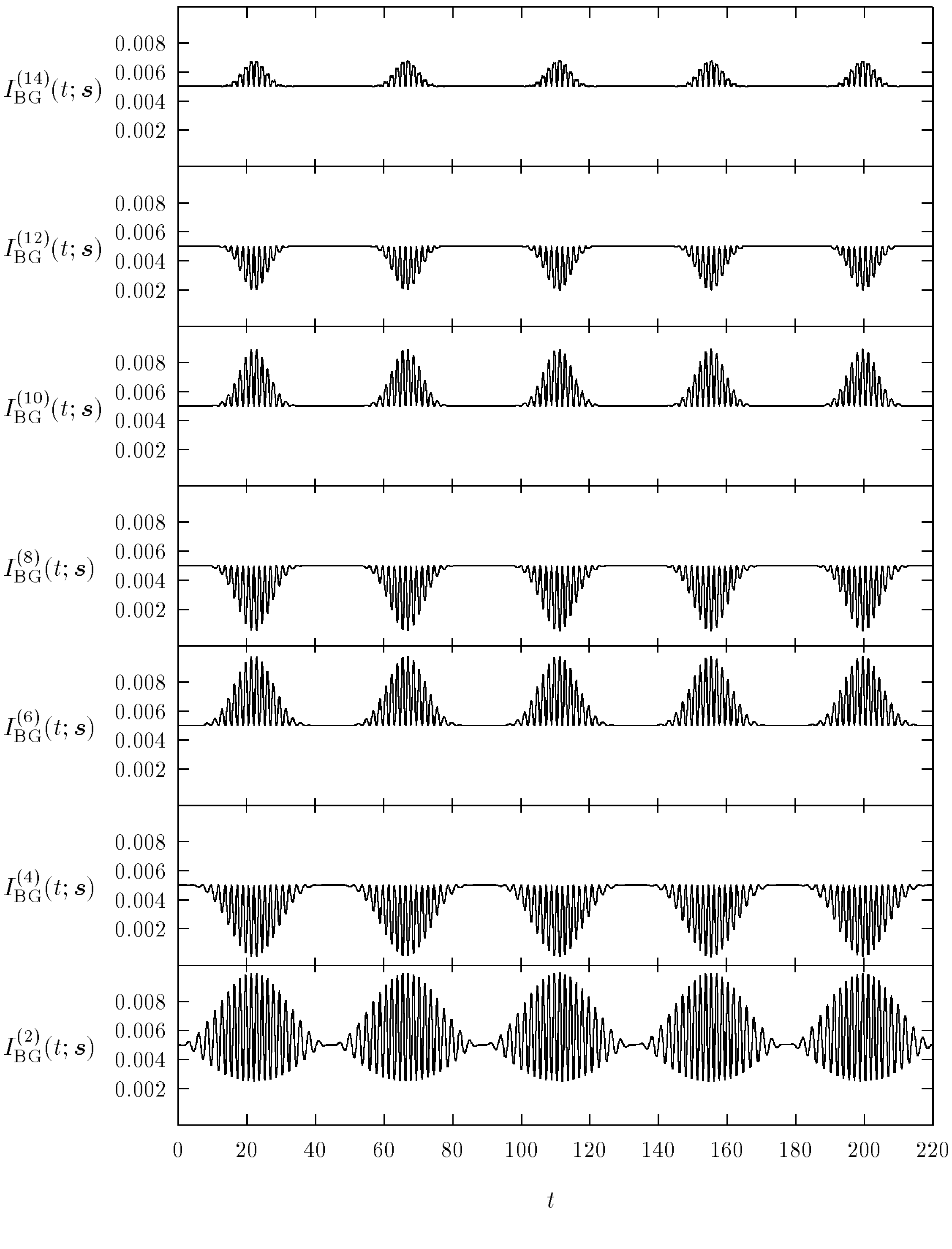


Abbildung 4.2: Quasiintegral $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$ der Brown-Gabrielse-Magnetflasche als Funktion der Zeit; $E=0.01$, $m=2,4,\ldots,14$, $\boldsymbol{s}=(0,0.10)^T$.

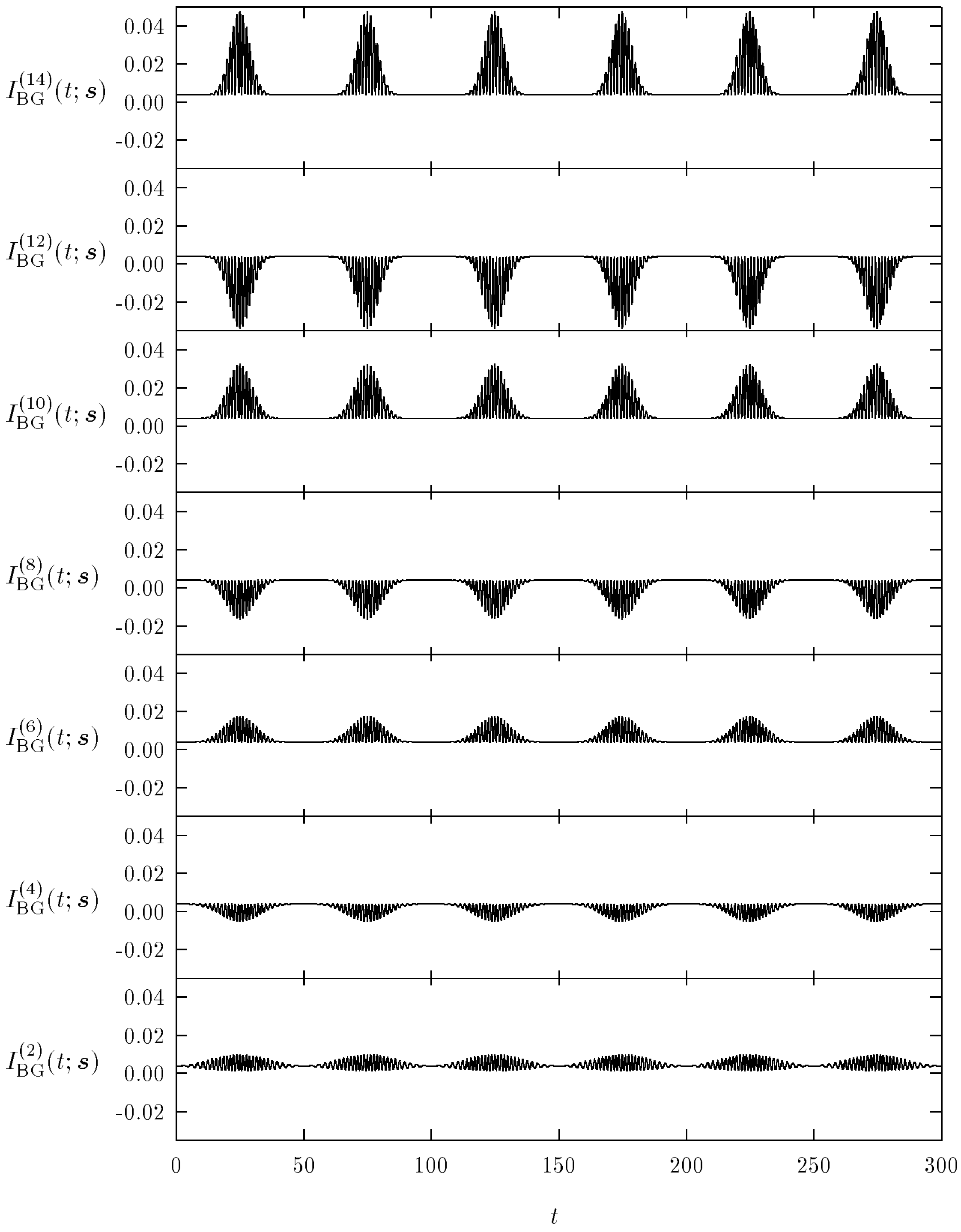


Abbildung 4.3: Quasiintegral $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$ der Brown-Gabrielse-Magnetflasche als Funktion der Zeit; $E = 0.01$, $m = 2, 4, \ldots, 14$, $\boldsymbol{s} = (0, 0.11)^T$.

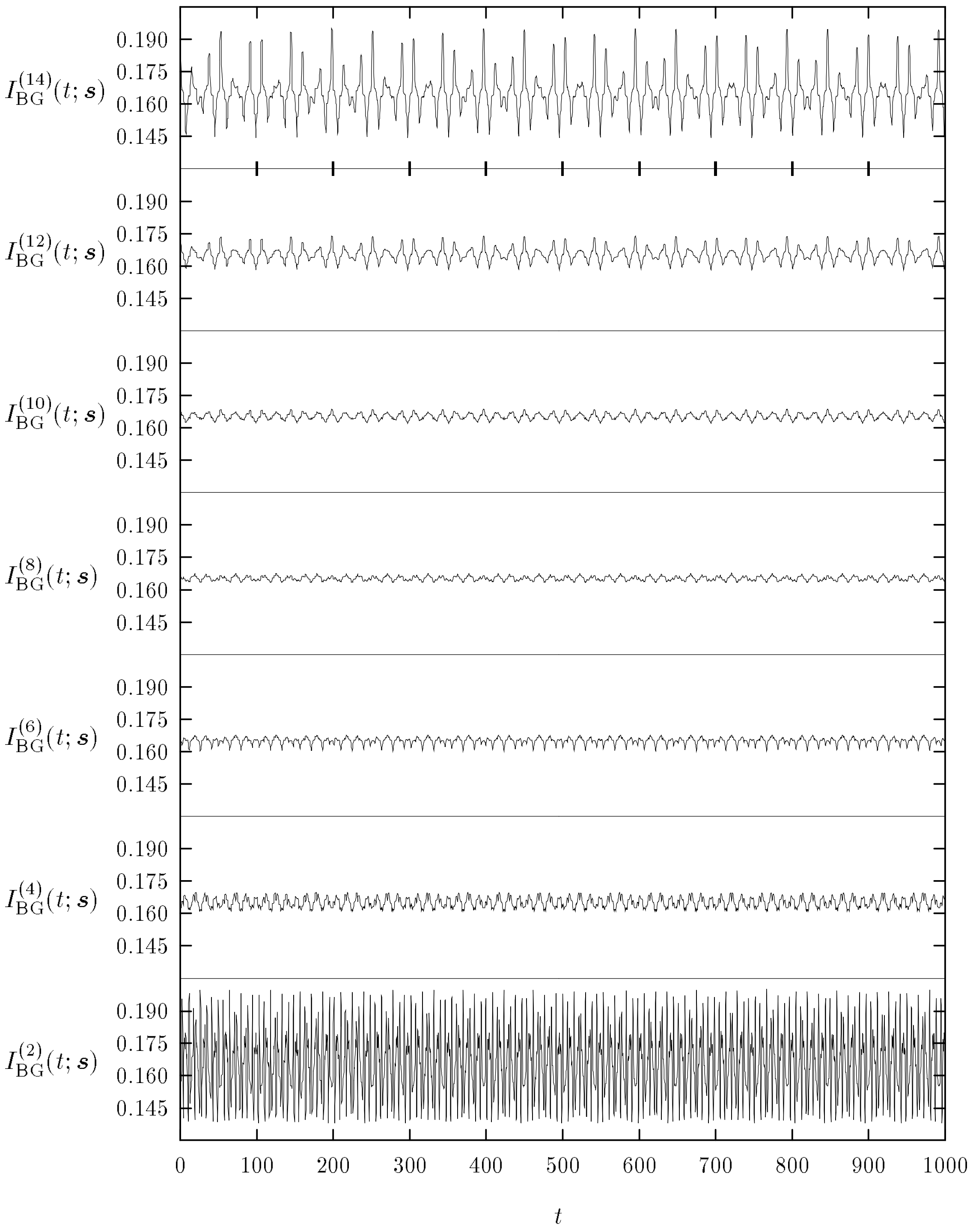


Abbildung 4.4: Quasiintegral $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$ der Brown-Gabrielse-Magnetflasche als Funktion der Zeit; $E = 0.20$, $m = 2, 4, \ldots, 14$, $\boldsymbol{s} = (0, 0.3)^T$.

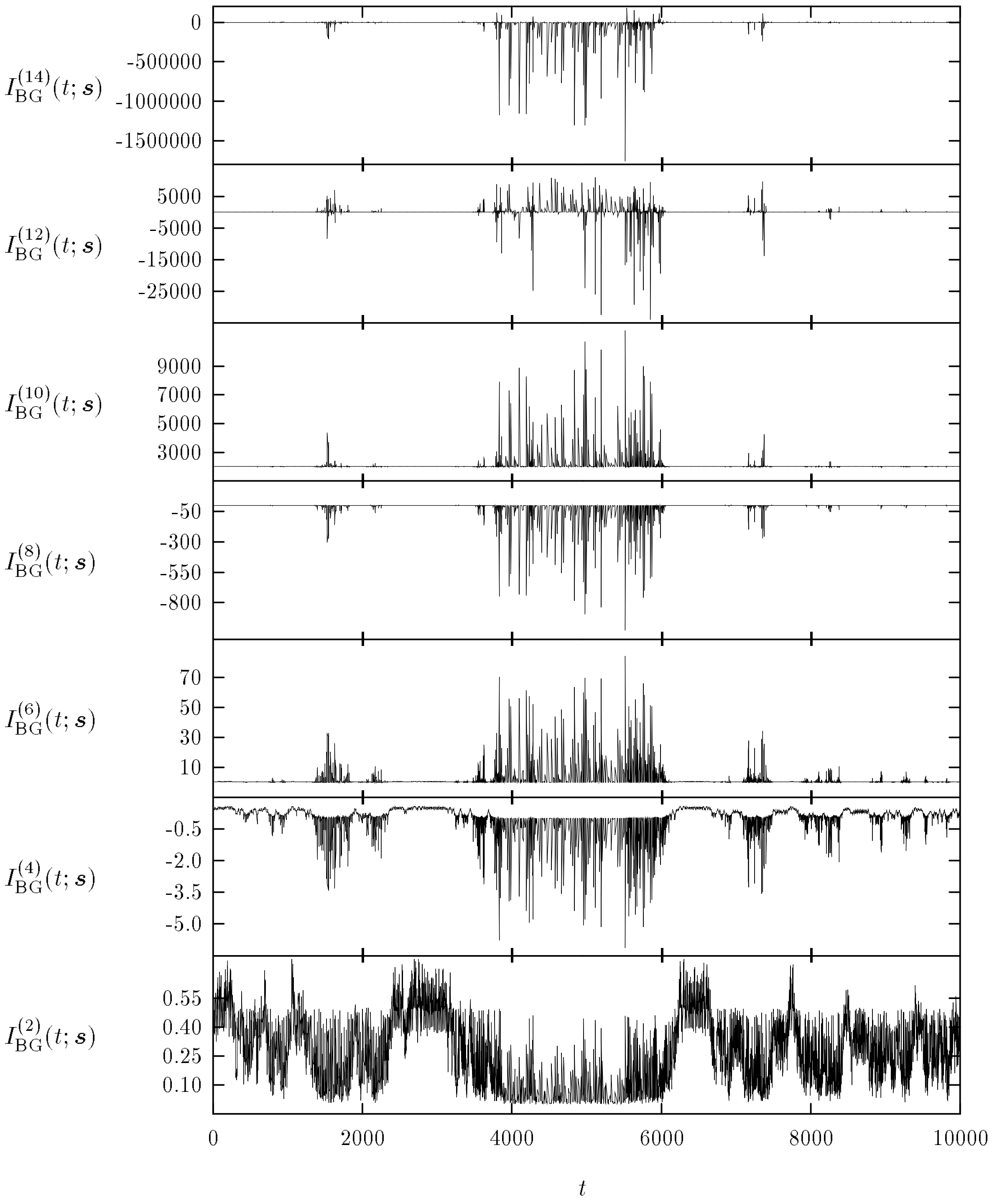


Abbildung 4.5: Quasiintegral $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$ der Brown-Gabrielse-Magnetflasche als Funktion der Zeit; $E = 0.50$, $m = 2, 4, \ldots, 14$, $\boldsymbol{s} = (0, 0.1)^T$. Die Ordinatenachse ist hier, im Gegensatz zu den Abbildungen 4.1 bis 4.4 und 4.6, für jedes m anders skaliert, weil die Schwankungsbreite von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$ sehr schnell mit m anwächst.

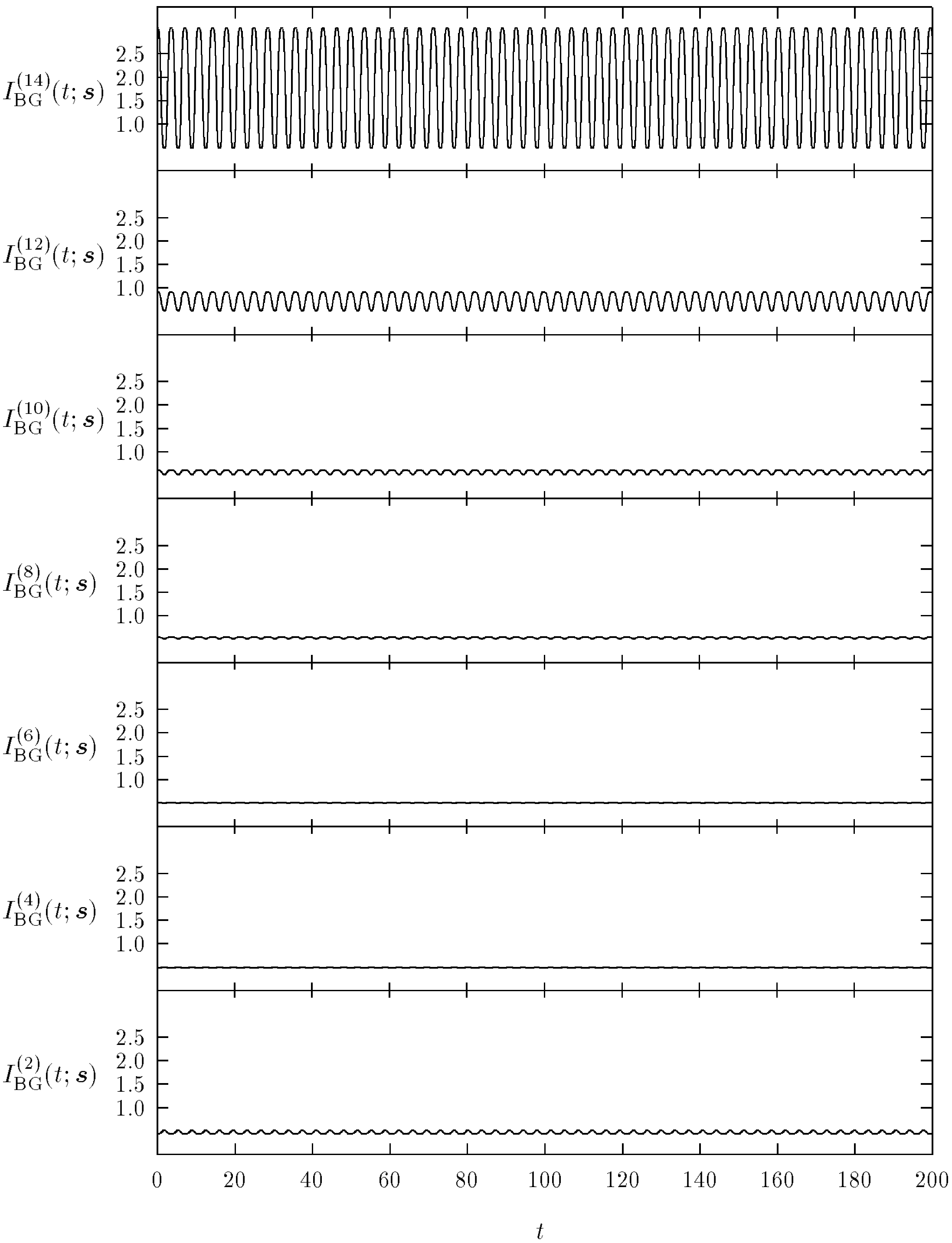


Abbildung 4.6: Quasiintegral $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$ der Brown-Gabrielse-Magnetflasche als Funktion der Zeit; $E = 0.50$, $m = 2, 4, \ldots, 14$, $\boldsymbol{s} = (0, 0.3612)^T$.

Dieser Effekt läßt sich leicht aus dem *lokalen* Charakter des formalen Integrals erklären. Die Konvergenz ist um so besser, je näher der betrachtete Punkt am Entwicklungspunkt, dem Ursprung des Phasenraumes, liegt. Wir können diese Erklärung anhand der Abbildungen 4.1 bis 4.3 bestätigen, wenn wir den Verlauf der Kurven $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$ genauer betrachten. Bei der Oszillation des Quasiintegrals handelt es sich offensichtlich um die Überlagerung einer hoch- und einer niederfrequenten Schwingung. Der Vergleich mit den Daten der numerisch integrierten Trajektorie zeigt, daß die höherfrequente Oszillation in ρ-Richtung stattfindet, während der niederfrequente Anteil die Bewegung in z-Richtung widerspiegelt — im Einklang mit den Überlegungen in Abschnitt 3.2.1. Weil der zugängliche Teil des Phasenraumes entlang der z-Achse nicht beschränkt ist, kann die z-Komponente im Verlauf der Bewegung vergleichsweise groß werden, was dann wegen des größeren Abstandes zum Ursprung zur schlechteren Konvergenz von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$ führt. Für die Abbildungen 4.1 bis 4.3 haben wir als Anfangsbedingungen jeweils $z = 0$ und von Bild zu Bild wachsende p_z-Werte vorgegeben; deswegen werden die im Lauf der Trajektorien erreichten maximalen $|z|$-Werte von Bild zu Bild größer und die Quasiintegrale somit divergenter.

Abbildung 4.4, bei der höheren Energie $E = 0.20$, zeigt eine andere typische Eigenschaft divergenter formaler Integrale. Hier sieht man den Übergang von anfänglicher Konvergenz ($m = 2, \ldots, 8$) zur Divergenz ($m = 8, 10, \ldots$). Ein Übergang dieser Art ergibt sich für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei jedem (anfänglich) konvergenten Integral $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$, weil das System nichtintegrabel ist. Der Grad m_0, bei dem der Übergang von Konvergenz zur Divergenz stattfindet ($m_0 = 8$ für das Beispiel in Abbildung 4.4), charakterisiert den Startpunkt $\boldsymbol{s}$ der entsprechenden Trajektorie. Wir werden in Abschnitt 4.3.2 hierauf zurückkommen.

Anhand von Abbildung 4.5 wird deutlich, daß die Divergenz des Quasiintegrals nicht immer langsam eintreten muß, sondern im Gegenteil auch rasant verlaufen kann. Dieses stark divergente, in den vorherigen Abbildungen so nicht zutage tretende Verhalten wird verständlich, wenn man auch hier mit der entsprechenden Poincaré-Abbildung vergleicht: Der Startwert $\boldsymbol{s} = (0, 0.1)^T$ liegt inmitten eines stochastischen Gebietes, das fast die gesamte Poincaré-Fläche ausfüllt; $\boldsymbol{s}$ liegt fern von noch erhalten gebliebenen größeren Inselketten. — Andererseits gilt, daß auch bei dieser großen Energie immer noch prominente Inseln fast-regulären Verhaltens erhalten geblieben sind. Insbesondere ist hier das Inselpaar zu erwähnen, das auf der p_z-Achse bei $|p_z| \approx 0.4$ zu finden ist. Wählt man den Startwert $\boldsymbol{s}$ aus diesem Gebiet, dann ergibt sich lediglich eine relativ moderate Divergenz von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$, so wie sie in Abbildung 4.6 dargestellt ist.

Schwach divergente oder sogar konvergente Quasiintegrale entsprechen also regulären Gebieten der Poincaré-Fläche, während stärker divergente Quasiintegrale stochastischen Regionen korrespondieren, in denen weniger invariante Tori erhalten geblieben sind.

Mit diesen Beobachtungen haben wir nachgewiesen, daß das berechnete Quasiintegral zumindest für kleine Energien bemerkenswert gut konstant sein kann und dann gute Voraussagen der zeitlichen Entwicklung des Systems erlaubt — denn (Fast-) Konstanz von I_{BG} heißt ja gerade (Fast-) Integrabilität. Anderenfalls, bei divergentem Quasiintegral, läßt die „Geschwindigkeit“ der Divergenz trotzdem noch Schlüsse auf den Grad der Chaotizität des betreffenden Gebietes im Phasenraum zu. Dies ist der Gegenstand des folgenden Abschnitts 4.3.

Eine Analyse des Quasiintegrals nach dem hier beschriebenen Verfahren ist notwendigerweise eine *lokale Analyse*, denn man nimmt jeweils nur Bezug auf einen einzigen Startwert $\boldsymbol{s}$. In Abschnitt 4.3 wird beschrieben, wie man im Zuge einer *globalen Analyse* die gesamte Poincaré-Fläche untersuchen kann.

4.3 Globale Analyse des Quasiintegrals

Im Gegensatz zu der an einzelnen Punkten $\boldsymbol{s} \in \Sigma_E$ orientierten Vorgehensweise im vorangehenden Abschnitt wollen wir uns nun einen Überblick über das Verhalten des Quasiintegrals in der gesamten Poincaré-Fläche verschaffen. Gewöhnlich verwendet man zu diesem Zweck Höhenliniendiagramme des Quasiintegrals in der Poincaré-Fläche [DrFi79, St91, KaRo92]. Wir stellen diese Methode vor und demonstrieren ihren eingeschränkten Nutzen im Fall der Brown-Gabrielse-Flasche. Dann gehen wir zu drei anderen Verfahren über, die für die globale Untersuchung von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ besser geeignet sind.

Um die Äquiniveaulinien von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\rho, z, p_\rho, p_z)$ in der Poincaré-Fläche darzustellen, setzen wir $\rho = 0$ und wenden die Bedingung $p_\rho = \sqrt{2E - p_z^2}$, also Gl. (3.29), an. Damit erhalten wir das Quasiintegral als Funktion der die Poincaré-Fläche parametrisierenden Koordinaten z und p_z. In den Abbildungen 4.7 und 4.8 haben wir die Höhenlinien dieser Funktion bei den Energiewerten $E = 0.01$ und $E = 0.20$ skizziert. Die abgebildeten Ausschnitte aus der Poincaré-Fläche sind die gleichen wie in den Poincaré-Plots 3.7 bzw. 3.9.

Für ein konvergentes formales Integral der Bewegung müssen die Höhenlinien von I_{BG} mit den invarianten Linien des Poincaré-Plots übereinstimmen [Mo68]. Andererseits wissen wir aus Abschnitt 3.2.2, daß es kein zweites Integral der Bewegung geben kann. Deswegen verwundert es nicht, daß die Poincaré-Plots und die Höhenliniendiagramme des formalen Integrals nur we-

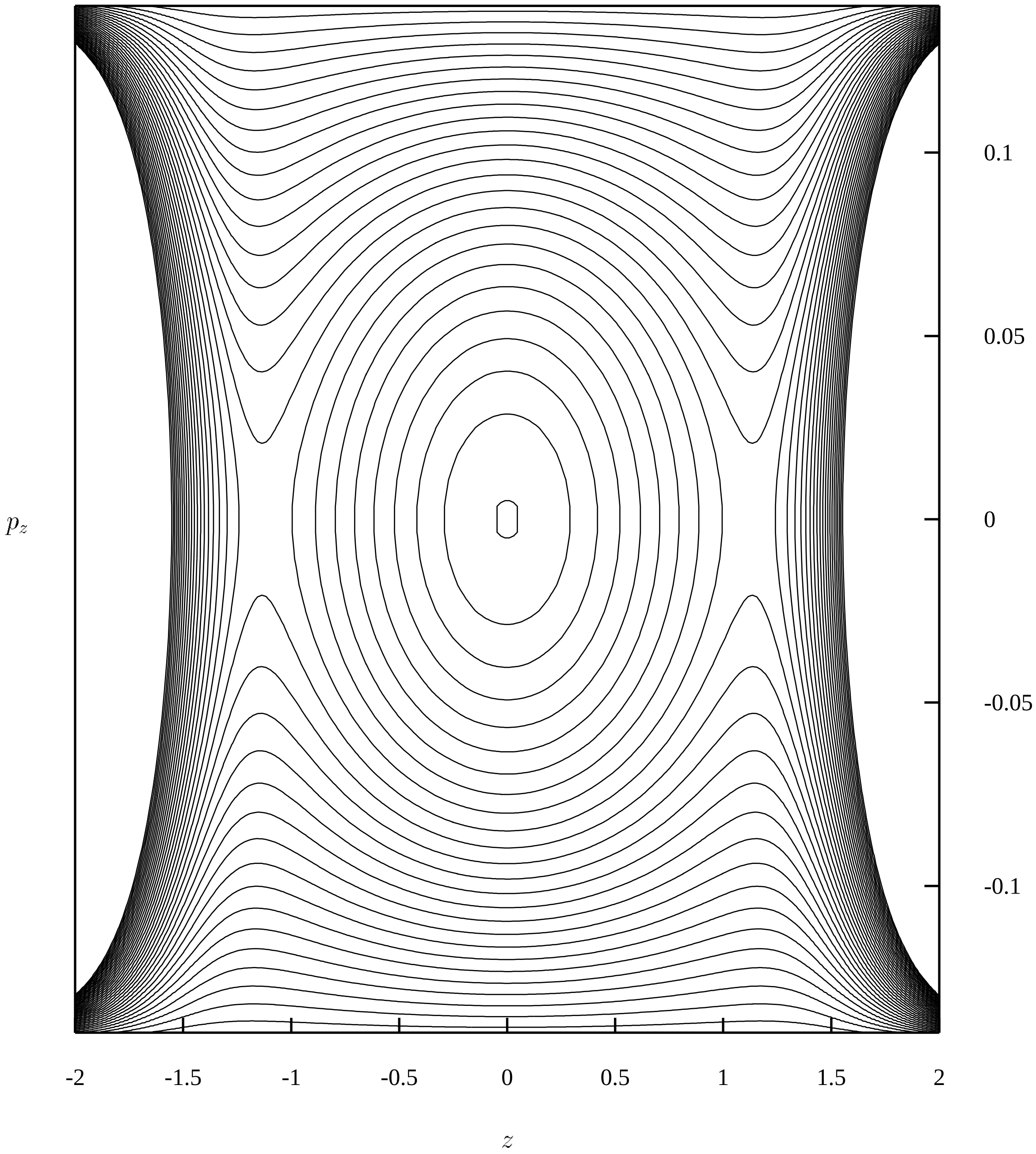


Abbildung 4.7: Äquiniveaulinien des Quasiintegrals $I_{\mathrm{BG}}^{(14)}$ in der Poincaré-Fläche Σ_E bei der Energie $E = 0.01$.

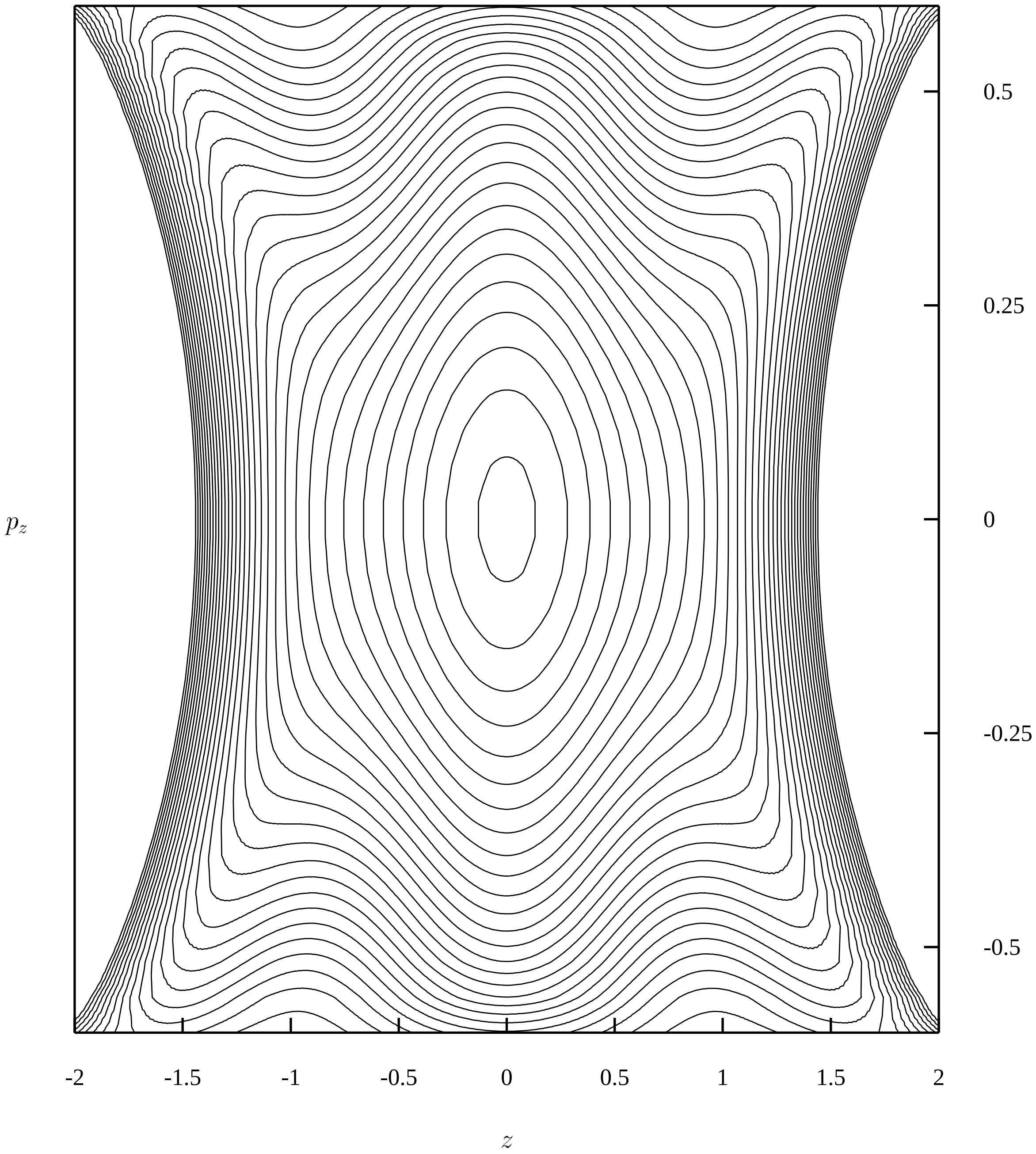


Abbildung 4.8: Äquiniveaulinien des Quasiintegrals $I_{\mathrm{BG}}^{(14)}$ in der Poincaré-Fläche Σ_E bei der Energie $E = 0.20$.

nig Ähnlichkeit zeigen. Lediglich in einer kleinen Umgebung des Ursprunges werden die invarianten Linien der Abbildungen 3.7 und 3.9 durch die Äquiniveaulinien des Quasiintegrals $I_{\mathrm{BG}}^{(14)}$ näherungsweise reproduziert, weil, wie oben diskutiert, die Konvergenzeigenschaften dieser Potenzreihe bei kleineren numerischen Werten der Phasenraumkoordinaten besser sind. Darüber hinaus ist die Umgebung des Ursprungs bei den genannten Energien noch frei von größeren stochastischen Gebieten. Die Existenz solcher Gebiete ließe dort in jedem Fall Divergenz des Quasiintegrals erwarten.

Der Vergleich der Abbildungen 4.7 und 4.8 zeigt zudem den wesentlichen Einfluß des Parameters E. Der Anteil der Poincaré-Fläche, dessen Dynamik durch das Höhenliniendiagramm noch relativ genau beschrieben wird, wird mit zunehmender Energie immer kleiner. Aus diesem Grund haben wir für größere Energien als $E = 0.20$ keine weiteren Höhenliniendiagramme angefertigt, denn es ergibt sich ohnehin keine nennenswerte Übereinstimmung mit den Poincaré-Plots. Diese Beobachtung läßt sich zwanglos im Rahmen des in Kapitel 3 diskutierten KAM-Szenarios erklären. Die Erhöhung des Systemparameters Energie führt zu sich ausbreitendem Chaos, das heißt zu aufbrechenden invarianten Linien und zur Entstehung von stochastischen Regionen. Der Versuch, die invarianten Linien des Poincaré-Plots durch Höhenlinien des Quasiintegrals zu approximieren, wird damit zunehmend gegenstandslos.

Wir begründen noch kurz, warum die hier skizzierte Methode bei anderen Systemen — zum Beispiel beim Hénon-Heiles-System in [Gu66, KaRo92] und bei der gestörten Penning-Falle in [St91] — zu erheblich besseren Resultaten führt. Wir haben die Brown-Gabrielse-Magnetflasche als Beispielsystem für unsere Untersuchungen ausgewählt, weil sie nicht durch Hamilton-Funktionen vom Gustavson-Typ (1.61) beschrieben werden kann. Die beiden oben genannten Systeme sind aber gerade von diesem Typ. Sie besitzen deshalb den entscheidenden Vorteil, daß das dynamisch erlaubte Teilgebiet des Phasenraumes beschränkt und bei hinreichend kleiner Energie beliebig klein ist. Dies begründet die guten Konvergenzeigenschaften der Quasiintegrale dieser Systeme bei sehr kleinen Energien. Für größere Energien verschlechtert sich dann auch bei den Systemen des Gustavson-Typs die Konvergenz von $I_{\mathrm{DFS}}^{(m)}$, wie man beispielsweise [KaRo92] entnehmen kann.

Im Fall des Brown-Gabrielse-Systems erstreckt sich das zugängliche Gebiet des Phasenraumes unendlich weit entlang der z-Achse. So können sich beispielsweise Teilchen, die man mit großem Axialimpuls $|p_z|$ startet, weit vom Zentrum der Flasche entfernen, was zu besonders stark ausgeprägter Divergenz von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ am oberen und unteren Rand der Poincaré-Fläche führt. Man erkennt die Divergenz, indem man die Höhenliniendiagramme mit den Poincaré-Plots 4.7 bzw. 4.8 vergleicht und in den angesprochenen Gebieten das Fehlen jeglicher Übereinstimmung zwischen den beiden Abbildungstypen feststellt. Entsprechendes gilt für Trajektorien, deren Startpunkte $\boldsymbol{s}$ in der

Poincaré-Fläche bei großen $|z|$ liegen; solche Trajektorien haben Divergenz des Quasiintegrals am linken und rechten Rand des abgebildeten Teils von Σ_E zur Folge. Man vergleiche auch hierzu die Höhenliniendiagramme mit den Abbildungen 4.7 und 4.8.

Wir benötigen also für magnetische Flaschen — oder allgemeiner für Systeme mit nicht-Gustavsonscher Hamilton-Funktion — ein anderes Verfahren zur Untersuchung der Konvergenzeigenschaften von I_{DFS}. In den folgenden Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 diskutieren wir solche Verfahren. Das wesentliche neue Ergebnis der darzustellenden Untersuchungen ist die Erkenntnis, daß die Konvergenzeigenschaften des Quasiintegrals $I_{\mathrm{DFS}}^{(m)}$ in den stochastischen Regionen erheblich mehr Information über das System beinhalten als der Poincaré-Plot [KaRo92].

4.3.1 Das Verfahren von Kaluža und Robnik

Man kann die zunächst nur zur Erleichterung der Sprechweise eingeführte abgewandelte Definition der „Konvergenz“ (Gl. (4.25)) zur Grundlage eines neuen Analyseverfahrens machen, indem man für die Punkte $\boldsymbol{s} \in \Sigma_E$ der Poincaré-Fläche die *Konvergenzfunktion*

$$C(\boldsymbol{s}) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } \; I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s}) \; \begin{matrix}\text{konvergent} \\ \\ \text{divergent}\end{matrix} \; \text{im Sinn von Gl. (4.25) ist} \\ 0\,, & \end{cases} \tag{4.27}$$

einführt [KaRo92]. Das $m_{\max}$ der Gleichung (4.25) ist hier natürlich der größte Grad (14) des von uns berechneten Quasiintegrals $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$. Mit dieser Definition ist es möglich, in einem einzigen Bild die Konvergenzeigenschaften des Quasiintegrals für alle Punkte eines Teilgebietes der Poincaré-Fläche zusammenzufassen. Allerdings muß man sich dabei vergegenwärtigen, daß weder aus $C(\boldsymbol{s}) = 1$ Konvergenz von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ im üblichen Sinn folgt, noch umgekehrt. Trotzdem erhalten wir mit $C(\boldsymbol{s})$ einen nützlichen Anhaltspunkt für die Beurteilung der Konvergenzeigenschaften des Quasiintegrals.

Für die folgende Untersuchung der Konvergenzfunktion haben wir uns auf die Brown-Gabrielse-Flasche bei der Energie $E = 0.20$ beschränkt, weil für diesen Wert von E reguläre und chaotische Dynamik koexistieren (vergleiche Abbildung 3.9). Somit können wir die Eigenschaften von $C(\boldsymbol{s})$ sowohl in der Nähe von invarianten Linien als auch in stochastischen Regionen untersuchen.

Abbildung 4.9 zeigt den *Konvergenzplot* des Brown-Gabrielse-Systems. Dieser Plot entsteht dadurch, daß man die Poincaré-Fläche in ein Punktераster zerlegt und jeden Punkt $\boldsymbol{s}$ des Rasters, für den $C(\boldsymbol{s}) = 1$ gilt, schwarz einfärbt; die anderen Punkte bleiben weiß. Es entsteht ein interessantes geo-

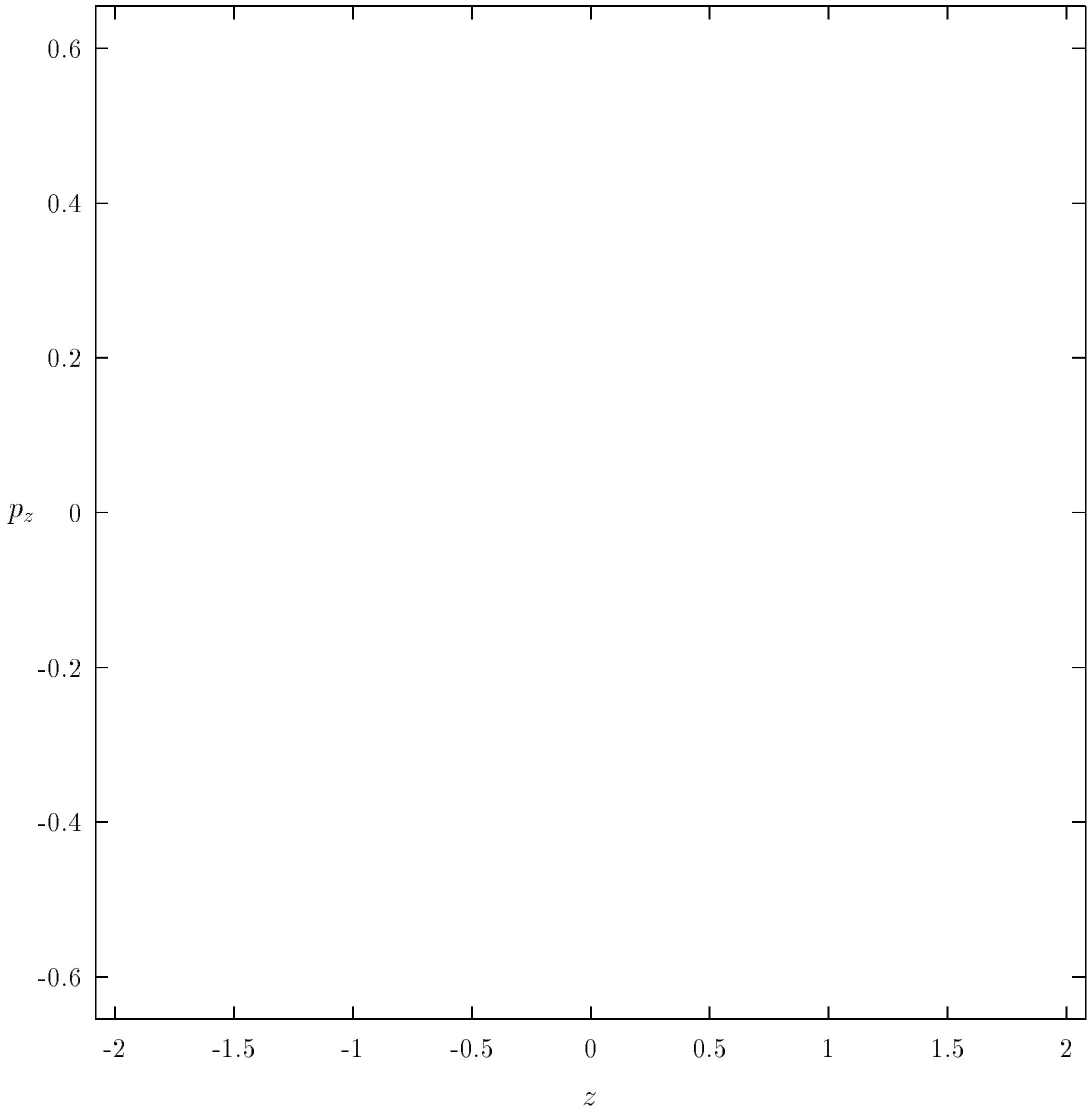


Abbildung 4.9: Konvergenzplot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.20$. Dargestellt ist die in ein Raster von 200×200 Punkten $\boldsymbol{s}$ zerlegte Poincaré-Fläche; Punkte mit $C(\boldsymbol{s}) = 1$ sind schwarz markiert.

metrisches Muster. Kaluža und Robnik erhalten für das von ihnen betrachtete System ähnliche Abbildungen.

Es ist erstaunlich, daß so viele Punkte die Konvergenzbedingung (4.25) erfüllen, wie das in Abbildung 4.9 dargestellt wird. Denn diese Bedingung ist streng, fordert sie doch über einige Grade m hinweg eine monotone Konvergenz. Transient-konvergentes Verhalten wie in Abbildung 4.4 wird hier beispielsweise nicht als konvergent betrachtet. Die Häufigkeit konvergenten Verhaltens in unserem Konvergenzplot ist um so erstaunlicher, als einige der schwarz markierten Punkte in stochastischen Gebieten des entsprechenden Poincaré-Plots 3.9 liegen. Wir merken weiterhin an, daß die Verteilung der konvergenten Punkte in Σ_E in keiner Weise die Struktur des im Poincaré-Plot aufgezeichneten Phasenportraits widerspiegelt.

Wir erklären diesen Sachverhalt im folgenden auf anschauliche Weise und schlagen eine neue Variante der Methode vor, die die Resultate entscheidend verbessert. Wir erinnern uns daran, daß wir nicht nur an den Punkten aus Σ_E interessiert sind, sondern nach Möglichkeit den gesamten Phasenraum untersuchen wollen. Die Definition der Kaluža-Robnikschen Konvergenzfunktion $C(\boldsymbol{s})$ bezieht sich aber lediglich auf die Punkte der Poincaré-Fläche. Diese war zwar unter Berücksichtigung gewisser Kriterien (transversaler Schnitt mit dem Phasenfluß usw.), im Endeffekt aber doch willkürlich festgelegt worden. Wir interpretieren die unerwarteten Ergebnisse des Konvergenzplots als eine Folge dieser eher zufälligen Wahl von Σ_E.

Es liegt nahe, das beschriebene subjektive Element dadurch aus der Methode zu eliminieren, daß wir nicht mehr nur einzelne Punkte, sondern ganze Trajektorien betrachten. Wir berechnen demnach die durch die Punkte $\boldsymbol{s} \in \Sigma_E$ als Startwerte festgelegten Trajektorien und bestimmen die Mittelwerte der entsprechenden Quasiintegrale:

$$\overline{I_{\mathrm{BG}}^{(m)}}(\boldsymbol{s}) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s}) \quad . \tag{4.28}$$

Mit diesen Mittelwerten können wir nun die *gemittelte Konvergenzfunktion* $\overline{C}(\boldsymbol{s})$ durch die Anwendung von Gl. (4.27) auf die $\overline{I_{\mathrm{BG}}^{(m)}}(\boldsymbol{s})$ definieren:

$$\overline{C}(\boldsymbol{s}) := \begin{cases} 1\,, \\ 0\,, \end{cases} \quad \text{falls} \;\; \overline{I_{\mathrm{BG}}^{(m)}}(\boldsymbol{s}) \;\; \begin{matrix} \text{konvergent} \\ \text{divergent} \end{matrix} \;\; \text{im Sinn von Gl. (4.25) ist} \quad . \tag{4.29}$$

Einen nach dieser korrigierten Vorschrift berechneten Konvergenzplot zeigen wir in Abbildung 4.10. Es bietet sich nun ein ganz anderes Bild als in Abbildung 4.9. Zunächst stellen wir fest, daß weniger Punkte $\boldsymbol{s}$ die Konvergenzbedingung $\overline{C}(\boldsymbol{s}) = 1$ erfüllen. Dieses Ergebnis haben wir nach dem oben Gesagten erwartet. Darüber hinaus reproduziert Abbildung 4.10 die

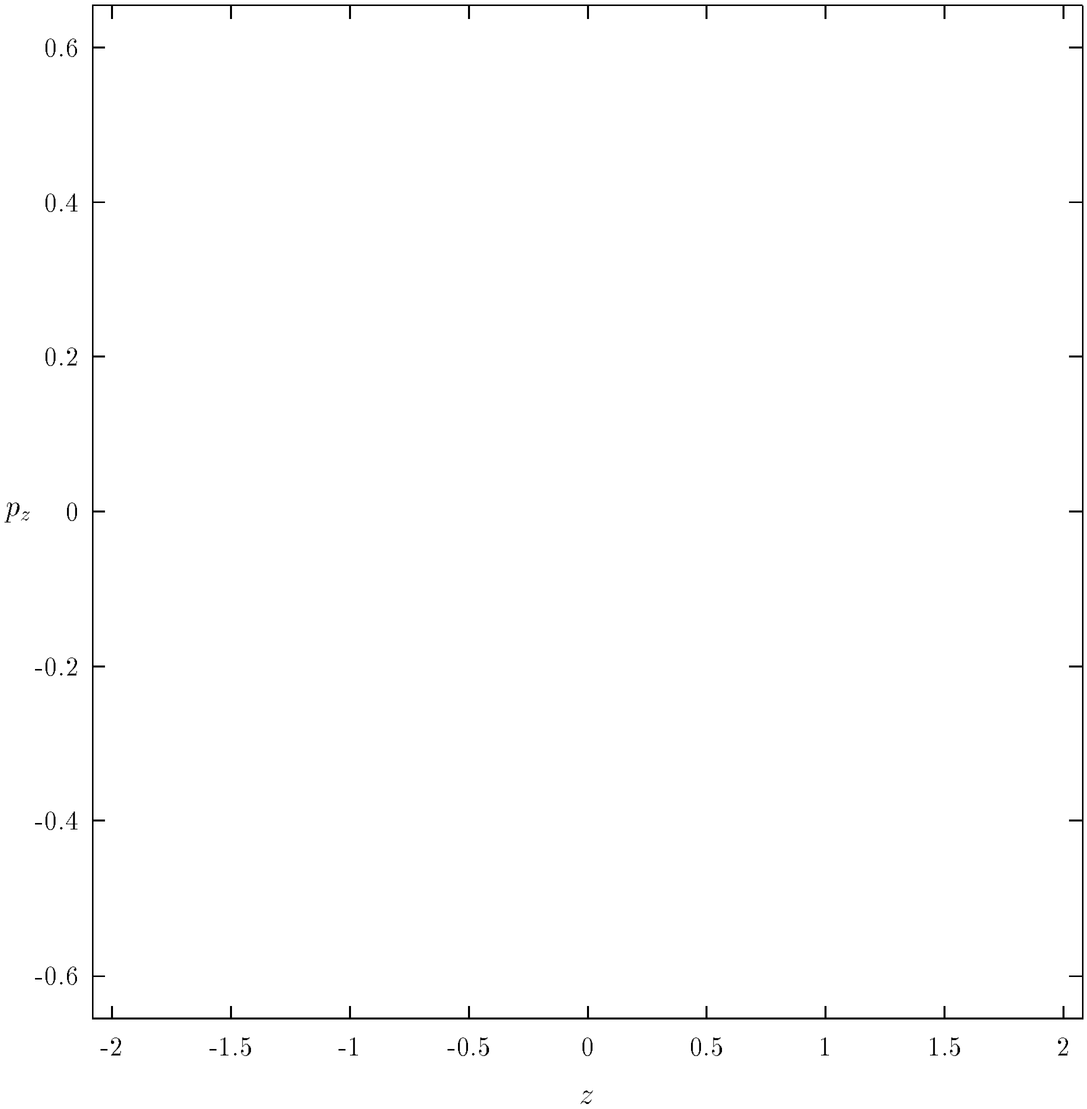


Abbildung 4.10: Korrigierter Konvergenzplot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.20$. Dargestellt ist die in ein Raster von 200×200 Punkten $\boldsymbol{s}$ zerlegte Poincaré-Fläche; Punkte mit $\overline{C}(\boldsymbol{s}) = 1$ sind schwarz markiert.

Strukturen des Poincaré-Plots 3.9 erheblich detailgetreuer als das nach der ursprünglichen Definition von $C(\boldsymbol{s})$ erstellte Bild. Man erkennt ein ausgedehntes Konvergenzgebiet im Zentrum des Phasenraumes, dort, wo im Poincaré-Schnitt noch viele invariante Linien erhalten geblieben sind. Auch die hyperbolischen periodischen Punkte der dominanten Poincaré-Birkhoff-Kette, die aus sechs großen, konzentrisch angeordneten Inseln besteht, lassen sich eindeutig im korrigierten Konvergenzplot identifzieren. Dagegen divergiert das Quasiintegral in der Nähe der elliptischen periodischen Punkte dieser Inselkette.

In seiner korrigierten Form stellt das Kaluža-Robnik-Verfahren also ein durchaus nützliches Hilfmittel zur Analyse des Phasenraumes bzw. der Poincaré-Fläche dar. Allerdings ergibt sich wegen der Strenge des zugrunde gelegten Konvergenzkriteriums (Gl. (4.25) mit $m_{\max} = 14$) kein sehr detailreiches Bild der Situation im Phasenraum; zudem kann man nur zwischen den beiden Fällen $\overline{C}(\boldsymbol{s}) = 0$ und $\overline{C}(\boldsymbol{s}) = 1$ unterscheiden und hat keine Möglichkeit einer differenzierteren Charakterisierung der Punkte von Σ_E. Wir wenden uns deshalb anderen Analyse-Methoden zu, die genauere Aussagen über die Geschwindigkeit der Konvergenz- bzw. Divergenz der Quasiintegrale ermöglichen.

4.3.2 Konvergenzeigenschaften von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$

Ausgehend von der in Abschnitt 4.2 gemachten Beobachtung, daß die Geschwindigkeit der Divergenz von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$ wesentlich vom Startwert $\boldsymbol{s}$ abhängt, quantifizieren wir im folgenden diese Divergenzgeschwindigkeit und stellen das Resultat graphisch als Funktion von $\boldsymbol{s}$ dar.

Zunächst betrachten wir einen einzigen, festen Startwert $\boldsymbol{s} \in \Sigma_E$. Wir gehen davon aus, daß wir zuvor die Quasiintegrale $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ der Ordnungen $2 \leq m \leq m_{\max}$ berechnet haben. Für jedes dieser m berechnen wir jeweils erst den Mittelwert von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})$,

$$\overline{I_{\mathrm{BG}}^{(m)}}(\boldsymbol{s}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s})\, dt \quad , \tag{4.30}$$

und dann die Standardabweichung als Maß für die Abweichung von $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ von diesem Mittelwert:

$$\sigma_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s}) = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(t;\boldsymbol{s}) - \overline{I_{\mathrm{BG}}^{(m)}}(\boldsymbol{s}) \right)^2 dt} \quad . \tag{4.31}$$

Um die zu unterschiedlichen Startwerten $\boldsymbol{s}$ gehörenden Standardabweichungen miteinander vergleichen zu können, führen wir schließlich noch die normierten Standardabweichungen ein:

$$\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s}) = \frac{\sigma_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})}{\overline{I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})}} \quad . \tag{4.32}$$

Diese Größe wird bei den folgenden Überlegungen eine Schlüsselrolle einnehmen. $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ mißt die „Qualität" des Quasiintegrals $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$: $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ ist um so größer, je stärker das Quasiintegral um seinen Mittelwert oszilliert. Dabei werden nicht lediglich die Punkte der Poincaré-Fläche betrachtet, sondern jeweils Mittelwerte über die entsprechenden Trajektorien berücksichtigt. Somit sollten die normierten Standardabweichungen den gesamten Phasenraum in einem ähnlichen Sinn beschreiben, wie dies die Orbits in einem sinnvoll gewählten Poincaré-Schnitt tun.

Da wir uns für Konvergenzfragen interessieren, müssen wir nun untersuchen, wie sich die $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ als Funktionen von m verhalten. Über eine gesamte Trajektorie hinweg ist das Quasiintegral $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ konvergent (in dem betrachteten m-Intervall) , wenn

$$\left|\eta_{\mathrm{BG}}^{(2m)}(\boldsymbol{s})\right| < \left|\eta_{\mathrm{BG}}^{(2m-2)}(\boldsymbol{s})\right| \quad \text{für} \quad 1 < m \leq \frac{m_{\max}}{2} \tag{4.33}$$

gilt, anderenfalls ist es divergent.

Bei einem konvergenten Quasiintegral mit dem Startwert $\boldsymbol{s}$ gilt für den Grad $m_0(\boldsymbol{s})$, bei dem $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ minimal wird: $m_0(\boldsymbol{s}) = m_{\max} = 14$. Im Fall der Divergenz kann m_0 einen der Werte $2, 4, \ldots, m_{\max} - 2$ annehmen. In Abbildung 4.11 haben wir eine typische Situation dargestellt. Bei vielen Werten der Parameter E und $\boldsymbol{s}$ fällt $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ mit wachsendem m zunächst ab, um dann wieder anzusteigen — wegen der schließlich immer eintretenden Divergenz. Offensichtlich beinhaltet $m_0(\boldsymbol{s})$ eine wesentliche Information über das Konvergenzverhalten von $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$. Wir nutzen diese Beobachtung zu einer Verfeinerung des Verfahrens von Kaluža und Robnik: Die Poincaré-Fläche wird wieder in ein Punktegitter zerlegt, und wir bestimmen für jeden der Punkte $\boldsymbol{s}$ dieses Gitters den Grad $m_0(\boldsymbol{s})$.

In den Abbildungen 4.12 bis 4.14 haben wir $m_0(\boldsymbol{s})$ für das Brown-Gabrielse-System farbkodiert aufgetragen. Der Vergleich der Bilder mit den entsprechenden Poincaré-Schnitten 3.7, 3.9 und 3.12 zeigt, daß diese $m_0(\boldsymbol{s})$-Plots ein erheblich wirklichkeitsgetreueres Bild der Situation zeichnen als die Kaluža-Robnikschen Konvergenzplots.

Abbildung 4.12 skizziert Σ_E bei der niedrigen Energie $E = 0.01$. Bei dieser Energie sind im Poincaré-Plot noch keine stochastischen Regionen oder Inselketten zu erkennen, und so ist das konvergente (grüne) Gebiet sehr groß. Der Übergang zur Divergenz (rot) geschieht dann schlagartig bei größer werden-

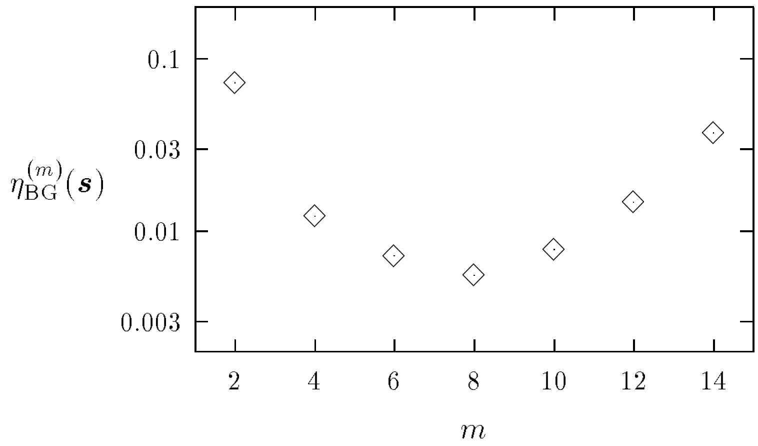


Abbildung 4.11: Ein typischer Verlauf von $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$. Für dieses Beispiel wurden die Parameter $E = 0.20$ und $\boldsymbol{s} = (0, 0.3)^T$ gewählt; es gilt $m_0(\boldsymbol{s}) = 8$. Man beachte die halblogarithmische Darstellung.

dem Abstand zum Ursprung. Interessanterweise deutet sich aber im Zentralbereich von Σ_E schon divergentes Verhalten des Quasiintegrals an, der Grad m_0 mit minimalem $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ ist hier nicht mehr m_{max}. Außerdem fällt ein schmaler Ring mit $m_0(\boldsymbol{s}) = 12$ auf, der inmitten der grün-konvergenten Region verläuft. Kündigt sich hier trotz der niedrigen Energie schon das Aufbrechen einer KAM-Linie in eine Poincaré-Birkhoff-Kette an?

In Abbildung 4.13, bei der Energie $E = 0.20$, ist die dominante, aus sechs Inseln bestehende Birkhoff-Kette (vgl. Abbildung 3.9) deutlich zu erkennen. Bei diesem $m_0(\boldsymbol{s})$-Plot verwundert vor allem, daß die Umgebung der sechs periodischen Punkte der angesprochenen Inselkette nicht durch einen besonders hohen Wert von $m_0(\boldsymbol{s})$ ausgezeichnet ist, wie man es für die dortige reguläre Dynamik erwarten würde. $m_0(\boldsymbol{s})$ hat hier lediglich den Wert 8. Darüber hinaus wird die Inselkette durch ein Band konvergenteren Verhaltens ($m_0(\boldsymbol{s}) = 10$) eingeschlossen. Dies ist um so erstaunlicher, als dieses Band in einer stochastischen Region verläuft, wie der Vergleich mit Abbildung 3.9 zeigt.

In den meisten Punkten der Abbildung 4.13 nimmt $m_0(\boldsymbol{s})$ den Minimalwert $m_0(\boldsymbol{s}) = 2$ an, was verständlich ist, weil bei einer so hohen Energie ($E = 0.50$) kaum noch gute Konvergenzeigenschaften des Quasiintegrals zu erwarten sind. Der Poincaré-Plot bei dieser Energie, Abbildung 3.12, besteht — neben einem auffallenden 2-Zyklus, den wir auch in Abbildung 4.14 eindeutig identifizieren können — vor allem aus einer großen stochastischen Region. Diese Region wird im $m_0(\boldsymbol{s})$-Plot nicht strukturlos, sondern mit ei-

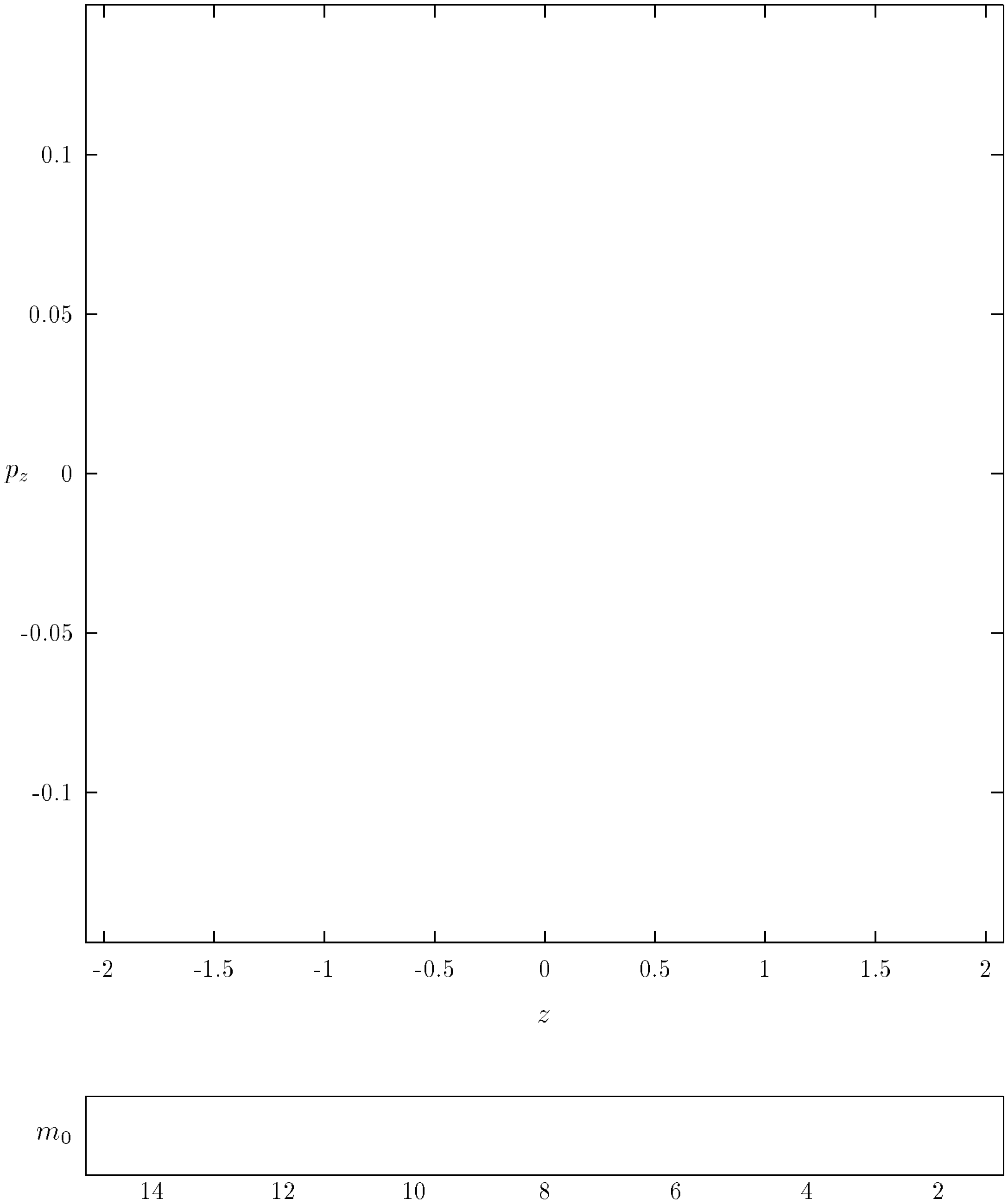


Abbildung 4.12: $m_0(\boldsymbol{s})$-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.01$. Dargestellt ist die Poincaré-Fläche, die in ein Raster von 200×200 Punkten $\boldsymbol{s}$ zerlegt wurde. Die Leiste am unteren Bildrand zeigt die Farbkodierung von $m_0(\boldsymbol{s})$.

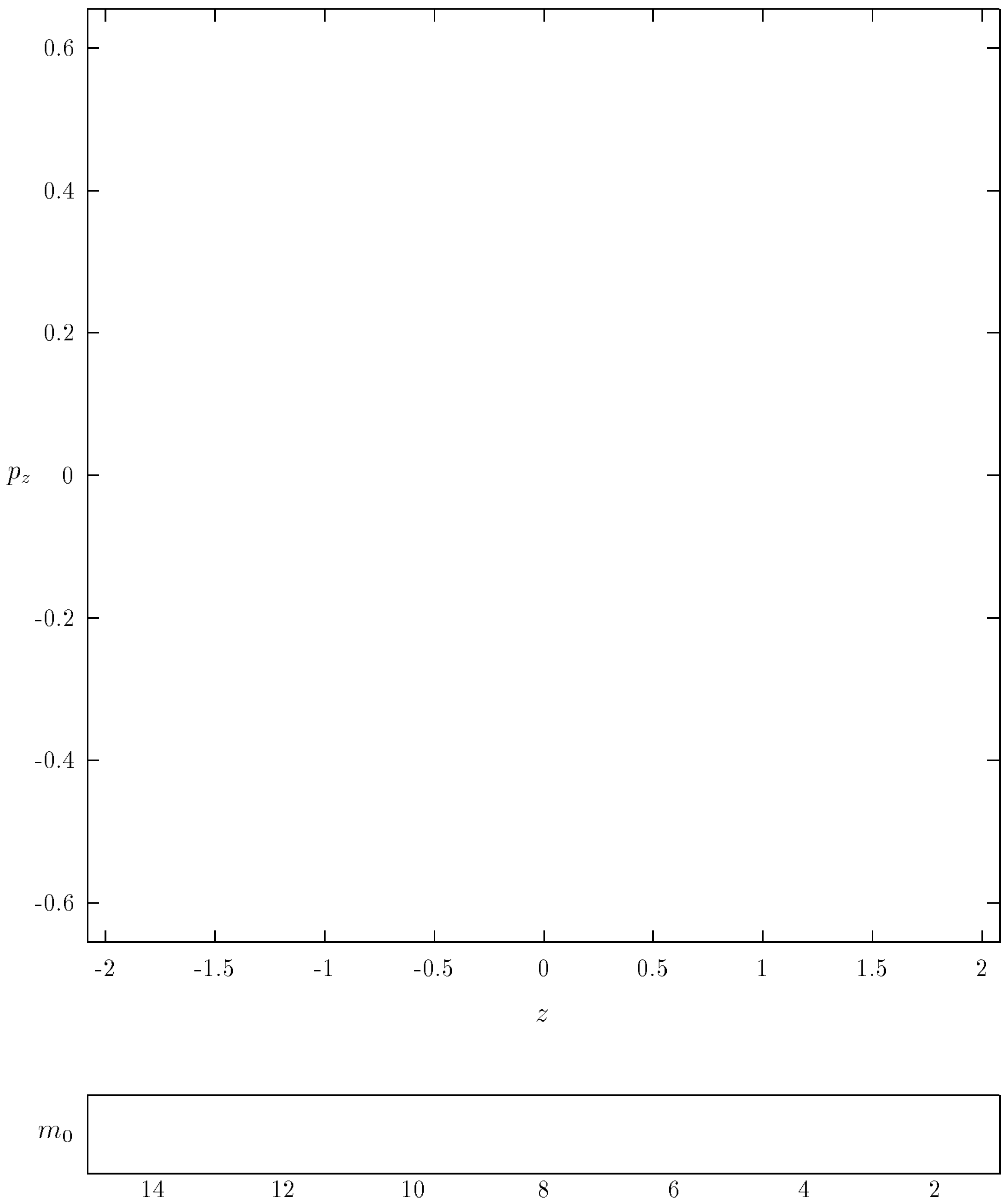


Abbildung 4.13: $m_0(\boldsymbol{s})$-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.20$. Dargestellt ist die Poincaré-Fläche, die in ein Raster von 200×200 Punkten $\boldsymbol{s}$ zerlegt wurde. Die Leiste am unteren Bildrand zeigt die Farbkodierung von $m_0(\boldsymbol{s})$.

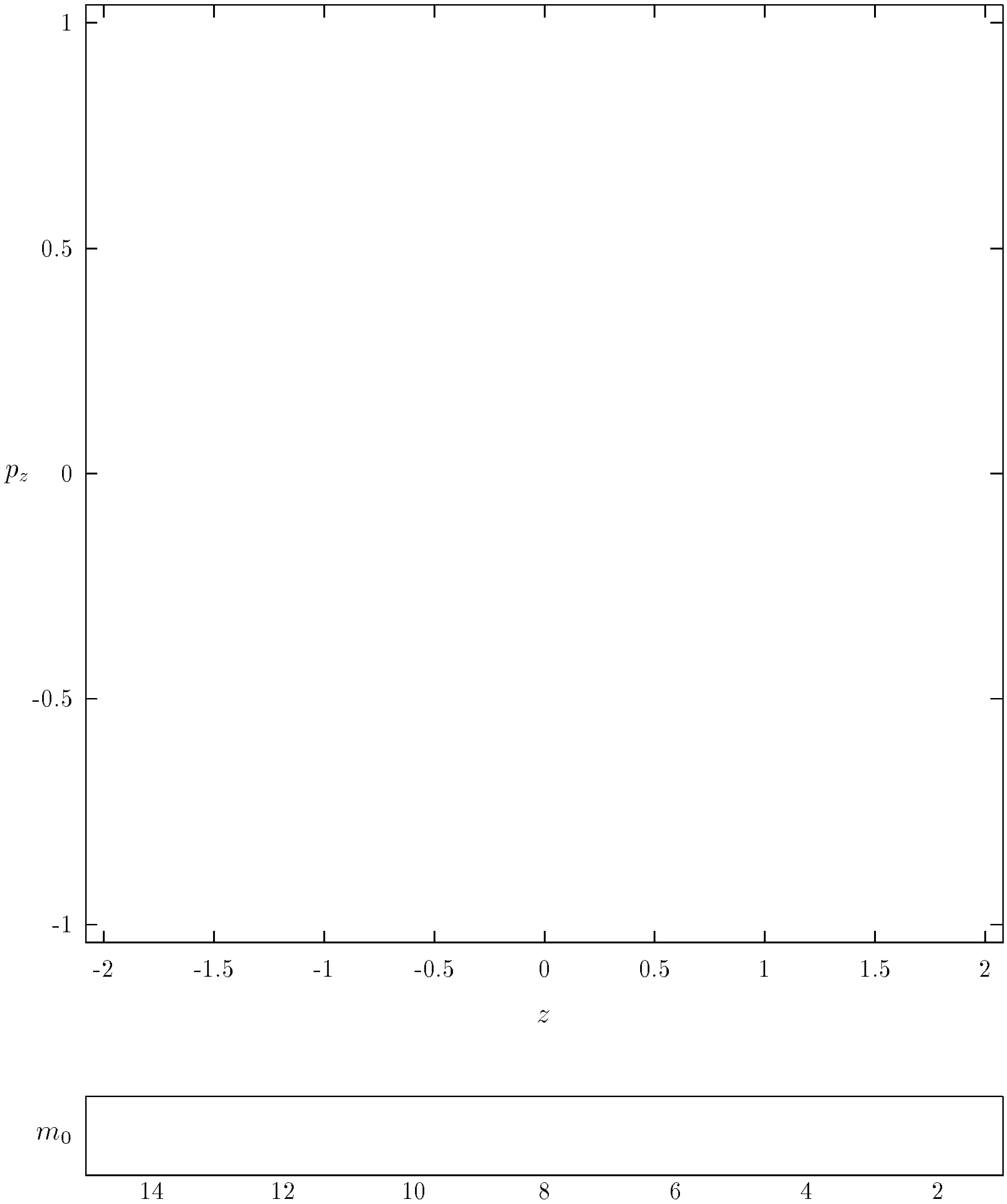


Abbildung 4.14: $m_0(\boldsymbol{s})$-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.50$. Dargestellt ist die Poincaré-Fläche, die in ein Raster von 200×200 Punkten $\boldsymbol{s}$ zerlegt wurde. Die Leiste am unteren Bildrand zeigt die Farbkodierung von $m_0(\boldsymbol{s})$.

ner durchaus regelmäßigen Verteilung der m_0-Werte dargestellt. Ein Rest von Ordnung im Chaos? Jedenfalls deutet unsere Abbildung an, daß die Divergenzgeschwindigkeit in einer chaotischen Region sehr inhomogen sein kann. Diese Beobachtung könnte ein Ansatzpunkt für die weitergehende Untersuchung der stochastischen Gebiete unseres Systems sein — eine solche Untersuchung würde aber den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen. Auch bei Abbildung 4.14 fällt auf, daß das Zentrum des großen 2-Zyklus mit kleineren m_0-Werten dargestellt wird als seine unmittelbare Umgebung. Demnach divergiert $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ auf den die periodischen Punkte umgebenden invarianten Linien langsamer als in den periodischen Punkten selbst.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die hier neu eingeführten $m_0(\boldsymbol{s})$-Plots ein äußerst nützliches Hilfsmittel zur Charakterisierung der Poincaré-Fläche sein können und insbesondere solche Gebiete von Σ_E weitergehend klassifizieren können, die im Poincaré-Plot unterschiedslos als homogene Regionen regulären (oder auch chaotischen) Verhaltens dargestellt werden.

Bisher konnten wir schon anhand der $m_0(\boldsymbol{s})$-Plots eine erstaunlich reichhaltige Struktur in der Poincaré-Fläche nachweisen. Wir versuchen nun, die Auflösung des Verfahrens weiter zu erhöhen, denn es erweist sich bei den $m_0(\boldsymbol{s})$-Plots als nachteilig, daß zur Charakterisierung von $\boldsymbol{s}$ lediglich sieben mögliche Werte für m_0 zu Verfügung stehen: $2, 4, \ldots, 14 = m_{\max}$.

Die Abbildungen 4.1 bis 4.6, ebenso wie Abbildung 4.11, lassen die Vermutung zu, daß die Divergenz des Quasiintegrals und damit auch das Verhalten von $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ als Funktion von m einer gewissen Regelmäßigkeit unterliegen. Um diese Beobachtung quantitativ zu machen, versuchen wir, $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ durch eine Exponentialfunktion zu nähern,

$$\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s}) \approx a e^{\alpha m} \quad , \tag{4.34}$$

wobei a und α noch zu bestimmen sind. Nach den Ergebnissen der vorangehenden Abschnitte ist klar, daß diese beiden Größen vom Startwert $\boldsymbol{s}$ abhängen; deswegen schreiben wir auch $a(\boldsymbol{s})$ und $\alpha(\boldsymbol{s})$.

$a(\boldsymbol{s})$ und der „Exponent“ $\alpha(\boldsymbol{s})$ — der hier eine ähnliche Bedeutung wie der Ljapunov-Exponent hat — lassen sich näherungsweise mit der Methode der kleinsten Quadrate (vgl. [BrSe85, S. 787]) aus den $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ berechnen. Der direkte Vergleich des Graphen der Funktion $a(\boldsymbol{s})e^{\alpha(\boldsymbol{s})m}$ mit den Punkten $(m, \eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s}))^T$ ergibt, daß in den meisten Fällen die Approximation (4.34) recht gut ist. Wir demonstrieren dies in Abbildung 4.15; die folgende Tabelle gibt die für die Abbildung verwendeten Parameter E und $\boldsymbol{s}$ sowie die daraus berechneten Exponenten $\alpha(\boldsymbol{s})$ an.

Abbildung	E	$\boldsymbol{s}$	$\alpha(\boldsymbol{s})$
4.15a	0.01	$(0.81, 0.0553)^T$	-0.39
4.15b	0.20	$(1.69, 0.5970)^T$	1.37
4.15c	0.20	$(0.00, 0.3000)^T$	0.32

Die Abbildungen 4.15a und 4.15b demonstrieren exemplarisch die Qualität der Approximation für ein konvergentes und ein divergentes Quasiintegral.

Abbildung 4.15c ist die entsprechende Darstellung für ein Quasiintegral, das bis zum Grad 8 konvergent ist, um dann für größere m zu divergieren — eine ähnliche Situation wie in Abbildung 4.4. Dieses Verhalten wird offensichtlich durch eine einfache Exponentialfunktion nicht vollständig reproduziert. Andererseits können wir diese Einschränkung zur Methode machen und von nun an nur das asymptotische Verhalten bei möglichst großen m untersuchen. Nachdem das in Abbildung 4.15c dargestellte $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ sein Minimum bei $m = 8$ durchlaufen hat, steigt es in etwa exponentiell an und kann dann gemäß Gl. (4.34) sinnvoll genähert werden. Wir beschränken uns deshalb bei der $\alpha(\boldsymbol{s})$-Methode auf die m-Werte $8, \ldots, 14$. Weil das Quasiintegral $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ nur bis zur Ordnung 14 vorliegt, können wir keine größeren Werte von m in die Rechnung einbeziehen, obwohl dies natürlich wünschenswert wäre. Inwieweit das hier skizzierte Vorgehen — insbesondere die Tatsache, daß wir die $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ mit $m = 2, 4, 6$ vernachlässigen — sinnvoll ist, muß weiter unten anhand der Ergebnisse der Methode entschieden werden. In diesem Zusammenhang illustrieren die Abbildungen 4.15a und 4.15b, daß man im Fall eindeutiger Konvergenz oder Divergenz durch die Nichtberücksichtigung kleiner m-Werte die Qualität der Approximation nicht wesentlich beeinträchtigt.

Die $\alpha(\boldsymbol{s})$-Methode weist gegenüber dem $m_0(\boldsymbol{s})$-Verfahren den Vorteil auf, daß wir eine den Phasenraum charakterisierende Funktion $\alpha(\boldsymbol{s})$ erhalten, deren Wertespektrum im Gegensatz zu dem von $m_0(\boldsymbol{s})$ kontinuierlich ist. Wir erwarten, daß sich dadurch die Eigenschaften des Phasenraumes detaillierter abbilden lassen. Je größer $\alpha(\boldsymbol{s})$ ist, desto divergenter sollte sich das Quasiintegral mit dem Startwert $\boldsymbol{s}$ verhalten und umso chaotischer ist das Gebiet der Poincaré-Fläche, aus dem der Startwert $\boldsymbol{s}$ entnommen wurde. Umgekehrt bedeutet ein negativer Wert von $\alpha(\boldsymbol{s})$ Konvergenz — zumindest für die bei der Rechnung verwendeten Werte von m — was auf den regulären Charakter des entsprechenden Phasenraumgebietes hinweist. Wenn $\alpha(\boldsymbol{s})$ zwar positiv, aber klein ist, dann divergiert das Quasiintegral zwar, es deutet sich aber trotzdem noch ein Rest von Ordnung in der Dynamik an. Falls der Ljapunov-Exponent in einer Region des Phasenraumes positiv und klein ist, spricht man von *schwachem Chaos* [KaRo92]. Nach dem vorher Gesagten scheint es uns angebracht, diesen Begriff auch für Phasenraumgebiete mit positiven, aber kleinen $\alpha(\boldsymbol{s})$-Werten zu verwenden.

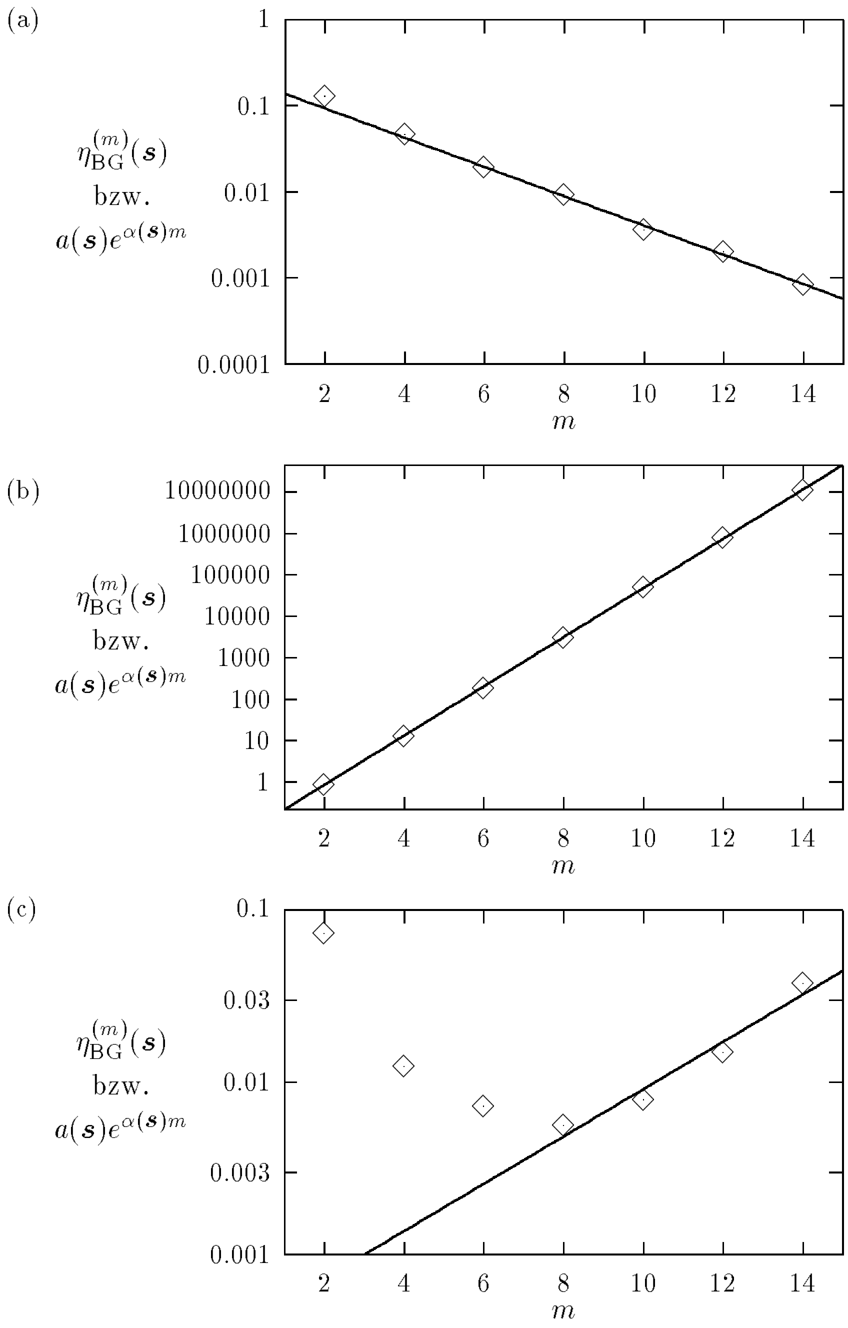


Abbildung 4.15: Halblogarithmische Darstellung der normierten Standardabweichungen $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$, in den Abbildungen angedeutet als $\diamond$, und der sie approximierenden Exponentialfunktion $a(\boldsymbol{s})e^{\alpha(\boldsymbol{s})m}$, die hier als durchgezogene Linie dargestellt wird. Die verwendeten Parameter E und $\boldsymbol{s}$ geben wir im Text an.

Diese Interpretation des Exponenten $\alpha(\boldsymbol{s})$ wird durch die Abbildung 4.16 bestätigt, die trotz der groben Rasterung der Bildpunkte ein detailreiches Bild der Poincaré-Fläche zeichnet und reguläre und chaotische Gebiete in recht guter Übereinstimmung mit Abbildung 3.9 identifiziert. Abbildung 4.16 steht zudem keineswegs im Widerspruch zu dem entsprechenden $m_0(\boldsymbol{s})$-Plot 4.13, sondern ergänzt ihn in der gewünschten Weise. So wird hier zum Beispiel die große Inselkette feiner aufgelöst und wir finden die Beobachtung bestätigt, die wir bei Abbildung 4.13 gemacht haben: Das Quasiintegral zeigt in der Umgebung periodischer Punkte (abgesehen vom Fixpunkt im Ursprung von Σ_E) ein stärker divergentes Verhalten[4]. Das gleiche Phänomen erkennt man auch anhand der vielen kleineren Inselketten, die im $\alpha(\boldsymbol{s})$-Plot deutlich und in Übereinstimmung mit den entsprechenden Regionen des Poincaré-Schnittes hervortreten — im $m_0(\boldsymbol{s})$-Plot traten diese Inselketten überhaupt nicht zutage.

Insgesamt scheint damit unser Vorgehen — insbesondere das Ignorieren der $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ mit $m < 8$ — gerechtfertigt. Wir weisen aber darauf hin, daß das $\alpha(\boldsymbol{s})$-Verfahren die besten Resultate bei mittleren Energien (wie zum Beispiel $E = 0.20$) erbringt. Wir haben zum Vergleich auch $\alpha(\boldsymbol{s})$-Abbildungen bei den Energien $E = 0.01$ und $E = 0.5$ angefertigt. Bei der niedrigeren Energie ergab sich im wesentlichen das gleiche Resultat wie im $m_0(\boldsymbol{s})$-Plot 4.12; es wurden keine zusätzlichen Strukturen gefunden. Der $\alpha(\boldsymbol{s})$-Plot zur Energie $E = 0.50$ reproduzierte die in Abbildung 4.14 dargestellten „Strukturen im Chaos“ nur teilweise. Zumindest ergab sich aber auch mit dem eher spekulativen $\alpha(\boldsymbol{s})$-Verfahren kein Widerspruch; das heißt, wir haben mit diesem Verfahren keine Eigenschaften gefunden, die im Widerspruch zu den Ergebnissen stehen, die man aus den Poincaré-Schnitten erhält.

In den letzten beiden Abschnitten haben wir drei neue Verfahren vorgeschlagen, die sich sehr gut zur Analyse der Konvergenzeigenschaften des Quasiintegrals $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ eignen. Darüber hinaus ist es möglich, mit Hilfe dieser Verfahren diejenigen Strukturen in der Poincaré-Fläche zu reproduzieren und zu charakterisieren, die man gewöhnlich aus Poincaré-Schnitten erhält. Man kann den $\alpha(\boldsymbol{s})$-Abbildungen aber oft noch erheblich mehr Information entnehmen als den entsprechenden Poincaré-Plots. Dies gelingt zum Beispiel

---

[4] Der Grund für die schnellere Divergenz in der Nähe von Resonanzen ist in dem lokalen Charakter des Quasiintegrals und ganz allgemein der Normalformentheorie zu suchen — man vergleiche hierzu die Erörterungen in Kapitel 1. Typischerweise treten in der Nähe von periodischen Punkten bei der Transformation der Hamilton-Funktion „kleine Nenner“ auf, die die Konvergenz der Transformation schließlich verhindern. Um die Situation in der Umgebung eines anderen periodischen Punktes als des Ursprunges zu untersuchen, müßte man zunächst die Hamilton-Funktion um diesen Punkt herum entwickeln und dann die Normalisierungsprozedur mit der so erhaltenen neuen Hamilton-Funktion durchführen. Alternativ hierzu wird in [La90] ein Verfahren beschrieben, mit dem die Normalformtransformation nicht, wie hier, in der Nähe des Entwicklungspunktes am besten konvergiert, sondern statt dessen in einer vorzugebenden Entfernung von diesem Entwicklungspunkt.

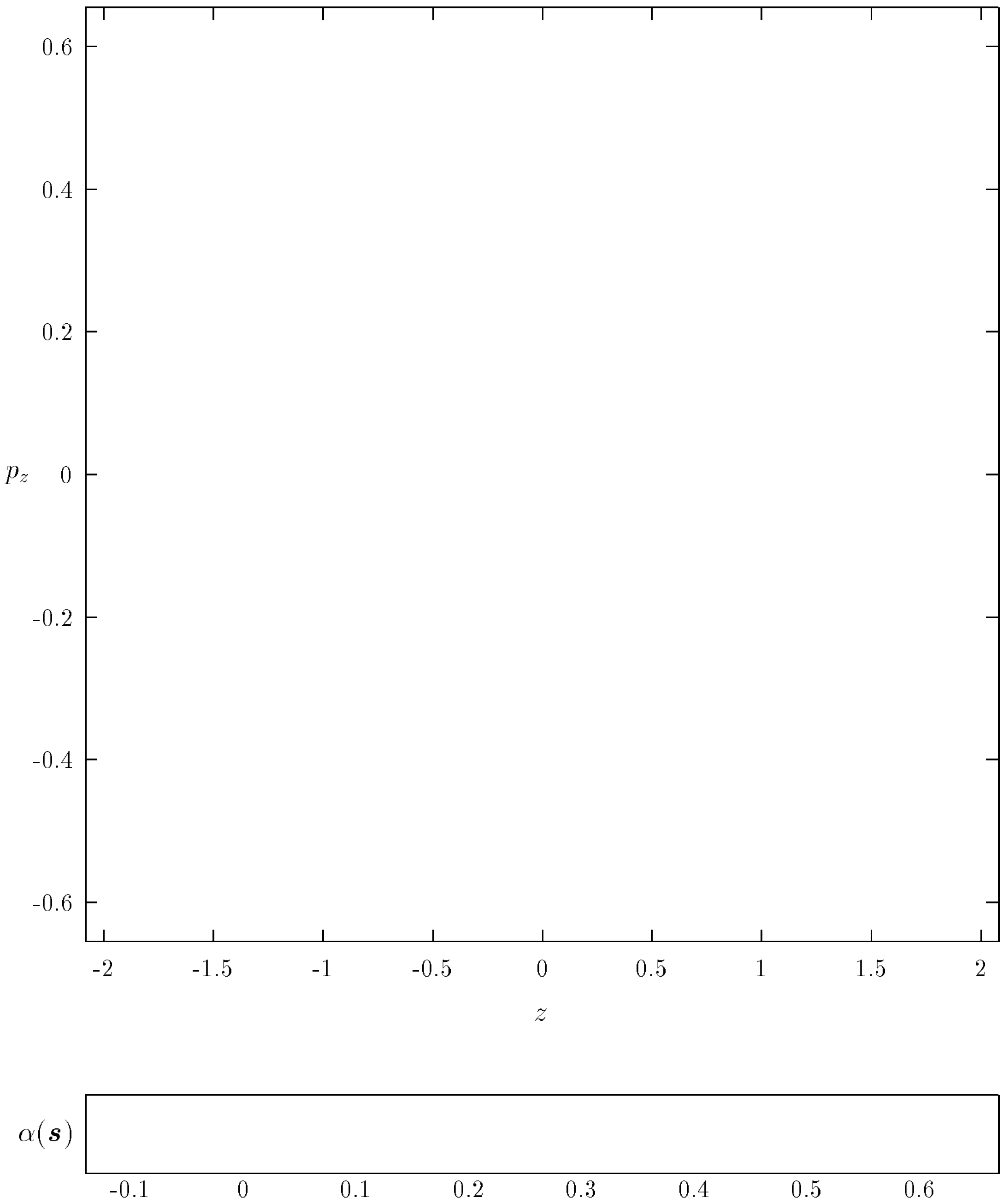


Abbildung 4.16: $\alpha(\boldsymbol{s})$-Plot für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche bei der Energie $E = 0.20$. Dargestellt ist die Poincaré-Fläche, die in ein Raster von 200×200 Punkten $\boldsymbol{s}$ zerlegt wurde. Bei der Berechnung von $\alpha(\boldsymbol{s})$ wurden die $\eta_{\mathrm{BG}}^{(m)}(\boldsymbol{s})$ mit $m = 8, 10, 12, 14$ berücksichtigt. Die Leiste am unteren Bildrand zeigt die Farbkodierung von $\alpha(\boldsymbol{s})$.

dann, wenn letztere nur noch ein stochastisches Gebiet zeigen, das aber mit Hilfe des Konvergenzverhaltens des Quasiintegrals noch weitergehend charakterisiert werden kann. Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß man durch Berechnung des Ljapunov-Exponenten für die Punkte der Poincaré-Fläche zu vergleichbaren Resultaten gelangen kann. Dies wird in [KaRo92] demonstriert. Im Gegensatz zur Analyse mittels Ljapunov-Exponenten, die als rein phänomenologische Größen berechnet werden, erhält man aber durch die Verwendung der Quasiintegrale nicht allein Aussagen über die Regularität, sondern auch über die Konvergenz der entsprechenden normalisierenden kanonischen Transformation.

Ein Nachteil dieser globalen Verfahren zur Analyse der Poincaré-Fläche ist der sehr große *numerische Aufwand*. Um ein aussagekräftiges Bild zu gewinnen, muß man für sehr viele Punkte über ein längeres Zeitintervall hinweg Trajektorien durch numerische Integration berechnen, um die erforderlichen Mittelungsprozesse durchführen zu können. Ein Nachteil, den unsere Analysemethoden aber mit dem sich auf Ljapunov-Exponenten stützenden Verfahren gemein haben.

Kapitel 5

Typische Eigenschaften von Quasiintegralen

Nachdem wir in den Abschnitten 4.2 und 4.3 das Quasiintegral der Brown-Gabrielse-Magnetflasche im Hinblick auf seine Konvergenzeigenschaften ausführlich analysiert haben, betrachten wir in diesem Kapitel kursorisch die Quasiintegrale einiger weiterer Modellsysteme. Unser Anliegen ist hier vor allem, einfache Gesetzmäßigkeiten in den Formeln der Quasiintegrale zu finden, so daß wir die Konvergenzeigenschaften abschätzen und verschiedene Quasiintegrale miteinander vergleichen können, ohne dafür langwierige Untersuchungen wie in den Abschnitten 4.2 und 4.3 durchführen zu müssen. Die beiden für das Folgende wesentlichen Gesichtspunkte sind die Zahl der ein Quasiintegral $I_{\mathrm{DFS}}^{(m)}$ konstituierenden Monome und die (betragsmäßige) Größe der Koeffizienten der Monome.

5.1 Die Zahl der Summanden

Wir wenden uns zunächst der Frage nach der Zahl der Monome zu, aus denen ein Quasiintegral $I_{\mathrm{DFS}}^{(m)}$ zusammengesetzt ist.

Als Grundlage unserer Untersuchung dienen die drei magnetischen Flaschen, für die wir in Kapitel 2 die Hamilton-Funktionen hergeleitet haben: die Brown-Gabrielse-Magnetflasche (Gl. (3.1)), die Dragt-Finnsche „Mirror Machine“ (Gl. 2.41)) und das Størmer-System (Gl. (2.62)). Um eine Vorstellung davon zu bekommen, inwieweit unsere Ergebnisse spezifisch für Hamilton-Funktionen vom Magnetflaschentyp (4.4) sind, beziehen wir außerdem das Hénon-Heiles-System [HeHe64] in unsere Betrachtungen ein. Dieses System wird durch die folgende Hamilton-Funktion beschrieben:

$$H_{\mathrm{HH}}(\rho, z, p_\rho, p_z) = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \rho^2 + p_z^2 + z^2\right) + \rho^2 z - \frac{1}{3}z^3 \quad . \tag{5.1}$$

H_{HH} ist vom Gustavson-Typ (1.61) und kann demnach schon mit dem Birkhoff-Gustavsonschen Normalformenkalkül behandelt werden. In der folgenden Tabelle führen wir die für die Integralberechnung wesentlichen Charakteristika der vier Hamilton-Funktionen auf:

System	Typ	Zahl der Monome in H		
Hénon-Heiles	Gustavson	6	—	„einfach“
Brown-Gabrielse	Magnetflasche	8	—	„einfach“
Dragt-Finn	Magnetflasche	5	—	„einfach“
Størmer	Magnetflasche	80	—	„kompliziert“

Es wird sich zeigen, daß alle vier Modellsysteme — trotz ihrer in dieser Tabelle deutlich werdenden Unterschiedlichkeit — sich bezüglich der Summandenzahl ihrer Quasiintegrale sehr ähnlich verhalten.

Das Quasiintegral der Brown-Gabrielse-Magnetflasche entnehmen wir dem Anhang D. Mit unserem in Kapitel 4 beschriebenen Verfahren — das, weil es den Gustavson-Fall als Spezialfall enthält, auch auf H_{HH} anwendbar ist — haben wir auch die anderen drei Hamilton-Funktionen auf DFS-Normalform transformiert und dann die entsprechenden Quasiintegrale in den ursprünglichen Koordinaten bestimmt. Wegen des trotz aller Vereinfachungen immer noch recht großen Rechenaufwandes haben wir diese Transformationen nur bis zum Grad 12 einschließlich durchgeführt.

Für die folgenden Untersuchungen stehen also die Quasiintegrale $I_{\mathrm{HH}}^{(m)}$, $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$, $I_{\mathrm{DF}}^{(m)}$ und $I_{\mathrm{S}}^{(m)}$ mit $m = 2, 3, \ldots, 12$ zur Verfügung. Dabei ist zu beachten, daß die Hamilton-Funktionen H_{BG} sowie H_{DF} und somit auch die entsprechenden Quasiintegrale gerade Funktionen sind.

Wir geben die $I^{(m)}$ hier nicht explizit an. Statt dessen diskutieren wir, wie die Anzahl der Summanden dieser Polynome mit zunehmendem m anwächst. Hierzu definieren wir $N(m)$ als die Anzahl der Monome des Quasiintegrals $I^{(m)}$ und werten diese Funktion für unsere Beispielsysteme aus. Das Ergebnis dieser Abzählaufgabe ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

Bei kleinen Graden m besteht das Quasiintegral des Hénon-Heiles-Systems offensichtlich aus mehr Summanden als die Integrale der anderen Systeme. Diese Tatsache liegt darin begründet, daß das formale Integral

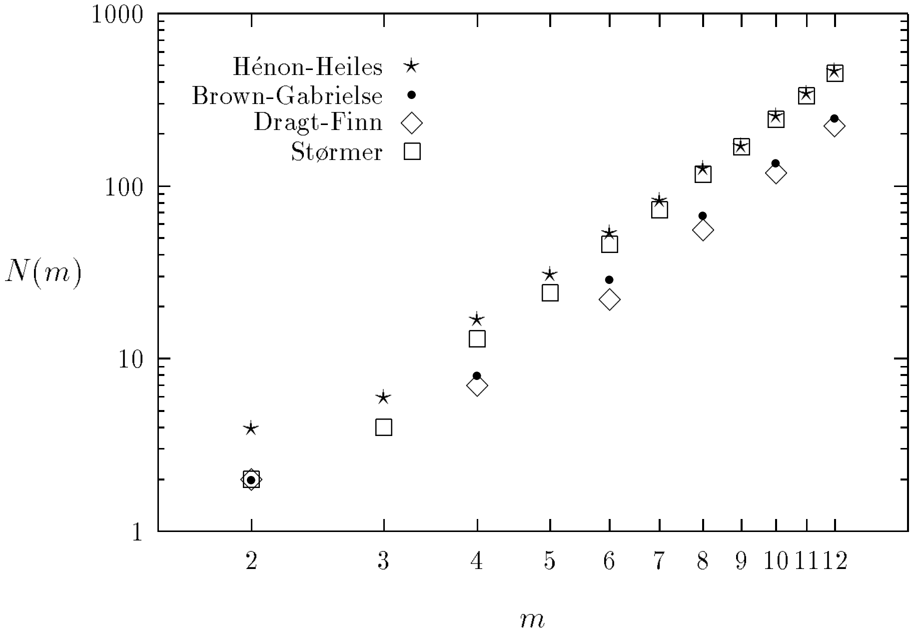


Abbildung 5.1: $N(m)$ in doppeltlogarithmischer Auftragung.

der auf Normalform transformierten Hamilton-Funktion H_{HH} mehr Terme enthält als die formalen Integrale der anderen normalisierten Systeme: Es besteht aus vier Summanden, gegenüber den nur zwei Summanden bei den Magnetflaschen-Hamilton-Funktionen. Man vergleiche hierzu die Gln. (4.4) und (4.13). Mit größer werdendem m ändert sich das Bild, denn nun macht sich der Einfluß der vielen Terme der Størmer-Hamilton-Funktion (2.62) bemerkbar. Ohne diesen Punkt hier eingehender diskutieren zu wollen, merken wir an, daß eine komplizierte Hamilton-Funktion bei der Lösung der homologischen Gleichung (1.66a) im Zuge der Normalformtransformation komplizierte erzeugende Funktionen F_m zur Folge hat. Umgekehrt bedeutet dies nach der Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten, daß das Quasiintegral entsprechend kompliziert ist. Man erkennt diesen Sachverhalt in Abbildung 5.1 daran, daß $I_{\mathrm{S}}^{(m)}$ bei wachsendem m sehr schnell eine mit $I_{\mathrm{HH}}^{(m)}$ vergleichbare Monomanzahl erreicht. Dagegen besitzen die zu den einfacheren Hamilton-Funktionen H_{BG} und H_{DF} gehörenden Quasiintegrale durchweg nur etwa halb so viele Summanden wie die beiden anderen $I^{(m)}$.

Interessant ist auch der Vergleich der Monomzahl der beiden Quasiintegrale $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ und $I_{\mathrm{DF}}^{(m)}$. In Abschnitt 2.3 haben wir beschrieben, wie die Dragt-Finn-Flasche als gezielte Vereinfachung der Brown-Gabrielse-Flasche konstruiert wird. Die einfachere Struktur von H_{DF} gegenüber H_{BG} schlägt sich tatsächlich in der Abbildung 5.1 nieder, aber der Effekt ist eher marginal. Typischerweise ist die Monomzahl der Brown-Gabrielse-Flasche nur um einen Faktor 1.2 bis 1.3 größer als die der Dragt-Finn-Flasche.

Wir können demnach feststellen, daß die Komplexität der zugrunde liegenden Hamilton-Funktion die Komplexität des Quasiintegrals in der Tat beeinflußt. Dieser Effekt wird aber erst bedeutsam, wenn man zwei Hamilton-Funktionen vergleicht, deren Summandenzahlen sich sehr stark unterscheiden, beispielsweise H_{BG} und H_{S}. Entscheidender ist der Einfluß der Gestalt des quadratischen Anteils der Hamilton-Funktion. Wir haben gesehen, daß ein Gustavsonsches H_2 zu einem erheblich komplexeren Quasiintegral führt als ein Magnetflaschen-H_2 mit einer vergleichbaren Summandenzahl.

Es ist ein auffallendes Merkmal der Abbildung 5.1, daß $N(m)$ für alle vier betrachteten Systeme bei hinreichend großem m einem Potenzgesetz genügt. Offensichtlich gilt in sehr guter Näherung:

$$N(m) \approx b\,m^{\beta} \quad \text{mit} \quad b, \beta = \text{konst.} \quad . \tag{5.2}$$

Wir haben β aus den Daten der Abbildung 5.1 für $m \geq 4$ mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt:

System	β
Hénon-Heiles	3.02
Brown-Gabrielse	3.11
Dragt-Finn	3.16
Størmer	3.25

Im Mittel ergibt sich hieraus

$$\beta = 3.14 \pm 4\% \quad . \tag{5.3}$$

Dies ist ein erstaunliches Resultat: Trotz der sehr unterschiedlichen Struktur der einzelnen Hamilton-Funktionen wächst die Summandenzahl der entsprechenden Quasiintegrale in allen vier Fällen nahezu gleich schnell.

Interessanterweise wächst in dem betrachteten m-Intervall die Dimension des Polynomraumes $\mathcal{L}^{(m)} := \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_m$, dessen Elemente die $I^{(m)}$ ja sind, nach fast genau dem gleichen Potenzgesetz, denn es gilt:

$$\dim(\mathcal{L}^{(m)}) \approx c\,m^{\gamma} \quad \text{mit} \quad c = \text{konst.}, \; \gamma = 3.04 \quad . \tag{5.4}$$

(Dies ist wiederum eine Kleinste-Quadrate-Näherung für $4 \leq m \leq 12$.) Demnach scheint es eine typische Eigenschaft der Quasiintegrale zu sein, daß bei wachsendem m stets etwa der gleiche (systemabhängige) Bruchteil der insgesamt zur Verfügung stehenden Monome für die Darstellung von $I^{(m)}$ benötigt wird. Bei der Brown-Gabrielse-Magnetflasche und dem Størmer-System finden wir beispielsweise

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{N_{\mathrm{BG}}(m)}{\dim(\mathcal{L}^{(m)})} & \approx & 14\% \\[2ex] \dfrac{N_{\mathrm{S}}(m)}{\dim(\mathcal{L}^{(m)})} & \approx & 24\% \end{array}\right. \qquad \text{für} \quad 4 \leq m \leq 12 \quad .$$

5.2 Die Koeffizienten

Neben der Anzahl der Summanden sind die Koeffizienten der Monome der zweite bestimmende Faktor für die Konvergenz der Quasiintegrale.

Für die vier Hamilton-Funktionen gilt:

System	größter Koeffizientenbetrag	Mittelwert aller Koeff.-Beträge	Charakterisierung der Koeffizienten
Hénon-Heiles	1.0	0.555	„klein“
Brown-Gabrielse	0.5	0.290	„klein“
Dragt-Finn	0.5	0.425	„klein“
Størmer	13860	644.2	„groß“

Das Størmer-System erweist sich auch hier wieder als das „schwierigste“ der Modellsysteme.

In Abbildung 5.2 haben wir die Beträge aller Koeffizienten der vier Quasiintegrale als Funktion der Gustavson-Indizes k der entsprechenden Monome aufgetragen. Dieser Abbildung entnehmen wir zweierlei. Zum einen streuen die Koeffizientenbeträge jedes Quasiintegrals über viele Größenordnungen: typischerweise über sechs, im Fall des Størmer-Systems über zehn Größenordnungen. Dies erschwert die numerische Auswertung erheblich. Zum anderen ist hier, wie auch schon bei $N(m)$, eine steigende Tendenz mit wachsendem m zu erkennen.

Um den zweiten Punkt genauer untersuchen zu können, haben wir die von null verschiedenen Koeffizientenbeträge für jeden Grad m gemittelt. Die so erhaltene Funktion $\overline{\mathrm{Koeff}}(m)$ ist in Abbildung 5.3 skizziert. Die steigende Tendenz der Koeffizienten tritt hier deutlich zutage; ein eindeutiger funktionaler Zusammenhang zwischen m und $\overline{\mathrm{Koeff}}(m)$ läßt sich allerdings nicht

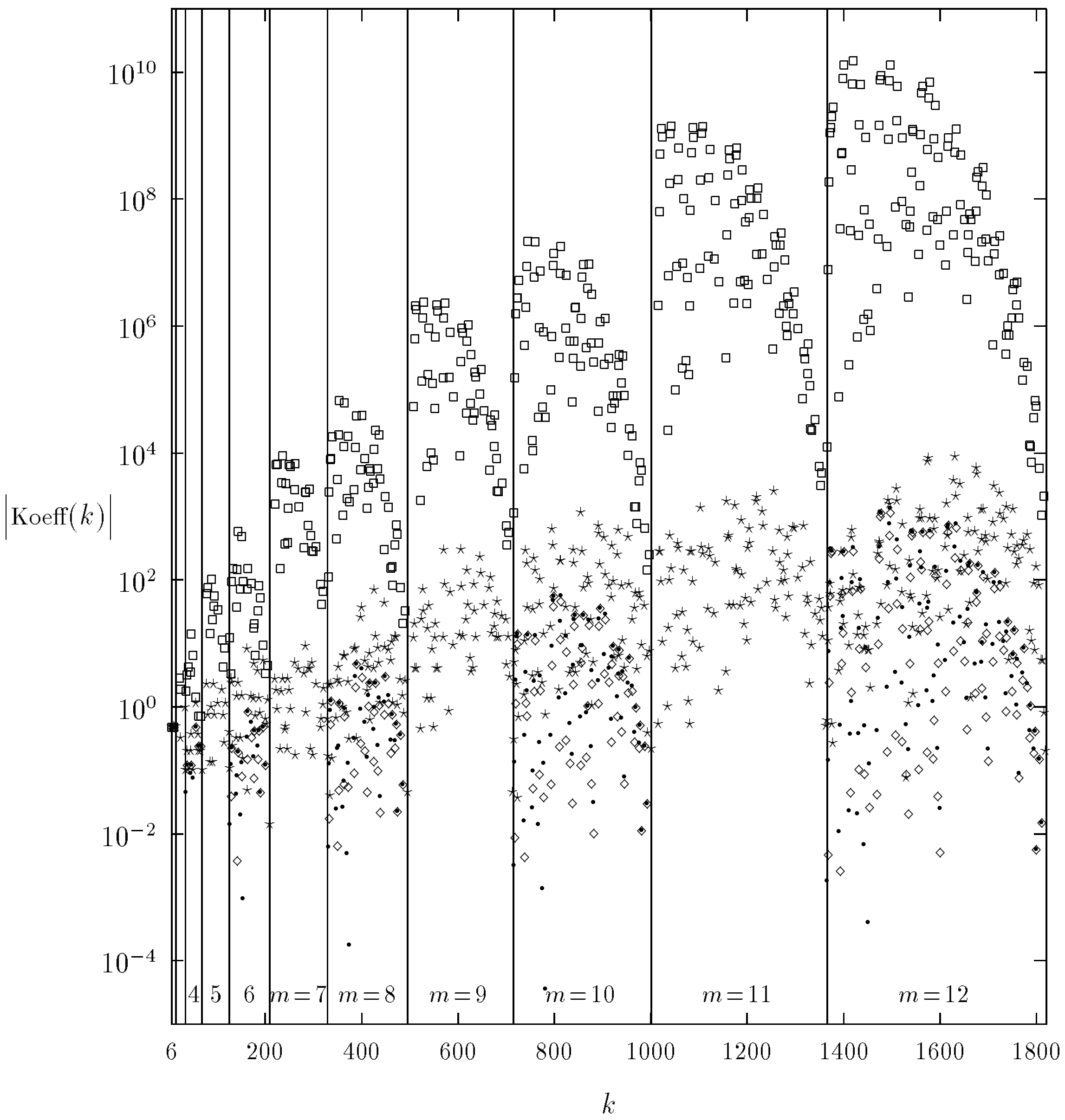


Abbildung 5.2: Halblogarithmische Darstellung der Beträge der Monomkoeffizienten für die vier Quasiintegrale. Auf der Abszisse ist der Gustavon-Index k aufgetragen; die vertikalen Linien trennen die verschiedenen Monomgrade m. $\star \mathrel{\hat{=}}$ Hénon-Heiles; $\bullet \mathrel{\hat{=}}$ Brown-Gabrielse; $\diamond \mathrel{\hat{=}}$ Dragt-Finn; $\square \mathrel{\hat{=}}$ Størmer.

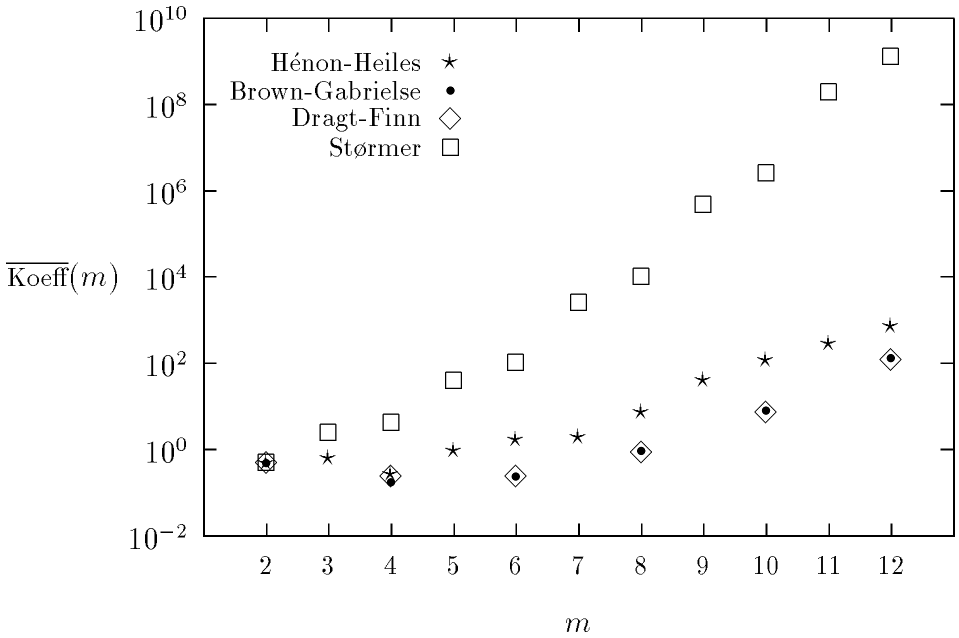


Abbildung 5.3: Mittlere Koeffizientenbeträge beim Grad m.

erkennen. Lediglich die Koeffizienten des Størmer-Quasiintegrals scheinen annähernd exponentiell mit m anzuwachsen. Wenn man die Grade 6 bis 12 zugrunde legt, findet man für dieses System:

$$\overline{\mathrm{Koeff}}(m) \approx d\, e^{\delta m} \quad \text{mit} \quad d = \text{konst.},\ \delta = 2.7 \quad . \tag{5.5}$$

Wir sind nun in der Lage, qualitative Aussagen über das Konvergenzverhalten der Quasiintegrale unserer vier Modellsysteme zu machen. Es ist bekannt, daß alle vier Systeme nichtintegrabel sind. — Für die Brown-Gabrielse-Flasche haben wir den Nachweis in Kapitel 3 geführt; für die anderen Systeme vergleiche [HeHe64, DrFi79, Se90]. — Der Nichtintegrabilität entspricht die Divergenz der hier betrachteten Quasiintegrale, die ja im Fall der Konvergenz die entsprechenden zweiten Integrale approximieren würden. Im Rahmen des vorliegenden Kapitels deutet sich die Divergenz der $I^{(m)}$ durch die sehr schnelle Zunahme der Summandenzahl mit m an, die mit dem raschen Anwachsen der Koeffizienten einhergeht.

Vor dem Hintergrund der Untersuchungen in Kapitel 4 fragen wir nach der Möglichkeit, die Quasiintegrale in einer Umgebung des Entwicklungspunktes zur Analyse des Phasenraumes zu verwenden. Für die Brown-Gabrielse-Magnetflasche erwies sich dieser Ansatz ja als sehr fruchtbar. Weil sich nach den Ergebnissen dieses und des vorangehenden Abschnitts für das Dragt-Finn-System ähnliche (sogar ein wenig vorteilhaftere) Eigenschaften wie für die Brown-Gabrielse-Flasche ergeben, nehmen wir an, daß auch die „Mirror Machine“ nutzbringend mit den Verfahren aus Kapitel 4 untersucht werden kann.

Das Hénon-Heiles-System stellt sich bezüglich der beiden hier diskutierten Kriterien ungünstiger dar, hat aber den entscheidenden Vorteil, daß der zugängliche Teil des Phasenraumes (bei kleinen Energien) beschränkt und klein ist, so daß die ungünstigere Koeffizientenstruktur mehr als aufgewogen werden kann. In der Tat zeigt die in [St91] beschriebene Analyse der dem Hénon-Heiles-System sehr ähnlichen Penning-Falle positive Resultate, und Gustavson selbst erzeugte für das Hénon-Heiles-System erfolgreich Höhenliniendiagramme von $I_{\mathrm{HH}}^{(m)}$ [Gu66]. Bei diesen Analysen wurde der Gustavsonsche Normalformenkalkül zugrunde gelegt.

Das Størmer-System schließlich vereint beide angesprochenen Nachteile in sich. Es besitzt einen „offenen“ Phasenraum und hat eine extrem ungünstige Koeffizientenstruktur. Wir erwarten deshalb, daß es relativ schwierig sein wird, dieses System mittels seines Quasiintegrals zu untersuchen.

Schluß

Wir haben uns in dieser Arbeit ausführlich mit der Teilchendynamik in magnetischen Flaschen beschäftigt, die für viele praktische Anwendungen wichtig sind. Im Rahmen der konventionellen Analyse der Brown-Gabrielseschen Magnetflasche konnten wir den gebundenen Charakter der Bewegung in diesem System nachweisen, fanden ein typisches KAM-Szenario und wiesen damit den teilweise irregulär-chaotischen Charakter der Teilchenbewegung nach.

In Kapitel 4 haben wir beschrieben, wie erstmalig die Anwendung der Dragt-Finn-Stegemertenschen Normalformentheorie gelang. Wir haben mit den Mitteln der linearen Algebra ein Verfahren entwickelt, mit dem die Hamilton-Funktionen magnetischer Flaschen bis zu sehr hohen Ordnungen in DFS-Normalform transformiert werden können. Dabei erwies sich die Verwendung einer hier neu eingeführten Anordnung („Magnetflaschenanordnung") der Basismonome des Raumes $\mathcal{L}_m$ als äußerst nützlich. Unter Verwendung unseres Normalisierungsverfahrens konnten wir die Normalform und das Quasiintegral der Brown-Gabrielse-Magnetflasche bis zur vierzehnten Ordnung angeben. Dies ist die höchste uns bekannte Ordnung einer Normalformtransformation.

Wir haben das Quasiintegral $I_{\text{BG}}^{(m)}$ für einzelne Punkte der Poincaré-Fläche auf seine Konvergenzeigenschaften hin überprüft. Für hinreichend niedrige Energien konvergierte $I_{\text{BG}}^{(m)}$ — in dem betrachteten m-Intervall — bei geeigneter Wahl des Startpunktes $\boldsymbol{s}$ sehr gut, obwohl für magnetische Flaschen das zugängliche Teilgebiet des Phasenraumes unbeschränkt ist. Bei höheren Energien oder einem ungünstigeren Startwert $\boldsymbol{s}$ trat die für ein nichtintegrables System erwartete Divergenz ein.

Diese ortsabhängigen Konvergenz- bzw. Divergenzeigenschaften von $I_{\text{BG}}^{(m)}$ ausnutzend, haben wir drei neue Verfahren zur Analyse des Phasenraumes vorgeschlagen und am Beispiel unserer Modellmagnetflasche nachgewiesen, daß man mit diesen Verfahren zumindest die aus den Poincaré-Plots bekannten Strukturen wie invariante Linien und Poincaré-Birkhoff-Ketten reproduzieren kann. Darüber hinaus gelang es auch, ähnliche Strukturen in Teilgebieten der Poincaré-Fläche zu identifizieren, die sich im Poincaré-Schnitt lediglich als die homogene Punktwolke einer stochastischen Region darstellen. Es bleibt zukünftigen Untersuchungen vorbehalten, die Natur dieser bislang unbekannten Strukturen zu erforschen und die Ursachen ihrer Entstehung zu klären. Dabei könnte es sich, ähnlich wie in [KaRo92], als nützlich erweisen, die Konvergenz- bzw. $m_0(\boldsymbol{s})$- und $\alpha(\boldsymbol{s})$-Plots mit einer entsprechenden Darstellung des Ljapunov-Exponenten zu vergleichen.

Eng verbunden mit dieser Problematik ist die Frage nach allgemeinen theoretischen Kriterien für die Geschwindigkeit, mit der ein Quasiintegral konvergiert bzw. divergiert. Sind diese Eigenschaften schon an der ursprünglich gegebenen Hamilton-Funktion abzulesen? Wir konnten diesbezüglich in dem für diese Arbeit vorgegebenen Zeitrahmen nur einige sehr grobe Vergleiche anstellen. Bei welchem Grad $m_0(\boldsymbol{s})$ tritt insbesondere der Umschlag von Konvergenz zur Divergenz ein? Dies ist eine wesentliche Fragestellung, wenn man an einem möglichst konstanten Quasiintegral interessiert ist und wissen will, bis zu welcher Ordnung $I_{\mathrm{BG}}^{(m)}$ hierfür berechnet werden muß. Umgekehrt bedeutete bei einem System mit zwei Freiheitsgraden der Bewegung der Nachweis der Konvergenz des Quasiintegrals für $m \to \infty$ die Integrabilität des Systems — das Wunschresultat bei der „Suche nach dem zweiten Integral der Bewegung“.

Es stellt sich schließlich auch die Frage, inwiefern das Konvergenzverhalten der Normalformtransformation durch die Wahl der Erzeugenden F_m beeinflußbar ist — wir haben mehrfach darauf hingewiesen, daß diese Funktion bei der Lösung der homologischen Gleichung nicht eindeutig festgelegt ist, so daß man gegebenenfalls durch eine geschickte Wahl von F_m eine erheblich bessere Konstanz des Quasiintegrals erzielen könnte.

Nachdem wir in der vorliegenden Arbeit die DFS-Theorie in der praktischen Anwendung etabliert haben, kann man nun beispielsweise versuchen, diese Theorie dort anzuwenden, wo schon die Birkhoff-Gustavson-Theorie Erfolge zu verzeichnen hatte. Hier sind vor allem die Beschreibung der quantenmechanischen Pendants und die Quantisierung chaotischer klassisch-mechanischer Systeme zu nennen. Auf diesem Gebiet findet die Birkhoff-Gustavson-Normalform schon seit einiger Zeit eine wichtige Anwendung; man vergleiche hierzu [SwDe79, ShRe82, Ro84, Ec86, Cr90].

Wir haben offensichtlich mit der Anwendung der verallgemeinerten Normalformentheorie nicht nur eine Lücke geschlossen, sondern gleichzeitig einige neue untersuchenswerte Fragen aufgeworfen.

... the rest is silence.

William Shakespeare
Hamlet, Prince of Denmark

Anhang A

Zweite Integrale der Bewegung

Wir geben in diesem Abschnitt für *alle* Hamilton-Funktionen $H \in \mathcal{L}$ die zweiten Integrale an, die man mit Hilfe der in Abschnitt 1.2.3 diskutierten Dragt-Finn-Stegemerten-Normalformentheorie erhält. Hiermit ist folgendes gemeint: Wir geben in Abschnitt A.2 eine noch etwas enger gefaßte Definition der Normalform einer Hamilton-Funktion. Dann können wir für fast[1] jede Hamilton-Funktion aus $\mathcal{L}$, die in diesem engeren Sinn in Normalform ist, explizit das formale Integral der Bewegung I_{DFS} angeben.

Wir stützen uns auf die von Galin [Ar89, Anhang 6] erstellte Klassifizierung aller reellen quadratischen Hamilton-Funktionen $H_2 \in \mathcal{L}_2$ für Systeme mit beliebig vielen Freiheitsgraden der Bewegung n. Diese Klassifizierung beruht darauf, daß die von null verschiedenen Eigenwerte der Hamilton-Matrix (1.34) immer als gewisse Paare oder Quadrupel auftreten.

In Abschnitt A.1 illustrieren wir zunächst für den Fall $n = 2$ das Verfahren zur Klassifizierung der Hamilton-Funktionen und Bestimmung des zweiten Integrals. Im Anschluß daran verwenden wir in Abschnitt A.2 die Resultate Galins und diskutieren die Situation für beliebige n.

A.1 Zweidimensionale Hamilton-Systeme

Für das Folgende sind die Gln. (1.95) und (1.108) von entscheidender Bedeutung. Sie geben explizite Formeln an für eine beliebige quadratische Hamilton-Funktion H_2 bzw. für das entsprechende zweite Integral I_{DFS} der

[1] Den Grund für diese Einschränkung werden wir in Abschnitt A.2 (unter Punkt VI auf Seite 166) verdeutlichen.

DFS-Theorie. Sowohl H_2 als auch I_{DFS} hängen nur von der Hamilton-Matrix L ab. Zur Erinnerung: nach Gl. (1.34) gilt für die Hamilton-Matrix: $L = J\,\mathrm{Hess}(H_2(\boldsymbol{z}))$. Die einzige Einschränkung, die wir an dieser Stelle machen, ist die Forderung, daß die Hamilton-Funktion und damit auch L reell sein sollen[2]. Demnach ist die Klassifizierung aller H_2 gleichbedeutend mit der Klassifizierung der reellen Matrizen L.

Jede $(2n, 2n)$-Matrix kann mittels einer Ähnlichkeitstransformation auf Jordansche Normalform transformiert werden. Wir beschränken uns hier, anders als in Gl. (1.2), auf die reelle Version dieses Satzes, die man beispielsweise in [ArPl90] findet: Die reelle Matrix L kann durch eine Ähnlichkeitstransformation mit einer orthogonalen (also insbesondere ebenfalls reellen) Transformationsmatrix X in die folgende Gestalt gebracht werden:

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r \end{pmatrix} \quad , \tag{A.1a}$$

wobei für die J_k entweder

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix} \tag{A.1b}$$

oder

$$J_k = \begin{pmatrix} R_k & \mathrm{id}_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mathrm{id}_2 \\ 0 & & & R_k \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad R_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix} \,, \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{A.1c}$$

$(\lambda_k, a_k, b_k \in \mathbf{R})$ gilt. Im Fall eines Jordan-Blockes vom Typ (A.1b) ist λ_k ein reeller Eigenwert von $\tilde{L}$, während ein Jordan-Block vom Typ (A.1c) einem komplex-konjugierten Eigenwertpaar $a_k \pm i b_k$ entspricht. Wir verwenden die Jordan-Normalform hier in ihrer reellen Form, damit wir als Resultat unserer Untersuchungen wieder reelle H_2 und reelle Integrale I_{DFS} erhalten.

Wir gehen von nun an davon aus, daß L in reeller Jordanscher Normalform vorliegt. Diese zusätzliche Annahme vereinfacht die Darstellung der folgenden

[2] Man könnte hier einwenden, daß zusätzlich zu fordern sei, L ginge gemäß $L = JS$ aus einer *symmetrischen* Matrix S hervor, denn in Gl. (1.34) ist $S = \mathrm{Hess}(H_2(\boldsymbol{z}))$, und die Hesse-Matrix ist symmetrisch. Dem ist entgegenzuhalten, daß wir hier den Weg in umgekehrter Richtung gehen: Wir fragen nicht nach der Hamilton-Matrix, die man für ein gegebenes H_2 erhält, sondern mit welchen Matrizen L man gemäß $H_2(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{z}\cdot J^{-1} L \boldsymbol{z}$ eine quadratische Hamilton-Funktion definieren kann. Dies gelingt offensichtlich mit beliebigen Matrizen L und damit auch mit beliebigen, nicht notwendigerweise symmetrischen Matrizen S, wenn man L durch $L := JS$ definiert.

Sachverhalte erheblich, ist aber nicht prinzipiell notwendig. Wir merken hierzu lediglich an, daß Komplikationen für eine nicht in Normalform befindliche Hamilton-Matrix L dadurch entstehen können, daß die Koordinatentransformation $\boldsymbol{z} \to \tilde{\boldsymbol{z}} = X^T \boldsymbol{z}$, mit der man L in die Gestalt $\tilde{L} = X^T L X$ der Gl. (A.1) bringt, in der Regel nicht kanonisch ist. Da dieser Abschnitt A.1 aber lediglich der Motivation der Galinschen Vorgehensweise dient, müssen wir hier nicht notwendigerweise eine vollständige Beschreibung geben. In der allgemeinen, in Abschnitt A.2 vorgestellten Theorie ist eine entsprechende Forderung an L nicht notwendig.

Ausgehend von einer Hamilton-Funktion $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$, die sich in DFS-Normalform befindet[3] und deren Hamilton-Matrix gemäß Gl. (A.1) in Jordan-Normalform vorliegt, bestimmen wir jetzt die zweiten Integrale der Bewegung im Fall zweier Freiheitsgrade der Bewegung ($n = 2$). Wir nutzen die Tatsache aus, daß das Eigenwertspektrum von L zwei wichtigen Bedingungen unterliegt. Zum einen treten Eigenwerte von L, die nicht rein reell sind, immer als komplex-konjugierte Paare $\lambda, \overline{\lambda}$ auf, weil L reell ist. Zum anderen ist mit λ auch $-\lambda$ ein Eigenwert von L, wie wir schon in Abschnitt 1.1.2 gezeigt haben. Damit sind die folgenden Eigenwerttupel von L möglich: Quadrupel $\pm a \pm ib$, Paare $\pm a$ und $\pm ib$ sowie 0. a und b sind hier von null verschiedene reelle Zahlen.

Es ergeben sich die nachfolgend aufgeführten Möglichkeiten für die Eigenwerte λ der $(4,4)$-Matrix L und entsprechend für die jeweiligen Integrale der Bewegung I_{DFS}:

1. L hat vier verschiedene Eigenwerte $\lambda = \pm a \pm ib$ mit $a, b \neq 0$. In diesem Fall erhalten wir für L die (bis auf Zeilen- und Spaltenvertauschungen) eindeutige Darstellung:

$$L = \begin{pmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ -b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} \quad . \tag{A.2a}$$

   Für die entsprechende Hamilton-Funktion gilt dann mit Gl. (1.95)

$$H_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = -a(q_1 p_1 + q_2 p_2) - b(q_1 p_2 - q_2 p_1) \quad . \tag{A.2b}$$

   Weil L als $(4,4)$-Matrix mit vier verschiedenen Eigenwerten diagonalisierbar ist, gilt in der Nomenklatur von Abschnitt 1.2.4 die Jordan-Zerlegung $L = D$, da es keinen nilpotenten Anteil von L gibt. Deshalb

[3] Wegen Stegemertens Satz 1.3 stellt diese Voraussetzung keine Einschränkung dar, denn jede Hamilton-Funktion kann durch eine kanonische Transformation in DFS-Normalform überführt werden.

ist in diesem Fall das zweite Integral gleich dem quadratischen Anteil der Hamilton-Funktion:

$$I_{\mathrm{DFS}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = H_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \quad . \tag{A.2c}$$

2. Wenn das Eigenwertpaar $\lambda = \pm a$, $a \neq 0$ auftritt, sind zwei unterschiedliche Fälle möglich:

   (a) Die beiden Eigenwerte $\pm a$ haben jeweils die algebraische Vielfachheit eins (als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von L). Es folgt für L:

$$L = \begin{pmatrix} L^{[1]} & 0 \\ 0 & L^{[2]} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L^{[1]} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

   und der hier nicht genauer spezifizierten $(2,2)$-Matrix $L^{[2]}$. Wegen der Blockgestalt von L zerfällt die Hamilton-Funktion in zwei Summanden:

$$\begin{aligned} H_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & -L^{[2]} \\ L^{[1]} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix} \right) \\ &= H_2^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) + H_2^{[2]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{A.4a}$$

   mit den Teilbeiträgen

$$H_2^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot L^{[1]}\boldsymbol{q} \tag{A.4b}$$

$$H_2^{[2]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{q}\cdot L^{[2]}\boldsymbol{p} \quad . \tag{A.4c}$$

   Für das Integral der Bewegung ergibt sich eine ähnliche Aufspaltung:

$$I_{\mathrm{DFS}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = I_{\mathrm{DFS}}^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) + I_{\mathrm{DFS}}^{[2]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \tag{A.5a}$$

   mit

$$I_{\mathrm{DFS}}^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot D^{[1]}\boldsymbol{q} \tag{A.5b}$$

$$I_{\mathrm{DFS}}^{[2]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{q}\cdot D^{[2]}\boldsymbol{p} \quad , \tag{A.5c}$$

   wobei sich die $(2,2)$-Matrizen $D^{[i]}, i = 1,2$ aus den entsprechenden Zerlegungen $L^{[i]} = D^{[i]} + N^{[i]}$ in den diagonalisierbaren und den nilpotenten Anteil ergeben.

   Für das Eigenwertpaar $\pm a$ der Matrix $L^{[1]}$ erhalten wir also die folgenden Beiträge zur Hamilton-Funktion bzw. zum DFS-Integral:

$$H_2^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}a\,(-p_1q_1 + p_2q_2) \tag{A.6}$$

$$I_{\mathrm{DFS}}^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = H_2^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \quad , \tag{A.7}$$

weil hier offensichtlich $D^{[1]} = L^{[1]}$ gilt.
Die jeweils anderen Beiträge $H_2^{[2]}$ und $I_{\mathrm{DFS}}^{[2]}$ hängen noch von der Eigenwertstruktur des zweiten Jordankästchens $L^{[2]}$ ab, über das wir unter diesem Punkt keine Aussage machen wollen.

(b) Der andere mögliche Fall ist, daß den Eigenwerten $\pm a$ nichttriviale Jordan-Kästchen entsprechen,

$$L = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad , \tag{A.8a}$$

woraus für die Hamilton-Funktion und das zweite Integral

$$H_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = -a(q_1p_1 + q_2p_2) - \frac{1}{2}(q_1p_2 - q_2p_1) \tag{A.8b}$$

$$I_{\mathrm{DFS}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = -a(q_1p_1 + q_2p_2) \tag{A.8c}$$

folgen. Bei der Berechnung von I_{DFS} haben wir verwendet, daß der diagonalisierbare Anteil der Hamilton-Matrix hier $D = \mathrm{diag}(-a, -a, a, a)$ ist, wie man Gl. (A.8a) unmittelbar entnimmt.

3. Wenn λ rein imaginär ist, gibt es das Eigenwertpaar $\lambda = \pm ib$ mit $b \neq 0$. In einer ähnlichen Fallunterscheidung wie unter Punkt 2 sind wieder zwei unterschiedliche Möglichkeiten zu beachten:

(a) $\pm ib$ können Eigenwerte mit der algebraischen Vielfachheit eins sein. Dann spaltet L wie in Gl. (A.3) auf, und wir erhalten

$$L^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{A.9a}$$

woraus wir nach den Gln. (A.4) und (A.5)

$$H_2^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}b(-p_1q_2 + p_2q_1) \tag{A.9b}$$

$$I_{\mathrm{DFS}}^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = H_2^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \tag{A.9c}$$

schließen.

(b) Anderenfalls gibt es wieder nichttriviale Jordan-Blöcke[4],

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -b & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{A.10a}$$

[4]Man spricht hier von Blöcken, also im Plural, weil man im Rahmen der *komplexen* Jordanschen Normalformentheorie gemäß Gl. (1.2) für die Matrix (A.10a) die beiden Jordan-Blöcke $\begin{pmatrix} \pm b & 1 \\ 0 & \pm b \end{pmatrix}$ erhielte. Wir übernehmen damit Galins Sprechweise; vergleiche auch Abschnitt A.2.

was auf

$$H_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = b(q_1p_2 - q_2p_1) + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \qquad \text{(A.10b)}$$

$$I_{\mathrm{DFS}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = b(q_1p_2 - q_2p_1) \qquad \text{(A.10c)}$$

führt.

4. Schließlich verbleibt noch die Möglichkeit, daß L den Eigenwert null hat. Es ergeben sich drei verschiedene Fälle für die Hamilton-Matrix:

(a)

$$L^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_2^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \equiv 0 \quad . \qquad \text{(A.11)}$$

Selbst wenn Gl. (A.11) sowohl für $L^{[1]}$ als auch für $L^{[2]}$ gilt, ist die Situation keineswegs trivial, denn sie bedeutet nicht etwa, daß die gesamte Hamilton-Funktion identisch null ist. Lediglich der Term niedrigster Ordnung von $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \sum_{l\geq 2} H_l(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ verschwindet.

(b)

$$L^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_2^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}p_1q_2 \quad . \qquad \text{(A.12)}$$

(c)

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(A.13)}$$

$$\Rightarrow \quad H_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}(-q_1p_2 + q_2p_1 + p_1p_2) \quad .$$

Das entsprechende Integral bzw. die oben diskutierte [1]-Komponente sind in allen drei Fällen null:

$$I_{\mathrm{DFS}}^{[1]}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \equiv 0 \qquad \text{(A.14a)}$$

bzw.

$$I_{\mathrm{DFS}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \equiv 0 \quad , \qquad \text{(A.14b)}$$

denn eine Matrix, die keinen anderen Eigenwert als null besitzt, ist nilpotent.

Mit dieser Auflistung haben wir alle für $n = 2$ möglichen Eigenwertkonstellationen von L erfaßt. Es sei noch explizit darauf hingewiesen, daß man zwei beliebige der Fälle 2a, 3a, 4a und 4b gemäß Gl. (A.3) kombinieren kann, um die Hamilton-Matrix L vollständig zu charakterisieren. Man erhält dann H_2 und I_{DFS} wieder aus den Gln. (A.4) und (A.5).

Damit ist für $n = 2$ die vollständige Auflistung aller „irreduziblen" Hamilton-Funktionen aus $\mathcal{L}_2$ mitsamt den durch sie definierten DFS-Integralen abgeschlossen. Eine wichtige Folgerung ergibt sich insbesondere aus der Gestalt von I_{DFS} in Punkt 4: Zwar kann man, wie in Stegemertens Satz 1.4 zutreffend festgestellt wird, jede Hamilton-Funktion auf DFS-Normalform transformieren und dann mit deren Hilfe ein zweites Integral der Bewegung I_{DFS} bestimmen. Wenn aber alle Eigenwerte der Hamilton-Matrix L null sind, dann ist dieses neue Integral identisch null und ergibt keine neue Information über das System!

Darüber hinaus ergibt sich aus dem formalen Charakter (vergleiche Kapitel 1) eine weitere wichtige Bemerkung. Selbst wenn man ein von null verschiedenes formales zweites Integral I_{DFS} konstruieren kann, heißt dies noch nicht, daß I_{DFS} ein echtes Integral der Bewegung ist: Über die *Konvergenz* der das Integral darstellenden Potenzreihe können wir keine allgemeine Aussage machen.

A.2 Hamilton-Systeme beliebiger Dimension

Nach Galin [Ar89, Anhang 6] ist die folgende Liste (Gln. (A.15),…,(A.20)) von sechs quadratischen Hamilton-Funktionen $H_2 \in \mathcal{L}_2$ vollständig: *Alle* anderen quadratischen Hamilton-Funktionen erhält man dadurch, daß man mehrere der folgenden H_2 linear kombiniert — so wie wir es in Gl. (A.4) an einem einfachen Beispiel demonstriert haben — und die so erhaltene Hamilton-Funktion einer geeigneten linearen kanonischen Transformation unterwirft. Die im folgenden aufgeführten sechs H_2-Typen werden deshalb als die *Normalformen der quadratischen Hamilton-Funktionen* bezeichnet.

Die Galinsche Klassifizierung wird in konsequenter Verallgemeinerung unseres Vorgehens in Abschnitt A.1 konstruiert. Ausgehend von der speziellen Eigenwertstruktur der Hamilton-Matrix (siehe Seite 156) , werden systematisch diejenigen Hamilton-Funktionen aufgelistet, die den für eine Hamilton-Matrix möglichen Eigenwerttupeln entsprechen, wobei die jeweils erlaubten Dimensionen des Jordan-Kästchens dieses Eigenwerttupels berücksichtigt werden.

Wir weisen an dieser Stelle noch darauf hin, daß sich die Hamilton-Funktionen für $n = 2$, die man durch Linearkombination der Normalformen dieses Abschnittes erhält, von den in Abschnitt A.1 diskutierten Hamilton-Funktionen teilweise unterscheiden, was jeweils auf eine andere Anordnung der Zeilen und Spalten in den Hamilton-Matrizen zurückzuführen ist. Wir müssen uns hier auf Galins Aussage verlassen, daß *alle* Hamilton-Funktionen nach dem oben genannten Schema aus seinen Normalformen hergeleitet werden können.

I. Für ein Paar von Eigenwerten $\pm a$, $a \neq 0$, die jeweils einen Jordan-Block der Dimension k besitzen, erhält man die Hamilton-Funktion

$$H_2(q_1, \ldots, p_k) = -a \sum_{j=1}^{k} p_j q_j + \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1} \quad . \tag{A.15}$$

II. Für vier Jordan-Blöcke der Dimension k, die jeweils einem der Eigenwerte $\pm a \pm ib$, $a, b \neq 0$ entsprechen, gilt:

$$H_2(q_1, \ldots, p_{2k}) = -a \sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b \sum_{j=1}^{k} (p_{2j-1} q_{2j} - p_{2j} q_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{2k-2} p_j q_{j+2} \quad . \tag{A.16}$$

III. Die Null kann entweder als ein Paar von Eigenwerten auftreten oder als *ein* einzelner Eigenwert mit einem Jordan-Kästchen gerader Dimension. Im ersten Fall erhält man für $k = 1$ ein triviales H_2:

$$H_2(q_1, p_1) = 0 \quad . \tag{A.17a}$$

Für $k > 1$ gilt:

$$H_2(q_1, \ldots, p_k) = \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1} \quad , \tag{A.17b}$$

entsprechend zwei Jordan-Kästchen mit der Kantenlänge k.

IV. Wenn der Eigenwert null einem einzigen Jordan-Kästchen (mit der Dimension $2k$) entspricht, hat man für $k = 1$:

$$H_2(q_1, p_1) = \pm \frac{1}{2} q_1^2 \quad , \tag{A.18a}$$

und für $k > 1$ gilt:

$$H_2(q_1, \ldots, p_k) = \pm \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{k-1} p_j p_{k-j} - \sum_{j=1}^{k} q_j q_{k-j+1} \right) - \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1} \quad . \tag{A.18b}$$

V. Für rein imaginäre Eigenwerte $\pm ib$ muß zwischen Jordan-Blöcken mit ungerader und gerader Dimension unterschieden werden. Im ersten Fall gilt für das Eigenwertpaar $\pm ib$ eines (Teil-) Systems mit einem Freiheitsgrad der Bewegung:

$$H_2(q_1, p_1) = \pm \frac{1}{2} \left(b^2 p_1^2 + q_1^2 \right) \quad ; \tag{A.19a}$$

für Jordan-Blöcke der Dimension $2k+1 \geq 3$ erhält man:

$$\begin{aligned} H_2(q_1,\ldots,p_{2k+1}) &= \pm\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k}\left(b^2 p_{2j}p_{2k-2j+2} + q_{2j}q_{2k-2j+2}\right)\right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{k+1}\left(b^2 p_{2j-1}p_{2k-2j+3} + q_{2j-1}q_{2k-2j+3}\right)\right] \qquad \text{(A.19b)} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1} \quad . \end{aligned}$$

VI. Schließlich kann das Eigenwertpaar $\pm ib$ mit zwei Jordan-Kästchen der Dimension $2k$ auftreten. Wenn $k=1$ ist, gilt:

$$H_2(q_1,\ldots,p_2) = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}q_1^2 + q_2^2\right) + b^2 p_1 q_2 + p_2 q_1 \quad , \qquad \text{(A.20a)}$$

und für $k \geq 2$ hat man:

$$\begin{aligned} H_2(q_1,\ldots,p_{2k}) &= \pm\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{b^2}q_{2j-1}q_{2k-2j+1} + q_{2j}q_{2k-2j+2}\right)\right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{k-1}\left(b^2 p_{2j+1}p_{2k-2j+1} + p_{2j+2}p_{2k-2j+2}\right)\right] \qquad \text{(A.20b)} \\ &\quad - b^2\sum_{j=1}^{k} p_{2j-1}q_{2j} + \sum_{j=1}^{k} p_{2j}q_{2j-1} \quad . \end{aligned}$$

Wir können nun die Galinschen Normalformen für quadratische Hamilton-Funktionen und den Normalformbegriff der Dragt-Finn-Stegemerten-Theorie kombinieren und die folgende Definition einer verallgemeinerten Normalform geben.

Definition A.1 *Wir sagen, daß eine Hamilton-Funktion* $H(\boldsymbol{z}) = \sum_{l\geq 2} H_l(\boldsymbol{z})$ *in verallgemeinerter Normalform bis zum Grad 2 ist, wenn* $H_2(\boldsymbol{z})$ *in einer der oben angeführten Formen I bis VI vorliegt oder als Linearkombination dieser Normalformen dargestellt werden kann.*
$H(\boldsymbol{z})$ *ist in verallgemeinerter Normalform bis zum Grad* m*, wenn* $H_2(\boldsymbol{z})$ *in verallgemeinerter Normalform und zusätzlich* $H(\boldsymbol{z})$ *in DFS-Normalform bis zum Grad* m *ist.*

Diese Definition ist sinnvoll, denn jede Hamilton-Funktion $H \in \mathcal{L}$ kann im Sinn von Definition A.1 normalisiert werden: Nach Galin kann jedes H_2

kanonisch in eine Linearkombination von H_2-Termen der Typen I bis VI transformiert werden, und Stegemertens Satz 1.3 stellt die Normalisierbarkeit der Anteile von H mit größerem Grad als zwei sicher. Die Diskussion von in verallgemeinerter Normalform befindlichen Hamilton-Funktionen bietet sich deswegen an, weil man für diese Hamilton-Funktionen (bis auf eine Ausnahme) unmittelbar die zweiten Integrale der DFS-Theorie angeben kann, ebenso wie das in Abschnitt A.1 für den Fall $n = 2$ gelang.

Formale Integrale für die Galinschen Normalformen:

I. Aus einer quadratischen Hamilton-Funktion vom Galin-Typ I erhält man die folgende $(2k, 2k)$-Hamilton-Matrix:

$$L = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -a & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -a \end{matrix}} & 0_k \\ 0_k & \boxed{\begin{matrix} a & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & a & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a \end{matrix}} \end{pmatrix} . \tag{A.21}$$

Der Übersichtlichkeit halber haben wir hier die (k, k)-Nullmatrizen mit dem Index k gekennzeichnet; diese Notation wird sich auch bei einigen der nachfolgenden Gleichungen als nützlich erweisen.

Offensichtlich ist die Jordan-Chevalley-Zerlegung von L durch

$$L = a \begin{pmatrix} -\mathrm{id}_k & 0_k \\ 0_k & \mathrm{id}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_k & 0_k \\ 0_k & -N_k^T \end{pmatrix} \tag{A.22a}$$

mit

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \tag{A.22b}$$

gegeben, so daß wir für das formale Integral der Galin-Normalform I

$$I_{\mathrm{DFS}}(q_1, \ldots, p_k) \;=\; \frac{1}{2}\boldsymbol{z} \cdot \left(J^{-1} a \begin{pmatrix} -\mathrm{id}_k & 0_k \\ 0_k & \mathrm{id}_k \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \right)$$

$$= \quad -a\sum_{j=1}^{k} q_j p_j \tag{A.23}$$

erhalten.

II. Ein H_2 vom Typ II führt auf die Hamilton-Matrix

$$L = \begin{pmatrix} L^{[1]} & 0_{2k} \\ 0_{2k} & L^{[2]} \end{pmatrix} \tag{A.24a}$$

mit

$$L^{[1]} \quad = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -a & b \\ -b & -a \end{matrix}} & \mathrm{id}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -a & b \\ -b & -a \end{matrix}} & \mathrm{id}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \boxed{\begin{matrix} -a & b \\ -b & -a \end{matrix}} & \mathrm{id}_2 \\ 0 & \cdots & & 0 & \boxed{\begin{matrix} -a & b \\ -b & -a \end{matrix}} \end{pmatrix} \tag{A.24b}$$

$$L^{[2]} \quad = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} & 0 & \cdots & & 0 \\ \mathrm{id}_2 & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} & 0 & & \vdots \\ 0 & \mathrm{id}_2 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{id}_2 & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} \end{pmatrix} \tag{A.24c}$$

und damit auf das DFS-Integral

$$I_{\mathrm{DFS}}(q_1, \ldots, p_{2k}) = -a\sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b\sum_{j=1}^{k} \left(p_{2j-1}q_{2j} - p_{2j}q_{2j-1}\right) \quad , \tag{A.25}$$

denn der nilpotente Anteil von L in Gl. (A.24) ist durch die Beiträge der Einheitsmatrizen id_2 gegeben.

III. Nach Voraussetzung hat ein H_2 vom Galin-Typ III nur null als Eigenwert. Somit sind in diesem Fall die Hamilton-Matrix nilpotent und das DFS-Integral identisch null:

$$I_{\mathrm{DFS}}(q_1, \ldots, p_k) \equiv 0 \quad . \tag{A.26}$$

IV. Hier gilt die gleiche Aussage wie für den Galin-Typ III:

$$I_{\mathrm{DFS}}(q_1,\ldots,p_k) \equiv 0 \quad . \tag{A.27}$$

V. Für den fünften Galin-Typ erhalten wir die Hamilton-Matrix

$$L = \begin{pmatrix} N^{[1]} & D^{[1]} \\ D^{[2]} & N^{[2]} \end{pmatrix} \tag{A.28a}$$

mit den beiden diagonalisierbaren $(2k+1, 2k+1)$-Matrizen

$$D^{[2]} = \pm \begin{pmatrix} 0 & & & \cdots & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \\ & & & & 1 & & \\ \vdots & & & \iddots & -1 & & \\ & & & \iddots & \iddots & & \vdots \\ & & 1 & & & & \\ 0 & -1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \tag{A.28b}$$

$$D^{[1]} = -b^2 D^{[2]} \tag{A.28c}$$

und den nilpotenten $(2k+1, 2k+1)$-Matrizen

$$N^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.28d}$$

$$N^{[1]} = -N^{[2]^T} \quad . \tag{A.28e}$$

Damit ist das DFS-Integral für diesen H_2-Typ durch H_2 in Gl. (A.19) selbst gegeben, abzüglich des letzten Termes $-\sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1}$:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{DFS}}(q_1,\ldots,p_{2k+1}) = \pm\frac{1}{2}\Bigg[&\sum_{j=1}^{k}\left(b^2 p_{2j}p_{2k-2j+2} + q_{2j}q_{2k-2j+2}\right) \\ &-\sum_{j=1}^{k+1}\left(b^2 p_{2j-1}p_{2k-2j+3} + q_{2j-1}q_{2k-2j+3}\right)\Bigg] \quad . \end{aligned} \tag{A.29}$$

Diese Gleichung gilt für $k \geq 1$. Für $k = 0$ ist L diagonalisierbar und wir erhalten

$$I_{\mathrm{DFS}}(q_1, p_1) = H_2(q_1, p_1) \quad . \tag{A.30}$$

VI. Die sechste Galin-Normalform führt im Fall $k = 1$ auf die $(4,4)$-Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -b^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp\frac{1}{b^2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mp 1 & b^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.31}$$

mit der Jordan-Zerlegung

$$L = D + N = \begin{pmatrix} 0 & -b^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mp\frac{1}{b^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{A.32}$$

Diese Zerlegung führt auf das formale Integral

$$I_{\mathrm{DFS}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = b^2 p_1 q_2 + p_2 q_1 \quad . \tag{A.33}$$

Es ist uns bisher nicht gelungen, auch für $k \geq 2$ das DFS-Integral des Galinschen H_2-Typs VI zu finden, weil die Hamilton-Matrix hier schon recht kompliziert wird. Wir erhalten für L:

$$L = \begin{pmatrix} L^{[1]} & L^{[2]} \\ L^{[3]} & L^{[4]} \end{pmatrix} \quad , \tag{A.34a}$$

wobei die $L^{[i]}$ die folgenden vier $(2k, 2k)$-Matrizen bezeichnen:

$$L^{[1]} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -b^2 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & -b^2 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & -b^2 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \tag{A.34b}$$

$$L^{[2]} = \mp \begin{pmatrix} 0 & & & \cdots & & & & 0 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & b^2 & 0 \\ \vdots & & & & \iddots & 1 & & \\ & & & & b^2 & \iddots & & \\ & & & \iddots & & & & \vdots \\ & & b^2 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \tag{A.34c}$$

$$L^{[3]} = \mp \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1/b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \boxed{\begin{matrix} 1/b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ \boxed{\begin{matrix} 1/b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(A.34d)}$$

$$L^{[4]} = -L^{[1]^T} \quad . \qquad \text{(A.34e)}$$

Wir überlassen es dem Leser, die Jordan-Chevalley-Zerlegung dieser $(4k, 4k)$-Hamilton-Matrix L zu finden und damit diejenigen Summanden von H_2 zu identifizieren, die das DFS-Integral im Fall VI konstituieren.

Die Resultate des vorliegenden Anhanges A lassen sich zu dem im folgenden dargestellten Verfahren zusammenzufassen, nach dem ein Hamiltonsches System durch die Bestimmung eines zweiten Integrals der Bewegung analysiert werden kann:

1. Bestimmung der Hamilton-Matrix L aus $H_2(\boldsymbol{z})$; Durchführen einer linearen kanonischen Transformation, die L auf Jordansche Normalform bringt, also H_2 in einen der sechs Galin-Typen (bzw. in die Summe mehrerer Galinscher Normalformen) umformt.
2. Transformation der Hamilton-Funktion auf DFS-Normalform.
3. Rücktransformation des der Auflistung der Integrale in diesem Abschnitt entnommenen Integrals I_{DFS}, das heißt Umkehrung der in den Schritten 2 und 1 durchgeführten Transformationen.

Anhang B

Multipolentwicklung des magnetischen Vektorpotentials

In diesem Anhang zeigen wir, daß die Vektorpotentiale

$$A_l^k(\rho, z) = \begin{cases} r^l \quad P_l^1(\cos\vartheta) & \\ r^{-l-1} P_l^1(\cos\vartheta) & \\ 0 & \\ r^{-1} \quad \cot\vartheta & \end{cases} \text{für} \quad \begin{matrix} k = +, l \geq 1 \\ k = -, l \geq 1 \\ k = +, l = 0 \\ k = -, l = 0 \end{matrix} \quad . \tag{2.13}$$

den skalaren Potentialen

$$\Phi_l^k(\rho, z) = \begin{cases} r^l \quad P_l(\cos\vartheta) \\ r^{-l-1} P_l(\cos\vartheta) \end{cases} \text{für} \quad \begin{matrix} k = + \\ k = - \end{matrix} \tag{2.7}$$

entsprechen, daß sie also für $l \geq 0$ die Gleichung

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(b_l^k A_l^k(\rho, z) \boldsymbol{e}_\varphi \right) = -\boldsymbol{\nabla} \left(a_l^k \Phi_l^k(\rho, z) \right) \tag{2.12}$$

erfüllen.

Wir führen den Beweis zunächst für $l \geq 1$. Wir nutzen die Definition der zugeordneten Legendre-Polynome,

$$P_l^1(\zeta) = \sqrt{1 - \zeta^2} \frac{d}{d\zeta} P_l(\zeta) \quad , \tag{B.1}$$

aus und erhalten die Rotation von $A_l^\pm \boldsymbol{e}_\varphi$ in Kugelkoordinaten als

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(A_l^\pm \boldsymbol{e}_\varphi \right) = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta A_l^\pm \right) \boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_l^\pm \right) \boldsymbol{e}_\vartheta$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} r^{l-1} \\ r^{-l-2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left[\sin^2\vartheta \frac{d}{d\cos\vartheta} P_l(\cos\vartheta) \right] \boldsymbol{e}_r \\
&\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r^{l+1} \\ r^{-l} \end{pmatrix} \sin\vartheta \frac{d}{d\cos\vartheta} P_l(\cos\vartheta) \boldsymbol{e}_\vartheta \\
&= -\begin{pmatrix} r^{l-1} \\ r^{-l-2} \end{pmatrix} \frac{d}{d\cos\vartheta} \left[\left(1-\cos^2\vartheta\right) \frac{d}{d\cos\vartheta} P_l(\cos\vartheta) \right] \boldsymbol{e}_r \\
&\quad + \begin{pmatrix} (-l-1) r^{l-1} \\ l r^{-l-2} \end{pmatrix} \sin\vartheta \frac{d}{d\cos\vartheta} P_l(\cos\vartheta) \boldsymbol{e}_\vartheta \quad .
\end{aligned}
$$

Der erste Summand läßt sich mit Hilfe der Legendreschen Differentialgleichung,

$$
\frac{d}{d\zeta} \left[\left(1-\zeta^2\right) \frac{d}{d\zeta} P_l(\zeta) \right] = -l(l+1) P_l(\zeta) \quad , \tag{B.2}
$$

umformen:

$$
\boldsymbol{\nabla} \times \left(A_l^\pm \boldsymbol{e}_\varphi\right) = l(l+1) \begin{pmatrix} r^{l-1} \\ r^{-l-2} \end{pmatrix} P_l(\cos\vartheta) \boldsymbol{e}_r + \begin{pmatrix} (l+1) r^{l-1} \\ -l r^{-l-2} \end{pmatrix} \frac{d}{d\vartheta} P_l(\cos\vartheta) \boldsymbol{e}_\vartheta \ .
$$

Andererseits gilt

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\nabla}\Phi_l^\pm &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\begin{pmatrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{pmatrix} P_l(\cos\vartheta) \right] \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left[\begin{pmatrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{pmatrix} P_l(\cos\vartheta) \right] \boldsymbol{e}_\vartheta \\
&= \begin{pmatrix} l r^{l-1} \\ (-l-1) r^{-l-2} \end{pmatrix} P_l(\cos\vartheta) \boldsymbol{e}_r + \begin{pmatrix} r^{l-1} \\ r^{-l-2} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\vartheta} P_l(\cos\vartheta) \boldsymbol{e}_\vartheta \quad ,
\end{aligned}
$$

so daß $\Phi_l^\pm$ und $A_l^\pm$ mit

$$
\left.
\begin{aligned}
b_l^+ &= \frac{1}{l+1} a_l^+ \\
b_l^- &= -\frac{1}{l} a_l^-
\end{aligned}
\right. \quad , \quad l \geq 1, \tag{B.3}
$$

der Gl. (2.12) genügen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß diese Gleichung auch im Fall $l = 0$ erfüllt wird. Für $k = +$ gilt:

$$
\boldsymbol{\nabla} \times \left(A_0^+ \boldsymbol{e}_\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial r}(r^0) \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{0} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi_0^+ \quad ,
$$

so daß wir b_l^+ beliebig wählen können. Schließlich haben wir für $k = -$:

$$
\boldsymbol{\nabla} \times \left(A_0^-(\rho,z) \boldsymbol{e}_\varphi\right) = -\frac{1}{r^2} \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{\nabla}\Phi_0^-(\rho,z) \quad ,
$$

und $A_0^-(\rho,z)$ löst Gl. (2.12) mit $b_0^- = -a_0^-$.

Anhang C

Potenzreihenentwicklung der Størmer-Hamilton-Funktion

Die in Dipolarkoordinaten formulierte Hamilton-Funktion des Størmer-Problems kann so, wie sie in den Gln. (2.60) und (2.61) angegeben ist,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\mathrm{S}}(q_1, q_2, p_1, p_2) \quad = \quad & \frac{1}{2}\left\{\frac{1+3\cos^2\vartheta}{(q_2+1)^6\sin^{12}\vartheta}\,p_1^2 + \frac{1+3\cos^2\vartheta}{\sin^6\vartheta}\,p_2^2\right\} \\ & + \frac{q_2^2}{2(q_2+1)^4\sin^6\vartheta} \end{aligned} \tag{C.1}$$

(mit der durch Gl. (2.53) festgelegten Funktion $\vartheta(q_1, q_2)$), noch nicht mit den Methoden der Normalformentheorie untersucht werden, weil sie nicht als Potenzreihe vorliegt. Deswegen zeigen wir in diesem Anhang, wie die zu den Gln. (2.60) und (2.61) bzw. zu Gl. (C.1) gehörende Potenzreihenentwicklung (2.62) in den Variablen q_1, q_2, p_1 und p_2 berechnet werden kann. Wir orientieren uns dabei an der in [CoVl75] gegebenen Darstellung, wo die Entwicklung allerdings nur bis zur sechsten Ordnung durchgeführt wird. Dagegen gehen wir hier bis zur zwölften Ordnung.

Zunächst suchen wir einen Ausdruck für $\cos^2\vartheta$ als Funktion von q_1 und q_2. Durch Kombination von (2.53a) und (2.53b) erhalten wir

$$(q_2+1)^4 q_1^2 (1-\cos^2\vartheta)^4 = \cos^2\vartheta \quad , \tag{C.2}$$

eine implizite Gleichung für $\cos^2\vartheta$. Wir könnten sie als Gleichung vierten Grades in $\cos^2\vartheta$ ansehen und mit Hilfe der bekannten allgemeinen Lösungsformeln (vgl. [BrSe85, S. 133]) nach $\cos^2\vartheta$ auflösen. Eine solche Lösung läge aber nicht in Gestalt eines *Polynoms* in q_1 und q_2 vor — denn sie enthielte zum Beispiel Wurzelausdrücke — was im Hinblick auf die Potenzreihenentwicklung von Gl. (C.1) nachteilig wäre: Die auftretenden Wurzeln müßten ihrerseits entwickelt werden. Deswegen werden wir Gl. (C.2) von vornherein näherungsweise lösen. Dazu setzen wir an:

$$\cos^2\vartheta = \sum_{\substack{0\le i,j<k \\ 2\le i+j<k}} c_{ij} q_1^i q_2^j + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{q}|^k\right) \quad ,$$

wobei das Symbol $\mathcal{O}\left(|\boldsymbol{q}|^k\right)$ wieder andeuten soll, daß wir alle Summanden $c_{ij} q_1^i q_2^j$ mit einem Totalgrad $i+j \ge k$ vernachlässigen. Diesen Ansatz setzen wir in Gl. (C.2) ein und bestimmen die c_{ij} durch Koeffizientenvergleich. Für $k=3$ haben wir

$$\cos^2\vartheta = c_{20} q_1^2 + c_{11} q_1 q_2 + c_{02} q_2^2 + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{q}|^3\right) \quad ,$$

und Gl. (C.2) ergibt damit

$$q_1^2 = c_{20} q_1^2 + c_{11} q_1 q_2 + c_{02} q_2^2 + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{q}|^3\right) \quad ,$$

so daß wir gefunden haben, daß in niedrigster Ordnung

$$\cos^2\vartheta = q_1^2 + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{q}|^3\right)$$

gilt. Wie man sieht, zieht diese Vorgehensweise eine vergleichsweise triviale, aber langwierige und fehleranfällige Arbeit nach sich, so daß wir es vorgezogen haben, sie mit Hilfe von MATHEMATICA [Wo91], einem Programm zur symbolischen Manipulation mathematischer Ausdrücke, auszuführen. Das Ergebnis der Entwicklung bis zur zwölften Ordnung einschließlich ist

$$\begin{aligned} \cos^2\vartheta \;=\; & q_1^2 + 4q_1^2 q_2 + 6q_1^2 q_2^2 - 4q_1^4 + 4q_1^2 q_2^3 - 32q_1^4 q_2 + q_1^2 q_2^4 \\ & - 112q_1^4 q_2^2 + 22q_1^6 - 224q_1^4 q_2^3 + 264q_1^6 q_2 - 280q_1^4 q_2^4 \\ & + 1452q_1^6 q_2^2 - 140q_1^8 - 224q_1^4 q_2^5 + 4840q_1^6 q_2^3 - 2240q_1^8 q_2 \\ & - 112q_1^4 q_2^6 + 10890q_1^6 q_2^4 - 16800q_1^8 q_2^2 + 969q_1^{10} - 32q_1^4 q_2^7 \\ & + 17424q_1^6 q_2^5 - 78400q_1^8 q_2^3 + 19380q_1^{10} q_2 - 4q_1^4 q_2^8 \\ & + 20328q_1^6 q_2^6 - 254800q_1^8 q_2^4 + 184110q_1^{10} q_2^2 - 7084q_1^{12} \\ & + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{q}|^{13}\right) \quad . \end{aligned} \tag{C.3}$$

Analog zur obenstehenden Vorgehensweise berechnen wir ebenfalls eine Näherung für $1/\sin^6\vartheta$, indem wir zunächst aus den Gln. (2.53a) und (2.53b)

$$q_1^2 (q_2+1)^4 = \left(\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)^4 - \left(\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)^3 \tag{C.4}$$

folgern, wieder durch Koeffizientenvergleich nach $1/\sin^2\vartheta$ auflösen und dieses schließlich zur dritten Potenz erheben. Das Resultat ist:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^6\vartheta} \;=\;& 1+3q_1^2+12q_1^2q_2+18q_1^2q_2^2-6q_1^4+12q_1^2q_2^3-48q_1^4q_2 \\ &+3q_1^2q_2^4-168q_1^4q_2^2+28q_1^6-336q_1^4q_2^3+336q_1^6q_2 \\ &-420q_1^4q_2^4+1848q_1^6q_2^2-165q_1^8-336q_1^4q_2^5+6160q_1^6q_2^3 \\ &-2640q_1^8q_2-168q_1^4q_2^6+13860q_1^6q_2^4-19800q_1^8q_2^2 \\ &+1092q_1^{10}-48q_1^4q_2^7+22176q_1^6q_2^5-92400q_1^8q_2^3 \\ &+21840q_1^{10}q_2-6q_1^4q_2^8+25872q_1^6q_2^6-300300q_1^8q_2^4 \\ &+207480q_1^{10}q_2^2-7752q_1^{12}+\mathcal{O}\left(|\boldsymbol{q}|^{13}\right) \quad .\end{aligned} \tag{C.5}$$

Schließlich gilt nach dem verallgemeinerten binomischen Satz für $|q_2|<1$ und $l\geq 1$:

$$(q_2+1)^{-l}=\sum_{k=0}^{12}\binom{-l}{k}q_2^k+\mathcal{O}\left(|q_2|^{13}\right) \quad .$$

Nun können wir die einzelnen Bestimmungsstücke gemäß Gl. (C.1) ausmultiplizieren und erhalten die gesuchte Potenzreihenentwicklung der Størmerschen Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned}&\tilde{H}_{\mathrm{S}}(q_1,q_2,p_1,p_2)= \\ &= 0.5p_1^2+0.5p_2^2+0.5q_2^2-3q_2p_1^2-2q_2^3+10.5q_2^2p_1^2+5q_2^4+3q_1^2p_2^2 \\ &\quad +4.5q_1^2p_1^2+1.5q_1^2q_2^2-28q_2^3p_1^2-10q_2^5+12q_1^2q_2p_2^2-9q_1^2q_2p_1^2 \\ &\quad +63q_2^4p_1^2+17.5q_2^6+18q_1^2q_2^2p_2^2+13.5q_1^2q_2^2p_1^2-4.5q_1^4p_2^2 \\ &\quad +1.5q_1^4p_1^2-3q_1^4q_2^2-126q_2^5p_1^2-28q_2^7+12q_1^2q_2^3p_2^2-18q_1^2q_2^3p_1^2 \\ &\quad -36q_1^4q_2p_2^2+3q_1^4q_2p_1^2-12q_1^4q_2^3+231q_2^6p_1^2+42q_2^8+3q_1^2q_2^4p_2^2 \\ &\quad +22.5q_1^2q_2^4p_1^2-126q_1^4q_2^2p_2^2+1.5q_1^4q_2^2p_1^2-18q_1^4q_2^4+20q_1^6p_2^2 \\ &\quad +2.5q_1^6p_1^2+14q_1^6q_2^2-396q_2^7p_1^2-60q_2^9-27q_1^2q_2^5p_1^2 \\ &\quad -252q_1^4q_2^3p_2^2-12q_1^4q_2^5+240q_1^6q_2p_2^2+15q_1^6q_2p_1^2+112q_1^6q_2^3 \\ &\quad +643.5q_2^8p_1^2+82.5q_2^{10}+31.5q_1^2q_2^6p_1^2-315q_1^4q_2^4p_2^2-3q_1^4q_2^6 \\ &\quad +1320q_1^6q_2^2p_2^2+37.5q_1^6q_2^2p_1^2+392q_1^6q_2^4-115.5q_1^8p_2^2-27q_1^8p_1^2 \\ &\quad -82.5q_1^8q_2^2-1001q_2^9p_1^2-110q_2^{11}-36q_1^2q_2^7p_1^2-252q_1^4q_2^5p_2^2 \\ &\quad +4400q_1^6q_2^3p_2^2+50q_1^6q_2^3p_1^2+784q_1^6q_2^5-1848q_1^8q_2p_2^2 \\ &\quad -270q_1^8q_2p_1^2-990q_1^8q_2^3+1501.5q_2^{10}p_1^2+143q_2^{12}+40.5q_1^2q_2^8p_1^2 \\ &\quad -126q_1^4q_2^6p_2^2+9900q_1^6q_2^4p_2^2+37.5q_1^6q_2^4p_1^2+980q_1^6q_2^6 \\ &\quad -13860q_1^8q_2^2p_2^2-1215q_1^8q_2^2p_1^2-5445q_1^8q_2^4+756q_1^{10}p_2^2 \\ &\quad +214.5q_1^{10}p_1^2+546q_1^{10}q_2^2+\mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^{13}\right) \quad .\end{aligned} \tag{2.62}$$

Anhang D

Die Normalform $G_{\mathrm{BG}}^{(14)}$ und das Quasiintegral $I_{\mathrm{BG}}^{(14)}$

A long nightmare of classical special function theory allows us to transform this expression into ...
T. H. Boyer, Ann. Phys. **56** (1970) 486.

Wir geben hier die Normalform (4.23) und das formale Integral (4.24) der Brown-Gabrielse-Magnetflasche bis zur vierzehnten Ordnung einschließlich an. Zur Herleitung von $G_{\mathrm{BG}}^{(14)}$ und $I_{\mathrm{BG}}^{(14)}$ und zur Diskussion dieser Funktionen siehe Kapitel 4.

$$
\begin{aligned}
&G_{\mathrm{BG}}^{(14)}(\rho, z, p_\rho, p_z) = \\
&\quad = \quad G_{\mathrm{BG}}(\rho, z, p_\rho, p_z) + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^{16}\right) \\
&\quad = \quad 0.5p_z^2 + 0.5p_\rho^2 + 0.5\rho^2 - 0.046875p_\rho^4 \\
&\qquad - 0.09375\rho^2 p_\rho^2 - 0.046875\rho^4 + 0.25z^2 p_\rho^2 + 0.25z^2\rho^2 \\
&\qquad - 0.00585938p_\rho^6 - 0.0175781\rho^2 p_\rho^4 - 0.0175781\rho^4 p_\rho^2 - 0.00585938\rho^6 \\
&\qquad + 0.0390625z^2 p_\rho^4 + 0.078125z^2\rho^2 p_\rho^2 + 0.0390625z^2\rho^4 - 0.00160217p_\rho^8 \\
&\qquad - 0.00640869\rho^2 p_\rho^6 - 0.00961304\rho^4 p_\rho^4 - 0.00640869\rho^6 p_\rho^2 - 0.00160217\rho^8 \\
&\qquad + 0.0234375z^2 p_\rho^6 + 0.0703125z^2\rho^2 p_\rho^4 + 0.0703125z^2\rho^4 p_\rho^2 + 0.0234375z^2\rho^6 \\
&\qquad - 0.0377604z^4 p_\rho^4 - 0.0755208z^4\rho^2 p_\rho^2 - 0.0377604z^4\rho^4 - 0.000575066p_\rho^{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 0.00287533\rho^2 p_\rho^8 - 0.00575066\rho^4 p_\rho^6 - 0.00575066\rho^6 p_\rho^4 - 0.00287533\rho^8 p_\rho^2 \\
&- 0.000575066\rho^{10} + 0.0186996z^2 p_\rho^8 + 0.0747986z^2\rho^2 p_\rho^6 + 0.112198z^2\rho^4 p_\rho^4 \\
&+ 0.0747986z^2\rho^6 p_\rho^2 + 0.0186996z^2\rho^8 - 0.0577799z^4 p_\rho^6 - 0.17334z^4\rho^2 p_\rho^4 \\
&- 0.17334z^4\rho^4 p_\rho^2 - 0.0577799z^4\rho^6 + 0.0269531z^6 p_\rho^4 + 0.0539063z^6\rho^2 p_\rho^2 \\
&+ 0.0269531z^6\rho^4 - 0.000238448p_\rho^{12} - 0.00143069\rho^2 p_\rho^{10} - 0.00357673\rho^4 p_\rho^8 \\
&- 0.00476897\rho^6 p_\rho^6 - 0.00357673\rho^8 p_\rho^4 - 0.00143069\rho^{10} p_\rho^2 - 0.000238448\rho^{12} \\
&+ 0.0172276z^2 p_\rho^{10} + 0.0861382z^2\rho^2 p_\rho^8 + 0.172276z^2\rho^4 p_\rho^6 + 0.172276z^2\rho^6 p_\rho^4 \\
&+ 0.0861382z^2\rho^8 p_\rho^2 + 0.0172276z^2\rho^{10} - 0.0811043z^4 p_\rho^8 - 0.324417z^4\rho^2 p_\rho^6 \\
&- 0.486626z^4\rho^4 p_\rho^4 - 0.324417z^4\rho^6 p_\rho^2 - 0.0811043z^4\rho^8 + 0.0836534z^6 p_\rho^6 \\
&+ 0.25096z^6\rho^2 p_\rho^4 + 0.25096z^6\rho^4 p_\rho^2 + 0.0836534z^6\rho^6 - 0.0174386z^8 p_\rho^4 \\
&- 0.0348772z^8\rho^2 p_\rho^2 - 0.0174386z^8\rho^4 - 0.000108227p_\rho^{14} - 0.00075759\rho^2 p_\rho^{12} \\
&- 0.00227277\rho^4 p_\rho^{10} - 0.00378795\rho^6 p_\rho^8 - 0.00378795\rho^8 p_\rho^6 - 0.00227277\rho^{10} p_\rho^4 \\
&- 0.00075759\rho^{12} p_\rho^2 - 0.000108227\rho^{14} + 0.0171366z^2 p_\rho^{12} + 0.10282z^2\rho^2 p_\rho^{10} \\
&+ 0.25705z^2\rho^4 p_\rho^8 + 0.342733z^2\rho^6 p_\rho^6 + 0.25705z^2\rho^8 p_\rho^4 + 0.10282z^2\rho^{10} p_\rho^2 \\
&+ 0.0171366z^2\rho^{12} - 0.110503z^4 p_\rho^{10} - 0.552514z^4\rho^2 p_\rho^8 - 1.10503z^4\rho^4 p_\rho^6 \\
&- 1.10503z^4\rho^6 p_\rho^4 - 0.552514z^4\rho^8 p_\rho^2 - 0.110503z^4\rho^{10} + 0.19886z^6 p_\rho^8 \\
&+ 0.795439z^6\rho^2 p_\rho^6 + 1.19316z^6\rho^4 p_\rho^4 + 0.795439z^6\rho^6 p_\rho^2 + 0.19886z^6\rho^8 \\
&- 0.0976632z^8 p_\rho^6 - 0.29299z^8\rho^2 p_\rho^4 - 0.29299z^8\rho^4 p_\rho^2 - 0.0976632z^8\rho^6 \\
&+ 0.0106879z^{10} p_\rho^4 + 0.0213759z^{10}\rho^2 p_\rho^2 + 0.0106879z^{10}\rho^4
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&I_{\mathrm{BG}}^{(14)}(\rho, z, p_\rho, p_z) = \\
&= I_{\mathrm{BG}}(\rho, z, p_\rho, p_z) + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{z}|^{16}\right) \\
&= 0.5p_\rho^2 + 0.5\rho^2 + 0.046875p_\rho^4 + 0.125p_z^2 p_\rho^2 \\
&\quad + 0.09375\rho^2 p_\rho^2 - 0.125\rho^2 p_z^2 - 0.078125\rho^4 + 0.5z\rho p_z p_\rho \\
&\quad - 0.25z^2 p_\rho^2 + 0.25z^2\rho^2 + 0.0146484p_\rho^6 + 0.128906p_z^2 p_\rho^4 \\
&\quad + 0.234375p_z^4 p_\rho^2 + 0.0439453\rho^2 p_\rho^4 + 0.0859375\rho^2 p_z^2 p_\rho^2 - 0.203125\rho^2 p_z^4 \\
&\quad + 0.0205078\rho^4 p_\rho^2 - 0.136719\rho^4 p_z^2 - 0.000976562\rho^6 + 0.34375z\rho p_z p_\rho^3 \\
&\quad + 0.875z\rho p_z^3 p_\rho + 0.59375z\rho^3 p_z p_\rho - 0.171875z^2 p_\rho^4 - 0.4375z^2 p_z^2 p_\rho^2 \\
&\quad - 0.25z^2\rho^2 p_\rho^2 + 0.4375z^2\rho^2 p_z^2 + 0.046875z^2\rho^4 - 0.5z^3\rho p_z p_\rho \\
&\quad + 0.125z^4 p_\rho^2 + 0.00640869p_\rho^8 + 0.132799p_z^2 p_\rho^6 + 0.915161p_z^4 p_\rho^4 \\
&\quad + 1.28516p_z^6 p_\rho^2 + 0.0256348\rho^2 p_\rho^6 + 0.230916\rho^2 p_z^2 p_\rho^4 + 0.251221\rho^2 p_z^4 p_\rho^2 \\
&\quad - 1.17578\rho^2 p_z^6 + 0.0274658\rho^4 p_\rho^4 - 0.0710042\rho^4 p_z^2 p_\rho^2 - 0.971558\rho^4 p_z^4 \\
&\quad + 0.00512695\rho^6 p_\rho^2 - 0.135484\rho^6 p_z^2 - 0.000183105\rho^8 + 0.334961z\rho p_z p_\rho^5 \\
&\quad + 3.1582z\rho p_z^3 p_\rho^3 + 4.92188z\rho p_z^5 p_\rho + 0.94987z\rho^3 p_z p_\rho^3 + 4.1543z\rho^3 p_z^3 p_\rho \\
&\quad + 0.59668z\rho^5 p_z p_\rho - 0.16748z^2 p_\rho^6 - 1.5791z^2 p_z^2 p_\rho^4 - 2.46094z^2 p_z^4 p_\rho^2 \\
&\quad - 0.458496z^2\rho^2 p_\rho^4 - 1.02539z^2\rho^2 p_z^2 p_\rho^2 + 2.46094z^2\rho^2 p_z^4 - 0.254395z^2\rho^4 p_\rho^2 \\
&\quad + 1.45215z^2\rho^4 p_z^2 + 0.0405273z^2\rho^6 - 1.25z^3\rho p_z p_\rho^3 - 3.125z^3\rho p_z^3 p_\rho
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 1.5625z^3\rho^3p_zp_\rho + 0.3125z^4p_\rho^4 + 0.78125z^4p_z^2p_\rho^2 + 0.304688z^4\rho^2p_\rho^2\\
&- 0.5625z^4\rho^2p_z^2 - 0.0234375z^4\rho^4 + 0.375z^5\rho p_zp_\rho - 0.0625z^6p_\rho^2\\
&+ 0.00330448p_\rho^{10} + 0.139826p_z^2p_\rho^8 + 2.7666p_z^4p_\rho^6 + 13.2975p_z^6p_\rho^4\\
&+ 14.8269p_z^8p_\rho^2 + 0.0165224\rho^2p_\rho^8 + 0.373581\rho^2p_z^2p_\rho^6 + 3.61585\rho^2p_z^4p_\rho^4\\
&+ 1.85999\rho^2p_z^6p_\rho^2 - 14.1165\rho^2p_z^8 + 0.0266361\rho^4p_\rho^6 + 0.10242\rho^4p_z^2p_\rho^4\\
&- 2.65573\rho^4p_z^4p_\rho^2 - 14.0044\rho^4p_z^6 + 0.0145054\rho^6p_\rho^4 - 0.285545\rho^6p_z^2p_\rho^2\\
&- 3.1921\rho^6p_z^4 + 0.00141621\rho^8p_\rho^2 - 0.133078\rho^8p_z^2 - 0.0000371933\rho^{10}\\
&+ 0.371446z\rho p_zp_\rho^7 + 9.36791z\rho p_z^3p_\rho^5 + 49.47z\rho p_z^5p_\rho^3 + 57.8867z\rho p_z^7p_\rho\\
&+ 1.43341z\rho^3p_zp_\rho^5 + 23.256z\rho^3p_z^3p_\rho^3 + 58.4524z\rho^3p_z^5p_\rho + 1.68528z\rho^5p_zp_\rho^3\\
&+ 13.6119z\rho^5p_z^3p_\rho + 0.572591z\rho^7p_zp_\rho - 0.185723z^2p_\rho^8 - 4.68395z^2p_z^2p_\rho^6\\
&- 24.735z^2p_z^4p_\rho^4 - 28.9434z^2p_z^6p_\rho^2 - 0.717258z^2\rho^2p_\rho^6 - 9.63393z^2\rho^2p_z^2p_\rho^4\\
&- 9.61816z^2\rho^2p_z^4p_\rho^2 + 28.9434z^2\rho^2p_z^6 - 0.833577z^2\rho^4p_\rho^4 - 1.0705z^2\rho^4p_z^2p_\rho^2\\
&+ 24.4684z^2\rho^4p_z^4 - 0.246121z^2\rho^6p_\rho^2 + 3.89554z^2\rho^6p_z^2 + 0.032647z^2\rho^8\\
&- 2.67969z^3\rho p_zp_\rho^5 - 25.3477z^3\rho p_z^3p_\rho^3 - 37.7344z^3\rho p_z^5p_\rho - 6.94206z^3\rho^3p_zp_\rho^3\\
&- 29.8848z^3\rho^3p_z^3p_\rho - 4.19336z^3\rho^5p_zp_\rho + 0.669922z^4p_\rho^6 + 6.33691z^4p_z^2p_\rho^4\\
&+ 9.43359z^4p_z^4p_\rho^2 + 1.51831z^4\rho^2p_\rho^4 + 3.42773z^4\rho^2p_z^2p_\rho^2 - 8.20312z^4\rho^2p_z^4\\
&+ 0.687988z^4\rho^4p_\rho^2 - 3.7373z^4\rho^4p_z^2 - 0.0822754z^4\rho^6 + 2.46094z^5\rho p_zp_\rho^3\\
&+ 6.09375z^5\rho p_z^3p_\rho + 2.23438z^5\rho^3p_zp_\rho - 0.410156z^6p_\rho^4 - 1.01562z^6p_z^2p_\rho^2\\
&- 0.28125z^6\rho^2p_\rho^2 + 0.53125z^6\rho^2p_z^2 + 0.0117188z^6\rho^4 - 0.25z^7\rho p_zp_\rho\\
&+ 0.03125z^8p_\rho^2 + 0.00187942p_\rho^{12} + 0.150323p_z^2p_\rho^{10} + 7.72701p_z^4p_\rho^8\\
&+ 94.1228p_z^6p_\rho^6 + 322.962p_z^8p_\rho^4 + 296.273p_z^{10}p_\rho^2 + 0.0112765\rho^2p_\rho^{10}\\
&+ 0.53184\rho^2p_z^2p_\rho^8 + 17.8236\rho^2p_z^4p_\rho^6 + 110.794\rho^2p_z^6p_\rho^4 + 27.7808\rho^2p_z^8p_\rho^2\\
&- 287.964\rho^2p_z^{10} + 0.0240608\rho^4p_\rho^8 + 0.390488\rho^4p_z^2p_\rho^6 + 1.25246\rho^4p_z^4p_\rho^4\\
&- 94.0425\rho^4p_z^6p_\rho^2 - 335.96\rho^4p_z^8 + 0.0214666\rho^6p_\rho^6 - 0.392101\rho^6p_z^2p_\rho^4\\
&- 18.1341\rho^6p_z^4p_\rho^2 - 105.668\rho^6p_z^6 + 0.00701264\rho^8p_\rho^4 - 0.523557\rho^8p_z^2p_\rho^2\\
&- 8.99752\rho^8p_z^4 + 0.000418961\rho^{10}p_\rho^2 - 0.131118\rho^{10}p_z^2 - 0.00000813603\rho^{12}\\
&+ 0.439555z\rho p_zp_\rho^9 + 26.1689z\rho p_z^3p_\rho^7 + 343.148z\rho p_z^5p_\rho^5 + 1236.29z\rho p_z^7p_\rho^3\\
&+ 1168.47z\rho p_z^9p_\rho + 2.13346z\rho^3p_zp_\rho^7 + 93.6319z\rho^3p_z^3p_\rho^5 + 792.752z\rho^3p_z^5p_\rho^3\\
&+ 1384.58z\rho^3p_z^7p_\rho + 3.61214z\rho^5p_zp_\rho^5 + 106.754z\rho^5p_z^3p_\rho^3 + 444.183z\rho^5p_z^5p_\rho\\
&+ 2.45851z\rho^7p_zp_\rho^3 + 38.3912z\rho^7p_z^3p_\rho + 0.542959z\rho^9p_zp_\rho - 0.219777z^2p_\rho^{10}\\
&- 13.0844z^2p_z^2p_\rho^8 - 171.574z^2p_z^4p_\rho^6 - 618.143z^2p_z^6p_\rho^4 - 584.237z^2p_z^8p_\rho^2\\
&- 1.08236z^2\rho^2p_\rho^8 - 43.3236z^2\rho^2p_z^2p_\rho^6 - 291.366z^2\rho^2p_z^4p_\rho^4 - 163.127z^2\rho^2p_z^6p_\rho^2\\
&+ 584.237z^2\rho^2p_z^8 - 1.8563z^2\rho^4p_\rho^6 - 37.5132z^2\rho^4p_z^2p_\rho^4 + 46.6661z^2\rho^4p_z^4p_\rho^2\\
&+ 621.35z^2\rho^4p_z^6 - 1.25337z^2\rho^6p_\rho^4 + 3.16803z^2\rho^6p_z^2p_\rho^2 + 166.022z^2\rho^6p_z^4\\
&- 0.229401z^2\rho^8p_\rho^2 + 9.74871z^2\rho^8p_z^2 + 0.0261745z^2\rho^{10} - 5.63655z^3\rho p_zp_\rho^7\\
&- 143.371z^3\rho p_z^3p_\rho^5 - 697.709z^3\rho p_z^5p_\rho^3 - 769.098z^3\rho p_z^7p_\rho - 21.897z^3\rho^3p_zp_\rho^5\\
&- 347.253z^3\rho^3p_z^3p_\rho^3 - 791.476z^3\rho^3p_z^5p_\rho - 27.1089z^3\rho^5p_zp_\rho^3 - 203.22z^3\rho^5p_z^3p_\rho\\
&- 10.6457z^3\rho^7p_zp_\rho + 1.40914z^4p_\rho^8 + 35.8427z^4p_z^2p_\rho^6 + 174.427z^4p_z^4p_\rho^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 192.274 z^4 p_z^6 p_\rho^2 + 4.90007 z^4 \rho^2 p_\rho^6 + 68.6589 z^4 \rho^2 p_z^2 p_\rho^4 + 64.9764 z^4 \rho^2 p_z^4 p_\rho^2 \\
&- 177.803 z^4 \rho^2 p_z^6 + 5.21614 z^4 \rho^4 p_\rho^4 + 10.7558 z^4 \rho^4 p_z^2 p_\rho^2 - 136.314 z^4 \rho^4 p_z^4 \\
&+ 1.45455 z^4 \rho^6 p_\rho^2 - 20.2878 z^4 \rho^6 p_z^2 - 0.226563 z^4 \rho^8 + 9.9668 z^5 \rho p_z p_\rho^5 \\
&+ 93.9463 z^5 \rho p_z^3 p_\rho^3 + 136.582 z^5 \rho p_z^5 p_\rho + 22.1815 z^5 \rho^3 p_z p_\rho^3 + 94.3052 z^5 \rho^3 p_z^3 p_\rho \\
&+ 11.1938 z^5 \rho^5 p_z p_\rho - 1.66113 z^6 p_\rho^6 - 15.6577 z^6 p_z^2 p_\rho^4 - 22.7637 z^6 p_z^4 p_\rho^2 \\
&- 3.09924 z^6 \rho^2 p_\rho^4 - 6.98975 z^6 \rho^2 p_z^2 p_\rho^2 + 16.6797 z^6 \rho^2 p_z^4 - 1.10962 z^6 \rho^4 p_\rho^2 \\
&+ 5.88379 z^6 \rho^4 p_z^2 + 0.0931396 z^6 \rho^6 - 3.55469 z^7 \rho p_z p_\rho^3 - 8.75 z^7 \rho p_z^3 p_\rho \\
&- 2.42188 z^7 \rho^3 p_z p_\rho + 0.444336 z^8 p_\rho^4 + 1.09375 z^8 p_z^2 p_\rho^2 + 0.224609 z^8 \rho^2 p_\rho^2 \\
&- 0.429688 z^8 \rho^2 p_z^2 - 0.00585938 z^8 \rho^4 + 0.15625 z^9 \rho p_z p_\rho - 0.015625 z^{10} p_\rho^2 \\
&+ 0.00114108 p_\rho^{14} + 0.164594 p_z^2 p_\rho^{12} + 20.9562 p_z^4 p_\rho^{10} + 572.339 p_z^6 p_\rho^8 \\
&+ 4470.53 p_z^8 p_\rho^6 + 11694 p_z^{10} p_\rho^4 + 9098.43 p_z^{12} p_\rho^2 + 0.00798755 \rho^2 p_\rho^{12} \\
&+ 0.717845 \rho^2 p_z^2 p_\rho^{10} + 69.1212 \rho^2 p_z^4 p_\rho^8 + 1261.44 \rho^2 p_z^6 p_\rho^6 + 5009.39 \rho^2 p_z^8 p_\rho^4 \\
&+ 693.361 \rho^2 p_z^{10} p_\rho^2 - 8936.71 \rho^2 p_z^{12} + 0.0211435 \rho^4 p_\rho^{10} + 0.819332 \rho^4 p_z^2 p_\rho^8 \\
&+ 47.8857 \rho^4 p_z^4 p_\rho^6 + 75.6815 \rho^4 p_z^6 p_\rho^4 - 4454.98 \rho^4 p_z^8 p_\rho^2 - 12046.6 \rho^4 p_z^{10} \\
&+ 0.0261002 \rho^6 p_\rho^8 - 0.407043 \rho^6 p_z^2 p_\rho^6 - 53.1792 \rho^6 p_z^4 p_\rho^4 - 1272.74 \rho^6 p_z^6 p_\rho^2 \\
&- 4864.87 \rho^6 p_z^8 + 0.0148444 \rho^8 p_\rho^6 - 1.31797 \rho^8 p_z^2 p_\rho^4 - 76.1788 \rho^8 p_z^4 p_\rho^2 \\
&- 652.665 \rho^8 p_z^6 + 0.00321577 \rho^{10} p_\rho^4 - 0.769472 \rho^{10} p_z^2 p_\rho^2 - 23.4898 \rho^{10} p_z^4 \\
&+ 0.000129797 \rho^{12} p_\rho^2 - 0.129845 \rho^{12} p_z^2 - 0.0000018999 \rho^{14} + 0.539436 z \rho p_z p_\rho^{11} \\
&+ 71.3199 z \rho p_z^3 p_\rho^9 + 2055.83 z \rho p_z^5 p_\rho^7 + 16804.4 z \rho p_z^7 p_\rho^5 + 45389.3 z \rho p_z^9 p_\rho^3 \\
&+ 36070.3 z \rho p_z^{11} p_\rho + 3.1495 z \rho^3 p_z p_\rho^9 + 330.519 z \rho^3 p_z^3 p_\rho^7 + 6983.54 z \rho^3 p_z^5 p_\rho^5 \\
&+ 37211.5 z \rho^3 p_z^7 p_\rho^3 + 49277 z \rho^3 p_z^9 p_\rho + 6.92199 z \rho^5 p_z p_\rho^7 + 553.696 z \rho^5 p_z^3 p_\rho^5 \\
&+ 7720.09 z \rho^5 p_z^5 p_\rho^3 + 20252.8 z \rho^5 p_z^7 p_\rho + 7.03511 z \rho^7 p_z p_\rho^5 + 394.887 z \rho^7 p_z^3 p_\rho^3 \\
&+ 2770.05 z \rho^7 p_z^5 p_\rho + 3.22625 z \rho^9 p_z p_\rho^3 + 100.426 z \rho^9 p_z^3 p_\rho + 0.515984 z \rho^{11} p_z p_\rho \\
&- 0.269718 z^2 p_\rho^{12} - 35.6599 z^2 p_z^2 p_\rho^{10} - 1027.92 z^2 p_z^4 p_\rho^8 - 8402.21 z^2 p_z^6 p_\rho^6 \\
&- 22694.7 z^2 p_z^8 p_\rho^4 - 18035.1 z^2 p_z^{10} p_\rho^2 - 1.60703 z^2 \rho^2 p_\rho^{10} - 159.385 z^2 \rho^2 p_z^2 p_\rho^8 \\
&- 2997.53 z^2 \rho^2 p_z^4 p_\rho^6 - 12514.4 z^2 \rho^2 p_z^6 p_\rho^4 - 4350.2 z^2 \rho^2 p_z^8 p_\rho^2 + 18035.1 z^2 \rho^2 p_z^{10} \\
&- 3.60684 z^2 \rho^4 p_\rho^8 - 238.263 z^2 \rho^4 p_z^2 p_\rho^6 - 1942.9 z^2 \rho^4 p_z^4 p_\rho^4 + 4361.66 z^2 \rho^4 p_z^6 p_\rho^2 \\
&+ 22906.6 z^2 \rho^4 p_z^8 - 3.72475 z^2 \rho^6 p_\rho^6 - 112.204 z^2 \rho^6 p_z^2 p_\rho^4 + 1011.03 z^2 \rho^6 p_z^4 p_\rho^2 \\
&+ 8444.85 z^2 \rho^6 p_z^6 - 1.68244 z^2 \rho^8 p_\rho^4 + 26.3791 z^2 \rho^8 p_z^2 p_\rho^2 + 963.598 z^2 \rho^8 p_z^4 \\
&- 0.21179 z^2 \rho^{10} p_\rho^2 + 23.7371 z^2 \rho^{10} p_z^2 + 0.0211886 z^2 \rho^{12} - 12.1084 z^3 \rho p_z p_\rho^9 \\
&- 722.149 z^3 \rho p_z^3 p_\rho^7 - 8273.26 z^3 \rho p_z^5 p_\rho^5 - 26928.8 z^3 \rho p_z^7 p_\rho^3 - 23849.3 z^3 \rho p_z^9 p_\rho \\
&- 62.4037 z^3 \rho^3 p_z p_\rho^7 - 2626.78 z^3 \rho^3 p_z^3 p_\rho^5 - 19061.3 z^3 \rho^3 p_z^5 p_\rho^3 - 29726 z^3 \rho^3 p_z^7 p_\rho \\
&- 116.18 z^3 \rho^5 p_z p_\rho^5 - 3108.5 z^3 \rho^5 p_z^3 p_\rho^3 - 10777.7 z^3 \rho^5 p_z^5 p_\rho - 92.2518 z^3 \rho^7 p_z p_\rho^3 \\
&- 1194.95 z^3 \rho^7 p_z^3 p_\rho - 26.2387 z^3 \rho^9 p_z p_\rho + 3.02709 z^4 p_\rho^{10} + 180.537 z^4 p_z^2 p_\rho^8 \\
&+ 2068.31 z^4 p_z^4 p_\rho^6 + 6732.2 z^4 p_z^6 p_\rho^4 + 5962.33 z^4 p_z^8 p_\rho^2 + 14.0407 z^4 \rho^2 p_\rho^8 \\
&+ 581.926 z^4 \rho^2 p_z^2 p_\rho^6 + 3466.12 z^4 \rho^2 p_z^4 p_\rho^4 + 1871.48 z^4 \rho^2 p_z^6 p_\rho^2 - 5670.22 z^4 \rho^2 p_z^8 \\
&+ 23.2459 z^4 \rho^4 p_\rho^6 + 519.404 z^4 \rho^4 p_z^2 p_\rho^4 - 214.841 z^4 \rho^4 p_z^4 p_\rho^2 - 5838.48 z^4 \rho^4 p_z^6 \\
&+ 15.6827 z^4 \rho^6 p_\rho^4 + 11.3595 z^4 \rho^6 p_z^2 p_\rho^2 - 1572.44 z^4 \rho^6 p_z^4 + 2.87743 z^4 \rho^8 p_\rho^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 103.57z^4\rho^8p_z^2 - 0.580544z^4\rho^{10} + 35.2098z^5\rho p_z p_\rho^7 + 890.469z^5\rho p_z^3p_\rho^5 \\
&+ 4145.31z^5\rho p_z^5p_\rho^3 + 4420.81z^5\rho p_z^7p_\rho + 127.599z^5\rho^3p_zp_\rho^5 + 1974.6z^5\rho^3p_z^3p_\rho^3 \\
&+ 4282.54z^5\rho^3p_z^5p_\rho + 147.128z^5\rho^5p_zp_\rho^3 + 1050z^5\rho^5p_z^3p_\rho + 53.9078z^5\rho^7p_zp_\rho \\
&- 5.8683z^6p_\rho^8 - 148.412z^6p_z^2p_\rho^6 - 690.885z^6p_z^4p_\rho^4 - 736.801z^6p_z^6p_\rho^2 \\
&- 18.0224z^6\rho^2p_\rho^6 - 254.728z^6\rho^2p_z^2p_\rho^4 - 233.481z^6\rho^2p_z^4p_\rho^2 + 611.03z^6\rho^2p_z^6 \\
&- 16.801z^6\rho^4p_\rho^4 - 39.4123z^6\rho^4p_z^2p_\rho^2 + 411.138z^6\rho^4p_z^4 - 4.02785z^6\rho^6p_\rho^2 \\
&+ 53.0954z^6\rho^6p_z^2 + 0.535935z^6\rho^8 - 24.7119z^7\rho p_zp_\rho^5 - 231.943z^7\rho p_z^3p_\rho^3 \\
&- 332.227z^7\rho p_z^5p_\rho - 46.7806z^7\rho^3p_zp_\rho^3 - 197.107z^7\rho^3p_z^3p_\rho - 19.3481z^7\rho^5p_zp_\rho \\
&+ 3.08899z^8p_\rho^6 + 28.9929z^8p_z^2p_\rho^4 + 41.5283z^8p_z^4p_\rho^2 + 4.78601z^8\rho^2p_\rho^4 \\
&+ 10.7666z^8\rho^2p_z^2p_\rho^2 - 25.6348z^8\rho^2p_z^4 + 1.36566z^8\rho^4p_\rho^2 - 7.13867z^8\rho^4p_z^2 \\
&- 0.0830688z^8\rho^6 + 4.23828z^9\rho p_zp_\rho^3 + 10.3906z^9\rho p_z^3p_\rho + 2.23633z^9\rho^3p_zp_\rho \\
&- 0.423828z^{10}p_\rho^4 - 1.03906z^{10}p_z^2p_\rho^2 - 0.164062z^{10}\rho^2p_\rho^2 + 0.316406z^{10}\rho^2p_z^2 \\
&+ 0.00292969z^{10}\rho^4 - 0.09375z^{11}\rho p_zp_\rho + 0.0078125z^{12}p_\rho^2 \qquad \text{(D.2)}
\end{aligned}
$$

Es sei noch angemerkt, daß wir die Koeffizienten der Monome von $G_{\mathrm{BG}}^{(14)}$ und $I_{\mathrm{BG}}^{(14)}$ erheblich genauer bestimmt haben als sie hier angegeben sind. Siehe hierzu Abschnitt 4.1.2.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[AbSt72] M. Abramowitz und I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York (1972).

[Ar83] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, New York (1983).

[Ar89] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New York (^{2}1989).

[ArPl90] D. K. Arrowsmith und C. M. Place, *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[Ba61] V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform I*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961) 187–214.

[Bi66] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, AMS, New York (^{2}1966).

[BrSe85] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main (^{22}1985).

[BrGa86] L. S. Brown und G. Gabrielse, *Geonium theory: physics of a single electron or ion in a Penning trap*, Rev. Mod. Phys. **58** (1986) 233–311.

[Ca81] J. R. Cary, *Lie transform perturbation theory for Hamiltonian systems*, Phys. Rep. **79** (1981) 129–159.

[Ch79] B. V. Chirikov, *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*, Phys. Rep. **52** (1979) 263–379.

[ChEA83] R. C. Churchill, M. Kummer, D. L. Rod, *On averaging, reduction, and symmetry in Hamiltonian systems* , J. Diff. Eq. **49** (1983) 359–414.

[ChLe84] R. C. Churchill und D. Lee, *Harmonic oscillators at low energies*, in: D. V. Chudnovsky und G. V. Chudnovsky (Hrsg.), *Classical and Quantum Models and Arithmetic Problems*, Marcel Dekker Inc., New York (1984) 239–286.

[CoVl75] G. Contopoulos und L. Vlahos, *Integrals of motion and resonances in a dipole magnetic field*, J. Math. Phys. **16** (1975) 1469–1474.

[Cr90] P. Crehan, *The proper quantum analogue of the Birkhoff-Gustavson method of normal forms*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** 5815–5828.

[De69] A. Deprit, *Canonical transformations depending on a small parameter*, Cel. Mech. **1** (1969) 11–30.

[Dr65] A. J. Dragt, *Trapped orbits in a magnetic dipole field*, Rev. Geophys. **3** (1965) 255–298.

[DrFi76a] A. J. Dragt und J. M. Finn, *Lie series and invariant functions for analytic symplectic maps*, J. Math. Phys. **17** (1976) 2215–2227.

[DrFi76b] A. J. Dragt und J. M. Finn, *Insolubility of trapped particle motion in a magnetic dipole field*, J. Geophys. Res. **81** (1976) 2327–2340.

[DrFi79] A. J. Dragt und J. M. Finn, *Normal form for mirror machine Hamiltonians*, J. Math. Phys. **20** (1979) 2649–2660.

[Ec86] B. Eckhardt, *Birkhoff-Gustavson normal form in classical and quantum mechanics*, J. Phys. A: Math. Gen. **19** (1986) 2961–2972.

[ElEA87] C. Elphick, E. Tirapegui, M. E. Brachet, P. Coullet und G. Iooss, *A simple global characterization for normal forms of singular vector fields*, Physica **29**D (1987) 95–127.

[EnRe87] G. Engeln-Müllges und F. Reutter, *Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit C-Programmen*, Bibliographisches Institut, Zürich (1987).

[Fi86] G. Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg, Braunschweig (^{9}1986).

[Ga93] G. Gabrielse, *Kühlung und Speicherung von Antiprotonen*, Spektrum der Wissenschaft (1993) Nr. 2, 44–51.

[Ga68] L. M. Garrido, *General interaction picture from action principle for mechanics*, J. Math. Phys. **10** (1968) 1045–1056.

[Go80] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading (^{2}1980).

[GuHo83] J. Guckenheimer und P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York (1983).

[Gu66] F. G. Gustavson, *On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point*, Astron. J. **71** (1966) 670–686.

[He83] M. Hénon, *Numerical exploration of Hamiltonian systems*, in: G. Iooss, R. H. G. Hellemann und R. Stora (Hrsg.), *Comportement Chaotique des Systèmes Déterministes*, North-Holland, Amsterdam (1983).

[HeHe64] M. Hénon und C. Heiles, *The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments*, Astron. J. **69** (1964) 73–79.

[Hi87] J. Hietarinta, *Direct Methods for the search of the second invariant*, Phys. Rep. **147** (1987) 87–154.

[HiSm74] M. W. Hirsch und S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York (1974).

[Hu87] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, New York (^{5}1987).

[IoAd92] G. Iooss und M. Adelmeyer, *Topics in Bifurcation Theory and Applications*, World Scientific, Singapore (1992).

[Je92] G. Jerke, *Die Erde hat einen dritten Strahlungsgürtel*, Phys. Bl. **48** (1992) 188.

[KaRo92] M. Kaluža und M. Robnik, *Improved accuracy of the Birkhoff-Gustavson normal form and its convergence properties*, J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992) 5311–5327.

[La90] K. La Mon, *Lie series in an extended region of phase space*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990) 3875–3884.

[LiLi92] A. J. Lichtenberg und M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer, New York (^{2}1992).

[MeHa92] K. R. Meyer und G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer (1992).

[Mo68] J. K. Moser, *Lectures on Hamiltonian Systems*, Mem. Amer. Math. Soc. **81** (1968) 1–60.

[Mo73] J. K. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press, Princeton (1973).

[NaSc61] J. Naas und H. L. Schmid, *Mathematisches Wörterbuch*, Band II, Teubner, Berlin (1961).

[Ne77] S. E. Newhouse, *Quasi-elliptic points in conservative dynamical systems*, Amer. J. Math. **99** (1977) 1061–1087.

[No90a] W. Nolting, *Grundkurs: Theoretische Physik 2. Analytische Mechanik*, Zimmermann-Neufang, Ulmen (1990).

[No90b] W. Nolting, *Grundkurs: Theoretische Physik 3. Elektrodynamik*, Zimmermann-Neufang, Ulmen (1990).

[No63] T. G. Northrop, *The Adiabatic Motion of Charged Particles*, Interscience Publishers, New York (1963).

[Oz88] A. M. Ozorio de Almeida, *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization*, Cambridge University Press, Cambridge (1988).

[PaMe82] J. Palis und W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer, New York (1982).

[PlEA78] D. Plachky, L. Baringhaus und N. Schmitz, *Stochastik I*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1978).

[Po92] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste* (drei Bände), Gauthier-Villars, Paris (1892, 1893, 1899).

[Ro70] R. C. Robinson, *Generic properties of conservative systems*, Amer. J. Math. **92** (1970) 562–603.

[Ro84] M. Robnik, *The algebraic quantization of the Birkhoff-Gustavson normal form*, J. Phys. A: Math. Gen. **17** (1984) 109–130.

[SaVe85] J. F. Sanders und F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer, New York (1985).

[Sc89] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos*, VCH, Weinheim (^{2}1989).

[Se90] B. Seegers, *Chaotische Streuung im Störmer-Problem*, Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (1990).

[ShRe82] R. B. Shirts und W. P. Reinhardt, *Approximate constants of motion for classically chaotic vibrational dynamics: vague tori, semiclassical quantization, and classical intramolecular energy flow*, J. Chem. Phys. **77** (1982) 5204–5217. Erratum: J. Chem. Phys. **79** (1983) 3173.

[SiMo71] C. L. Siegel und J. K. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, Berlin (1971).

[St91] B. Stegemerten, *Reguläre und irregulär-chaotische Bewegung in der Penning-Falle*, Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (1991).

[St89] J. Stoer, *Numerische Mathematik*, Springer, Berlin (1989).

[St55] C. Størmer, *The Polar Aurora*, Clarendon Press, Oxford (1955).

[St87] N. Straumann, *Klassische Mechanik*, Springer, Berlin (1987).

[SwDe79] R. T. Swimm und J. B. Delos, *Semiclassical calculations of vibrational energy levels for nonseparable systems using the Birkhoff-Gustavson normal form*, J. Chem. Phys. **71** (1979) 1706–1717.

[Wi90] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York (1990).

[Wo91] S. Wolfram, *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley, Redwood City (^{2}1991).

[Ze73] E. Zehnder, *Homoclinic points near elliptic fixed points*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973) 131–182.

[ZiHä93] C. Zimmermann und T. W. Hänsch, *Antiwasserstoff*, Phys. Bl. **49** (1993) 193–196.

Danksagung

Zum Schluß möchte ich mich bei all denen bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Professor Peter Eckelt für die Anregung zu diesem interessanten Thema und für die ständige Bereitschaft zu ausgiebigen und weiterführenden Diskussionen.

Bei Berthold Stegemerten bedanke ich mich für die meisterhafte Vorarbeit im Rahmen seiner eigenen Diplomarbeit und für die vielen wertvollen Hinweise.

Arne Beeker und ganz besonders Claudia Schwalfenberg leisteten wertvolle Hilfe beim Korrekturlesen des Typoskriptes. Ohne sie wäre diese Arbeit nicht so geworden, wie sie ist.

Weiterhin möchte ich mich bei Thomas Schridde und Klaus Kreulich für die angenehme Arbeitsatmosphäre in Zimmer 411 bedanken.

Rainer Horstmann und Björn Seegers standen als EDV-Fachleute stets mit Rat und Tat bereit.

Dank gebührt schließlich auch den Teilnehmern der *Bridge Seminars*, Harald Grießhammer, Anastasios Petkos, Leonidas Sandoval Jr. und Urs Wiedemann, für die naiven und deswegen um so fruchtbareren Zwischenfragen.

Nicht zuletzt möchte ich all jenen hier nicht namentlich Genannten meinen Dank aussprechen, die mir mit ihren aufmunternden Worten während der Anfertigung dieser Arbeit geholfen haben.

Hiermit bestätige ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.