

Andreas Büning

Klassische und Quantendynamik  
des ungedämpften Duffing-Oszillators  
mit parametrischer Anregung

1999









Diplomarbeit

Klassische und Quantendynamik  
des ungedämpften Duffing-Oszillators  
mit parametrischer Anregung

vorgelegt von  
Andreas Büning

– Münster, den 4. März 1999 –

Institut für Theoretische Physik I  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster



*Allen, die es ermöglichen  
durch ihre Steuern und Spenden,  
daß wir, Forscher und Wissenschaftler,  
uns der Sache widmen können,  
die uns die höchste erscheint:  
dem Verstehen des Universums,  
das uns geboren hat.*

HARALD FRITZSCH

– *Und insbesondere meinen Eltern*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>1 Der DUFFING-Oszillator mit parametrischer Anregung</b>	<b>15</b>
1.1 Das System . . . . .	15
1.1.1 Der DUFFING-Oszillator . . . . .	15
1.1.2 Beispiel 1 . . . . .	16
1.1.3 Beispiel 2 . . . . .	17
1.2 Parametrisierung . . . . .	18
1.3 Skalierung . . . . .	19
1.4 Zwei 2-parametrische Spezialfälle . . . . .	20
1.4.1 Spezialfall 1: $a = \frac{c}{b}$ , $f(t) = g(t)$ . . . . .	21
1.4.2 Spezialfall 2: $a = 0$ . . . . .	22
<b>2 Klassische Mechanik</b>	<b>25</b>
2.1 Die POINCARÉ-Abbildung . . . . .	25
2.1.1 Der Fluß autonomer Vektorfelder . . . . .	25
2.1.2 Der Fluß nichtautonomer Vektorfelder . . . . .	26
2.1.3 Definition der POINCARÉ-Abbildung . . . . .	28
2.2 Klassisches Chaos . . . . .	29
2.2.1 Stabile und instabile Mannigfaltigkeit . . . . .	29
2.2.2 Definition von Chaos . . . . .	31
2.2.3 Homoklines Chaos . . . . .	31
2.2.4 Das KAM-Szenario . . . . .	33
2.2.5 Das Frequenzspektrum der Autokorrelationsfunktion . . . . .	34
2.3 Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	34
2.3.1 Der Satz von HARTMAN-GROBMAN . . . . .	34

2.3.2	Das linearisierte System . . . . .	36
2.3.2.1	Der linearisierte Fluß . . . . .	36
2.3.2.2	Die linearisierte POINCARÉ-Abbildung . . . . .	37
2.3.2.3	Anwendung auf den DUFFING-Oszillator . . . . .	38
2.3.3	Die Monodromiematrix . . . . .	39
2.3.3.1	Autonome Systeme . . . . .	39
2.3.3.2	Erweiterung für nichtautonome Systeme . . . . .	40
2.3.3.3	Eigenschaften der Monodromiematrix . . . . .	41
2.3.4	Die HILL-Gleichung . . . . .	42
2.3.5	Spezialfall 1: $a = \frac{c}{b}$ , $f(t) = g(t)$ . . . . .	45
2.3.5.1	Die HILL-Gleichungen für die Fixpunkte . . . . .	45
2.3.5.2	Die MEISSNER-Gleichung . . . . .	45
2.3.5.3	Die MATHIEU-Gleichung . . . . .	51
2.3.6	Spezialfall 2: $a = 0$ . . . . .	53
2.4	Numerische Resultate . . . . .	54
2.4.1	Spezialfall 1: $a = \frac{c}{b}$ , $f(t) = g(t)$ . . . . .	54
2.4.2	Spezialfall 2: $a = 0$ . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Quantenmechanik</b>	<b>63</b>
3.1	Phasenraumverteilungen . . . . .	63
3.1.1	Einführung . . . . .	63
3.1.2	Die WIGNER-Verteilung . . . . .	67
3.1.3	Die HUSIMI-Verteilung . . . . .	68
3.1.4	Andere Verteilungsfunktionen . . . . .	71
3.2	Die zeitliche Entwicklung . . . . .	72
3.2.1	Quantenmechanische Skalierung . . . . .	72
3.2.2	Autonome Systeme: Energieeigenzustände . . . . .	74
3.2.3	Nichtautonome Systeme: Quasienergieeigenzustände . . . . .	74
3.2.4	Die „quantenmechanische POINCARÉ-Abbildung“ . . . . .	76
3.3	Quantenchaos . . . . .	77
3.3.1	Definition von Quantenchaos . . . . .	77
3.3.2	Das (Quasi-) Energiespektrum . . . . .	79

---

3.3.3	Eigenschaften stationärer Zustände . . . . .	83
3.3.4	Eigenschaften nichtstationärer Zustände . . . . .	84
3.4	Der quantenmechanische Tunneleffekt . . . . .	84
3.4.1	Die EBK-Quantisierung . . . . .	85
3.4.2	Die EBK-Quantisierung für nichtautonome Systeme . . .	87
3.4.3	Die Lokalisierung von Eigenfunktionen in Regularitätsge- bieten . . . . .	89
3.4.4	Reguläres Tunneln . . . . .	91
3.4.5	Chaotisches Tunneln . . . . .	94
3.4.6	Blockmatrix-Modelle . . . . .	97
3.4.7	Die Lokalisierung von Eigenzuständen in chaotischen Be- reichen . . . . .	98
3.4.8	Dynamisches Tunneln . . . . .	99
3.5	Numerische Resultate . . . . .	100
3.5.1	Numerische Algorithmen . . . . .	100
3.5.2	Die zeitliche Entwicklung von Wellenpaketen . . . . .	102
3.5.3	Der Tunneleffekt . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Schlußbemerkungen</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Floquet-Theorie</b>	<b>123</b>
A.1	Die formale Lösung . . . . .	123
A.2	FLOQUET-Multiplikatoren . . . . .	124
A.3	Zeitunabhängige Systeme . . . . .	126
A.4	Zeitabhängige Systeme . . . . .	127
<b>B</b>	<b>Lösung einer HILL-Gleichung für eine stückweise konstante ...</b>	<b>129</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>135</b>





## Einleitung

In der nichtrelativistischen Physik gibt es zwei fundamentale Theorien der Mechanik, durch die das moderne Weltbild der Physik maßgeblich geprägt wurde: die *Klassische NEWTON'sche Mechanik* und die *Quantenmechanik*. Die Klassische Mechanik ist eine deterministische *makroskopische* Theorie, die unter anderem in der Himmelsmechanik und der Ballistik Verwendung findet und die Grundlage der klassischen Statistik bildet. Die Quantenmechanik dagegen ist eine nichtdeterministische *mikroskopische* Theorie, die für einen gegebenen Zustand eines Systems nur Wahrscheinlichkeiten über den Zustand zu einem späteren Zeitpunkt angeben kann. Sie beschreibt unter anderem den Aufbau der Atomkerne, der Elektronenhüllen von Atomen und Molekülen, die Bändermodelle in der Festkörperphysik sowie Supraleitung und Suprafluidität.

Ogleich sich diese beiden dynamischen Theorien sehr stark voneinander unterscheiden, muß die mikroskopische Theorie, also die Quantenmechanik, beim Übergang zu großen Skalen – man spricht dabei auch vom „Limes  $\hbar \rightarrow 0$ “ – in die makroskopische Theorie, die Klassische Mechanik, übergehen. Daher ist es von Interesse, zu untersuchen, inwiefern sich die Eigenschaften eines klassischen Systems in seinem quantenmechanischen Pendant widerspiegeln.

Allgemein lassen sich physikalische Systeme durch das Modell von Massenpunkten beschreiben, die sich reibungsfrei in einem Potential bewegen; denn Reibung kommt in der makroskopischen Welt durch das statistische Verhalten vieler mikroskopischer Teilchen zustande. Ein reibungsbehaftetes Teilchen in einem eindimensionalen Potential läßt sich daher auch durch das Modell von  $10^{23}$  Massenpunkten in einem ebenso hochdimensionalen Potential beschreiben. In der Quantenmechanik als mikroskopischer Theorie kann es keine Reibung geben. Daher sollte für den Vergleich dieser beiden dynamischen Theorien die Klassische Mechanik als reibungsfrei angenommen und mit der HAMILTON-Mechanik identifiziert werden.

Wie seit einigen Jahrzehnten bekannt ist, können HAMILTON-Systeme eine äußerst komplexe Dynamik aufweisen. Neben *regulärer*, periodischer oder quasiperiodischer Dynamik, die der eines integrablen Systems entspricht, kann ein System auch *chaotische* Dynamik aufweisen, bei welcher der Verlauf der Trajektorien eine sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen aufweist. Tatsächlich ist dies der generische Fall. Ein „typisches“, d.h. beliebig ausgewähltes HAMILTON-System wird in der Regel sowohl reguläre als auch chaotische Dynamik aufweisen. Derartige Systeme werden in dieser Arbeit in Anlehnung an [FD98] als *gemischte Systeme* (mixed systems) bezeichnet.

Für die Untersuchung eines klassischen Systems betrachtet man häufig POIN-

POINCARÉ-Schnitte im Phasenraum, die von den Trajektorien des Systems immer wieder, und zwar unendlich oft, passiert werden. Die POINCARÉ-Abbildung ordnet einem Punkt  $\mathbf{x}$  der Schnittfläche den zeitlich nächsten Durchstoßpunkt der in  $\mathbf{x}$  startenden Trajektorie durch die Schnittfläche zu. Die Untersuchung der Dynamik auf dem Phasenraum läßt sich hiermit auf die niederdimensionale Schnittfläche reduzieren. Die Punkte des Phasenraums werden durch die konjugierten Variablen  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  bezeichnet, die mit Ort und Impuls identifiziert werden können. Orbits auf dem POINCARÉ-Schnitt sind Punktfolgen. Zeichnet man mehrere dieser Punktfolgen auf dem POINCARÉ-schnitt ein, so erhält man ein Phasenportrait des Systems.

Ein Hauptproblem beim Vergleich der klassischen und der quantenmechanischen Dynamik eines HAMILTON-Systems liegt darin, daß die quantenmechanische Wellenfunktion, die der klassischen Trajektorie entspricht, nur entweder als Funktion des Ortes  $\mathbf{q}$  oder als Funktion des Impulses  $\mathbf{p}$  formuliert werden kann, nicht aber als Funktion von Ort *und* Impuls zugleich. Durch Einführung von Phasenraumverteilungen läßt sich jedoch die zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets auch auf dem Phasenraum verfolgen [Lee95].

Autonome Systeme mit einem Freiheitsgrad der Bewegung sind immer integrabel, weil die HAMILTON-Funktion eine Erhaltungsgröße ist. Die einfachsten Fälle eines Systems mit chaotischer Dynamik sind ein autonomes System mit zwei Freiheitsgraden oder ein nichtautonomes System mit einem Freiheitsgrad. Für das grundlegende Verständnis der klassischen und der quantenmechanischen Dynamik sind daher gerade solche Systeme besonders gut geeignet.

In der Literatur werden häufig zwei spezielle Klassen von HAMILTON-Systemen untersucht: Billardsysteme und nichtlineare Oszillatoren [BTU93]. Ein Billardsystem ist ein Modell eines freien Teilchens in einem Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden. Ein Vorteil dieses Systems ist es, daß numerische Berechnungen mit relativ geringem Aufwand durchgeführt werden können, weil sich das Teilchen zwischen den Stößen an den Potentialwänden frei bewegt. Nichtlineare Oszillatoren dagegen werden durch ein Potential in Form eines Polynoms beschrieben.

Ein Beispiel für einen nichtlinearen Oszillator ist der eindimensionale DUFFING-Oszillator [GH83]. Als autonomes System ist der DUFFING-Oszillator integrabel. Bei Einführung einer Zeitabhängigkeit wird das System nichtintegrabel, und es entsteht chaotische Dynamik. Dies kann auf zwei Arten geschehen; zum einen durch eine *äußere* Anregung, zum anderen durch eine *parametrische* Anregung. In jedem Fall ist die Anregung periodisch. Im ersten Fall wirkt auf das System eine äußere Kraft. Dieser Fall wurde in der Literatur sowohl klassisch [Kau58, NM79, GH83, AFH94, KW96] als auch quantenmechanisch abgehandelt [LB91, KW96]. Im zweiten Fall unterliegen die Parameter des Potentials einer zeitlichen Variation. Dieser Fall wurde in der Literatur klassisch nur selten [Wei52, Wei56, Par90] und quantenmechanisch meines Wissens gar nicht betrachtet. In Anlehnung an [KW96] wird in dieser Arbeit die klassische und die quantenmechanische Dynamik des *ungedämpften DUFFING-Oszillators mit parametrischer Anregung* untersucht.

Kapitel 1 beschäftigt sich mit der Beschreibung des untersuchten Systems. In Abschnitt 1.1 wird zunächst das Modell des DUFFING-Oszillators mit parametrischer Anregung klassisch vorgestellt. Es werden zwei makroskopische Systeme angegeben, die sich durch dieses Modell beschreiben lassen, der axial pulsierend belastete Balken und das Drehpendel mit oszillierender Aufhängung. Danach wird das System in Abschnitt 1.2 parametrisiert und die sechs Systemparameter  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $m$  und  $\omega$  werden eingeführt. Durch die Skalierung in Abschnitt 1.3 bleiben insgesamt nur drei voneinander unabhängige Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  übrig. In Abschnitt 1.4 werden zwei 2-parametrische Spezialfälle des DUFFING-Oszillators mit parametrischer Anregung vorgestellt. Spezialfall 1 ist besser für die klassische, Spezialfall 2 besser für die quantenmechanische Untersuchung geeignet.

Kapitel 2 beschäftigt sich ausschließlich mit der Klassischen Mechanik des untersuchten Systems. Zu Beginn werden in Abschnitt 2.1 einige allgemeine Aussagen über den Fluß autonomer und nichtautonomer Vektorfelder gemacht, und es wird die POINCARÉ-Abbildung eingeführt. In Abschnitt 2.2 wird der Begriff des klassischen Chaos definiert. Anschließend folgt eine Diskussion der Szenarien, die für das Auftreten chaotischer Dynamik in dem untersuchten System typisch sind. Abschnitt 2.3 enthält die klassische Stabilitätsanalyse. Zu Anfang wird mit Hilfe des Satzes von HARTMAN-GROBMAN die um einen Orbit linearisierte Dynamik des Systems diskutiert und die Monodromiematrix eingeführt, deren Eigenwerte die Stabilität des gewählten Orbits bestimmen. Für ein nichtautonomes System mit einem Freiheitsgrad der Bewegung ist die lineare Dynamik durch die HILL-Gleichung gegeben, deren Eigenschaften besprochen werden. Anschließend wird für die Fixpunkte der beiden in Abschnitt 1.4 angegebenen Spezialfälle für eine spezielle Wahl der Anregungsfunktion das lineare Stabilitätsproblem gelöst. Im Fall der Rechteckfunktion geht die HILL-Gleichung in die MEISSNER-Gleichung über, für die sich eine analytische Lösung angeben läßt. Für den Kosinus erhält man die bekannte MATHIEU-Gleichung, deren Lösung numerisch berechnet wird. In Abschnitt 2.4 werden die numerischen Ergebnisse präsentiert. Für die beiden Spezialfälle wird je eine Serie von Phasenportraits gezeigt. Außerdem werden Pitchfork- bzw. Flip-Bifurkationen der seitlichen Fixpunkte diskutiert.

Kapitel 3 widmet sich der Quantenmechanik. Denkbare Anwendungen des quantenmechanischen Systems liegen im Bereich der Atom- und Molekülphysik. Vorstellbar ist ein Elektron im zeitabhängigen Potential eines Moleküls, das Vibrationsschwingungen ausführt. Die für die quantenmechanischen Untersuchungen notwendigen Phasenraumverteilungen werden in Abschnitt 3.1 eingeführt. Vorgestellt werden die bekannten Phasenraumverteilungen von WIGNER und HUSIMI sowie eine Verteilung von COHEN. Im folgenden Abschnitt 3.2 wird  $\hbar$  als zusätzlicher Parameter des quantenmechanischen Systems eingeführt, und es werden *Quasienergiezustände* diskutiert, die für nichtautonome Systeme – analog zu den Energieeigenzuständen autonomer Systeme – eine Basis des HILBERT-Raums bilden. Abschnitt 3.3 beschreibt quantenmechanische Charakteristika klassisch chaotischer Systeme, speziell die statistischen Eigenschaften von chaotischen Energiespektren. Ein besonderer Effekt, der nur quan-

tenmechanischen Systemen eigen ist, ist der Tunneleffekt, der in Abschnitt 3.4 ausführlich diskutiert wird. Ein in einem Regularitätsbereich lokalisiertes Wellenpaket tunnelt bei Vorliegen gewisser Symmetrien auf dem Phasenraum im Laufe der Zeit vollständig in einen anderen Regularitätsbereich, und dann wieder zurück. Es wird hierbei zwischen dem *Tunneln durch Energiebarrieren* und sogenanntem *dynamischem Tunneln* unterschieden. Man beobachtet, daß mit dem Anwachsen des chaotischen Phasenraumbereichs die Tunnelrate um mehrere Größenordnungen fluktuiert. Um dies zu erklären, werden verschiedene Modelle vorgestellt, angefangen bei 2-Level-Prozessen, an denen nur zwei Energieeigenzustände beteiligt sind, über 3-Level-Prozesse bis hin zu Blockmatrix-Modellen aus bis zu fünf Blockmatrizen. In Abschnitt 3.5 werden nach einer kurzen Vorstellung der für die numerischen Berechnungen benutzten Algorithmen die numerischen Resultate präsentiert und diskutiert. Gezeigt wird die Zeitentwicklung von Wellenpaketen für eine feste Parameterwahl von Spezialfall 2 für zwei verschiedene Werte von  $\hbar$ . Für die Phasenraumdarstellungen wird dabei überwiegend die dafür geeignetste Phasenraumverteilung, die HUSIMI-Verteilung verwendet. An einem Fallbeispiel wird der Tunneleffekt demonstriert.

# 1 Der DUFFING-Oszillator mit parametrischer Anregung

In dieser Arbeit wird das Modell eines Massenpunktes in einem Zwei-Mulden-Potential mit parametrischer Anregung ohne Dämpfung untersucht, das auch als *ungedämpfter DUFFING-Oszillator mit parametrischer Anregung* bezeichnet wird. Es gibt einige physikalische Systeme, vorwiegend aus Bereichen der Mechanik, die durch dieses Modell näherungsweise beschrieben werden können. Derartige und ähnliche Systeme wurden in der Vergangenheit auch häufig im Rahmen der Ingenieurwissenschaften im Hinblick auf *parametrische Resonanz* untersucht. Die Frage z. B. der Stabilität (oder Instabilität) von Balken unter *selbsterregten Schwingungen* ist gerade auf diesen Gebieten Bedeutung. Eine recht umfassende Referenz wissenschaftlicher Untersuchungen über parametrische Anregung findet sich in [NM79].

## 1.1 Das System

### 1.1.1 Der DUFFING-Oszillator

Als DUFFING-Oszillator bezeichnet man ein System, dessen Bewegungsgleichung durch eine zweidimensionale nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung, nämlich

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad (1.1a)$$

$$\dot{p} = -\delta p - a q^3 + b q \quad (1.1b)$$

gegeben ist. Es handelt sich hierbei um ein wichtiges Modellsystem in der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme, das an vielen Stellen in der Literatur Erwähnung findet [Kau58, NM79, GH83, AFH94, KW96]. Bei Dämpfungsfreiheit ( $\delta = 0$ ) geht (1.1) in ein HAMILTON-System über mit der HAMILTON-Funktion

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{4} a q^4 - \frac{1}{2} b q^2. \quad (1.2)$$

Sind die Parameter  $a, b$  und  $m$  des Systems nicht von der Zeit abhängig, so ergibt sich aus der Energieerhaltung bereits die Integrabilität des Systems. Durch Einführung einer zeitabhängigen Störung kann das System nichtintegrabel werden und eine chaotische Dynamik entstehen.

Es gibt zwei Möglichkeiten, eine derartige Zeitabhängigkeit in (1.1) einzuführen: Zum einen läßt sich das System durch eine *äußere Anregung*  $F(t)$  stören und (1.1b) geht über in

$$\dot{p} = -a q^3 + b q + F(t). \quad (1.1b')$$

Zum anderen können die Systemparameter eine explizite Zeitabhängigkeit enthalten. Man spricht dann von *parametrischer Anregung*.

Die klassische und quantenmechanische Dynamik des ungedämpften DUFFING-Oszillators mit *äußerer* Anregung wird in [KW96] betrachtet. In Anlehnung an jenen Artikel wird in dieser Arbeit die Dynamik des ungedämpften DUFFING-Oszillators mit *parametrischer* Anregung untersucht.

Die HAMILTON-Funktion (1.2) soll nun periodisch in der Zeit sein mit  $H(q, p, t + T) = H(q, p, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Dabei sollen  $a$  und  $b$  als explizit zeitabhängig angenommen werden, während  $m$  weiterhin konstant ist. Man kann  $a$  und  $b$  ohne Einschränkung als  $2\pi$ -periodisch wählen, und mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  erhält man aus (1.2):

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{4} a(\omega t) q^4 - \frac{1}{2} b(\omega t) q^2. \quad (1.3)$$

Die klassische Mechanik wird dann durch die kanonischen Bewegungsgleichungen beschrieben:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial}{\partial p} H(q, p, t) = \frac{p}{m}, \quad (1.4a)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q} H(q, p, t) = -a(\omega t) q^3 + b(\omega t) q. \quad (1.4b)$$

Dieses System ist invariant unter der Paritätstransformation

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q \\ -p \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Das bedeutet, daß für jede Trajektorie  $\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$  auch  $\begin{pmatrix} -q(t) \\ -p(t) \end{pmatrix}$  eine Lösung der kanonischen Bewegungsgleichungen darstellt.

Es gibt eine Reihe von physikalischen Systemen, die sich näherungsweise durch das Modell des ungedämpften DUFFING-Oszillators mit parametrischer Anregung beschreiben lassen. Die in den folgenden Abschnitten beschriebenen Systeme führen zu nichtlinearen Differentialgleichungen, bei denen die höheren Terme durch TAYLOR-Entwicklung und Vernachlässigung der höheren Glieder vereinfacht werden.

### 1.1.2 Beispiel 1

Eines der am häufigsten betrachteten Systeme ist der *axial pulsierend belastete Balken* [Wei52, Wei56, Kau58, Bol64, NM79], siehe Abb. 1.1:

Ein Balken wird an den Enden gelenkig gelagert, so daß dort keine Querverschiebung und kein Biegemoment auftreten, und eines der Lager ist in Längsrichtung verschiebbar. Der Balken wird nun in Längsrichtung durch eine  $T$ -periodische Kraft angeregt und kann darauf sowohl mit Längsschwingungen als auch mit Querschwingungen (in einer Dimension) reagieren.

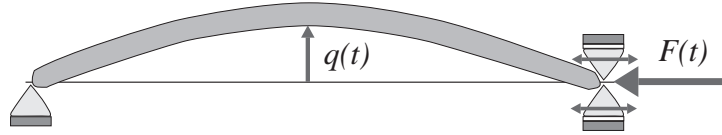


Abbildung 1.1: Axial pulsierend belasteter Balken.

Eine ausführliche Herleitung der Differentialgleichung für die seitliche Auslenkung  $q(t)$  des Balkens würde sich über mehrere Seiten erstrecken und den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher wird an dieser Stelle auf [Wei52] verwiesen.

Unter Vernachlässigung der Reibung und mit einigen Näherungen ergibt sich dann folgende Differentialgleichung für die seitliche Auslenkung:

$$\ddot{q} + r \dot{q}^3 + g(t) q = 0 \quad (1.6)$$

mit  $r \in \mathbb{R}$  und einer periodischen Funktion  $g(t + T) = g(t) \forall t \in \mathbb{R}$ . Dies ist die NEWTONsche Bewegungsgleichung für einen DUFFING-Oszillator mit parametrischer Anregung; denn mit  $p := \dot{q}$  läßt sich (1.6) in (1.4) überführen. Man erhält  $a = r$ ,  $b(\omega t) = -g(t)$  und  $m = 1$ .

### 1.1.3 Beispiel 2

Das zweite Modell, das hier vorgestellt werden soll, ist ein *Drehpendel mit beweglicher Aufhängung* in Anlehnung an [NM79], siehe Abb. 1.2:

Ein Pendel der Länge  $l$  wird senkrecht aufgestellt und am unteren Ende freidrehbar gelagert. Am oberen Ende wird ein Körper der Masse  $m$  befestigt, der, abhängig von der Winkelauslenkung des Balkens, ein durch die Gravitationskraft verursachtes Drehmoment auf das Pendel ausübt. Eine Spiralfeder mit der Direktionskonstanten  $D$  wird an dem Pendel und an der Aufhängung befestigt, so daß sie ein linear vom Auslenkungswinkel  $q$  abhängiges rücktreibendes Drehmoment auf das Pendel ausübt. Über die Aufhängung wirkt auf das Pendel eine periodische Kraft  $F(t) = m a'(t)$  in vertikaler Richtung.

Für die Winkelauslenkung des Pendels ergibt sich aus der Bilanz der Drehmomente folgende Bewegungsgleichung:

$$m l^2 \ddot{q} = m g l \sin q + m a'(t) l \sin q - D q \quad (1.7)$$

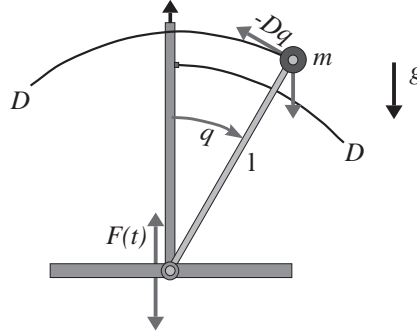


Abbildung 1.2: Drehpendel mit oszillierender Aufhängung.

Mit  $\sin q \approx q - \frac{1}{6} q^3$  sowie  $f(t) := \frac{g+a'(t)}{6l}$  und  $h(t) := \frac{g+a'(t)}{l} - \frac{D}{ml}$  erhält man schließlich:

$$\ddot{q} + f(t) q^3 - h(t) q = 0. \quad (1.8)$$

Auch dies ist die NEWTONsche Bewegungsgleichung eines DUFFING-Oszillators mit parametrischer Anregung. Bringt man (1.8) auf die Form von (1.4), so ergibt sich  $a(\omega t) = f(t)$ ,  $b(\omega t) = h(t)$  und  $m = 1$ .

## 1.2 Parametrisierung

In der Form (1.3) ist das System von den zwei frei wählbaren, periodischen Funktionen  $a$  und  $b$  abhängig, über die ansonsten keine weiteren Annahmen gemacht werden. Diese recht allgemeine Form ist einer eingehenden Untersuchung nur schwer zugänglich, so daß für das System erst eine geeignete Parametrisierung gewählt werden muß.

Es lassen sich  $a(\omega t)$  und  $b(\omega t)$  schreiben als

$$a(\omega t) =: a_1 + a_2 f(\omega t) \quad \text{und} \quad b(\omega t) =: b_1 + b_2 g(\omega t) \quad (1.9)$$

mit  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ . Fordert man zusätzlich

$$\max \{|f(t)| \mid 0 \leq t < 2\pi\} = 1 = \max \{|g(t)| \mid 0 \leq t < 2\pi\}, \quad (1.10a)$$

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0 = \int_0^{2\pi} g(t) dt, \quad (1.10b)$$

so sind die vier neuen Systemparameter  $a_1, a_2, b_1, b_2$  sowie die periodischen Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$  durch die Vorgabe von  $a(t)$  und  $b(t)$  eindeutig be-



stimmt. Es gilt dann:

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(t) dt, \quad (1.11a)$$

$$a_2 = \max \{a(t) - a_1 \mid 0 \leq t < 2\pi\}, \quad (1.11b)$$

$$f(t) = \frac{a(t) - a_1}{a_2}. \quad (1.11c)$$

$b_1, b_2$  und  $g(t)$  werden analog bestimmt.

In den neuen Parametern lautet die HAMILTON-Funktion (1.3):

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{4} (a_1 + a_2 f(\omega t)) q^4 - \frac{1}{2} (b_1 + b_2 g(\omega t)) q^2. \quad (1.12)$$

Die Parameter  $a_2$  und  $b_2$  regeln die Stärke der parametrischen Anregung  $f(\omega t)$  und  $g(\omega t)$  und sollen im folgenden als „Störparameter“ bezeichnet werden. Sind beide gleich Null, so spricht man vom „ungestörten“ System.  $a_1$  und  $b_1$  legen die Form des Potentials im ungestörten Fall fest. Die Funktionen  $f$  und  $g$  regeln dabei die Art der „Störung“ und sind in gewissen Grenzen (vgl. (1.10a)) frei wählbar.

Da in dieser Arbeit, wie bereits oben erwähnt, ein Zwei-Mulden-Potential untersucht werden soll, unterliegen die bisherigen sechs Systemparameter  $a_1, a_2, b_1, b_2, m, \omega$  gewissen Beschränkungen: So muß  $a_1 > 0$  und  $b_1 \geq 0$  sein. Der Fall  $b_1 = 0$  soll als Grenzfall des Übergangs in ein Ein-Mulden-Potential noch zugelassen sein. An diesem Parameterwert findet nämlich der Übergang zwischen dem Ein-Mulden-Potential für  $b_1 < 0$  und dem Zwei-Mulden-Potential für  $b_1 > 0$  statt. Ferner müssen  $m$  und  $\omega$  positiv sein, während die „Störparameter“  $a_2$  und  $b_2$  im Prinzip frei variiert werden können. Es bietet sich allerdings an, sie auf nichtnegative Werte einzuschränken, da ein Übergang von  $a_2 \mapsto -a_2$  einem Übergang von  $f \mapsto -f$  entspricht. Für  $b_2$  und  $g$  gilt das gleiche. Es sind in jedem Fall – insbesondere im Hinblick auf die Quantenmechanik – nur Parameterwerte sinnvoll, für die alle Trajektorien eine gebundene Bewegung beschreiben. So geht das Potential für  $a_2 > a_1$  für einige Zeit während einer Periode im Unendlichen gegen  $-\infty$ , so daß nicht mehr von einem Zwei-Mulden-Potential gesprochen werden kann. Dies führt zwar nicht automatisch zu ungebundener Dynamik, aber dennoch soll immer  $a_2 < a_1$  angenommen werden.

### 1.3 Skalierung

Aus Gründen der Einfachheit und Überschaubarkeit ist es sinnvoll, das System durch Wahl geeigneter Maßeinheiten so zu skalieren, daß möglichst viele Parameter des Systems eliminiert werden. Das kann in diesem Fall durch eine

einfache *kanonische Skalierung* erreicht werden:

$$\sqrt{\frac{a_1}{m\omega^2}} q \mapsto q, \quad (1.13a)$$

$$\sqrt{\frac{a_1}{m^3\omega^4}} p \mapsto p, \quad (1.13b)$$

$$\omega t \mapsto t, \quad (1.13c)$$

$$\frac{a_1}{m^2\omega^4} H(q, p, t) \mapsto H(q, p, t). \quad (1.13d)$$

Dann bleiben die kanonischen Bewegungsgleichungen (1.4) erhalten, wie man leicht nachrechnen kann. Nach der Skalierung sind von den sechs ursprünglichen Parametern nur noch drei unabhängige Parameter übrig:

$$\frac{a_2}{a_1} \mapsto a_2 =: a, \quad (1.14a)$$

$$\frac{b_1}{m\omega^2} \mapsto b_1 =: b, \quad (1.14b)$$

$$\frac{b_2}{m\omega^2} \mapsto b_2 =: c. \quad (1.14c)$$

Die Periode  $T$  wird dabei auf  $2\pi$  skaliert. Für die skalierte HAMILTON-Funktion erhält man schließlich:

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{4} (1 + a f(t)) q^4 - \frac{1}{2} (b + c g(t)) q^2 \quad (1.15)$$

mit dem skalierten Potential

$$V(q, t) = \frac{1}{4} (1 + a f(t)) q^4 - \frac{1}{2} (b + c g(t)) q^2. \quad (1.16)$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen lauten nun:

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad (1.17a)$$

$$\frac{dp}{dt} = -(1 + a f(t)) q^3 + (b + c g(t)) q. \quad (1.17b)$$

## 1.4 Zwei 2-parametrische Spezialfälle

Ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit ist es, Fixpunkte und periodische Orbits auf *Stabilität* und *Instabilität* zu untersuchen. Dabei ist die Untersuchung von Fixpunkten offenbar einfacher, da für deren Bestimmung lediglich die Kenntnis der Nullstellen des Vektorfeldes nötig ist.

Das Vektorfeld des Differentialgleichungssystems (1.17) lautet:

$$\mathbf{F} \left( \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, t \right) = \begin{pmatrix} p \\ -(1 + a f(t)) q^3 + (b + c g(t)) q \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Für die Nullstellen von  $\mathbf{F}$ , deren Ortskomponenten offensichtlich identisch mit den Extrema des Potentials sind, ergibt sich dann:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \iff p = 0 \wedge \left( q = 0 \vee q = \pm \sqrt{\frac{b + c g(t)}{1 + a f(t)}} \right). \quad (1.19)$$

Im allgemeinen besitzt  $\mathbf{F}$  somit nur einen einzigen Fixpunkt, nämlich den Ursprung  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Maximal zwei weitere Fixpunkte sind bei geeigneter Parameterwahl möglich: Sind

$$q_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{b + c g(t)}{1 + a f(t)}} \quad (1.20)$$

Konstanten, so sind  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  sowie  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} q_2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{x}_1$  ebenfalls Fixpunkte des Vektorfelds.

Im ungestörten Fall, d.h. für  $a = c = 0$  und  $b > 0$  ist  $q_0$  ein lokales Maximum des Potentials und somit  $\mathbf{x}_0$  ein instabiler Fixpunkt des Vektorfelds. Dagegen sind  $q_{1,2} = \pm\sqrt{b}$  lokale Minima des Potentials und daher  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  stabile Fixpunkte des Vektorfelds, wie aus Abb. 1.3 ersichtlich ist. Für  $b = 0$  gibt es nur den stabilen Fixpunkt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

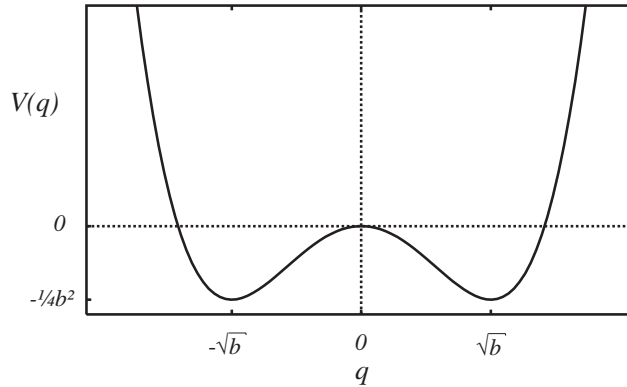


Abbildung 1.3: Das Potential  $V(q)$  für  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0$ .

#### 1.4.1 Spezialfall 1: $a = \frac{c}{b}$ , $f(t) = g(t)$

Es stellt sich die Frage, für welche Parameterwahl die Fixpunkte  $\mathbf{x}_{1,2}$  des ungestörten Systems erhalten bleiben. Es läßt sich leicht zeigen, daß dies genau dann der Fall ist, falls gilt:

$$b > 0 \quad \text{und} \quad a = c = 0 \quad (1.21a)$$

oder

$$b > 0 \quad \text{und} \quad \left( a = \frac{c}{b} \wedge f(t) = g(t) \right) \quad (1.21b)$$

Der erste Fall (1.21a) ist trivial: Es ergibt sich das ungestörte System. Wesentlich ist daher der zweite Fall (1.21b).

Wählt man nun  $f(t) = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$  sowie  $a = \frac{c}{b}$ ,  $b > 0$ , so ergibt sich für die seitlichen Potentialminima aus (1.20):

$$q_{1,2} = \pm \sqrt{b}. \quad (1.22)$$

Für diesen speziellen Fall geht die HAMILTON-Funktion (1.15) über in

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} + \left(1 + \frac{c}{b} f(t)\right) \left(\frac{1}{4} q^4 - \frac{1}{2} b q^2\right) \quad (1.23)$$

mit den kanonischen Gleichungen

$$\dot{q} = p, \quad (1.24a)$$

$$\dot{p} = - \left(1 + \frac{c}{b} f(t)\right) (q^3 - b q). \quad (1.24b)$$

Dieses eingeschränkte System hat den Vorteil, daß durch die zeitunabhängigen Extrema des Potentials die *klassische* Stabilitätsanalyse deutlich vereinfacht wird. Leider stellt sich heraus, daß diese Systemwahl für die numerische Untersuchung des *quantenmechanischen* Systemverhaltens weniger geeignet ist<sup>1</sup>. Dies liegt im wesentlichen an der kleinräumigen Struktur der Phasenportraits des Systems, die meist aus vielen kleinen regulären Inseln und chaotischen Bändern bestehen, aber kaum großflächige Strukturen enthalten. Eine Untersuchung im Hinblick auf chaotisches Verhalten des quantenmechanischen Systems würde eine hohe Phasenraumauflösung und somit sehr viel Rechenzeit für die numerischen Berechnungen erfordern.

### 1.4.2 Spezialfall 2: $a = 0$

Im zweiten hier betrachteten Fall wird der Parameter  $a = 0$  gesetzt, so daß die Zeitabhängigkeit aus dem nichtlinearen Anteil des Potentials verschwindet. Die Potentialminima aus (1.20) sind dann allerdings zeitabhängig:

$$q_{1,2} = \pm \sqrt{b + c g(t)}. \quad (1.25)$$

Die HAMILTON-Funktion (1.15) geht dabei über in

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{4} q^4 - \frac{1}{2} (b + c g(t)) q^2 \quad (1.26)$$

mit den kanonischen Gleichungen

$$\dot{q} = p, \quad (1.27a)$$

$$\dot{p} = -q^3 + (b + c g(t)) q. \quad (1.27b)$$

---

<sup>1</sup> siehe Abschnitt 3.5

Dies entspricht dem Beispiel des beidseitig eingespannten Balkens aus Abschnitt 1.1.2<sup>2</sup>. Der Parameter  $c$  gibt hierbei die Stärke der Störung an, während  $b$  die Belastung des Balkens beschreibt. Ein Wert von  $b < 0$  entspricht einer geringen Belastung des Balkens und führt zu einer einzigen stabilen Ruhelage ohne Auslenkung.  $b > 0$  dagegen bedeutet eine hohe Belastung des Balkens oberhalb der „EULERSCHEN Knicklast“. Die zentrale Ruhelage ist dann instabil, und es gibt zwei seitliche stabile Ruhelagen mit einer Auslenkung von  $\pm\sqrt{b}$ .

Es ist zu erwarten, daß bei Anlegen einer kleinen Störung die stabilen Ruhelagen in Orbits der Periode  $T = 2\pi$  übergehen. Dieses System hat daher den Nachteil, daß diese Orbits im Gegensatz zum Spezialfall 1 nicht konstant sind und somit die *klassische* Stabilitätsanalyse erschwert ist. Dafür ist in diesem Fall die numerische Untersuchung des *quantenmechanischen* Systemverhaltens deutlich einfacher<sup>3</sup>. Der Grund liegt darin, daß die Phasenportraits dieses Systems große reguläre Inseln und im wesentlichen nur einen zusammenhängenden chaotischen Bereich enthalten. Dadurch ist der benötigte numerische Rechenaufwand deutlich geringer als im Spezialfall 1, da eine niedrigere „Phasenraumauflösung“ zur quantenmechanischen Untersuchung ausreicht.

---

<sup>2</sup>Die Konstante  $c$  aus Gleichung (1.6) ist in Abschnitt 1.3 auf 1 skaliert worden.

<sup>3</sup>siehe Abschnitt 3.5



## 2 Klassische Mechanik

In diesem Kapitel wird der ungedämpfte DUFFING-Oszillator mit parametrischer Anregung im Rahmen der *klassischen Mechanik* sowohl *analytisch* als auch *numerisch* behandelt. Ein besonderer Schwerpunkt wird auf die Bestimmung der Stabilität der Fixpunkte bzw. der periodischen Orbits in den Potentialmulden gelegt, die bei Anlegen einer Störung aus den stabilen Fixpunkten des ungestörten Systems entstehen. Dies sind auch gleichzeitig die wichtigsten Orbits des Systems, da diese den gestörten Ruhelagen des jeweils zugrundeliegenden Modells entsprechen.

### 2.1 Die POINCARÉ-Abbildung

#### 2.1.1 Der Fluß autonomer Vektorfelder

Für ein *autonomes* Vektorfeld  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x})$  ist der zugehörige Fluß  $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(\mathbf{x}_0, t) \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}_0)$  durch eine partielle Differentialgleichung<sup>1</sup> in der Zeit, die sogenannte Flußgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi|_{\mathbf{x}_0, t} = \mathbf{F} \circ \Phi|_{\mathbf{x}_0, t} \quad (2.1)$$

definiert mit der Anfangsbedingung

$$\Phi_0 = \mathbb{1}|_{\mathbb{R}^n}. \quad (2.2)$$

Die Abbildung  $t \mapsto \phi_t(\mathbf{x}_0)$  für festes  $\mathbf{x}_0$  beschreibt somit den zur Zeit  $t = 0$  in  $\mathbf{x}_0$  startenden Orbit;  $\mathbf{x}_0 \mapsto \phi_t(\mathbf{x}_0)$  ist für festes  $t$  ein Diffeomorphismus auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Die durch  $t$  parametrisierte Schar von Diffeomorphismen  $\Phi_t$  bildet eine ABELSche Gruppe<sup>2</sup>; denn es gilt:

$$\Phi_t \circ \Phi_{t'} = \Phi_{t+t'} = \Phi_{t'} \circ \Phi_t. \quad (2.3)$$

und

$$\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t} \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Die Nomenklatur  $\Phi|_{\mathbf{x}', t'}$  wird in dieser Arbeit ausschließlich im Zusammenhang mit Ableitungen verwendet. So bedeutet z.B.  $D\Phi|_{\mathbf{x}'_0, t'}$  die Ableitung von  $\Phi$  nach den  $\mathbf{x}_0$ -Komponenten an der Stelle  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'_0$ ,  $t = t'$  und ist eine kompaktere Schreibweise als  $(D\Phi_t)(\mathbf{x}'_0)$  oder  $D\Phi_t(\mathbf{x}_0)|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{x}'_0}$ .

<sup>2</sup> $\Phi_0$  ist das neutrale Element, und die Assoziativität ergibt sich sofort aus (2.3).

### 2.1.2 Der Fluß nichtautonomer Vektorfelder

Für ein *nichtautonomes* Vektorfeld  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{F}_t(\mathbf{x})$  ergibt sich eine zu (2.1) analoge Gleichung mit dem Unterschied, daß  $\mathbf{F}$  explizit von der Zeit abhängt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi|_{\mathbf{x}_0, t} = \mathbf{F}_t \circ \Phi|_{\mathbf{x}_0, t}. \quad (2.5)$$

mit der Anfangsbedingung  $\Phi_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ .  $\Phi$  ist allerdings im eigentlichen Sinne kein Fluß, da das Aussehen von  $\Phi$  explizit von der gewählten Startzeit  $t_0$  (hier:  $t_0 = 0$ ) des Flusses abhängt. Dieses Problem läßt sich dadurch umgehen, daß  $\Phi$  um ein zusätzliches Zeitargument, die Startzeit, erweitert wird.  $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(\mathbf{x}_0, t, t_0) \mapsto \Phi_{t, t_0}(\mathbf{x}_0)$  mit der Anfangsbedingung  $\Phi_{t_0, t_0} = \mathbb{1}|_{\mathbb{R}^n}$  bildet dann den eigentlichen Fluß des nichtautonomen Vektorfeldes  $\mathbf{F}$ . Die nun zweiparametrische Schar  $\Phi_{t, t_0}$  von Diffeomorphismen auf  $\mathbb{R}^n$  bildet im allgemeinen keine Gruppe. Es gilt:

$$\Phi_{t'', t'} \circ \Phi_{t', t} = \Phi_{t'', t}. \quad (2.6)$$

Die Verknüpfung zweier beliebiger Diffeomorphismen  $\Phi_{t_1, t_2}$  und  $\Phi_{t_3, t_4}$  der Schar ist nur möglich, falls  $t_2 = t_3$  oder  $t_1 = t_4$  ist.

Im Rahmen dieser Arbeit wird der zweiparametrische Fluß  $\Phi_{t, t_0}$  allerdings nicht benötigt, so daß im folgenden mit dem Begriff „nichtautonomer Fluß“ immer  $\Phi_t$  aus (2.5) mit der Anfangsbedingung  $\Phi_0 = \mathbb{1}|_{\mathbb{R}^n}$  gemeint ist.

Zu beachten ist lediglich, daß für diesen nichtautonomen Fluß die Gleichungen (2.3) und (2.4) nicht gültig sind. Allerdings gilt für  $T$ -periodische Systeme folgender Satz:

**Satz 2.1.** *Sei  $\mathbf{F}_t$  ein (nicht notwendigerweise endlich dimensionales) nichtautonomes Vektorfeld auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ . Es gelte  $\mathbf{F}_{t+T} = \mathbf{F}_t \forall t \in \mathbb{R}$ . Es sei  $\Phi : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ ,  $(\mathbf{x}_0, t) \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}_0)$  der zugehörige nichtautonome Fluß, der durch Gleichung (2.5) mit der Anfangsbedingung  $\Phi_0 = \mathbb{1}|_V$  bestimmt ist. Dann gilt*

$$\Phi_{t+T} = \Phi_t \circ \Phi_T. \quad (2.7)$$

Für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Es muß lediglich gezeigt werden, daß  $\Phi_{t+T}$  und  $\Phi_t \circ \Phi_T$  die Gleichung (2.5) mit derselben Anfangsbedingung erfüllen. Aus der Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen folgt dann automatisch, daß  $\Phi_{t+T}$  und  $\Phi_t \circ \Phi_T$  identisch sind.

Sei  $\mathbf{x}_0 \in V$ . Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi|_{\mathbf{x}_0, t+T} = \mathbf{F}_{t+T} \circ \Phi|_{\mathbf{x}_0, t+T} = \mathbf{F}_t \circ \Phi|_{\mathbf{x}_0, t+T}. \quad (2.8)$$



Also erfüllt  $\Phi_{t+T}$  die Differentialgleichung (2.5) mit der Anfangsbedingung  $\Phi_{0+T}(\mathbf{x}_0) = \Phi_T(\mathbf{x}_0)$ . Ferner gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t \circ \Phi_T|_{\mathbf{x}_0, t} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi|_{\Phi_T(\mathbf{x}_0)} = \mathbf{F}_t \circ \Phi|_{\Phi_T(\mathbf{x}_0)} = \mathbf{F}_t \circ \Phi_t \circ \Phi_T(\mathbf{x}_0) \quad (2.9)$$

mit der zugehörigen Anfangsbedingung  $\Phi_{t=0} \circ \Phi_T(\mathbf{x}_0) = \Phi_T(\mathbf{x}_0)$ . Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen.  $\square$

Die Aussage des Satzes entspricht der folgenden Aussage für den zweiparametrischen Fluß:

$$\Phi_{t+2\pi, 0} = \Phi_{t+2\pi, 2\pi} \circ \Phi_{2\pi, 0} = \Phi_{t, 0} \circ \Phi_{2\pi, 0}. \quad (2.10)$$

Für bestimmte theoretische Belange ist es sinnvoll, ein nichtautonomes System in ein autonomes umzuschreiben. Dies kann durch Einführung einer neuen Variablen  $\theta(t)$  erreicht werden, deren zeitliche Entwicklung durch

$$\dot{\theta} = 1 \quad \text{mit} \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (2.11)$$

gegeben ist. Es gilt daher:

$$\theta(\theta_0, t) = \theta_0 + t. \quad (2.12)$$

Als neues autonomes Vektorfeld wählt man  $\mathbf{F}' : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit

$$\mathbf{F}' \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \theta - \theta_0) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Der zugehörige nichtautonome Fluß  $\Phi' : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $(\mathbf{x}_0, \theta_0, t) \mapsto \Phi'_t(\mathbf{x}_0, \theta_0)$  ist dann durch Gleichung (2.1) für  $\mathbf{F}'$  und  $\Phi'$  bestimmt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi'|_{\mathbf{x}_0, \theta_0, t} = \mathbf{F}' \circ \Phi'|_{\mathbf{x}_0, \theta_0, t}. \quad (2.14)$$

Ist  $\mathbf{F}$  in  $t$  periodisch mit der Periode  $2\pi$ , so läßt sich  $\theta + 2\pi$  mit  $\theta$  identifizieren. Die a priori auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Variable<sup>3</sup>  $\theta$  läßt sich somit auf das Intervall  $[0, 2\pi[$  abbilden und daher als *zyklische* Variable auffassen. Aus (2.12) folgt dann:

$$\theta(\theta_0, t + 2\pi) = \theta_0 + t + 2\pi = \theta(\theta_0, t). \quad (2.15)$$

Hierbei ist zu beachten, daß Fixpunkte des nichtautonomen Systems, d.h. zeitunabhängige Nullstellen von  $\mathbf{F}$  in periodische Orbits des autonomen Systems übergehen, da die Koordinate  $\theta(\theta_0, t)$  für keine einzige Trajektorie konstant sein kann. Somit hat das autonome System insbesondere keine Fixpunkte.

<sup>3</sup>Genaugenommen ist  $\theta$  nur in dem hier untersuchten System auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Im Allgemeinen kann der Definitionsbereich aber auch ein (von der Trajektorie abhängiges) Teilintervall der reellen Zahlen sein.

Bezeichnet

$$\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{x}, \theta) \mapsto \mathbf{x} \quad (2.16)$$

die Projektion auf die  $\mathbf{x}$ -Komponente, so existiert zwischen  $\Phi$  und  $\Phi'$  der folgende Zusammenhang [GH83]:

$$\Phi_t(\mathbf{x}_0) = \Pi \circ \Phi'_t(\mathbf{x}_0, \theta_0 = 0). \quad (2.17)$$

Dieser Zusammenhang ist leicht einsichtig.  $\Phi$  und  $\Phi'$  erfüllen die Gleichungen (2.5) bzw. (2.14). Wählt man  $\theta_0 = 0$  fest, so sind beide Gleichungen identisch (weil die Vektorfelder identisch sind) bis auf die zusätzliche  $\theta$ -Komponente von  $\Phi'$ , bzw. von  $\mathbf{F}'$ . Das bedeutet, daß  $\Phi$  mit der  $\mathbf{x}_0$ -Komponente von  $\Phi'$  identisch sein muß, und es gilt:

$$\Phi'_t(\mathbf{x}_0, \theta_0 = 0) = \begin{pmatrix} \Phi_t(\mathbf{x}_0) \\ \theta(t) \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Daraus ergibt sich automatisch (2.17).

Das in dieser Arbeit behandelte eindimensionale System (1.17) stellt ein nicht-autonomes System mit einem Freiheitsgrad dar. Daher ist der zugehörige Phasenraum dreidimensional, bestehend aus den Koordinaten „Ort“  $q$ , „Impuls“  $p$  sowie der „Zeit“  $\theta$  außer im Fall verschwindender Störung (d.h.  $a = c = 0$ ), wodurch (1.17) in ein autonomes System mit einem zweidimensionalen Phasenraum übergeht.

Durch Einführung der zyklischen Variable  $\theta$  geht das nichtautonome System (1.17) über in

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad (2.19a)$$

$$\frac{dp}{dt} = -(1 + a f(\theta)) q^3 + (b + c g(\theta)) q, \quad (2.19b)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1. \quad (2.19c)$$

### 2.1.3 Definition der POINCARÉ-Abbildung

**Definition 2.2.** Sei  $\mathbf{F}$  ein autonomes Vektorfeld mit dem zugehörigen (autonomen) Fluß  $\Phi$  auf dem  $n$ -dimensionalen Phasenraum und  $\Sigma$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit der Eigenschaft, daß alle Trajektorien  $\Sigma$  transversal schneiden, d.h.  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \neq 0 \forall \mathbf{x} \in \Sigma$ , wobei  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  der Normaleineheitsvektor von  $\Sigma$  im Punkt  $\mathbf{x}$  ist. Gibt es für jedes  $\mathbf{x} \in \Sigma$  eine eindeutig bestimmte minimale Zeit  $\tau(\mathbf{x}) > 0$ , in der die in  $\mathbf{x}$  startende Trajektorie zu  $\Sigma$  zurückkehrt, so ist die Abbildung

$$\mathcal{P} : \Sigma \rightarrow \Sigma, \quad \mathbf{x} \mapsto \Phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

eindeutig bestimmt und heißt POINCARÉ-Abbildung.

Durch die Einführung einer POINCARÉ-Abbildung wird die Dimension eines Problems um mindestens eine Variable verringert [GH83, Wig88, Wig90]. Zu beachten ist, daß hierfür ein autonomes System Voraussetzung ist.

Im Fall nichtautonomer periodischer Systeme, deren explizite Zeitabhängigkeit durch Einführung einer zyklischen Variable  $\theta$  beseitigt wurde, läßt sich eine POINCARÉ-Abbildung auf triviale Weise angeben: Als Querschnittsfläche  $\Sigma$  wählt man eine Ebene  $\theta_0 = \text{const}$  (im folgenden wird immer o.B.d.A.  $\theta_0 = 0$  angenommen). Wegen  $\dot{\theta} = 1$  schneiden alle Trajektorien  $\Sigma$  transversal ( $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 1$ ) und wegen (2.15) gilt:

$$\tau(\mathbf{x}) = 2\pi \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma. \quad (2.21)$$

Alle  $t = 2\pi$  nimmt die  $\theta$ -Koordinate des autonomisierten Flusses  $\Phi'$  den Wert  $\theta_0$  (modulo  $2\pi$ ) an. Schränkt man den autonomisierten Fluß  $\Phi'$  auf  $\Sigma$  ein, d.h. faßt man den Fluß als Abbildung  $\Phi' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $(\mathbf{x}_0, t) \mapsto \Phi'_t(\mathbf{x}_0, \theta_0 = 0)$  auf, so ergibt sich aus (2.20) in diesem Fall für die POINCARÉ-Abbildung<sup>4</sup> [GH83, S. 26]:

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}_0) = \Pi \circ \Phi'_{2\pi}(\mathbf{x}_0, \theta_0 = 0), \quad (2.22)$$

bzw. in anderer Formulierung unter Benutzung von (2.17)

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}_0) = \Phi_{2\pi}(\mathbf{x}_0). \quad (2.23)$$

Dabei gehen Orbits der Periode  $2\pi$  in Fixpunkte der POINCARÉ-Abbildung über, während Orbits der Periode  $2\pi \frac{r}{s}$  mit  $r, s \in \mathbb{Z}$  in Zyklen der Periode  $s$  übergehen, die oft ebenfalls als periodische Orbits bezeichnet werden.

## 2.2 Klassisches Chaos

In diesem Abschnitt wird die Bedeutung des Begriffs „Chaos“ bzw. „chaotische Dynamik“ im Rahmen der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme erläutert, und es werden zwei für diese Arbeit relevante Szenarien vorgestellt, die zum Auftreten chaotischer Dynamik führen. Zuvor wird jedoch der Begriff der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit eingeführt, da dieser für das Verständnis chaotischer Dynamik wichtig ist.

### 2.2.1 Stabile und instabile Mannigfaltigkeit

Für das Verständnis chaotischer Dynamik ist die Kenntnis der Stabilität oder Instabilität von Fixpunkten bzw. Orbits unerlässlich. Daher werden zunächst diese beiden Begriffe definiert.

<sup>4</sup>Die Nomenklatur ist in dieser Hinsicht in der Literatur nicht eindeutig. Oft wird auf das Vorschalten von  $\Pi$  in (2.22) verzichtet [Wig88]. Dies läßt sich insofern rechtfertigen, als daß  $\mathcal{P}$  eine Abbildung von  $\Sigma \simeq \mathbb{R}^n$  nach  $\Sigma \simeq \mathbb{R}^n$  darstellt, und  $\Phi'_{2\pi}$ , eingeschränkt auf  $\Sigma = \mathbb{R}^n \times \{\theta_0\} \simeq \mathbb{R}^n$ , zwar noch formal eine Abbildung nach  $\mathbb{R}^{n+1}$  darstellt, die Bilder von  $\Phi'_{2\pi}$  jedoch immer in  $\Sigma$  liegen.

**Definition 2.3.** Sei  $\bar{\mathbf{x}}$  ein Fixpunkt eines Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  auf  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ . Dann heißt  $\bar{\mathbf{x}}$

(i) *stabil*, falls für jede Umgebung  $V$  von  $\bar{\mathbf{x}}$  eine Umgebung  $U \subset V$  von  $\bar{\mathbf{x}}$  existiert, so daß jede Lösung  $\mathbf{x}(t)$  mit  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in U$  für alle  $t > 0$  in  $V$  bleibt.

(ii) *asymptotisch stabil*, falls  $\bar{\mathbf{x}}$  stabil ist und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ .

(iii) *instabil*, falls  $\bar{\mathbf{x}}$  nicht stabil ist.

Die Begriffe der Stabilität und Instabilität lassen sich auf einfache Weise auch auf Orbits übertragen. Offensichtlich ist ein kontinuierlicher Orbit genau dann stabil, wenn seine Bilder unter einer POINCARÉ-Abbildung stabil sind.

Eine besondere Rolle beim Entstehen von Chaos spielen die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit von Fixpunkten.

**Definition 2.4.** Sei  $\bar{\mathbf{x}}$  Fixpunkt des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  auf  $V \subset \mathbb{R}^n$  und  $\Phi$  der zugehörige Fluß. Dann heißt

$$W^s(\bar{\mathbf{x}}) := \{\mathbf{x} \in V \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}, \Phi_t(\mathbf{x}) \in V \quad \forall t \geq 0\} \quad (2.24)$$

die *stabile Mannigfaltigkeit*<sup>5</sup> von  $\bar{\mathbf{x}}$  und

$$W^u(\bar{\mathbf{x}}) := \{\mathbf{x} \in V \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}, \Phi_t(\mathbf{x}) \in V \quad \forall t \leq 0\} \quad (2.25)$$

die *instabile Mannigfaltigkeit* von  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Es ist offensichtlich, daß  $\bar{\mathbf{x}}$  genau dann asymptotisch stabil ist, wenn  $W^s$  eine Umgebung von  $\bar{\mathbf{x}}$  ist, und genau dann instabil, wenn die Dimension von  $W^u$  ungleich null ist.

Ein anderer, wichtiger Begriff ist der des *hyperbolischen* Fixpunkts:  $\bar{\mathbf{x}}$  heißt hyperbolischer Fixpunkt, falls

$$\dim W^s(\bar{\mathbf{x}}) + \dim W^u(\bar{\mathbf{x}}) = n \quad (2.26)$$

ist. Außer der stabilen und der instabilen Mannigfaltigkeit gibt es im allgemeinen auch noch die (nicht eindeutig bestimmte) *Zentrumsmanigfaltigkeit*, falls gilt:  $\dim W^s(\bar{\mathbf{x}}) + \dim W^u(\bar{\mathbf{x}}) < n$ .

---

<sup>5</sup> Auch wenn die globale stabile Mannigfaltigkeit  $W^s$  und die globale instabile Mannigfaltigkeit  $W^u$  für sich genommen differenzierbare Mannigfaltigkeiten darstellen, müssen sie im Allgemeinen keine *Untermannigfaltigkeiten* des  $\mathbb{R}^n$  sein. Die Einschränkung von  $W^s$  und  $W^u$  auf eine kleine Umgebung des Fixpunktes, also die *lokale* stabile und die *lokale* instabile Mannigfaltigkeit, sind dagegen immer Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.2.2 Definition von Chaos

In der Literatur werden verschiedene Definitionen für *Chaos* bzw. *chaotische Dynamik* diskutiert und eine Reihe von Chaosmerkmalen zur Definition des Begriffs herangezogen. Ein wesentliches Merkmal chaotischer Dynamik ist die sensitive Abhängigkeit des Verlaufs einer Trajektorie von den gegebenen Anfangsbedingungen: Zwei beliebig benachbarte Trajektorien laufen exponentiell auseinander und befinden sich schon nach kurzer Zeit an völlig verschiedenen Punkten im Phasenraum. Andere Chaosmerkmale sind einzelne Orbits, die Bereiche des Phasenraums dicht überdecken, die Existenz von Orbits aller Perioden in einer Abbildung, die ebenfalls Bereiche des Phasenraums dicht überdecken [Dev86], sowie die Existenz einer unter der Dynamik invarianten Menge, auf der sich eine vollständige *symbolische Dynamik* angeben läßt [Wig88]. Die Definition von Chaos, die in diesem Abschnitt gegeben wird, stammt aus [Rob95].

**Definition 2.5.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow X$  heißt (topologisch) transitiv auf einer invarianten Menge  $Y \subset X$ , d.h.  $f(Y) \subset Y$ , falls es einen Punkt  $p \in Y$  gibt, dessen Orbit dicht in  $Y$  liegt.

**Definition 2.6.** Eine Abbildung  $f$  auf einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt sensitiv abhängig von den Anfangsbedingungen, falls es ein  $r > 0$  gibt, so daß für jeden Punkt  $x \in X$  und für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $y \in X$  existiert mit  $d(x, y) < \epsilon$  sowie ein  $k \geq 0$ , so daß  $d(f^k(x), f^k(y)) \geq r$  ist.

**Definition 2.7.** Eine Abbildung  $f$  auf einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt chaotisch auf der invarianten Menge  $Y \subset X$ , falls gilt:

- (i)  $f$  ist transitiv auf  $Y$ , und
- (ii)  $f$  ist sensitiv abhängig von den Anfangsbedingungen auf  $Y$ .

Bei anderen Autoren wird noch zusätzlich gefordert:

- (iii) Die Menge der periodischen Punkte von  $f$  liegt dicht in  $Y$ .

Auch wenn diese Definition sich nur auf diskrete Systeme bezieht, lassen sie sich doch mittels POINCARÉ-Abbildungen auf kontinuierliche Systeme übertragen.

### 2.2.3 Homoklines Chaos

Ein Orbit, der sowohl auf der stabilen als auch auf der instabilen Mannigfaltigkeit eines Fixpunktes  $\bar{x}$  liegt, heißt *homokliner Orbit*. Er startet für  $t \rightarrow -\infty$  bei  $\bar{x}$  auf der instabilen Mannigfaltigkeit und kehrt für  $t \rightarrow \infty$  auf der stabilen Mannigfaltigkeit zu seinem Ausgangspunkt zurück. Speziell für zweidimensionale Abbildungen muß  $\bar{x}$  immer hyperbolisch sein, weil aus der Existenz der stabilen und der instabilen Mannigfaltigkeit bereits (2.26) folgt.

Bricht ein homokliner Orbit einer zweidimensionalen Abbildung bei Anlegen einer Störung auf, so entsteht durch transversale Schnitte der stabilen und der instabilen Mannigfaltigkeit des zugehörigen hyperbolischen Fixpunkts eine chaotische *Hufeisen*-Dynamik [GH83, Wig90]. Die Existenz der transversalen Schnitte kann mit Hilfe der MELNIKOV-Methode durch das Berechnen der MELNIKOV-Funktion bewiesen werden. Diese Funktion beschreibt in erster Näherung den Abstand der stabilen und der instabilen Mannigfaltigkeit voneinander. Eine einfache Nullstelle bedeutet einen transversalen Schnittpunkt der beiden Mannigfaltigkeiten. Gibt es einen Schnittpunkt, so gibt es unendlich viele, und es entsteht „homoklines Chaos“.

Dies ist für das hier untersuchte System teilweise schon in [Par90] bewiesen. Dort wird die MELNIKOV-Funktion zwar nicht für das allgemeine System (1.17), sondern für eine Verallgemeinerung von Spezialfall 2 (1.27) berechnet und für diesen Fall die Existenz des homoklinen Chaos gezeigt.

Zu beachten ist, daß dort eine andere Skalierung als in dieser Arbeit (vgl. (1.13)) verwendet wird:

$$\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} q \longmapsto q, \quad (2.27a)$$

$$\sqrt{\frac{a_1}{m b_1^2}} p \longmapsto p, \quad (2.27b)$$

$$\sqrt{\frac{b_1}{m}} t \longmapsto t, \quad (2.27c)$$

$$\frac{a_1}{b_1^2} H(q, p, t) \longmapsto H(q, p, t). \quad (2.27d)$$

Es bleiben dann die folgenden Parameter übrig:

$$\Omega = \sqrt{\frac{m}{b_1}}, \quad (2.28a)$$

$$a = \frac{a_2}{a_1}, \quad (2.28b)$$

$$F = \frac{b_2}{b_1}, \quad (2.28c)$$

wobei in [Par90] immer  $a = 0$  gewählt ist.

Als MELNIKOV-Funktion ergibt sich in dieser Skalierung

$$M(\tau) = F \pi \Omega^2 \operatorname{cosec} h \left( \frac{\pi \Omega^2}{2} \right) \sin(\Omega \tau). \quad (2.29)$$

Weil der Sinus nur einfache Nullstellen aufweist, ist damit die Existenz der transversalen Schnitte der stabilen mit der instabilen Mannigfaltigkeit zumindest für Spezialfall 2 bewiesen.

### 2.2.4 Das KAM-Szenario

Das zweite Szenario, welches beim ungedämpften DUFFING-Oszillator mit parametrischer Anregung Chaos entstehen läßt, ist das KAM- oder BIRKHOFF-Szenario<sup>6</sup> im Rahmen des KAM-Theorems [AP90, Jac90].

In einem autonomen, integrablen HAMILTON-System mit  $f$  Freiheitsgraden der Bewegung liegen die Trajektorien im Phasenraum auf  $f$ -dimensionalen invarianten Tori. Es läßt sich dann eine kanonische Transformation auf Wirkungs-Winkelvariablen  $J_1, \dots, J_f$  und  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_f$  angeben, so daß die kanonischen Bewegungsgleichungen die folgende einfache Form annehmen:

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\vartheta}) = 0, \quad (2.30a)$$

$$\dot{\vartheta}_i = \frac{\partial}{\partial J_i} H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\vartheta}) = \omega_i \quad (2.30b)$$

mit der Lösung  $J_i(t) = J_i(0)$  und  $\vartheta_i(t) = \vartheta_i(0) + \omega_i t$ .

Im hier untersuchten System sind die invarianten Tori zweidimensional und erscheinen in der POINCARÉ-Abbildung als invariante Linien.

Das von KOLMOGOROV, ARNOLD und MOSER entwickelte KAM-Theorem beschreibt das Aufbrechen dieser invarianten Tori [Arn78, Jac90, Wig90]. Voraussetzung ist unter anderem eine von einem Störungsparameter  $\epsilon$  abhängige HAMILTON-Funktion, die für verschwindende Störung, d.h.  $\epsilon = 0$ , integrabel ist. Bei wachsender Störung  $\epsilon$  brechen immer mehr invariante Tori auf, bis schließlich alle zerstört sind. Es ist dabei so, daß diejenigen Tori mit den „irrationalsten“<sup>7</sup> Frequenzen die stabilsten sind.

Beim Aufbrechen eines Torus mit rationaler Windungszahl  $\frac{r}{s}$  entstehen nach dem POINCARÉ-BIRKHOFF-Theorem  $k \cdot s$  elliptische und genauso viele hyperbolische periodische Punkte der POINCARÉ-Abbildung mit  $k \geq 1$ . Dies führt zur Entstehung sogenannter BIRKHOFF-Ketten (auch als POINCARÉ-BIRKHOFF-Ketten oder als „Inselketten“ bezeichnet) [AP90, Jac90]. Jede einzelne dieser „Inseln“ umgibt einen der elliptischen periodischen Punkte, der seinerseits von KAM-Tori (zweiter Ordnung) umgeben ist, die ihrerseits mit zunehmender Störung aufbrechen und BIRKHOFF-Ketten innerhalb dieser Insel entstehen lassen. Die Inseln dieser Ketten enthalten wiederum elliptische periodische Punkte, die ebenfalls von KAM-Tori (dritter Ordnung) umgeben sind. Dies setzt sich unendlich oft fort. Numerisch sind Inselketten dritter und höherer Ordnung nur schwer zu erkennen, da sie sehr klein sind.

Zwischen zwei elliptischen Punkten einer Inselkette befindet sich immer ein hyperbolischer Punkt. Durch Schnittpunkte der instabilen Mannigfaltigkeit des

<sup>6</sup>Daneben ist auch der Begriff POINCARÉ-BIRKHOFF-Szenario gebräuchlich. Manchmal wird dieses Szenario auch ohne Bezeichnung im Rahmen der Diskussion von „Elliptischen Punkten“ [Jac90] oder „Generischen Elliptischen Punkten“ [AP90] besprochen.

<sup>7</sup>Die „Irrationalität“ einer Windungszahl läßt sich auch quantitativ formulieren und ist in der oben angegebenen Literatur beschrieben. Die „irrationalste“ aller reellen Zahlen ist im übrigen  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ , der sogenannte *Goldene Schnitt*.

einen hyperbolischen Punktes mit der stabilen Mannigfaltigkeit eines anderen hyperbolischen Punktes kommt es wie im vorhergehenden Abschnitt in diesem Bereich zu chaotischer (Hufeisen-) Dynamik. Da sich hierbei jeweils die Mannigfaltigkeiten verschiedener hyperbolischer Punkte schneiden, spricht man nicht von homoklinem, sondern von „heteroklinem Chaos“.

### 2.2.5 Das Frequenzspektrum der Autokorrelationsfunktion

Für eine Funktion  $s(t)$  ist die Autokorrelationsfunktion  $C_s(\tau)$  durch

$$C_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) s(t + \tau) dt \quad (2.31)$$

gegeben. Das Frequenzspektrum von  $s(t)$  ergibt sich zu

$$\tilde{C}_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (2.32)$$

Bezeichnet speziell  $s(t) = A(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)$  eine klassische Observable  $A$  auf einer Trajektorie eines Systems mit  $f$  Freiheitsgraden, so ist das Frequenzspektrum für reguläre Bewegung auf einem invarianten Torus durch die diskreten Frequenzen  $\omega_1, \dots, \omega_f$  gegeben mit Amplituden, die von der expliziten Wahl der jeweiligen Trajektorie abhängen. Für eine Trajektorie, die eine chaotische Bewegung beschreibt, ist das Frequenzspektrum dagegen kontinuierlich [Ely88].

## 2.3 Lineare Stabilitätsanalyse

### 2.3.1 Der Satz von HARTMAN-GROBMAN

Jedes nichtlineare (differenzierbare) System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  kann lokal durch ein lineares System approximiert werden. Da lineare Systeme wesentlich leichter zu behandeln sind als nichtlineare, stellt sich die Frage, inwieweit die Dynamik bei der Linearisierung qualitativ erhalten bleibt.

Die Grundidee hinter der linearen Stabilitätsanalyse ist recht simpel. Ein Orbit  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  ist stabil (analog zur Definition des stabilen Fixpunkts in Abschnitt 2.2.1), wenn jeder in einer genügend kleinen Umgebung um  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbf{x}$  startende Nachbarorbit  $\Phi_t(\mathbf{x})$  für alle Zeiten benachbart bleibt. In TAYLOR-Entwicklung gilt für den Fluß  $\Phi_t$  in einer Umgebung um  $\mathbf{x}_0$ :

$$\Phi_t(\mathbf{x}) = \Phi_t(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}\Phi_t(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathcal{O}((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2). \quad (2.33)$$

In erster Näherung wird daher der Abstand eines Nachbarorbits  $\Phi_t(\mathbf{x})$  zum Referenzorbit  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  durch den linearisierten Fluß  $\mathbf{D}\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  beschrieben. Dieser Zusammenhang bildet den Hintergrund des Satzes von HARTMAN-GROBMAN [GH83, PER91]:



**Satz 2.8 (Hartman-Grobman).** *Es sei  $\mathbf{F}$  ein autonomes, differenzierbares Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\Phi$  der zugehörige Fluß. Sei  $\mathbf{x}_0$  ein Fixpunkt von  $\mathbf{F}$ , d.h.  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . Falls keiner der Eigenwerte von  $\mathbf{DF}|_{\mathbf{x}_0}$  rein imaginär oder 0 ist – das ist äquivalent dazu, daß  $\mathbf{x}_0$  ein hyperbolischer Fixpunkt ist [GH83] –, dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $\mathbf{x}_0$  sowie einen Homöomorphismus  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , der lokal die Orbits des nichtlinearen Flusses  $\Phi_t$  auf die Orbits des linearisierten Flusses  $\mathbf{D}\Phi_t$  abbildet:*

$$h \circ \Phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\Phi_t \circ h(\mathbf{x}). \quad (2.34)$$

Daher ist ein hyperbolischer Fixpunkt  $\mathbf{x}_0$  eines nichtlinearen Systems genau dann stabil (instabil), wenn  $\mathbf{0}$  ein stabiler (instabiler) Fixpunkt des um  $\mathbf{x}_0$  linearisierten Systems ist.

Für nichthyperbolische Fixpunkte ist die Situation etwas komplizierter. Aber es läßt sich zumindest zeigen, daß jeweils die Dimension der stabilen (instabilen) Mannigfaltigkeit des Fixpunkts im nichtlinearen System und im linearisierten System übereinstimmen [GH83]. Im linearen System ist die Dimension der stabilen Mannigfaltigkeit gleich der Anzahl der Eigenwerte von  $\mathbf{DF}|_{\mathbf{x}_0}$  mit negativem Realteil und die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit gleich der Anzahl der Eigenwerte mit positivem Realteil. Daher läßt sich zumindest noch die Aussage treffen, daß  $\mathbf{x}_0$  instabil ist, falls ein Eigenwert von  $\mathbf{DF}|_{\mathbf{x}_0}$  einen positiven Realteil besitzt, weil dann die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit im linearen System größer als 0 ist [Per91].

Gibt es mindestens einen Eigenwert mit verschwindendem Realteil, aber keinen mit positivem Realteil, so läßt sich grundsätzlich nicht von der Dynamik des linearen Systems auf die Dynamik des nichtlinearen schließen. Sind alle Eigenwerte rein imaginär oder null, so ist  $\mathbf{x}_0$  ein *elliptischer* Fixpunkt.

Das hier Gesagte gilt in fast identischer Formulierung auch für Abbildungen:

**Satz 2.9 (Hartman-Grobman).** *Sei  $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus mit einem hyperbolischen Fixpunkt  $\mathbf{x}_0$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $\mathbf{x}_0$  und einen Homöomorphismus  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit*

$$h \circ \mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathcal{P}|_{\mathbf{x}_0} \circ h(\mathbf{x}). \quad (2.35)$$

Für die Bestimmung der Stabilität von periodischen Orbits eines kontinuierlichen Systems wendet man Satz 2.9 auf eine POINCARÉ-Abbildung an. Das gilt insbesondere auch für nichtautonome Systeme, die ja, als autonome Systeme formuliert, keine Fixpunkte besitzen (siehe Abschnitt 2.1.2). Hat ein Orbit die Periode  $n$ , so wendet man Satz 2.9 auf die Abbildung  $\mathcal{P}^n$  an.

Die Dynamik in der Umgebung eines hyperbolischen Orbits eines kontinuierlichen Systems bleibt somit bei einer Linearisierung um diesen Orbit im wesentlichen erhalten, weil dies bei der POINCARÉ-Abbildung der Fall ist.

## 2.3.2 Das linearisierte System

### 2.3.2.1 Der linearisierte Fluß

Der Fluß  $\Phi$  für ein autonomes System wird durch Gleichung (2.1) und für ein nichtautonomes System durch Gleichung (2.5) beschrieben. Beide Fälle sollen im folgenden zusammen behandelt werden. Das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  auf  $\mathbb{R}^n$  kann daher im folgenden sowohl autonom als auch nichtautonom sein. Der Fluß wird dann durch eine Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(\mathbf{x}_0, t) \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}_0)$  beschrieben und erfüllt somit im nichtautonomen Fall nicht die Flußrelationen (2.3) und (2.4).

Leider ist  $\Phi$  im allgemeinen Fall eines nichtlinearen Vektorfeldes in der Regel nicht bekannt und kann auch nicht in geschlossener Form angegeben werden. Da lineare Systeme wesentlich einfacher zu behandeln sind als nichtlineare und, wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, die Dynamik eines Systems bei einer Linearisierung um einen Orbit herum unter bestimmten Bedingungen erhalten bleibt, bietet es sich an, (2.1) bzw. (2.5) nach den Phasenraumkoordinaten  $\mathbf{x}_0$  zu differenzieren:

$$\frac{\partial}{\partial t} D\Phi|_{\mathbf{x}_0, t} = D\mathbf{F}|_{\Phi_t(\mathbf{x}_0), t} D\Phi|_{\mathbf{x}_0, t}. \quad (2.36)$$

$\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  ist der Orbit, um den herum das Vektorfeld und der Fluß linearisiert wird. Im Prinzip gilt die Gleichung (2.36) für jeden beliebigen Orbit, in dieser Arbeit sind jedoch nur Fixpunkte und periodische Orbits des kontinuierlichen Systems im Rahmen der Stabilitätsanalyse von Interesse.

$D\Phi|_{\mathbf{x}_0, t}$  ist der um den Referenzorbit  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  linearisierte Fluß und

$$\tilde{\mathbf{F}}_t := D\mathbf{F}|_{\Phi_t(\mathbf{x}_0), t} \quad (2.37)$$

ist das um den Referenzorbit linearisierte Vektorfeld und somit per definitionem das Vektorfeld des linearisierten Systems. Zu beachten ist, daß  $\tilde{\mathbf{F}}$  im Allgemeinen selbst dann explizit zeitabhängig ist, wenn  $\mathbf{F}$  nicht explizit von der Zeit abhängt. Das liegt daran, daß der Referenzorbit im allgemeinen explizit von der Zeit abhängt.  $\tilde{\mathbf{F}}$  ist nur dann autonom, wenn  $\mathbf{F}$  autonom und der Referenzorbit  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  konstant, also ein Fixpunkt von  $\mathbf{F}$  ist.  $\tilde{\mathbf{F}}$  ist periodisch im autonomen Fall, wenn  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  periodisch ist.  $\tilde{\mathbf{F}}$  ist periodisch im nichtautonomen Fall, wenn die Periode  $T = 2\pi$  von  $\mathbf{F}_t$  und die Periode  $T'$  von  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  kommensurabel sind, d.h.  $r2\pi + sT' = 0$  für  $r, s \in \mathbb{Z}$ . Das ist äquivalent dazu, daß das Verhältnis der Perioden rational ist. Das linearisierte Vektorfeld hat dann die Periode  $2\pi r$ . Ohne Einschränkung soll die Periode von  $\tilde{\mathbf{F}}$  im folgenden als  $2\pi$  angenommen werden.

Der zu  $\tilde{\mathbf{F}}_t$  gehörige Fluß  $\tilde{\Phi}$  des linearisierten Systems ist dann durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Phi}_t = \tilde{\mathbf{F}}_t \tilde{\Phi}_t \quad (2.38)$$

mit der Anfangsbedingung  $\tilde{\Phi}_0 = \mathbb{1}|_{\mathbb{R}^n}$  bestimmt.

Ersetzt man in Gleichung (2.36)  $D\mathbf{F}$  durch  $\tilde{\mathbf{F}}$ , so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} D\Phi|_{\mathbf{x}_0, t} = \tilde{\mathbf{F}}_t D\Phi|_{\mathbf{x}_0, t}. \quad (2.39)$$

Aus der Eindeutigkeit von  $\tilde{\Phi}$  folgt dann bereits aus (2.38) und (2.39) für den Fluß des linearisierten Systems:

$$\tilde{\Phi}_t = D\Phi|_{\mathbf{x}_0, t}. \quad (2.40)$$

Das ist aber nach dem oben gesagten gerade der um den Referenzorbit linearisierte Fluß des nichtlinearen Systems.  $\tilde{\Phi}$  ist im allgemeinen (auch, falls  $\Phi$  autonom ist) ein nichtautonomer Fluß (2.5), für den die Flußrelationen (2.3) und (2.4) nicht gelten.

Dieser Zusammenhang zwischen  $\tilde{\Phi}$  und  $\Phi$  läßt sich knapp und markant formulieren:

*Der exakte Fluß des linearisierten Systems ist gleich dem linearisierten Fluß des exakten Systems.*

Der wesentliche Unterschied gegenüber dem nichtlinearen System (2.1) besteht darin, daß das durch  $\tilde{\Phi}$  beschriebene lineare System explizit zeitabhängig ist. Ist  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  ein periodischer Orbit, so läßt sich die entstandene explizite Zeitabhängigkeit durch Einführen einer neuen Phasenraumkoordinate  $\theta'$  (siehe Abschnitt 2.1) beseitigen. Ist  $\mathbf{F}$  bereits von einer derartigen „Zeitkoordinate“ abhängig und haben  $\mathbf{F}$  und  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  die gleiche Periode, so kann  $t_0$  mit der Komponente  $\theta_0$  von  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \theta_0)$  identifiziert werden und es braucht keine zweite „Zeitkoordinate“ eingeführt zu werden<sup>8</sup>.

### 2.3.2.2 Die linearisierte POINCARÉ-Abbildung

Für den – wie oben beschrieben – nichtautonomen Fluß  $\tilde{\Phi}$  des linearisierten Systems aus (2.40) ergibt sich die POINCARÉ-Abbildung  $\tilde{\mathcal{P}}$  des linearisierten Systems wegen (2.23) zu:

$$\tilde{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\xi}_0) = \tilde{\Phi}_{2\pi} \boldsymbol{\xi}_0. \quad (2.41)$$

Sei nun  $\Phi$  ein *nichtautonomer* Fluß und  $\Phi'$  der *autonomisierte* Fluß des nichtautonomen Systems gemäß (2.18). Für die Ableitung der POINCARÉ-Abbildung  $\mathcal{P}$  des nichtlinearen Systems (2.22) nach den  $\mathbf{x}_0$ -Komponenten erhält man

$$D\mathcal{P}|_{\mathbf{x}_0} = D\Pi|_{\Phi'_t(\mathbf{x}_0, 0)} D\Phi'|_{\mathbf{x}_0, 0, 2\pi} = \Pi \circ D\Phi'|_{\mathbf{x}_0, 0, 2\pi}. \quad (2.42)$$

---

<sup>8</sup>Allgemein ist dies für ein beliebiges rationales Verhältnis der Perioden von  $\mathbf{F}$  und  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  möglich, wenn die zyklische Variable  $\theta$  etwas anders gewählt wird. Beträgt die Periode von  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  z.B.  $\frac{r}{s}2\pi$ , so muß nur anstelle von  $\theta + 2\pi$  mit  $\theta$  nun  $\theta$  mit  $\theta + r2\pi$  und  $\theta'$  mit  $\theta' + s2\pi$  identifiziert werden. Dann sind  $\theta$  und  $\theta'$  identisch und können miteinander identifiziert werden.

$D\mathcal{P}|_{x_0}$  ist die linearisierte POINCARÉ-Abbildung. Andererseits ist  $D\Phi|_{x_0, 2\pi}$  diejenige Matrix, die nach (2.40) sowohl den linearisierten Fluß des nichtlinearen Systems als auch den Fluß des linearisierten Systems darstellt. Daraus ergibt sich für die POINCARÉ-Abbildung  $\tilde{\mathcal{P}}$  des linearisierten Systems nach (2.17):

$$\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\Phi}_{2\pi} = D(\Pi \circ \Phi')|_{x_0, 0, 2\pi} = D\mathcal{P}|_{x_0}. \quad (2.43)$$

Auch dieser Zusammenhang läßt sich in einem Merksatz formulieren:

*Die exakte POINCARÉ-Abbildung des linearisierten Systems ist die linearisierte POINCARÉ-Abbildung des exakten Systems.*

Daher genügt es,  $\tilde{\mathcal{P}}$  zu kennen, um Aussagen über die Stabilität eines gegebenen periodischen Orbits eines nichtautonomen Systems machen zu können. Allerdings lassen sich nicht in jedem Fall sichere Rückschlüsse auf die Stabilität des Orbits im nichtlinearen System ziehen, wie in Abschnitt 2.3.1 bereits diskutiert wurde.

Für die Berechnung von  $\tilde{\mathcal{P}}$  bzw.  $\tilde{\Phi}$  bietet es sich an, in der nichtautonomen Darstellung, d.h. ohne Verwendung von  $\theta$  zu rechnen. Zu lösen ist dann ein gewöhnliches lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Genau diese Art von Differentialgleichungssystemen wird durch die FLOQUET-Theorie (siehe Anhang A) beschrieben.

Bezeichnet  $\Phi$  nun einen *autonomen* Fluß, so gilt für die linearisierte POINCARÉ-Abbildung

$$D\mathcal{P}|_{x_0} = \Pi \circ D\Phi|_{x_0, \tau(x_0)}. \quad (2.42')$$

Hierbei bezeichnet  $\Pi$  eine geeignete Projektion auf die Querschnittsfläche  $\Sigma$  [Rob95, S. 168]. Aus (2.40) und (2.41) folgt dann:

$$\Pi \circ \tilde{\mathcal{P}} = \Pi \circ D\Phi|_{x_0, \tau(x_0)} = D\mathcal{P}|_{x_0}. \quad (2.43')$$

### 2.3.2.3 Anwendung auf den DUFFING-Oszillator

Das um einen Orbit  $\Phi_t(q_0, p_0) =: \begin{pmatrix} q(q_0, t) \\ p(q_0, t) \end{pmatrix}$  linearisierte Vektorfeld (1.18) des ungedämpften DUFFING-Oszillators mit parametrischer Anregung lautet:

$$D\mathbf{F}|_{(q_0, p_0), t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3(1 + a f(t)) q^2(q_0, t) + (b + c g(t)) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Mit

$$h(t) := 3(1 + a f(t)) q^2(q_0, t) - (b + c g(t)) = \frac{\partial^2}{\partial q^2} V(q, t) \quad (2.45)$$

gemäß (1.16) ergibt sich als zu lösendes Gleichungssystem analog zu (2.38) schließlich

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

bzw. als Differentialgleichung zweiter Ordnung formuliert:

$$\ddot{\tilde{q}} + h(t) \tilde{q} = 0. \quad (2.47)$$

Diese letzte Formulierung ist unter dem Namen HILL-Gleichung in der Literatur das bekannteste Beispiel für eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten.

### 2.3.3 Die Monodromiematrix

#### 2.3.3.1 Autonome Systeme

Für autonome Systeme ist die *Monodromiematrix*  $\mathbf{M}$  als diejenige Matrix definiert, die in linearer Näherung die Änderung des Abstandes eines Nachbarorbits  $\Phi_t(\mathbf{x})$  von einem Referenzorbit  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  beschreibt [EW91], d.h. es folgt aus der TAYLOR-Entwicklung (2.33) für ein autonomes System:

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\Phi|_{\mathbf{x}_0, 2\pi} \quad (2.48)$$

und damit wegen (2.40)

$$\mathbf{M} = \tilde{\Phi}_{2\pi}. \quad (2.49)$$

$\mathbf{M}$  beschreibt somit den linearisierten Fluß über eine Periode  $2\pi$  hinweg.

Die Stabilität des linearisierten Flusses wird durch die Eigenwerte der Monodromiematrix beschrieben. Ist  $\lambda$  ein Eigenwert (auch als FLOQUET-Multiplikator bezeichnet, siehe Anhang A) von  $\mathbf{M}$ , so gibt es einen Orbit  $\boldsymbol{\xi}(t)$  mit  $\boldsymbol{\xi}(t+2\pi) = \lambda \boldsymbol{\xi}(t) \forall t \in \mathbb{R}$ . Dieser Orbit ist offensichtlich beschränkt für  $|\lambda| \leq 1$  und unbeschränkt für  $|\lambda| > 1$ . Der Ursprung des linearen Systems ist genau dann stabil, wenn alle Orbits beschränkt sind.

Es erhebt sich die Frage, inwieweit die Monodromiematrix von der Startzeit des gewählten Orbits, also von einer „Phasenverschiebung“ abhängt. Wählt man statt des Startpunkts  $\mathbf{x}_0$  einen anderen Punkt  $\mathbf{x}'_0$  desselben Orbits als Startpunkt, so gibt es ein  $t_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{x}'_0 = \Phi_{t_0}(\mathbf{x}_0)$ . Als Vektorfeld dieses „phasenverschobenen“ Systems erhält man  $\mathbf{F}_{t+t_0}$  und somit für zugehörigen Fluß  $\Phi_{t+t_0}$ , für das linearisierte Vektorfeld  $\tilde{\mathbf{F}}_{t+t_0}$  und schließlich für den linearisierten Fluß  $\tilde{\Phi}_{t+t_0}$ . Dieses Resultat gilt für autonome und nichtautonome Systeme gleichermaßen.

Die Monodromiematrix ist dann wie oben diejenige Matrix, die den linearisierten Fluß  $\tilde{\Phi}_{t+t_0}$  von  $t = 0$  nach  $t = 2\pi$  überführt:

$$\tilde{\Phi}_{t_0+2\pi} = \mathbf{M}' \tilde{\Phi}_{t_0}. \quad (2.50)$$

Daraus folgt mit Satz 2.1, daß sich

$$\mathbf{M}' = \tilde{\Phi}_{t_0} \circ \tilde{\Phi}_{2\pi} \circ \tilde{\Phi}_{t_0}^{-1} = \tilde{\Phi}_{t_0} \circ \mathbf{M} \circ \tilde{\Phi}_{t_0}^{-1} \quad (2.51)$$

von  $\mathbf{M}$  nur um eine Ähnlichkeitstransformation unterscheidet, bei der die Eigenwerte der Monodromiematrix erhalten bleiben. Da  $\tilde{\Phi}$  grundsätzlich ein explizit zeitabhängiger Fluß ist, gelten die Gleichungen (2.3) und (2.4) nicht, wie bereits in Abschnitt 2.1.2 erwähnt wurde.

Der Begriff der Monodromiematrix wird in der Literatur immer im Zusammenhang mit autonomen Systemen verwandt. Für ein autonomes System mit  $f$  Freiheitsgraden handelt es sich um eine  $(2f \times 2f)$ -Matrix.

### 2.3.3.2 Erweiterung für nichtautonome Systeme

Bezieht man sich auf die eigentliche Intention der Monodromiematrix, nämlich die Entwicklung eines Nachbarorbits  $\Phi_t(\mathbf{x})$  von einem Referenzorbit  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  in linearer Näherung zu beschreiben, so läßt sich auch für ein nichtautonomes System mit  $f$  Freiheitsgraden die Monodromiematrix als  $(2f \times 2f)$ -Matrix definieren. Die TAYLOR-Entwicklung in (2.33) gilt gleichermaßen für autonome und nichtautonome Flüsse. Daher macht es Sinn, die Definition (2.48) der Monodromiematrix auf nichtautonome Systeme zu erweitern.

$\tilde{\mathbf{M}}$  bezeichne die für ein System mit  $f$  Freiheitsgraden diejenige  $(2f \times 2f)$ -Matrix, die sich aus dem nichtautonomen Fluß  $\Phi$  zur Zeit  $2\pi$  ergibt, also

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{D}\Phi_{2\pi} = \tilde{\Phi}_{2\pi}. \quad (2.52)$$

$\mathbf{M}$  bezeichne die  $(2f+1) \times (2f+1)$ -Matrix, die sich aus dem höherdimensionalen, autonomisierten Fluß  $\Phi'$  ebenfalls zur Zeit  $2\pi$  ergibt, also

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\Phi'_{2\pi}|_{\theta_0=0}. \quad (2.53)$$

In diesem Fall eines explizit zeitabhängigen Flusses ist die linearisierte POINCARÉ-Abbildung, dargestellt als Matrix, mit wegen (2.40) und (2.41) identisch.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Matrizen ist der folgende:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} & m_{1,2n+1} & \\ & \vdots & \\ \tilde{\mathbf{M}} & m_{2n,2n+1} & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

$\mathbf{M}$  und  $\tilde{\mathbf{M}}$  haben somit die gleichen Eigenwerte bis auf den zusätzlichen Eigenwert 1 von  $\mathbf{M}$ . Daher hat die Wahl von  $\mathbf{M}$  oder  $\tilde{\mathbf{M}}$  für ein nichtautonomes System keinerlei Einfluß auf die lineare Stabilitätsanalyse.  $\tilde{\mathbf{M}}$  soll im folgenden ebenfalls als Monodromiematrix bezeichnet werden.

### 2.3.3.3 Eigenschaften der Monodromiematrix

In diesem Abschnitt werden nun einige Eigenschaften der Monodromiematrix für HAMILTON-Systeme aufgeführt [Arn78, AP90, EW91, Löd95, Rob95].

**Satz 2.10.** *Gegeben sei ein Vektorfeld  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ , und  $\Phi$  sei der Fluß von  $\mathbf{F}$ . Dann ist  $\Phi$  volumenerhaltend, d.h. ein gegebenes Volumen  $V$  wird unter dem Fluß  $\Phi$  wieder auf ein Volumen der gleichen Größe abgebildet und es gilt:*

$$\det \mathbf{D}\Phi|_{\mathbf{x}_0, t} = 1. \quad (2.55)$$

*Dies gilt auch, falls  $\mathbf{F}$  explizit zeitabhängig ist.*

Für den Beweis der Volumenerhaltung wird an dieser Stelle auf [AP90, S. 45] verwiesen, woraus automatisch  $|\det \mathbf{D}\Phi|_{\mathbf{x}_0, t}| = 1$  folgt. Daß der Fluß sogar orientierungserhaltend ist, wird in [Wig88] gezeigt. Daher ist die Determinante zu allen Zeiten 1, weil sie es zur Zeit  $t = 0$  ist.

Im folgenden sollen einige Eigenschaften der Monodromiematrix für autonome HAMILTON-Systeme mit  $f$  Freiheitsgraden aufgelistet werden. Die Monodromiematrix ist in diesem Fall eine  $(2f \times 2f)$ -Matrix.

- (i)  $\mathbf{M}$  ist symplektisch [EW91, Löd95], d.h.

$$\mathbf{M}^t \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

- (ii) Wegen (2.48) und (2.55) gilt:

$$\det \mathbf{M} = 1; \quad (2.57)$$

daher ist  $\mathbf{M}$  invertierbar.

- (iii) Das charakteristische Polynom von  $\mathbf{M}$  ist *reflexiv*, d.h. es gilt

$$\chi(\lambda) = \lambda^n \chi\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (2.58)$$

wobei  $n$  der Grad von  $\chi(\lambda) = \det(\lambda - \mathbf{M})$  ist [Arn78, EW91, Löd95].

- (iv) Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $\mathbf{M}$  gibt es nach (2.58) einen reziproken Eigenwert  $\frac{1}{\lambda}$  [Arn78, EW91, Löd95]. Da  $\chi(\lambda)$  ein reelles Polynom darstellt, das nur paarweise komplex konjugierte Nullstellen enthalten kann, sind auch  $\bar{\lambda}$  und  $\frac{1}{\bar{\lambda}}$  Eigenwerte von  $\mathbf{M}$ .  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\frac{1}{\lambda}$  und  $\frac{1}{\bar{\lambda}}$  müssen nicht notwendigerweise verschieden sein. Ist  $\lambda$  reell oder komplex und vom Betrage 1, so sind nur je zwei der Eigenwerte paarweise verschieden.

- (v) Der Eigenwert in Richtung des Flusses ist immer 1 [Löd95, Rob95].

Für die Matrix  $\tilde{\mathbf{M}}$  von nichtautonomen HAMILTON-Systemen gelten die Punkte (i)-(iv), da auch  $\tilde{\mathbf{M}}$  symplektisch ist (die Symplexität der Monodromiematrix wird aus den HAMILTON-Gleichungen hergeleitet). (iii) folgt aus (i), und (iv) folgt aus (iii), während sich (ii) aus Satz 2.10 ergibt.

Für die Matrix  $\mathbf{M}$  von nichtautonomen HAMILTON-Systemen gelten die Punkte (ii) und (v), da  $\mathbf{M}$  mit  $\tilde{\mathbf{M}}$  identisch bis auf den zusätzlichen Eigenwert 1 ist. Die Symplexität und die sich daraus ergebenden anderen Eigenschaften sind nicht erfüllt.

Eine besondere Bedeutung erlangt die Monodromiematrix durch ihren Zusammenhang mit der POINCARÉ-Abbildung des linearisierten Systems. Wegen (2.41) und (2.52) gilt für nichtautonome Systeme

$$\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathbf{M}}, \quad (2.59)$$

und wegen (2.41) und (2.49) ergibt sich für autonome Systeme

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathbf{M}. \quad (2.59')$$

Im folgenden ist mit Monodromiematrix für nichtautonome Systeme immer die wie oben definierte Matrix  $\tilde{\mathbf{M}}$  gemeint.

### 2.3.4 Die HILL-Gleichung

Die wohl bekannteste und in der Literatur am häufigsten untersuchte gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten ist die HILL-Gleichung (2.46). Sie läßt sich leider nicht in geschlossener Form lösen, dennoch lassen sich für diese Gleichung einige Aussagen über die Monodromiematrix und die Art der existierenden Lösungen treffen.

Da die Monodromiematrix der HILL-Gleichung eine  $(2 \times 2)$ -Matrix ist, ergeben sich aus den in Abschnitt 2.3.3.3 erwähnten Eigenschaften folgende Spezialisierungen:

1. Sei  $\mathbf{M}$  diagonalisierbar. Dann hat  $\mathbf{M}$  zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  und es gilt:

$$\det \mathbf{M} = \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (2.60)$$

Damit ist  $\lambda_1 = \lambda_2^{-1}$  und die beiden Eigenwerte sind reziprok reell oder komplex konjugiert zueinander mit dem Betrag 1.

2. Sei  $\mathbf{M}$  nicht diagonalisierbar. Dann hat  $\mathbf{M}$  nur einen einfachen<sup>9</sup> Eigenwert  $\lambda$ , und es gilt:

$$\det \mathbf{M} = \lambda^2 = 1. \quad (2.61)$$

$\lambda$  ist entweder 1 oder  $-1$ .



Für das charakteristische Polynom von  $\mathbf{M}$  ergibt sich

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \operatorname{Sp} \mathbf{M} + 1, \quad (2.62)$$

woraus sich dann sofort die Eigenwerte und FLOQUET-Multiplikatoren zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{Sp} \mathbf{M}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\operatorname{Sp} \mathbf{M}}{2}\right)^2 - 1} \quad (2.63)$$

ergeben.

Es sind dann drei Fälle möglich:

1.  $\left(\frac{\operatorname{Sp} \mathbf{M}}{2}\right)^2 > 1$ . Dann sind die beiden FLOQUET-Multiplikatoren zueinander reziprok reell, und einer ist vom Betrag her größer als 1. Die charakteristischen Exponenten<sup>10</sup> sind  $\rho_i = \frac{1}{2\pi} \ln \lambda_i \in \mathbb{C}$ . Die zwei linear unabhängigen Lösungen haben die Form  $e^{\rho_1 t} p_1(t)$  und  $e^{\rho_2 t} p_2(t)$  mit  $2\pi$ -periodischen Funktionen  $p_1(t)$  und  $p_2(t)$ . Ist o.B.d.A.  $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$ , so ist der Realteil von  $\rho_1$  positiv und der Realteil von  $\rho_2$  negativ. Der Ursprung des linearen Systems ist damit ein instabiler hyperbolischer Fixpunkt.
2.  $\left(\frac{\operatorname{Sp} \mathbf{M}}{2}\right)^2 < 1$ . Dann ist die Wurzel in (2.63) rein imaginär und die beiden FLOQUET-Multiplikatoren sind zueinander komplex konjugiert und haben den Betrag 1. Die charakteristischen Exponenten sind  $\rho_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \lambda_1 =: i\omega$ ,  $\rho_2 = \frac{1}{2\pi} \ln \lambda_2 = -i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . Die zwei linear unabhängigen Lösungen sind von der Form  $e^{i\omega t} p_1(t)$  und  $e^{-i\omega t} p_2(t)$  mit zwei  $2\pi$ -periodischen Funktionen  $p_1(t)$  und  $p_2(t)$ . Der Ursprung des linearen Systems ist ein stabiler elliptischer Fixpunkt.
3.  $\left(\frac{\operatorname{Sp} \mathbf{M}}{2}\right)^2 = 1$ . Dann gibt es zwei Möglichkeiten: Ist  $\mathbf{M}$  diagonalisierbar, so sind die beiden Eigenwerte identisch und haben den Wert  $+1$  oder  $-1$ . Die charakteristischen Exponenten sind  $\rho = 0$  oder  $\rho = \frac{i}{2}$ . Zwei linear unabhängige Lösungen lauten  $e^{\rho t} p_i(t)$ , und der Ursprung ist ein stabiler elliptischer Fixpunkt. Ist  $\mathbf{M}$  dagegen nicht diagonalisierbar, so ist  $\lambda$  ein einfacher Eigenwert, und der zugehörige Eigenraum hat die Dimension 1. Zwei linear unabhängige Lösungen sind  $e^{\rho t} p_1(t)$  und  $e^{\rho t} \left(\frac{t}{2\pi\lambda} p_1(t) + p_2(t)\right)$ . Der Ursprung ist dann aufgrund des linearen Terms in der zweiten Lösung ein instabiler elliptischer Fixpunkt. Ob  $\mathbf{M}$  nun diagonalisierbar ist oder nicht, so gibt es in jedem Fall zumindest eine Lösung der Periode  $2\pi$  (für  $\lambda = 1$ ) oder  $4\pi$  (für  $\lambda = -1$ ).

<sup>9</sup>Die Vielfachheit des Eigenwerts  $\lambda$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  bezeichnet die Dimension des zugehörigen Eigenraums und weicht von der Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda$  des charakteristischen Polynoms ab, wenn  $\mathbf{A}$  nicht diagonalisierbar ist.

<sup>10</sup>Die charakteristischen Exponenten sind als  $\rho = \frac{1}{T} \ln \lambda$  definiert, siehe Anhang A.

Parametrisiert man die HILL-Gleichung (2.47) geeignet, so lassen sich noch weitergehende Aussagen über die Lösungen der Gleichung treffen [Hau19, Cae59]. Im folgenden soll gelten

$$h(t) =: \delta + \epsilon p(t), \quad (2.64)$$

wobei  $p(t)$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion mit Mittelwert 0 sei. Nach dem Oszillationstheorem [Hau19] gibt es dann für ein fest gewähltes  $\epsilon$  eine aufsteigende Folge  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  von Werten, für die  $2\pi$ -periodische Lösungen (d.h. FLOQUET-Multiplikatoren  $+1$ ) der HILL-Gleichung in der Parametrisierung von (2.64) existieren, sowie eine aufsteigende Folge  $(\tilde{\delta}_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$  von Werten, für die  $4\pi$ -periodische Lösungen (d.h. FLOQUET-Multiplikatoren  $-1$ ) existieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} \delta_0 < \tilde{\delta}_1 \leq \tilde{\delta}_2 < \delta_1 \leq \delta_2 < \tilde{\delta}_3 \leq \tilde{\delta}_4 < \dots \\ < \tilde{\delta}_{2j-1} \leq \tilde{\delta}_{2j} < \delta_{2j-1} \leq \delta_{2j} < \tilde{\delta}_{2j+1} \leq \dots \end{aligned} \quad (2.65)$$

Die reelle Achse läßt sich also in Intervalle unterteilen, auf deren Randpunkten die Monodromiematrix von (2.64) entweder FLOQUET-Multiplikatoren  $+1$  oder  $-1$  besitzt. Für die Stabilität des Ursprungs dieses linearen Systems läßt sich folgendes festhalten:

1. Der Ursprung ist genau dann (elliptisch) stabil, wenn  $\delta$  in einem Intervall liegt, in dessen Randpunkten die FLOQUET-Multiplikatoren paarweise verschieden sind, d.h.  $\tilde{\delta}_{2j} < \delta < \delta_{2j-1}$  oder  $\delta_{2j} < \delta < \tilde{\delta}_{2j+1}$ . Existiert in einem der Randpunkte ein zweifacher Eigenwert  $\pm 1$ , so herrscht auch in ihm Stabilität.
2. Der Ursprung ist genau dann instabil, wenn entweder  $\delta < \delta_0$  ist oder  $\delta$  in einem Intervall liegt, in dessen Randpunkten die FLOQUET-Multiplikatoren identisch sind. Existiert in einem der Randpunkte nur ein einfacher Eigenwert  $\pm 1$ , so herrscht in ihm Instabilität.

Praktisch bedeutet das, daß die Kenntnis der  $2\pi$ -periodischen und  $4\pi$ -periodischen Lösungen ausreicht, um das Stabilitätsproblem zu lösen: „Zwischen“ zwei dieser Lösungen zu verschiedenen Perioden sind alle Lösungen stabil, „zwischen“ zwei dieser Lösungen zu gleichen Perioden sind alle Lösungen instabil. Ferner läßt sich noch feststellen, daß für wachsendes  $\delta$  die Intervalle der Instabilität beliebig klein werden.

Dieses Verhalten läßt sich auch anschaulich erklären: Die Eigenwerte der Monodromiematrix liegen nach dem oben Gesagten entweder beide auf der reellen Achse oder beide auf dem komplexen Einheitskreis und hängen stetig von  $\delta$  ab. Deshalb ist ein Übergang von stabilem zu instabilem Verhalten und umgekehrt nur möglich, wenn die Eigenwerte die Werte  $\pm 1$  passieren.

Für die beiden in Abschnitt 1.4 eingeführten Spezialfälle ergeben sich folgende Spezialisierungen für die Funktion  $h(t)$  aus (2.45): Für  $a = \frac{c}{b}$  und  $f(t) = g(t)$

(Spezialfall 1) ergibt sich

$$h(t) = (b + c g(t)) \left( 3 \frac{q^2(t)}{b} - 1 \right), \quad (2.66)$$

und für  $a = 0$  (Spezialfall 2) erhält man

$$h(t) = 3 q^2(t) - (b + c g(t)). \quad (2.67)$$

### 2.3.5 Spezialfall 1: $a = \frac{c}{b}$ , $f(t) = g(t)$

In diesem Abschnitt wird für den ersten Spezialfall (1.17) für die drei Fixpunkte dieses eingeschränkten Systems eine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt. Für eine spezielle Wahl von  $g(t)$  wird die Berechnung analytisch, für eine andere numerisch durchgeführt. Die Bereiche der Stabilität und Instabilität im zweidimensionalen Parameterraum werden anschließend graphisch dargestellt.

#### 2.3.5.1 Die HILL-Gleichungen für die Fixpunkte

Die jeweiligen „Anregungsfunktionen“  $h(t)$  für die einzelnen Fixpunkte des Systems lassen sich nun angeben. Für den zentralen Fixpunkt mit  $q = 0$  ergibt sich aus (2.66)

$$h_0(t) = -(b + c g(t)), \quad (2.68)$$

und für die beiden seitlichen Fixpunkte mit  $q = \pm\sqrt{b}$  ergibt sich

$$h_1(t) = 2(b + c g(t)). \quad (2.69)$$

Die HILL-Gleichung  $\ddot{q} + h_1(t)q = 0$  ist für die beiden seitlichen Fixpunkte identisch, was aufgrund der Symmetrie des Systems zu erwarten ist; sie unterscheidet sich von der Gleichung für den zentralen Fixpunkt nur um einen Faktor  $-2$  in der Funktion  $h(t)$ . In den folgenden Abschnitten werden die obigen Gleichungen für spezielle  $g(t)$  untersucht.

#### 2.3.5.2 Die MEISSNER-Gleichung

##### Die Anregungsfunktion

Wie bereits oben erwähnt, ist die HILL-Gleichung in ihrer allgemeinen Form nicht lösbar. Auch für den hier betrachteten Fall einer Parametrisierung wie in (2.64) läßt sich keine analytische Lösung für alle Parameterwerte angeben.

Für stückweise konstantes  $h(t)$  bzw.  $g(t)$  läßt sich dagegen eine analytische Lösung angeben. Der einfachste Fall einer stückweise konstanten, periodischen Funktion ist die  $2\pi$ -periodische *Rechteckfunktion*

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} +1, & \text{falls } 0 \leq t < \pi, \\ -1, & \text{falls } \pi \leq t < 2\pi. \end{cases} \quad (2.70)$$

Eine HILL-Gleichung des Typs

$$\ddot{q} + (\delta + \epsilon \operatorname{rect}(t)) q = 0 \quad (2.71)$$

heißt MEISSNER-Gleichung [Mei18, Cae59]. Für den zentralen Fixpunkt folgt durch Vergleich mit Gleichung (2.68):

$$\delta = -b, \quad \epsilon = -c, \quad (2.72)$$

und für die seitlichen Fixpunkte mit Gleichung (2.69):

$$\delta = 2b, \quad \epsilon = 2c. \quad (2.73)$$

Im Prinzip läßt sich für jedes stückweise konstante Vektorfeld eine analytische Lösung angeben, nur wird diese Lösung im allgemeinen mit zunehmender Zahl der Unstetigkeitsstellen sehr schnell sehr lang und kaum mehr handhabbar sein. In Anhang B wird eine Lösung der HILL-Gleichung für eine stückweise konstante Anregungsfunktion mit vier äquidistanten Unstetigkeitsstellen berechnet.

### Die Spur der Monodromiematrix

Weil die MEISSNER-Gleichung stückweise konstant ist, läßt sie sich auf den jeweiligen Intervallen mit konstanter parametrischer Anregung  $\alpha = \delta \pm \epsilon$  mittels der Theorie linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (siehe Anhang A.3) lösen. Die allgemeine Lösung, d.h. der Fluß ergibt sich dann durch Hintereinanderschaltung der „lokalen“ Lösungen.

Die Gleichung

$$\ddot{q} + \alpha q = 0 \quad (2.74)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

mit  $p = \dot{q}$  und den Anfangsbedingungen

$$q(0) = q_0, \quad p(0) = p_0 \quad (2.76)$$

führt nach kurzer Rechnung auf den Fluß

$$\tilde{\Phi}_t^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha} t) & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha} t) \\ -\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha} t) & \cos(\sqrt{\alpha} t) \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

und es gilt:

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \tilde{\Phi}_t^{(\alpha)} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Für  $\alpha \geq 0$  beschreibt  $\tilde{\Phi}_t^{(\alpha)}$  eine Drehung, und die Trajektorien sind Ellipsen im Phasenraum. Für  $\alpha < 0$  wird  $\sqrt{\alpha}$  rein imaginär und  $\sin(\sqrt{\alpha} t)$  sowie  $\cos(\sqrt{\alpha} t)$

gehen über in  $i \sinh(\sqrt{-\alpha} t)$  sowie  $\cosh(\sqrt{-\alpha} t)$ , und die Bahnkurven sind Hyperbeln. Dadurch ist auch klar, wie parametrische Resonanz entsteht, selbst wenn das System (2.75) bzw. dessen Lösung (2.77) für jeden einzelnen Zeitpunkt ein stabiles System ( $\alpha > 0$ ) beschreibt. Liegen nämlich die Halbachsen der Ellipsen, auf denen sich ein Orbit zu gewissen Zeiten bewegt, geeignet, so kann dieser bei jeder Unstetigkeitsstelle des Vektorfeldes immer weiter nach außen getragen werden. Dies führt zu divergierenden, d.h. instabilen Orbits. Für  $\alpha < 0$  ist Instabilität wegen der Hyperbolizität der Bahnkurven als „Regelfall“ zu erwarten, aber auch hier gibt es (allerdings sehr „kleine“) Parameterbereiche, für die die Hyperbeln, auf denen sich ein Orbit zwischen den Unstetigkeitsstellen bewegt, so geeignet liegen, daß sich eine stabile Dynamik ergibt.

Während der Fluß über ein Intervall, auf dem die Rechteckfunktion konstant ist, ein autonomer Fluß ist, für den die Gleichungen (2.3) und (2.4) gelten, ist der Fluß über mehrere solche Intervalle ein nichtautonomer Fluß, für den diese Relationen nicht gelten.

Für die Monodromiematrix, also den linearisierten Fluß der MEISSNER-Gleichung (2.71) zur Zeit  $2\pi$  ergibt sich dann

$$\mathbf{M} = \tilde{\Phi}_\pi^{(\delta-\epsilon)} \tilde{\Phi}_\pi^{(\delta+\epsilon)}. \quad (2.79)$$

Ausgeschrieben erhält man:

$$\begin{aligned} M_{11} = & \cos(\sqrt{\delta-\epsilon}\pi) \cos(\sqrt{\delta+\epsilon}\pi) \\ & - \frac{\sqrt{\delta+\epsilon}}{\sqrt{\delta-\epsilon}} \sin(\sqrt{\delta-\epsilon}\pi) \sin(\sqrt{\delta+\epsilon}\pi), \end{aligned} \quad (2.80a)$$

$$\begin{aligned} M_{12} = & \frac{1}{\sqrt{\delta-\epsilon}} \cos(\sqrt{\delta-\epsilon}\pi) \sin(\sqrt{\delta+\epsilon}\pi) \\ & + \frac{1}{\sqrt{\delta+\epsilon}} \sin(\sqrt{\delta-\epsilon}\pi) \cos(\sqrt{\delta+\epsilon}\pi), \end{aligned} \quad (2.80b)$$

$$\begin{aligned} M_{21} = & -\sqrt{\delta-\epsilon} \sin(\sqrt{\delta-\epsilon}\pi) \cos(\sqrt{\delta+\epsilon}\pi) \\ & - \sqrt{\delta+\epsilon} \cos(\sqrt{\delta-\epsilon}\pi) \sin(\sqrt{\delta+\epsilon}\pi), \end{aligned} \quad (2.80c)$$

$$\begin{aligned} M_{22} = & \cos(\sqrt{\delta-\epsilon}\pi) \cos(\sqrt{\delta+\epsilon}\pi) \\ & - \frac{\sqrt{\delta-\epsilon}}{\sqrt{\delta+\epsilon}} \sin(\sqrt{\delta-\epsilon}\pi) \sin(\sqrt{\delta+\epsilon}\pi). \end{aligned} \quad (2.80d)$$

Die Spur der Monodromiematrix läßt sich nun explizit angeben:

$$\begin{aligned} \text{Sp } \mathbf{M} = & 2 \cos(\sqrt{\delta-\epsilon}\pi) \cos(\sqrt{\delta+\epsilon}\pi) \\ & - \left( \frac{\sqrt{\delta+\epsilon}}{\sqrt{\delta-\epsilon}} + \frac{\sqrt{\delta-\epsilon}}{\sqrt{\delta+\epsilon}} \right) \sin(\sqrt{\delta-\epsilon}\pi) \sin(\sqrt{\delta+\epsilon}\pi). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Mit (2.63) lassen sich dann daraus die Eigenwerte der Monodromiematrix, die mit der linearisierten POINCARÉ-Abbildung identisch ist, berechnen.

Die Schlußfolgerungen, die sich aus den Eigenwerten von  $\mathbf{M}$  auf die Stabilität der Fixpunkte bzw. periodischen Orbits ergeben, sind folgende:

Es gibt nach Abschnitt 2.3.4 zwei Möglichkeiten für die Eigenwerte von  $\mathbf{M}$ :  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind reziprok reell oder komplex konjugiert mit Betrag 1. Gilt  $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ , so ist der Ursprung des linearisierten Systems ein instabiler hyperbolischer Fixpunkt und es gilt Satz 2.9 von HARTMAN-GROBMAN: Der ursprüngliche Fixpunkt des nichtlinearen Systems, um den herum der Fluß linearisiert wurde, ist ebenfalls ein instabiler hyperbolischer Fixpunkt. Gilt  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \neq \lambda_2$ , so ist der Ursprung ein stabiler elliptischer Fixpunkt. Auf die Stabilität des Fixpunktes im nichtlinearen System lassen sich daraus im streng mathematischen Sinn keine Schlüsse ziehen, numerische Untersuchungen aber zeigen, daß auch das nichtlineare System in diesem Fall stabil ist. Analytisch kann zumindest aus dem KAM-Theorem (siehe Abschnitt 2.2.4) gefolgert werden, daß für ein festes  $b$  die im ungestörten Fall stabilen seitlichen Fixpunkte bei  $(\pm\sqrt{b}, 0)$  für alle genügend kleinen Werte von  $c$  stabil bleiben, da die KAM-Tori zu hinreichend irrationalen Frequenzen erhalten bleiben. Für den Fall  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1 = \lambda$  läßt sich aus der Berechnung der Eigenwerte nicht auf die Stabilität des des linearen Systems schließen, da sich daraus keine Information über die Vielfachheit von  $\lambda$  gewinnen läßt. Da dieser Fall aber nur beim Übergang von stabiler zu instabiler Dynamik auftritt, d.h. auf einer Menge vom Maß null, wird er hier vernachlässigt.

Da, wie oben gezeigt wurde, sich die Eigenwerte auf die Spur der Monodromiematrix zurückführen lassen, reicht es aus, diese zu betrachten. Es ergibt sich Stabilität, falls die Spur von  $\mathbf{M}$  dem Betrag nach kleiner als 2 ist, und Instabilität, falls die Spur von  $\mathbf{M}$  dem Betrage nach größer als 2 ist. Der zweidimensionale Parameterraum zerfällt daher in stabile und instabile Bereiche.

In Abb. 2.1 sind zwei Stabilitätsdiagramme für die MEISSNER-Gleichung dargestellt. Auf der horizontalen Achse ist der Parameter  $\delta$ , auf der vertikalen der Störparameter  $\epsilon$  aufgetragen. Das zweite Diagramm zeigt einen vergrößerten Ausschnitt des ersten. Stabilitätsbereiche sind weiß, Instabilitätsbereiche schwarz eingezeichnet. Auf die Bereiche  $\epsilon < 0$  wird hier verzichtet, da das Diagramm symmetrisch bezüglich der  $\delta$ -Achse ist; denn der Übergang von  $\epsilon$  in  $-\epsilon$  in Gleichung (2.71) entspricht einer Phasenverschiebung um  $\pi$ , da  $\text{rect}(t + \pi) = -\text{rect}(t)$  ist. Eine Phasenverschiebung hat aber, wie bereits erwähnt, keinerlei Einfluß auf die Stabilität. Für die einzelnen Fixpunkte läßt sich daraus das Stabilitätsverhalten für die Parameter  $b$  und  $c$  aus (2.72) und (2.73) ablesen, wenn man diese in  $\delta$  und  $\epsilon$  einsetzt.

Die Instabilitätsbereiche berühren die  $\delta$ -Achse an den Stellen

$$\delta = \frac{1}{4}n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.82)$$

Dies läßt sich auf zwei Arten erklären. Zum einen geht die MEISSNER-Gleichung (2.71) des linearen Systems für  $\epsilon = 0$  in die Gleichung eines Harmonischen Os-

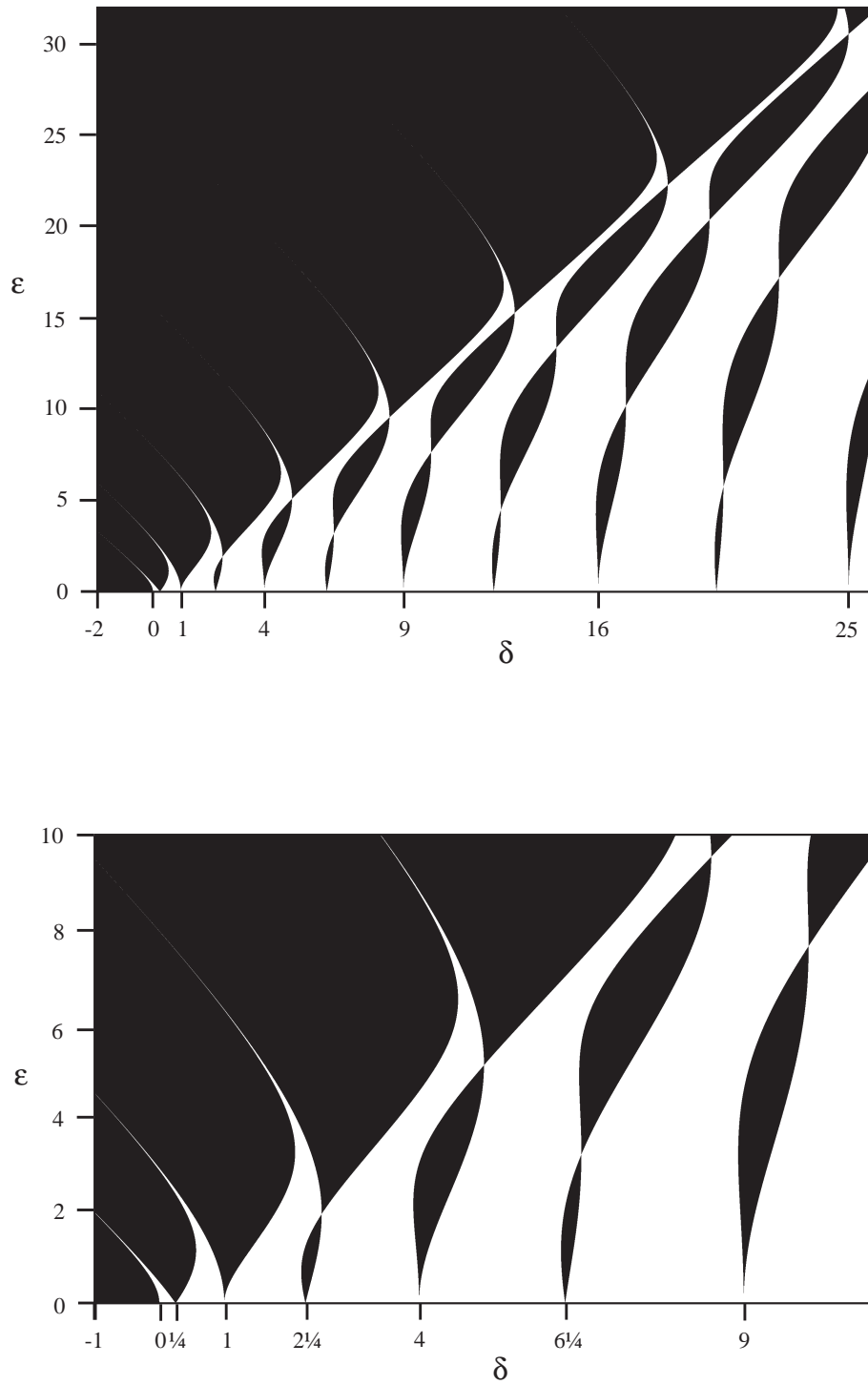


Abbildung 2.1: Stabilitätsdiagramme für die MEISSNER-Gleichung (2.71); stabile Bereiche sind weiß, instabile schwarz dargestellt. Das untere Bild zeigt eine Ausschnittsvergrößerung des oberen Bildes.

zillators mit der Frequenz  $\omega = \sqrt{\delta}$  über mit den Lösungen  $e^{\pm i\omega t}$ . Die FLOQUET-Multiplikatoren  $\lambda_{1,2}$  des Systems sind dann gleich  $e^{\pm i2\pi\omega}$ . Dann und nur dann, wenn  $\delta$  den Wert  $\frac{1}{4}n^2$  annimmt, nehmen die FLOQUET-Multiplikatoren den Wert  $e^{\pm i\pi n} = \pm 1$  an. Wie in Abschnitt 2.3.4 diskutiert wurde, müssen beim Übergang von einem Stabilitäts- zu einem Instabilitätsbereich die FLOQUET-Multiplikatoren den Wert  $+1$  oder  $-1$  durchlaufen. Das bedeutet, falls die Instabilitätsbereiche die  $\delta$ -Achse überhaupt berühren, können sie das nur an den Punkten  $\delta = \frac{1}{4}n^2$ .

Zum anderen läßt sich anschaulich argumentieren, daß Resonanzeffekte dann auftreten können, wenn die Eigenfrequenz  $\omega(\delta)$  des Systems ein ganzzahliges Vielfaches der Anregungsfrequenz 1 ist. Ein Orbit wird dann immer in der gleichen „Phase“ von der Anregung „erfaßt“, so daß hierdurch „Energie“ in das System „hineingepumpt“ (instabiler Orbit) oder dem System „entzogen“ (stabiler Orbit) werden kann. Aufgrund der Symmetrie des Potentials tritt dieser Effekt auch noch auf, wenn die Eigenfrequenz ein halbzahliges Vielfaches der Anregungsfrequenz ist.

Derjenige Instabilitätsbereich, der die  $\delta$ -Achse bei  $\frac{1}{4}n^2$  berührt, soll im folgenden als  $n$ -ter Instabilitätsbereich bezeichnet werden. Wie in Abschnitt 2.3.4 mit Gleichung (2.65) beschrieben wurde, überlappen diese Bereiche nicht.

Das auffälligste Merkmal der Stabilitätsdiagramme sind die „bauchigen“ Bereiche, aus denen ein Instabilitätsbereich besteht. Und zwar besteht der  $(2n+1)$ -te und der  $(2n+2)$ -te Instabilitätsbereich aus  $n$  solchen „bauchigen“ Gebieten, an die sich ein unbegrenztes Gebiet der Instabilität für wachsendes  $\epsilon$  anschließt.

### Der zentrale Fixpunkt

Das Stabilitätsdiagramm des zentralen Fixpunktes **0** in Abhängigkeit von  $b$  und  $c$  erhält man wegen (2.72) durch Spiegelung von Abb. 2.1 an der  $\epsilon$ -Achse. Für  $b > 0$  ist der Fixpunkt dann „meistens“ instabil, wie man es auch erwarten würde (Für  $c = 0$  handelt es sich dabei um den hyperbolischen Fixpunkt des ungestörten Systems, daher ist dieses Verhalten auch im gestörten Fall zu erwarten.). Jedoch für geeignete Anregung  $c$  kann auch dieser Fixpunkt für  $b > 0$  stabil werden.

Im hier nicht betrachteten Fall, daß  $b < 0$  ist, überwiegen für kleine Störungen die Bereiche der Stabilität. Das ist auch zu erwarten, da das ungestörte System (Ein-Mulden-Potential) dann nur einen (stabilen) Fixpunkt aufweist.

Die Bereiche der Instabilität berühren die horizontale Achse bei  $b = -\frac{1}{4}n^2$ .

### Die seitlichen Fixpunkte

Das Stabilitätsdiagramm der seitlichen Fixpunkte  $(\pm\sqrt{b})$  in Abhängigkeit von  $b$  und  $c$  erhält man wegen (2.73) durch Stauchung von Abb. 2.1 um den Faktor  $\frac{1}{2}$  in horizontaler und vertikaler Richtung.

Wie zu erwarten war, sind die seitlichen Fixpunkte für  $b > 0$  und kleines  $c$  überwiegend stabil. Für  $b < 0$  existieren diese Fixpunkte nicht.



Die Instabilitätsbereiche berühren in diesem Fall die horizontale Achse für  $b = \frac{\delta}{2} = \frac{1}{8}n^2$ .

### 2.3.5.3 Die MATHIEU-Gleichung

#### Die Anregungsfunktion

Die wohl bekannteste und in der Literatur am häufigsten untersuchte Variante der HILL-Gleichung (2.47) ist die MATHIEU-Gleichung<sup>11</sup>

$$\ddot{q} + (\delta + \epsilon \cos t) q = 0, \quad (2.83)$$

deren bekannteste Lösungen die MATHIEU-Funktionen [AMS72] sind. Diese Funktionen sind gerade die  $2\pi$ - und  $4\pi$ -periodischen Lösungen der MATHIEU-Gleichung, d.h. es sind Lösungen zu den FLOQUET-Multiplikatoren 1 und  $-1$ . Durch die Kenntnis aller dieser Lösungen sowie deren Lage im Parameterraum ist es möglich, die Lage der Stabilitäts- und der Instabilitätsbereiche im Parameterraum anzugeben, wie in Abschnitt 2.3.4 bereits erläutert wurde.

Wählt man nun

$$g(t) = \cos t, \quad (2.84)$$

so erhält man aus der MATHIEU-Gleichung und (2.68) bzw. (2.69) genau wie für die MEISSNER-Gleichung für den zentralen Fixpunkt:

$$\delta = -b, \quad \epsilon = -c, \quad (2.85)$$

und für die seitlichen Fixpunkte:

$$\delta = 2b, \quad \epsilon = 2c. \quad (2.86)$$

#### Die Spur der Monodromiematrix

Leider läßt sich die MATHIEU-Gleichung (2.83) nicht allgemein lösen. Es sind nur für bestimmte Parameter Lösungen bekannt, deren prominenteste Vertreter die oben erwähnten MATHIEU-Funktionen sind.

Die Stabilitätsdiagramme der MATHIEU-Gleichung sind in Abb. 2.2 dargestellt. Auf der horizontalen Achse ist  $\delta$  und auf der vertikalen  $\epsilon$  aufgetragen. Bereiche der Instabilität sind wieder schwarz und Bereiche der Stabilität weiß aufgetragen. Für die Erzeugung dieses Diagramms wurden allerdings nicht die MATHIEU-Funktionen verwandt, sondern aus Gründen der Einfachheit wurde

<sup>11</sup>In der Literatur wird häufig eine andere Parametrisierung gewählt:  $\ddot{q} + (\delta + \epsilon \cos 2t) q = 0$ . Dies hat zur Folge, daß die Bereiche der Instabilität die  $\delta$ -Achse an den Punkten berühren, an denen  $\delta$  das Quadrat einer natürlichen Zahl ist. Das liefert für die meisten Betrachtungen ein „schöneres“ Ergebnis als die in dieser Arbeit verwandte Parametrisierung, bei der die Instabilitätsbereiche die  $\delta$ -Achse berühren, wenn  $\delta$  ein Viertel des Quadrats einer natürlichen Zahl beträgt.

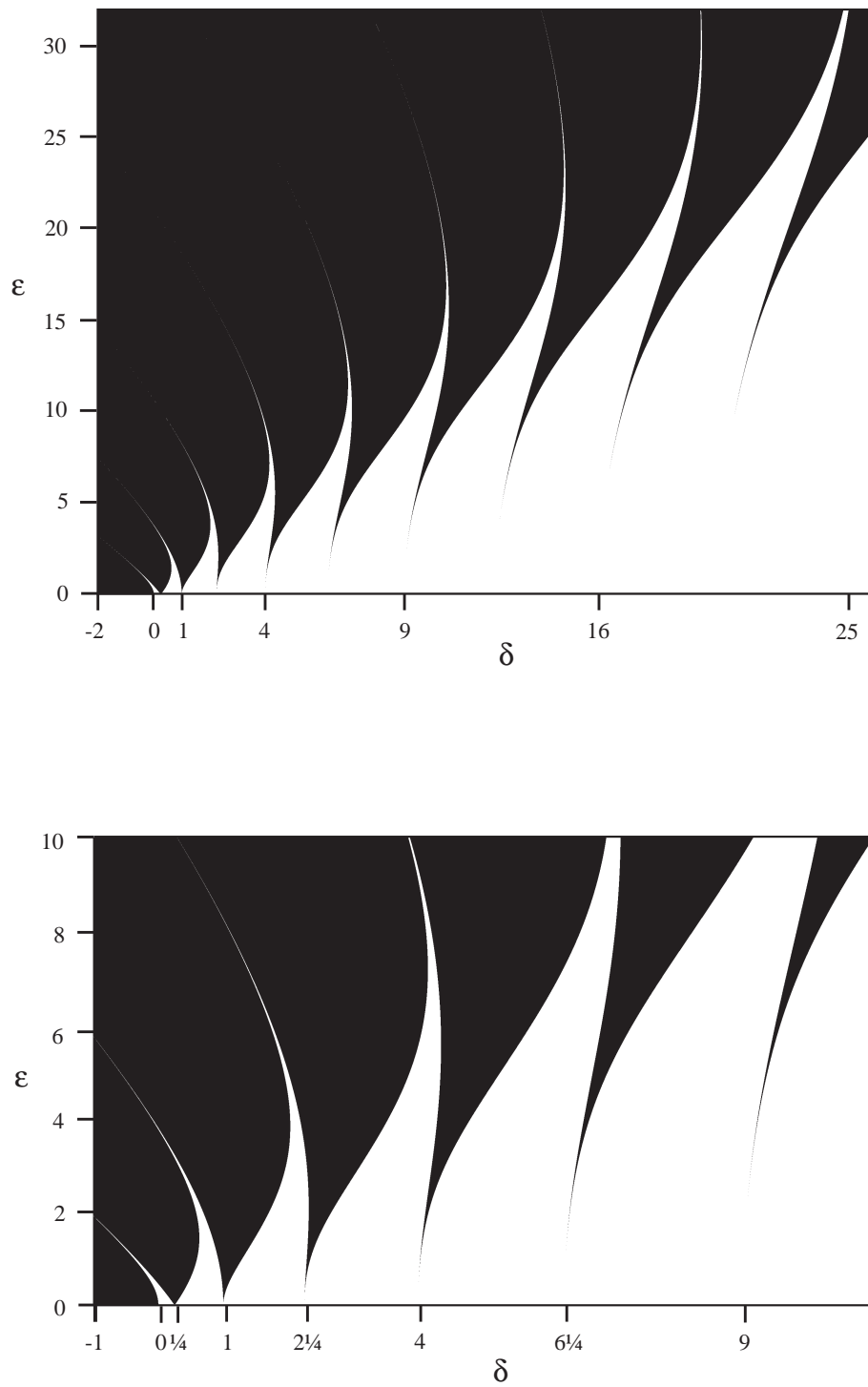


Abbildung 2.2: Stabilitätsdiagramme für die MATHIEU-Gleichung (2.83); stabile Bereiche sind weiß, instabile schwarz dargestellt. Das untere Bild zeigt eine Ausschnittsvergrößerung des oberen Bildes.

die Spur der Monodromiematrix numerisch berechnet. Ähnliche Bilder finden sich in [Cae59, AMS72, NM79].

Wie im vorangegangenen Abschnitt ist das Stabilitätsdiagramm symmetrisch bezüglich  $\epsilon = 0$ . Daher wird hier auf die Darstellung der Bereiche  $\epsilon < 0$  verzichtet.

Wie bereits gesagt, existieren die MATHIEU-Lösungen auf den eindimensionalen Mannigfaltigkeiten, die den Übergang zwischen den Stabilitäts- und Instabilitätsbereichen bilden. Diese Lösungen sind abwechselnd gerade und ungerade. Beginnend mit  $\delta = 0$  sind die periodischen Lösungen auf der ersten „Übergangslinie“ gerade, auf der zweiten ungerade und so fort. Allgemein sind die Lösungen auf der Übergangslinie von einem Instabilitäts- zu einem Stabilitätsbereich gerade (bei wachsendem Parameter  $\delta$  betrachtet), während sie auf der Übergangslinie von einem Stabilitäts- zu einem Instabilitätsbereich ungerade sind. Ferner sind die Lösungen auf den beiden Übergangslinien, die einen Instabilitätsbereich einschließen, immer von der gleichen Periode (d.h. *entweder*  $2\pi$ - *oder*  $4\pi$ -periodisch), während die Lösungen auf den Übergangslinien, die einen Stabilitätsbereich einschließen, immer verschiedene Perioden haben (vgl. Abschnitt 2.3.4). Die Lösungen auf der ersten Übergangslinie haben die Periode  $2\pi$ .

Der bedeutendste Unterschied zu den Stabilitätsdiagrammen in den vorherigen Abschnitten ist das Verschwinden der „bauchigen“ Gebiete der Instabilität.

### Der zentrale Fixpunkt

Das Stabilitätsdiagramm für den zentralen Fixpunkt  $\mathbf{0}$  in Abhängigkeit von  $b$  und  $c$  erhält man wegen (2.85) durch Spiegelung von Abb. 2.2 an der  $\epsilon$ -Achse. Es gilt für diesen Fixpunkt das gleiche wie im vorangegangenen Abschnitt im Fall der MEISSNER-Gleichung.

### Die seitlichen Fixpunkte

Das Stabilitätsdiagramm für die seitlichen Fixpunkte  $(\pm\sqrt{b})$  in Abhängigkeit von  $b$  und  $c$  erhält man wegen (2.86) durch Stauchung von Abb. 2.2 um den Faktor  $\frac{1}{2}$  sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung. Die Bereiche der Instabilität berühren die horizontale Achse somit ebenfalls bei  $b = \frac{1}{8}n^2$ .

#### 2.3.6 Spezialfall 2: $a = 0$

Dieses System besitzt nur einen einzigen Fixpunkt, nämlich den Ursprung. Aus Gleichung (2.67) folgt mit  $q = 0$  für die Anregungsfunktion:

$$h(t) = -b - c g(t). \quad (2.87)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Anregungsfunktion  $h_0(t)$  für den zentralen Fixpunkt von Spezialfall 1 (2.68). Daher ist dieser Fall bereits implizit in Abschnitt 2.3.5 abgehandelt worden.

## 2.4 Numerische Resultate

Dargestellt werden im folgenden Phasenportraits des System, indem für jede der folgenden Abbildungen für eine Reihe von Startwerten  $\begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$   $N$  iterierte der POINCARÉ-Abbildung (2.23) berechnet werden. Die etwa 26-64 Startwerte liegen in der Regel alle auf der  $q$ -Achse, d.h.  $p_0 = 0$ , und  $N$  liegt in der Größenordnung von 200-2000. Als POINCARÉ-Abbildung wird die zur Schnittfläche  $\theta = 0$  gehörige Abbildung  $\mathcal{P}$  verwendet. Die Koordinate  $q$  wird auf der horizontalen und die Koordinate  $p$  auf der vertikalen Achse aufgetragen. Die numerische Berechnung wurde mit einem RUNGE-KUTTA-Verfahren 4. Ordnung durchgeführt [PTVF92].

### 2.4.1 Spezialfall 1: $a = \frac{c}{b}$ , $f(t) = g(t)$

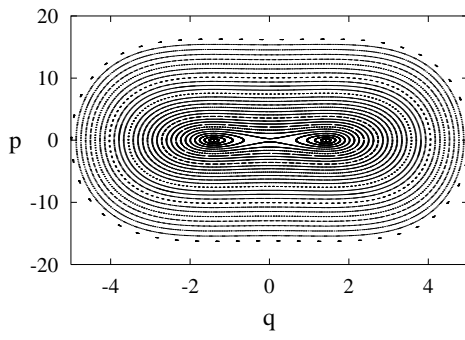
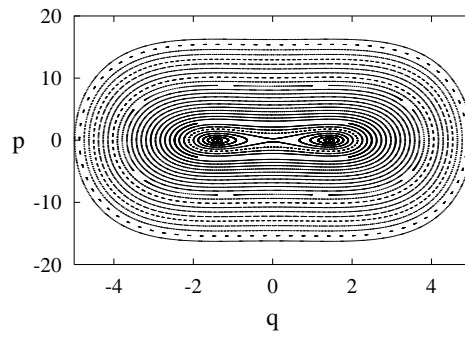
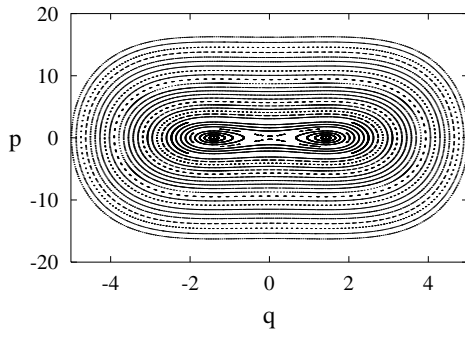
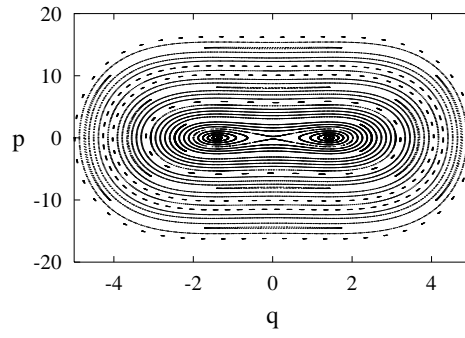
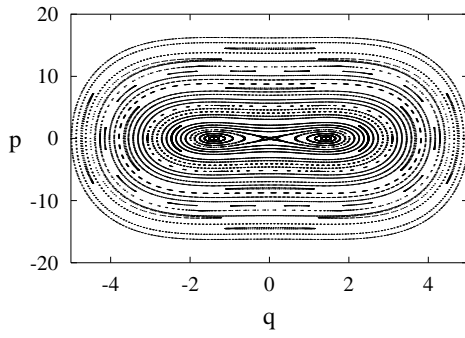
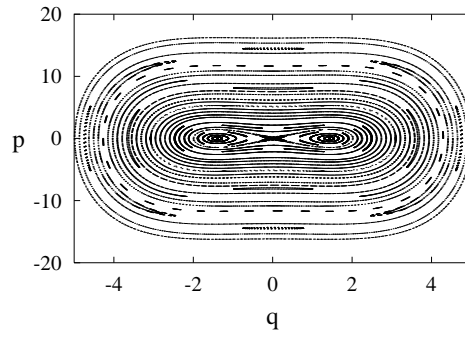
Abb. 2.3 zeigt eine Serie von Phasenportraits für den Spezialfall 1 (1.23), um die Veränderung der Systemdynamik bei wachsender Störung qualitativ aufzuzeigen. Für diese Bilderserie wurde  $b = 2$  und  $g(t) = \text{rect}(t)$  gewählt. Für alle diese Phasenportraits ist  $\frac{c}{b} < 1$ , da sonst für große  $c$  das Potential (1.16) während einer Periode für einige Zeit für  $q \rightarrow \pm\infty$  gegen  $-\infty$  strebt. In dem Fall kann dann von einem *Zwei-Mulden*-Potential nicht mehr die Rede sein, weswegen dieser Parameterbereich hier nicht betrachtet wird.

Es sind selbst für große Werte von  $c$  noch stabile Inseln um die seitlichen Fixpunkte zu beobachten. Aufgrund numerischer Untersuchungen scheint das nichtlineare System in der Umgebung der Fixpunkte genau dann stabil zu sein, wenn das linearisierte System, dargestellt in Abb. 2.1, stabil ist. Diese Aussage gilt im übrigen auch für  $g(t) = \cos t$ .

Schon bei der geringsten Störung bricht die Separatrix auf, und es entsteht homoklines Chaos. Deutlich sichtbar wird dieser Effekt erst bei etwa  $c \approx 0.2$ . Bei deutlich kleinerem  $c$  entstehen außerhalb der Separatrix des ungestörten Systems Inseln, die zu Orbits der Perioden 1, 2 oder 4 der POINCARÉ-Abbildung gehören. In Abb. 2.3(d) sind beispielsweise zwei Inselketten zur Periode 4 zu erkennen. Die POINCARÉ-BIRKHOFF-Ketten sind in einen scheinbar regulären Phasenraumbereich eingebettet.

Zwischen  $c = 0.05$  und  $c = 0.1$  entstehen zahlreiche Chaosbänder, und es ergibt sich eine komplexe Struktur aus regulären Inseln und dazwischen liegenden Chaosbereichen. Mit weiter steigender Störung verbinden sich die Chaosbänder miteinander zu einem zusammenhängenden Bereich, während viele reguläre Inseln kleiner werden und verschwinden. Außerdem dehnt sich der chaotische Bereich immer weiter im Phasenraum aus.

Man kann sich auch die Frage stellen, was außerhalb des eigentlich betrachteten Parameterbereichs ( $c < b$ ) mit den seitlichen Fixpunkten  $q = \pm\sqrt{b}$  passiert. Für große Werte des Störparameters  $c$  ( $c \gg b$ ) liegen die Fixpunkte, wenn sie instabil sind, in einem chaotischen Bereich des Phasenraums. Für kleine Werte

(a)  $c = 0$ (b)  $c = 0.001$ (c)  $c = 0.002$ (d)  $c = 0.005$ (e)  $c = 0.01$ (f)  $c = 0.02$

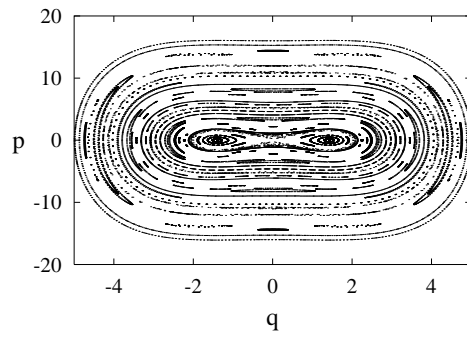
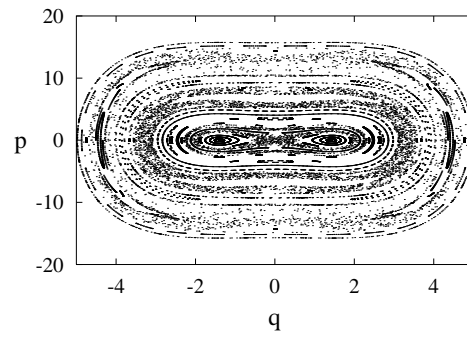
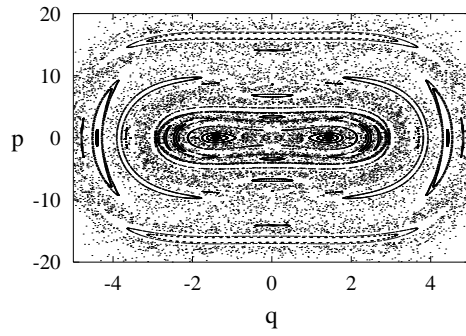
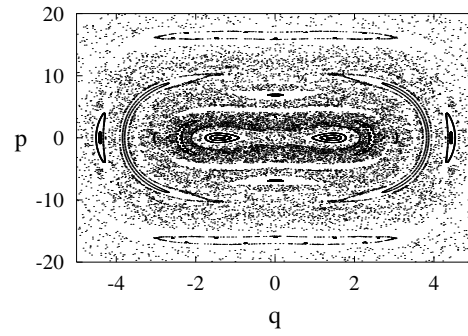
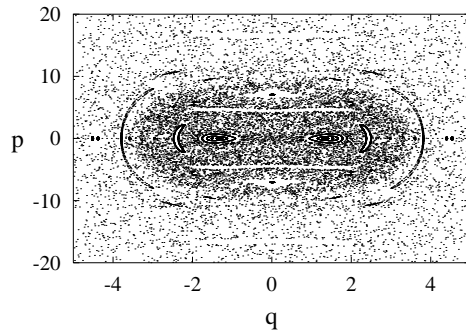
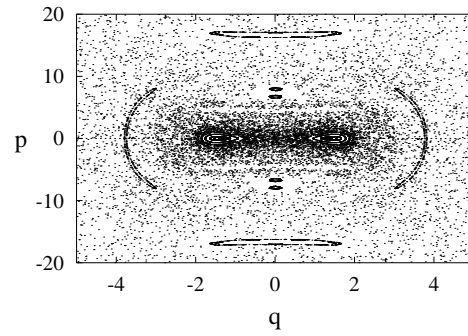
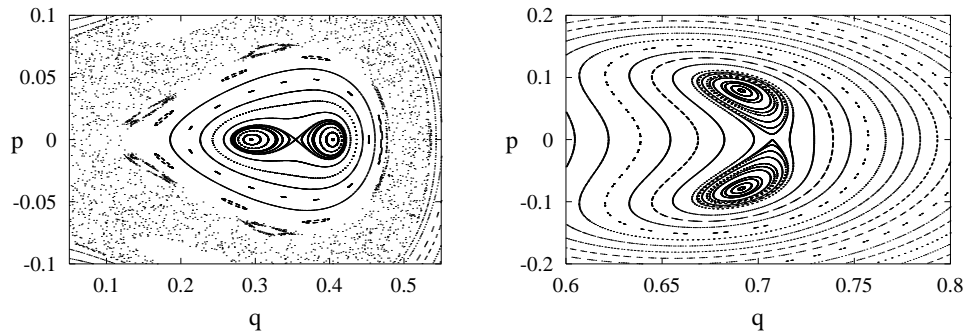
(g)  $c = 0.05$ (h)  $c = 0.1$ (i)  $c = 0.2$ (j)  $c = 0.3$ (k)  $c = 0.4$ (l)  $c = 0.5$ 

Abbildung 2.3: Phasenportraits für den Spezialfall 1 ( $a = \frac{c}{b}$ ) mit  $b = 2$  und  $f(t) = g(t) = \text{rect}(t)$ .

von  $c$  ( $c \ll b$ ) muß zwischen dem zentralen und den seitlichen Fixpunkten unterschieden werden:

Der zentrale Fixpunkt liegt im Falle seiner Instabilität immer in einem chaotischen Bereich des Phasenraums, nämlich im Gebiet des „homoklinen Chaos“.

Bei den seitlichen Fixpunkten wird beim Übergang vom stabilen in den instabilen Bereich des Parameterraums (bei wachsendem  $b$ ) der jeweilige Fixpunkt instabil, während entweder ein stabiler Orbit der Periode 2 oder zwei stabile Fixpunkte der Periode 1 der POINCARÉ-Abbildung entstehen. Beim Eintritt in einen Instabilitätsbereich (bei wachsendem  $b$ ) erlebt der Fixpunkt  $(\pm\sqrt{b})$  entweder eine *Pitchfork-Bifurkation*, bei der der stabile Fixpunkt instabil wird und gleichzeitig zwei stabile Fixpunkte entstehen, oder eine *Flip-Bifurkation*, bei der der stabile Fixpunkt instabil wird und sich ein stabiler Orbit der Periode 2 bildet. Die Umgebung des instabil gewordenen Fixpunktes wird in Abb. 2.4 für  $g(t) = \cos(t)$  für die ersten beiden Instabilitätsbereiche und in Abb. 2.5 für  $g(t) = \text{rect}(t)$  für die ersten vier Instabilitätsbereiche dargestellt. Im ersten Instabilitätsbereich für  $b = \frac{1}{8}1^2$  entsteht ein stabiler Orbit der Periode 2, im zweiten Instabilitätsbereich für  $b = \frac{1}{8}2^2$  entstehen zwei stabile Fixpunkte, im dritten Instabilitätsbereich entsteht wieder ein Orbit der Periode 2, im vierten wieder zwei Fixpunkte. Vom Ansehen der Bilder her läßt sich ein Orbit der Periode 2 nicht von zwei Fixpunkten unterscheiden, numerisch werden im zweiten Fall allerdings doppelt so viele Trajektorien berechnet.



(a)  $b = \frac{1}{8}$ ,  $c = \frac{1}{100}$ : 1 stabiler 2-Zyklus

(b)  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{1}{5}$ : 2 stabile 1-Zyklen

Abbildung 2.4: Phasenportraits für Spezialfall 1 ( $a = \frac{c}{b}$  und  $f(t) = g(t) = \cos t$ ). Dargestellt werden ein 2-Zyklus im 1. Instabilitätsbereich ( $b = \frac{1}{8}$ ), und zwei 1-Zyklen im 2. Instabilitätsbereich ( $b = \frac{1}{2}$ ).

Der beim Eintritt in den Instabilitätsbereich instabil gewordene Fixpunkt  $(\pm\sqrt{b})$  scheint ein hyperbolischer Fixpunkt geworden zu sein, von dem zwei homokline Orbits ausgehen. Für zunehmende Störung kann man beobachten, wie zwischen den beiden regulären Inseln in der Umgebung des jetzt hyperbolischen Fixpunktes Chaos entsteht, so wie es auch für den zentralen Fixpunkt  $0$  im Ursprung geschieht.

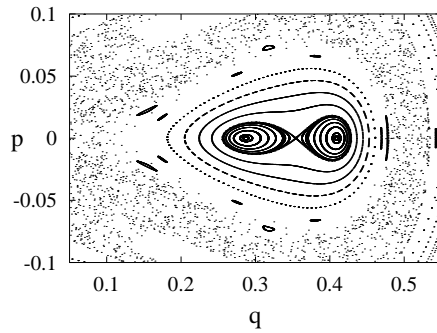
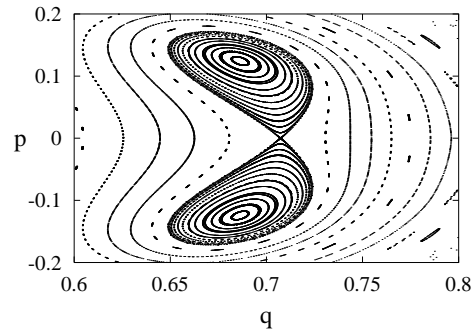
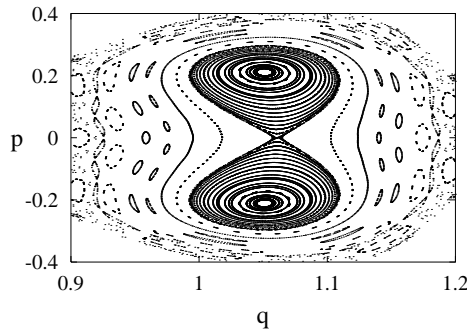
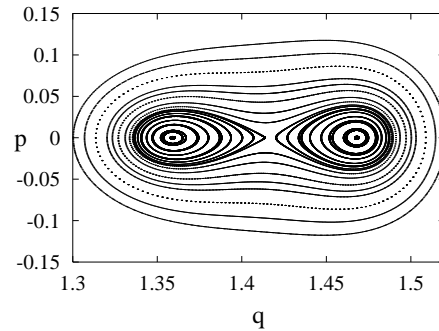
(a)  $b = \frac{1}{8}$ ,  $c = \frac{1}{100}$ : 1 stabiler 2-Zyklus(b)  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{1}{5}$ : 2 stabile 1-Zyklen(c)  $b = \frac{9}{8}$ ,  $c = \frac{1}{4}$ : 1 stabiler 2-Zyklus(d)  $b = 2$ ,  $c = \frac{1}{5}$ : 2 stabile 1-Zyklen

Abbildung 2.5: Phasenportraits für den Spezialfall 1 ( $a = \frac{c}{b}$  und  $f(t) = g(t) = \text{rect}(t)$ ). Dargestellt werden ein 2-Zyklus im 1. Instabilitätsbereich ( $b = \frac{1}{8}$ ), zwei 1-Zyklen im 2. Instabilitätsbereich ( $b = \frac{1}{2}$ ), ein 2-Zyklus im 3. Instabilitätsbereich ( $b = \frac{9}{8}$ ) und ein 2-Zyklus im 4. Instabilitätsbereich ( $b = 2$ ).

Um ein mögliches Mißverständnis zu vermeiden: auch wenn diese Phasenportraits, insbesondere Abb. 2.5(d), so aussehen wie die Phasenportraits des „ganzen“ DUFFING-Oszillators in Abb. 2.3, so handelt es sich hier um Bilder der engen Umgebung des seitlichen Fixpunkts bei  $(\sqrt{b})$ . Speziell bei Abb. 2.5(d) handelt es sich um eine Ausschnittsvergrößerung von Abb. 2.3(f)c. Tatsächlich sind die seitlichen Fixpunkte für  $b = 2$  (Abb. 2.3) nicht stabil.

Das Auftreten dieser neuen (stabilen) periodischen Orbits bzw. Fixpunkte läßt sich mit der Windungszahl des instabil gewordenen Fixpunkts bei  $(\sqrt{b})$  in Verbindung bringen. Im  $n$ . Instabilitätsbereich, der die horizontale Achse des Stabilitätsdiagramms bei  $b = \frac{1}{8}n^2$  berührt, beträgt die Windungszahl

$$\nu \approx \sqrt{\delta} = \sqrt{2b} = \frac{n}{2}. \quad (2.88)$$

Die Umgebung des Fixpunktes rotiert somit in 2 Perioden etwa  $n$ -mal um diesen Punkt herum. Dies läßt sich auch numerisch beobachten. So rotiert die „Hantel“



aus Abb. 2.5(d) ( $n = 4$ ) zweimal in einer Periode um den Fixpunkt herum.

Eine Windungszahl von  $\frac{r}{s}$  für einen Fixpunkt bedeutet, daß alle periodischen Orbits, die diesen „umkreisen“, in  $s$  Perioden  $r$  Umläufe durchführen. Gibt es also einen periodischen Orbit, der einen Fixpunkt mit der Windungszahl  $\frac{n}{2}$  umkreist, so führt dieser in 2 Perioden des Systems  $n$  Umläufe aus. Ist  $n$  ungerade, so erscheint dieser Orbit in der POINCARÉ-Abbildung als ein 2-Zyklus. Ist  $n$  gerade, so erkennt man 2 verschiedene 1-Zyklen der POINCARÉ-Abbildung. Genau dieser Fall liegt hier vor.

Das Entstehen des stabilen Zweizyklus wurde für ein Ein-Mulden-Potential, d.h. für  $b < 0$  und für den ersten Instabilitätsbereich bereits bewiesen [Wei52, Wei56]. Daher ist es keine Überraschung, daß der gleiche Effekt auch für jede Mulde eines Zwei-Mulden-Potentials eintritt. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Fällen liegt in einer Deformierung der beiden Mulden des Zwei-Mulden-Potentials gegenüber der einen Mulde des Ein-Mulden-Potentials. Entwickelt man das Potential (1.16) um  $q_0 = \sqrt{b}$ , berücksichtigt  $a = \frac{c}{b}$  und setzt  $\tilde{q} := q - q_0$  so ergibt sich

$$V(\tilde{q}, t) = \left(1 + \frac{c}{b} g(t)\right) \left(\frac{1}{2} \tilde{q}^4 + \sqrt{b} \tilde{q}^3 + b \tilde{q}^2 - \frac{1}{4} b^2\right). \quad (2.89)$$

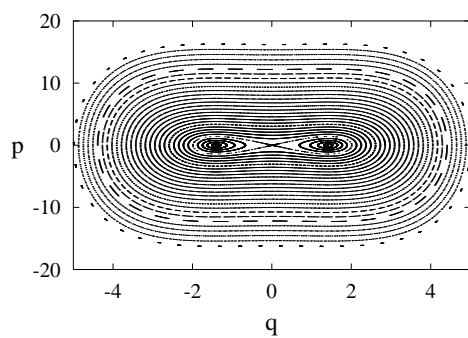
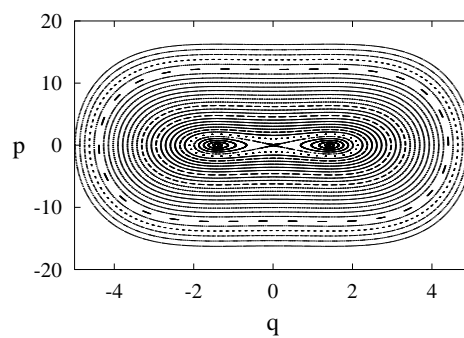
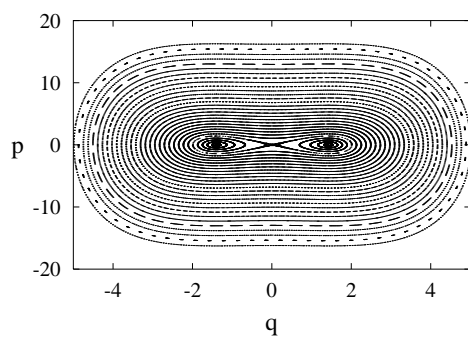
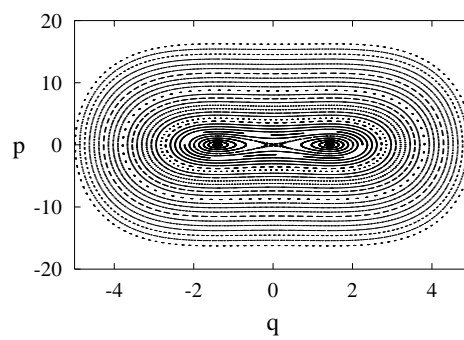
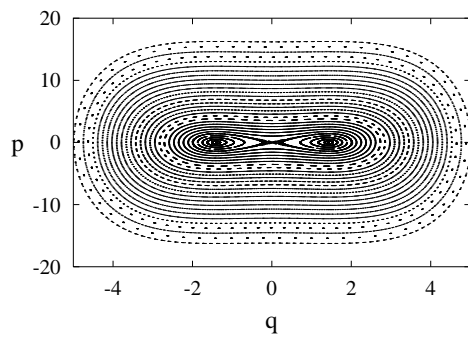
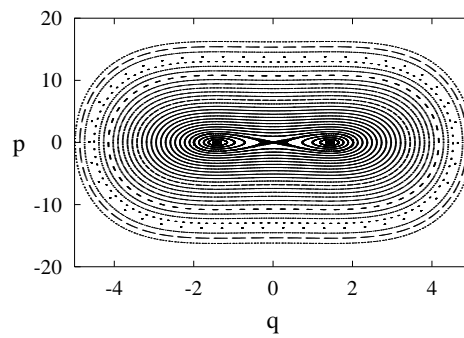
Dies ist gerade das Ein-Mulden-Potential (bis auf die genauen Vorfaktoren), das man für  $b < 0$  um  $q_0 = 0$  erhält, bis auf den  $\tilde{q}^3$ -Term, der das Potential deformiert. Daher ist es durchaus zu verstehen, daß in einer Umgebung um den Fixpunkt in einer der Mulden eine dem Ein-Mulden-Potential ähnliche Dynamik auftritt.

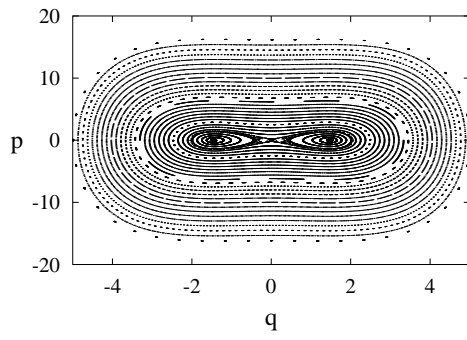
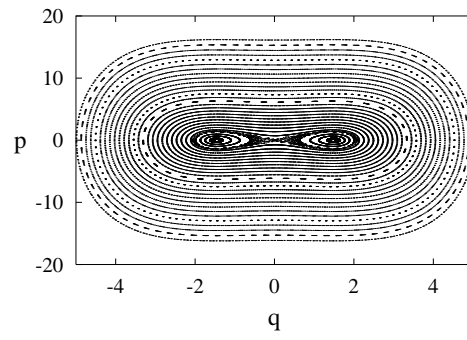
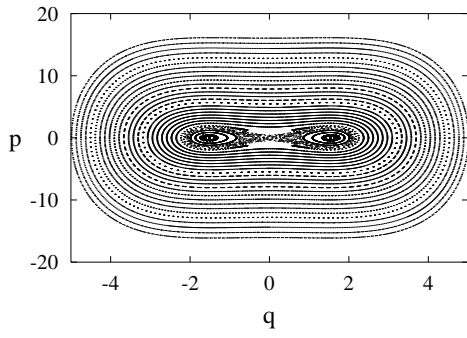
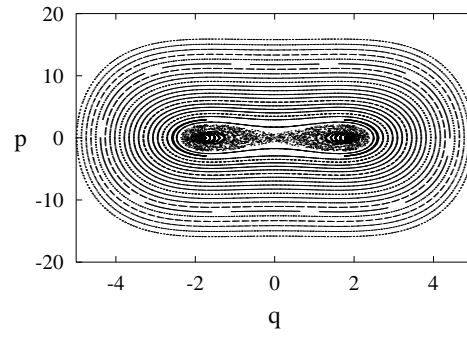
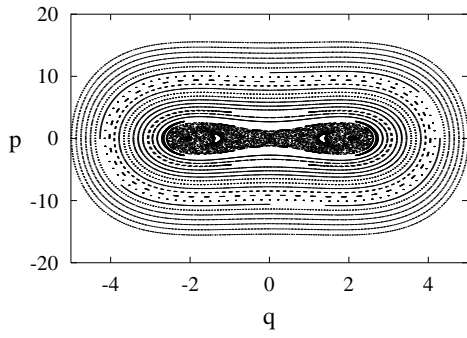
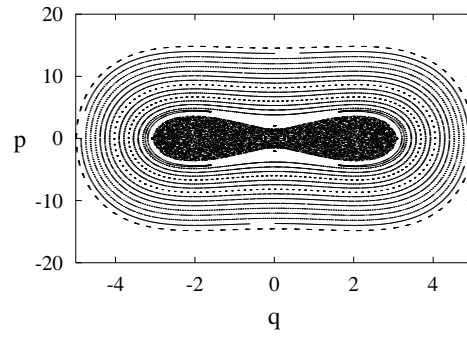
### 2.4.2 Spezialfall 2: $a = 0$

Für die Erstellung der Phasenportraits von Spezialfall 2 (1.26) wurde  $b = 2$  und  $g(t) = \cos t$  gewählt.

Die in Abb. 2.6 gezeigten Phasenportraits von Spezialfall 2 unterscheiden sich von den Phasenportraits des vorangegangenen Abschnitts in verschiedener Hinsicht. Zum einen entsprechen die Fixpunkte der POINCARÉ-Abbildung in den Potentialmulden keinen Fixpunkten, sondern periodischen Orbits des kontinuierlichen Systems. Zum anderen entstehen mit wachsender Störung  $c$  nicht zahlreiche breite Chaosbänder, die durch Orbits der Perioden 1, 2 oder 4 voneinander getrennt sind, sondern nur ein großer chaotischer Bereich, der aus dem „homoklinen Chaos“ des hyperbolischen Fixpunktes  $\mathbf{0}$  hervorgegangen ist.

Mit zunehmender Störung wächst der chaotische Bereich, wenn auch nur langsam. Die regulären Inseln um die periodischen Orbits in den Potentialmulden werden immer kleiner und verschwinden bei etwa  $c \approx 1$  schließlich ganz. Dafür dehnt sich der chaotische Bereich weiter aus und umschließt weiter außerhalb liegende reguläre Inseln zu Orbits der Perioden 1 und 2. Diese regulären Inseln schrumpfen in dem chaotischen Bereich und verschwinden schließlich. Der

(a)  $c = 0$ (b)  $c = 0.001$ (c)  $c = 0.002$ (d)  $c = 0.005$ (e)  $c = 0.01$ (f)  $c = 0.02$

(g)  $c = 0.05$ (h)  $c = 0.1$ (i)  $c = 0.2$ (j)  $c = 0.5$ (k)  $c = 1$ (l)  $c = 2$

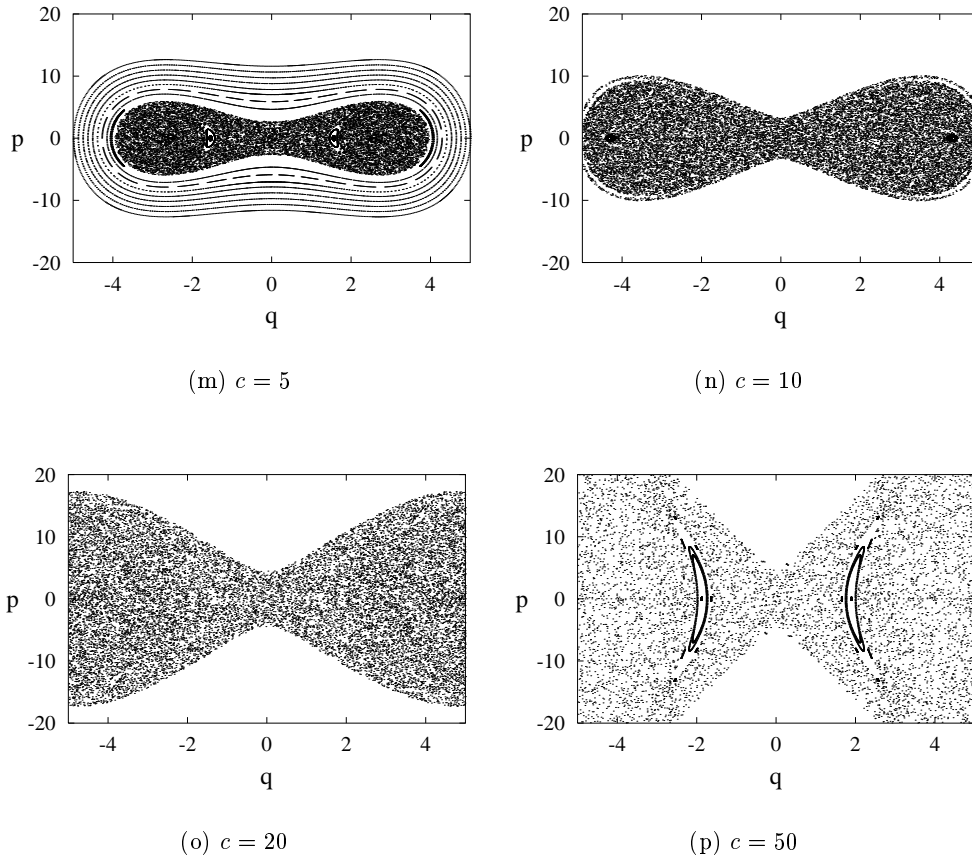


Abbildung 2.6: Phasenportraits für den Spezialfall 2 ( $a = 0$ ) mit  $b = 2$  und  $f(t) = g(t) = \cos(t)$ .

chaotische Bereich dehnt sich weiter über die nächsten regulären Inseln aus, um auch diese zu verschlucken.

Nach numerischen Untersuchungen läßt sich auch in Spezialfall 2 für die seitlichen periodischen Orbits der  $(b, c)$ -Parameterraum in stabile und instabile Bereiche einteilen. Die Instabilitätsbereiche berühren auch hier die  $b$ -Achse bei  $b = -\frac{1}{4}n^2$  für den Ursprung, bzw.  $b = \frac{1}{8}n^2$  für die seitlichen Fixpunkte  $(\pm\sqrt{b})$ . Es scheinen auch hier nach dem gleichen Muster wie in Spezialfall 1 stabile Orbits der Perioden 1 und 2 zu entstehen, wenn die seitlichen Fixpunkte instabil werden.

## 3 Quantenmechanik

In diesem Kapitel wird der ungedämpfte DUFFING-Oszillator mit parametrischer Anregung im Rahmen der *Quantenmechanik* untersucht. Von besonderer Bedeutung ist der Vergleich des *quantenmechanischen* Systems mit dem im vorigen Kapitel betrachteten *klassisch-mechanischen* System. Insbesondere geht es darum, inwiefern sich klassisch chaotisches Verhalten in der Quantenmechanik widerspiegelt und mit welchen Methoden sich dies untersuchen läßt. Anwendungen des quantenmechanischen Systems sind denkbar in der Atom- und Molekülphysik, etwa als Bewegung eines Elektron im zeitabhängigen Potential eines Moleküls, das Vibrationsschwingungen ausführt.

### 3.1 Phasenraumverteilungen

Das Hauptproblem beim Vergleich von klassischer und quantenmechanischer Dynamik ist die Tatsache, daß die klassische Mechanik im Phasenraum formuliert ist, während die Quantenmechanik z.B. nur im Orts- oder Impulsraum formuliert werden kann, aber zunächst nicht in einem von  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  aufgespannten Phasenraum. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung quantenmechanischen Systemsverhaltens stellen daher sogenannte *Phasenraumverteilungen* oder *Verteilungsfunktionen*  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  dar, welche den Zustand eines quantenmechanischen Systems in Abhängigkeit von der Zeit auf dem Phasenraum beschreiben sollen. Es gibt eine Vielzahl solcher Verteilungen, die für diesen Zweck mehr oder weniger gut geeignet sind.

#### 3.1.1 Einführung

In diesem Abschnitt soll die Idee, die hinter der Einführung der erwähnten Phasenraumverteilungen steht, erläutert werden, ohne dabei zu sehr in die Tiefe zu gehen. Eine eingehendere Diskussion findet sich z.B. in [Lee95, Eng99].

In der *Klassischen Mechanik* wird der Zustand eines Systems mit  $f$  Freiheitsgraden zu jedem Zeitpunkt durch einen Punkt im  $2f$ -dimensionalen Phasenraum charakterisiert, der den Ortsraum und den Impulsraum als Teilmenge enthält. Die zeitliche Entwicklung des Systems wird durch die kanonischen Bewegungsgleichungen beschrieben.

In der *Quantenmechanik* dagegen wird der Zustand des Systems durch eine komplexwertige Funktion auf dem  $f$ -dimensionalen Orts- oder Impulsraum<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Es gibt auch andere Darstellungen, die in diesem Fall aber nicht relevant sind.

dargestellt, deren zeitliche Entwicklung durch die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (3.1)$$

mit dem HAMILTON-Operator  $\hat{H}$  bestimmt wird. Alternativ zur Darstellung als Wellenfunktion auf dem Orts- oder Impulsraum läßt sich ein quantenmechanischer Zustand als Vektor in einem im allgemeinen unendlich-dimensionalen HILBERT-Raum auffassen, dessen zeitliche Entwicklung dann eine „Trajektorie“ in diesem Raum beschreibt. Im folgenden wird eine Theorie entwickelt, so daß trotz der Verschiedenheit des klassischen und des quantenmechanischen Formalismus ein Vergleich der beiden dynamischen Theorien möglich ist. Der Grundgedanke besteht darin, die Quantenmechanik ebenfalls in irgendeiner Form auf dem Phasenraum zu formulieren.

Innerhalb der klassischen Statistik wird die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  durch die LIOUVILLE-Gleichung

$$\frac{\partial \rho'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = \{H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \rho'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\} \quad (3.2)$$

beschrieben<sup>2</sup>. Der Erwartungswert der klassischen Observablen  $A(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  ergibt sich dann zu

$$\langle A \rangle = \iint A(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \rho'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d^f q d^f p. \quad (3.3)$$

Im folgenden sollen der Einfachheit wegen  $f = 1$  gewählt sowie ausschließlich *reine* Zustände betrachtet werden. Dann ist der statistische Operator  $\hat{\rho}$  im Zustand  $\psi$  gleich dem Projektor auf diesen Zustand.

Die Idee besteht nun darin, in der Quantenmechanik den Erwartungswert des Operators  $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p}, t)$  durch eine zu (3.3) möglichst ähnliche Gleichung auszudrücken, d.h. den Operator durch eine skalare Funktion  $A(q, p, t)$  darzustellen und eine Verteilungsfunktion  $\rho(q, p, t)$  zu finden, so daß

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Sp} (\hat{\rho} \hat{A}) = \iint A(q, p, t) \rho(q, p, t) dq dp \quad (3.4)$$

den quantenmechanischen Erwartungswert angibt.

Eine der klassischen Wahrscheinlichkeitsdichte analoge quantenmechanische Phasenraumverteilung  $\rho(q, p, t)$  für einen Zustand  $\psi(q, t)$  müßte sich als Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Phasenraum auffassen lassen, sie müßte also zumindest reell und nichtnegativ sein. Außerdem müßte sie die sogenannten „marginalen quantenmechanischen Verteilungen“ korrekt erfüllen, d.h. die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen am Ort  $q$  zu finden, während der Impuls  $p$  beliebig ist, müßte  $|\psi(q, t)|^2$  sein:

$$|\psi(q, t)|^2 = \int \rho(q, p, t) dp. \quad (3.5a)$$

---

<sup>2</sup>  $\{A, B\}$  ist definiert als  $\sum_{j=1}^f \frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial q_j} \frac{\partial A}{\partial p_j}$ .

Ebenso müßte die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen mit dem Impuls  $p$  vorzufinden,  $|\tilde{\psi}(p, t)|^2$  betragen<sup>3</sup>:

$$|\tilde{\psi}(p, t)|^2 = \int \rho(q, p, t) dq. \quad (3.5b)$$

Es ist bekannt, daß es *keinen eindeutigen* Weg gibt, die Phasenraumverteilung  $\rho(q, p, t)$  zu definieren [Lee95]. Das hängt damit zusammen, daß die quantenmechanischen Operatoren  $\hat{q}$  und  $\hat{p}$  nicht kommutieren.

Dies läßt sich leicht einsehen. Im allgemeinen gilt sicher

$$\langle \hat{q} \hat{p} \rangle \neq \langle \hat{p} \hat{q} \rangle. \quad (3.6)$$

Gäbe es eine Verteilung  $\rho$  mit den obigen Eigenschaften, so würde daraus wegen (3.4) und der Kommutativität skalarer Funktionen

$$\langle \hat{q} \hat{p} \rangle = \iint q p \rho(q, p, t) dq dp = \iint p q \rho(q, p, t) dq dp = \langle \hat{p} \hat{q} \rangle \quad (3.7)$$

folgen. Dies stellt einen Widerspruch dar. Eine Verteilungsfunktion  $\rho$ , die alle oben erwähnten Eigenschaften besitzt, kann es also nicht geben.

Das Problem liegt darin, einer klassischen Observable  $A$  eindeutig einen quantenmechanischen Operator  $\hat{A}$  (und umgekehrt) zuzuordnen. Für eine eindeutige Zuordnung ist es notwendig, eine „Zuordnungsregel“ festzulegen. Beispielsweise könnte man vom Operator  $\hat{A}$  verlangen, daß dieser eine bestimmte Operatoranordnung erfüllt, beispielsweise daß, wenn man  $\hat{A}$  nach Potenzen von  $\hat{q}$  und  $\hat{p}$  entwickelt, die Potenzen von  $\hat{q}$  vor den Potenzen von  $\hat{p}$  angeordnet sind. Diese spezielle Operatoranordnung wird als *Standardordnung* bezeichnet. Dem Operator  $\hat{q} \hat{p}$  wird danach die skalare Funktion  $q p$  zugeordnet, während dem Operator  $\hat{p} \hat{q} = \hat{q} \hat{p} + \frac{\hbar}{i}$  die skalare Funktion  $q p + \frac{\hbar}{i}$  zugeordnet wird. Die so definierte Zuordnung ist umkehrbar eindeutig.

Jeder Operator  $\hat{A}$  läßt sich nach  $e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}}$  entwickeln:

$$\hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) = \iint g(\xi, \eta) e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} d\xi d\eta. \quad (3.8)$$

Dies ist eine (physikalisch unanschauliche) FOURIER-Entwicklung nach zwei Variablen  $\xi$  und  $\eta$ . Dadurch läßt sich das Problem der Zuordnung von Operatoren zu Observablen von einem beliebigen Operator  $\hat{A}$  auf den Operator  $e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}}$  reduzieren. Man kann nun einfach durch Wahl einer beliebigen<sup>4</sup> Funktion  $f(\xi, \eta)$  eine explizite Zuordnungsregel vorgeben:

$$e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} f(\xi, \eta) \longleftrightarrow e^{i\xi q + i\eta p}, \quad (3.9)$$

---

<sup>3</sup> $\tilde{\psi}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \psi(q, t) e^{-\frac{i}{\hbar} p q} dq$  bezeichnet die FOURIER-Transformierte von  $\psi(q, t)$ . Die

Rücktransformation ist gegeben durch  $\psi(q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \tilde{\psi}(p, t) e^{\frac{i}{\hbar} p q} dp$ .

<sup>4</sup> $f(\xi, \eta)$  kann auch explizit vom jeweiligen Zustand  $\psi$  des Systems abhängen. Bei fast allen jemals untersuchten Phasenraumverteilungen ist dies aber nicht der Fall.

bzw.

$$e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} \longleftrightarrow e^{i\xi q+i\eta p} \frac{1}{f(\xi, \eta)}. \quad (3.9')$$

Wegen der BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Beziehung [Sch88]

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} \quad (3.10)$$

bedeutet das beispielsweise für die Standardordnung

$$e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} = e^{i\xi\hat{q}} e^{i\eta\hat{p}} e^{\frac{1}{2}i\hbar\xi\eta} \longleftrightarrow e^{i\xi q+i\eta p} e^{\frac{1}{2}i\hbar\xi\eta}, \quad (3.11)$$

also

$$f_S(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{2}i\hbar\xi\eta}. \quad (3.12)$$

Aus (3.4) mit  $\hat{A} := e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} f(\xi, \eta)$  und somit  $A = e^{i\xi q+i\eta p}$  ergibt sich die gesuchte Verteilungsfunktion  $\rho_f(q, p, t)$  durch Rücktransformation:

$$\rho_f(q, p, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \text{Sp} \left( \hat{\rho} e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} f(\xi, \eta) \right) e^{-i\xi q-i\eta p} d\xi d\eta. \quad (3.13)$$

Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned} \rho_f(q, p, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \iiint \psi^* \left( q' - \frac{1}{2}\eta\hbar, t \right) \psi \left( q' + \frac{1}{2}\eta\hbar, t \right) f(\xi, \eta) \\ &\quad \cdot e^{i\xi(q'-q)} e^{-i\eta p} dq' d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Der Index  $f$  drückt die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion von  $f(\xi, \eta)$  aus.

$\rho_f$  kann für viele Zuordnungsregeln auch negativ oder sogar komplex werden. Daher kann eine Phasenraumverteilung nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden. Vielmehr spricht man in diesem Fall von *Quasiwahrscheinlichkeitsverteilungen*.

Die Vorgehensweise ist also wie folgt: Man wählt eine Zuordnung  $f(\xi, \eta)$ , so daß dem (umgeordneten) Operator  $\hat{B}(\hat{q}, \hat{p}) := e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} f(\xi, \eta)$  die skalare Funktion  $B(q, p) := e^{i\xi q+i\eta p}$  zugeordnet wird. Dann entwickelt man den gewünschten Operator  $\hat{A}$  nach  $\hat{B}(\hat{q}, \hat{p})$ , d.h.

$$\hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) = \int \int \frac{g(\xi, \eta)}{f(\xi, \eta)} e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3.8')$$

ersetzt  $\hat{B}$  durch  $B(q, p)$  und berechnet dann  $A_f(q, p, t)$  durch

$$A_f(q, p, t) = \int \int \frac{g(\xi, \eta)}{f(\xi, \eta)} e^{i\xi q+i\eta p} d\xi d\eta. \quad (3.15)$$

Der Erwartungswert von  $\hat{A}$  ergibt sich dann aus  $A_f(q, p, t)$  und  $\rho_f(q, p, t)$  wie in der klassischen Statistik gemäß (3.3) als Integral über diese beiden Funktionen.

Ein Vorteil der Verwendung von Phasenraumverteilungen liegt darin, daß es dadurch möglich ist, Erwartungswerte auf klassische Weise zu berechnen, ohne den Operator-Formalismus der Quantenmechanik zu benutzen. Auch die Zeitentwicklung dieser Verteilungsfunktionen ist in vielen Fällen leichter zu erfassen, als mit der SCHRÖDINGER-Gleichung [Lee95].



### 3.1.2 Die WIGNER-Verteilung

Die 1932 von WIGNER eingeführte und nach ihm benannte Phasenraumverteilung war über lange Zeit die am häufigsten in der Literatur verwendete [Lee95]. Ihre „Zuordnungsregel“ ist

$$f(\xi, \eta) \equiv 1. \quad (3.16)$$

Sie entspricht der WEYLSchen Operatoranordnung

$$e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} \longleftrightarrow e^{i\xi q+i\eta p}. \quad (3.17)$$

Die Verteilungsfunktion ergibt sich aus (3.14) zu

$$\rho_w(q, p, t) = \frac{1}{2\pi} \int \psi^*(q - \frac{1}{2}\eta\hbar, t) \psi(q + \frac{1}{2}\eta\hbar, t) e^{-i\eta p} d\eta \quad (3.18)$$

oder mit  $\eta' := \frac{1}{2}\eta\hbar$  zu

$$\rho_w(q, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \psi^*(q - \eta', t) \psi(q + \eta', t) e^{-\frac{2i\eta' p}{\hbar}} d\eta'. \quad (3.18')$$

Die WIGNER-Verteilung erfüllt zwar (3.5), nimmt aber auch negative Werte an, so daß sie sich nicht als Wahrscheinlichkeitsverteilung auffassen läßt.

Abb. 3.1 zeigt Höhenliniendiagramme der WIGNER-Verteilung für den Grundzustand sowie den zehnten angeregten Zustand des Harmonischen Oszillators für zehn äquidistante Werte von  $\rho_w$ . Während sich für den Grundzustand, bei dem es sich sowohl in Orts- als auch in Impulsdarstellung um eine GAUSS-Funktion handelt, ebenfalls eine GAUSS-Funktion (in zwei Variablen) ergibt, sieht die WIGNER-Verteilung für den zehnten angeregten Zustand deutlich komplizierter aus. Was sich in der zweifarbigen Abbildung schlecht erkennen läßt, ist, daß die WIGNER-Verteilung von innen nach außen stark oszilliert. Starke Oszillationen sind charakteristisch für diese Phasenraumverteilung.

Für Systeme, deren Potential nur Terme bis maximal 2. Ordnung enthält, bewegt sich die WIGNER-Verteilung „klassisch“ durch den Phasenraum: Jeder Phasenraumpunkt  $(q, p)$  der WIGNER-Verteilung bewegt sich entlang einer klassischen Trajektorie. Daher läuft die WIGNER-Verteilung beim Harmonischen Oszillator wie eine klassische Wahrscheinlichkeitsdichte um den Ursprung herum. Dies ist eine spezielle Eigenschaft der WIGNER-Verteilung, die für beliebige andere Verteilungsfunktionen nicht gilt [Lee95].

Darauf beruht die „Methode der WIGNER-Trajektorien“ für Potentiale mit Termen höherer Ordnung, die sich nur gering vom Harmonischen Oszillator unterscheiden. Die Phasenraumverteilung bewegt sich in niedrigster Näherung entlang der klassischen Trajektorien. Höhere Näherungsordnungen erhält man mittels der Störungsrechnung unter Berücksichtigung quantenmechanischer Korrekturen. Bevorzugt wird dieses Verfahren für die Beschreibung von Kollisionsprozessen eingesetzt [Lee95].

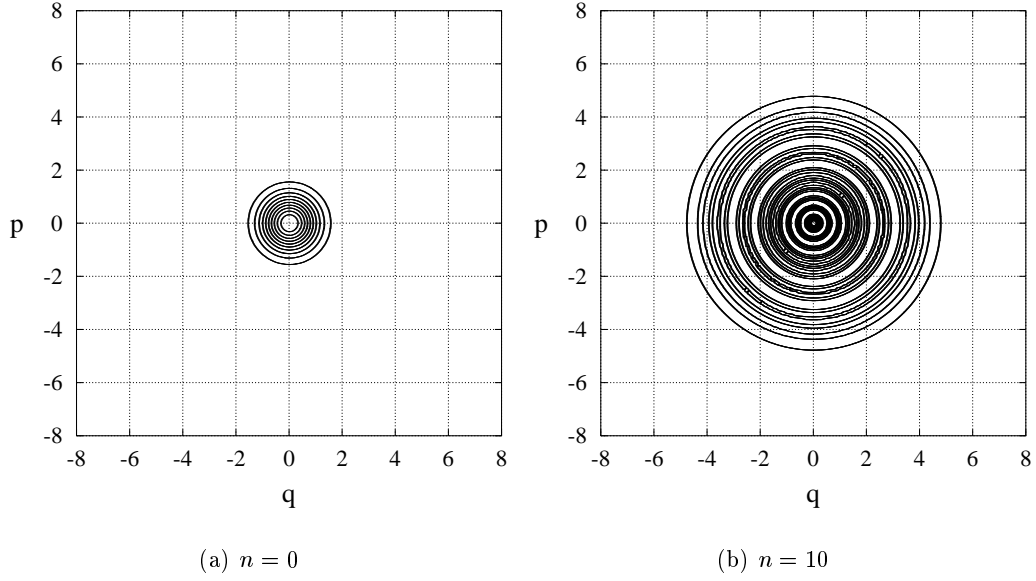


Abbildung 3.1: Höhenliniendiagramm der WIGNER-Verteilung für (a) den Grundzustand sowie (b) den zehnten angeregten Zustand des Harmonischen Oszillators mit  $\hbar = 1$ .

### 3.1.3 Die HUSIMI-Verteilung

Eine Verteilungsfunktion, die in den letzten Jahren immer mehr an Bedeutung gewonnen hat, ist die HUSIMI-Verteilung [Lee95]. Sie entspricht der Zuordnungsregel

$$f(\xi, \eta) = e^{-\frac{\hbar \xi^2}{4s} - \frac{\hbar s \eta^2}{4}} \quad (3.19)$$

mit einem frei wählbaren Parameter  $s$ .

Die HUSIMI-Verteilung ergibt sich nach (3.14) zu

$$\rho_H^s(q, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int \bar{\phi}_{q,p}^s(x) \psi(x, t) dx \right|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} |\langle \phi_{q,p}^s | \phi_{q,p}^s \rangle|^2 \quad (3.20)$$

mit

$$\phi_{q,p}^s(x) := \sqrt[4]{\frac{s}{\pi\hbar}} e^{-\frac{s(x-q)^2}{2\hbar} + \frac{ipx}{\hbar}}. \quad (3.21)$$

$\Phi_{q,p}^s$  ist eine GAUSS-Funktion mit minimalem Unschärfeprodukt, d.h. das Unschärfeprodukt aus Ortsunschärfe  $\Delta q$  und Impulsunschärfe  $\Delta p$  beträgt  $\frac{\hbar}{2}$ :

$$\Delta q = \sqrt{\frac{\hbar}{2s}}, \quad \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar s}{2}}. \quad (3.22)$$

Je größer  $s$  ist, desto kleiner ist die Orts- und desto größer ist die Impulsunschärfe der Funktion. Daher bestimmt der Parameter  $s$ , inwieweit  $\Phi_{q,p}^s$  jeweils im Orts- oder Impulsraum verbreitert ist. Man bezeichnet  $s$  als „Quetschparameter“ (squeezing parameter). Für den Erwartungswert von Ort und Impuls erhält man  $\langle \hat{q} \rangle = q$  und  $\langle \hat{p} \rangle = p$ . Aus diesem Grund wird  $\Phi_{q,p}^s$  als „GAUSS-Funktion minimaler Unschärfe am Punkt  $(\frac{q}{p})$  mit Quetschparameter  $s$ “ bezeichnet.

Die HUSIMI-Verteilung läßt sich als Übergangswahrscheinlichkeit von  $\psi(t)$  nach  $\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}}\phi_{q,p}^s$  auffassen. Offensichtlich ist diese Verteilung im Gegensatz zur WIGNER-Verteilung nicht negativ. Sie erfüllt aber nicht (3.5), so daß auch die HUSIMI-Verteilung nicht als Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte auf dem Phasenraum aufgefaßt werden kann.

Die Abbildungen 3.2, 3.3, und 3.4 zeigen Höhenliniendiagramme der HUSIMI-Verteilung für verschiedene Werte von  $s$ . Auch für die HUSIMI-Verteilung mit  $s = 1$  ergibt sich im Grundzustand des Harmonischen Oszillators eine GAUSS-Glocke (in zwei Variablen), allerdings gegenüber der WIGNER-Verteilung verbreitert. Für  $s = \frac{1}{10}$  und  $s = 10$  ist diese GAUSS-Glocke in Impuls- bzw. Ortsrichtung „gequetscht“.

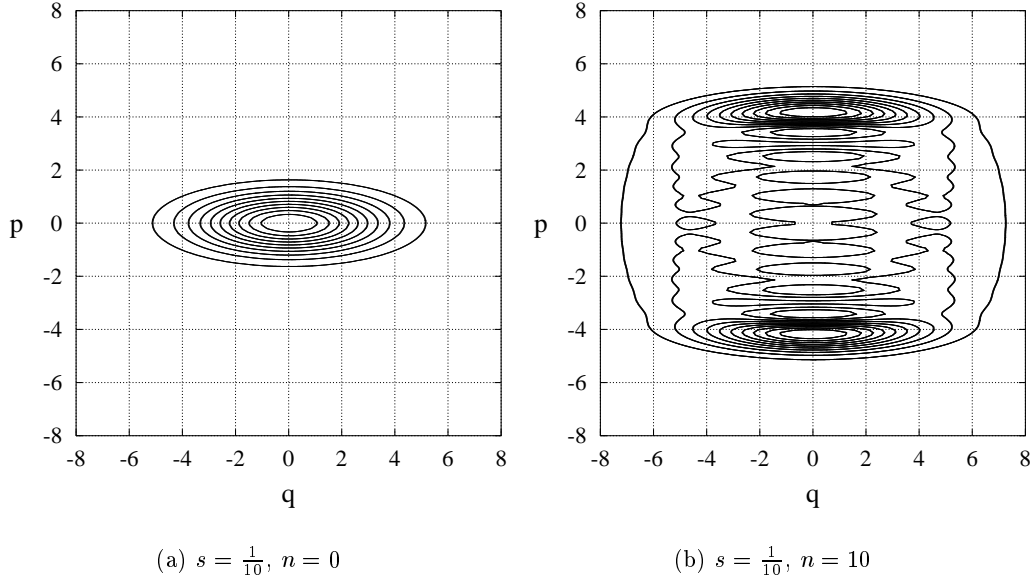


Abbildung 3.2: Höhenliniendiagramm der HUSIMI-Verteilung zum Quetschparameter  $s = \frac{1}{10}$  für (a) den Grundzustand sowie (b) den zehnten angeregten Zustand des Harmonischen Oszillators mit  $\hbar = 1$ .

Die Verbreiterung gegenüber der WIGNER-Verteilung liegt daran, daß sich die HUSIMI-Verteilung als Faltung der WIGNER-Verteilung mit einer GAUSS-Glocke

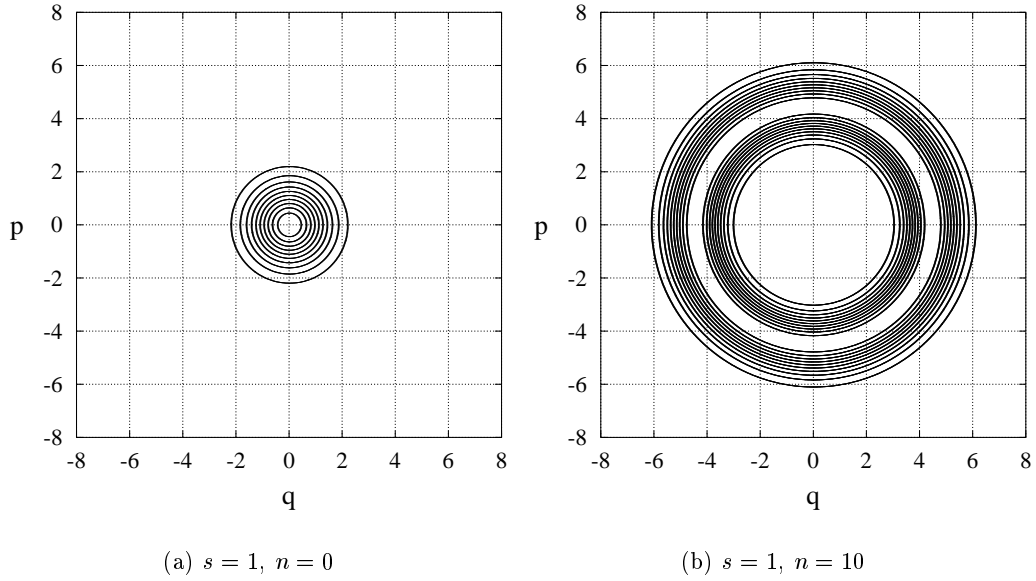


Abbildung 3.3: Höhenliniendiagramm der HUSIMI-Verteilung zum Quetschparameter  $s = 1$  für (a) den Grundzustand sowie (b) den zehnten angeregten Zustand des Harmonischen Oszillators mit  $\hbar = 1$ .

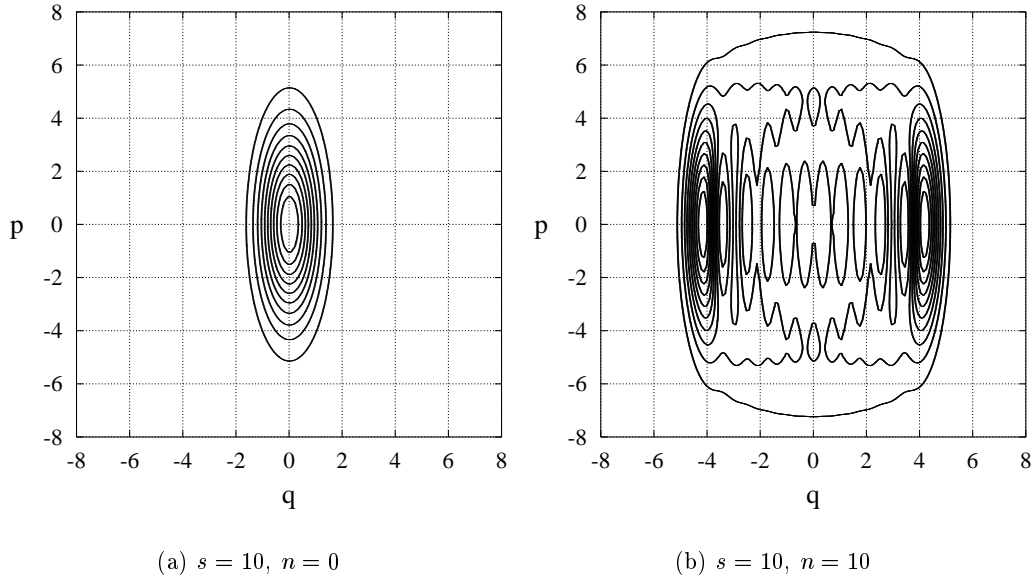


Abbildung 3.4: Höhenliniendiagramm der HUSIMI-Verteilung zum Quetschparameter  $s = 10$  für (a) den Grundzustand sowie (b) den zehnten angeregten Zustand des Harmonischen Oszillators mit  $\hbar = 1$ .

im Orts- und Impulsraum darstellen läßt:

$$\rho_H^s(q, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar} \iint e^{-\frac{s q'^2}{\hbar}} e^{-\frac{p'^2}{\hbar s}} \rho_W(q', p', t) dq' dp'. \quad (3.23)$$

Es handelt sich hierbei um eine Glättung, da die starken Oszillationen der WIGNER-Verteilung durch diesen Prozeß geglättet werden. Die HUSIMI-Verteilung besitzt daher eine vergleichsweise glatte und reguläre Gestalt.

Für  $n = 10$  und  $s = 1$  ergibt sich eine ringförmige Verteilung, die der klassischen kreisförmigen Trajektorie recht nahe kommt. Das Maximum der Verteilung liegt auf der klassischen Trajektorie. Für andere Werte von  $s$  läßt sich die Verteilung nicht so leicht interpretieren, und die Verteilung besteht aus zwei spiegelsymmetrischen Wellenbergen. Für  $s = \frac{1}{10}$  liegen die Maxima zueinander symmetrisch auf der  $p$ -Achse und für  $s = 10$  zueinander symmetrisch auf der  $q$ -Achse.

Die HUSIMI-Verteilung wird bevorzugt für Phasenraumdarstellungen nichtlinearer, klassisch chaotischer Systeme verwendet. Wenn die Dynamik eines System so komplex ist wie im Fall klassisch chaotischer Systeme, trägt eine Visualisierung dieser Dynamik wesentlich zum Verständnis der Dynamik bei. Und für die Darstellung der zeitlichen Entwicklung auf dem Phasenraum ist gerade die HUSIMI-Verteilung durch ihre relativ einfache Struktur wesentlich besser geeignet als z.B. die stark oszillierende WIGNER-Verteilung [Lee95].

### 3.1.4 Andere Verteilungsfunktionen

Neben den in den beiden vorangegangenen Abschnitten vorgestellten WIGNER- und HUSIMI-Verteilungen gibt es noch eine Vielzahl von Phasenraumverteilungen, die in der Literatur allerdings nicht so häufig diskutiert werden. Im Prinzip spielt es keine Rolle, welche Verteilungsfunktion ausgewählt wird, da alle möglichen Verteilungen die gleiche Information enthalten und durch Transformationen wie (3.23) ineinander überführt werden können [Lee95].

Natürlich empfiehlt es sich, die für das jeweilige Problem einfachste Verteilungsfunktion zu wählen. So wird in der Quantenoptik bevorzugt die *normalgeordnete* Verteilung gewählt, die auch als GLAUBER-SUDARSHAN-Verteilung oder P-Funktion bezeichnet wird. Bei dieser Phasenraumverteilung werden die Operatoren so nach den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des Harmonischen Oszillators entwickelt, daß die Potenzen des Aufsteigeoperators  $\hat{a}^\dagger$  vor den Potenzen des Absteigeoperators  $\hat{a}$  stehen. Dazu gibt es dann die *anti-normalgeordnete* Verteilung oder Q-Funktion, bei der die Potenzen von  $\hat{a}$  vor denen von  $\hat{a}^\dagger$  angeordnet sind. Ferner gehört noch die bereits erwähnte *standardgeordnete* Verteilung zu den bekannteren Verteilungen, ebenso die *anti-standardgeordnete* oder KIRKWOOD-Verteilung. Bei der ersteren stehen die Potenzen von  $\hat{q}$  vor denen von  $\hat{p}$ , bei der letzteren ist es genau andersherum [Lee95].

An dieser Stelle soll noch eine weitere Verteilungsfunktion diskutiert werden, die bereits von COHEN untersucht wurde [Coh66]. Es handelt sich dabei um

$$\rho_C(q, p, t) = |\psi(q, t)|^2 |\tilde{\psi}(p, t)|^2. \quad (3.24)$$

Diese Verteilungsfunktion ist offensichtlich reell und nicht negativ und ergibt wegen der Normierung der Wellenfunktion automatisch die korrekten marginalen quantenmechanischen Verteilungen (3.5). Die entsprechende Zuordnungsregel ist mit

$$f_C(\xi, \eta, t) = \frac{\iint |\psi(q, t)|^2 |\tilde{\psi}(p, t)|^2 e^{i\xi q + i\eta p} dp dq}{\int \tilde{\psi}(q - \frac{1}{2}\eta\hbar, t) \psi(q + \frac{1}{2}\eta\hbar, t) e^{i\xi q} dq} \quad (3.25)$$

wesentlich komplizierter als die aller anderen hier vorgestellten Verteilungsfunktionen, insbesondere da  $f_C$  explizit vom jeweiligen Zustand  $\psi(t)$  abhängt. Dies hat zur Folge, daß diese Verteilungsfunktion wegen (3.13) im Gegensatz zu allen anderen vorgestellten Phasenraumverteilungen nicht bilinear in  $\psi(t)$  ist. Dies folgt aus Gleichung (3.13), da  $f$  explizit von  $\psi(t)$  abhängt. Daraus ergeben sich weitreichende Konsequenzen: nicht nur die Verteilungsfunktion  $\rho_f$  ist dadurch vom jeweiligen Zustand des Systems abhängig, sondern auch  $A_f$  wegen (3.15). Das bedeutet, daß sich auch die skalare Funktion, die den Operator  $\hat{A}$  für diese Verteilung repräsentiert, ständig mit dem Systemzustand ändert. Daher macht es normalerweise keinen Sinn,  $\rho_C$  zu betrachten. Etwas anderes ist es natürlich, wenn die Wellenfunktion bereits (analytisch oder numerisch) vorliegt und nur die Verteilungsfunktion selbst interessiert und nicht ihre Verwendung zur Berechnung von Erwartungswerten. Ist dies wie in dieser Arbeit der Fall, so ist  $\rho_C$  die am einfachsten zu berechnende Verteilung überhaupt.

Abb. 3.5 zeigt Höhenliniendiagramme der Verteilung von COHEN für den Grundzustand und den zehnten angeregten Zustand des Harmonischen Oszillators. Auch für diese Verteilung erhält man im Grundzustand des Harmonischen Oszillators eine GAUSS-Glocke bezüglich Ort und Impuls, die identisch ist mit der WIGNER-Verteilung in Abb. 3.1(a), wie man nachrechnen kann. Für den zehnten angeregten Zustand sieht das Bild jedoch ganz anders aus. Es fallen die zahlreichen, wie auf einem Gitter angeordneten Maxima auf, die für diese Phasenraumverteilung typisch sind. Das läßt sich leicht erklären:  $\rho_C$  hat offensichtlich genau an dem Punkt  $(\frac{q}{p})$  ein Maximum, an dem  $\psi(q, t)$  und  $\tilde{\psi}(p, t)$  (vom Betrag her) ein Maximum besitzen, und genau dann eine Nullstelle, wenn  $\psi(q, t)$  oder  $\tilde{\psi}(p, t)$  eine Nullstelle besitzt. Da der zehnte angeregte Zustand des Harmonischen Oszillators sowohl in der Orts- als auch in der Impulsdarstellung genau zehn Knoten besitzt, muß diese Verteilung genau  $11 \times 11$  symmetrisch angeordnete Maxima besitzen.

## 3.2 Die zeitliche Entwicklung

### 3.2.1 Quantenmechanische Skalierung

Der HAMILTON-Operator für den ungedämpften DUFFING-Oszillator mit parametrischer Anregung ergibt sich aus der klassischen HAMILTON-Funktion (1.3) bzw. (1.12), indem die kanonisch konjugierten Variablen  $q$  und  $p$  durch ihre

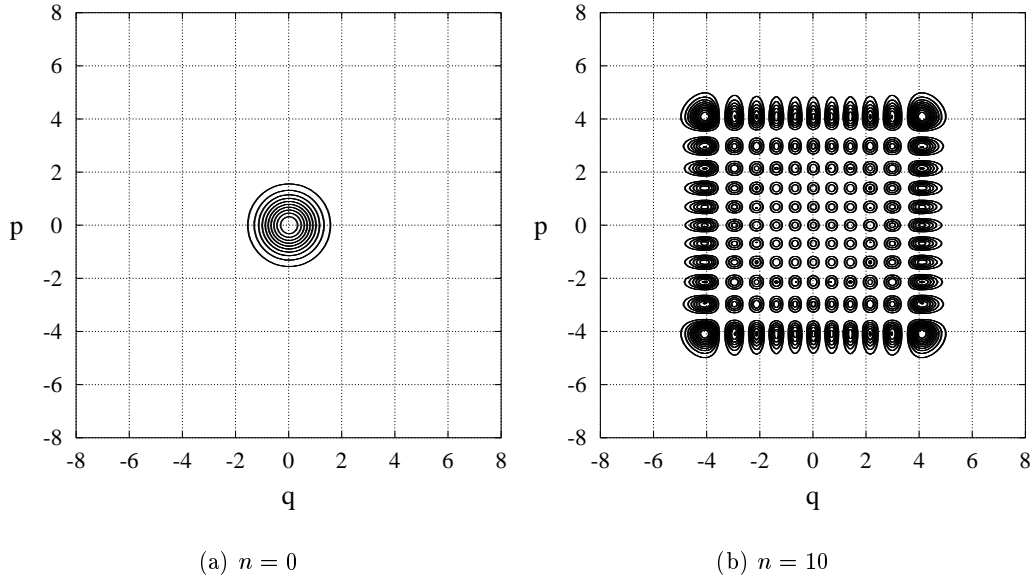


Abbildung 3.5: Höhenliniendiagramm der Verteilung von COHEN für (a) den Grundzustand sowie (b) den zehnten angeregten Zustand des Harmonischen Oszillators mit  $\hbar = 1$ .

quantenmechanischen Pendants  $\hat{q}$  und  $\hat{p}$  ersetzt werden:

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{4}(a_1 + a_2 f(\omega t)) q^4 - \frac{1}{2}(b_1 + b_2 g(\omega t)) q^2. \quad (3.26)$$

Für die Quantenmechanik kann die gleiche Skalierung (1.13) wie in der Klassischen Mechanik verwendet werden. Man erhält auch die gleichen Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  wie im klassischen Fall in (1.14). Aber nicht nur die Parameter des Systems werden durch die Skalierung beeinflusst, sondern auch Naturkonstanten. Während dies für die klassische Dynamik ohne Bedeutung ist (die kanonischen Bewegungsgleichungen hängen von keiner Naturkonstante ab), ist dies in der Quantenmechanik durchaus relevant; denn die SCHRÖDINGER-Gleichung (3.1) hängt von der PLANCK'schen Konstante  $\hbar$  ab. Bezieht man auch diese in die Skalierung ein, so erhält man:

$$\frac{a_1}{m^2 \omega^3} \hbar \quad \mapsto \quad \hbar. \quad (3.27)$$

Nach dieser Skalierung ist  $\hbar$  also von den Systemparametern abhängig und stellt in der Quantenmechanik einen zusätzlichen Parameter dar. Der Limes  $\hbar \rightarrow 0$  steht hierbei für den „klassischen Grenzfall“.

In dieser Skalierung erhält man als HAMILTON-Operator analog zu (1.15):

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{1}{4}(1 + a f(t)) \hat{q}^4 - \frac{1}{2}(b + c g(t)) \hat{q}^2. \quad (3.28)$$

### 3.2.2 Autonome Systeme: Energieeigenzustände

Für autonome Systeme, deren HAMILTON-Operator nicht explizit von der Zeit abhängt, erhält man die allgemeine Lösung der zeitabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung (3.1) durch die Lösung der zeitunabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (3.29)$$

die insgesamt abzählbar unendlich viele<sup>5</sup> Lösungen  $\phi_n$  zu den Energien  $E_n$  besitzt. Die  $\phi_n$  werden als Energieeigenzustände bezeichnet. Ihre zeitliche Entwicklung ergibt sich zu

$$\phi_n(t) = \phi_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} = \phi_n e^{-i\omega_n t} \quad (3.30)$$

mit  $\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$ . Für eine gegebene Anfangsbedingung  $\psi(0)$  ergibt sich somit die folgende Zeitentwicklung:

$$\psi(t) = \sum_n (\phi_n, \psi(0)) \phi_n e^{-i\omega_n t}. \quad (3.31)$$

### 3.2.3 Nichtautonome Systeme: Quasienergieeigenzustände

Die FLOQUET-Theorie ist im Rahmen der Physik nicht nur für die *klassische Mechanik* von Interesse, sondern auch für die *Quantenmechanik* [Zel66, Lee95, KW96]. Es gilt bei der Anwendung auf die Quantenmechanik nur zwei wesentliche Unterschiede zur „klassischen“ FLOQUET-Theorie zu beachten: Zum einen findet die Quantenmechanik auf unendlichdimensionalen Vektorräumen statt, zum anderen sind die den endlichdimensionalen Matrizen in den vorangegangenen Abschnitten entsprechenden quantenmechanischen Operatoren nicht nur *trigonalisierbar*, sondern sogar *diagonalisierbar*<sup>6</sup>.

Gegeben sei ein zeitabhängiger HAMILTON-Operator mit  $\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t) \forall t \in \mathbb{R}$ . Die Bewegungsgleichung der Quantenmechanik ist die SCHRÖDINGER-Gleichung, die als gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit  $T$ -periodischen Koeffizienten auf einem (unendlich dimensional) HILBERT-Raum aufgefaßt werden kann. Daher kann die in Anhang A beschriebene FLOQUET-Theorie auf sie angewandt werden.

Die Zeitentwicklung eines Zustands  $\psi(0)$  läßt sich formal über den Zeitordnungsoperator  $\mathcal{T}$  als

$$\psi(t) = \mathcal{T} \exp \left( \int_0^t -\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t') dt' \right) \psi(0) =: \hat{U}(t, 0) \psi(0) \quad (3.32)$$

<sup>5</sup>Die Parameter des Zwei-Mulden-Potential werden immer so gewählt, daß eine gebundene Bewegung vorliegt (siehe Abschnitt 1.2). Daher besitzt der HAMILTON-Operator ein rein diskretes Spektrum.

<sup>6</sup>Alle hier betrachteten Operatoren sind selbstadjungiert oder unitär.



angeben.  $\hat{U}(t, 0)$  ist hierbei der unitäre Zeitentwicklungsoperator. Das zweite Zeitargument, die „Startzeit“, ist im gesamten Abschnitt zu null gewählt und wird im folgenden fortgelassen.

Es gibt<sup>7</sup> einen Operator  $\mathbf{M}$  mit

$$\hat{U}(t + T) = \hat{U}(t) \mathbf{M}. \quad (3.33)$$

$\mathbf{M}$  ist gegeben durch  $\hat{U}(T)$ , dessen Eigenwerte die FLOQUET-Multiplikatoren des Systems sind.  $\hat{U}(T)$  wird auch als FLOQUET-Operator bezeichnet. Es gilt somit:

$$\hat{U}(t + T) = \hat{U}(t) \hat{U}(T). \quad (3.33')$$

Ferner gibt es<sup>8</sup> einen konstanten Operator  $\hat{R}$  sowie einen  $T$ -periodischen Operator  $\hat{P}(t)$  mit  $\hat{P}(0) = \mathbb{1}$ , so daß sich der Zeitentwicklungsoperator als

$$\hat{U}(t) = \hat{P}(t) e^{\hat{R}t} \quad (3.34)$$

schreiben läßt. Die Eigenwerte von  $\hat{R}$  sind die charakteristischen Exponenten des Systems.  $\hat{U}(T)$  ist als unitärer Operator diagonalisierbar, und die FLOQUET-Multiplikatoren  $\lambda_n$  haben den Betrag 1. Daher ist auch  $\hat{R}$  diagonalisierbar und die charakteristischen Exponenten  $\rho_n$  sind wegen  $\lambda_n = e^{\rho_n T}$  rein imaginär.  $\hat{R}$  ist also das Produkt von  $i$  mit einem reellen Operator  $\hat{R}'$ . Weil  $\hat{U}(t)$  und  $e^{\hat{R}t}$  unitär sind, muß auch  $\hat{P}(t)$  unitär sein.

**Satz 3.1.** *Es sei  $\phi_n$  eine Eigenfunktion von  $\hat{U}(T)$  zum Eigenwert  $\lambda_n = e^{\rho_n T}$ . Dann gibt es eine  $T$ -periodische Funktion  $u_n(t)$  mit*

$$\phi_n(t) = u_n(t) e^{\rho_n t}. \quad (3.35)$$

*Insbesondere gilt  $u_n(0) = \phi_n(0) = \phi_n$ .*

*Beweis.* Da  $\lambda_j$  Eigenwert von  $\hat{U}(T)$  zum Eigenvektor  $\phi_n$  ist, gilt:

$$\phi_n(T) = \hat{U}(T) \phi_n = \lambda_j \phi_n = e^{\rho_j T} \phi_n. \quad (3.36)$$

Wähle nun  $u_n(t) := e^{-\rho_n t} \phi_n(t)$ . Dann folgt aus (3.33'):

$$\begin{aligned} u_n(t + T) &= e^{-\rho_j(t+T)} \phi_n(t + T) = e^{-\rho_j(t+T)} \hat{U}(t + T) \phi_n \\ &= e^{-\rho_j(t+T)} \hat{U}(t) \hat{U}(T) \phi_n \\ &= e^{-\rho_j t} e^{-\rho_j T} \hat{U}(t) e^{\rho_j T} \phi_n = e^{-\rho_j t} \phi_n(t) \\ &= u_n(t). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Damit ist die Periodizität von  $u_n(t)$  bewiesen. □

---

<sup>7</sup>nach Satz A.2

<sup>8</sup>nach Satz A.7

Für die zeitliche Entwicklung eines Zustands  $\psi(0)$  nach den Eigenfunktionen  $\phi_n$  von  $\hat{U}(t)$  erhält man

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n, \psi(0)) \phi_n(t). \quad (3.38)$$

Dies ist eine Entwicklung mit konstanten Koeffizienten. Definiert man

$$\epsilon_n := -\frac{\hbar}{i} \rho_n, \quad (3.39)$$

so läßt sich (3.38) wegen (3.35) auch als

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n, \psi(0)) u_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_n t} \quad (3.38')$$

schreiben. Aufgrund der Ähnlichkeit dieser Gleichung zur Zeitentwicklung in autonomen Systemen (3.31) bezeichnet man  $\epsilon_n$  als *Quasienergie* und  $\phi_n(t)$  als *Quasienergiezustand* oder FLOQUET-Zustand. Der Begriff „Quasienergie“ rührt daher, daß die *reelle* Zahl  $\epsilon_j$  die Dimension einer Energie hat und nach (3.35) die Zeitentwicklung  $\phi_n(t)$  identisch ist mit der Zeitentwicklung eines „echten“ Energieeigenzustandes, außer daß die dem stationären Zustand  $\phi_n$  in (3.30) entsprechende Funktion  $u_n(t)$  periodisch von der Zeit abhängt.

Allerdings ist es nicht möglich, die  $\epsilon_j$  mit „echten“ physikalischen Energien zu identifizieren, da diese nur bis auf eine additive Konstante  $\frac{2\pi\hbar}{T}n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ , eindeutig bestimmt sind<sup>9</sup>. Es ist daher üblich, die Quasi-Energien auf das Intervall  $[0, \frac{2\pi\hbar}{T}[$  abzubilden.

**Bemerkung 3.2.** Für die Quasienergiezustände  $\phi_n(t)$  folgt aus (3.35):

$$\phi_n(t+T) = e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_n (t+T)} u_n(t+T) = e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_n T} \phi_n(t). \quad (3.40)$$

### 3.2.4 Die „quantenmechanische POINCARÉ-Abbildung“

Das Hauptproblem bei der Untersuchung von Chaos beim Übergang von der klassischen zur quantenmechanischen Beschreibung liegt in der Übertragung des klassischen Chaosbegriffes auf die Quantenmechanik. Deshalb interessiert man sich für die Charakteristika quantenmechanischer Systeme, die im klassischen Limes chaotisches Verhalten aufweisen. Für derartige Betrachtungen sind die in Abschnitt 3.1 vorgestellten Phasenraumverteilungen hilfreich, die wie die POINCARÉ-Abbildung in der Klassischen Mechanik in der Quantenmechanik Einblick in die Dynamik des Systems geben sollen. So ist es für das Verständnis der Dynamik eines quantenmechanischen Systems von großer Bedeutung, ob etwa ein Wellenpaket, das anfangs um einen elliptischen Fixpunkt lokalisiert ist, auch für alle Zeit lokalisiert bleibt.

<sup>9</sup>Bereits die charakteristischen Exponenten  $\rho_j$  sind nur bis auf eine additive Konstante  $\frac{2\pi i}{T}n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  eindeutig. Das liegt daran, daß der komplexe Logarithmus nur bis auf eine additive Konstante  $2\pi i n$  eindeutig bestimmt ist.

Man betrachtet dazu die gemittelte Phasenraumverteilung

$$\langle \rho \rangle_{q,p} := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \rho(q, p, nT) \quad (3.41)$$

über viele Perioden  $T$  des Systems hinweg. Ist  $N$  genügend groß, so kann man davon ausgehen, daß  $\langle \rho \rangle_{q,p}$  tatsächliche die gemittelte Phasenraumverteilung beschreibt, da „zufällige“ Fluktuationen in der Phasenraumverteilung herausgemittelt werden.  $\langle \rho \rangle_{q,p}$  wird auch in Analogie zur klassischen POINCARÉ-Abbildung als „quantenmechanische POINCARÉ-Abbildung“ bezeichnet, da sie direkt mit ihrem klassischen Analogon verglichen werden kann. Den invarianten Linien um einen Fixpunkt entspricht dabei eine für alle Zeit um diesen Fixpunkt herum lokalisierte Phasenraumverteilung und einem zusammenhängenden chaotischen Bereich eine mehr oder weniger gleichmäßig über diesen Bereich verteilte Phasenraumverteilung.

Im Prinzip läßt sich für die „quantenmechanische POINCARÉ-Abbildung“ jede beliebige Phasenraumverteilung verwenden, bevorzugt wird aber die HUSIMI-Verteilung wegen ihrer im Vergleich zu allen anderen Verteilungen einfachen und übersichtlichen Struktur [Lee95].

## 3.3 Quantenchaos

### 3.3.1 Definition von Quantenchaos

Der Begriff „Chaos“ in der Klassischen Mechanik beruht im wesentlichen auf der sensiblen Abhängigkeit des Verlaufs der Trajektorien von den Anfangsbedingungen, verbunden mit der Transitivität dieser Trajektorien (Definition 2.7). Offensichtlich läßt sich diese Definition nicht direkt auf die Quantenmechanik übertragen. Zum einen liegt das daran, daß die Quantenmechanik nicht auf dem Phasenraum definiert ist. Dieses Problem läßt sich, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, durch Einführung von Phasenraumverteilungen umgehen. Zum anderen läßt sich ein quantenmechanischer Zustand nicht durch einen Punkt  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  im Phasenraum beschreiben, sondern nur durch eine Verteilungsfunktion. Eine solche Verteilungsfunktion ist im allgemeinen über den ganzen Phasenraum verteilt. Damit ist klar, daß es nicht viel Sinn macht zu fragen, ob diese Verteilungsfunktion im Laufe der Zeit einen Bereich des Phasenraums dicht ausfüllt oder ob zwei „dicht benachbart gestartete Verteilungen“ für alle Zeit benachbart bleiben oder nicht.

Es wurden in der Vergangenheit auch Zweifel geäußert, ob ein quantenmechanisches System überhaupt ein irgendwie geartetes chaotisches Verhalten zeigen kann; denn die SCHRÖDINGER-Gleichung (3.1) ist im Gegensatz zu den kanonischen Bewegungsgleichungen immer linear. Im Fall eines endlich-dimensionalen HILBERT-Raums stellt sich die Zeitentwicklung eines Zustands als endliche Sum-

me

$$\psi(t) = \sum_n a_n(t) \phi_n \quad (3.42)$$

in der gewählten Basis  $\{\phi_n\}$  dar, und die zugehörige SCHRÖDINGER-Gleichung ist ein endlich-dimensionales System gekoppelter linearer Differentialgleichungen für  $a_n$ . Durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil von  $a_n$  erhält man die kanonischen Bewegungsgleichungen eines klassischen  $n$ -dimensionalen Harmonischen Oszillators, der sicherlich nicht chaotisch ist [KW96].

Andererseits ist die Klassische Mechanik ein Grenzfall der Quantenmechanik im Limes  $\hbar \rightarrow 0$ . Von daher ist durchaus zu erwarten, daß chaotische Dynamik in irgendeiner Form auch in der Quantenmechanik auftritt.

Das Ziel bei der Erforschung von quantenmechanischem Chaos besteht nun darin, die speziellen Eigenschaften von quantenmechanischen Systemen zu untersuchen, deren klassische Pendant eine chaotische Dynamik aufweisen [Ely88]. Man spricht daher in der Regel von *Quantenchaos*, wenn das zugehörige klassische System chaotisches Verhalten aufweist.

Ist ein klassisches System mit  $f$  Freiheitsgraden integrabel, d.h. gibt es  $f$  unabhängige Integrale der Bewegung, so nennt man das zugehörige quantenmechanische System *regulär*. In vielen Fällen ist dann auch das quantenmechanische System integrabel, d.h. es gibt  $f$  Operatoren  $\hat{F}_i$ , die paarweise miteinander kommutieren. Falls eine klassische Erhaltungsgröße  $F(q, p)$  aus Termen des Typs  $q^m p^n$  besteht, so muß der zugehörige Operator  $\hat{F}(\hat{q}, \hat{p})$  nicht notwendigerweise mit dem HAMILTON-Operator vertauschen, da  $\hat{q}$  und  $\hat{p}$  nicht kommutieren [Ely88].

Es zeigt sich, daß klassisch chaotische Dynamik zu starken Fluktuationen im (Quasi-) Energiespektrum des quantenmechanischen Systems führt. Daher ist das Verständnis dieser Fluktuationen von großer Bedeutung für das Verständnis der quantenmechanischen Dynamik chaotischer Systeme. Von Bedeutung sind ferner die (Quasi-) Energiezustände des quantenmechanischen Systems. Dabei ruht ein besonderes Augenmerk auf ihrer Lokalisierung im Phasenraum. Ein weiteres Augenmerk liegt auf der zeitlichen Entwicklung von nicht (quasi-) stationären Zuständen, inwiefern sich nämlich ein beliebiges Wellenpaket zeitlich entwickelt und inwieweit diese Entwicklung von der klassischen Aufteilung des Phasenraums in reguläre und chaotische Bereiche beeinflußt wird. Diesen drei Fragestellungen wird in den folgenden Abschnitten nachgegangen, um den Begriff des Quantenchaos etwas konkreter zu fassen. Dabei geht es dann auch um Kriterien, die es ermöglichen, reguläre von chaotischer Dynamik in der Quantenmechanik zu unterscheiden. Solche Kriterien werden *Quantenchaos-Kriterien* genannt [Ely88].

Im folgenden wird des öfteren auf die Unterscheidung zwischen Energiezuständen und Quasienergiezuständen durch Fortlassen der Vorsilbe „Quasi“ verzichtet. Dies dient allein der Vereinfachung der Nomenklatur. Sofern nicht explizit etwas anderes angegeben wird, beziehen sich alle folgenden Aussagen sowohl auf autonome als auch auf nichtautonome Systeme.

Für den Grenzfall rein regulärer und rein chaotischer Systeme existieren bereits *semiklassische* Theorien, die deren Verhalten im wesentlichen beschreiben. Als semiklassische Mechanik bezeichnet man eine Wellenmechanik, die fest auf der klassischen Dynamik basiert. Sogenannte „gemischte“ Systeme, bei denen Gebiete der Regularität und des Chaos nebeneinander existieren, wie dies beim in dieser Arbeit untersuchten DUFFING-Oszillator mit parametrischer Anregung der Fall ist, haben sich bis heute einer semiklassischen Formulierung als unzugänglich erwiesen [FD98].

Eine Ziel der Quantenchaos-Kriterien ist es, zwischen den zwei folgenden Annahmen zu entscheiden [Ely88]:

- (i) Quantenchaos ist eine Eigenschaft eines einzelnen Eigenzustands.
- (ii) Quantenchaos ist eine Eigenschaft einer Gruppe von Eigenzuständen mit näherungsweise gleichen Eigenenergien.

Im ersten Fall läßt sich für einen einzelnen Zustand sagen, ob dieser regulär oder chaotisch ist. Das bedeutet insbesondere, daß ein stationärer, also *zeitperiodischer* Zustand in irgendeiner Form chaotische Dynamik beschreiben kann. Im zweiten Fall ist nicht ein einzelner Eigenzustand chaotisch, sondern die chaotische Dynamik tritt in der Quantenmechanik erst durch das Zusammenwirken vieler Eigenzustände auf.

Nach dem derzeitigen Stand der Forschung scheint der erste Fall zuzutreffen [BTU93]. Danach besitzt PERCIVAL's semiklassisches Klassifikationsschema im wesentlichen Gültigkeit. Dieses besagt, daß es zwei Arten von Eigenzuständen gibt, nämlich *reguläre* und *irreguläre*. Reguläre Zustände, die zu einem regulären Energiespektrum gehören, entsprechen quasiperiodischer Bewegung des klassischen Systems. Jeder reguläre Zustand läßt sich eindeutig durch einen Satz aus  $f$  Quantenzahlen beschreiben. Ferner sind die Matrixelemente von Operatoren durch Auswahlregeln limitiert. Irreguläre Zustände dagegen, die zu einem irregulären Energiespektrum gehören, entsprechen chaotischer Bewegung des klassischen Systems. Sie lassen sich *nicht* durch einen Satz von Quantenzahlen beschreiben, und auch für die Matrixelemente von Operatoren gibt es keine Auswahlregeln [Ely88].

### 3.3.2 Das (Quasi-) Energiespektrum

Das Energiespektrum eines quantenmechanischen Systems hat sich als ein wesentlicher Schlüssel zum Verständnis chaotischer Dynamik herausgestellt. Es hat sich nämlich gezeigt, daß die Energien, die zu chaotischen Energiezuständen gehören, stark in Abhängigkeit von den Systemparametern fluktuieren und andere Verteilungen aufweisen als die Energien von regulären Energiezuständen [Ely88, Haa91, BTU93].

Es bezeichne  $N(E)$  die Zustandsdichte und

$$S_n = (E_n - E_{n-1}) N(E_n) \quad (3.43)$$

den relativen Abstand zwischen den benachbarten Eigenenergien  $E_{n-1}$  und  $E_n$  [Ely88]. Die Verteilungsfunktion  $\rho(S)$  der Größe  $S$  ist durch die Bedingungen

$$\int_0^\infty \rho(S) dS = 1 \quad (3.44a)$$

und

$$\int_0^\infty S \rho(S) dS = 1 \quad (3.44b)$$

normiert. (3.44b) bedeutet, daß der mittlere Abstand benachbarter Energieniveaus auf 1 normiert ist.

Reguläre und chaotische Systeme unterscheiden sich deutlich in der Form von  $\rho(S)$ . Für reguläre Systeme erhält man eine POISSON-Verteilung, d.h. es gilt

$$\rho_P(S) = e^{-S}. \quad (3.45)$$

Das entspricht der Annahme, daß die Eigenenergien nicht korreliert sind. Man vermutet, daß dies im allgemeinen der Fall ist, auch wenn es einzelne Fälle gibt (z.B. den mehrdimensionalen Harmonischen Oszillator), in denen die Eigenenergien stark korreliert sind.

Für rein chaotische Systeme stellt sich heraus, daß die Energieniveaus so korreliert sind, daß für  $S \rightarrow 0$  die Verteilung  $\rho(S)$  gegen 0 geht. Das bedeutet, daß ein beliebig kleiner Abstand benachbarter Energieniveaus beliebig unwahrscheinlich ist. Diese Eigenschaft chaotischer Spektren bezeichnet man als *Level-Abstoßung* (level repulsion) [Ely88, BTU93]. Sie tritt bei autonomen und nichtautonomen Systemen gleichermaßen auf [SDK<sup>+</sup>87, Haa91].

Es gibt drei verschiedene Arten von Level-Abstoßung: lineare, quadratische und quartische. Lineare Level-Abstoßung entspricht einer WIGNER-Verteilung:

$$\rho_O(S) = \frac{\pi}{2} S e^{-\frac{\pi}{4} S^2}. \quad (3.46)$$

Bei quadratischer Level-Abstoßung erhält man:

$$\rho_U(S) = \frac{32}{\pi^2} S^2 e^{-\frac{4}{\pi} S^2}, \quad (3.47)$$

und bei quartischer Level-Abstoßung:

$$\rho_S(S) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} S^4 e^{-\frac{64}{9\pi} S^2}. \quad (3.48)$$

Es hat sich gezeigt, daß die Verteilung der Energieniveaus eines chaotischen Systems einzig von allgemeinen Raum-Zeit-Symmetrien abhängt [SDK<sup>+</sup>87, Haa91]. Eine lineare Level-Abstoßung ergibt sich, falls eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:

1. Es gibt mindestens eine antiunitäre Symmetrie, d.h. einen antiunitären<sup>10</sup> Operator  $\mathcal{T}$  mit  $\mathcal{T} \hat{H} \mathcal{T}^{-1} = \hat{H}$  für autonome Systeme, bzw.  $\mathcal{T} \hat{U}(T) \mathcal{T}^{-1} = \hat{U}^\dagger(T)$  für nichtautonome Systeme, und für alle antiunitären Symmetrien des Systems gilt:  $\mathcal{T}^2 = \mathbb{1}$ . Der Zeitumkehroperator ist beispielsweise ein antiunitärer Operator. Daher fallen die meisten zeitumkehrinvarianten Systeme in diese Kategorie.
2. Es gibt eine antiunitäre Symmetrie  $\mathcal{T}$  mit  $\mathcal{T}^2 = \mathbb{1}$  in Verbindung mit hoher räumlicher Symmetrie. Der Zeitumkehroperator für Spin- $\frac{1}{2}$ -Systeme hat beispielsweise die Eigenschaft  $\mathcal{T}^2 = -\mathbb{1}$  [Haa91].

Der ungedämpfte DUFFING-Oszillator mit parametrischer Anregung sollte eine lineare Level-Abstoßung zeigen, da er zeitumkehrinvariant ist, falls die Anregungsfunktionen  $f(t)$  und  $g(t)$  zeitumkehrinvariant sind (vgl. Gleichung 3.28).

Eine quadratische Level-Abstoßung erhält man in den folgenden Fällen:

1. Das System hat *keine* antiunitäre Symmetrie  $\mathcal{T}$ . Dies ist quasi der „generische Fall“.
2. Es gibt eine antiunitäre Symmetrie  $\mathcal{T}$  mit  $\mathcal{T}^2 = -\mathbb{1}$  sowie eine Parität  $\mathcal{P}$  mit  $\mathcal{P}^2 = -\mathbb{1}$  und  $[\mathcal{T}, \mathcal{P}] = 0$ .

Zur quartischen Level-Abstoßung kommt es im Fall der sogenannten KRAMERSchen Entartung:

1. Das besitzt eine antiunitäre Symmetrie  $\mathcal{T}$  mit  $\mathcal{T}^2 = \mathbb{1}$ , aber keine geometrische Symmetrie.

Es stellt sich nun die Frage, welche Verteilung sogenannte „gemischte Systeme“ zeigen, d.h. Systeme, die sowohl reguläre also auch chaotische Dynamik aufweisen. Eine diskutierte Möglichkeit besteht darin, daß die gesuchte Verteilung von der POISSON-Verteilung  $\rho_p$  für den integrablen Fall stetig mit zunehmendem Chaos in die WIGNER-Verteilung  $\rho_o$  bzw. in  $\rho_v$  übergeht. Dies scheint allerdings nicht der Fall zu sein [Ely88].

Es gibt auch die Möglichkeit, daß sich, wie bereits erwähnt, die Eigenzustände eines Systems nach regulären und irregulären, d.h. chaotischen Zuständen klassifizieren lassen. Die regulären Zustände erzeugen dann ein POISSON-verteiltes und die irregulären Zustände (im zeitumkehrinvarianten Fall) ein WIGNER-verteiltes Spektrum. Das gesamte Spektrum des Systems besteht dann aus einer Überlagerung der beiden Einzelspektren. Diese Idee wird manchmal als BERRY-ROBNIK-*Vermutung* bezeichnet [BTU93].

Es hat sich gezeigt, daß die Spektren *autonomer*, chaotischer Systeme die gleichen Fluktuationen aufweisen wie gewisse Ensembles von hermiteschen *Zufallsmatrizen*. Und zwar erhält man für sogenannte GAUSSsche Orthogonale Ensembles (GOE) die Verteilung  $\rho_o$ , für GAUSSsche Unitäre Ensembles (GUE)

<sup>10</sup>Ein Operator  $\hat{A}$  heißt antiunitär, falls  $(\hat{A}\psi, \hat{A}\phi) = (\psi, \phi)^*$  für alle Zustände  $\psi, \phi$  erfüllt ist.

die Verteilung  $\rho_U$  und für GAUSSsche Symplektische Ensembles (GSE) die Verteilung  $\rho_S$  [Haa91].

Eine Matrix aus einem GOE beispielsweise besteht aus unabhängigen, bei null zentrierten, GAUSS-verteilten reellen Matrixelementen, die alle dieselbe Varianz besitzen, mit Ausnahme der Diagonalelemente, deren Varianz doppelt so groß ist [BTU93]. Die Varianzen selbst werden systemabhängig gewählt. Man benutzt nun solche Matrizen als HAMILTON-Operator und untersucht das Spektrum mit den Mitteln der Statistik. Für rein chaotische Systeme ergeben sich gute Übereinstimmungen mit dem statistischen Verhalten des tatsächlichen Spektrums.

In einem gemischten System blendet man den Anteil der regulären Eigenzustände des Spektrums aus und beschreibt den Anteil der chaotischen Eigenzustände am Spektrum, auch kurz „chaotisches Spektrum“ genannt, mit Hilfe von GOE. Implizit wird damit angenommen, daß der chaotische Bereich des Phasenraumes homogen und eigenschaftslos ist.

Genauere Untersuchungen zeigen, daß die BERRY-ROBNIK-Vermutung in dieser Form nicht zutrifft [BTU93]. Der gesamte chaotische Bereich des Phasenraum läßt sich nämlich nicht durch ein einzelnes GOE beschreiben. Die läßt sich dadurch erklären, daß der chaotische Phasenraumbereich nicht völlig strukturlos ist. Es können sogenannte „partielle Transportbarrieren“ existieren, die den freien Fluß behindern. Man kann sich das im Prinzip wie zwei chaotische Billards vorstellen, die durch eine kleine Öffnung miteinander verbunden werden. Es entsteht ein einziger zusammenhängender Chaosbereich, aber dennoch ist der Phasenraumfluß durch die kleine Öffnung behindert, da in einer Zeit, die ausreicht, um das Phasenraumvolumen des einen Billards vollständig zu „vermischen“, nur ein relativ kleines Volumen zwischen den beiden Billards ausgetauscht werden kann. So kann sehr starkes lokales Chaos mit einer großräumigen Korrelation über lange Zeitskalen koexistieren. Die kleine Öffnung bildet also eine Transportbarriere für den Fluß, aber keine totale, wie etwa ein invarianter Torus, sondern eine partielle; denn nach endlicher Zeit werden irgendwann die beiden Phasenraumvolumina der Billards völlig vermischt sein.

Derartige partielle Barrieren können beispielsweise durch zerfallene invariante Tori, sogenannte „Cantori“, sowie stabile und instabile Mannigfaltigkeiten von Inselketten, die den Phasenraumfluß behindern, verursacht werden [BTU93]. Auf die genauen Einzelheiten soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden, da das im Rahmen dieser Arbeit zu weit führen würde. Wesentlich ist aber, daß der chaotische Bereich des Phasenraumes in verschiedene Bereiche zerfallen kann, die durch solche partiellen Transportbarrieren voneinander getrennt sind, so daß innerhalb des chaotischen Bereichs über lange Zeit großräumige Korrelationen existieren, die die quantenmechanischen Eigenfunktionen und Eigenenergien merklich beeinflussen.

Daher bietet es sich an, statt nur eines GOE eins für jeden dieser Phasenraumbereiche in den HAMILTON-Operator einzufügen, der dann aus  $n$  Blöcken von GOE-Matrizen auf der Diagonalen besteht. Diese Matrixblöcke werden durch



kleine Matrixelemente miteinander verkoppelt, deren Eigenschaften durch den klassischen Phasenraumfluß bestimmt werden. Diese Methode bringt recht gute Ergebnisse [BTU93].

Es gibt auch andere statistische Eigenschaften chaotischer Spektren, die untersucht werden, auf die an dieser Stelle allerdings nicht weiter eingegangen werden soll [Ely88, BTU93].

Für *nichtautonome* Systeme betrachtet man anstatt des (zeitabhängigen) HAMILTON-Operators den FLOQUET-Operator  $\hat{U}(T)$ , dessen Spektrum die gleichen statistischen Eigenschaften besitzt wie sogenannte Zirkulare Orthogonale (COE), Zirkulare Unitäre (CUE) bzw. Zirkulare Symplektische Ensembles (CSE). Es handelt sich hierbei um Ensembles von unitären Zufallsmatrizen, deren Quasienergiespektren die gleichen Eigenschaften wie die oben diskutierten GOE, GUE und GSE aufweisen [Haa91].

### 3.3.3 Eigenschaften stationärer Zustände

Es läßt sich zeigen, daß im Limes  $\hbar \rightarrow 0$  die Eigenfunktionen des HAMILTON-Operators in Bereichen des Phasenraumes lokalisiert sind, die unter der klassischen Dynamik invariante Mengen umfassen, nämlich in Bereichen regulärer oder chaotischer Dynamik [Ely88].

In diesem Sinne kann man dann von regulären und irregulären Zuständen sprechen. Eine typische Eigenschaft irregulärer Zustände ist ihre breite „Verteilung“ über viele Eigenzustände in verschiedenen Basissystemen. Nimmt man beispielsweise die Eigenfunktionen  $\phi_n$  des Harmonischen Oszillators oder die Eigenfunktionen des ungestörten Systems<sup>11</sup> und entwickelt einen irregulären Eigenzustand

$$\psi_c = \sum_n a_n \phi_n \quad (3.49)$$

danach, so liegen in der Regel viele Entwicklungskoeffizienten in der gleichen Größenordnung, der Zustand ist somit über viele Basiszustände „verteilt“. Ein Maß dafür liefert die Entropie

$$\mathcal{S} = - \sum_n |a_n|^2 \ln |a_n|^2, \quad (3.50)$$

die die Lokalisierung des Zustands in der gewählten Basis angibt. Die Anzahl der involvierten Zustände beträgt etwa  $e^{\mathcal{S}}$  [Ely88]. Allerdings ist eine große Entropie kein Beweis für Chaos. Es bedeutet nur, daß  $\psi_c$  von den gewählten Basiszuständen sehr verschieden ist.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch in der Phasenraumdarstellung mittels der in Abschnitt 3.1 besprochenen Phasenraumverteilungen anstellen. Dort ist

<sup>11</sup>Falls das betrachtete System in Abhängigkeit von einem Parameter von Integrabilität in Chaos übergeht, so kann man den integrablen Fall als das „ungestörte“ System betrachten.

ein chaotischer Zustand in der Regel über den ganzen chaotischen Phasenraumbereich verteilt (mit einer Reihe von lokalen Maxima und Minima). Analog läßt sich auch dort eine Entropie

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2\pi\hbar} \int \rho_H(q, p) \ln \rho_H(q, p) dq dp \quad (3.51)$$

definieren, für die  $e^{\mathcal{S}}$  die Anzahl der involvierten Zustände minimaler Unschärfe  $\Delta q \Delta p$  angibt [KW96].  $\rho_H$  bezeichnet dabei die HUSIMI-Verteilung.

### 3.3.4 Eigenschaften nichtstationärer Zustände

Aus der zeitlichen Entwicklung nichtstationärer Zustände, im einfachsten Fall zu einem Zeitpunkt irgendwo im Phasenraum lokalisierter Wellenpakete, kann man auch Informationen gewinnen. Wählt man als Anfangsbedingung ein Wellenpaket  $\psi(0)$ , so entwickelt sich dies in der Eigenbasis des Systems gemäß (3.31) für autonome Systeme bzw. (3.38) für nichtautonome, periodische Systeme. Unabhängig davon, ob die Zeitentwicklung durch reguläre oder irreguläre Eigenzustände des Systems beschrieben wird, sind die beteiligten Frequenzen  $\frac{E_i}{\hbar}$  bzw.  $\frac{\epsilon_i}{\hbar}$  diskret. Das steht im Gegensatz zur klassischen Mechanik, in der das Frequenzspektrum der Autokorrelationsfunktion für chaotische Dynamik kontinuierlich ist, also überabzählbar viele Frequenzen enthält.

Auch in der Quantenmechanik läßt sich eine Autokorrelationsfunktion definieren, und zwar durch

$$C_\psi(t) = (\psi(0), \psi(t)). \quad (3.52)$$

Das Frequenzspektrum der Autokorrelationsfunktion enthält genau diejenigen Frequenzen, die in die Dynamik von  $\psi(t)$  involviert sind [KW96]. Die Autokorrelationsfunktion stellt daher eine einfache Methode dar, Informationen über das Energiespektrum eines Systems zu sammeln.

Die Funktion

$$P(t) = |C_\psi(t)|^2 \quad (3.53)$$

wird als „Rückkehr-Wahrscheinlichkeit“ (recurrence probability) bezeichnet [KW96].  $P(t) = 1$  bedeutet, daß  $\psi(t)$  mit  $\psi(0)$  identisch ist. Aus einem diskreten Quantenspektrum folgt, daß für jede Wellenfunktion die Rückkehr-Wahrscheinlichkeit  $P(t)$  im Laufe der Zeit beliebig nahe an 1 herankommt [Ely88].

## 3.4 Der quantenmechanische Tunneleffekt

Ein quantenmechanischer Effekt, für den es kein klassisches Analogon gibt, ist der *Tunneleffekt*, bei dem ein Wellenpaket aus einem klassisch erlaubten Bereich

durch einen klassisch verbotenen Bereich in einen anderen klassisch erlaubten Bereich tunnelt. Am bekanntesten ist der Tunneleffekt zwischen *Energiebarrieren*, bei dem die Wellenfunktion durch eine Potentialbarriere, einen *energetisch* verbotenen Bereich tunnelt. Findet der Tunneleffekt zwischen zwei Gebieten statt, die nicht durch eine Energiebarriere getrennt sind, sondern deren klassische Dynamik durch irgendeine andere Erhaltungsgröße getrennt verläuft, z.B. durch eine Drehimpulsbarriere, so spricht man von *dynamischem Tunneln*. In den meisten Fällen ist es jedoch nicht möglich, explizit eine klassische Erhaltungsgröße nennen, die durch den Tunneleffekt verletzt wird.

### 3.4.1 Die EBK-Quantisierung

Für das Verständnis des Tunneleffektes zwischen verschiedenen Regularitätsbereichen und auch für das Verständnis der quantenmechanischen Dynamik in gemischten Systemen bildet die EINSTEIN-BRILLOUIN-KELLER-Quantisierung ein wichtiges Werkzeug. Die EBK-Quantisierung ist eine Erweiterung der BOHR-SOMMERFELD-Quantisierung auf nichtseparable Systeme [Kel58, Per77]. Es handelt sich dabei um eine semiklassische Theorie, d.h. es wird mittels der klassischen Dynamik eines Systems die quantenmechanische Dynamik näherungsweise beschrieben.

Gegeben sei ein System mit  $f$  Freiheitsgraden und der HAMILTON-Funktion  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , und sei  $\psi(\mathbf{q}, t)$  eine Lösung der entsprechenden SCHRÖDINGER-Gleichung. Es soll angenommen werden, daß sich  $\psi$  näherungsweise durch eine endliche Summe

$$\psi_0(\mathbf{q}, t) = \sum_{k=1}^r A_k(\mathbf{q}, t) e^{\frac{i}{\hbar} S_k(\mathbf{q}, t)} \quad (3.54)$$

beschreiben läßt.  $S_k$  und  $A_k$  sollen dabei ausschließlich durch die klassische Dynamik bestimmt sein. Während  $\psi_0$  natürlich eine eindeutige Funktion darstellt, können  $S_k$  und  $A_k$  mehrdeutig sein. Das muß man sich in etwa so vorstellen, daß beispielsweise für ein Teilchen der Masse  $m$  in einem eindimensionalen, zeitunabhängigen Potential der Impuls  $p(q) = \pm \sqrt{2m(E - V(q))}$  als Funktion des Ortes nicht eindeutig bestimmt ist. In gleicher Weise sind auch  $S_k$  und  $A_k$  mehrdeutig und die Indizes  $k$  bezeichnen die verschiedenen Zweige der Funktionen. Die physikalische Idee, die hinter diesem Ansatz steckt, ist die, daß sich z.B. ein stationärer Zustand als Summe über  $r$  sich bewegende Zustände darstellen läßt. Im einfachsten Fall eines Potentialtopfes mit unendlich hohen Wänden bei  $\pm q_0$  und  $V(q) = 0$  für  $-q_0 \leq q \leq q_0$  sind dies beispielsweise die zwei Zustände  $e^{\pm i k q}$  mit geeignetem Wellenvektor  $k = \frac{p}{\hbar}$ .

Nun gibt es noch eine wichtige Nebenbedingung, die  $S_k$  und  $A_k$  erfüllen müssen. Es seien  $B_k$  und  $B_l$  verschiedene, stetige Zweige einer mehrdeutigen Funktion. Durchläuft man von einem Punkt  $\mathbf{q}$  eine Kurve – dies muß keine Trajektorie sein – im Ortsraum und kehrt zum Ausgangspunkt zurück, so erhält man nicht notwendigerweise wieder  $B_k(\mathbf{q})$ , sondern  $B_l(\mathbf{q})$ . Man kann also von einem Zweig der Funktion auf einen anderen wechseln.

Das kann man sich beispielsweise so vorstellen, daß beim Durchlaufen einer klassischen Trajektorie in einem Potential  $V(q)$  der Impuls sein Vorzeichen am klassischen Umkehrpunkt ändert. Erreicht die Trajektorie zum ersten Mal wieder ihren Ausgangspunkt  $q'$ , so ist der Impuls stetig von  $p(q')$  in  $-p(q')$  übergegangen. Der Übergang zwischen den beiden Zweigen des Impulses ist dabei am klassischen Umkehrpunkt erfolgt.

In jedem Fall aber müssen die verschiedenen Summanden in (3.54) stetig ineinander übergehen. An einem Punkt  $\mathbf{q}_0$ , an dem die verschiedenen Zweige  $S_k$  und  $S_l$  sowie  $A_k$  und  $A_l$  ineinander übergehen, muß daher gelten:

$$A_k(\mathbf{q}_0, t) e^{\frac{i}{\hbar} S_k(\mathbf{q}_0, t)} = A_l(\mathbf{q}_0, t) e^{\frac{i}{\hbar} S_l(\mathbf{q}_0, t)}. \quad (3.55)$$

Das ist genau dann der Fall, wenn es ein  $n \in \mathbb{Z}$  gibt mit

$$\ln(A_k(\mathbf{q}_0, t) e^{\frac{i}{\hbar} S_k(\mathbf{q}_0, t)}) = \ln(A_l(\mathbf{q}_0, t) e^{\frac{i}{\hbar} S_l(\mathbf{q}_0, t)}) + 2\pi i n. \quad (3.56)$$

Durch Umformung erhält man schließlich

$$S_k(\mathbf{q}_0, t) - S_l(\mathbf{q}_0, t) = 2\pi\hbar \left( n + \frac{i}{2\pi} (\ln A_k(\mathbf{q}_0, t) - \ln A_l(\mathbf{q}_0, t)) \right). \quad (3.57)$$

Die obigen Differenzen zwischen den verschiedenen Zweigen von  $S_k$  und  $A_k$ , die beim Durchlaufen einer in  $\mathbf{q}_0$  startenden, geschlossenen Kurve auftreten, lassen sich auch als Linienintegral über diese Kurve ausdrücken:

$$\oint \nabla S_k(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} = 2\pi\hbar \left( n + \frac{i}{2\pi} \oint \nabla \ln A_k(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} \right) \quad (3.58)$$

Für ein fest gewähltes  $S_k$  und  $A_k$  ist diese Gleichung für *alle* geschlossenen Kurven für ein (von der Kurve abhängiges)  $n \in \mathbb{Z}$  erfüllt.

Im folgenden soll nun auf den Index  $k$  verzichtet werden, da er für die weiteren Ausführungen nicht wesentlich ist.

Setzt man  $\psi_0$  in die SCHRÖDINGER-Gleichung ein und betrachtet nur die Terme in niedrigster Ordnung von  $\hbar$ , so erhält man als Bestimmungsgleichung für  $S$  die klassische HAMILTON-JACOBI-Gleichung:

$$H(\mathbf{q}, \nabla S, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (3.59)$$

Für  $P := A^2$  ergibt sich die klassische LIOUVILLE-Gleichung (3.2)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_{j=1}^f \dot{q}_j \frac{\partial P}{\partial q_j} \quad (3.60)$$

für eine impulsunabhängige „Verteilung“  $P(\mathbf{q}, t)$ , die nicht einmal reell zu sein braucht.  $\nabla S$  läßt sich mit dem Impuls  $\mathbf{p}$  identifizieren und (3.58) geht über in

$$\oint \sum_{j=1}^f p_j(\mathbf{q}, t) dq_j = 2\pi\hbar \left( n + \frac{i}{2\pi} \oint \nabla \ln A(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} \right). \quad (3.61)$$

Hierbei ist anzumerken, daß nicht jede im Ortsraum geschlossene Kurve  $\mathcal{C}$  im Sinne des obigen Wegintegrals eine geschlossene Kurve darstellt. Stattdessen muß der Weg so gewählt werden, daß  $p(q)$  physikalisch „sinnvolle“ Werte annehmen kann. So muß z.B. der Impuls in die Integrationsrichtung zeigen, d.h. es gilt  $p(q) > 0$  für die Integration von  $q_1$  nach  $q_2$  mit  $q_1 < q_2$  und  $p(q) < 0$  bei Integration in die Gegenrichtung.  $(\mathcal{C}, p(\mathcal{C}))$  muß eine geschlossene Kurve (nicht notwendigerweise eine Trajektorie) im Phasenraum darstellen<sup>12</sup>.

Die Wegintegrale über zwei geschlossene Kurven sind identisch, falls die beiden Kurven ineinander überführt werden können, ohne eine Singularität des Integranden zu passieren. Im allgemeinen gibt es nur eine endliche Zahl von Klassen unabhängiger Kurven, die nicht ineinander überführt werden können. Jede andere geschlossene Kurve läßt sich darstellen als endliche Linearkombination solcher Kurven mit *ganzzahligen* Koeffizienten. Ist (3.61) erfüllt für irgendein  $n$  für je eine Kurve jeder der unabhängigen Klassen von Kurven, so ist die Gleichung für *alle* geschlossenen Kurven erfüllt. Jede Klasse unabhängiger Kurven ist äquivalent zu einer Quantenzahl. Gibt es  $N$  solcher Klassen, so ist die exakte Lösung  $\psi$  der SCHRÖDINGER-Gleichung eine Lösung mit den Quantenzahlen  $n_1, \dots, n_N$ . Gilt für ein autonomes System  $N = f$ , so ist der Zustand  $\psi$  eindeutig durch diesen Satz von Quantenzahlen beschrieben [Kel58].

Eine Lösung  $S$  der HAMILTON-JACOBI-Gleichung (3.59) hat im allgemeinen eine unendliche Mehrdeutigkeit, d.h. unendlich viele verschiedene Zweige, aber es gibt in jedem Fall nur endlich viele, die sich nicht nur um eine additive Konstante unterscheiden. Daher hat  $\nabla S = \mathbf{p}$  nur endlich viele verschiedene Zweige [Kel58].

Das Wegintegral über  $\ln A$  hängt nur von der Anzahl  $m$  der sogenannten *Fokalkpunkte* oder *Kaustiken* ab, die auf der Kurve liegen, und ergibt  $-i\frac{\pi}{2}m$ . Man bezeichnet  $m$  auch als MASLOV-Index [Per77]. Für die endgültige Quantisierungsbedingung ergibt sich schließlich:

$$\oint \sum_{j=1}^f p_j(\mathbf{q}, t) dq_j = 2\pi\hbar \left( n + \frac{m}{4} \right). \quad (3.62)$$

Die Fokalkpunkte entsprechen im wesentlichen den klassischen Umkehrpunkten. Für den Harmonischen Oszillator gilt daher beispielsweise  $m = 2$ .

### 3.4.2 Die EBK-Quantisierung für nichtautonome Systeme

Auch wenn die ursprüngliche Formulierung der im vorigen Abschnitt beschriebenen EBK-Theorie in [Kel58] auch nichtautonome Systeme mit einschließt,

<sup>12</sup>Genaugenommen steckt dahinter eine topologische Überlegung, die an dieser Stelle zu weit führen würde. Im eigentlichen Sinne sind diese Wegintegrale nicht über Kurven im Ortsraum, sondern in einer durch die Zweige von  $S_k$  bestimmten  $f$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit auszuwerten. Setzt man aber auf einzelnen Kurvenstücken den physikalisch „richtigen“ Zweig der Funktionen ein, so lassen sich die Integrale auch über dem Ortsraum ausführen. An dieser Stelle wird auf die angegebene Literatur verwiesen.

so läßt sie sich in der Praxis nur auf autonome Systeme anwenden. Der Grund liegt darin, daß die von MASLOV und FEDORIUK entwickelte *Methode des kanonischen Operators*, die die exakte mathematische Grundlage für die EBK-Quantisierung bildet, einen Phasenraum mit gerader Dimension benötigt. Nichtautonome Systeme besitzen dagegen einen aus  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$  und  $\theta$  bestehenden Phasenraum mit ungerader Dimension [BH91].

In diesem Abschnitt soll die Erweiterung der EBK-Theorie auf nichtautonome, periodische Systeme lediglich skizziert werden. Für weitergehende Einzelheiten sei auf [BH91] verwiesen.

Gegeben sei ein nichtautonomes System mit  $f$  Freiheitsgraden der Bewegung und einer  $T$ -periodischen HAMILTON-Funktion  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . Zunächst wird eine zyklische Variable  $\theta$  mit  $\dot{\theta} = 1$  eingeführt, wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben wurde. Durch Einführung einer weiteren, zu  $\theta$  kanonisch konjugierten Variablen  $p_\theta$  und einer neuen HAMILTON-Funktion

$$H'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \theta, p_\theta) := H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \theta) + p_\theta \quad (3.63)$$

erhält man ein autonomes System mit einem  $(2f + 2)$ -dimensionalen Phasenraum.  $\theta$  und  $p_\theta$  erfüllen die kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial p_\theta} H'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \theta, p_\theta) = 1, \quad (3.64a)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial}{\partial \theta} H'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \theta, p_\theta). \quad (3.64b)$$

Auf dieses System läßt sich die EBK-Quantisierung anwenden. Man erhält analog zu (3.62)  $f + 1$  voneinander unabhängige geschlossene Kurven  $\mathcal{C}_i$  und somit  $f + 1$  Quantisierungsbedingungen:

$$\oint_{\mathcal{C}_i} \mathbf{p} d\mathbf{q} + p_\theta d\theta = 2\pi\hbar \left( n_i + \frac{m_i}{4} \right). \quad (3.65)$$

Ohne Einschränkung ist es möglich, die Kurven  $\mathcal{C}_i$  so zu wählen, daß  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_f$  in einer Ebene  $\theta = \text{const}$  liegen, und  $\mathcal{C}_{f+1}$  so zu wählen, daß diese Kurve im wesentlichen „entlang“ der  $\theta$ -Achse läuft. Dann gilt  $m_{f+1} = 0$ , da es keine klassischen Umkehrpunkte in Zeitrichtung gibt.

Die Integrationswege können so gewählt werden, daß bei Rückkehr in den  $(2f + 1)$ -dimensionalen Phasenraum des ursprünglichen Systems (3.65) für  $1 \leq i \leq f$  übergeht in

$$\oint_{\mathcal{C}_i} \mathbf{p} d\mathbf{q} = 2\pi\hbar \left( n_i + \frac{m_i}{4} \right). \quad (3.66)$$

Dies sind Integrationswege innerhalb einer POINCARÉ-Schnittfläche  $\theta = \text{const}$ .

Die  $(f + 1)$ -te Quantisierungsbedingung sichert die Periodizität der Funktionen  $u_n(t)$  der Quasienergiezustände. Die Quantenzahl  $n_{f+1}$  korrespondiert dabei zu einer Quasienergie von  $\epsilon - \frac{2\pi\hbar}{T} n_{f+1}$ .

Insgesamt reicht es also, für nichtautonome, periodische Systeme die EBK-Quantisierung auf einen POINCARÉ-Schnitt anzuwenden.

### 3.4.3 Die Lokalisierung von Eigenfunktionen in Regularitätsgebieten

In diesem Abschnitt geht es darum, mit Hilfe der EBK-Quantisierung Aussagen über die Art der Eigenzustände in regulären Bereichen des Phasenraumes zu machen. Dies ist von besonderem Interesse für gemischte Systeme, in denen sowohl reguläre als auch chaotische Dynamik nebeneinander existieren. Die Struktur von Regularitätsgebieten um einen periodischen Orbit im Phasenraum, die sich in einer POINCARÉ-Abbildung als reguläre Inseln aus invarianten Linien darstellen, ist für integrable und nichtintegrable Systeme ähnlich, auch wenn die Dynamik im nichtintegrablen Fall deutlich komplexer ist als im integrablen Fall. Im allgemeinen wird eine reguläre Insel in einem nichtintegrablen System ein vollständiges KAM-Szenario durchlaufen, welches in Abschnitt 2.2.4 angesprochen wurde: Die Tori zu rationalen Windungszahlen sind unter Bildung von regulären Inselketten und heretoklinem Chaos aufgebrochen, und nur die Tori zu hinreichend irrationalen Windungszahlen sind stabil. Um die folgenden Überlegungen zu vereinfachen, soll die innere Struktur aus zerstörten und erhaltenen Tori jedoch vernachlässigt werden [BTU93].

Für autonome Systeme mit  $f$  Freiheitsgraden der Bewegung verläuft die Bewegung innerhalb eines Regularitätsgebietes auf  $f$ -dimensionalen Tori in einem  $2f$ -dimensionalen Phasenraum. Für nichtautonome Systeme reicht es nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten, einen  $2f$ -dimensionalen POINCARÉ-Schnitt zu betrachten. Die EBK-Quantisierungsbedingungen (3.62) in Form der Wirkungsintegrale

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_i} \mathbf{p}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \hbar \left( n_i + \frac{m_i}{4} \right) \quad (3.67)$$

sind invariant unter kanonischen Transformationen [Per77]. Es bietet sich daher an, die Wegintegrale in lokalen<sup>13</sup> Wirkungs-Winkel-Variablen  $\mathbf{J}, \boldsymbol{\vartheta}$  auszuwerten, so daß die Integration über einem invarianten Torus stattfindet. Auf einem  $f$ -dimensionalen Torus gibt es genau  $f$  voneinander unabhängige geschlossene Kurven, die  $f$  Quantenzahlen entsprechen.

Als Integrationswege wählt man sinnvollerweise die  $f$  Wegintegrale entlang jeweils einer der Winkelvariablen  $\vartheta_i$ , d.h.

$$C_i : [0, 2\pi[ \rightarrow [0, 2\pi[^f, \quad \vartheta_i \mapsto (0, \dots, \vartheta_i, \dots, 0). \quad (3.68)$$

Die Quantisierungsbedingungen gehen dann über in

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_i} \mathbf{p} d\mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_i d\vartheta_i = \hbar \left( n_i + \frac{m_i}{4} \right). \quad (3.69)$$

<sup>13</sup>Diese Transformation kann aus zwei Gründen nicht global durchgeführt werden. Zum einen sind die Wirkungs-Winkel-Variablen nicht in den chaotischen Bereichen definiert, und zum anderen können zwei Tori von zwei verschiedenen regulären Inseln zu demselben Wert von  $\mathbf{J}$  gehören.

Die MASLOV-Indices  $m_i$  sind dabei vom jeweiligen Integrationsweg  $\mathcal{C}_i$  abhängig.

Erfüllen für einen Torus alle  $J_i$  diese Relationen, so spricht man von einem *quantisierten EBK-Torus*, und die Energie  $E$  des Torus ist ein Eigenwert des HAMILTON-Operators.

Im Falle nur eines Freiheitsgrades reduzieren sich die Quantisierungsbedingungen auf

$$J = \oint_{\mathcal{C}} p(q) dq = 2\pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.70)$$

da der MASLOV-Index für die einzige geschlossene Kurve auf einem 1-Torus 2 ist (es gibt genau zwei Umkehrpunkte).  $J$  beschreibt in diesem Fall die Fläche innerhalb des Torus.

Erfüllt  $J$  die Quantisierungsbedingung, so ist im Torus ein sogenannter EBK-Eigenzustand lokalisiert. Man kann das so erklären, daß außerhalb des Torus die kinetische Energie negativ und der Impuls somit imaginär wird. Damit wird  $S$  ebenfalls imaginär und die Wellenfunktion (3.54) fällt außerhalb des Torus exponentiell ab. Tori zu höheren Quantenzahlen sind dann zumindest für einige Systeme zunehmend auf dem Torus selbst lokalisiert<sup>14</sup> [BTU93].

Damit in einer regulären Insel in semiklassischer Näherung überhaupt ein Eigenzustand ( $n = 0$ ) lokalisiert ist, muß die Fläche der Inseln mindestens  $\pi\hbar$  betragen.

Auch für zwei Freiheitsgrade kann man zeigen, daß die Fläche der regulären Inseln in einer zweidimensionalen POINCARÉ-Abbildung mindestens  $\pi\hbar$  betragen muß, damit dort ein Eigenzustand lokalisiert ist.

Eigenzustände, die in Regularitätsbereichen lokalisiert sind, werden als *reguläre Eigenzustände* bezeichnet – im Gegensatz zu *chaotischen Eigenzuständen*, die in Chaosbereichen lokalisiert sind. Diese Unterscheidung entspricht dem Klassifikationsschema von PERCIVAL, das in Abschnitt 3.3.1 bereits angesprochen wurde. Diese Unterscheidung ist nicht völlig exakt, da die Semiklassik, auf der diese Unterscheidung beruht, nur im Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0$  exakt gilt.

Tatsächlich stellt die EBK-Quantisierung ein exzellentes Näherungsverfahren dar, um die Anzahl der in einem regulären Phasenraumbereich lokalisierten Eigenzustände zu berechnen. Beispielsweise sagt die EBK-Theorie für den ungedämpften DUFFING-Oszillator mit äußerer Anregung bei einer bestimmte Parameterwahl eine Zahl von 24 Quasieigenzuständen innerhalb einer regulären Insel voraus, die auch tatsächlich mit der Zahl der numerisch gefundenen Zustände übereinstimmt [BTMK92].

<sup>14</sup>Die Lokalisierung einer Wellenfunktion auf einem Torus ist im Sinne der WIGNER-/ HUSIMIL-Darstellung zu sehen.



### 3.4.4 Reguläres Tunneln

Bei dem Begriff Tunneleffekt denkt man zumeist an das Tunneln von Wellenpaketen durch Potentialbarrieren, wobei ein Teil der Wellenfunktion durch eine Potentialbarriere hindurchtunnelt und nicht wieder zurückkehrt. Intuitiv würde man vielleicht erwarten, daß ein in einer von zwei benachbarten Potentialmulden lokalisiertes Wellenpaket im Laufe der Zeit in die andere Potentialmulde hineintunnelt, bis sich ein Gleichgewicht eingestellt hat. Das ist aber nicht der Fall.

Verläuft die klassische Dynamik auf einem endlichen Phasenraumbereich, so wird die quantenmechanische Dynamik im wesentlichen nur von endlich vielen Eigenzuständen des Systems getragen. Ein Zustand, der sich in einer endlichen Basis von Eigenzuständen entwickeln läßt, wird sich in jedem Fall quasiperiodisch, wenn nicht sogar periodisch entwickeln. Aus diesem Grund muß auch das Tunneln zwischen Regularitätsbereichen quasiperiodisch ablaufen.

Im folgenden wird auf die Unterscheidung zwischen Energiezuständen autonomer Systeme und Quasienergiezuständen nichtautonomer Systeme verzichtet. Tatsächlich läuft der Tunneleffekt in beiden Fällen vollkommen analog ab.

Gegeben sei ein System mit einer diskreten Phasenraumsymmetrie  $\mathcal{P}$ . Im Fall des in dieser Arbeit betrachteten DUFFING-Oszillators mit parametrischer Anregung ist dies der Paritätsoperator. Seien  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  zwei getrennte Phasenraumgebilde, die invariant unter der klassischen Dynamik sind und unter der Symmetrieoperation  $\mathcal{P}$  ineinander übergehen, d.h.  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P} \mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P} \mathcal{A}_2$ . Speziell seien  $\mathcal{A}_{1,2}$  EBK-quantisierte Tori innerhalb von regulären Inseln. Auf jedem der Tori existiert dann ein EBK-Eigenzustand  $\psi_i(\mathbf{q})$ ,  $i \in \{1, 2\}$  mit der quantisierten Energie  $E$ . Wegen der globalen Symmetrie gilt  $\psi_2(\mathbf{q}) = \psi_1(\mathcal{P}(\mathbf{q}))$  [FD98].

Diese beiden Zustände sind bis zu einer gewählten Ordnung<sup>15</sup> in  $\hbar$  entartet, allerdings sind  $\psi_1$  und  $\psi_2$  keine exakten Eigenzustände des Systems. Die exakten Eigenzustände sind symmetrisch oder antisymmetrisch unter  $\mathcal{P}$ , d.h.

$$\phi^\pm(\mathbf{q}) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\mathbf{q}) \pm \psi_2(\mathbf{q})), \quad (3.71)$$

und ihre Eigenenergien spalten um einen Wert  $\Delta E$  auf, der zu einem periodischen Tunneleffekt mit der Periode  $\tau = \frac{2\pi\hbar}{\Delta E}$  führt. Man spricht in diesem Fall von *quasi-entarteten* Eigenzuständen.

Diesen Zusammenhang kann man sich leicht klarmachen. Der HAMILTON-Operator in der  $\psi_{1,2}$ -Basis läßt sich darstellen als

$$\hat{H} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{\epsilon}{2} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

<sup>15</sup>Es können für jede beliebige Ordnung in  $\hbar$  EBK-Zustände konstruiert werden, die die SCHRÖDINGER-Gleichung bis zu dieser Ordnung in  $\hbar$  erfüllen.

mit  $\frac{\epsilon}{2} = (\psi_1, \psi_2)$ , zumindest solange das Matrixelement  $\epsilon$  schneller für  $\hbar \rightarrow 0$  verschwindet als jede Potenz [BTU93]. Durch Diagonalisierung erhält man dann die tatsächlichen Eigenenergien  $E \pm \frac{\epsilon}{2}$  mit  $\epsilon = \Delta E$  und die Eigenfunktionen aus (3.71).

Nun wird gezeigt, daß es durch diese Energieaufspaltung tatsächlich zu einem Tunneleffekt kommt. Seien  $\phi_1$  und  $\phi_2$  Eigenfunktionen von  $\hat{H}$  mit den Eigenenergien  $E_1$  und  $E_2$ . Als Anfangsverteilung werde

$$\psi(0) = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \quad (3.73)$$

gewählt mit  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Es können  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\phi_1$  und  $\phi_2$  o.B.d.A. als reell angesetzt werden.

Für die Zeitenwicklung von  $\psi$  erhält man

$$\psi(t) = \alpha\phi_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + \beta\phi_2 e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}, \quad (3.74)$$

und nach kurzer Umformung ergibt sich für die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} \rho(t) &= |\psi(t)|^2 = \alpha^2 \phi_1^2 + \beta^2 \phi_2^2 + 2\alpha\beta \cos\left(\frac{E_1 - E_2}{\hbar}t\right) \phi_1 \phi_2 \\ &= \frac{1}{2}(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)^2 \left(1 + \cos\left(\frac{E_1 - E_2}{\hbar}t\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha\phi_1 - \beta\phi_2)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{E_1 - E_2}{\hbar}t\right)\right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Diese beschreibt eine Oszillation zwischen den Zuständen  $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2$  und  $\alpha\phi_1 - \beta\phi_2$  mit der Periode

$$\tau = \frac{2\pi\hbar}{|E_1 - E_2|} \quad (3.76)$$

und der Amplitude

$$A = 2\alpha\beta. \quad (3.77)$$

Gleichung (3.75) führt nicht automatisch zu einem Tunneleffekt, sondern ist abhängig davon, wo die beiden Zustände  $\phi_{1,2}$  lokalisiert sind. Wählt man aber speziell

$$\psi(0) = \psi_1 \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^+ + \phi^-) \quad (3.78)$$

in (3.73), d.h.  $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\phi_1 = \phi^+$  und  $\phi_2 = \phi^-$ , so wird die Oszillationsamplitude zu 1 und (3.75) geht über in

$$\begin{aligned} |\psi_1(t)|^2 &\approx \frac{1}{2}|\psi_1|^2 \left(1 + \cos\left(\frac{E_1 - E_2}{\hbar}t\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}|\psi_2|^2 \left(1 - \cos\left(\frac{E_1 - E_2}{\hbar}t\right)\right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Das bedeutet also, daß die Wellenfunktion, die anfangs am quantisierten Torus  $\mathcal{A}_1$  lokalisiert ist, im Laufe der Zeit dort langsam verschwindet, und nach einer halben Periode vollständig zum zweiten quantisierten Torus  $\mathcal{A}_2$  hindurchgetunnelt ist. Im Laufe einer weiteren halben Tunnelperiode wiederholt sich der Prozeß in umgekehrter Richtung, und zur Zeit  $\tau$  befindet sich die Wellenfunktion wieder in ihrem Ausgangszustand.

Meist ist die Tunnelperiode  $\tau$  sehr groß, was dazu äquivalent ist, daß die dem Torus entsprechende klassische Erhaltungsgröße nur sehr schwach verletzt ist. Je größer die Energieaufspaltung ist, desto größer ist die Tunnelrate.

Speziell für den integrablen Fall eines eindimensionalen Doppelmuldenpotentials läßt sich die Energieaufspaltung in semiklassischer Näherung [DH81, KW96] für zwei EBK-Tori zur Energie  $E$  berechnen:

$$\Delta E = \frac{\hbar\omega}{\pi} \exp \left( -\frac{1}{\hbar} \int_{q_-}^{q_+} \sqrt{2m|E - V(q)|} dq \right). \quad (3.80)$$

$q_-$  und  $q_+$  sind dabei die klassischen Umkehrpunkte der Bewegung, zwischen denen der Tunneleffekt stattfindet, und  $\omega$  bezeichnet die Frequenz des klassischen Torus der Energie  $E$ . Offensichtlich ist die Energieaufspaltung und damit die Tunnelrate exponentiell von  $\hbar$  abhängig. Weitere Abhängigkeiten liegen in der Entfernung zwischen den Potentialmulden, speziell in der Entfernung  $q_+ - q_-$  zwischen den klassischen Umkehrpunkten sowie der Höhe der Potentialbarriere  $V(q) - E$ .

Wählt man für die Beobachtung des Tunneleffekts für verschiedene  $\hbar$  jeweils immer einen Torus zur Energie  $E$ , so verändert sich das Integral  $I$  in (3.80) nicht, und  $\Delta E$  ist ausschließlich von der Variation von  $\hbar$  abhängig. Für die Tunnelperiode ergibt sich aus (3.76) und (3.80) :

$$\tau(\hbar) = \frac{2\pi\hbar}{\Delta E} \sim e^{\frac{I}{\hbar}}. \quad (3.81)$$

Das bedeutet aber auch, daß der Torus zur Energie  $E$  für kleiner werdendes  $\hbar$  zu immer höheren Quantenzahlen gehört. Umgekehrt gehört ein Torus zu einer festen Quantenzahl zu kleiner werdenden Energien und einer kleiner werdenden Fläche. Daher vergrößert sich der Integrationsweg in (3.80), weil die klassischen Umkehrpunkte auf dem klassischen Torus zur Energie  $E$  liegen und gegen die Potentialminima streben. Gleichzeitig vergrößert sich auch der Integrand, da die Energie des Torus sinkt und  $V(q) - E$  im klassisch verbotenen Bereich, über den integriert wird, positiv ist.

Von den bisherigen Überlegungen ausgehend ist also zu erwarten, daß die Energieaufspaltung der quasientarteten EBK-Zustände für  $\hbar \rightarrow 0$  exponentiell abnimmt und damit der Tunneleffekt im klassischen Grenzfall verschwindet.

Falls durch Variation eines Systemparameters die Symmetrie  $\mathcal{P}$  verletzt wird, bricht der Tunneleffekt sehr schnell zusammen. Die Energieentartung  $\Delta E$  im

zweidimensionalen Unterraum der ehemals zueinander symmetrischen EBK-Tori  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  wird in der Regel größer werden, d.h. die Tunnelperiode kürzer. Gleichzeitig wird die Energieaufspaltung nicht mehr zwischen den ehemals (anti-) symmetrischen Zuständen  $\phi^+$  und  $\phi^-$  sondern zwischen anderen Linearkombinationen  $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2$  erfolgen mit dem Resultat, daß die Tunnelamplitude beliebig klein werden kann. Zumindest für den Fall eines dynamischen Tunnelns wurde gezeigt, daß bereits eine geringe Symmetrieverletzung dazu führen kann, daß die Tunnelamplituden um mehrere Größenordnungen kleiner werden [DH81].

Der Tunneleffekt findet tatsächlich nur zwischen zueinander symmetrischen EBK-Tori statt. Existieren im Phasenraum zwei Paare von zueinander symmetrischen (insgesamt vier) regulären Inseln, so findet das Tunneln jeweils nur zwischen den zueinander symmetrischen Inseln statt. Leider war es nicht möglich, im Fall des ungedämpften DUFFING-Oszillators mit parametrischer Anregung ein Beispiel für eine solche Phasenraumdynamik zu finden, für die eine numerische Untersuchung mit den zur Verfügung stehenden Mitteln hätte durchgeführt werden können<sup>16</sup>. Im Fall des DUFFING-Oszillators mit äußerer Anregung ist dies jedoch möglich und an numerischen Beispielen auch durchgeführt worden [LB91].

Wird ein unter der klassischen Dynamik invariantes Phasenraumobjekt  $\mathcal{B}$  durch  $\mathcal{P}$  auf sich selbst abgebildet, d.h.  $\mathcal{P}\mathcal{B} = \mathcal{B}$ , so kommt es nicht zu einer Aufspaltung in quasientartete Zustände [FD98]. Dies hat bei vielen Systemen auch eine praktische Bedeutung. Oft ist es so – wie auch im Fall des in dieser Arbeit untersuchten Systems –, daß reguläre Phasenraumbereiche durch eine Symmetrioperation auf ihr symmetrisches Gegenstück abgebildet werden, während der chaotische Bereich auf sich selbst abgebildet wird. Daher sind die regulären Zustände im Energiespektrum durch ihre sehr kleinen Energieaufspaltungen zu identifizieren, die bei Eigenenergieen, die zu chaotischen Zuständen gehören, nicht auftreten. Zufällige Übereinstimmungen von Eigenenergieen zu zwei chaotischen Zuständen sind selten, da chaotische Eigenzustände aufgrund der in Abschnitt 3.3.2 diskutierten Level-Abstoßung die Eigenenergien benachbarter Zustände zu vermeiden suchen [BTU93].

### 3.4.5 Chaotisches Tunneln

Das Verschwinden der Energieaufspaltung der quasientarteten EBK-Zustände und somit das Verschwinden des Tunneleffekts im klassischen Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0$  wird in der Regel nur für integrable und quasiintegrable Systeme beobachtet, bei denen die chaotische Dynamik vernachlässigbar<sup>17</sup> ist. Sind die beiden am

<sup>16</sup>Für nähere Angaben siehe die Diskussion in Abschnitt 3.5.

<sup>17</sup>Vernachlässigbar bedeutet, daß das Phasenraumvolumen, in dem sich chaotische Dynamik abspielt, klein sein muß gegenüber dem Volumen der regulären Bewegung. Eine solche Dynamik wird auch als quasiintegrabel bezeichnet. Das ist natürlich eine Frage der Größenskala, mit der man die Dynamik betrachtet. Für beliebig kleines  $\hbar$  wird nämlich jeder noch so kleine chaotische Phasenraumbereich für die Dynamik relevant, sobald sich Eigenzustände in ihm lokalisieren lassen.

Tunnelprozeß beteiligten quantisierten EBK-Tori dagegen durch einen chaotischen Bereich getrennt, so beobachtet man durchaus sehr starke Schwankungen über mehrere Größenordnungen in der Energieaufspaltung [BTU93].

Oft findet man beim Übergang von regulärer zu chaotischer Dynamik ein starkes Ansteigen der Tunnelrate um mehrere Größenordnungen. Ein Grund liegt sicher darin, daß mit dem Wachsen des chaotischen Phasenraumbereichs die Höhe von Energiebarrieren abnehmen kann, wodurch der Tunneleffekt verstärkt wird. Dadurch lassen sich aber nicht die beobachteten Schwankungen in der Tunnelperiode erklären. Daher liegt der Gedanke nahe, daß die chaotische Dynamik des Phasenraumbereichs, den die Wellenfunktion beim Tunneln passieren muß, in irgendeiner Weise Einfluß auf den Tunneleffekt hat. In diesem Zusammenhang spricht man von „chaos assisted tunneling“ [BTU93]. Die Ursache hierfür war lange Zeit unklar und ist bis heute nicht abschließend geklärt [FD98].

Für Systeme mit teilweise chaotischer Dynamik läßt sich der Tunneleffekt nicht allein mit dem im vorigen Abschnitt beschriebenen 2-Level-Prozeß erklären. Die Ursache liegt darin, daß die im chaotischen Bereich lokalisierten Eigenzustände den Tunneleffekt beeinflussen. Mindestens ist daher zur Beschreibung des „chaos assisted tunneling“ ein 3-Level-Prozeß, wenn nicht sogar ein multi-Level-Prozeß notwendig. Im folgenden soll der in [BTU93] entwickelte 3-Level-Prozeß vorgestellt werden, um zumindest prinzipiell deutlich zu machen, inwiefern ein chaotischer Eigenzustand die regulären Zustände auf den EBK-Tori beeinflussen kann.

Gegeben seien wieder zwei zueinander symmetrische EBK-Zustände  $\psi_1$  und  $\psi_2$  zur Energie  $E$ . Im folgenden soll die Quasientartung vernachlässigt werden. Statt  $\psi_{1,2}$  werden zweckmäßigerweise

$$\psi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 \pm \psi_2) \quad (3.82)$$

betrachtet. Man beachte, daß hier, im Gegensatz zu (3.71) das Gleichheitszeichen (=) statt des „ungefähr gleich“-Zeichen ( $\approx$ ) steht.  $\psi^\pm$  bezeichnet den exakten, aus  $\psi_{1,2}$  gebildeten (anti-) symmetrischen Zustand, aber keinen Eigenzustand von  $\hat{H}$ ,  $\phi^\pm$  aus (3.71) dagegen den (anti-) symmetrischen Eigenzustand von  $\hat{H}$ . Ferner sei ein chaotischer (ohne Einschränkung symmetrischer) Eigenzustand  $\phi_c$  mit einer Eigenenergie  $E'_c \approx E$  gegeben. Dann koppelt  $\phi_c$  mit  $\psi^+$ , aber nicht mit  $\psi^-$ ; denn es gilt

$$(\psi^-, \hat{H} \phi_c) = E'_c (\psi^-, \phi_c) = 0, \quad (3.83)$$

weil das Skalarprodukt eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Zustands verschwindet. Für die Anwendung der Störungsrechnung müssen die drei Zustände orthonormiert werden. Dies geschieht durch das SCHMIDT'sche Orthonormierungsverfahren. Der „neue“ Zustand

$$\psi_c := \frac{\phi_c - (\psi^+, \phi_c) \psi^+}{\|\phi_c - (\psi^+, \phi_c) \psi^+\|} \quad (3.84)$$

ist dann allerdings kein exakter Eigenzustand zu  $\hat{H}$  mehr. Für die Nichtdiagonalelemente von  $\hat{H}$  in der Basis  $\{\psi^-, \psi^+, \psi_c\}$  gilt :

$$(\psi^-, \hat{H}\psi^+) \approx \frac{\epsilon}{2}, \quad (3.85a)$$

$$(\psi^-, \hat{H}\psi_c) \approx 0, \quad (3.85b)$$

$$(\psi^+, \hat{H}\psi_c) =: v \quad (3.85c)$$

und für die Diagonalelemente :

$$(\psi^-, \hat{H}\psi^-) \approx E, \quad (3.86a)$$

$$(\psi^+, \hat{H}\psi^+) \approx E, \quad (3.86b)$$

$$(\psi_c, \hat{H}\psi_c) =: E_c \approx E' c. \quad (3.86c)$$

Dabei ist  $\epsilon = \Delta E$  die Energieaufspaltung der Quasientartungen aus (3.72). Im folgenden soll angenommen werden, daß  $\epsilon$  im Verhältnis zu  $v \in \mathbb{R}$  vernachlässigt werden kann.  $v$  muß außerdem kleiner als  $|E - E_c|$  sein.

Der HAMILTON-Operator in der Basis der drei Zustände hat somit näherungsweise folgende Gestalt:

$$\hat{H} \begin{pmatrix} a_- \\ a_+ \\ a_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & v \\ 0 & v & E_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- \\ a_+ \\ a_c \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

Mittels entarteter Störungsrechnung erhält man für die Eigenzustände in erster Ordnung :

$$\phi^- = \psi^-, \quad (3.88a)$$

$$\phi^+ = \psi^+ + \frac{v}{E - E_c} \psi_c, \quad (3.88b)$$

$$\phi_c^+ = -\frac{v}{E - E_c} \psi^+ + \psi_c, \quad (3.88c)$$

und in zweiter Ordnung für die Eigenenergien :

$$E^- = E, \quad (3.89a)$$

$$E^+ = E + \frac{v^2}{E - E_c}, \quad (3.89b)$$

$$E_c^+ = E_c - \frac{v^2}{E - E_c}. \quad (3.89c)$$

Jetzt soll die zeitliche Entwicklung eines anfangs auf dem Torus  $\mathcal{A}_1$  lokalisierten Wellenpakets, nämlich  $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^+ + \psi^-)$  untersucht werden. Während sich der Anteil  $\psi^- = \phi^-$  lediglich um die Phase  $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$  ändert, ist die zeitliche Entwicklung von  $\psi^+ \approx \phi^+ - \frac{v}{E - E_c} \phi_c^+$  etwas komplizierter. Es ergibt sich nach (3.75), (3.76) und (3.77) eine Oszillation mit der Amplitude  $|\frac{2v}{E - E_c}|$  und

der Tunnelperiode  $\tau = \frac{2\pi\hbar}{|E-E_c|}$ . Das bedeutet, daß ein kleiner Teil des symmetrischen Zustands  $\psi^+$  von den beiden regulären EBK-Tori, auf denen er lokalisiert ist, in den chaotischen Bereich des Phasenraumes tunnelt und nach der Oszillationsperiode  $\tau$  wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurückgetunnelt ist. Diese Oszillation zwischen dem regulären Zustand  $\psi^+$  und dem chaotischen Zustand  $\psi_c$  ist physikalisch dafür verantwortlich, daß die quasientartete Energie  $E$  in  $E^+$  und  $E^-$  aufspaltet.

Nach einer Oszillationsperiode sind die Zeitentwicklungen der drei Eigenzustände  $\phi^-$ ,  $\phi^+$  und  $\phi_c^+$  in guter Näherung wieder in Phase, und man kann den Anteil von  $\phi_c^+$  vernachlässigen. Nach  $n$  Perioden erhält man somit

$$\psi_1(n\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \phi^- e^{-\frac{i}{\hbar} E n \tau} + \phi^+ e^{-\frac{i}{\hbar} \left( E + \frac{v^2}{E-E_c} \right) n \tau} \right). \quad (3.90)$$

Das aber bedeutet nach (3.75), (3.76) und (3.77) wiederum eine Oszillation, diesmal zwischen  $\phi^-$  und  $\phi^+$  mit der Amplitude 1 und der Oszillationsperiode  $T_0 = \frac{2\pi\hbar}{v^2} |E - E_c| > \tau$ . Mit anderen Worten: es findet ein vollständiger Tunneleffekt statt.

Mit diesem 3-Level-Prozeß läßt sich verstehen, wieso für  $\hbar \rightarrow 0$  die Energieaufspaltung in teilweise chaotischen Systemen nicht exponentiell gegen null geht. Je kleiner  $\hbar$  wird, desto dichter liegen die Eigenenergien zusammen, auch im chaotischen Bereich. Daher wird die Wahrscheinlichkeit, daß die Eigenenergie eines chaotischen Zustand mit der Eigenenergie der gewählten regulären EBK-Zustände fast zusammenfällt, immer größer.

Für das vollständige Verständnis von „chaos assisted tunneling“ reicht der oben beschriebene 3-Level-Prozeß nicht aus, da im allgemeinen kein einzelner chaotischer Zustand eine so dominierende Rolle bei der Kopplung spielt, sondern in der Regel mehrere Zustände daran beteiligt sind. Für das grundlegende Verständnis des Tunneleffektes in chaotischen Systemen ist der 3-Level-Prozeß aber durchaus relevant.

### 3.4.6 Blockmatrix-Modelle

Eine allgemeinere Beschreibung des „chaos assisted tunneling“ muß berücksichtigen, daß viele verschiedene chaotische Eigenzustände in diesen Prozeß involviert sind. Daß kann dadurch geschehen, daß die beiden zueinander symmetrischen EBK-Eigenzustände nicht nur wie in (3.87) durch einen einzelnen chaotischen Eigenzustand gekoppelt sind, sondern durch eine komplette Matrix eines GOE/COE für zeitumkehrinvariante, bzw. GUE/CUE für nicht zeitumkehrinvariante Systeme. Derartige Untersuchungen wurden auch bereits durchgeführt. Sie haben aber den Nachteil, daß hierbei der chaotische Bereich des Phasenraumes zwischen den EBK-Tori implizit als strukturlos angenommen wird. Effekte, die gerade durch Strukturen im chaotischen Phasenraumbereich hervorgerufen werden, wie partielle Transportbarrieren in Form von zerfallenen KAM-Tori, sogenannten Cantori, lassen sich mit einem solchen Verfahren nicht beschreiben.

Ein Beispiel für solche Effekte ist die dynamische Lokalisierung von Zuständen in gewissen Bereichen des Phasenraums. Chaotische Zustände sind dann nicht über den gesamten chaotischen Phasenraumbereich verteilt, sondern nur über Teile davon [FD98].

In [FD98] wird zur Berücksichtigung auch der partiellen Transportbarrieren im chaotischen Phasenraumbereich ein Matrixmodell aus fünf Blöcken vorgeschlagen, die jeweils den beiden regulären Inseln, dem chaotischen Gebiet mit freiem Transport zwischen den Inseln sowie den beiden „Strand“-Regionen um die Inseln herum entsprechen. Der Grund hierfür liegt in der relativ stabilen Dynamik in den „Strand“-Bereichen trotz ihres langfristig chaotischen Verhaltens. Teilweise kann der Transport weg von den regulären Bereichen stark eingeschränkt sein, so daß sich hierdurch sogenannte „beach states“ bilden, die überwiegend in den „Strand“-Regionen lokalisiert sind und kaum mit der chaotischen „See“ zwischen den „Strand“-Regionen überlappen. In einer Reihe von Fällen hat sich herausgestellt, daß diese „beach-states“ große Ähnlichkeit zu regulären Eigenzuständen in regulären Inseln haben und EBK-ähnlichen Quantisierungsregeln folgen.

Mit diesem Modell erhält man drei verschiedene „Pfade“, auf denen ein Wellenpaket von einem Regularitätsbereich in einen anderen tunneln kann:

1. Direktes Tunneln zwischen den Regularitätsbereichen. Dies entspricht dem 2-Level-Prozeß in Abschnitt 3.4.4.
2. Indirektes Tunneln, bei dem das Wellenpaket von einem Regularitätsbereich durch den Chaosbereich in den anderen Regularitätsbereich tunnelt. Dies entspricht dem 3-Level-Prozeß in Abschnitt 3.4.5, bzw. in allgemeinerer Formulierung dem „chaos assisted tunneling“ von Blockmatrix-Modellen aus drei Blöcken.
3. Indirektes Tunnel aus dem einen Regularitätsbereich über den umgebenden „Strand“-Bereich in den Chaosbereich, und von dort aus weiter über den „Strand“-Bereich der zweiten Inseln in den anderen Regularitätsbereich.

Man nimmt an, daß der dritte Prozeß der dominierende ist, wobei das genaue Verhältnis vom betrachteten System abhängt.

### 3.4.7 Die Lokalisierung von Eigenzuständen in chaotischen Bereichen

Auch über die Lokalisierung chaotischer Eigenzustände lassen sich Aussagen machen. Wie bereits in Abschnitt 3.3.3 erwähnt, sind chaotische Eigenzustände in der Regel sehr weit auf dem chaotischen Phasenraumbereich verteilt lokalisiert. Bestehen partielle Transportbarrieren, so können die chaotischen Eigenzustände im wesentlichen auf Teilbereiche des chaotischen Phasenraumbereichs beschränkt sein. Das kann dazu führen, daß wegen partieller Transportbarrieren



in der Umgebung einer regulären Inseln dort chaotische Eigenzustände lokalisiert sind, die EBK-ähnlichen Quantisierungsregeln folgen. Die Anzahl der in einem Phasenraumbereich lokalisierten Eigenzustände nimmt mit seiner Größe zu. Ein Zustand „belegt“ grob geschätzt etwa eine Fläche von  $2\pi\hbar$  bei Systemen mit einem Freiheitsgrad.

Es ist auch schon ein Tunneleffekt zwischen derartigen chaotischen Zuständen beobachtet worden, sowohl als direkter Übergang als auch als auch indirekt durch Kopplung mit einem regulären Eigenzustand [FD98].

Dies deutet darauf hin, daß der Tunneleffekt eher von der Phasenraum-Topologie bestimmt ist und weniger von Regularität oder Chaos einzelner Phasenraumbereiche und daß „chaos-assisted-tunneling“ ein Teil eines allgemeineren Phänomens ist, nämlich des „transport-assisted-tunneling“.

### 3.4.8 Dynamisches Tunneln

In den bisherigen Ausführungen wurde nicht zwischen dem Tunneln durch Energiebarrieren und dynamischem Tunneln unterschieden. Tatsächlich sind die Mechanismen prinzipiell die gleichen und nur abhängig von der Topologie des Phasenraumes und nicht von der Art der klassischen Erhaltungsgröße, die durch den Tunneleffekt verletzt wird.

Im Einzelfall lassen sich dagegen durchaus Unterschiede in der Dynamik festmachen. In einigen Veröffentlichungen [DH81, LB91, Shi96] ist von resonanten und nichtresonanten regulären Inseln die Rede, zwischen denen der Tunneleffekt stattfindet. Als resonante Inseln werden reguläre Gebiete bezeichnet, die zu periodischen Orbits mit rationaler Windungszahl gehören, die in Folge eines KAM-Szenarios oder durch Bifurkationen von periodischen Orbits entstehen. Alle übrigen Inseln, die beispielsweise durch Potentialmulden entstehen, werden als nichtresonant bezeichnet.

Nichtresonante Inseln sind daher in der Regel durch eine Energiebarriere voneinander getrennt, und auch für stark gestörte Systeme lassen sich die nichtresonanten Inseln meist noch mit den ursprünglichen Potentialmulden identifizieren. Tunnelt zwischen zwei solchen, zueinander symmetrischen Inseln ein Wellenpaket, so kann man vom Tunneln durch eine Energiebarriere sprechen.

Dagegen entstehen resonante Inseln im Laufe des Übergangs von integrierbarer zu chaotischer Dynamik und können in manchen Fällen mit anderen klassischen Erhaltungsgrößen als der Energie identifiziert werden, z.B. dem Drehimpuls [FD98]. Das Tunneln zwischen zwei solchen Inseln wird als dynamisches Tunneln bezeichnet. Oft wird dieser Begriff auch allgemein als Synonym für den Tunneleffekt in gemischten Systemen gebraucht.

Gerade 1 : 1-Resonanzen, d.h. zwei zueinander symmetrische Inseln zu Orbits der Periode 1, werden mehrfach als Beispiele für einen starken dynamischen Tunneleffekt in der Literatur angeführt. Speziell in Systemen, bei denen ein Parameter die Stärke einer äußeren antreibenden Kraft bezeichnet, beobachtet

man, daß die Tunnelrate sehr stark mit der Zunahme der äußeren Kraft (Periode 1) wächst. Dies ist für den DUFFING-Oszillator mit äußerem Antrieb [LB91] und für ein rechteckiges Zwei-Mulden-Potential [Shi96] gezeigt worden.

Dagegen ist für 1 : 2-Resonanzen, d.h. einen Orbit der Periode 2, dessen Umgebung in einem POINCARÉ-Plot in Form zweier regulärer Inseln erscheint, kein Tunneleffekt zu erkennen [DH81]. Dies läßt sich dadurch erklären, daß die Umgebung eines 2-Zyklus in dem POINCARÉ-Plot zwar als zwei verschiedene reguläre Inseln erscheinen, aber die zugehörigen invarianten Tori in Wirklichkeit zu ein und demselben Orbit gehören und unter der Symmetrietransformation  $\mathcal{P}$  in sich selbst übergehen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß in integrierbaren und quasiintegrierbaren Systemen ausschließlich der in Abschnitt 3.4.4 diskutierte 2-Level-Prozeß zum Tunneleffekt beiträgt, der sich in diesem Fall mit einem Tunneln durch Energiebarrieren identifizieren läßt. In gemischten Systemen dominiert dagegen im allgemeinen das „chaos assisted tunneling“, das sich überwiegend mit dynamischem Tunneln, aber auch mit dem Tunneln durch Energiebarrieren in Verbindung bringen läßt.

## 3.5 Numerische Resultate

In diesem Abschnitt werden zunächst die für die quantenmechanischen Berechnungen wichtigsten Algorithmen kurz beschrieben. Im Gegensatz zu den Berechnungen zur Klassischen Mechanik in Kapitel 2 ist nicht von vornherein klar, welche Algorithmen für die quantenmechanische Numerik zu verwenden sind. Im Anschluß daran werden in den weiteren Abschnitten die numerischen Ergebnisse des quantenmechanischen Teils dieser Arbeit präsentiert und diskutiert.

### 3.5.1 Numerische Algorithmen

Für die Iteration der Wellenfunktion wird in dieser Arbeit die sogenannte Split-Operator-Methode [KW96] verwendet. Es handelt sich dabei um ein leistungsstarkes Iterationsverfahren. Bei diesem Verfahren wird der Zeitentwicklungsoperator  $\hat{U}$  für eine genügend kleine Zeitspanne  $\delta$  durch

$$\hat{U}(t + \delta, t) \approx e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta} \approx e^{-\frac{i}{2\hbar} \hat{T} \delta} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{V}(t) \delta} e^{-\frac{i}{2\hbar} \hat{T} \delta} \quad (3.91)$$

angenähert. Dies läßt durch zweimalige Anwendung von (3.10) nachrechnen. Praktisch wird für die Ausführung eines Iterationsschrittes ausgenutzt, daß das Potential  $\hat{V}(t)$  in der Ortsdarstellung diagonal ist, während die kinetische Energie  $\hat{T}$  in der Impulsdarstellung diagonal ist. Daher wird die Wellenfunktion  $\tilde{\psi}(p, t)$  in der Impulsdarstellung mit  $e^{-\frac{i}{2\hbar} \hat{T} \delta}$  multipliziert, das Zwischenergebnis anschließend durch eine FOURIER-Transformation in die Ortsdarstellung

überführt, mit  $e^{-\frac{i}{\hbar}V(t)\delta}$  multipliziert, in die Impulsdarstellung zurücktransformiert und mit  $e^{-\frac{i}{2\hbar}T\delta}$  multipliziert. Als Ergebnis erhält man  $\tilde{\psi}(p, t + \delta)$ .

Die FOURIER-Transformation wird als Fast-FOURIER-Transformation (FFT) mit dem Algorithmus von DANIELSON und LANCZOS durchgeführt [PTVF92].

Die Berechnung der Phasenraumverteilungen erfolgt durch Benutzung der FFT. Wie man aus (3.18) ersieht, läßt sich die WIGNER-Verteilung für festes  $p$  als eine FOURIER-Transformation von  $\psi^*(q - \frac{1}{2}\eta\hbar, t) \psi(q + \frac{1}{2}\eta\hbar, t)$  auffassen. Dadurch läßt sich die Berechnung der WIGNER-Verteilung drastisch beschleunigen. Für ein Gitter aus  $n \times n$  Punkten sind nur  $n$  FOURIER-Transformationen (je eine für jeden Wert von  $p$ ) notwendig statt  $n^2$  numerischer Integrationen. Die Anzahl der Gitterpunkte variiert für die verschiedenen Höhenliniendiagramme in dieser Arbeit zwischen  $50 \times 50$  und  $120 \times 120$ .

Die HUSIMI-Verteilung in (3.20) läßt sich als Betragsquadrat der FOURIER-Transformierten von  $\psi(x, t) e^{-\frac{s}{2\hbar}(x-q)^2}$  auffassen. Die Verteilung von COHEN ergibt sich aus dem Betragsquadrat des Produktes der Wellenfunktion mit ihrer FOURIER-Transformierten und ist somit die in diesem Zusammenhang die am einfachsten zu berechnende Verteilung überhaupt.

Ist eine Funktion  $f(t)$  auf  $N$  äquidistanten diskreten Stützstellen im Abstand  $\Delta t$  gegeben, so gibt es eine spezielle Frequenz, die NYQUIST-Frequenz

$$f_c = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{\omega_c}{2\pi}, \quad (3.92)$$

welche die maximale Frequenz der FOURIER-Transformierten  $\tilde{f}(\omega)$  angibt, die durch die Abtastung von  $f(t)$  an den Stützstellen „erfaßt“ wird. Enthält  $\tilde{f}(\omega)$  keine Frequenzen, die größer als die NYQUIST-Frequenz sind, d.h.  $\tilde{f}(\omega) = 0$  für  $|\omega| > \omega_c$ , so läßt sich die Funktion  $f(t)$  durch ihre Funktionswerte an den Stützstellen in guter Näherung beschreiben. Durch die FFT erhält man  $\tilde{f}(\omega)$  auf  $N$  äquidistanten Stützstellen<sup>18</sup> zwischen  $-\omega_c$  und  $+\omega_c$  im Abstand

$$\Delta\omega = \frac{2\omega_c}{N}. \quad (3.93)$$

Bezeichnet  $T = N \Delta t$  das Zeitintervall, in dem  $f(t)$  abgetastet wird, so erhält man für Frequenzintervall, auf dem die Stützstellen von  $\tilde{f}(\omega)$  gegeben sind

$$\Omega := 2\omega_c = \frac{2\pi N}{T} \quad (3.94)$$

aus (3.92) und (3.93) [PTVF92].

Die Variablen  $t$  und  $\omega$  entsprechen im Orts- und Impulsraum  $q$  und  $k = \frac{p}{\hbar}$ . Ist die Wellenfunktion  $\psi(q)$  auf  $N$  diskreten Stützstellen zwischen  $-\frac{q_0}{2}$  und  $\frac{q_0}{2}$  im Ortsraum gegeben sowie  $\tilde{\psi}(p)$  zwischen  $-\frac{p_0}{2}$  und  $\frac{p_0}{2}$ , so ergibt sich aus (3.94) die Relation

$$N = \frac{q_0 p_0}{2\pi\hbar} \quad (3.95)$$

<sup>18</sup>Speziell für die Anwendung der FFT muß  $N$  eine Potenz von 2 sein.

zwischen  $q_0$ ,  $p_0$ ,  $N$  und  $\hbar$ .

Für die numerische Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Wellenfunktion ist es sinnvoll, die Systemparameter so zu wählen, daß  $N$  möglichst klein ist, damit die Berechnung möglichst schnell durchgeführt werden kann. Dazu sollte der Phasenraumbereich, in den die Wellenfunktion im Laufe der zeitlichen Entwicklung vordringen kann, möglichst klein sein. Ungünstig sind beispielsweise großräumige chaotische Bereiche oder zahlreiche miteinander verbundene kleine chaotische Bereiche, wie sie in Spezialfall 1 (1.23) für  $c > 0.05$  vorkommen<sup>19</sup> (Abb. 2.3) oder in Spezialfall 2 (1.26) für  $c > 1$  (Abb. 2.6). Ferner dürfen die klassischen Strukturen im betrachteten Phasenraumbereich, die Einfluß auf die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion nehmen können, nicht zu klein<sup>20</sup> sein, ansonsten muß die Zahl der Stützstellen weiter erhöht werden. Außerdem steigt die Anzahl der benötigten Stützstellen mit kleiner werdendem  $\hbar$ .

Um sowohl reguläre als auch chaotische Dynamik quantenmechanisch untersuchen zu können, empfiehlt sich ein Phasenraumbereich mit großen regulären Inseln, die in einen chaotischen Bereich gleicher Größenordnung eingebettet sind. Dies ist in Spezialfall 1 und 2 für  $c < 0.1$  nicht gegeben. Soll zusätzlich der quantenmechanische Tunneleffekt betrachtet werden, so müssen sich mindestens zwei zueinander symmetrische reguläre Inseln im Chaosbereich befinden. Es wird im folgenden ein Parameterbereich angegeben, der sich für eine numerische Analyse eignet.

### 3.5.2 Die zeitliche Entwicklung von Wellenpaketen

In diesem Abschnitt wird numerisch die zeitliche Entwicklung von Wellenpaketen minimaler Unschärfe untersucht, die anfangs entweder in einem regulären oder in einem chaotischen Bereich des Phasenraumes lokalisiert sind. Ausgehend von obigen Überlegungen, wird für die Untersuchungen  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0.5$  und  $g(t) = \cos t$  gewählt. Es handelt sich hierbei um den Spezialfall 2 (1.26).

Abb. 3.6 zeigt ein Phasenportrait des klassischen Systems aus 22 verschiedenen Trajektorien. Der chaotische Bereich wird in dieser Abbildung durch einen einzigen Orbit erzeugt. Es handelt sich hierbei um eine Ausschnittsvergrößerung von Abb. 2.6(j). In den chaotischen Phasenraumbereich sind zwei große reguläre Inseln eingebettet, die Orbits mit der Periode  $2\pi$ , d.h. Fixpunkten der POINCARÉ-Abbildung entsprechen. Die beiden Inseln gehen mit zunehmender Störung aus den regulären Inseln der Potentialmulden des ungestörten Systems hervor. Umgeben ist der chaotische Bereich von regulärer Dynamik, die sich bis ins Unendliche erstreckt.

<sup>19</sup>Die Diskussion wird an dieser Stelle speziell für  $b = 2$  geführt. Für andere Werte von  $b$  entwickelt sich die Dynamik mit wachsendem  $c$  ähnlich. Das Entstehen bestimmter Strukturen findet dort allerdings für andere Werte von  $c$  statt.

<sup>20</sup>Strukturen, deren Fläche sehr klein gegen  $\hbar$  ist, können vernachlässigt werden.

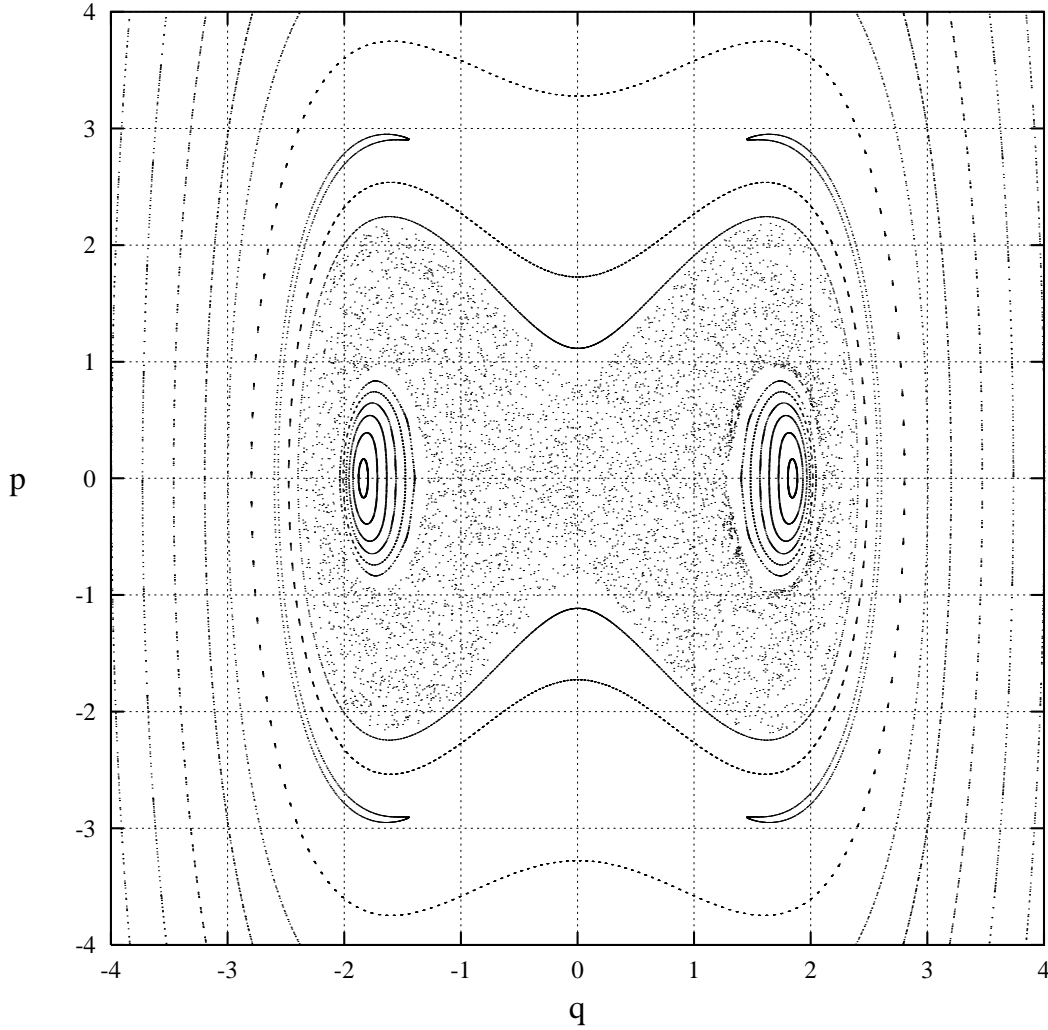


Abbildung 3.6: Klassisches Phasenportrait:  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0.5$  und  $g(t) = \cos(t)$ .

Für zwei verschiedene Werte von  $\hbar$ , nämlich 0.2 und 0.01 wird im folgenden die quantenmechanische Dynamik des Systems untersucht. Für  $\hbar = 0.01$  sollte das System ein „klassischeres“ Verhalten aufweisen als für  $\hbar = 0.2$ .

In Abb. 3.7 wird die zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets am Startpunkt  $(3.0, 0.0)$  außerhalb des klassisch chaotischen Bereichs gezeigt. Anfangszustand ist ein GAUSSSches Wellenpaket minimaler Unschärfe mit dem Quetschparameter  $s = 2$ . Die dort startende klassische Trajektorie liegt nahe an einem Orbit der Periode  $2\pi$ .

In der HUSIMI-Verteilung<sup>21</sup> sieht man sehr gut, wie das Wellenpaket den chaotischen Bereich umfließt. Schon nach einer Systemperiode hat sich die anfängliche

<sup>21</sup>Für die Berechnung der HUSIMI-Verteilung wird immer derselbe Wert des Quetschparameters (hier  $s = 2$ ) gewählt wie für die Anfangsverteilung.

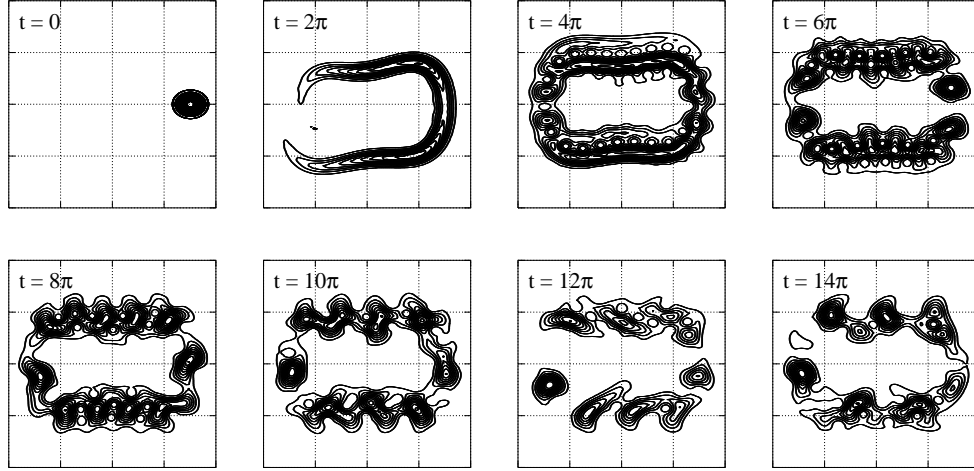


Abbildung 3.7: Höhenliniendiagramme der HUSIMI-Verteilung für die Zeiten  $t = 2\pi n$  mit  $\hbar = 0.2$ . Gezeigt wird der Bereich  $[-4, 4] \times [-10, 10]$  mit  $q$  auf der horizontalen und  $p$  auf der vertikalen Achse. Anfangszustand ist ein GAUSSsches Wellenpaket minimaler Unschärfe mit Quetschparameter  $s = 2$  bei  $(3.0, 0.0)$  in einem klassisch regulären Gebiet. Man beachte die unterschiedlichen Skalierungen der  $q$ - und  $p$ -Achse.

Lokalisierung aufgelöst, und nach zwei Perioden hat sich bereits ein Ring gebildet, der im Laufe der nächsten Perioden in einzelne Segmente zerfällt.

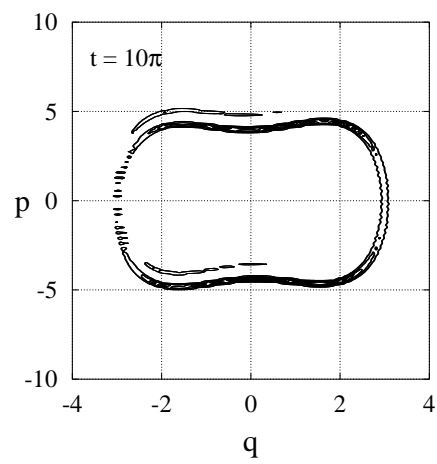
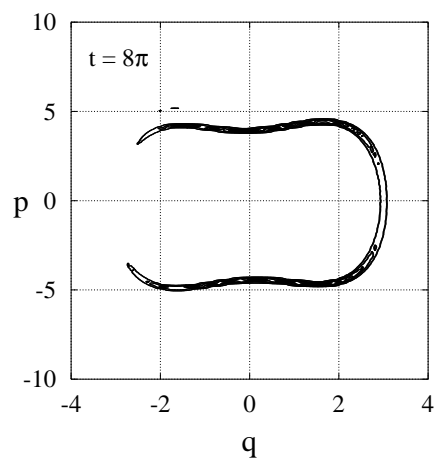
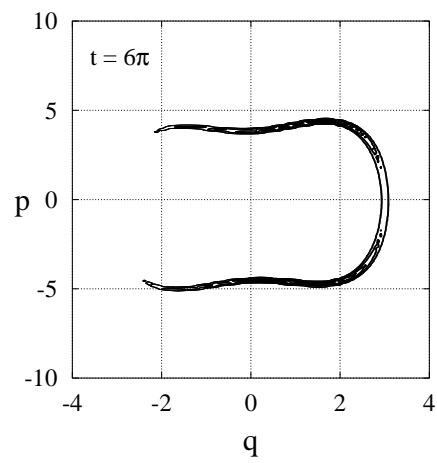
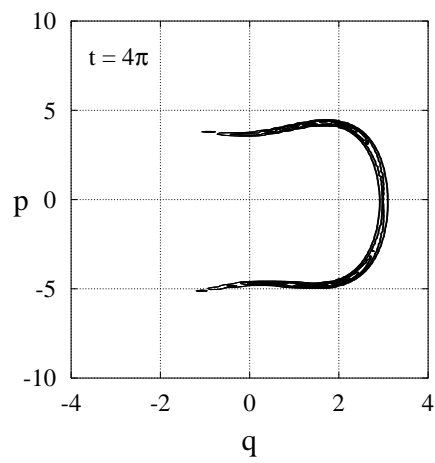
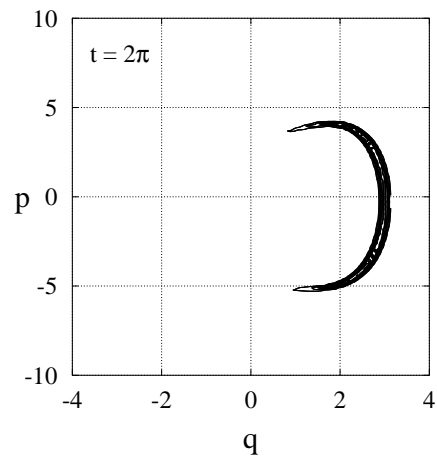
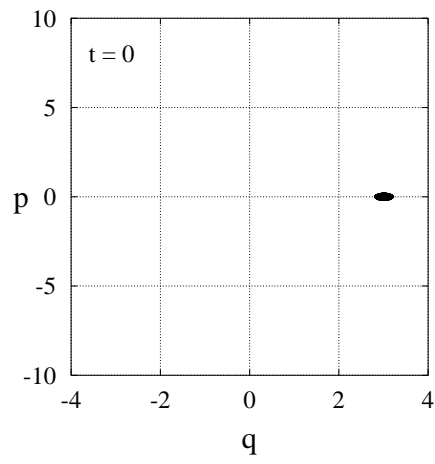
Eine klassische statistische Verteilung würde innerhalb der ersten Periode eine ähnliche Entwicklung durchmachen. Diejenigen Trajektorien des Ensembles, die sich anfang weiter außerhalb (vom Ursprung aus betrachtet) befinden, besitzen eine höhere Energie und „umrunden“ den Ursprung in kürzerer Zeit als die weiter innen liegenden Trajektorien<sup>22</sup>. Hierdurch läßt sich erklären, daß zur Zeit  $2\pi$  der „vordere“ Arm der HUSIMI-Verteilung (der untere Arm im zweiten Bild von Abb. 3.7) vom Betrag her einen größeren Impuls aufweist als der „hintere“ Arm, der weiter „innen“ liegt.

Nach zwei Systemperioden „überholt“ der „vordere“ Arm den langsameren „hinteren“ Arm, und es bildet sich ein Ring aus. In den folgenden Perioden interferiert die Wellenfunktion mit sich selbst, und der Ring zerfällt.

In Abb. 3.8 ist für  $\hbar = 0.01$  die zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets am selben Startpunkt dargestellt. Das Wellenpaket zerfließt deutlich langsamer, weil die Orts- und die Impulsunschärfe deutlich kleiner sind als im obigen Fall. In dieser Abbildung werden nur sechs Höhenlinien dargestellt, während für alle anderen Abbildungen in dieser Arbeit zehn Höhenlinien verwendet werden.

Nach fünf Perioden hat der „schnellere“ Arm der Wellenfunktion den „langsa-

<sup>22</sup>Dies ist eine grundlegende Eigenschaft nichtlinearer Oszillatoren: Für ein Potential, das stärker anwächst als  $q^2$ , umrunden die außen liegenden Trajektorien den Ursprung schneller als die innen liegenden.



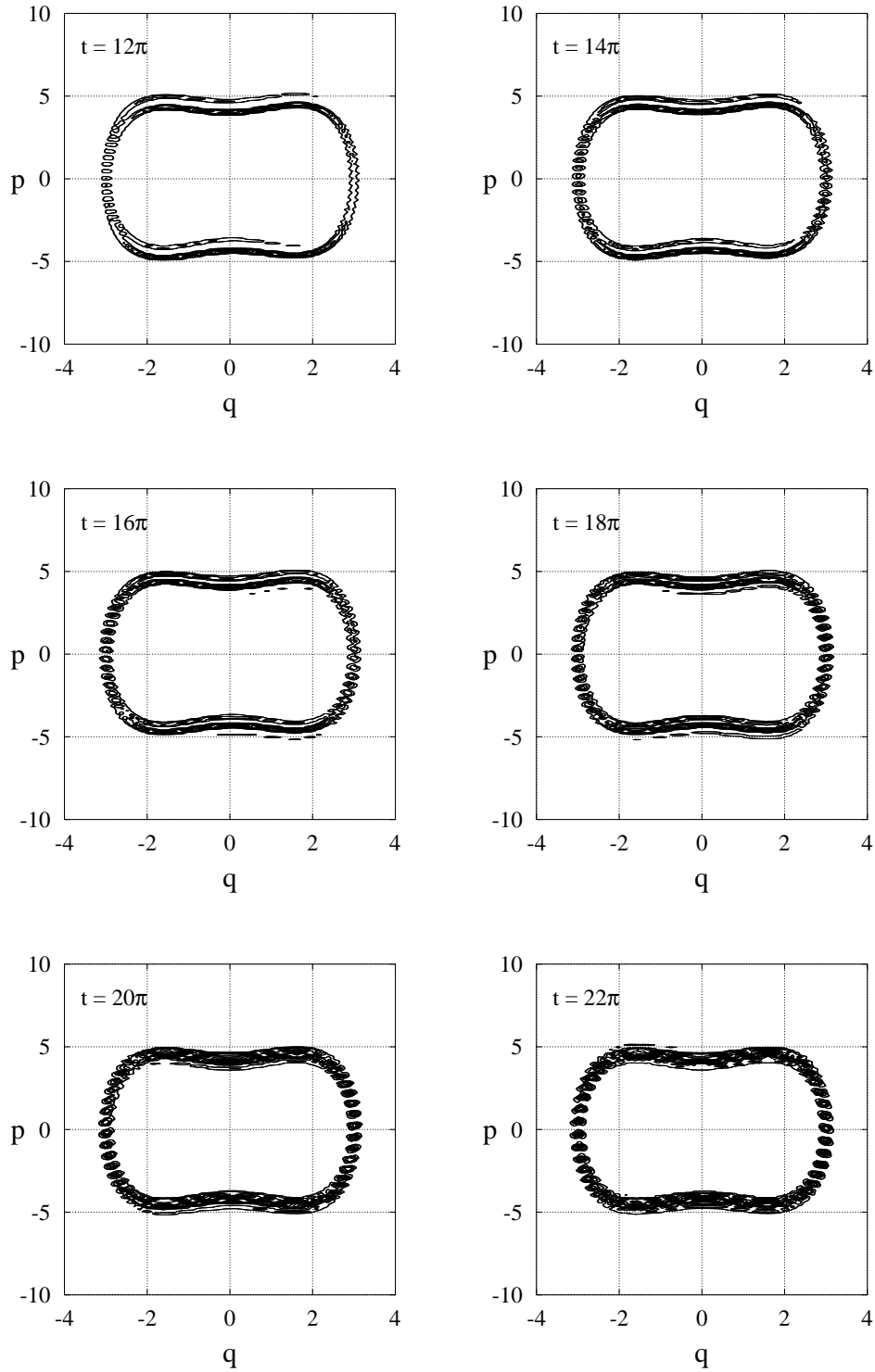


Abbildung 3.8: Höhenliniendiagramme der HUSIMI-Verteilung für die Zeiten  $t = 2\pi n$  mit  $\hbar = 0.01$ . Anfangszustand ist ein GAUSSsches Wellenpaket minimaler Unschärfe mit Quetschparameter  $s = 1$  bei  $(3.0, 0.0)$  in einem klassisch regulären Gebiet. Man beachte die unterschiedlichen Skalierungen der  $q$ - und  $p$ -Achse.



meren“ eingeholt. Deutlich kann man erkennen, daß bei großen Impulsen beide Arme nebeneinander durch den Phasenraum laufen, während sie sich an der  $q$ -Achse überlagern. Dort kommt es dann auch zur Interferenz. Im Laufe der Zeit bildet sich abermals ein Ring, der durch Interferenz in einzelne Segmente zerfällt.

Im statistischen Mittel werden diese Ringe aber recht gleichmäßig ausgefüllt. Es handelt sich hierbei um das quantenmechanische Analogon zu einer invarianten Linie in der Klassischen Mechanik. Insgesamt kann man sagen, daß die Wellenfunktion deutlich ein „reguläres“ Verhalten an den Tag legt.

Abb. 3.9 zeigt die zeitliche Entwicklung eines im chaotischen Bereich gestarteten Wellenpakets für  $\hbar = 0.2$  mit dem Quetschparameter  $s = 0.5$ . Diese Wahl von  $s$  ist notwendig, da es ansonsten nicht möglich ist ein Wellenpaket vollständig im chaotischen Phasenraumbereich zu lokalisieren. Die Anfangsverteilung ist bei  $(0, 0)$  lokalisiert und somit symmetrisch unter Paritätsumkehr. Da der HAMILTON-Operator mit dem Paritätsoperator vertauscht, sind die Quasieigenfunktionen des Systems entweder symmetrisch oder antisymmetrisch. Die gewählte Anfangsverteilung läßt sich daher ausschließlich nach symmetrischen Quasienergiezuständen entwickeln und bleibt für alle Zeit invariant unter Paritätsumkehr.

In Abschnitt 3.4.7 wurde erwähnt, daß die Anzahl der in einem Phasenraumbereich lokalisierten Quasienergiezustände mit der Größe dieses Phasenraumbereichs (in Einheiten von  $\hbar$ ) zusammenhängt. Für  $\hbar = 0.2$  sind daher nur relativ wenige im chaotischen Bereich lokalisierte Quasienergiezustände zu erwarten.

Ein im chaotischen Bereich gestartetes Wellenpaket läßt sich daher nach nur einigen wenigen Quasienergiezuständen entwickeln, und wird daher in der Regel eine quasiperiodische Entwicklung mit relativ kurzer Periode durchlaufen. Und tatsächlich kehrt das Wellenpaket in Abb. 3.9 nach etwa 7 Systemperioden beinahe wieder in den anfänglichen Zustand über. Klassisch läßt sich dieses Verhalten nicht verstehen.

Für kleinere Werte von  $\hbar$  erwartet man, daß die Quasiperiodizität, die auch hier auftreten muß, erst nach sehr langer Zeit in Erscheinung tritt. Dieser Fall wird in Abb. 3.10 dargestellt. Nach einer Systemperiode ist die Lokalisierung des Wellenpakets weitgehend aufgehoben. Man sieht, wie sich die Wellenfunktion in der HUSIMI-Verteilung entlang der Separatrix des ungestörten Systems bewegt und die regulären Inseln einzuschließen beginnt. Nach drei Perioden hat sich das Wellenpaket weitgehend über den klassisch chaotischen Phasenraumbereich ausgebreitet. Es zeigt dort starke räumliche und zeitliche Fluktuationen. Auch nach sehr langer Zeit beobachtet man keine Rückkehr in den Anfangszustand.

In Abb. 3.11 wird die Wellenfunktion zur Zeit  $t = 10\pi$  in der WIGNER-Verteilung sowie der Verteilung von COHEN dargestellt. In diesen beiden Darstellungen läßt sich keinerlei Verbindung zur klassischen Dynamik erkennen. Die WIGNER-Verteilung oszilliert sehr stark über kurze Distanzen. Selbst wenn man jede einzelne der Höhenlinien in einer anderen Farbe betrachtet, sind keinerlei Strukturen zu erkennen. Aus der Verteilung von COHEN läßt sich nur schließen,

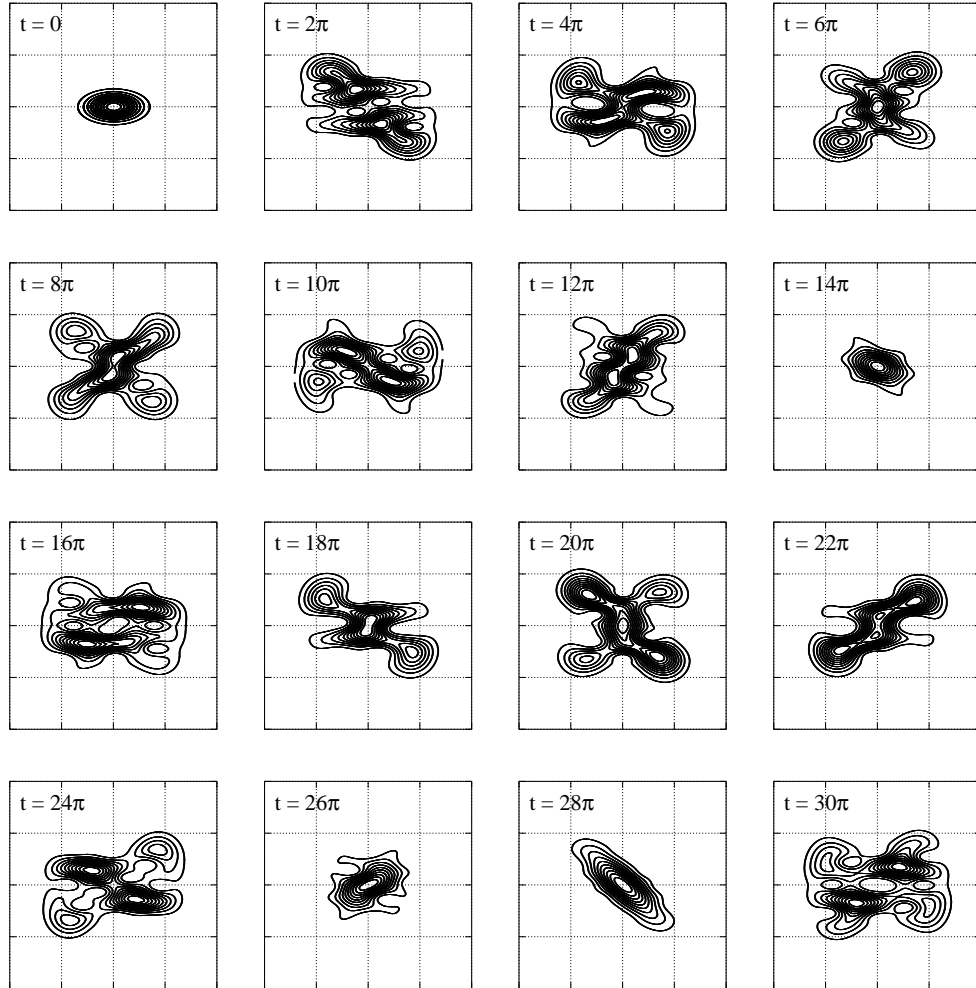


Abbildung 3.9: Höhenliniendiagramme der HUSIMI-Verteilung für die Zeiten  $t = 2\pi n$  mit  $\hbar = 0.2$ . Gezeigt wird der Bereich  $[-4, 4] \times [-4, 4]$  mit  $q$  auf der horizontalen und  $p$  auf der vertikalen Achse. Anfangszustand ist ein GAUSSsches Wellenpaket minimaler Unschärfe mit Quetschparameter  $s = \frac{1}{2}$  bei  $(0.0, 0.0)$  im klassisch chaotischen Gebiet.

daß sowohl  $\psi(q)$  als auch  $\tilde{\psi}(p)$  auf kurzen Distanzen stark oszillieren. Diese Bilder sind typisch für diese beiden Verteilungen. Daher wird für die Untersuchung von nichtlinearer Dynamik in der Quantenmechanik fast ausschließlich die HUSIMI-Verteilung verwendet.

Abb. 3.12 zeigt die zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets, das nicht invariant unter Paritätsumkehr ist, ebenfalls für  $\hbar = 0.01$ , aber zum Quetschparameter  $s = 2$ . Die Anfangsverteilung liegt zwischen der rechten Insel und dem äußeren regulären Bereich. Nach einer Periode hat sich das Wellenpaket aufgespalten, und nach etwa drei Perioden ist es im wesentlichen über den chaotischen Bereich verteilt.

Abb. 3.13 zeigt das Frequenzspektrum der Rückkehrwahrscheinlichkeit (3.53) für die in den Abb. 3.9 und 3.10 gezeigten Wellenpakete. Aufgetragen ist das Betragsquadrat der FOURIER-Transformierten in willkürlichen Einheiten gegen die sogenannten *Quasiwinkel*

$$\vartheta = 2\pi\omega = \frac{T}{\hbar}\epsilon. \quad (3.96)$$

Die Quasiwinkel sind nur im Intervall  $[0, 2\pi[$  eindeutig, weil die Quasienergien  $\epsilon$  nur im Intervall  $[0, \frac{2\pi\hbar}{T}[$  eindeutig sind.

Es fällt auf, daß in Abb. 3.13(a) das Spektrum von zwei Peaks dominiert wird. Diese liegen bei den Quasiwinkeln  $\vartheta_1 \approx 1.857$  und  $\vartheta_2 \approx 2.796$ . Die Perioden der Phasenfaktoren  $e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_i t}$  der dazu korrespondierenden Quasienergiezustände sind daher  $T_1 \approx 21.3$  und  $T_2 \approx 14.1$ . Diese beiden Perioden sind beinahe kommensurabel: ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches beträgt  $42.3 \approx 6.7 \cdot 2\pi$ , also etwa sieben Systemperioden. Das erklärt, warum sich das chaotische Wellenpaket zu  $\hbar = 0.2$  (vgl. Abb. 3.9) nach 7 und 14 Systemperioden fast genau wieder im Anfangszustand befindet.

Dagegen weist das Frequenzspektrum des chaotischen Wellenpakets zu  $\hbar = 0.01$  (vgl. Abb. 3.10) in Abb. 3.13(b) schon eine deutlich andere Struktur auf. Dieses Spektrum von einer ganzen Reihe von Frequenzen dominiert und läßt sich im Gegensatz zu dem Spektrum in Abb. 3.13(a) durchaus als chaotisch ansehen.

### 3.5.3 Der Tunneleffekt

In diesem Abschnitt wird für die oben gewählten Systemparameter der Tunnel-effekt zwischen den beiden regulären Inseln demonstriert. Da sich die beiden Inseln mit den Potentialmulden des ungestörten Systems identifizieren lassen, kann man in diesem Fall von einem Tunneln durch eine Energiebarriere sprechen.

Abb. 3.14 zeigt für  $\hbar = 0.2$  das Tunneln eines anfänglich in der rechten Insel lokalisierten Wellenpakets mit dem Quetschparameter  $s = 2$  in die linke Insel und zurück. Eine Tunnelperiode beträgt etwa 260 Systemperioden.

Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, daß das Wellenpaket in den regulären Inseln jeweils leicht oszilliert. Das liegt daran, daß für die Anfangsverteilung eine

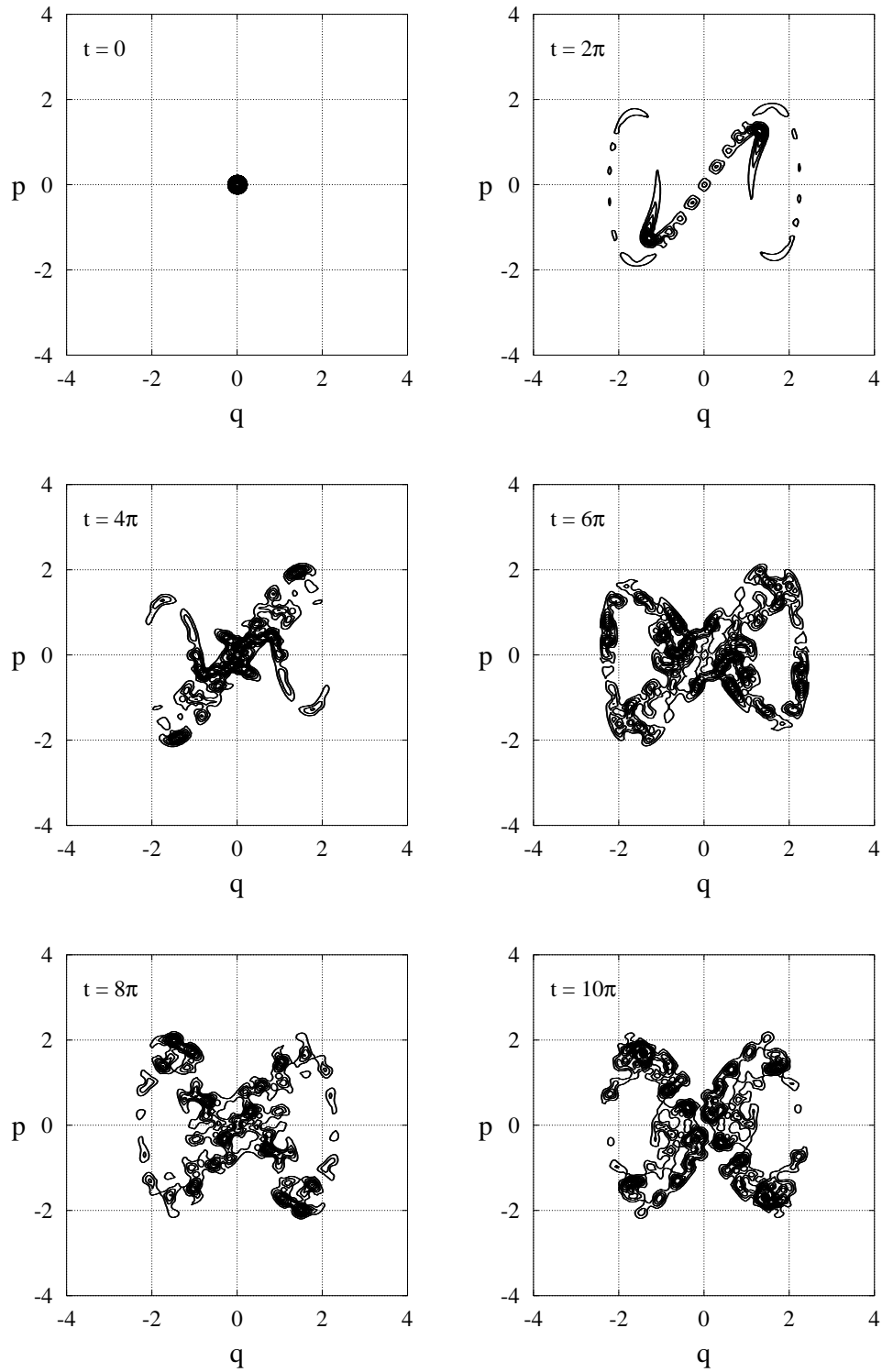


Abbildung 3.10: Höhenliniendiagramme der HUSIMI-Verteilung für die Zeiten  $t = 2\pi n$  mit  $\hbar = 0.01$ . Anfangszustand ist ein GAUSSsches Wellenpaket minimaler Unschärfe mit Quetschparameter  $s = 1$  bei bei  $(0.0, 0.0)$  im klassisch chaotischen Gebiet.

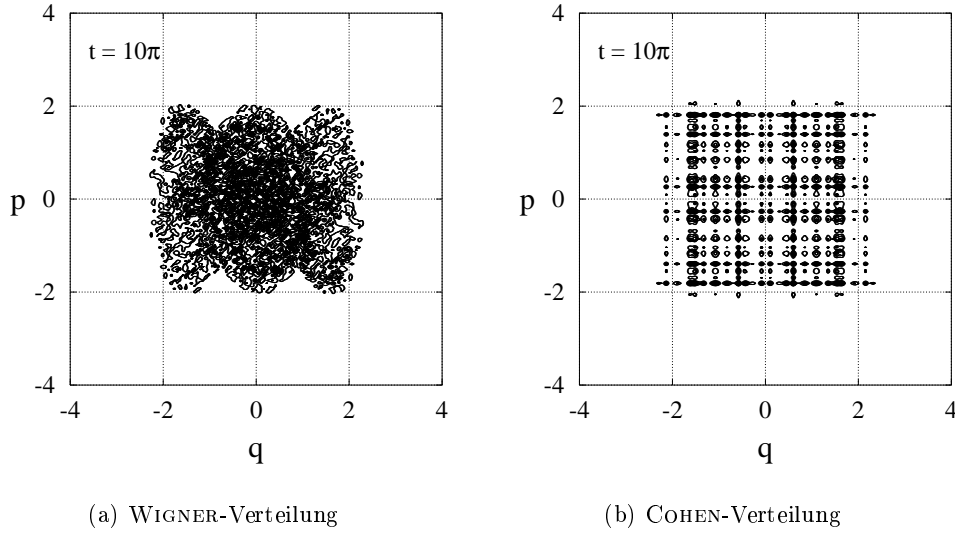


Abbildung 3.11: Höhenliniendiagramme der Verteilungen von (a) WIGNER und (b) COHEN für denselben Zustand wie im letzten Teilbild von Abb. 3.10.

GAUSS-Verteilung gewählt wurde, die nicht exakt einem Quasienergiezustand des Systems entspricht. Auf den Tunneleffekt als solchen hat dies aber keine Auswirkungen.

In den Abb. 3.15 und 3.16 wird die gleiche Entwicklung in den Verteilungen von WIGNER und COHEN dargestellt. Im Fall der WIGNER-Verteilung erkennt man zwischen den beiden regulären Inseln ein Gebiet, in dem diese Phasenraumverteilung sehr stark mit großen Maxima und tiefen Minima oszilliert, während dort in der HUSIMI-Verteilung und auch in der Verteilung von COHEN nichts zu erkennen ist. Die Fluktuationen der Verteilung von COHEN innerhalb der Inseln sind darauf zurückzuführen, daß die Anfangsverteilung kein exakter EBK-Zustand der rechten Insel ist.

In Abb. 3.17(a) ist der Erwartungswert von  $\hat{q}$  in Abhängigkeit von der Zeit für 2000 Systemperioden aufgetragen und in Abb. 3.17(b) das Frequenzspektrum. Das Spektrum wird von einem einzigen Peak bei  $\vartheta \approx 0.025 \pm 0.003$  dominiert. Zu erwarten wären zwei etwa gleich große Peaks mit einem Abstand von  $0.024 \pm 0.002$ , der sich aus der Tunnelperiode gemäß (3.76) ergibt. Eine Möglichkeit besteht darin, daß der zweite Peak bei  $\vartheta = 0$  liegt und dort von dem sehr großen Peak überlagert wird, der sich bei der FOURIER-Transformation daher entsteht, daß der Mittelwert der Rückkehrwahrscheinlichkeit ungleich null ist.

Leider war es im Rahmen der zur Verfügung stehenden Rechenzeit nicht möglich, den Tunneleffekt zwischen den Potentialmulden für das ungestörte, integrable System zu zeigen. Untersucht wurde als Anfangsverteilung ein Gaußssches Wellenpaket minimaler Unschärfe mit Quetschparameter  $s = 2$  am Startpunkt  $(1.5, 0.0)$ . Abb. 3.18(a) zeigt den Erwartungswert von  $\hat{q}$  in Abhängigkeit von der Zeit für 2000 Systemperioden. Auffällig sind die Oszillationen mit

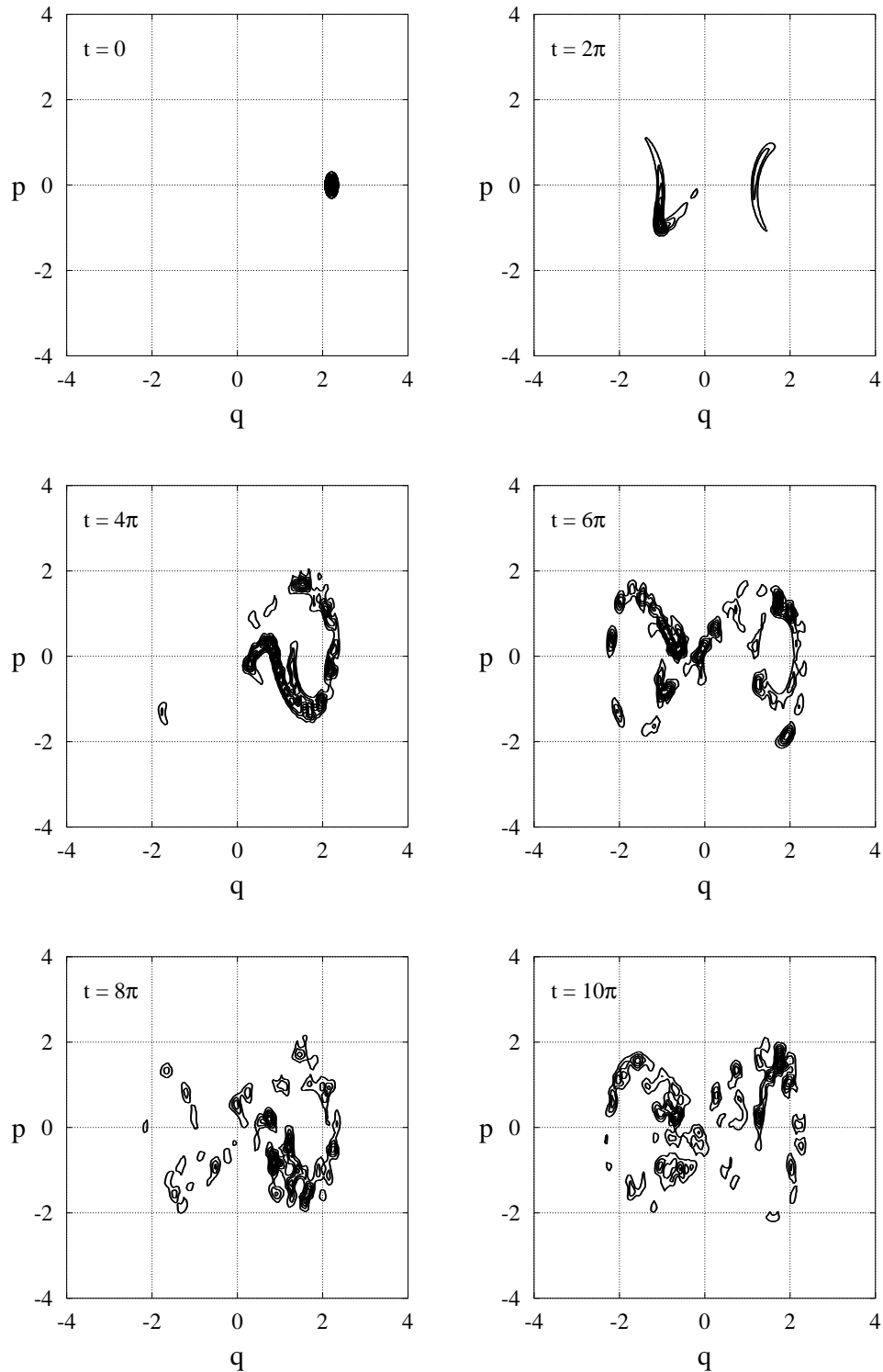


Abbildung 3.12: Höhenliniendiagramme der HUSIMI-Verteilung für die Zeiten  $t = 2\pi n$  mit  $\hbar = 0.01$ . Anfangszustand ist ein GAUSSsches Wellenpaket minimaler Unschärfe mit Quetschparameter  $s = 2$  bei bei  $(2.2, 0.0)$  im klassisch chaotischen Gebiet.

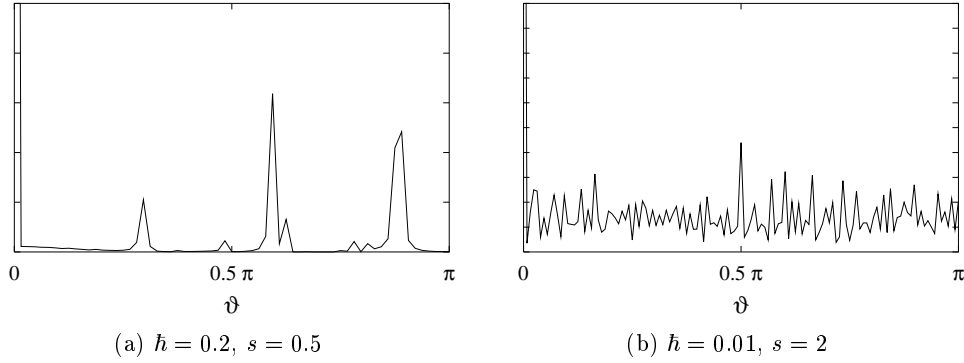


Abbildung 3.13: Dargestellt wird das Frequenzspektrum für die Wellenpakete (a) aus Abb. 3.9 und (b) aus Abb. 3.10.

kleiner Amplitude und einer Periode von etwa 300 Systemperioden. Dieser Effekt läßt sich dadurch erklären, daß das anfangs lokalisierte Wellenpaket kein Eigenzustand war, sondern sich vom EBK-Grundzustand der rechten Insel zur Quantenzahl  $n = 0$  geringfügig unterschied. Die Oszillationen stammen vermutlich von den EBK-Zuständen der beiden Inseln zur Quantenzahl  $n = 1$  oder  $n = 2$ . Wegen (3.80) ist die Energieaufspaltung der EBK-Zustände umso größer, je größer ihre Energie, bzw. ihre Quantenzahl ist. Daher oszillieren diese EBK-Zustände auch schneller als der EBK-Grundzustand.

Weiterhin läßt sich in Abb. 3.18(a) feststellen, daß der Mittelwert von  $\langle \hat{q} \rangle$  im Laufe der Zeit langsam abnimmt. Dies ist vermutlich auf die Oszillation des EBK-Grundzustands zurückzuführen.  $\langle \hat{q} \rangle$  wird nach (3.79) einen Kosinus beschreiben, wenn man von den „kurzzeitigen“ Oszillationen in der Größenordnung von 300 Systemperioden absieht. Durch Vergleich von Abb. 3.18(a) mit einem Kosinus läßt sich die Tunnelperiode abschätzen. Sie liegt bei etwa 30000 Systemperioden bei einem geschätzten relativen Fehler von 20%.

Damit liegt die Tunnelperiode im ungestörten System um drei Größenordnungen über derjenigen im gestörten System bei  $c = 0.5$ . Derartige Unterschiede sind nicht unüblich. Tatsächlich beobachtet man häufig noch größere Unterschiede [DH81, BTU93]. Erklären läßt sich dieser große Unterschied dadurch, daß im integrablen Fall nur der in Abschnitt 3.4.4 diskutierte 2-Level-Prozeß für den Tunneleffekt verantwortlich ist, während im gestörten System die chaotischen Quasienergiezustände die Tunnelrate deutlich erhöhen können.

Abb. 3.18(b) zeigt das Frequenzspektrum des betrachteten Wellenpakets. Deutlich sind zwei Peaks im Abstand von  $\Delta\vartheta \approx 0.0220 \pm 0.003$  zu erkennen. Dies entspricht einer Oszillationsperiode von etwa 286 Systemperioden. Mit ziemlicher Sicherheit handelt es sich bei den Peaks um die Quasiwinkel der beiden EBK-Zustände zu einer höheren Quantenzahl als null, die für die kurzfristigen Oszillationen in Abb. 3.18(a) verantwortlich sind.

Es war leider nicht möglich, ein dynamisches Tunneln zwischen zwei regulären Inseln zu beobachten, die sich nicht mit den Potentialmulden des ungestörten

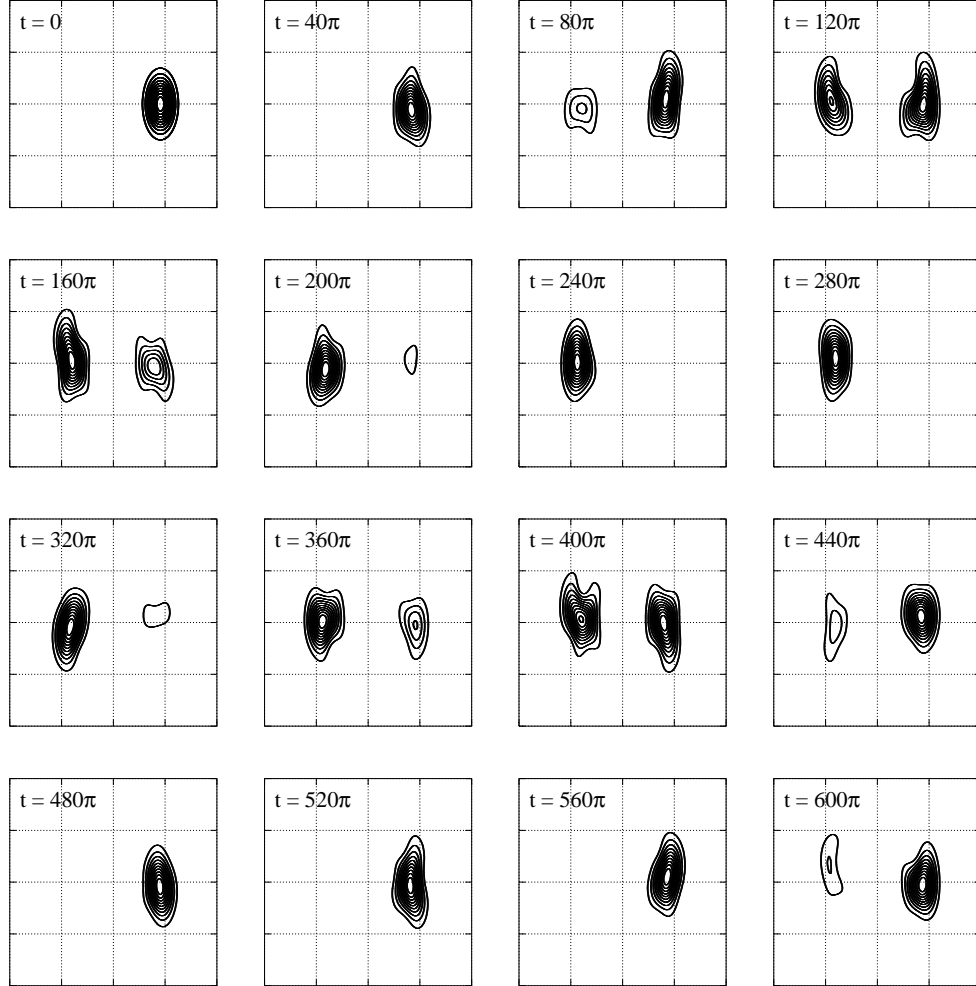


Abbildung 3.14: Höhenliniendiagramme der HUSIMI-Verteilung für die Zeiten  $t = 40\pi n$  mit  $\hbar = 0.2$ . Gezeigt wird der Bereich  $[-4, 4] \times [-4, 4]$  mit  $q$  auf der horizontalen und  $p$  auf der vertikalen Achse. Anfangszustand ist ein GAUSSsches Wellenpaket minimaler Unschärfe mit Quetschparameter  $s = 2$  bei  $(1.8, 0.0)$  in der regulären Inseln, die aus der rechten Potentialmulde hervorgegangen ist. Beobachtet wird eine Tunnelperiode von etwa 260 Systemperioden.



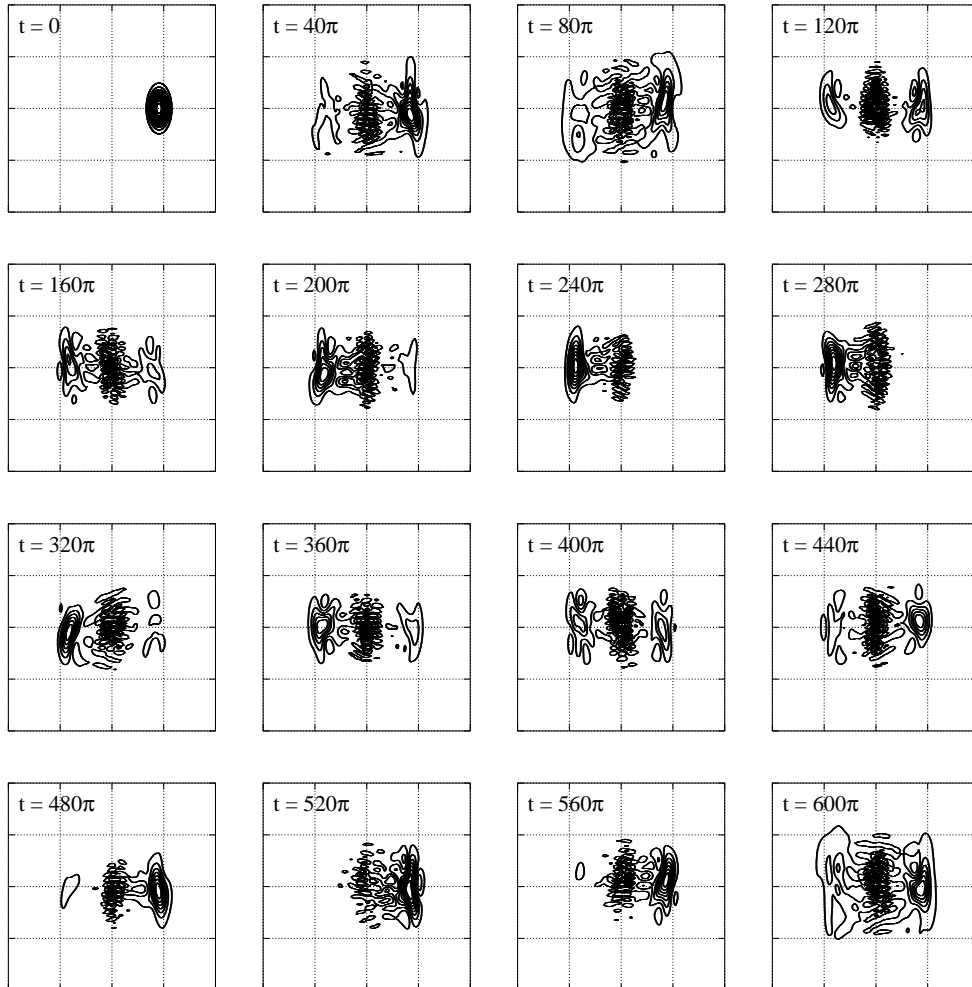


Abbildung 3.15: Wie Abb. 3.14, jedoch WIGNER-Verteilung.

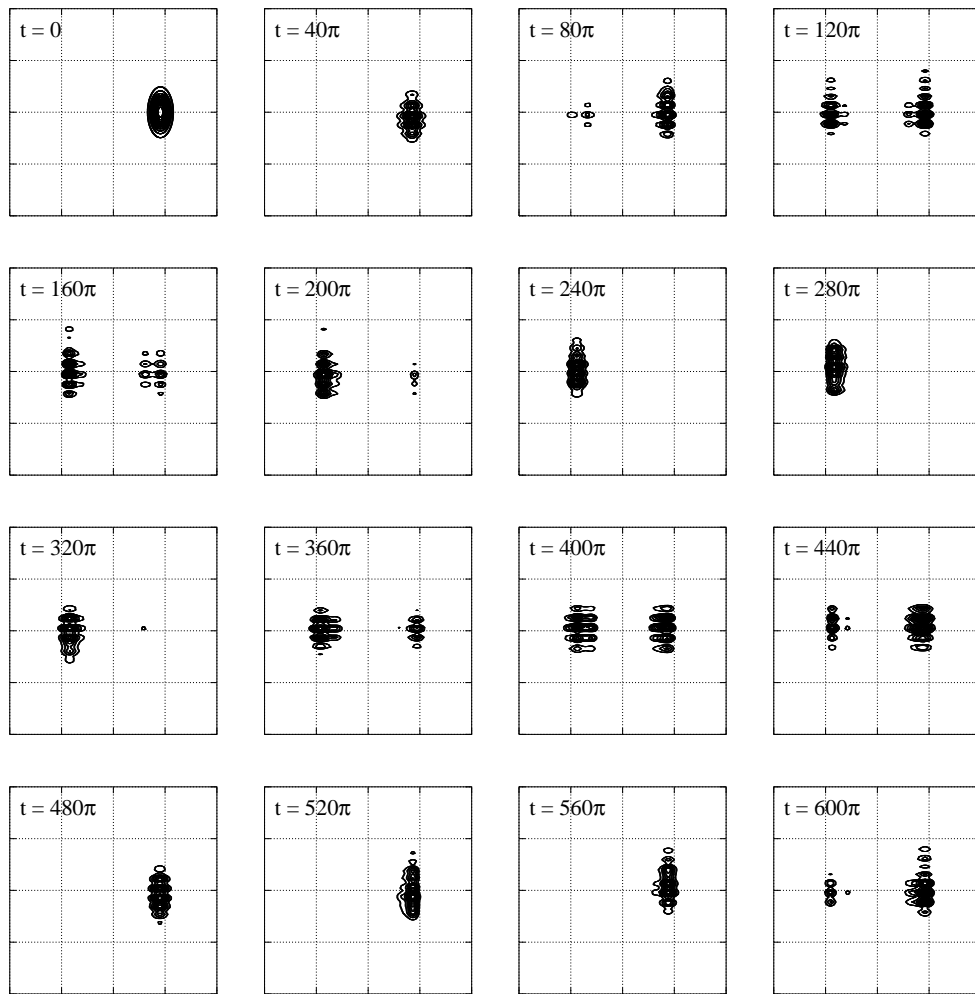
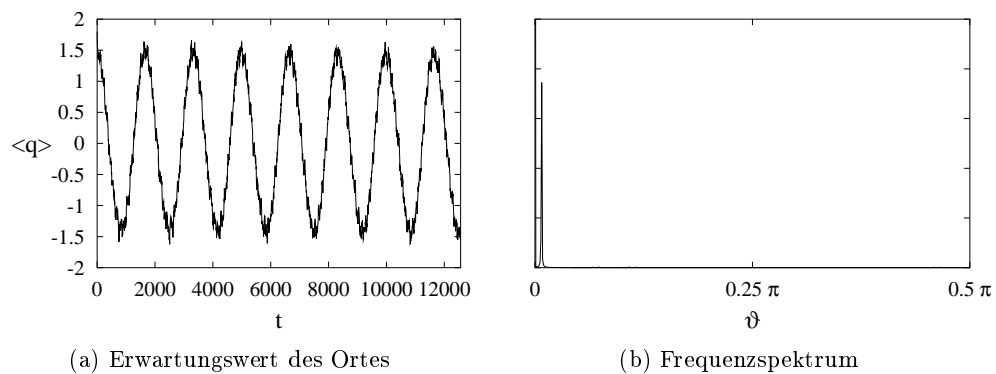


Abbildung 3.16: Wie Abb. 3.14, jedoch COHEN-Verteilung.

Abbildung 3.17: Gezeigt wird (a) der Erwartungswert des Ortes  $q$  sowie (b) das Frequenzspektrum des in Abb. 3.10 dargestellten Wellenpakets.

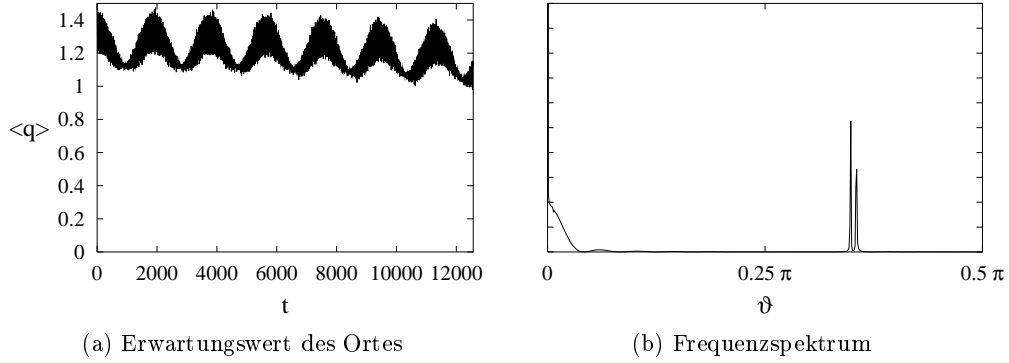


Abbildung 3.18: Gezeigt wird (a) der Erwartungswert des Ortes  $q$  sowie (b) das Frequenzspektrum für die zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets für den integrablen Fall mit  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0$ ,  $\hbar = 0.2$ . Anfangszustand ist ein GAUSSsches Wellenpaket zum Quetschparameter  $s = 2$  bei  $(1.5, 0.0)$ .

System identifizieren lassen. Aufgrund der Phasenraumstruktur konnten keine derartigen regulären Inseln gefunden werden, die die in Abschnitt 3.5.1 Anforderungen erfüllen. Entweder sind diese Inseln zu klein, zu weit voneinander entfernt, nicht durch einen chaotischen Bereich verbunden, so daß die Tunnelperiode extrem groß sein dürfte, oder diese Inseln treten in einer verwobenen Struktur aus chaotischen und regulären Bereichen auf, für deren numerische Erfassung eine zu große Zahl an Gitterpunkten nötig wäre.

Im Fall des DUFFING-Oszillators mit äußerer Anregung ist es dagegen möglich, Parameter zu finden, für die sowohl zwei aus den Potentialmulden hervorgegangene reguläre Inseln als auch zwei durch eine 1 : 1-Resonanz entstandene Inseln in einem chaotischen Bereich zusammen existieren. Dort lassen sich sowohl das Tunneln durch eine Energiebarriere als auch dynamisches Tunneln beobachten [LB91].



## 4 Schlußbemerkungen

In dieser Arbeit wurde die klassisch-mechanische und die quantenmechanische Dynamik chaotischer HAMILTON-Systeme untersucht. Der Vergleich dieser beiden dynamischen Theorien wurde in Anlehnung an [KW96] anhand des ungedämpften DUFFING-Oszillators mit parametrischer Anregung durchgeführt.

In Kapitel 2 wurde die Definition chaotischer Dynamik im Rahmen der klassischen Mechanik gegeben. Es wurden die Szenarien diskutiert, die für das untersuchte System zum Entstehen von Chaos führen: das Aufbrechen der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen Fixpunktes und das KAM-Szenario. Das Auftreten dieser Szenarien konnte numerisch anhand von Phasenportraits demonstriert werden.

Ferner wurde allgemein die Stabilität periodischer Orbits im Rahmen einer linearen Stabilitätsanalyse untersucht. Für nichtautonome Systeme mit einem Freiheitsgrad der Bewegung führte dies auf die HILL-Gleichung, die zwar im allgemeinen nicht in geschlossener Form gelöst werden kann, über deren Lösungen aber dennoch einige grundlegende Aussagen getroffen werden konnten. Es zeigt sich, daß die Eigenwerte der Monodromiematrix die Stabilität des linearisierten Systems bestimmen. Die Eigenwerte wiederum können auf die Spur der Monodromiematrix zurückgeführt werden. Für die Fixpunkte des untersuchten Systems wurde die HILL-Gleichung für einige Fallbeispiele analytisch oder numerisch gelöst und durch die Berechnung der Spur der Monodromiematrix das lineare Stabilitätsproblem gelöst.

Es stellte sich heraus, daß die Fixpunkte für wachsendes  $b$  abwechselnd Bereiche der Stabilität und der Instabilität im Parameterraum durchlaufen. Für nicht zu große Störung wurde numerisch gezeigt, daß die Fixpunkte  $(\pm\sqrt{b})$  beim Eintritt in einen Instabilitätsbereich abwechselnd eine Pitchfork- oder Flip-Bifurkation durchlaufen.

In Kapitel 3 wurden die quantenmechanischen Eigenschaften klassisch chaotischer Systeme diskutiert sowie einige Kriterien für das Auftreten von Quantenchaos angegeben. Die Energiezustände oder Quasienergiezustände lassen sich in reguläre und chaotische Zustände unterteilen. Die regulären (Quasi-) Energiezustände lassen sich semiklassisch näherungsweise berechnen und sind in einer Umgebung der klassischen invarianten Tori lokalisiert.

Das (Quasi-) Energiespektrum rein chaotischer Systeme weist statistische Eigenschaften auf, die vergleichbar sind mit denen gewisser Klassen von Zufallsmatrizen. In gemischten Systemen zerfällt das Spektrum nicht nur in einen regulären und einen irregulären, chaotischen Anteil, sondern es können auch

mehrere chaotische Teilspektren auftreten. Diese Teilspektren lassen sich mit einzelnen Regionen des chaotischen Phasenraumbereichs identifizieren, die voneinander durch partielle Transportbarrieren getrennt sind.

Während innerhalb regulärer Inseln im klassischen System stabile Dynamik beobachtet wurde, die auf diese Inseln beschränkt ist, zeigte die Quantendynamik einen Tunneleffekt zwischen zueinander symmetrischen Inseln. Die verschiedenen Modelle, die den Tunneleffekt für integrable und gemischte Systeme beschreiben, wurden ausführlich diskutiert. Es zeigte sich, daß die in der chaotischen Region zwischen den Inseln lokalisierten chaotischen (Quasi-) Eigenzustände den Tunneleffekt in großem Maße beeinflussen.

Abschließend wurde die zeitliche Entwicklung von Wellenpaketen studiert, die anfangs in einem regulären oder chaotischen Phasenraumbereich lokalisiert waren. Es zeigte sich, daß die Wellenpakete (vom Tunneleffekt einmal abgesehen) für alle Zeit in dem Phasenraumbereich blieben, in dem sie zu Anfang lokalisiert waren.

Für große Werte von  $\hbar$  (hier  $\hbar = 0.2$ ) zeigten die untersuchten Wellenpakete ein mit der klassischen Dynamik nur entfernt vergleichbares Verhalten. Das reguläre Wellenpaket bildete in der HUSIMI-Darstellung lokale Maxima und Minima aus, während das chaotische Wellenpaket anfangs ein quasiperiodisches Verhalten zeigte, welches sich durch eine Frequenzanalyse erklären ließ.

Für kleine Werte von  $\hbar$  (hier  $\hbar = 0.01$ ) dagegen verhielten sich die Wellenpakete schon deutlich „klassischer“. Das reguläre Wellenpaket verteilte sich ziemlich gleichmäßig im Bereich der klassischen, invarianten Linien. Zwar gab es auch hier lokale Maxima und Minima der HUSIMI-Verteilung, jedoch auf einer deutlich kleineren Größenskala. Die chaotischen Wellenpakete verteilten sich recht schnell über den chaotischen Bereich des Phasenraumes und zeigten starke räumliche und zeitliche Fluktuationen. Eine Quasiperiodizität der Verteilung war nicht zu beobachten.

Das Tunneln durch eine Energiebarriere im chaotischen Fall wurde mittels der drei in dieser Arbeit diskutierten Phasenraumverteilungen demonstriert. Das Tunneln im integrablen Fall konnte leider nicht gezeigt werden. Mit Hilfe der numerischen Daten war es zumindest möglich, eine Abschätzung der Tunnelperiode anzugeben.

Leider konnte der dynamische Tunneleffekt nicht gezeigt werden. Mit einer hohen Gitterauflösung genügend Rechenaufwand müßte er sich aber auch für kleinere resonante Inseln im System des ungedämpften DUFFING-Oszillators mit parametrischer Anregung nachweisen lassen.

# Anhang





## A Floquet-Theorie

In diesem Anhang soll ein kurzer Überblick über die 1883 von FLOQUET [Flo83] entwickelte *Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten*, die sogenannte FLOQUET-*Theorie*, gegeben werden. Andere Darstellungen finden sich unter anderem in [Cae59, NM79].

Bekanntermaßen läßt sich jede gewöhnliche lineare Differentialgleichung als  $n$ -komponentige Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) \quad (\text{A.1})$$

schreiben mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^n$  und  $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Im hier betrachteten Fall periodischer Koeffizienten gibt es somit ein  $T \in \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

### A.1 Die formale Lösung

Für zeitabhängiges (nicht notwendigerweise periodisches)  $\mathbf{A}(t)$  ist die explizite Berechnung der allgemeinen Lösung von (A.1) unmöglich. Lediglich im Spezialfall der Dimension  $n = 1$  ist es möglich, eine Lösung explizit anzugeben:

$$\mathbf{x}(t) = \exp \left( \int_0^t \mathbf{A}(t') dt' \right) \mathbf{x}(0). \quad (\text{A.2})$$

Schon im Zweidimensionalen funktioniert dies nicht mehr. Es läßt sich nämlich zeigen, daß  $\mathbf{x}(t)$  genau dann die allgemeine Lösung von (A.1) ist, wenn der Kommutator<sup>1</sup>

$$\left[ \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{A}(t) dt, \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A}(t) dt \right] \quad (\text{A.3})$$

für alle  $t_0, t_1, t_2$  verschwindet. Das ist äquivalent dazu, daß  $\mathbf{A}(t)$  und  $\mathbf{A}(t')$  für alle Zeiten  $t, t'$  kommutieren:

$$[\mathbf{A}(t), \mathbf{A}(t')] = 0 \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.4})$$

Und dies ist für zeitabhängiges  $\mathbf{A}(t)$  im allgemeinen nur für  $n = 1$  richtig, da nur in diesem Fall die Multiplikation von  $(n \times n)$ -Matrizen kommutativ ist [Jel84, Kap. 9].

<sup>1</sup>Für zwei Matrizen ist der Kommutator  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  durch  $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$  definiert.

Es ist allerdings möglich, mit Hilfe des sogenannten *Zeitordnungsoperators*  $\mathcal{T}$  auch für  $n > 1$  einen formalen Ausdruck für den Fluß anzugeben:

$$\begin{aligned}\Phi_t &= \mathcal{T} \exp \left( \int_0^t \mathbf{A}(t') dt' \right) \\ &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \cdots \int_{t_0}^t \mathcal{T}(\mathbf{A}(t_1) \dots \mathbf{A}(t_n)) dt_1 \dots dt_n.\end{aligned}\tag{A.5}$$

$\mathcal{T} \exp$  wird auch als *zeitgeordnete Exponentialfunktion* bezeichnet. Der Zeitordnungsoperator ist dabei wie folgt definiert:

$$\mathcal{T}(\mathbf{A}(t_1) \dots \mathbf{A}(t_n)) := \mathbf{A}(t_{i_1}) \dots \mathbf{A}(t_{i_n})\tag{A.6}$$

mit  $t_{i_1} \leq \dots \leq t_{i_n}$ .

Insbesondere kann man aus der Kenntnis der (zeitabhängigen) Eigenwerte von  $\mathbf{A}(t)$  nicht auf die allgemeine Lösung schließen!

## A.2 FLOQUET-Multiplikatoren

$n$  linear unabhängige Lösungen  $\mathbf{y}_i(t)$  von Gleichung (A.1) bilden ein *Fundamentalsystem*. Faßt man die  $\mathbf{y}_i(t)$  als Vektoren auf und schreibt sie in die Spalten einer Matrix  $\mathbf{Y}(t)$ , so erhält man die Lösung zur Anfangsbedingung  $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{C}^n$  durch Multiplikation mit  $\mathbf{Y}(t) \mathbf{Y}^{-1}(0)$ ; denn für

$$\mathbf{x}(t) := \mathbf{Y}(t) \mathbf{Y}^{-1}(0) \mathbf{x}(0)\tag{A.7}$$

gilt:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{Y}}(t) \mathbf{Y}^{-1}(0) \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}(t) \mathbf{Y}(t) \mathbf{Y}^{-1}(0) \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t).\tag{A.8}$$

$\Phi_t := \mathbf{Y}(t) \mathbf{Y}^{-1}(0)$  mit  $\Phi_0 = \mathbb{1}$  ist der Fluß des Systems. Ohne Einschränkung wird im folgenden  $\mathbf{Y}(0) = \mathbb{1}$  gewählt.

**Definition A.1.** Eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt FLOQUET-Multiplikator des Systems (A.1), falls es eine Lösung  $\mathbf{x}(t)$  gibt mit  $\mathbf{x}(t+T) = \lambda \mathbf{x}(t) \forall t \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist  $\lambda$  ungleich 0, da sonst  $\mathbf{x}(t)$  bereits identisch  $\mathbf{0}$  wäre.

**Satz A.2.** Seien  $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)$  linear unabhängige Lösungen von (A.1). Für das Fundamentalsystem  $\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t))$  gilt dann:

(i) Es gibt eine Matrix  $\mathbf{M}$  mit

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{M}.\tag{A.9}$$

(ii) Die Eigenwerte von  $\mathbf{M}$  sind genau die FLOQUET-Multiplikatoren des Systems.

*Beweis.* Es bezeichne  $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) := \mathbf{Y}(t + T)$ .

1. Offensichtlich ist  $\mathbf{X}(t)$  ebenfalls ein Fundamentalsystem. Es gibt somit Koeffizienten  $m_{ij}$  mit

$$\mathbf{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n m_{ji} \mathbf{y}_j(t).$$

Dies entspricht gerade einer Matrixmultiplikation mit  $\mathbf{M} = (m_{ji})_{i,j}$  von rechts [Cae59]. Daraus folgt dann (A.9).

Alternativ ergibt sich (A.9) aus Satz 2.1 mit  $\mathbf{M} := \Phi_T$ :

$$\mathbf{Y}(t + T) = \Phi_{t+T} = \Phi_t \circ \Phi_T = \mathbf{Y}(t) \mathbf{M}.$$

2.  $\Rightarrow$ : Sei  $\lambda$  Eigenwert von  $\mathbf{M}$  zum Eigenvektor  $\mathbf{y}_0$ . Für die Lösung  $\mathbf{y}(t)$  mit  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$  gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t + T) &= \mathbf{Y}(t + T) \mathbf{y}_0 = \mathbf{Y}(t) \mathbf{M} \mathbf{y}_0 = \lambda \mathbf{Y}(t) \mathbf{y}_0 \\ &= \lambda \mathbf{y}(t). \end{aligned}$$

Also ist  $\lambda$  ein FLOQUET-Multiplikator.

$\Leftarrow$ : Sei  $\lambda$  ein FLOQUET-Multiplikator zur Lösung  $\mathbf{y}(t)$  mit  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ . Dann folgt aus (A.9) für  $t = 0$ :

$$\mathbf{M} \mathbf{y}_0 = \mathbf{Y}(T) \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(T) = \lambda \mathbf{y}_0.$$

Also ist  $\lambda$  Eigenwert von  $\mathbf{M}$ . □

**Bemerkung A.3.** Aus (A.9) folgt für  $t = 0$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{Y}(T) = \Phi_T. \quad (\text{A.10})$$

**Bemerkung A.4.** Die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  der POINCARÉ-Abbildung des linearen Systems (A.1)

$$\tilde{\mathcal{P}} : \mathbf{x}_0 =: \mathbf{x}(0) \mapsto \Phi_T(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(T) \quad (\text{A.11})$$

sind genau die FLOQUET-Multiplikatoren von (A.1).

Dieser Zusammenhang ergibt sich trivialerweise daraus, daß  $\mathbf{M}$  diejenige Matrix ist, die die POINCARÉ-Abbildung beschreibt.

**Definition A.5.** Eine Zahl  $\rho \in \mathbb{C}$  heißt charakteristischer Exponent des Systems (A.1), falls es einen FLOQUET-Multiplikator  $\lambda$  gibt mit  $\lambda = e^{\rho T}$ .

### A.3 Zeitunabhängige Systeme

Im *zeitunabhängigen* Fall ist  $\mathbf{A}$  konstant und die Lösung der Differentialgleichung (A.1) kann explizit angegeben werden. Die Matrix  $\mathbf{A}$  mit den Eigenwerten  $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_k$  ( $k \leq n$ ) zerfällt nach einer geeigneten Ähnlichkeitstransformation in mehrere JORDAN-Blöcke  $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_k$  der Gestalt

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \tilde{\rho}_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{\rho}_i & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \tilde{\rho}_i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Somit zerfällt die ursprüngliche Differentialgleichung (A.1) über  $\mathbb{C}^n$  in  $k$  entkoppelte Gleichungssysteme der Form

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i(t) = \mathbf{R}_i \boldsymbol{\xi}_i(t) \quad (\text{A.13})$$

mit  $\boldsymbol{\xi}_i(t) \in \mathbb{C}^{m_i}$ , wobei  $m_i$  die Dimension des  $i$ -ten JORDAN-Blockes  $\mathbf{R}_i$  ist. Diese  $k \leq n$  Gleichungssysteme sind völlig unabhängig voneinander zu lösen, und der Lösungsraum  $V$  von (A.1) ist gerade die direkte Summe der Lösungsräume  $V_i$  von (A.13):

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k. \quad (\text{A.14})$$

Ist  $\mathbf{v}_1^{(i)}, \mathbf{v}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{v}_{m_i}^{(i)}$  die Basis, in der  $\mathbf{R}_i$  die Form (A.13) besitzt, so lauten  $m_i$  linear unabhängige Lösungen

$$e^{\rho_i t} \mathbf{v}_1^{(i)}, t e^{\rho_i t} \mathbf{v}_2^{(i)}, \dots, t^{m_i-1} e^{\rho_i t} \mathbf{v}_{m_i}^{(i)}. \quad (\text{A.15})$$

Die allgemeine Lösung von (A.1) ergibt sich dann aus (A.14) durch eine direkte Summe der Lösungen aus den einzelnen Lösungsräumen  $V_i$ .

Der Fluß  $\Phi_t$  läßt sich schreiben als

$$\Phi_t = e^{\mathbf{A}t}. \quad (\text{A.16})$$

Diese Schreibweise ist wohldefiniert und  $\Phi_t$  hat die Eigenwerte  $e^{\tilde{\rho}_i t}$ . Hieraus ergeben sich dann die FLOQUET-Multiplikatoren des Systems zu

$$\lambda_i = e^{\tilde{\rho}_i T}. \quad (\text{A.17})$$

Die Werte

$$\rho_i := \frac{1}{T} \ln \lambda_i \quad (\text{A.18})$$

sind die charakteristischen Exponenten und nur im zeitunabhängigen Fall mit den Eigenwerten  $\tilde{\rho}_i$  von  $\mathbf{A}$  identisch<sup>2</sup>. In bezeichnet hierbei den komplexen Logarithmus  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ .

<sup>2</sup>Im zeitabhängigen Fall ändern sich die Eigenwerte von  $\mathbf{A}(t)$  im Laufe einer Periode. Daher ist es unmöglich, von  $\tilde{\rho}_i(t)$  auf  $\lambda_i$  oder  $\rho_i$  zu schließen.

## A.4 Zeitabhängige Systeme

Auch wenn es im allgemeinen nicht möglich ist, die formale Lösung (A.5) explizit auszurechnen, so ist es doch möglich, den Fluß  $\Phi_t$  in einer deutlich leichter zu handhabenden Form zu schreiben. Dies ist die eigentliche Aussage der FLOQUET-Theorie und soll im folgenden ausgeführt werden.

**Hilfssatz.** *Es sei  $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\rho$  der einzige Eigenwert von  $\mathbf{R}$  mit der Vielfachheit 1. Dann hat  $e^{\mathbf{R}T}$  als einzigen Eigenwert  $e^{\rho T}$ , ebenfalls mit der Vielfachheit 1.*

*Beweis.* Sei  $\mathbf{v}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\rho$  von  $\mathbf{R}$ . Dann folgt aus  $e^{\mathbf{R}T} \mathbf{v} = e^{\rho T} \mathbf{v}$  bereits, daß  $e^{\rho T}$  ein Eigenwert von  $e^{\mathbf{R}T}$  ist.

Angenommen, es gibt einen von  $\mathbf{v}$  linear unabhängigen Eigenvektor  $\mathbf{v}'$  zu einem Eigenwert  $\lambda' =: e^{\rho' T}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{R}T} \mathbf{v}' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{R}^k \mathbf{v}') T^k, \\ e^{\rho' T} \mathbf{v}' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\rho'^k \mathbf{v}') T^k. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich der beiden Reihen erhält man

$$\mathbf{R}^k \mathbf{v}' = \rho'^k \mathbf{v}'.$$

Insbesondere ist  $\mathbf{v}'$  Eigenvektor von  $\mathbf{R}$  zum Eigenwert  $\rho'$ . Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, daß  $\mathbf{v}'$  linear unabhängig ist von  $\mathbf{v}$ , dem einzigen Eigenvektor von  $\mathbf{R}$ . Also kann  $e^{\mathbf{R}T}$  keinen von  $\mathbf{v}$  linear unabhängigen Eigenvektor besitzen.  $\square$

**Bemerkung A.6.** *Besitzt eine Matrix nur einen einzigen Eigenwert der Vielfachheit 1, so besteht ihre JORDAN-Normalform aus nur einem JORDAN-Kästchen zu diesem Eigenwert.*

**Satz A.7.** *Es gibt eine konstante Matrix  $\mathbf{R}$  sowie eine  $T$ -periodische Matrix  $\mathbf{P}(t)$ , so daß*

$$\Phi_t := \mathbf{P}(t) e^{\mathbf{R}t} \tag{A.19}$$

*ein Fundamentalsystem von (A.1) darstellt. Die Eigenwerte von  $\mathbf{R}$  sind gerade die charakteristischen Exponenten  $\rho_i$  des Systems.*

*Beweis.* O.B.d.A. kann angenommen werden, daß die JORDAN-Normalform von  $\mathbf{M} = \Phi_T$  nur aus einem einzigen JORDAN-Kästchen der Größe  $n$  besteht. Dann hat  $\mathbf{M}$  genau einen Eigenwert  $\lambda$  mit der Vielfachheit 1, der damit auch der einzige FLOQUET-Multiplikator des Systems ist.  $\rho := \frac{1}{T} \ln \lambda$  ist der zugehörige charakteristische Exponent. Sei  $\mathbf{R}'$  die  $(n \times n)$  JORDAN-Matrix, die nur aus

einem einzigen JORDAN-Kästchen zum Eigenwert  $\rho$  besteht. Nach dem obigen Hilfssatz ist  $e^{\mathbf{R}'T}$  dann eine Matrix, deren einziger Eigenwert  $\lambda = e^{\rho T}$  die Vielfachheit 1 hat. Also sind die JORDAN-Formen von  $\mathbf{M}$  und  $e^{\mathbf{R}'T}$  identisch, die beiden Matrizen somit ähnlich. Es gibt eine unitäre Matrix  $\mathbf{S}$  mit

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}^{-1} e^{\mathbf{R}'T} \mathbf{S} = e^{\mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}' \mathbf{S} T}.$$

Wählt man  $\mathbf{R} := \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}' \mathbf{S}$ , so ergibt sich

$$\mathbf{M} = e^{\mathbf{R}T}.$$

Es gibt eine zunächst beliebige Matrix  $\mathbf{P}(t)$  mit  $\Phi_t = \mathbf{P}(t) e^{\mathbf{R}t}$ , für die gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_{t+T} &= \mathbf{P}(t+T) e^{\mathbf{R}t} e^{\mathbf{R}T}, \\ \Phi_{t+T} &= \Phi_t \circ \Phi_T = \Phi_t \mathbf{M} = \mathbf{P}(t) e^{\mathbf{R}t} e^{\mathbf{R}T}. \end{aligned}$$

Dann muß aber bereits

$$\mathbf{P}(t+T) = \mathbf{P}(t)$$

für alle  $t$  gelten. □

**Bemerkung A.8.** Insbesondere gilt

$$\mathbb{1} = \Phi_0 = \mathbf{P}(0) e^{\mathbf{R}0} = \mathbf{P}(0). \quad (\text{A.20})$$

Es wurde in diesem Anhang nicht davon Gebrauch gemacht, daß die hier betrachteten Vektorräume endlich dimensional sind. Daher gelten mit einigen Einschränkungen die Sätze A.2 und A.7 auch, falls  $\mathbf{A}(t)$  aus Gleichung (A.1) auf einem unendlich dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathbb{H}$  definiert ist. Zum einen muß sich  $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{i,j}$  als Matrix auffassen lassen, und die Summe

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$$

muß für alle Vektoren  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$  konvergieren, damit der Beweis von Satz A.2 gültig bleibt. Zum anderen muß für den Beweis von Satz A.7 der „Fluß“ triagonalisierbar sein. Im Hinblick auf die Quantenmechanik sind diese beiden Bedingungen speziell für den HAMILTON-Operator und den Zeitentwicklungsoperator erfüllt.

## B Lösung einer HILL-Gleichung für eine stückweise konstante Anregungsfunktion mit 4 Unstetigkeitsstellen

### Die Anregungsfunktion

In diesem Anhang wird analog zu Abschnitt 2.3.5.2 eine HILL-Gleichung für eine stückweise konstante Anregungsfunktion

$$r(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2}\pi, \\ -1, & \text{falls } \frac{1}{2}\pi \leq t < \pi, \\ 0, & \text{falls } \pi \leq t < \frac{3}{2}\pi, \\ 1, & \text{falls } \frac{3}{2}\pi \leq t < 2\pi. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

mit vier äquidistanten Unstetigkeitsstellen gelöst:

$$\ddot{q} + (\delta + \epsilon r(t)). \quad (\text{B.2})$$

Durch Vergleich mit Gleichung (2.68) bzw. (2.69) erhält man für den zentralen Fixpunkt  $\mathbf{0}$ :

$$\delta = -b, \quad \epsilon = -c, \quad (\text{B.3})$$

und für die seitlichen Fixpunkte  $(\pm\sqrt{b})$ :

$$\delta = 2b, \quad \epsilon = 2c. \quad (\text{B.4})$$

### Die Spur der Monodromiematrix

Die Monodromiematrix läßt sich dann analog zum Abschnitt 2.3.5.2 aus dem Fluß (2.77) von Gleichung (2.74) berechnen:

$$\mathbf{M} = \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta+\epsilon)} \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta)} \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta-\epsilon)} \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta)}. \quad (\text{B.5})$$

Durch Benutzung des Kommutators  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$  läßt sich obige Gleichung etwas vereinfachen:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta+\epsilon)} \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta)} \left( \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta)} \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta-\epsilon)} - \left[ \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta)}, \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta-\epsilon)} \right] \right) \\ &= \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta+\epsilon)} \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta)} \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta-\epsilon)} - \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta+\epsilon)} \tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2}}^{(\delta)} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &=: \mathbf{B} - \mathbf{A} \end{aligned}$$

mit

$$\lambda = \left( \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta - \epsilon}} + \frac{\sqrt{\delta - \epsilon}}{\sqrt{\delta}} \right) \sin \left( \sqrt{\delta} \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( \sqrt{\delta - \epsilon} \right).$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \alpha &:= \sqrt{\delta + \epsilon} \\ \beta &:= \sqrt{\delta} \\ \gamma &:= \sqrt{\delta - \epsilon} \end{aligned}$$

erhält man für die Komponenten von  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \lambda \left( \cos \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \cos \left( \beta \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\beta}{\alpha} \sin \left( \beta \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \right), \\ A_{12} &= -\lambda \left( \frac{1}{\beta} \cos \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( \beta \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\alpha} \sin \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \cos \left( \beta \frac{\pi}{2} \right) \right), \\ A_{21} &= \lambda \left( -\alpha \sin \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \cos \left( \beta \frac{\pi}{2} \right) - \beta \cos \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( \beta \frac{\pi}{2} \right) \right), \\ A_{22} &= -\lambda \left( \cos \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \cos \left( \beta \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\alpha}{\beta} \sin \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( \beta \frac{\pi}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

und somit für die Spur von  $\mathbf{A}$ :

$$\text{Sp } \mathbf{A} = \left( \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \left( \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta} \right) \sin \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \sin^2 \left( \beta \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( \gamma \frac{\pi}{2} \right).$$

Für  $\mathbf{B}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} B_{11} &= \cos \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \cos (\beta \pi) \cos \left( \gamma \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\beta}{\alpha} \sin \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \sin (\beta \pi) \cos \left( \gamma \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\gamma}{\beta} \cos \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \sin (\beta \pi) \sin \left( \gamma \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\gamma}{\alpha} \sin \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \cos (\beta \pi) \sin \left( \gamma \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{12} &= \frac{1}{\gamma} \cos \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \cos (\beta \pi) \sin \left( \gamma \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\beta}{\gamma \alpha} \sin \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \sin (\beta \pi) \sin \left( \gamma \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \cos \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \sin (\beta \pi) \cos \left( \gamma \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \sin \left( \alpha \frac{\pi}{2} \right) \cos (\beta \pi) \cos \left( \gamma \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
B_{21} = & -\alpha \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \cos(\beta\pi) \cos\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\beta \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \sin(\beta\pi) \cos\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& +\frac{\gamma\alpha}{\beta} \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \sin(\beta\pi) \sin\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\gamma \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \cos(\beta\pi) \sin\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{22} = & \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \cos(\beta\pi) \cos\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\frac{\alpha}{\beta} \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \sin(\beta\pi) \cos\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\frac{\beta}{\gamma} \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \sin(\beta\pi) \sin\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\frac{\alpha}{\gamma} \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \cos(\beta\pi) \sin\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\text{Sp } \mathbf{B} = & 2 \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \cos(\beta\pi) \cos\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \sin(\beta\pi) \cos\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\left(\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma}\right) \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \sin(\beta\pi) \sin\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \cos(\beta\pi) \sin\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Mit

$$\text{Sp } \mathbf{M} = \text{Sp } \mathbf{B} - \text{Sp } \mathbf{A}$$

ergibt sich schließlich für die Spur der Monodromiematrix:

$$\begin{aligned}
\text{Sp } \mathbf{M} = & 2 \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \cos(\beta\pi) \cos\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \sin(\beta\pi) \cos\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\left(\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma}\right) \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \sin(\beta\pi) \sin\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \cos(\beta\pi) \sin\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right) \\
& -\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta}\right) \\
& \cdot \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \sin^2(\beta\pi) \sin\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Abb. B.1 zeigt das zugehörige Stabilitätsdiagramm analog zu Abb. 2.1 und 2.2.

### Der zentrale Fixpunkt

Das Stabilitätsdiagramm des zentralen Fixpunktes in Abhängigkeit von  $b$  und  $c$  erhält man wegen (B.3) durch Spiegelung von Abb. B.1 an der  $\epsilon$ -Achse. Bezüglich der Stabilität gelten fast die gleichen Aussagen wie für die MEISSNER-Gleichung in Abschnitt 2.3.5.2. Die genaue Form der Stabilitäts- und Instabilitätsbereiche ist geringfügig verschieden. Der wesentlichste Unterschied ist die Tatsache, daß sich die Zahl der „bauchigen“ Gebiete der Instabilität im Vergleich zur MEISSNER-Gleichung (2.71) mit 2 Unstetigkeitsstellen halbiert hat.

### Die seitlichen Fixpunkte

Das Stabilitätsdiagramm der seitlichen Fixpunkte in Abhängigkeit von  $b$  und  $c$  erhält man wegen (B.4) durch Stauchung von Abb. B.1 um den Faktor  $\frac{1}{2}$  in horizontaler und in vertikaler Richtung. Für die Stabilität der seitlichen Fixpunkte gilt im Prinzip das gleiche wie im Falle der MEISSNER-Gleichung (2.71).

Die Instabilitätsbereiche berühren die  $b$ -Achse daher auch bei  $b = \frac{n^2}{8}$ .

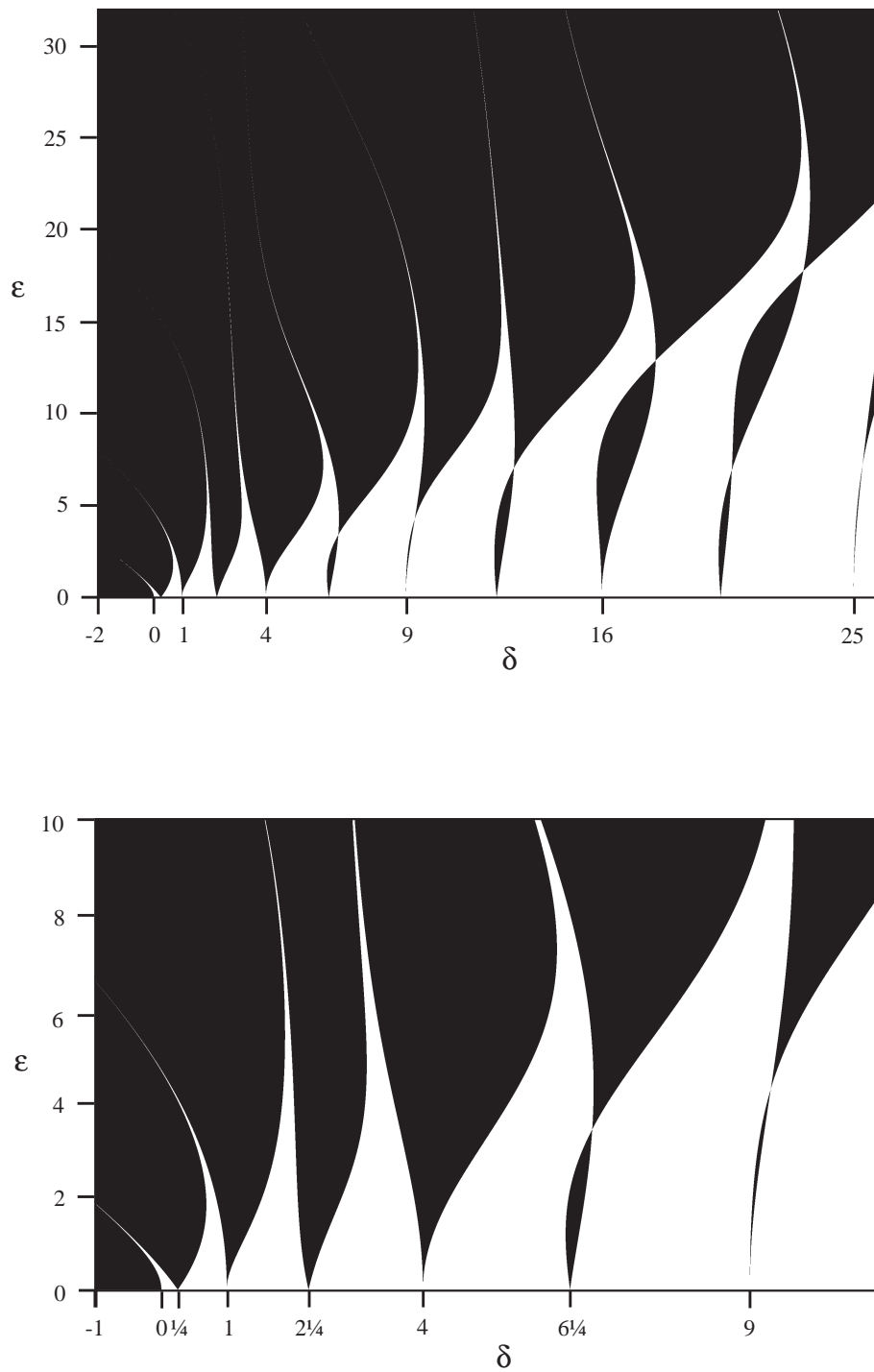


Abbildung B.1: Stabilitätsdiagramme für die MEISSNER-Gleichung mit 4 Unstetigkeitsstellen (B.2); stabile Bereiche sind weiß, instabile schwarz dargestellt. Das untere Bild zeigt eine Ausschnittsvergrößerung des oberen Bildes.



## Literaturverzeichnis

- [AFH94] J. ARGYRIS, G. FAUST und M. HAASE, *Die Erforschung des Chaos*, Vieweg, Wiesbaden, 1994.
- [AMS72] M. ABRAMOWITZ und I. A. MILTON-STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 2. Auflage, 1972.
- [AP90] D. K. ARROWSMITH und C. M. PLACE, *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Arn78] V. I. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 2. Auflage, 1978.
- [BH91] H. P. BREUER und M. HOLTHAUS, *A semiclassical theory of quasienergies and Floquet wave functions*, *Ann. of Phys.* **211** (1991) 249–291.
- [Bol64] V. V. BOLOTIN, *Kinetische Stabilität elastischer Systeme*, Holden-Day, San Francisco, 1964.
- [BTMK92] N. BEN-TAL, N. MOISEYEV und H. J. KORSCH, *Quantum versus classical dynamics in a periodically driven anharmonic oscillator*, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 1669–1672.
- [BTU93] O. BOHIGAS, S. TOMSOVIC und D. ULLMO, *Manifestations of classical phase space structures in quantum mechanics*, *Phys. Rep.* **223** (1993) 43–133.
- [Cae59] L. CAESARI, *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1959.
- [Coh66] L. COHEN, *Generalized phase-space distribution functions*, *J. Math Phys.* **7** (1966) 781–786.
- [Dev86] R. L. DEVANEY, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, Californien, 1986.
- [DH81] M. J. DAVIS und E. J. HELLER, *Quantum dynamical tunneling in bound states*, *J. Chem. Phys.* **75** (1981) 246–254.
- [Ely88] P. V. ELYUTIN, *The quantum chaos problem*, *Sov. Phys. - Uspeki* **31** (1988) 597–622.

- 
- [Eng99] U. M. ENGEL, *On quantum chaos in stochastic webs*, Dissertation, Universität Münster, Institut für Theoretische Physik I, 1999.
- [EW91] B. ECKHARDT und D. WINTGEN, *Indices in classical mechanics*, J. Phys. A: Math. Gen. **24** (1991) 4335–4348.
- [FD98] S. D. FRISCHAT und E. DORON, *Dynamical tunneling in mixed systems*, Phys. Rev. E **57** (1998) 1421–1443.
- [Flo83] G. FLOQUET, *Sur les équation différentielle linéaires à coefficients périodiques*, Ann. École Norm. Sup. **12** (1883) 47–89.
- [GH83] J. GUCKENHEIMER und P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Band 42 der Reihe *Applied Mathematical Sciences.*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Haa91] F. HAAKE, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Hau19] O. HAUPT, *Über homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten*, Math. Ann. **79** (1919) 278–285.
- [Jac90] E. A. JACKSON, *Perspectives of Nonlinear Dynamics 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Jel84] R. J. JELITTO, *Quantenmechanik 2*, Band 5 der Reihe *Theoretische Physik*, Aula Verlag, Wiesbaden, 2. Auflage, 1984.
- [Kau58] H. KAUDERER, *Nichtlineare Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- [Kel58] J. B. KELLER, *Corrected Bohr-Sommerfeld quantum conditions for nonseparable systems*, Ann. d. Phys. **4** (1958) 180–188.
- [KW96] H. J. KORSCH und H. WIESCHER, *Quantum Chaos*, in: K. H. HOFFMANN und M. SCHNEIDER (Hrgs.), *Computational Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [LB91] W. A. LIN und L. E. BALLENTINE, *Quantum tunneling and regular and irregular quantum dynamics of a driven double-well oscillator*, Phys. Rev. A **45** (1991) 3637–3645.
- [Lee95] H.-W. LEE, *Theory and application of the quantum phase-space distribution functions*, Phys. Rep. **259** (1995) 147–211.
- [Löd95] G. LÖDIGE, *Reguläre und irregulär-chaotische Bewegung eines Systems dreier massenbewegter Ebenen*, Diplomarbeit, Universität Münster, Institut für Theoretische Physik I, 1995.
- [Mei18] E. MEISSNER, *Über Schüttelschwingungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität*, Schweiz. Bauztg. **72** (1918) 95–98.

- 
- [NM79] A. H. NAYFEH und D. T. MOOK, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [Par90] S. PARTHASARATHY, *Homoclinic bifurcation sets of the parametrically driven Duffing oscillator*, Phys. Rev. A **46** (1990) 2147–2150.
- [Per77] I. C. PERCIVAL, *Semiclassical theory of bound states*, Adv. Chem. Phys. **36** (1977) 1–61.
- [Per91] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Band 7 der Reihe *Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [PTVF92] W. A. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING und B. P. FLANNERY, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage, 1992.
- [Rob95] C. ROBINSON, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [Sch88] F. SCHWABL, *Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage, 1988.
- [SDK<sup>+</sup>87] R. SCHARF, B. DIETZ, M. KUŚ, F. HAAKE und M. V. BERRY, *Kramer's degeneracy and quartic level repulsion*, Europhys. Lett. **5** (1987) 383–389.
- [Shi96] J.-Y. SHIN, *Suppression or enhancement of quantum tunneling by a nonlinear resonance induced in a driven double-well system*, Phys. Rev. E **54** (1996) 289–298.
- [Wei52] F. WEIDENHAMMER, *Nichtlineare Biegeschwingungen des axial pulsierend belasteten Stabes*, Ing. Archiv **20** (1952) 315–330.
- [Wei56] F. WEIDENHAMMER, *Das Stabilitätsverhalten der nichtlinearen Biegeschwingungen des axial gepulsten Stabes*, Ing. Archiv **24** (1956) 53–68.
- [Wig88] S. WIGGINS, *Global Bifurcations and Chaos*, Band 73 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [Wig90] S. WIGGINS, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Band 2 der Reihe *Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Zel66] Y. B. ZEL'DOVITCH, *The quasienergy of a quantum-mechanical system subjected to a periodic action*, Sov. Phys. J.E.T.P. **24** (1966) 1006–1008.





EHRENWÖRTLICHE ERKLÄRUNG

Hiermit bestätige ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, den 4. März 1999

Andreas Büning







