

Chaotische Streuung an einem zentralsymmetrischen Kickpotential

Als Diplomarbeit vorgelegt
von
Elmar Billen

Institut für Theoretische Physik I
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

— November 1994 —

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Das System	7
1.1 Die Hamilton-Funktion	7
1.2 Zeitumkehrsymmetrie	16
1.3 Die Abbildung Π	18
1.4 Verhalten des Systems für $r \rightarrow \infty$	19
1.5 Das Kickpotential	20
2 Streuabbildung und Ablenkfunktion	22
2.1 Asymptotisch konstante Variablen für $n = 4$	22
2.2 Definition der Streuabbildung σ	25
2.3 Die Ablenkfunktion Θ	26
2.4 Numerische Berechnung von σ und Θ	26
2.5 Fraktale Dimension der Singularitätenmenge Ω	41
3 Chaotische Streuung im Falle $n = 4$	44
3.1 Gebundene Bewegung	44
3.1.1 Klassifizierung von Fixpunkten	45
3.1.2 Fixpunkte der Abbildung Φ	46
3.1.3 2-Zyklen der Abbildung Φ	47
3.2 Invariante Mannigfaltigkeiten des hyperbolischen Fixpunktes . .	63
3.3 Exponentielle Skalierung der Streuabbildung	65

4	Chaotische Streuung im Falle $n = 1$	70
4.1	Asymptotisch konstante Variablen für $n = 1$	70
4.2	Algebraische Skalierung der Streuabbildung	75
	Schluß	78
	Literaturverzeichnis	79

Einleitung

Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist die Dynamik eines Teilchens in einem periodisch zeitabhängigen Kraftfeld. Die Zeitabhängigkeit sei periodisch mit der Periode T . Für die Hamilton-Funktion des Systems gilt somit

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = H(\vec{r}, \vec{p}, t + T) \quad .$$

Dabei sollen die Untersuchungen auf ein System mit zentralsymmetrischem Potential beschränkt werden. Des weiteren soll die Zeitabhängigkeit so gewählt sein, daß das Potential nur zu diskreten Zeitpunkten von Null verschieden ist. Zwischen diesen Zeitpunkten soll die Dynamik des Systems der geradlinig-gleichförmigen Bewegung eines freien Teilchens entsprechen. Ein solches System ist durch die Hamilton-Funktion

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

gegeben. Sie beschreibt ein System, in dem sich der Impuls zu diskreten Zeitpunkten durch einen instantanen Impulsübertrag unstetig ändert. Dieser Impulsübertrag wird in der vorliegenden Arbeit als „Kick“ bezeichnet, das untersuchte System als „Kicksystem“. Bei der Wahl eines zentralsymmetrischen „Kickpotentials“ erfolgt der Kick stets in radialer Richtung, der Drehimpuls des Systems ist eine Erhaltungsgröße.

Der Vorteil eines derartigen Systems liegt darin, daß die Dynamik durch die Iteration einer diskreten Abbildung beschrieben werden kann. Da diese Abbildung in geschlossener Form angegeben werden kann, wird der Aufwand zur numerischen Analyse des Systems gegenüber der Lösung eines Differentialgleichungssystems erheblich verringert.

Die chaotische, gebundene Dynamik in einem solchen Kicksystem ist in [1, 2] untersucht worden. Während in verschiedenen anderen Arbeiten [3, 4, 5] ein vergleichbares *eindimensionales* System zur Modellierung chaotischer Streudynamik dient, soll in der vorliegenden Arbeit die chaotische Streudynamik in dem beschriebenen System mit *drei* Freiheitsgraden der Bewegung untersucht werden.

In einem Streusystem unterscheidet sich die chaotische Dynamik grundsätzlich von der in gebundenen Systemen. Ein einzelner Streuorbit hält sich nur für endliche Zeit im Wechselwirkungsbereich des Potentials auf. Auch wenn die Dynamik während der Wechselwirkung beliebig kompliziert sein kann, wird sie dennoch vor und nach der Wechselwirkung in die reguläre Dynamik eines integrablen Systems übergehen. Ein einzelner Streuorbit kann infolgedessen nicht chaotisch sein [6].

Trägt man jedoch *Out*-Variablen, die das Teilchen nach der Wechselwirkung charakterisieren, gegen die *In*-Variablen vor der Wechselwirkung auf, so findet man häufig eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Beliebige kleine Änderungen der *In*-Variablen können beliebig große Änderungen der *Out*-Variablen verursachen. Ferner können einzelne Trajektorien durch gebundene periodische Orbits im Wechselwirkungsbereich festgehalten werden [7, 8, 9, 10]. Für solche Trajektorien sind die *Out*-Variablen nicht definiert. Die *Streuabbildung*, welche die *In*-Variablen auf die *Out*-Variablen abbildet, wird in diesem Falle singulär.

In Systemen mit *regulärer* Streudynamik treten solche Singularitäten stets isoliert auf. In Systemen wie dem hier untersuchten hat die Menge der Singularitäten dagegen die Struktur einer fraktalen *Cantor-Menge*. In solchen Fällen bezeichnet man die Dynamik als *irreguläre Streuung* [6].

Die beschriebenen Merkmale irregulärer Streuung werden in dieser Arbeit an dem untersuchten System dargestellt. Der Mechanismus, in dem Singularitäten in der Streuabbildung durch den Einfang von Streutrajektorien (Orbiting) verursacht werden, findet sich auch in diesem System wieder. Darüber hinaus findet sich je nach Reichweite des des Kickpotentials noch ein anderer Mechanismus, der für irreguläre Streuung verantwortlich ist. Hier verursachen parabolische *Out*-Orbits, die das System unendlich langsam und mit verschwindender Energie verlassen, die Singularitäten in der Streuabbildung. Diese zwei unterschiedlichen Ursachen für die Irregularität äußern sich in zwei verschiedenen Skalierungseigenschaften der Streuabbildung.

In Kapitel 1 dieser Arbeit wird das oben beschriebene System vorgestellt. Da aufgrund der geforderten Zentralsymmetrie des Systems der Drehimpuls eine Konstante der Bewegung ist und die Dynamik somit in einer Ebene stattfindet, wird eine Darstellung in ebenen Polarkoordinaten benutzt. In dieser Darstellung wird eine iterative dreidimensionale Abbildung hergeleitet, die die Dynamik des Systems beschreibt. Für das zentralsymmetrische Kickpotential wird ein Potential der Form

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^n} \quad , \quad \alpha > 0$$

gewählt. Die numerischen Untersuchungen beschränken sich auf die Fälle $n = 4$ und $n = 1$. Durch zwei Skalierungen der Variablen reduziert sich die Anzahl

der Parameter des Systems bei dieser Wahl des Potentials auf einen einzigen Systemparameter K , der ein Maß für die Stärke des Potentials darstellt.

In Kapitel 2 wird für den Fall $n = 4$ eine kanonische Transformation angegeben, die die dynamischen Variablen des Systems auf Variablen transformiert, die für große Abstände vom Ursprung asymptotisch konstant werden und somit zur Beschreibung des Teilchens vor und nach der Wechselwirkung dienen. Mit Hilfe dieser Transformation sowie der in Kapitel 1 hergeleiteten iterativen Abbildung wird die Streuabbildung definiert, welche die In-Variablen vor der Wechselwirkung auf die Out-Variablen nach der Wechselwirkung abbildet. Anschließend werden die Streuabbildung sowie die Ablenkfunktion als Funktion des Drehimpulses und einer In-Variablen numerisch untersucht. Es zeigt sich, daß eine fraktale Menge von Streusingularitäten existiert. Die Streudynamik des Systems ist demnach irregulär. Zum Abschluß des Kapitels wird die Hausdorff-Dimension der Menge der Streusingularitäten berechnet.

In Kapitel 3 wird gezeigt, daß für den Fall $n = 4$ die Singularitäten der Streuabbildung – wie oben beschrieben – durch den Einfang von Trajektorien durch instabile lokalisierte Orbits verursacht werden. Zu diesem Zweck wird die gebundene Bewegung des Systems untersucht, und es werden Fixpunkte sowie periodische Punkte bis zur Ordnung 4 in Abhängigkeit von dem Systemparameter K berechnet. Es zeigt sich ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen gebundener Bewegung und der Streudynamik: Existieren keine Fixpunkte bzw. periodische Orbits, so ist die Streudynamik vollständig regulär. Sobald bei Variation des Systemparameters durch eine Sattel-Zentrum-Bifurkation ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt entstehen, wird die Dynamik in der folgenden Weise durch die invarianten Mannigfaltigkeiten des instabilen Fixpunktes beeinflusst: Durch homokline Schnittpunkte der Mannigfaltigkeiten entsteht in der Umgebung des Fixpunktes eine hyperbolische, invariante Menge Λ , die aus unendlich vielen periodischen und aperiodischen instabilen Orbits besteht. Die invarianten Mannigfaltigkeiten aller dieser Orbits reichen bis in den wechselwirkungsfreien Bereich des Phasenraumes. Startet hier eine Streutrajektorie genau auf einer dieser stabilen Mannigfaltigkeiten, so wird sie von Λ „eingefangen“ und wird infolgedessen den Wechselwirkungsbereich nicht mehr verlassen. Eine solche Anfangsbedingung führt zu einer Singularität in der Streuabbildung. Starten zwei Streutrajektorien mit Anfangsbedingungen, die sich nur minimal unterscheiden, jedoch auf unterschiedlichen Seiten einer stabilen Mannigfaltigkeit liegen, werden sie unter der Dynamik des Systems separiert und führen schließlich zu völlig unterschiedlichen Werten der Out-Variablen. Dies bewirkt eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen in der Streuabbildung. Dieses Szenario führt zu einer exponentiellen Skalierung in der Streuabbildung, die zum Abschluß des Kapitels erklärt und numerisch nachgewiesen wird.

In Kapitel 4 wird die Streudynamik für den Fall $n = 1$ beschrieben. Da das System für große Abstände vom Ursprung in diesem Fall in ein System mit einem attraktiven Coulomb-Potential übergeht, muß zunächst eine Transformation auf asymptotisch konstante Streuvariablen gefunden werden, welche die unendliche Reichweite des Coulomb-Potentials berücksichtigt. Da im Falle $n = 1$ nicht, wie für $n = 4$, das repulsive Zentrifugalphotential dominiert, sind parabolische Out-Orbits möglich, die das System mit der Gesamtenergie Null verlassen. Es zeigt sich, daß diese Orbits für die Singularitäten der Streuabbildung verantwortlich sind. Ferner führen sie zu einer algebraischen Skalierung der Streuabbildung. Die Skalierung wird in diesem Kapitel beschrieben und numerisch nachgewiesen.

Kapitel 1

Das System

1.1 Die Hamilton-Funktion

In dieser Arbeit wird die Bewegung eines Teilchens in einem periodisch zeitabhängigen, radialsymmetrischen Potential untersucht. Die Zeitabhängigkeit des Potentials sei durch eine Folge von δ -Impulsen mit konstanten Zeitabständen gegeben. Die allgemeine Hamilton-Funktion eines solchen Systems lautet

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad . \quad (1.1)$$

Hierbei bezeichnen \vec{r} und \vec{p} den Ort bzw. den Impuls des Teilchens in kartesischen Koordinaten, m seine Masse und T den zeitlichen Abstand zwischen zwei δ -Impulsen. $V(r)$ entspricht dem zeitunabhängigen Anteil des radialsymmetrischen Potentials. In dem durch (1.1) beschriebenen System ist von Schridde in [1] für ein Potential der Form

$$V(r) = m \frac{\omega_0^2}{2} (r - R)^2 \quad (1.2)$$

die gebundene Bewegung analysiert worden. In dieser Arbeit sollen an das Kickpotential die Forderungen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \quad (1.3)$$

sowie

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V''(r) = 0 \quad (1.4)$$

gestellt werden. Als Modellpotential, das die Bedingungen (1.3) und (1.4) erfüllt, wird ein Potential der Form

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^n} \quad , \quad \alpha > 0 \quad (1.5)$$

gewählt. Für das resultierende System soll die Streudynamik untersucht werden. Aufgrund der Zeitabhängigkeit des Hamilton–Operators ist die Energie des Systems keine Erhaltungsgröße. Der Drehimpuls \vec{L} hingegen ist wegen der Radialsymmetrie des Potentials eine Konstante der Bewegung. Die Bewegung findet demnach in einer Ebene durch den Ursprung statt, die senkrecht zu \vec{L} liegt.

Da die Zeitabhängigkeit der Hamilton–Funktion (1.1) periodisch mit der Periode T ist, reicht es aus, wenn man nur Zeiten aus dem Intervall $[0, T)$ betrachtet. Phasenraum des Systems ist somit die 7–dimensionale Mannigfaltigkeit

$$\{(\vec{r}, \vec{p}, t) \mid \vec{r} \in \mathbb{R}^3, \vec{p} \in \mathbb{R}^3, t \in [0, T)\} \quad , \quad (1.6)$$

welche die Topologie eines Zylinders $\mathbb{R}^6 \times S$ besitzt.

Aus der Hamilton–Funktion (1.1) folgen mit der Abkürzung

$$F(r) = -T V'(r) \quad (1.7)$$

die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} \quad (1.8a)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = F(r) \hat{r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad . \quad (1.8b)$$

Zu den Zeitpunkten kT , $k \in \mathbb{Z}$, erfährt das Teilchen einen instantanen Impulsübertrag in radialer Richtung. Dieser Impulsübertrag wird im folgenden als „Kick“, das gesamte System als „Kicksystem“ bezeichnet. Zwischen zwei Kicks ist der Impuls konstant, die Bewegung des Teilchens entspricht der eines freien Teilchens.

Den zu den Zeitpunkten kT (den „Kickzeitpunkten“) durch den Kick in radialer Richtung übertragenen Impuls $(\Delta \vec{p})_k$ erhält man durch Integration von (1.8b) als

$$\begin{aligned} (\Delta \vec{p})_k &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{kT-\epsilon}^{kT+\epsilon} \dot{\vec{p}} dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{kT-\epsilon}^{kT+\epsilon} F(r) \hat{r} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \delta(t - k' T) dt \\ &= F(r(kT)) \hat{r}(kT) \quad . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Die Dynamik, die durch die Hamilton–Funktion (1.1) beschrieben wird, ist aus zwei Bestandteilen zusammengesetzt: der freien Propagation über ein Zeitintervall der Länge T und der unstetigen Impulsänderung durch den Kick zu den

Zeitpunkten kT . Die freie Propagation soll durch eine Abbildung Φ_T beschrieben werden, die unstetige Impulsänderung durch eine Kickabbildung Ψ_K . Die Verknüpfung von Φ_T und Ψ_K führt zu einer Abbildung

$$M = \Psi_K \circ \Phi_T \quad , \quad (1.10)$$

durch deren Iteration die gesamte Dynamik des Systems beschrieben wird. Die Einführung der Abbildung M entspricht einem Poincaré-Schnitt – ähnlich einer stroboskopischen Beleuchtung des Systems – unmittelbar *nach* den Kickzeitpunkten kT . Alternativ wäre auch die Einführung eines Poincaré-Schnitts *vor* dem Kick möglich, der zu einer Abbildung

$$\tilde{M} = \Phi_T \circ \Psi_K \quad (1.11)$$

führen würde. Die Abbildungen M und \tilde{M} sind, wie leicht verifiziert werden kann, topologisch konjugiert. In dieser Arbeit wird die erste Form gewählt, da sie zu etwas kürzeren Formeln führt.

Der Ort \vec{r}_k und der Impuls \vec{p}_k des Teilchens unmittelbar nach dem Kick ergeben sich gemäß den Definitionen

$$\begin{aligned} \vec{r}_k &= \vec{r}(kT) \\ \vec{p}_k &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \vec{p}(kT + \epsilon) \quad . \end{aligned} \quad (1.12)$$

Aus (1.8a) und (1.8b) ergibt sich die Abbildung

$$\Phi_T : \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{T}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad , \quad (1.13)$$

die die freie Propagation über ein Zeitintervall der Länge T beschreibt, und die Abbildung

$$\Psi_K : \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} + F(r)\hat{r} \end{pmatrix} \quad , \quad (1.14)$$

die die unstetige Änderung des Impulses durch den Kick angibt. Aus (1.10) erhält man mit (1.13) und (1.14) schließlich die iterative Abbildung

$$\begin{aligned} M : (\vec{r}_k, \vec{p}_k) &\rightarrow (\vec{r}_{k+1}, \vec{p}_{k+1}) \\ \vec{r}_{k+1} &= \vec{r}_k + \frac{T}{m} \vec{p}_k \\ \vec{p}_{k+1} &= \vec{p}_k + F(r_{k+1}) \hat{r}_{k+1} \quad . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Wie oben erwähnt, findet die Bewegung des Systems in einer Ebene durch den Ursprung statt. Aus diesem Grund und aufgrund der Radialsymmetrie des Potentials erscheint es angebracht, anstelle von kartesischen Koordinaten ebene

Polarkoordinaten zu verwenden. Wählt man die Lage des Koordinatensystems so, daß die Bewegung in der (x, y) -Ebene stattfindet, so erhält man mit Hilfe der Definitionen

$$\begin{aligned} r &= \vec{r} \cdot \hat{r} && (\text{Abstand vom Ursprung}), \\ p &= \vec{p} \cdot \hat{r} && (\text{Impuls in Radialrichtung}), \\ \varphi &= \pm \arccos(\hat{r} \cdot \hat{x}) \text{ für } \hat{r} \cdot \hat{y} \gtrless 0 && (\text{Azimutalwinkel}), \\ L &= \vec{L} \cdot \hat{z} && (z\text{-Komponente des Drehimpulses}) \end{aligned}$$

die Hamilton-Funktion des Systems in der Gestalt

$$H(r, p, \varphi, L, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad . \quad (1.16)$$

Dabei bilden jeweils r und p sowie φ und L kanonisch konjugierte Variablenpaare.

Aus (1.16) ergeben sich die Bewegungsgleichungen in ebenen Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{L^2}{mr^3} + F(r) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{L}{mr^2} \\ \dot{L} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.17)$$

Da die Hamilton-Funktion (1.16) zyklisch in der Variablen φ ist, ergibt sich für den zu φ konjugierten Impuls L sofort die Lösung

$$L(t) = L = \text{const.} \quad (1.18)$$

L wird somit zu einem frei wählbaren Systemparameter. Das Vorzeichen von L hat auf die (r, p) -Dynamik keinen Einfluß. Es bestimmt lediglich die „Drehrichtung“ des Systems. Im folgenden sei $L > 0$, d. h. $\varphi(t)$ ist eine in t streng monoton wachsende Funktion. Der Fall $L = 0$ wird in dieser Arbeit nicht untersucht; in diesem Fall geht das System in ein System mit $1\frac{1}{2}$ Freiheitsgraden über. Die Streudynamik in einem solchen System ist in [5] untersucht worden.

Mit der Einschränkung (1.18) ergibt sich als Phasenraum des Systems, das durch die Hamilton-Funktion (1.16) beschrieben wird, die vierdimensionale Mannigfaltigkeit

$$\{(r, p, \varphi, t) \mid r \in \mathbb{R}^+, p \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi), t \in [0, T)\} \quad . \quad (1.19)$$

Mit den zu (1.12) analogen Definitionen

$$\begin{aligned} r_k &= r(kT) \\ p_k &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} p(kT + \epsilon) \\ \varphi_k &= \varphi(kT) \end{aligned} \quad (1.20)$$

läßt sich das System wiederum in eine iterative Abbildung überführen. Zu diesem Zweck wird zunächst der Vektor \vec{p}_k in seine Anteile senkrecht und parallel zu \hat{r}_k zerlegt:

$$\vec{p}_k = p_k \hat{r}_k + \frac{L}{r_k} \hat{\varphi}_k \quad . \quad (1.21)$$

Wenn man diese Beziehung in (1.15) einsetzt, ergibt sich

$$\vec{r}_{k+1} = \left(r_k + \frac{T}{m} p_k \right) \hat{r}_k + \frac{TL}{mr_k} \hat{\varphi}_k \quad (1.22a)$$

$$\vec{p}_{k+1} = p_k \hat{r}_k + \frac{L}{r_k} \hat{\varphi}_k + F(r_{k+1}) \hat{r}_{k+1} \quad . \quad (1.22b)$$

Mit Hilfe von $r_{k+1} = |\vec{r}_{k+1}|$ und $p_{k+1} = \vec{p}_{k+1} \cdot \hat{r}_{k+1}$ sowie der Orthonormiertheit der Basisvektoren \hat{r}_k und $\hat{\varphi}_k$ ergeben sich die ersten beiden Komponenten der gesuchten Abbildung:

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= \sqrt{\left(r_k + \frac{T}{m} p_k \right)^2 + \left(\frac{TL}{mr_k} \right)^2} \\ p_{k+1} &= \frac{\left(r_k + \frac{T}{m} p_k \right) p_k + \frac{T}{m} \left(\frac{L}{r_k} \right)^2}{r_{k+1}} + F(r_{k+1}) \quad . \end{aligned} \quad (1.23)$$

Die dritte Komponente erhält man durch skalare Multiplikation von (1.22a) mit \hat{r}_k :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{k+1} \cdot \hat{r}_k &= r_{k+1} \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_k) \\ &= r_k + \frac{T}{m} p_k \quad . \end{aligned} \quad (1.24)$$

Aufgrund der Einschränkung auf positive L gilt $0 < \varphi_{k+1} - \varphi_k < \pi$; für die dritte Komponente der gesuchten Abbildung ergibt sich somit

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \arccos \left(\frac{r_k + \frac{T}{m} p_k}{r_{k+1}} \right) \quad . \quad (1.25)$$

Insgesamt erhält man eine dreidimensionale Abbildung, die zusammen mit (1.18) eine Lösung der Bewegungsgleichungen (1.17) darstellt:

$$\begin{aligned}
\Phi_L^* : (r_k, p_k, \varphi_k) &\rightarrow (r_{k+1}, p_{k+1}, \varphi_{k+1}) \\
r_{k+1} &= \sqrt{\left(r_k + \frac{T}{m}p_k\right)^2 + \left(\frac{TL}{mr_k}\right)^2} \\
p_{k+1} &= \frac{(r_k + \frac{T}{m}p_k)p_k + \frac{T}{m}\left(\frac{L}{r_k}\right)^2}{r_{k+1}} + F(r_{k+1}) \\
\varphi_{k+1} &= \varphi_k + \arccos\left(\frac{r_k + \frac{T}{m}p_k}{r_{k+1}}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Definitionsbereich der so definierten Abbildung Φ_L^* ist die dreidimensionale Mannigfaltigkeit

$$\Sigma^* = \left\{ (r, p, \varphi) \mid r \in \mathbb{R}^+, p \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \quad . \tag{1.27}$$

Die (r, p) -Dynamik ist aufgrund der Rotationssymmetrie des Potentials unabhängig von der φ -Dynamik. In vielen der folgenden Untersuchungen dieser Arbeit wird die Information über die Dynamik der Winkelvariablen φ nicht explizit benötigt. In diesen Fällen kann man die Betrachtungen auf den (r, p) -Anteil der Abbildung (1.26) beschränken. Durch diese Einschränkung erhält man eine Abbildung Φ_L mit

$$\begin{aligned}
\Phi_L : (r_k, p_k) &\rightarrow (r_{k+1}, p_{k+1}) \\
r_{k+1} &= \sqrt{\left(r_k + \frac{T}{m}p_k\right)^2 + \left(\frac{TL}{mr_k}\right)^2} \\
p_{k+1} &= \frac{(r_k + \frac{T}{m}p_k)p_k + \frac{T}{m}\left(\frac{L}{r_k}\right)^2}{r_{k+1}} + F(r_{k+1}) \quad .
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Definitionsbereich der Abbildung (1.28) ist die zweidimensionale Mannigfaltigkeit

$$\Sigma = \left\{ (r, p) \mid r \in \mathbb{R}^+, p \in \mathbb{R} \right\} \quad . \tag{1.29}$$

Für die Untersuchung der Stabilität von Fixpunkten und Zyklen niedriger Periode wird in Kapitel 3 die Jacobi-Matrix $D\Phi_L(r, p)$ der Abbildung (1.28) benötigt. Bezeichnet man die beiden Komponenten von Φ_L mit r' und p' , so

gilt für die einzelnen Elemente der Jacobi-Matrix $D\Phi_L(r, p)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r'(r, p)}{\partial r} &= \frac{(r + \frac{T}{m}p) - \frac{1}{r}(\frac{TL}{m})^2}{r'(r, p)} \\
\frac{\partial r'(r, p)}{\partial p} &= \frac{T}{m} \frac{r + \frac{T}{m}p}{r'(r, p)} \\
\frac{\partial p'(r, p)}{\partial r} &= -\frac{m}{T} \left(\frac{TL}{m} \right)^2 \left(\frac{2r + \frac{T}{m}p}{r'^3(r, p)} + \frac{1}{r r'(r, p)} \right) + \frac{\partial}{\partial r} F(r'(r, p)) \\
\frac{\partial p'(r, p)}{\partial p} &= \frac{\frac{T}{m}p}{r'(r, p)} + \frac{r(r + \frac{T}{m}p)^2}{r'^3(r, p)} + \frac{\partial}{\partial p} F(r'(r, p)) \quad .
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Aus (1.30) ergibt sich durch eine kurze Rechnung für die Determinante der Jacobi-Matrix von (1.28)

$$\det(D\Phi_L) = 1 \quad , \tag{1.31}$$

d. h. (1.28) ist eine flächen- und orientierungserhaltende Abbildung.

Um die Zahl der Systemparameter in der Abbildung (1.26) zu reduzieren, geht man über zu neuen Variablen gemäß der folgenden Skalierung:

$$\begin{aligned}
r &\rightarrow r & F(r) &\rightarrow \frac{T}{m} F(r) \\
p &\rightarrow \frac{T}{m} p & L &\rightarrow \frac{T}{m} L \\
\varphi &\rightarrow \varphi \quad .
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Durch diese Skalierung vereinfacht sich die Abbildung (1.26), und man erhält eine neue Abbildung

$$\begin{aligned}
\Phi_L^* : (r_k, p_k, \varphi_k) &\rightarrow (r_{k+1}, p_{k+1}, \varphi_{k+1}) \\
r_{k+1} &= \sqrt{(r_k + p_k)^2 + \left(\frac{L}{r_k} \right)^2} \\
p_{k+1} &= \frac{(r_k + p_k)p_k + \left(\frac{L}{r_k} \right)^2}{r_{k+1}} + F(r_{k+1}) \\
\varphi_{k+1} &= \varphi_k + \arccos \left(\frac{r_k + p_k}{r_{k+1}} \right) \quad .
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Dabei wurde für Φ_L^* Einfachheit halber kein neues Symbol eingeführt, vgl. (1.26). Die neue Abbildung (1.33) kann wiederum auf den (r, p) -Anteil beschränkt werden, sofern die Information über die φ -Dynamik nicht explizit benötigt wird.

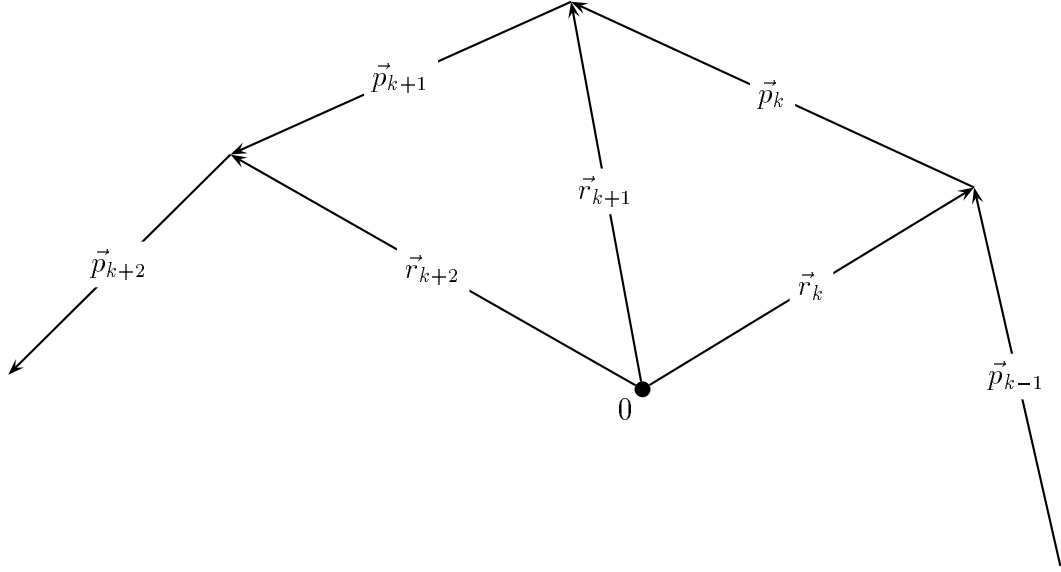


Abbildung 1.1: Anschauliche Bedeutung der skalierten Variablen \vec{p} und L .

Durch diese Einschränkung ergibt sich die Abbildung Φ_L in der Skalierung (1.32):

$$\begin{aligned}\Phi_L : (r_k, p_k) &\rightarrow (r_{k+1}, p_{k+1}) \\ r_{k+1} &= \sqrt{(r_k + p_k)^2 + \left(\frac{L}{r_k}\right)^2} \\ p_{k+1} &= \frac{(r_k + p_k)p_k + \left(\frac{L}{r_k}\right)^2}{r_{k+1}} + F(r_{k+1}) \quad .\end{aligned}\tag{1.34}$$

Für Φ_L wurde hier wiederum kein neues Symbol eingeführt, vgl. (1.28). Definitionsbereich von (1.34) ist ebenfalls die zweidimensionale Mannigfaltigkeit (1.29).

Die skalierten Abbildungen (1.33) und (1.34) enthalten als Parameter nur noch den Drehimpuls L sowie weitere in der Kraftfunktion $F(r)$ enthaltene Parameter.

Die skalierten Größen r , p und $F(r)$ haben die Dimension Länge, L die Dimension Fläche. p und L haben eine anschauliche geometrische Bedeutung, siehe Abbildung 1.1. Dargestellt sind die Ortsvektoren \vec{r}_k des Teilchens zu verschiedenen Zeiten sowie die dazugehörigen Impulse \vec{p}_k . \vec{p}_k entspricht dem Weg, den das Teilchen im Zeitraum $(kT, (k+1)T)$ zurücklegt. Die vom *Fahrstrahl* des Teilchens zwischen zwei Kicks überstrichene Fläche hat den Inhalt $\frac{1}{2}L$. Dies

entspricht dem *Flächensatz*, der in jedem System mit einem Zentralkraftfeld erfüllt ist. Der Flächensatz läßt sich für die hier betrachtete Dynamik leicht verifizieren, indem man (1.21) vektoriell mit \vec{r}_k multipliziert und den Betrag bildet:

$$\begin{aligned} |\vec{r}_k \times \vec{p}_k| &= \left| \vec{r}_k \times \left(p_k \hat{r}_k + \frac{L}{r_k} \hat{\varphi}_k \right) \right| \\ &= \left| \frac{L}{r_k} (\hat{r}_k \times \hat{\varphi}_k) \right| \\ &= |L| \quad . \end{aligned} \tag{1.35}$$

In Kapitel 3 und 4 soll zur Vereinfachung des Systems die Möglichkeit ausgenutzt werden, den Systemparameter L zu eliminieren. Dies wird erreicht durch eine zweite Skalierung der Variablen r und p sowie der Kraftfunktion $F(r)$ gemäß:

$$\begin{aligned} \frac{r}{\sqrt{L}} &\rightarrow r \\ \frac{p}{\sqrt{L}} &\rightarrow p \\ \frac{F(r)}{\sqrt{L}} &\rightarrow F(r) \quad . \end{aligned} \tag{1.36}$$

Durch diese Skalierung vereinfacht sich die Abbildung (1.34), und es ergibt sich eine neue Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : (r_k, p_k) &\rightarrow (r_{k+1}, p_{k+1}) \\ r_{k+1} &= \sqrt{(r_k + p_k)^2 + r_k^{-2}} \\ p_{k+1} &= \frac{(r_k + p_k)p_k + r_k^{-2}}{r_{k+1}} + F(r_{k+1}) \quad . \end{aligned} \tag{1.37}$$

Definitionsbereich dieser Abbildung ist wiederum die zweidimensionale Mannigfaltigkeit (1.29), hier jedoch mit dimensionslosen Variablen r und p . Die Kraftfunktion $F(r)$ ist in dieser Skalierung ebenfalls dimensionslos.

Die Abbildung (1.37) hängt nur noch von den in der Kraftfunktion $F(r)$ enthaltenen Parametern ab.

1.2 Zeitumkehrsymmetrie

Die Hamilton-Funktion (1.1) des Systems ist invariant unter der Zeitumkehr $t \rightarrow -t$ bzw. der Impulsumkehr $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$. Die Dynamik, die durch diese Hamilton-Funktion beschrieben wird, ist somit ebenfalls invariant unter Zeitumkehr. Dies bedingt, daß unter der iterativen Abbildung M neben einer „Vorwärtsdynamik“

$$\dots \rightarrow (\vec{r}_{k-1}, \vec{p}_{k-1}) \rightarrow (\vec{r}_k, \vec{p}_k) \rightarrow (\vec{r}_{k+1}, \vec{p}_{k+1}) \rightarrow \dots \quad (1.38)$$

auch eine „Rückwärtsdynamik“

$$\dots \rightarrow (\vec{r}_{k+1}, -\vec{p}_k) \rightarrow (\vec{r}_k, -\vec{p}_{k-1}) \rightarrow (\vec{r}_{k-1}, -\vec{p}_{k-2}) \rightarrow \dots \quad (1.39)$$

möglich ist, siehe Abbildung 1.2. Die Indexverschiebung bei der Impulskomponente kommt dadurch zustande, daß in der Vorwärtsdynamik der Impuls unmittelbar nach dem Kick definiert ist; in der Rückwärtsdynamik muß dann der Impuls unmittelbar vor dem Kick eingesetzt werden.

In ebenen Polarkoordinaten ausgedrückt, lautet die zur „Vorwärtsdynamik“

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow (r_{k-1}, p_{k-1}, \varphi_{k-1}) \\ \rightarrow (r_k, p_k, \varphi_k) \\ \rightarrow (r_{k+1}, p_{k+1}, \varphi_{k+1}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (1.40)$$

gehörige „Rückwärtsdynamik“

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow (r_{k+1}, -p_{k+1} + F(r_{k+1}), \varphi_{k+1}) \\ \rightarrow (r_k, -p_k + F(r_k), \varphi_k) \\ \rightarrow (r_{k-1}, -p_{k-1} + F(r_{k-1}), \varphi_{k-1}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (1.41)$$

wobei die Beziehung

$$\begin{aligned} -\vec{p}_k \cdot \hat{r}_{k+1} &= (-\vec{p}_{k+1} + F(r_{k+1}) \hat{r}_{k+1}) \cdot \hat{r}_{k+1} \\ &= -p_{k+1} + F(r_{k+1}) \end{aligned} \quad (1.42)$$

ausgenutzt wurde.

Der Zusammenhang zwischen Vorwärts- und Rückwärtsdynamik läßt sich durch eine Transformation

$$S(r, p) = (r, -p + F(r)) \quad (1.43)$$

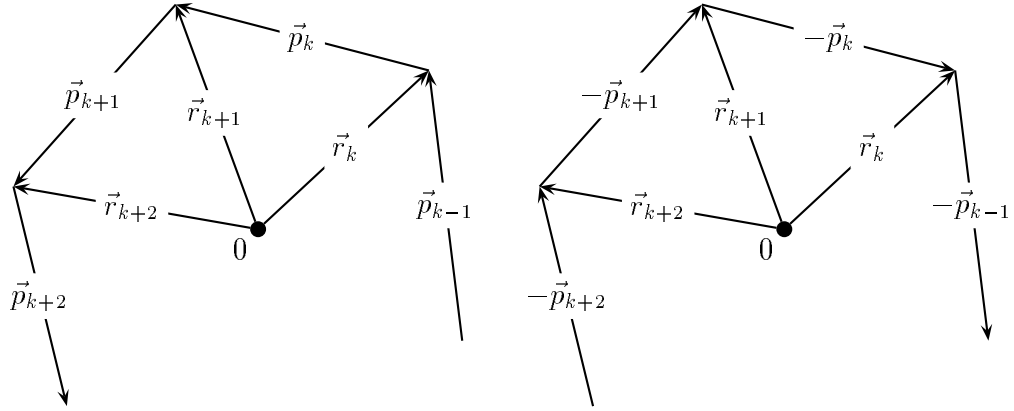


Abbildung 1.2: Vorwärtsdynamik (links) und Rückwärtsdynamik (rechts) im Vergleich. \vec{r} und \vec{p} sind in der Skalierung (1.32) dargestellt.

gemäß dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \dots & & \dots \\
 \downarrow \Phi_L & & \uparrow \Phi_L \\
 (r_k, p_k) & \xrightarrow{S} & (r_k, -p_k + F(r_k)) \\
 \downarrow \Phi_L & & \uparrow \Phi_L \\
 (r_{k+1}, p_{k+1}) & \xrightarrow{S} & (r_{k+1}, -p_{k+1} + F(r_{k+1})) \\
 \downarrow \Phi_L & & \uparrow \Phi_L \\
 \dots & & \dots
 \end{array} \tag{1.44}$$

beschreiben. Aus (1.44) folgt sofort, daß S die Beziehung

$$\Phi_L^{-1} = S \circ \Phi_L \circ S^{-1} \tag{1.45}$$

erfüllt. Die Transformation S stellt also eine *Umkehrende Symmetrie* dar [11, 12]. S ist darüberhinaus eine *Involution*, also zu sich selbst invers.

Aus der Existenz dieser Involution S folgt die Existenz der eindimensionalen *Symmetrielinien*

$$\text{Fix}(S) \tag{1.46}$$

und

$$\text{Fix}(\Phi_L \circ S) \quad . \tag{1.47}$$

Durch die Berechnung von Schnittpunkten von (1.46) und (1.47) mit ihren Iterierten können Fixpunkte und periodische Orbits von Φ_L berechnet werden. Diese Möglichkeit wird jedoch in dieser Arbeit nicht benutzt.

1.3 Die Abbildung Π

In Kapitel 3 werden periodische Punkte der Periode 2 der Abbildung Φ berechnet. Diese Berechnung wird erleichtert durch eine Transformation auf eine Hilfsabbildung

$$\Pi = U \circ \Phi \circ U^{-1} \quad (1.48)$$

mit

$$\begin{aligned} U : \Sigma &\rightarrow \Sigma' = \{(q, z) \mid q \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}\} \\ q &= r^2 \\ z &= r(r - p + F(r)) \quad . \end{aligned} \quad (1.49)$$

Die Transformation U ist invertierbar. Die Invertierung lautet

$$\begin{aligned} U^{-1} : \Sigma' &\rightarrow \Sigma \\ r &= \sqrt{q} \\ p &= \frac{q - z}{\sqrt{q}} + F(\sqrt{q}) \quad . \end{aligned} \quad (1.50)$$

Mit Hilfe von (1.34) sowie der so definierten Transformation U läßt sich die Abbildung Π berechnen:

$$\begin{aligned} \Pi : \Sigma' &\rightarrow \Sigma' \\ q_{k+1} &= \frac{z_{k+1}^2 + 1}{q_k} \\ z_{k+1} &= 2q_k - z_k + \sqrt{q_k} F(\sqrt{q_k}) \quad . \end{aligned} \quad (1.51)$$

Diese Abbildung Π ist *nicht* flächenerhaltend [1]. Aus (1.48) ergibt sich

$$D(\Pi \circ U) = D(U \circ \Phi) \quad ; \quad (1.52)$$

hieraus erhält man durch Anwendung der Kettenregel den Ausdruck

$$D\Pi(q_k, z_k) \cdot DU(r_k, p_k) = DU(r_{k+1}, p_{k+1}) \cdot D\Phi(r_k, p_k) \quad . \quad (1.53)$$

Die Jacobi–Determinante von Π an der Stelle (q_k, z_k) erhält man durch Bildung der Determinante auf beiden Seiten von (1.53). Zusammen mit (1.31) und

$$\det DU = q \quad (1.54)$$

ergibt sich

$$\det D\Pi(q_k, z_k) = \frac{q_{k+1}}{q_k} \quad , \quad (1.55)$$

d. h. Π ist nur in der Umgebung eines Fixpunktes $\Pi(\bar{q}, \bar{z}) = (\bar{q}, \bar{z})$ flächenerhaltend. In [1] wird gezeigt, daß Π auch in der Umgebung eines jeden m –Zyklus flächenerhaltend ist.

Die Abbildungen Π ist wegen (1.48) topologisch konjugiert zur Abbildung Φ . Fixpunkte von Π sind deshalb auch Fixpunkte von Φ .

1.4 Verhalten des Systems für $r \rightarrow \infty$

Das gekickte, zeitabhängige System, das durch die Hamilton–Funktion (1.1) beschrieben wird, geht für Potentiale, die (1.3) und (1.4) erfüllen, für $r \rightarrow \infty$ in das zeitunabhängige System mit der Hamilton–Funktion

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \quad (1.56)$$

über.

Die Darstellung des zeitabhängigen Systems als iterative Abbildung (1.10) entspricht genau dem Ergebnis, das man erhält, wenn das zeitunabhängige System mit Hilfe des einfachsten numerischen Integrationsverfahrens, dem *Euler–Verfahren* [13], integriert wird. Dabei ist die Abweichung zwischen dem numerischen Verfahren und der exakten Lösung, wie leicht gezeigt werden kann [13], von der Ordnung

$$\mathcal{O}(V''(r) \cdot T^2) \quad . \quad (1.57)$$

Ist nun die Forderung (1.4) an das Potential erfüllt, so geht für $r \rightarrow \infty$ und festes T wegen (1.57) offensichtlich das zeitabhängige System (1.1) in das zeitunabhängige (1.56) über.

Zur Verdeutlichung dieser Überlegungen sind in Abbildung 1.3 die Energie E des Systems sowie der Abstand vom Ursprung als Funktion von t für einen typischen Streuorbit gezeigt. Es ist deutlich zu erkennen, daß für große r die Energie des Systems eine Konstante der Bewegung ist.

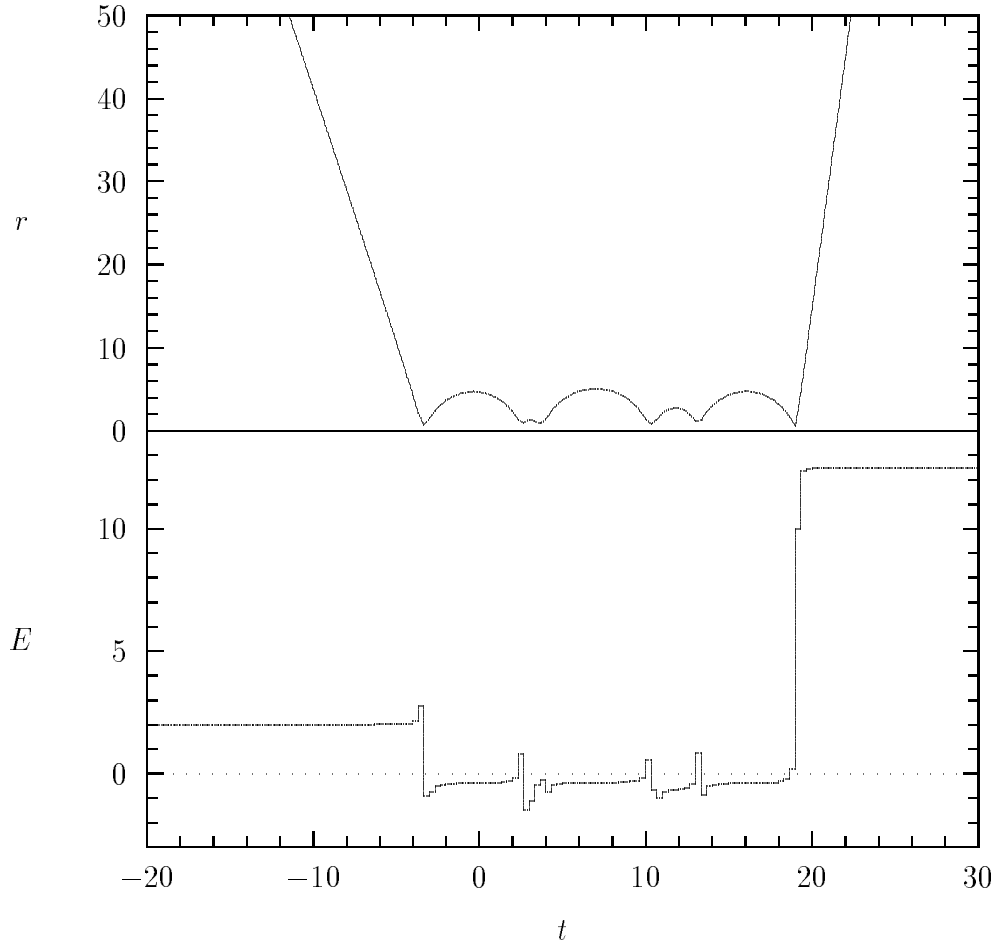


Abbildung 1.3: Gesamtenergie E des Systems sowie Abstand r vom Ursprung als Funktion der Zeit für einen typischen Streuorbit.

1.5 Das Kickpotential

Um an dem hier vorgestellten System Streuung untersuchen zu können, werden an das Potential die Forderungen (1.3) und (1.4) gestellt. Sie ermöglichen den *Escape* des Teilchens und gewährleisten, daß das System gemäß den Überlegungen in Abschnitt 1.4 für $r \rightarrow \infty$ in ein zeitunabhängiges System übergeht. In dieser Arbeit wird ein Potential der Form

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^n}, \quad \alpha > 0 \quad (1.58)$$

gewählt. Die Singularität des Potentials im Ursprung bereitet keine Probleme, da wegen der Voraussetzung $L > 0$ immer $r > 0$ gilt.

Mit (1.7) und der Abkürzung $K = T\alpha$ erhält man die Kraftfunktion

$$F(r) = -\frac{Kn}{r^{n+1}} \quad . \quad (1.59)$$

Mit dieser Wahl des Potentials und der daraus resultierenden Kraftfunktion besitzt die Abbildung (1.33) bei fest gewähltem n zwei Systemparameter: den Drehimpuls L sowie den Parameter K in der Kraftfunktion $F(r)$. K stellt ein Maß für die Stärke des Potentials dar.

Für große Abstände r vom Ursprung nähert sich, wie in Kapitel 1.4 beschrieben wurde, die Dynamik asymptotisch der Bewegung an, die durch die zeitunabhängige Hamilton-Funktion

$$H(r, p, \varphi) = \frac{p^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (1.60)$$

erzeugt wird. Die Energie E des Systems wird in diesem Bereich asymptotisch konstant. Nur für kleine r wird das Teilchen die Zeitabhängigkeit des Potentials spüren.

Für $n = 1$ fällt der Drehimpulsterm in (1.16) schneller ab als das attraktive Potential $V(r)$. Für große Abstände zum Ursprung wird die Dynamik demnach in die eines zeitunabhängigen Coulomb-Systems übergehen. In diesem Bereich des Phasenraumes wird die Bewegung also je nach Energie des Systems auf Ellipsen oder Hyperbeln stattfinden. Außerdem existieren parabolische Orbits, auf denen das Teilchen den Wechselwirkungsbereich mit verschwindend kleiner Energie verläßt. Die Zeitabhängigkeit des Potentials beeinflußt die Dynamik nur für kleine r . Die Streudynamik für $n = 1$, die von der Existenz parabolischer Out-Orbits entscheidend beeinflußt wird, wird in Kapitel 4 untersucht.

Für $n > 1$ geht die Dynamik des Systems für große Abstände vom Ursprung in die eines freien Teilchens über, das Teilchen wird sich also geradliniggleichförmig bewegen. Im Fall $n = 2$ ist dabei je nach Verhältnis zwischen Drehimpuls und Stärke des Potentials $V(r)$ das resultierende Potential attraktiv oder repulsiv.

Für den Fall $n > 2$ wird das resultierende Potential für große r repulsiv. In diesem Fall sind demnach keine parabolischen Out-Orbits möglich, die den Wechselwirkungsbereich mit verschwindender Energie verlassen. Die für diese Wahl des Potentials resultierende Dynamik unterscheidet sich demnach von der für $n = 1$. Sie wird exemplarisch für den Fall $n = 4$ in Kapitel 3 untersucht.

Kapitel 2

Streuabbildung und Ablenkfunktion

In dem hier vorgestellten System sollen die Eigenschaften der Streudynamik untersucht werden. Ein typischer Streuorbit nähert sich dem Streuzentrum aus dem wechselwirkungsfreien Bereich, hält sich für eine begrenzte Zeit im Wechselwirkungsbereich auf und verläßt ihn anschließend wieder in den asymptotischen Bereich. Dabei kann es, wie Abbildung 2.1 zeigt, zu komplizierter Dynamik und großen Aufenthaltszeiten des Teilchens innerhalb des Wechselwirkungsbereiches kommen.

Findet sich ein geeigneter Satz von Variablen, der für die Bewegung im wechselwirkungsfreien Bereich konstante Werte annimmt, so läßt sich die *Streuabbildung* definieren, welche den Satz konstanter *In*-Variablen vor der Wechselwirkung auf den Satz konstanter *Out*-Variablen nach der Wechselwirkung mit dem Potential abbildet.

In diesem Kapitel wird ein solcher Variablensatz für das r^{-4} -Potential eingeführt, mit dessen Hilfe dann die Streuabbildung σ definiert werden kann. Anschließend wird die Struktur dieser Streuabbildung als Funktion des Systemparameters L untersucht.

2.1 Asymptotisch konstante Variablen für $n = 4$

Für die Beschreibung eines Streuvorganges benötigt man Variablen, die für große Abstände vom Streupotential, also außerhalb des Wechselwirkungsbereiches, längs der Trajektorie des Teilchens konstante Werte annehmen. Das Variablenpaar (r, p) eignet sich demnach nicht zur Beschreibung eines Streuvorganges.

Im zeitabhängigen r^{-4} -Potential, auf das die Untersuchungen dieses Kapitels beschränkt werden sollen, stellt die kinetische Energie E des freien Teilchens eine geeignete Größe dar. Da die Bewegung für große Abstände vom Ursprung in die eines freien Teilchens übergeht, wird in diesem Bereich des Phasenraumes

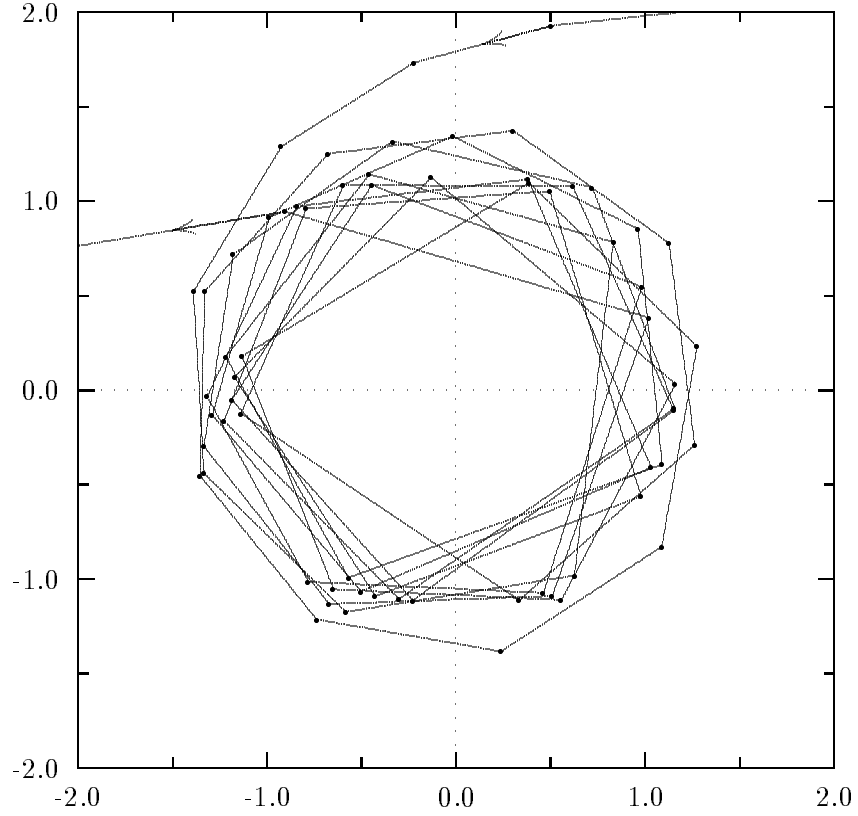


Abbildung 2.1: Typischer Streuorbit des Systems im Konfigurationsraum für das r^{-4} -Potential. $K = 1$, $L = 1.3082940029708$. Die Orte des Teilchens zu den Kickzeitpunkten sind mit Punkten markiert.

die kinetische Energie E auch für das zeitabhängige System eine Konstante der Bewegung. Die kinetische Energie eines freien Teilchens ist in Polarkoordinaten durch

$$E = \frac{1}{2m} \left(p^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) \quad (2.1)$$

gegeben. Eine zweite geeignete Größe stellt die Zeit τ dar, zu der – für die Bewegung eines freien Teilchens – der Abstand vom Ursprung minimal wird.

Zum Zeitpunkt τ , zu dem per definitionem der Abstand des freien Teilchens vom Ursprung minimal wird, gilt für den Radialimpuls p des freien Teilchens $p(\tau) = 0$ (siehe Abbildung 2.2). Es gilt die Beziehung

$$\frac{x}{r(t)} = \frac{p(t)}{\sqrt{2mE}} \quad , \quad (2.2)$$

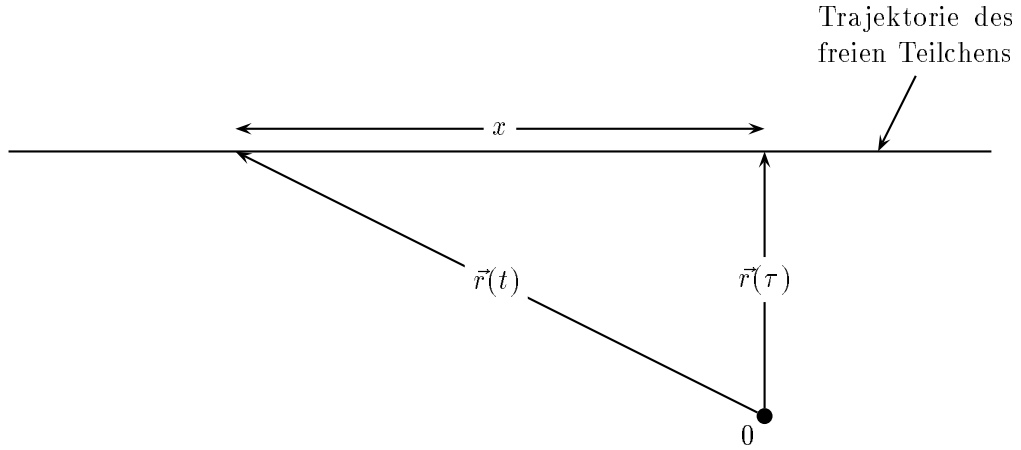


Abbildung 2.2: Zur Berechnung der Größe τ

wobei $r(t)$ und $p(t)$ Abstand vom Ursprung bzw. Radialimpuls des Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt t darstellen. Andererseits gilt

$$\frac{x}{t - \tau} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad . \quad (2.3)$$

Aus (2.2) und (2.3) ergibt sich

$$t - \tau = \frac{r(t)p(t)}{2E} \quad . \quad (2.4)$$

Insgesamt ergibt sich aus (2.1) und (2.4) eine zeitabhängige Transformation T_t , die die Variablen $(r, p) \in \Sigma$ auf die asymptotisch konstanten Variablen $(E, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ transformiert gemäß

$$\begin{aligned} T_t : \quad \Sigma &\rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ E &= \frac{1}{2m} \left(p^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) \\ \tau &= t - \frac{r p}{2E} \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Invertierung von T_t lautet:

$$\begin{aligned} T_t^{-1} : \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \Sigma \\ r &= \sqrt{\frac{(2E(t - \tau))^2 + L^2}{2mE}} \\ p &= \frac{2E(t - \tau)}{r} \quad . \end{aligned} \quad (2.6)$$

T_t ist, wie durch Berechnung der fundamentalen Poisson-Klammern leicht nachgerechnet werden kann, eine kanonische Transformation und somit flächenerhaltend. Es gilt also

$$\det(DT) = 1 \quad . \quad (2.7)$$

2.2 Definition der Streuabbildung σ

Mit Hilfe der oben eingeführten Abbildung T_t läßt sich nun die Streuabbildung σ definieren. σ soll die asymptotisch konstanten In-Variablen (E_{in}, τ_{in}) einer Streutrajektorie auf die asymptotisch konstanten Out-Variablen (E_{out}, τ_{out}) abbilden. Dies wird erreicht durch die Definition

$$\begin{aligned} \sigma : (E_{in}, \tau_{in}) &\rightarrow (E_{out}, \tau_{out}) \\ \sigma &= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{t' \rightarrow -\infty} T_t \circ \Phi_{tt'} \circ T_{t'}^{-1} \quad , \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei $\Phi_{tt'}$ für den durch die Hamiltonfunktion (1.16) erzeugten Fluß im Zeitintervall (t', t) steht. Stellt man die Streuabbildung σ mit Hilfe der iterativen Abbildung Φ_L dar, ergibt sich aus (2.8)

$$\begin{aligned} \sigma : (E_{in}, \tau_{in}) &\rightarrow (E_{out}, \tau_{out}) \\ \sigma &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{k' \rightarrow -\infty} T_k \circ \Phi_L^{k-k'} \circ T_{k'}^{-1} \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

T_k steht hier für die Transformation T_t zum Zeitpunkt $t = kT$, $\Phi_L^{k-k'}$ für die $(k - k')$ -fache Iteration der Abbildung Φ_L aus (1.28). σ ist zusammengesetzt aus drei flächenerhaltenden Transformationen und somit selber flächenerhaltend.

Für die numerischen Berechnungen der Streuabbildung σ wird in dieser Arbeit ausschließlich die Darstellung in der Form (2.9) benutzt. Dabei ist zu beachten, daß eine Streutrajektorie numerisch nicht über unendlich lange Zeiträume verfolgt werden kann. Da jedoch das Variablenpaar (E, τ) gerade so gewählt ist, daß es für große Abstände zum Streuzentrum asymptotisch konstant wird, reicht es aus, die Berechnung von σ bei einem Radius R zu starten. Die Berechnung kann abgebrochen werden, wenn nach dem Durchgang durch das Streuzentrum dieser Radius R wieder erreicht wird. R muß dabei so groß gewählt werden, daß E und τ für $r > R$ im Rahmen der numerisch erreichbaren Genauigkeit konstant werden.

Die Energiedifferenz $E_{out} - E_{in}$ gibt die beim Streuprozess auf das Teilchen übertragene Energie an und stellt somit ein Maß für die Inelastizität der Streuung dar. Die Zeitdifferenz $\tau_{out} - \tau_{in}$ kann als Maß für die Verweilzeit des Teilchens im Potential betrachtet werden.

2.3 Die Ablenkefunktion Θ

Neben der Änderung der asymptotisch konstanten Variablen (E, τ) durch den Streuvorgang soll auch der Ablenkwinkel Θ untersucht werden, um den das Teilchen durch das Streupotential aus seiner ursprünglichen Bewegungsrichtung abgelenkt wird. Θ läßt sich als Funktion der Azimutalwinkel φ_{in} und φ_{out} des Teilchens vor bzw. nach dem Stoß beschreiben. Es gilt

$$\Theta = (\varphi_{out} - \varphi_{in}) \begin{cases} -\pi & \text{für } L > 0 \\ +\pi & \text{für } L < 0 \end{cases} . \quad (2.10)$$

Wegen der Einschränkung auf positive L wird im folgenden nur die obere Beziehung von (2.10) eingesetzt. Da das hier untersuchte System rotationssymmetrisch bezüglich des Azimutalwinkels φ ist, kann man sich auf $\varphi_{in} = 0$ beschränken.

Θ ist eine Funktion des Drehimpulses L . Θ hängt weiterhin von den In-Variablen (E_{in}, τ_{in}) sowie dem Parameter K der Kraftfunktion ab. In diesem Kapitel werden die Ablenkefunktion Θ sowie die Out-Variablen E_{out} und τ_{out} in Abhängigkeit vom Drehimpuls L und dem „zeitlichen Stoßparameter“ τ_{in} untersucht. E_{in} und K seien fest gewählt. Dies entspricht physikalisch einem Teilchenstrahl, der mit fester Energie E_{in} und variablem τ_{in} auf das Streupotential „geschossen“ wird. Aufgrund der Einschränkung auf positive L wird hier nur eine Hälfte eines solchen Strahls betrachtet.

Da das hier untersuchte System periodisch in der Zeit mit der Periode T ist, ist es ausreichend, für die Variable τ_{in} Werte aus dem Intervall $[0, T)$ zu wählen. Für die Periode T wird im folgenden $T = 1$ eingesetzt. Es ergibt sich somit $\tau_{in} \in [0, 1)$.

Zusammen mit der Beschränkung von L auf positive Werte bleibt als Definitionsbereich der Ablenkefunktion $\Theta(L, \tau_{in})$ die Menge

$$\Gamma = [0, 1) \times \mathbb{R}^+ . \quad (2.11)$$

Diese Menge entspricht topologisch dem Mantel eines Halbzylinders.

2.4 Numerische Berechnung von σ und Θ

Für die Darstellung der numerischen Berechnung der Ablenkefunktion $\Theta(\Gamma)$ wird Θ wie folgt farblich kodiert [14]: Θ wird abgebildet auf das Intervall $[0, 2\pi)$; dem Winkel 0 bzw. 2π wird die Farbe Rot zugeordnet, dem Winkel π die Farbe Blau. Zwischenwerte variieren linear mit dem Cosinus von Θ . Diese Kodierung ist nicht eindeutig, da dem Winkel $\pi - \alpha$ dieselbe Farbe zugeordnet wird wie

dem Winkel $\pi + \alpha$. Sie gewährleistet jedoch, daß sich für stetige Änderungen von Θ der Farbwert ebenfalls stetig ändert; unstetige Änderungen dagegen ergeben Farbsprünge.

Abbildung 2.3 zeigt die Ablenkfunktion Θ in der beschriebenen Farbkodierung. Der linke Rand der Abbildung ist mit dem rechten zu assoziieren. Für die Energie des einfallenden Teilchenstroms E_{in} wurde $E_{in} = 0.2$ gewählt, für die Potentialstärke $K = 1$. Für große Drehimpulse $L > L^*$, $L^* \approx 1.3$ fällt der Ablenkwinkel stetig gegen 0. Für diese Werte des Drehimpulses bleibt der Abstand des Teilchens zum Streuzentrum so groß, daß keine nennenswerte Ablenkung erfolgt. In diesem Bereich hängt der Ablenkwinkel nicht mehr von der Variablen τ_{in} ab.

Für Drehimpulse $L < L^*$ zeigt sich eine für chaotische Streusysteme typische Struktur (siehe z. B. [8, 15, 5]). Gewisse Bereiche der Ablenkfunktion zeigen eine stetige Abhängigkeit von den Variablen L und τ_{in} (stetiger Farbverlauf). Diese Bereiche werden unterbrochen von Streifen, in denen der Ablenkwinkel unstetig von den Variablen L und τ_{in} abhängt (Farbsprünge). Bei Vergrößerung dieser unstetigen Streifen zeigt sich, daß sie wieder Streifen mit stetiger Abhängigkeit enthalten, siehe Abbildung 2.4 und 2.5. Diese Streifen sind ihrerseits von Unstetigkeitsbereichen unterbrochen usw. Diese Struktur setzt sich, wie die folgenden Rechnungen zeigen, bis in beliebig kleine Maßstäbe fort. Der Bereich der Unstetigkeiten erscheint hier als ein schmaler Streifen, der, bei der Geraden $L = 0$ beginnend, sich unter spiralförmiger Umwicklung des Halbzylinders Γ der Geraden $L = L^*$ annähert.

Für $L \rightarrow 0$ geht das System in ein eindimensionales System über, hier sind für Θ nur noch die Werte 0 und π möglich. Dementsprechend erscheinen in Abbildung 2.3 mit kleiner werdenden L -Werten nur noch die Farben Rot und Blau. Die Unstetigkeit in Θ für $L \rightarrow 0$ bei $\tau_{in} \approx 0.55$ entsteht durch die Singularität des Potentials im Ursprung. Teilchen mit diesen Anfangsbedingungen laufen direkt in die Singularität hinein. Bei geringfügig kleineren/größeren Werten für τ_{in} wird das Teilchen entweder unmittelbar vor dem Durchgang durch die Singularität oder direkt danach gekickt, der Streuwinkel Θ beträgt dementsprechend entweder 0 oder π .

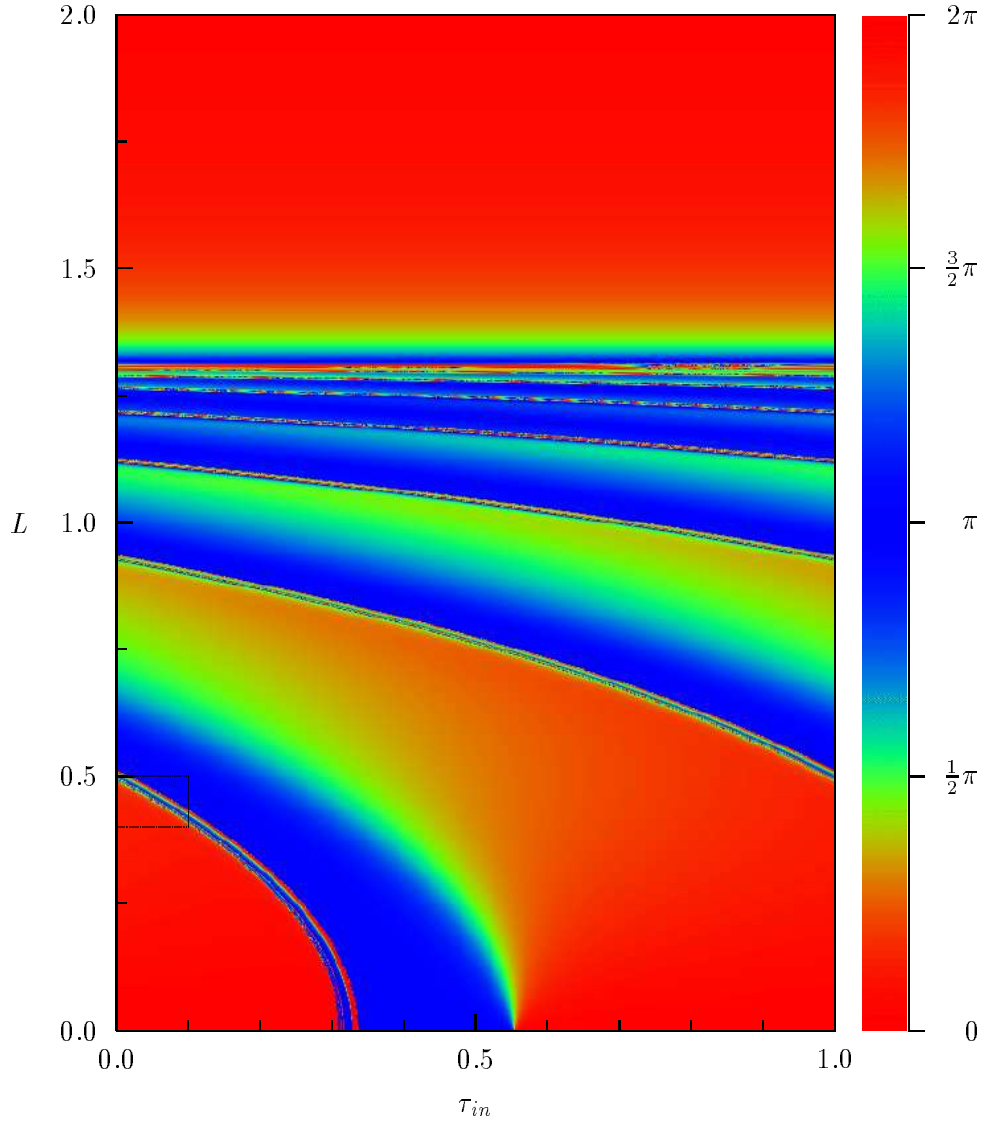


Abbildung 2.3: Zweidimensionale Darstellung der Funktion $\Theta(L, \tau_{in})$ für festes $E_{in} = 0.2$ und $K = 1$. Der rechte Rand der Abbildung ist mit dem linken zu assoziieren. Der Ablenkswinkel Θ ist gemäß der Farbskala farblich kodiert. Rot entspricht einem Ablenkswinkel von $0 \pmod{2\pi}$ (Vorwärtsstreuung), Blau einem Ablenkswinkel von $\pi \pmod{2\pi}$ (Rückwärtsstreuung). Der markierte Bereich ist in Abbildung 2.4 vergrößert dargestellt. Die Berechnung wurde mit einem Gitter von 800 L -Werten und 566 τ_{in} -Werten durchgeführt.

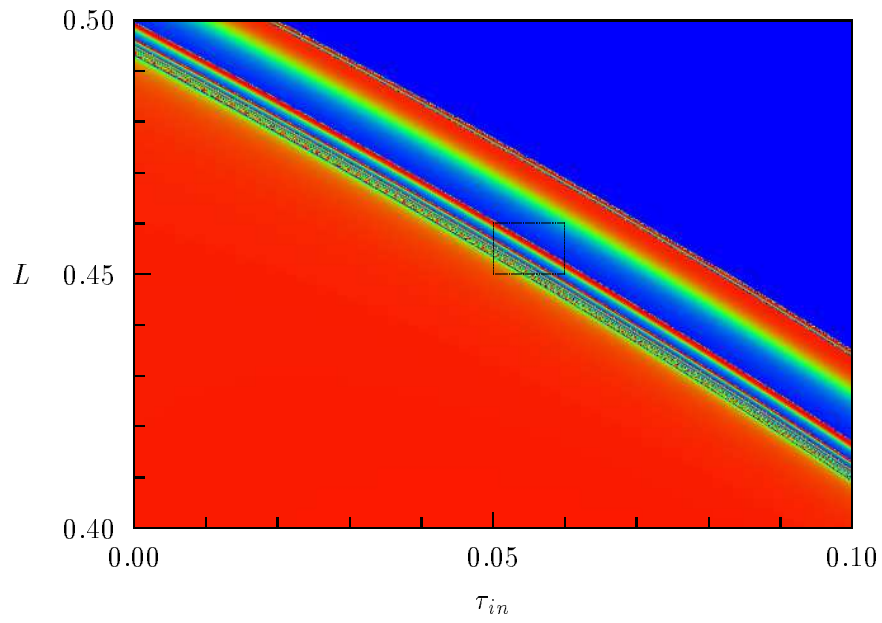


Abbildung 2.4: Vergrößerte Darstellung des markierten Rechtecks in Abbildung 2.3. Der markierte Bereich ist in Abbildung 2.5 vergrößert dargestellt.

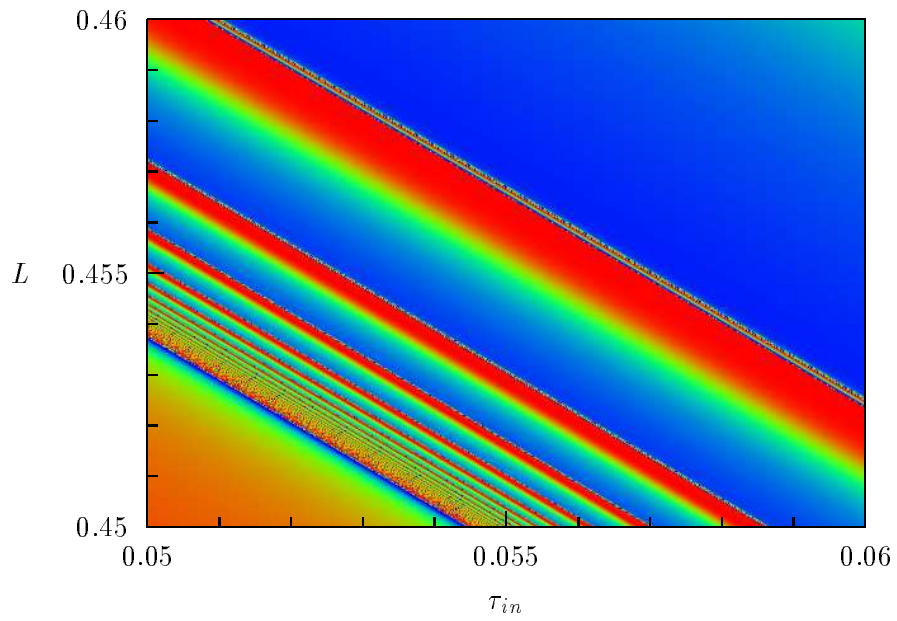


Abbildung 2.5: Vergrößerte Darstellung des markierten Rechtecks in Abbildung 2.4.

Im folgenden wird die Definitionsmenge Γ der Ablenkfunktion Θ auf eine eindimensionale Untermenge $\bar{\Gamma}$ eingeschränkt, indem $\tau_{in} = 0$ eingesetzt wird. Dies entspricht einem Schnitt längs des linken Randes durch das in Abbildung 2.3 dargestellte Bild. Durch diese Einschränkung hängt die Ablenkfunktion Θ nur noch von einer Variablen L ab. So können Θ und die durch σ gegebenen Out-Werte E_{out} und τ_{out} in einem Diagramm in Abhängigkeit von L dargestellt werden.

Abbildung 2.6 zeigt die Ablenkfunktion Θ und die Streuabbildung σ in Abhängigkeit von L . Θ wurde hier nicht wie in Abbildung 2.3 auf das Intervall $[0, 2\pi)$ eingeschränkt. Der spiralförmige Streifen von Unstetigkeiten in Abbildung 2.3 wird hier zu einer Folge von Intervallen, die sich von links gegen $L = L^*$ häufen. Für $L > L^*$ hängen, wie schon in Abbildung 2.3 zu erkennen war, die Out-Variablen stetig vom Drehimpuls L ab.

In den Abbildungen 2.7–2.15 sind willkürlich gewählte Ausschnitte der Streuabbildung und der Ablenkfunktion wiederholt vergrößert worden. Bei der Vergrößerung eines Intervalls, in dem die Streufunktion sich irregulär verhält, zeigen sich stets wieder Intervalle stetiger Abhängigkeit, die ihrerseits wieder von Intervallen mit irregulärem Verhalten unterbrochen sind. Diese Schachtelung von irregulärem und regulärem Verhalten setzt sich bis an die Grenze der numerisch erreichbaren Genauigkeit fort.

Die Abbildungen 2.7–2.15 zeigen außerdem, daß sich bestimmte Strukturen in der Streufunktion auf verschiedenen Maßstäben wiederholen. Diese Selbstähnlichkeit ist ein typisches Merkmal von Mengen mit fraktaler Dimension. Besonders deutlich zeigt sich diese Selbstähnlichkeit beim Vergleich der Abbildungen 2.9, 2.12 und 2.14.

In der Menge $\bar{\Gamma}$ der Anfangsbedingungen für die numerische Berechnung der Ablenkfunktion Θ sowie der Streuabbildung σ existiert also eine Menge Ω , für die Θ sowie σ singulär werden. Diese Menge Ω hat offenbar, wie aus den Abbildungen 2.7–2.15 zu erkennen ist, die Struktur einer fraktalen *Cantor-Menge*. Eine solche Menge von Streusingularitäten ist typisch für *irreguläre Streuung* [6, 8]. Die Singularitäten werden durch Trajektorien verursacht, die von instabilen periodischen oder aperiodischen Orbits eingefangen werden und den Wechselwirkungsbereich nicht mehr verlassen (Orbiting).

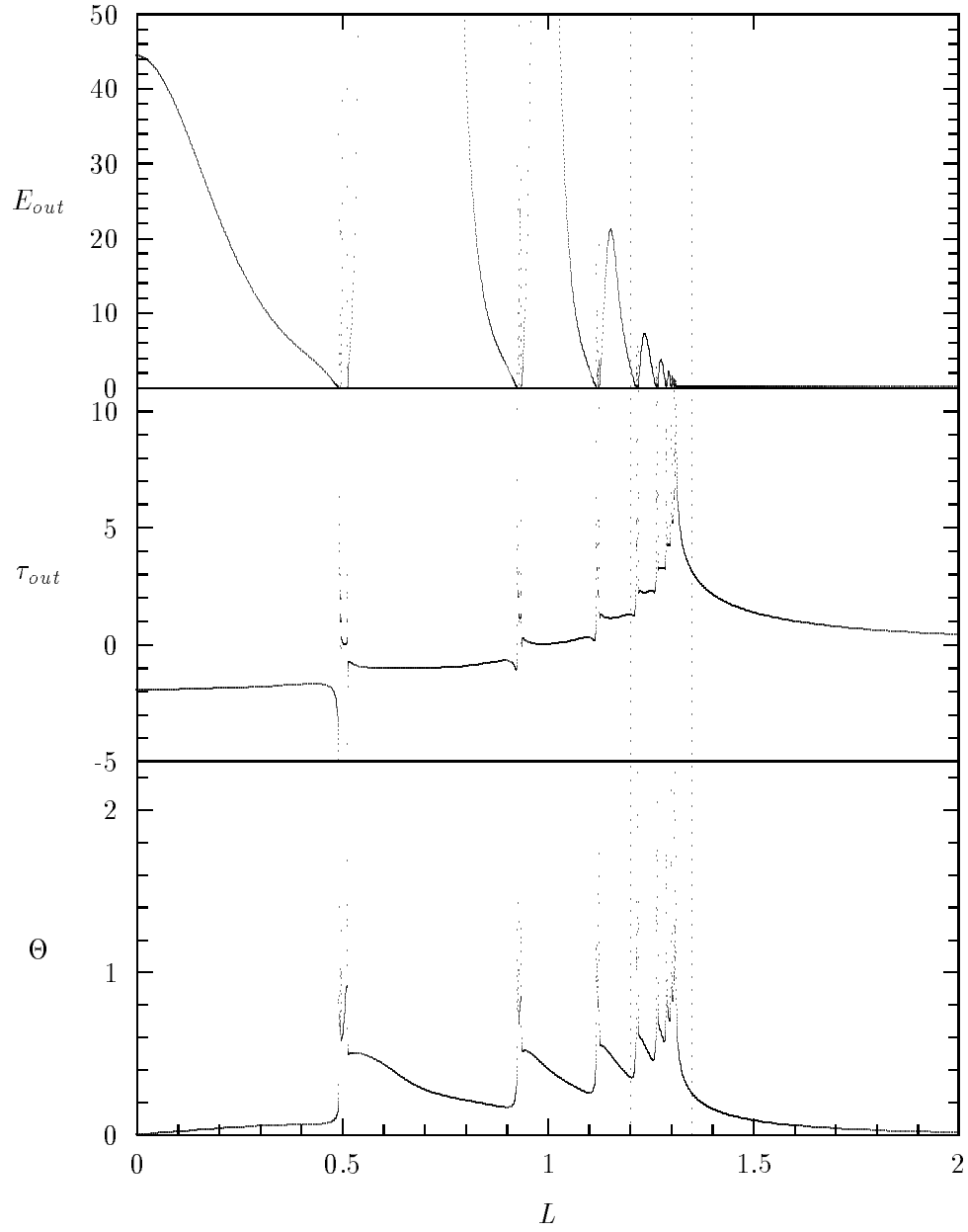


Abbildung 2.6: E_{out} , τ_{out} und Θ als Funktionen des Drehimpulses L . $E_{in} = 0.2$, $\tau_{in} = 0.0$, $K = 1.0$. Das markierte Intervall ist in Abbildung 2.7 vergrößert dargestellt.

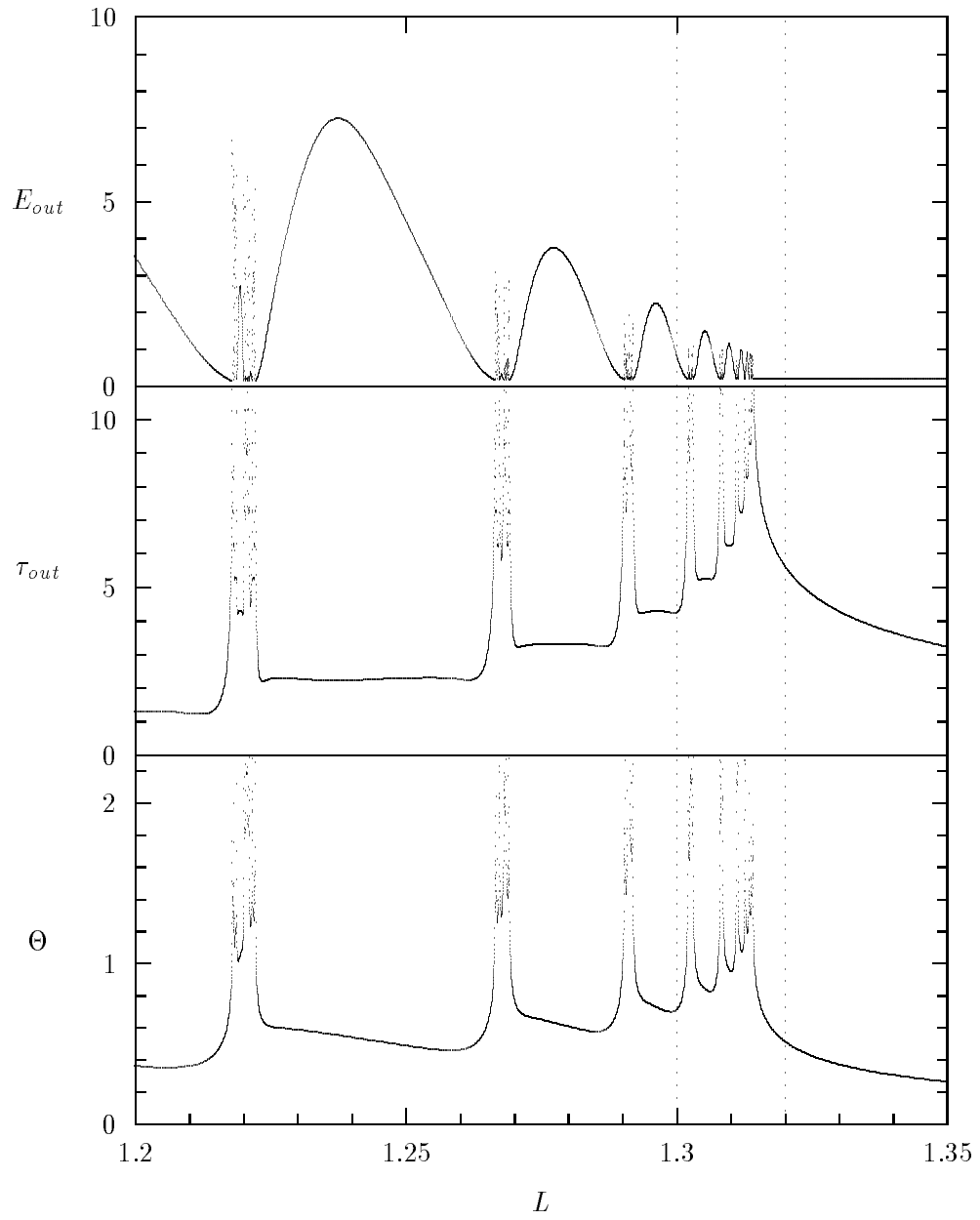


Abbildung 2.7: Vergrößerung des markierten Intervalls aus Abbildung 2.6. Das markierte Intervall ist in Abbildung 2.8 vergrößert dargestellt.

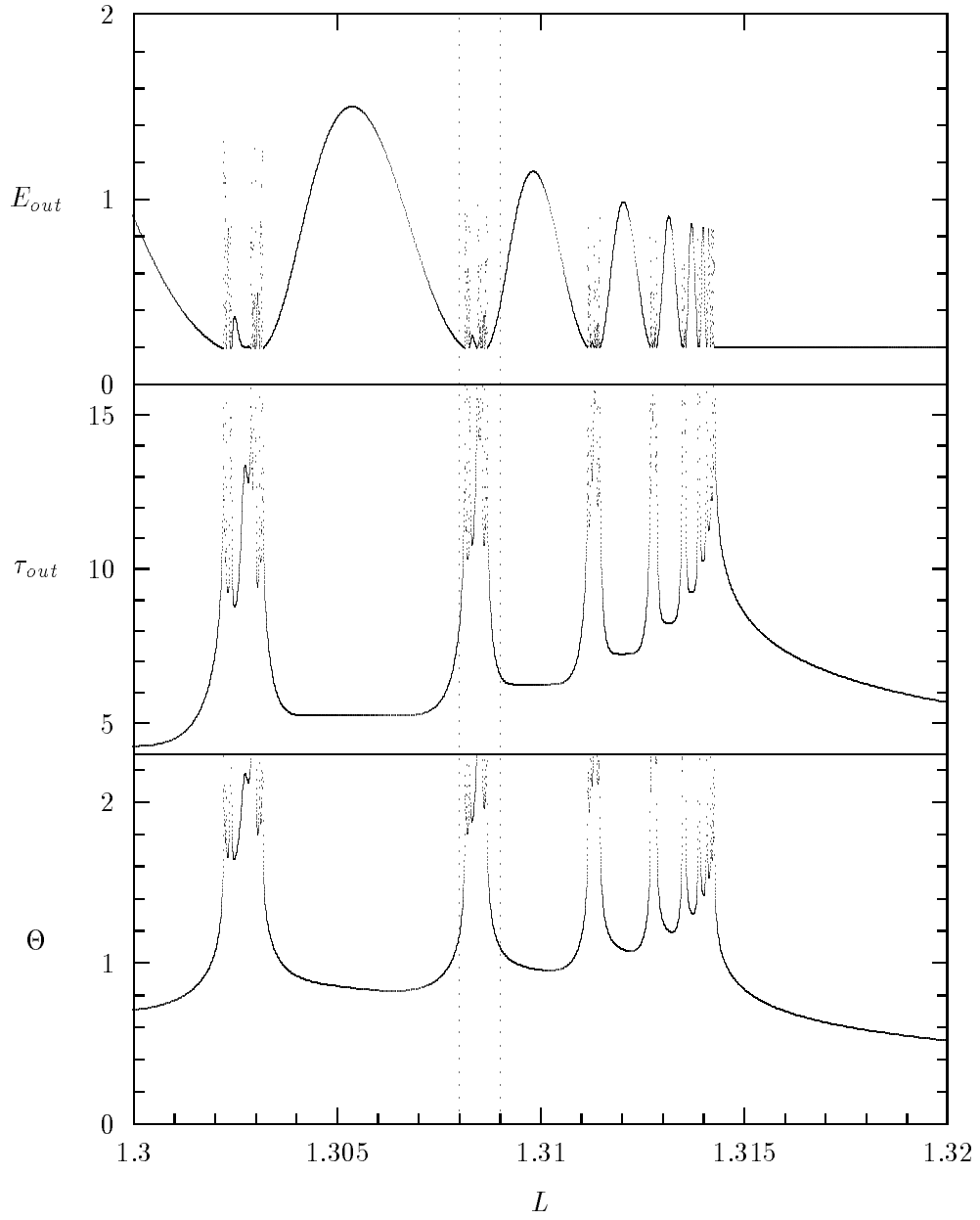


Abbildung 2.8: Vergrößerung des markierten Intervalls aus Abbildung 2.7. Das markierte Intervall ist in Abbildung 2.9 vergrößert dargestellt.

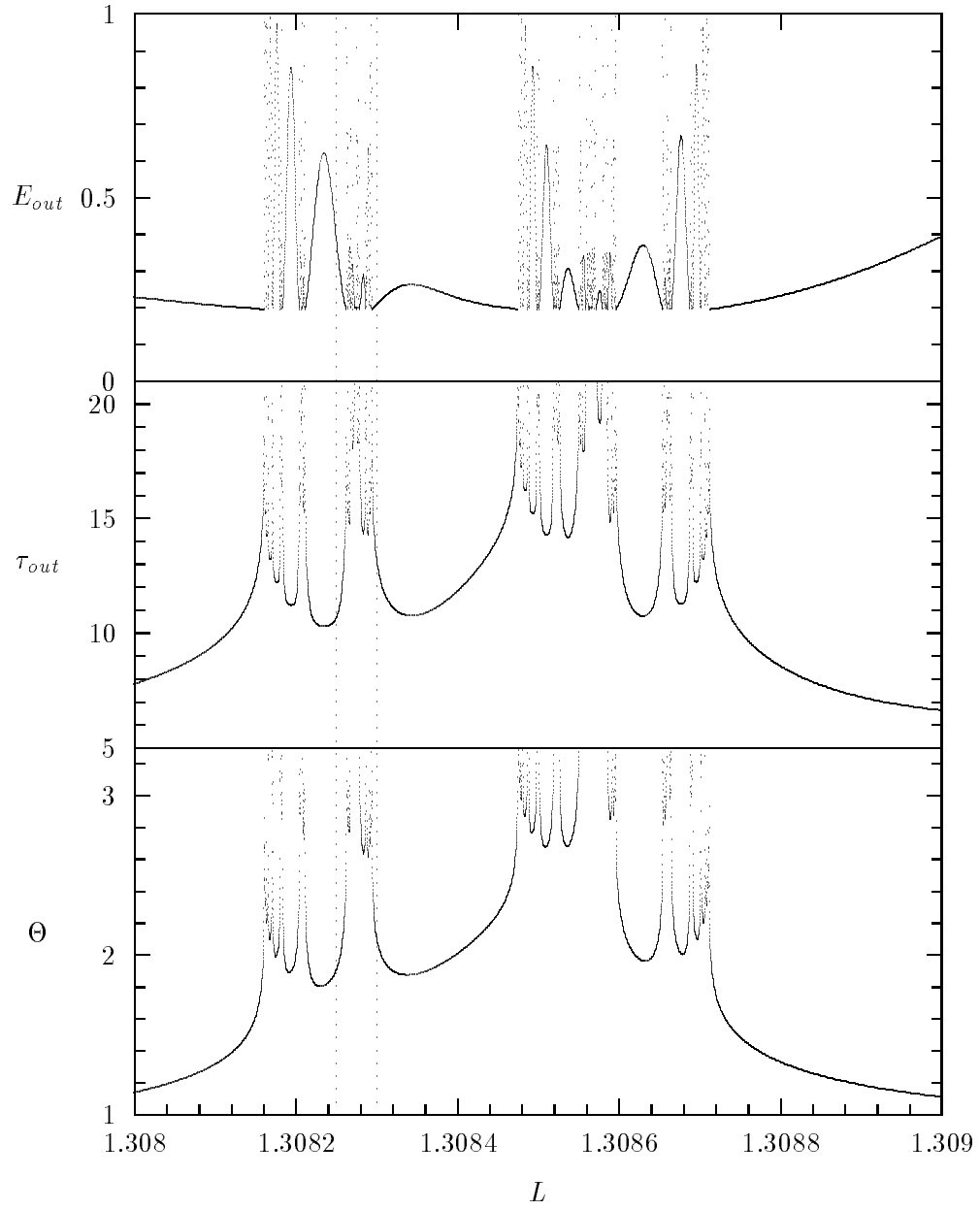


Abbildung 2.9: Vergrößerung des markierten Intervalls aus Abbildung 2.8. Das markierte Intervall ist in Abbildung 2.10 vergrößert dargestellt.

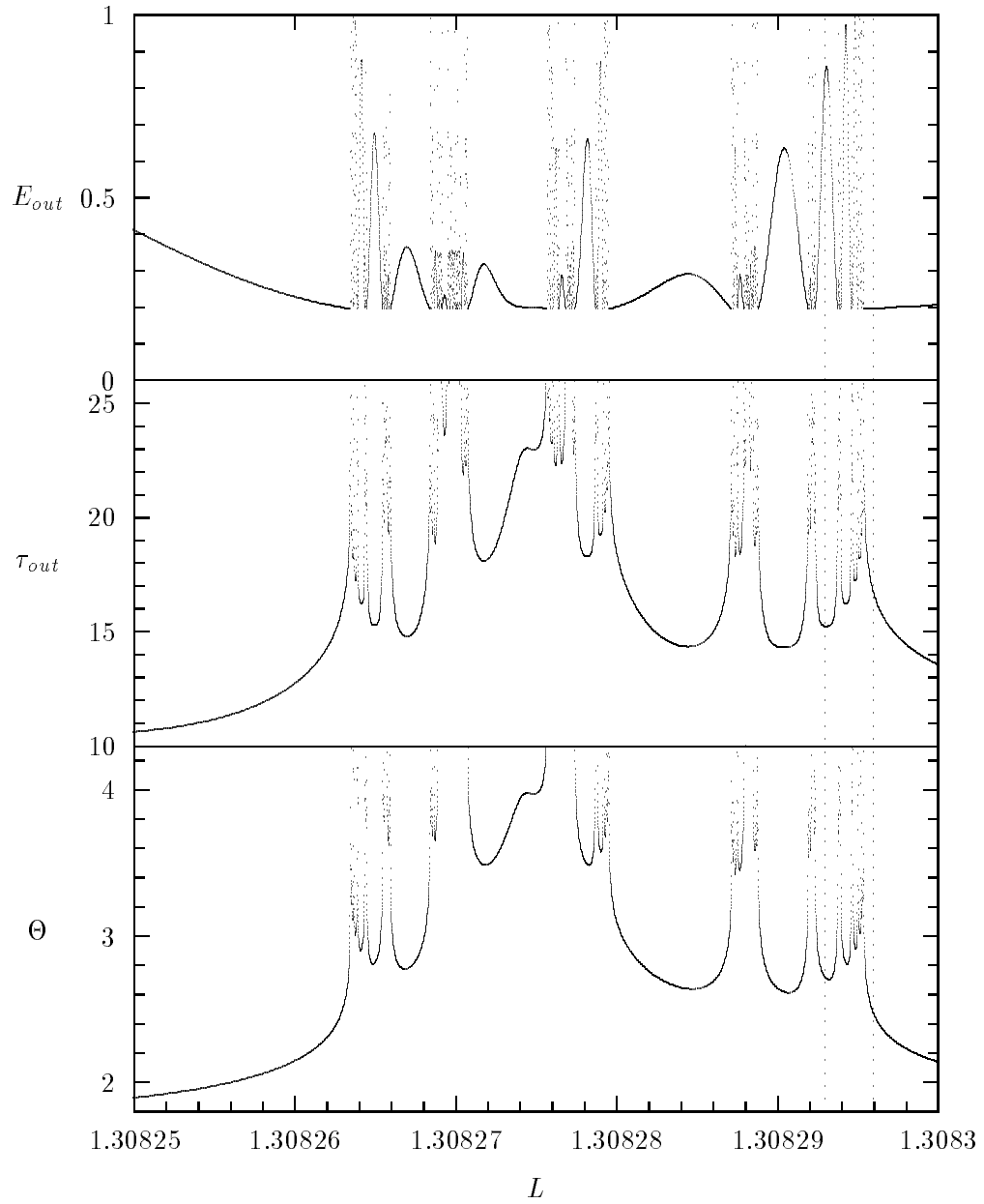


Abbildung 2.10: Vergrößerung des markierten Intervalls aus Abbildung 2.9. Das markierte Intervall ist in Abbildung 2.11 vergrößert dargestellt.

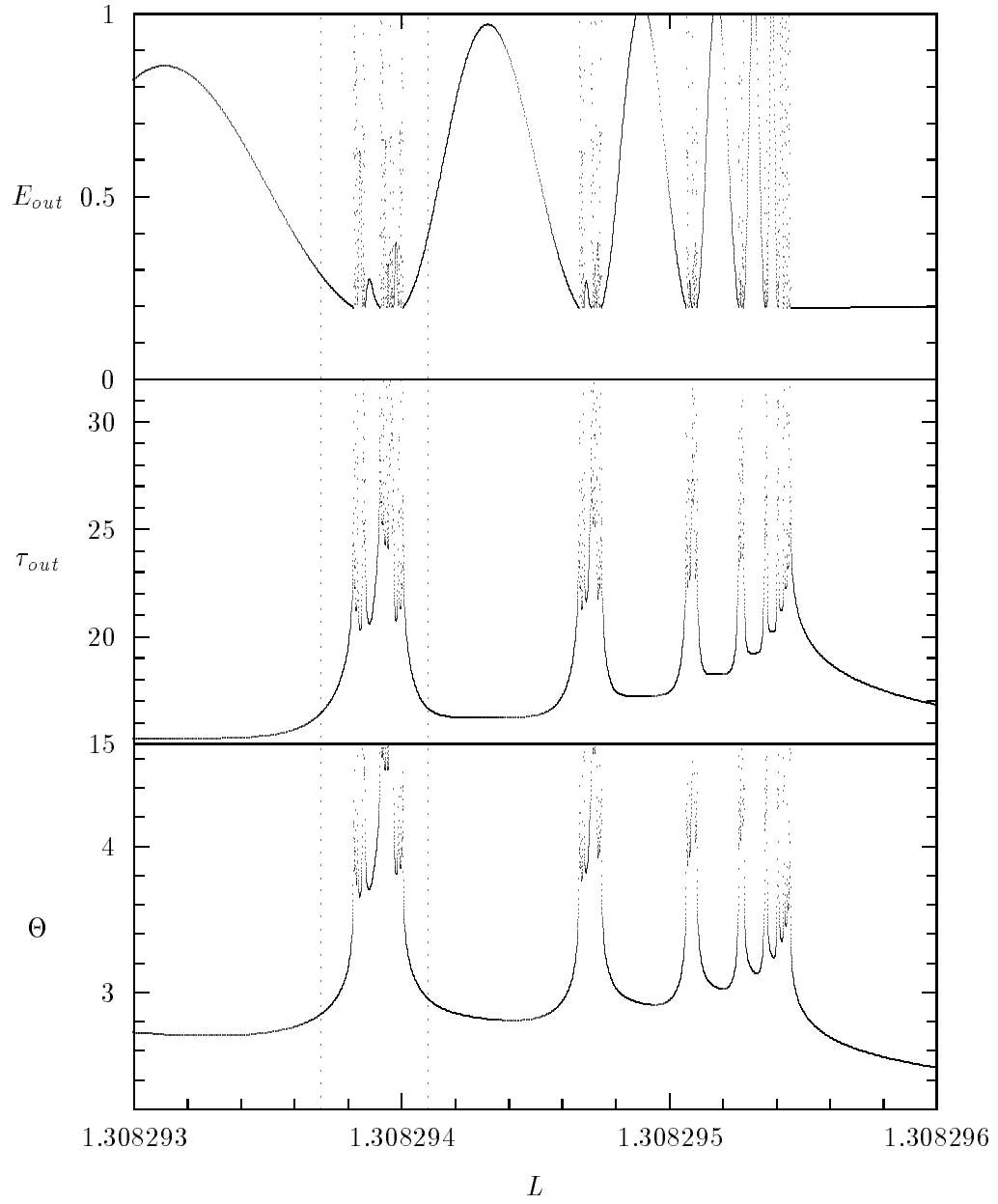


Abbildung 2.11: Vergrößerung des markierten Intervalls aus Abbildung 2.10. Das markierte Intervall ist in Abbildung 2.12 vergrößert dargestellt.

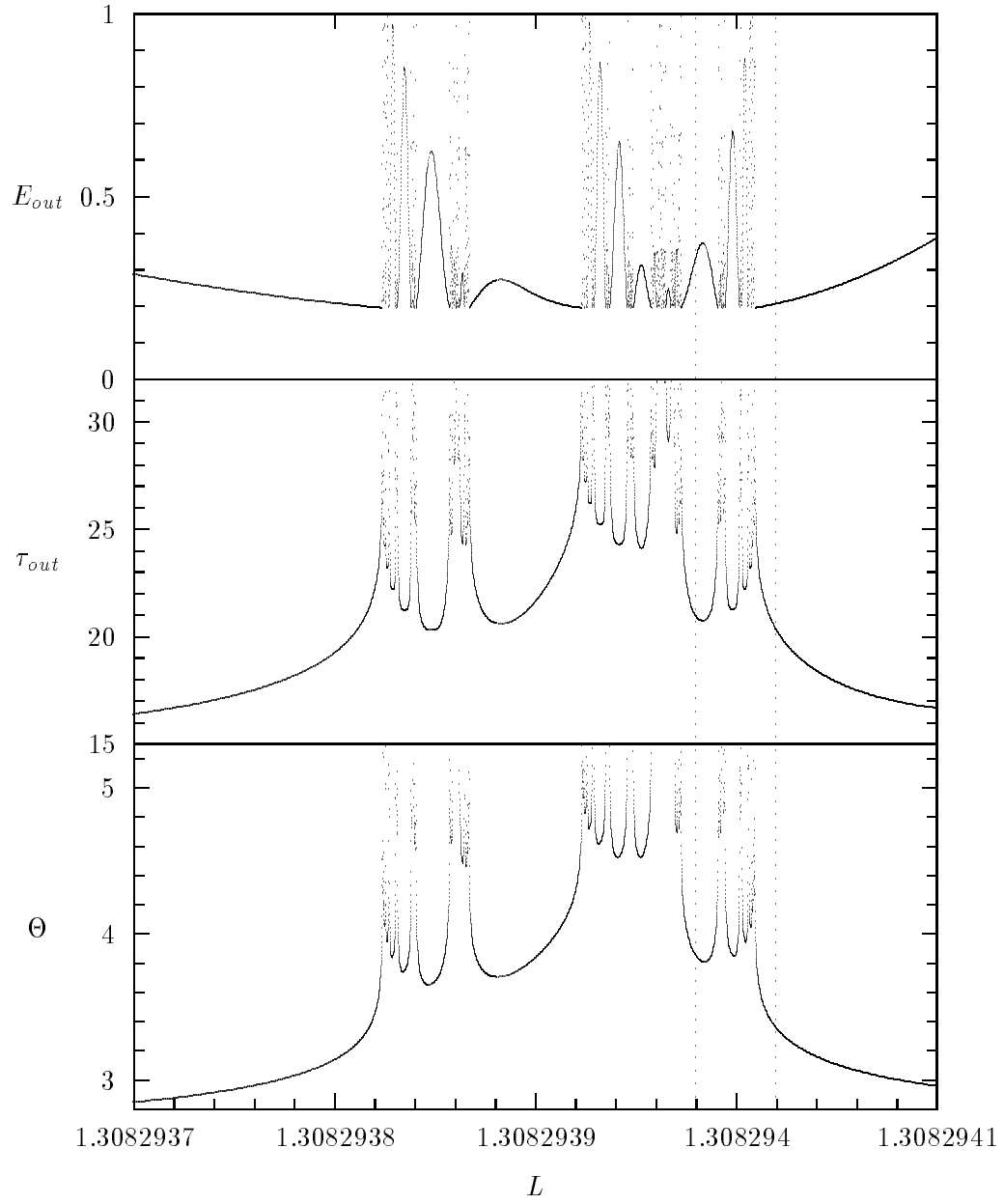


Abbildung 2.12: Vergrößerung des markierten Intervalls aus Abbildung 2.11. Das markierte Intervall ist in Abbildung 2.13 vergrößert dargestellt.

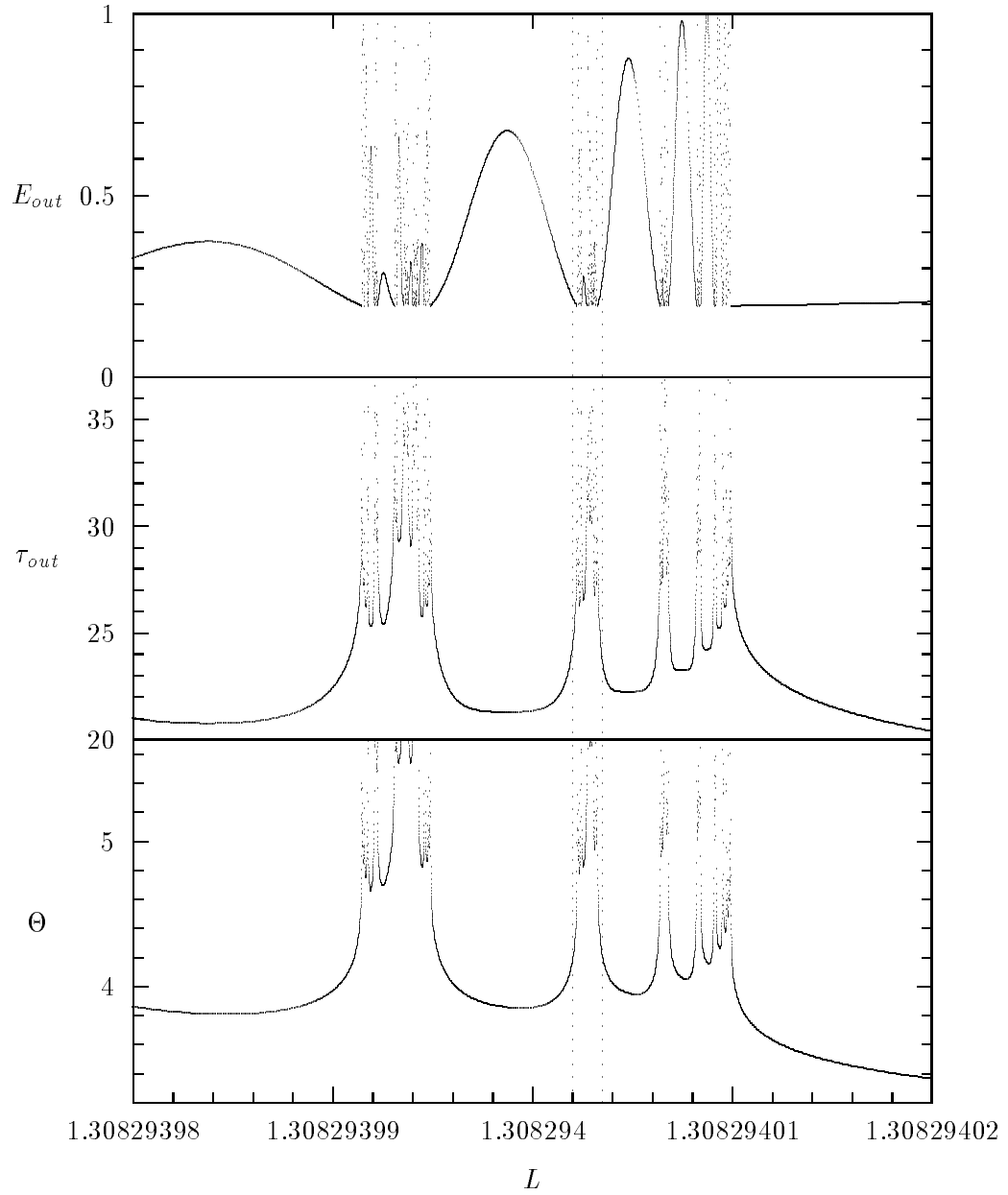


Abbildung 2.13: Vergrößerung des markierten Intervalls aus Abbildung 2.12. Das markierte Intervall ist in Abbildung 2.14 vergrößert dargestellt.

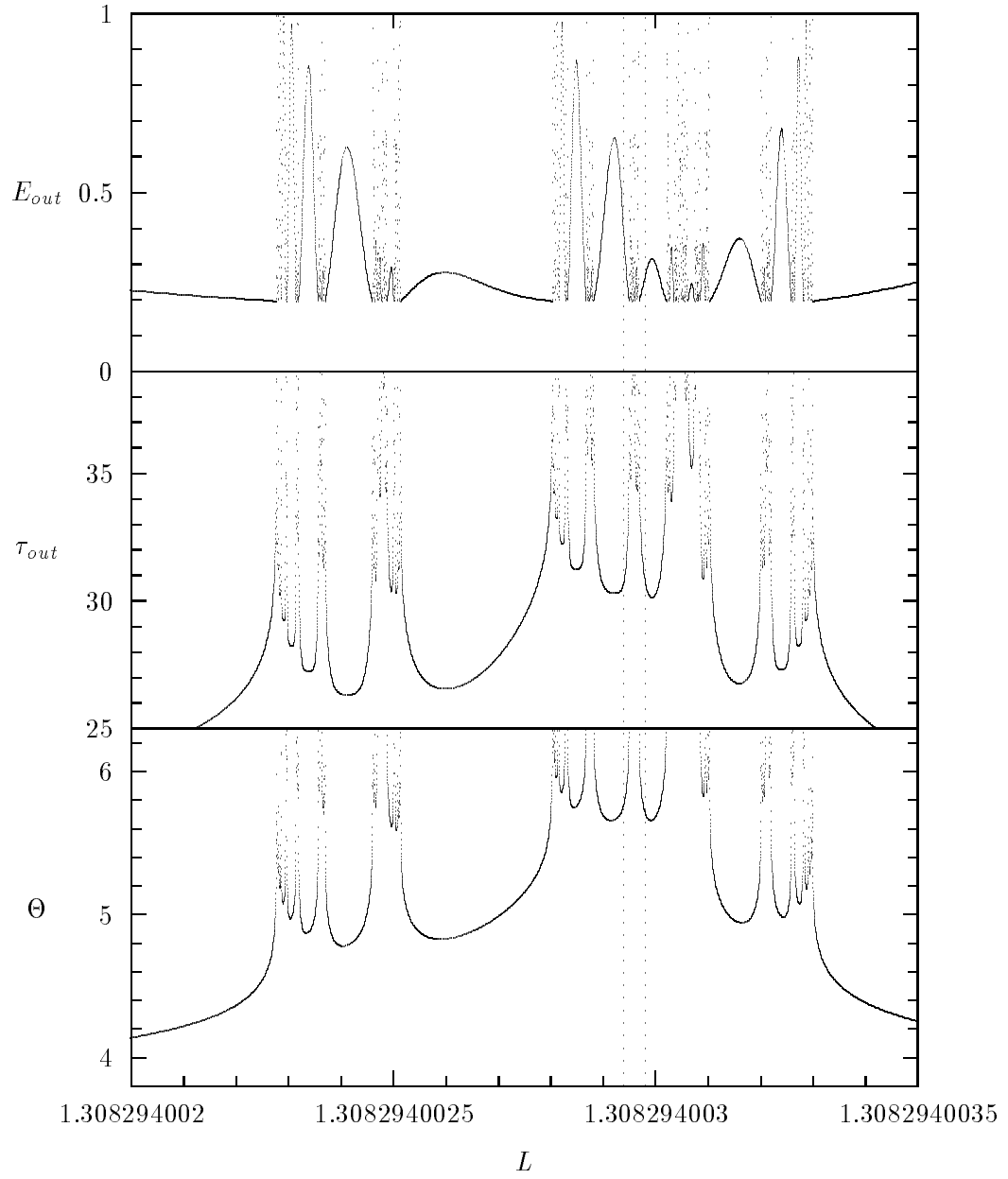


Abbildung 2.14: Vergrößerung des markierten Intervalls aus Abbildung 2.13. Das markierte Intervall ist in Abbildung 2.15 vergrößert dargestellt.

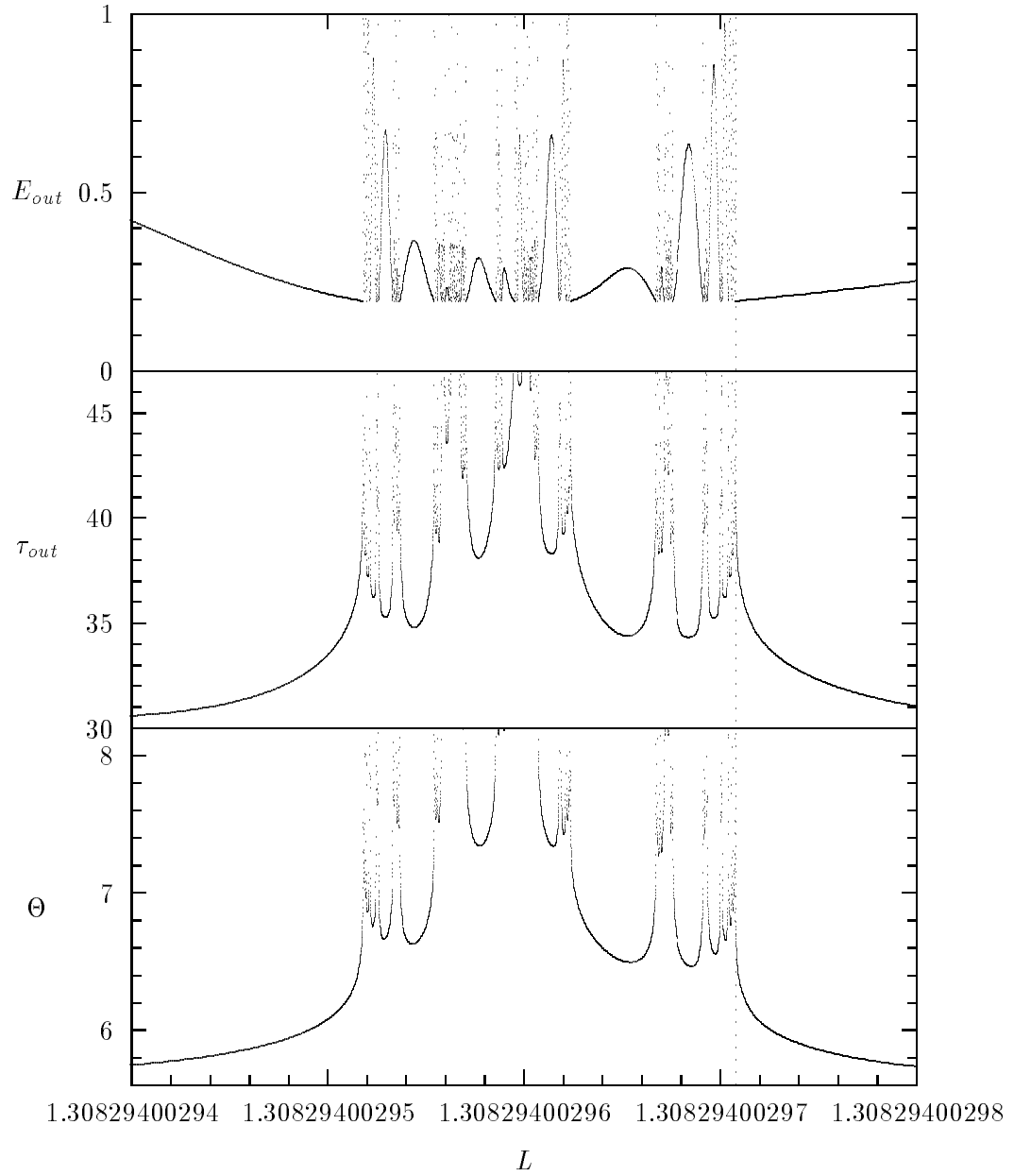


Abbildung 2.15: Vergrößerung des markierten Intervalls aus Abbildung 2.14. Der markierte L -Wert stimmt mit dem in Abbildung 2.1 benutzten Wert überein.

Im folgenden Abschnitt wird die fraktale Dimension der Singularitätenmenge Ω berechnet. Im Kapitel 3 wird gezeigt, daß auch in dem hier untersuchten System für $n = 4$ der Einfang von Streutrajektorien an instabilen Fixpunkten zu den Singularitäten in Θ und σ führt. In Kapitel 4 wird ein anderer Mechanismus vorgestellt, der für den Fall $n = 1$ für eine vergleichbare Struktur der Streuabbildung verantwortlich ist.

2.5 Fraktale Dimension der Singularitätenmenge Ω

In Kapitel 2.4 wurde die Existenz einer Teilmenge Ω aus der eindimensionalen Menge der Anfangsbedingungen $\bar{\Gamma}$ gezeigt, die die Struktur einer fraktalen Cantor-Menge hatte. Für L -Werte aus Ω werden Streu- und Ablenkfunktion singulär. Im folgenden soll nun numerisch die fraktale Dimension d der Menge Ω berechnet werden.

Zur Berechnung der fraktalen Dimension einer Menge von Streusingularitäten wird von Lau, Finn und Ott in [16] der „Unsicherheitsalgorithmus“ vorgeschlagen. Mit diesem Algorithmus soll auch hier die Dimension der Menge Ω berechnet werden. Es läßt sich zeigen, daß die mit dem Unsicherheitsalgorithmus berechnete Unsicherheitsdimension kleiner oder gleich der „Box-Counting-Dimension“ ist; man vermutet, daß für typische dynamische Systeme beide Dimensionen übereinstimmen [17, 18].

Zur Berechnung der Unsicherheitsdimension d wird hier die Funktion $E_{out}(L)$ benutzt. $\tau_{out}(L)$ und $\Theta(L)$ führen auf den gleichen Wert für d , da in diesen Funktionen die gleiche Menge Ω für die Streusingularitäten verantwortlich ist.

Der Unsicherheitsalgorithmus wird in [9] wie folgt beschrieben:

Für eine feste Unsicherheit ϵ und eine zufällig gewählte Anfangsbedingung L_0 wird die Größe

$$\delta\lambda = |\lambda_{out}(L_0 + \epsilon) - \lambda_{out}(L_0)| \quad (2.12)$$

berechnet. λ_{out} steht dabei für eine der beiden Out-Variablen E_{out} und τ_{out} . Für die anderen Parameter des Systems werden für die Rechnung feste Werte gewählt. Ist $\delta\lambda$ größer als ein kritischer Wert λ_{crit} , wird L_0 als ϵ -unsicher bezeichnet. Die Berechnung von $\delta\lambda$ wird solange mit weiteren zufällig gewählten L_0 -Werten wiederholt, bis eine feste Zahl N_{unc} ϵ -unsicherer L_0 -Werte erreicht ist. Die relative Unsicherheit $f(\epsilon)$ ergibt sich durch Division von N_{unc} durch die Anzahl N der insgesamt eingesetzten L_0 -Werte. Für genügend große N_{unc} nähert sich $f(\epsilon)$ numerisch dem Wert $\overline{f(\epsilon)}$ an, der die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, mit der ein zufällig gewählter L_0 -Wert ϵ -unsicher ist.

Die Berechnung von $\overline{f(\epsilon)}$ wird nun für verschiedene ϵ durchgeführt. Für typische

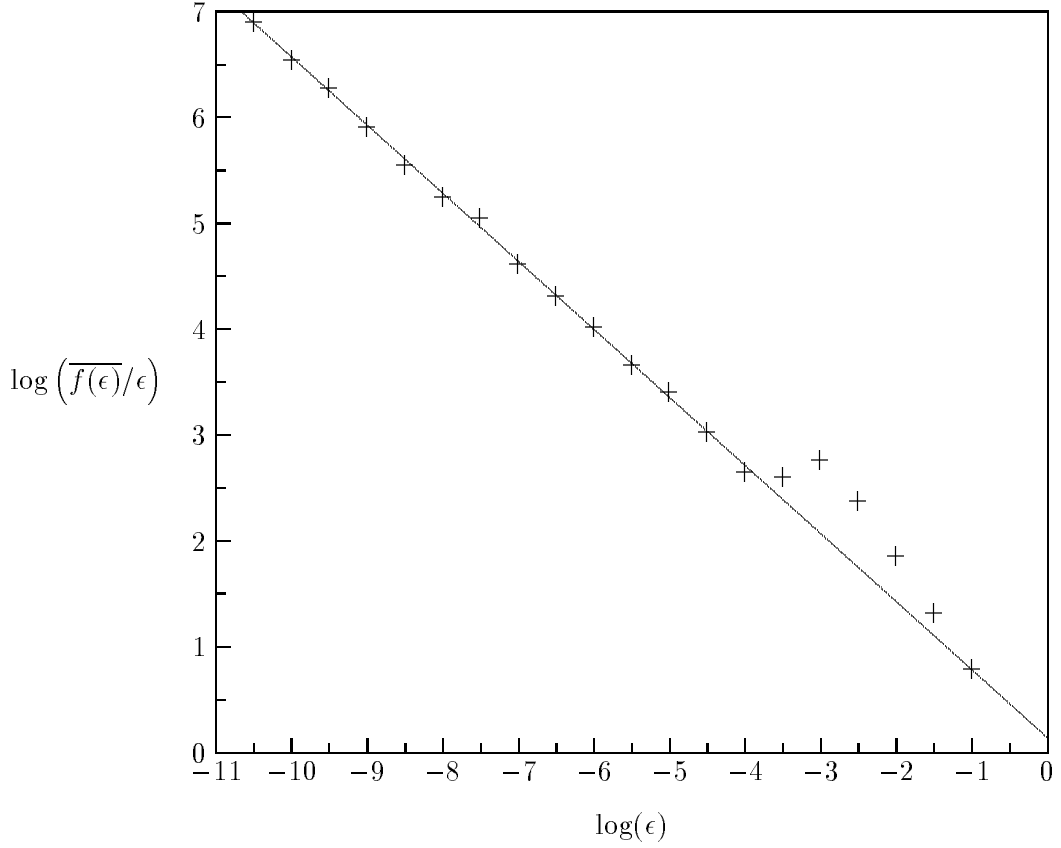


Abbildung 2.16: Doppelt-logarithmische Darstellung von $\frac{\overline{f(\epsilon)}}{\epsilon}$ gegen ϵ für $E_{in} = 0.2$, $\tau_{in} = 0$ und $K = 1$.

Systeme ist $\overline{f(\epsilon)}$ proportional einer Potenz von ϵ , d. h.

$$\overline{f(\epsilon)} \sim \epsilon^\alpha \quad . \quad (2.13)$$

Die Unsicherheitsdimension d ist definiert als

$$d = 1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \overline{f(\epsilon)}}{\log \epsilon} = 1 - \alpha \quad . \quad (2.14)$$

Stellt man also $\frac{\overline{f(\epsilon)}}{\epsilon}$ gegen ϵ in einem doppelt-logarithmischen Diagramm dar, so ergibt sich für $\epsilon \rightarrow 0$ eine Gerade, aus deren Absolutwert der Steigung die Unsicherheitsdimension d bestimmt werden kann.

Für die numerische Berechnung der Unsicherheitsdimension d wird als Out-Variable λ_{out} die Energie E_{out} benutzt. Die Wahl von τ_{out} als Out-Variable führt auf das gleich Ergebnis für d , da in beiden Fällen, wie in den Abbildungen 2.6–2.15 zu erkennen ist, dieselbe Singularitätenmenge Ω für das irreguläre

Verhalten verantwortlich ist. Die Werte für L_0 werden aus dem in Abbildung 2.7 dargestellten Intervall gewählt, d. h. $L_0 \in [1.2, 1.35]$. Die In-Variablen sind festgesetzt auf $E_{in} = 0.2$, $\tau_{in} = 0$. Ferner gilt $K = 1$.

Die Ergebnisse der numerischen Untersuchungen sind in Abbildung 2.16 dargestellt. Für $\epsilon \rightarrow 0$ wird die Bedingung (2.13) offensichtlich gut erfüllt, die Werte liegen auf einer Geraden. Die Steigung der Geraden erhält man mit einem *Least-Square-Fit* [13]. Bei der Berechnung der Steigung wurden nur die Werte $\log(\epsilon) \leq -4$ berücksichtigt. Es ergibt sich als Unsicherheitsdimension der Menge Ω

$$d = 0.643 \pm 0.005 \quad . \quad (2.15)$$

Dieser Wert für d ist kleiner als 1, die Menge der Anfangsbedingungen, die zu Singularitäten in der Streufunktion führen, hat somit das Maß Null.

Kapitel 3

Chaotische Streuung im Falle $n = 4$

In diesem Kapitel wird die Streudynamik für den Fall $n = 4$ untersucht. Für das Kickpotential ergibt sich bei dieser Wahl von n :

$$V(r) = -\frac{K}{r^4} \quad , \quad (3.1)$$

für die Kraftfunktion gilt somit

$$F(r) = -\frac{4K}{r^5} \quad . \quad (3.2)$$

3.1 Gebundene Bewegung

Im Falle $n = 4$ wird die Streudynamik des Systems in besonderer Weise durch die gebundene Bewegung beeinflusst. Die Existenz eines hyperbolischen Fixpunktes sowie von homoklinen Schnittpunkten seiner stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten führt zu einer exponentiellen Skalierung der Streuabbildung σ . Um den Einfluß der gebundenen Bewegung auf die Streudynamik zu beschreiben, muß zunächst die gebundene Bewegung untersucht werden. Im folgenden wird deshalb die Entstehung von Fixpunkten und periodischen Orbits bis zur Periode 4 bei Variation des Systemparameters K beschrieben. Anschließend werden die Ergebnisse in Poincaré-Plots in der (r, p) -Ebene graphisch dargestellt. Für die Untersuchungen in diesem Kapitel wird ausschließlich die Abbildung (1.37) benutzt. Da Φ in dieser Skalierung den Drehimpuls L nicht mehr enthält, wird auch der zu L konjugierte Ort φ nicht untersucht. Ein Fixpunkt der Abbildung Φ entspricht in der unskalierten, dreidimensionalen Darstellung (1.26) einem Orbit mit konstantem Radius r und konstantem Radialimpuls p . Der Azimutalwinkel φ wächst zwischen zwei Kicks um einen konstanten Wert $\Delta\varphi$ an. Für rationale $\Delta\varphi/(2\pi)$ ist in der dreidimensionalen Darstellung der resultierende Orbit periodisch, andernfalls quasiperiodisch.

3.1.1 Klassifizierung von Fixpunkten

Zur Untersuchung der Stabilität der in diesem Kapitel berechneten Fixpunkte bzw. periodischen Orbits der Abbildung Φ werden die Eigenwerte der Jacobi-Matrix $D\Phi(r, p)$ benötigt. Die Matrixelemente von $D\Phi(r, p)$ ergeben sich aus (1.30) unter Berücksichtigung der Skalierungen (1.32) und (1.36) zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial r'(r, p)}{\partial r} &= \frac{r + p - r^{-3}}{r'(r, p)} \\ \frac{\partial r'(r, p)}{\partial p} &= \frac{r + p}{r'(r, p)} \\ \frac{\partial p'(r, p)}{\partial r} &= -\frac{2r + p}{r^2 r'^3(r, p)} + \frac{1}{r^3 r'(r, p)} + \frac{\partial}{\partial r} F(r'(r, p)) \\ \frac{\partial p'(r, p)}{\partial p} &= \frac{p}{r'(r, p)} + \frac{r(r + p)^2}{r'^3(r, p)} + \frac{\partial}{\partial p} F(r'(r, p)) \quad .\end{aligned}\tag{3.3}$$

Für die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ einer 2×2 -Matrix A gilt allgemein

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Spur } A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{Spur } A}{2}\right)^2 - \det A} \quad ;\tag{3.4}$$

für die Eigenwerte von $D\Phi$ ergibt sich somit unter Berücksichtigung von (1.31)

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Spur } D\Phi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{Spur } D\Phi}{2}\right)^2 - 1} \quad .\tag{3.5}$$

Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ erfüllen demnach die Beziehung

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \quad .\tag{3.6}$$

Hinsichtlich der Stabilität eines Fixpunktes (\bar{r}, \bar{p}) der Abbildung Φ gilt aufgrund von (3.5) die folgende Fallunterscheidung:

1. $|\text{Spur } D\Phi(\bar{r}, \bar{p})| < 2$: Die Eigenwerte sind konjugiert komplex und vom Betrage 1. Der Fixpunkt ist in diesem Falle *stabil*; er wird als *elliptisch* bezeichnet.
2. $|\text{Spur } D\Phi(\bar{r}, \bar{p})| > 2$: Die Eigenwerte sind reell. Der Fixpunkt ist in diesem Falle *instabil*; er wird als *hyperbolisch* oder *invers hyperbolisch* bezeichnet, sofern λ_1 und λ_2 positiv bzw. negativ sind.
3. $|\text{Spur } D\Phi(\bar{r}, \bar{p})| = 2$: Für beide Eigenwerte gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Man spricht in diesem entarteten Falle von *marginaler* Stabilität und bezeichnet den Fixpunkt als *parabolisch*.

3.1.2 Fixpunkte der Abbildung Φ

Ein Fixpunkt (\bar{r}, \bar{p}) der Abbildung Φ ist durch die Gleichung

$$\Phi(\bar{r}, \bar{p}) = (\bar{r}, \bar{p}) \quad (3.7)$$

gegeben. Aus (3.7) ergeben sich zusammen mit (1.37) die Bedingungen

$$4 F(\bar{r}) \bar{r}^3 + (F(\bar{r}))^2 \bar{r}^2 + 4 = 0 \quad (3.8a)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} F(\bar{r}) \quad . \quad (3.8b)$$

Mit (3.2) ergibt sich aus (3.8b) sofort

$$\bar{p} = -\frac{2K}{\bar{r}^5} \quad . \quad (3.9)$$

Der gesuchte Fixpunkt liegt, wie leicht nachgerechnet werden kann, auf der durch (1.46) gegebenen Symmetrielinie. Die Bestimmungsgleichung für \bar{r} ergibt sich schließlich aus (3.8a) und (3.2). Man erhält

$$\bar{r}^8 - 4 K \bar{r}^6 + 4 K^2 = 0 \quad . \quad (3.10)$$

Die Gleichung (3.10) ist nur numerisch lösbar, es kann jedoch analytisch berechnet werden, wieviele Lösungen von (3.10) existieren. Es ergibt sich, daß (3.10) für

$$K_1 = \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0.3849 \dots \quad (3.11)$$

genau eine Lösung, für $K < K_1$ keine und für $K > K_1$ zwei Lösungen hat. Für $K < K_1$ existieren demnach keine Fixpunkte von Φ , an der Stelle $K = K_1$ entstehen zwei Fixpunkte, von denen, wie eine Analyse der Jacobi-Determinante $D\Phi$ sowie der Eigenwerte (3.5) zeigt, einer hyperbolisch, der andere zunächst elliptisch ist. Es handelt sich also um eine *Sattel-Zentrum-Bifurkation* [19]. Zur Unterscheidung der beiden Fixpunkte, die bei $K = K_1$ entstehen, wird im folgenden der Fixpunkt mit dem kleineren Wert von \bar{r} als *innerer*, der andere als *äußerer* Fixpunkt bezeichnet.

3.1.3 2-Zyklen der Abbildung Φ

Für die Berechnung von 2-Zyklen der Abbildung Φ kann zur Vereinfachung der Rechnung die Abbildung Π benutzt werden. 2-Zyklen der Abbildung Π entsprechen 2-Zyklen der Abbildung Φ , da Π zu Φ gemäß (1.48) konjugiert ist. Ein 2-Zyklus $(q_1, z_1), (q_2, z_2)$ der Abbildung Π ist durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\Pi(q_1, z_1) &= (q_2, z_2) \\ \Pi(q_2, z_2) &= (q_1, z_1)\end{aligned}\tag{3.12}$$

gegeben. Zusammen mit der Definition (1.51) der Abbildung Π erhält man

$$|z_1| = |z_2|\tag{3.13}$$

als notwendige Bedingung für einen 2-Zyklus. Hieraus ergeben sich zwei Fälle: $z_1 = z_2$ und $z_1 = -z_2$.

$z_1 = z_2$:

Für die Variablen z_1 und z_2 wird im folgenden das Symbol \bar{z} gewählt. Aus (3.12) folgt mit Hilfe von (1.51) die Gleichung

$$\bar{z} = q_1 + \frac{1}{2}\sqrt{q_1} F(\sqrt{q_1}) = q_2 + \frac{1}{2}\sqrt{q_2} F(\sqrt{q_2}) \quad .\tag{3.14}$$

Zusammen mit der Kraftfunktion (3.2) erhält man

$$\bar{z} = q_1 - \frac{2K}{q_1^2} = q_2 - \frac{2K}{q_2^2} \quad .\tag{3.15}$$

Die Funktion $q - 2K/q^2$ ist für $q > 0$ streng monoton steigend. (3.15) kann demnach nur eine eindeutige Lösung $q_1 = q_2$ haben, die im folgenden mit \bar{q} bezeichnet wird. Für den Fall $z_1 = z_2$ ergibt sich also als Lösung von (3.12) ein Fixpunkt (\bar{q}, \bar{z}) der Abbildung Π . Der Fall $z_1 = z_2$ liefert also keine neue Information; mit Hilfe von (1.51) erhält man aus (3.15) die Bedingung

$$\bar{q}^4 - 4K\bar{q}^3 + 4K^2 = 0 \quad ,\tag{3.16}$$

die mit der Fixpunktbedingung (3.10) der Abbildung Φ übereinstimmt.

$z_1 = -z_2$:

Aus (3.12) und (1.51) ergibt sich in diesem Fall

$$0 = 2q_1 + \sqrt{q_1} F(\sqrt{q_1}) = 2q_2 + \sqrt{q_2} F(\sqrt{q_2}) \quad ;$$

zusammen mit (3.2) erhält man hier

$$0 = q_1 - \frac{2K}{q_1^2} = q_2 - \frac{2K}{q_2^2} \quad . \quad (3.17)$$

Die Bedingung (3.17) liefert wiederum nur eine eindeutige Lösung \bar{q} , und man erhält

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \sqrt[3]{2K} \\ \bar{z}_{1,2} &= \pm \sqrt{\sqrt[3]{(2K)^2} - 1} \quad . \end{aligned} \quad (3.18)$$

An dieser Stelle interessieren nur reelle Werte für $\bar{z}_{1,2}$. Es ergibt sich somit als notwendige Bedingung für einen 2-Zyklus von Π :

$$K \geq \frac{1}{2} \quad . \quad (3.19)$$

Mit Hilfe der Transformation U^{-1} ergibt sich schließlich der gesuchte 2-Zyklus $(\bar{r}, \bar{p}_{1,2})$ von Φ :

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \sqrt[6]{2K} \\ \bar{p}_{1,2} &= \frac{\pm \sqrt{\sqrt[3]{(2K)^2} - 1} - \sqrt[3]{2K}}{\sqrt[6]{2K}} \quad . \end{aligned} \quad (3.20)$$

An der Stelle

$$K_2 = \frac{1}{2} \quad (3.21)$$

liefert (3.20) nur die Lösung $(\bar{r}, \bar{p}) = (1, -1)$, also einen Fixpunkt. Diese Lösung erfüllt, wie leicht nachzurechnen ist, ebenfalls die Bedingungen (3.9) und (3.10). Erst für $K > K_2$ liefert (3.20) einen 2-Zyklus, der, wie die Analyse der Jacobi-Matrix $D(\Phi^2)$ zeigt, zunächst elliptisch ist. Der innere Fixpunkt von Φ , der für $K < K_2$ elliptisch ist, wird für $K > K_2$ invers hyperbolisch. An der Stelle $K = K_2$ durchläuft das System demnach eine *periodenverdoppelnde Flip-Bifurkation* [19].

Numerisches Auswerten der Jacobi-Matrix $D(\Phi^2)$ ergibt, daß der 2-Zyklus an der Stelle

$$K_3 = 0.5216 \quad (3.22)$$

invers hyperbolisch wird, gleichzeitig entsteht durch eine erneute Flip-Bifurkation ein elliptischer 4-Zyklus. Dieser wiederum wird an der numerisch bestimmten Stelle

$$K_4 = 0.5244 \quad (3.23)$$

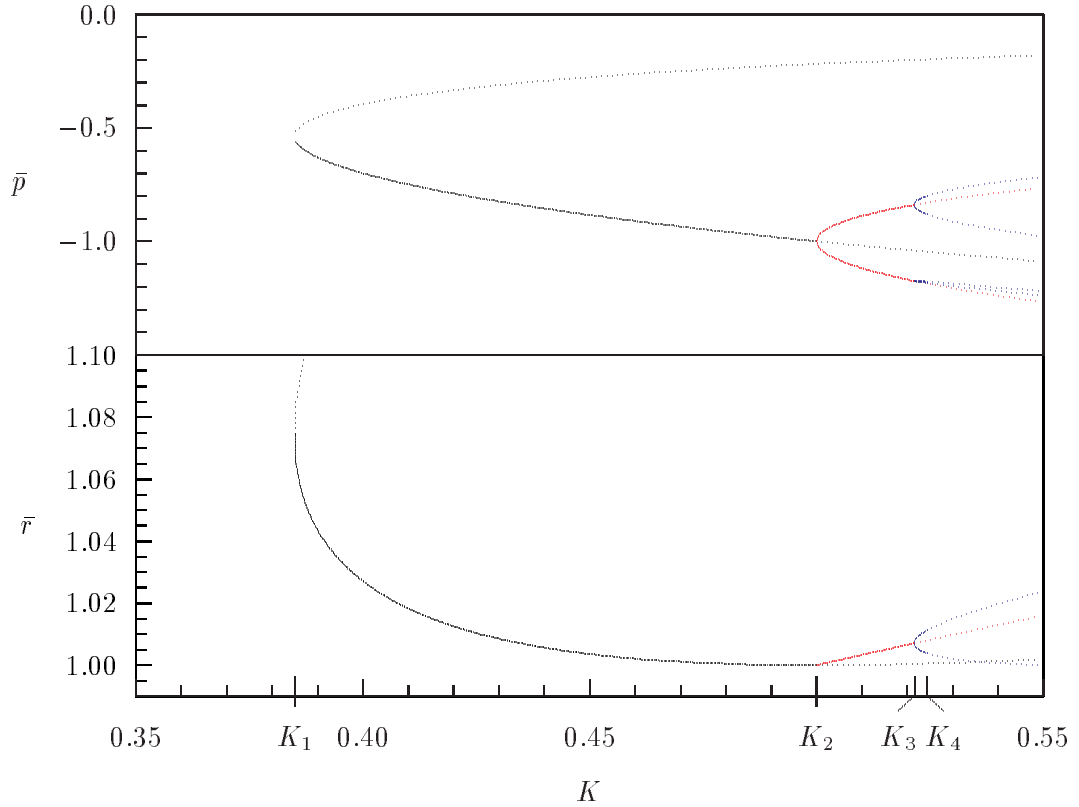


Abbildung 3.1: Bifurkationsdiagramm der Abbildung Φ im Falle $n = 4$. Koordinaten \bar{r} und \bar{p} für den Fixpunkt (schwarz), für den 2-Zyklus (rot) und den 4-Zyklus (blau). Elliptische Fixpunkte/periodische Orbits sind mit durchgezogenen Linien gekennzeichnet, hyperbolische gepunktet. Bifurkationsparameter K_1 bis K_4 gemäß Gleichungen (3.11) und (3.21) bis (3.23).

invers hyperbolisch.

Abbildung 3.1 zeigt die Fixpunkte der Abbildung Φ und die periodischen Orbits bis zur Ordnung 4 in Abhängigkeit von dem Parameter K . Die jeweilige Lage der Fixpunkte wurde durch numerische Lösung der Gleichung (3.10) sowie mit (3.9) bestimmt; die 2-Zyklen wurden mit Hilfe der Gleichungen (3.20) ermittelt. Zusätzlich ist noch der 4-Zyklus gezeigt, der an der Stelle $K = K_3$ entsteht. Die (\bar{r}, \bar{p}) -Werte des 4-Zykus wurden durch numerische Lösung des Gleichungssystems $\Phi^4(\bar{r}, \bar{p}) = (\bar{r}, \bar{p})$ bestimmt.

Das Bifurkationsszenario, das von dem inneren Fixpunkt für den Parameterbereich $K \geq K_1$ durchlaufen wird, läßt sich mit Hilfe von Poincaré-Plots des Systems bei verschiedenen K -Werten verdeutlichen. Für die Abbildungen 3.2 bis 3.14 wurden jeweils ca. 3000 verschiedene Anfangsbedingungen (r, p) mit Hilfe der Abbildung Φ iteriert und die Lage nach jeder Iteration durch einen

Punkt in der (r, p) -Ebene gekennzeichnet.

Abbildung 3.2 zeigt das System unmittelbar nach der Sattel-Zentrum-Bifurkation bei $K = K_1$. Der elliptische Fixpunkt liegt im Zentrum einer Reihe invarianter Linien, die in den Poincaré-Plots durch ringförmige Linien zu erkennen sind. Die Lage des hyperbolischen Fixpunktes ist durch ein Kreuz gekennzeichnet. Abbildung 3.3 zeigt das System bei einem geringfügig vergrößertem K -Wert. Der Bereich invarianter Linien um den elliptischen Fixpunkt hat sich vergrößert.

Bei Vergrößerung des Systemparameters K durchläuft das System – ähnlich wie das in [1] beschriebene System – ein Bifurkationsszenario. Der Zusammenhang dieses Szenarios mit der Windungszahl ν ist in [1] beschrieben und soll hier nicht näher erläutert werden. Aus dem elliptischen Fixpunkt bifurkieren nacheinander Birkhoff-Ketten der Periode 7, 6 und 5, siehe Abbildungen 3.4 bis 3.6. Anschließend entstehen durch vier bzw. drei simultane Sattel-Zentrum-Bifurkationen stabile und instabile 4- und 3-Zyklen. Die Abbildungen 3.7 und 3.8 zeigen das System kurz nach der jeweiligen Bifurkation. Die gezeigten 4- und 3-Zyklen werden bei weiterer Vergrößerung von K vom Bereich gebundener Bewegung abgetrennt. Abbildung 3.9 zeigt den 3-Zyklus für einen größeren K -Wert.

Bei der Sattel-Zentrum-Bifurkation bei $K = K_2$ entsteht ein elliptischer 2-Zyklus, der wiederum von invarianten Linien umgeben ist, siehe Abbildungen 3.10 und 3.11.

Nach der Sattel-Zentrum-Bifurkation bei durchläuft der elliptische 2-Zyklus ein ähnliches Szenario wie zuvor der Fixpunkt, siehe Abbildungen 3.12 bis 3.14. Anstelle von Birkhoff-Ketten der Periode 7, 6 und 5 entstehen hier Zyklen der Ordnung 14, 12 und 10, von denen jeweils die „Hälfte“ zusammen mit einem Punkt des elliptischen 2-Zyklus dargestellt ist.

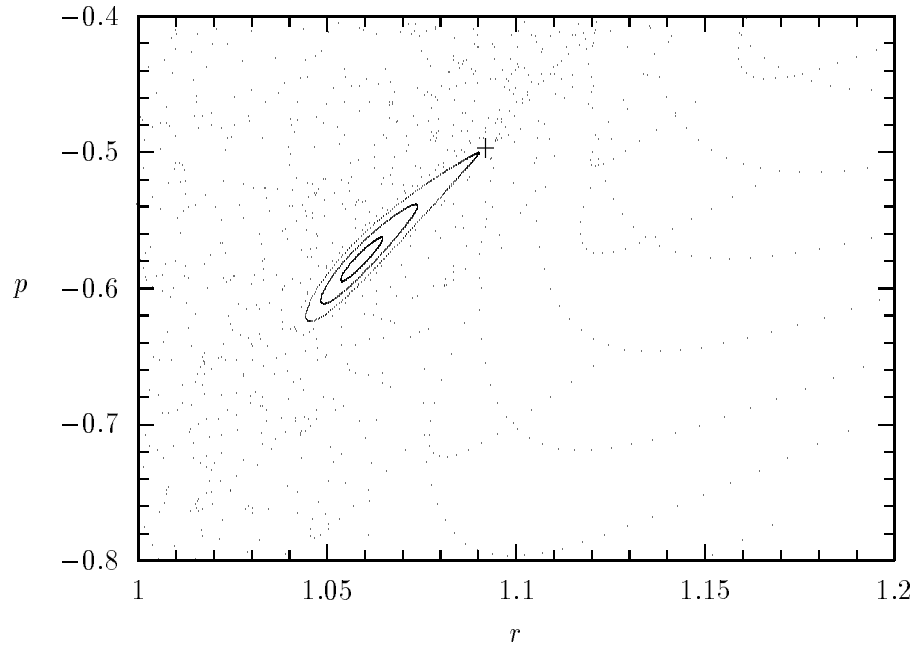


Abbildung 3.2: Poincaré-Plot für $K = 0.386$ unmittelbar nach der Sattel-Zentrum-Bifurkation bei $K = K_1$. Der elliptische Fixpunkt ist von invarianten Linien umgeben. Die Lage des hyperbolischen Fixpunktes ist mit einem „+“ markiert.

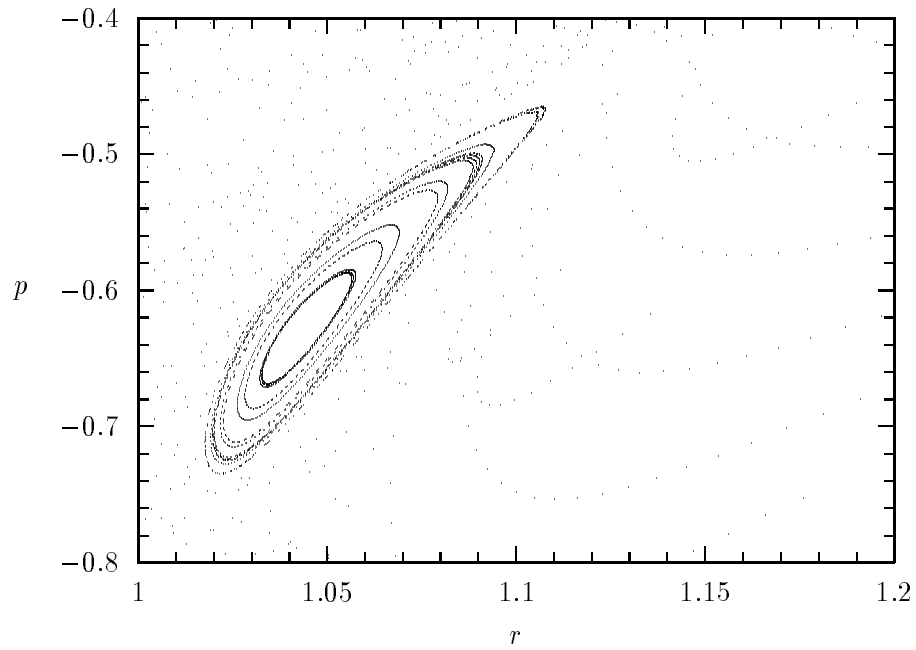


Abbildung 3.3: Poincaré-Plot für $K = 0.39$. Der Bereich invarianter Linien um den elliptischen Fixpunkt ist größer geworden.

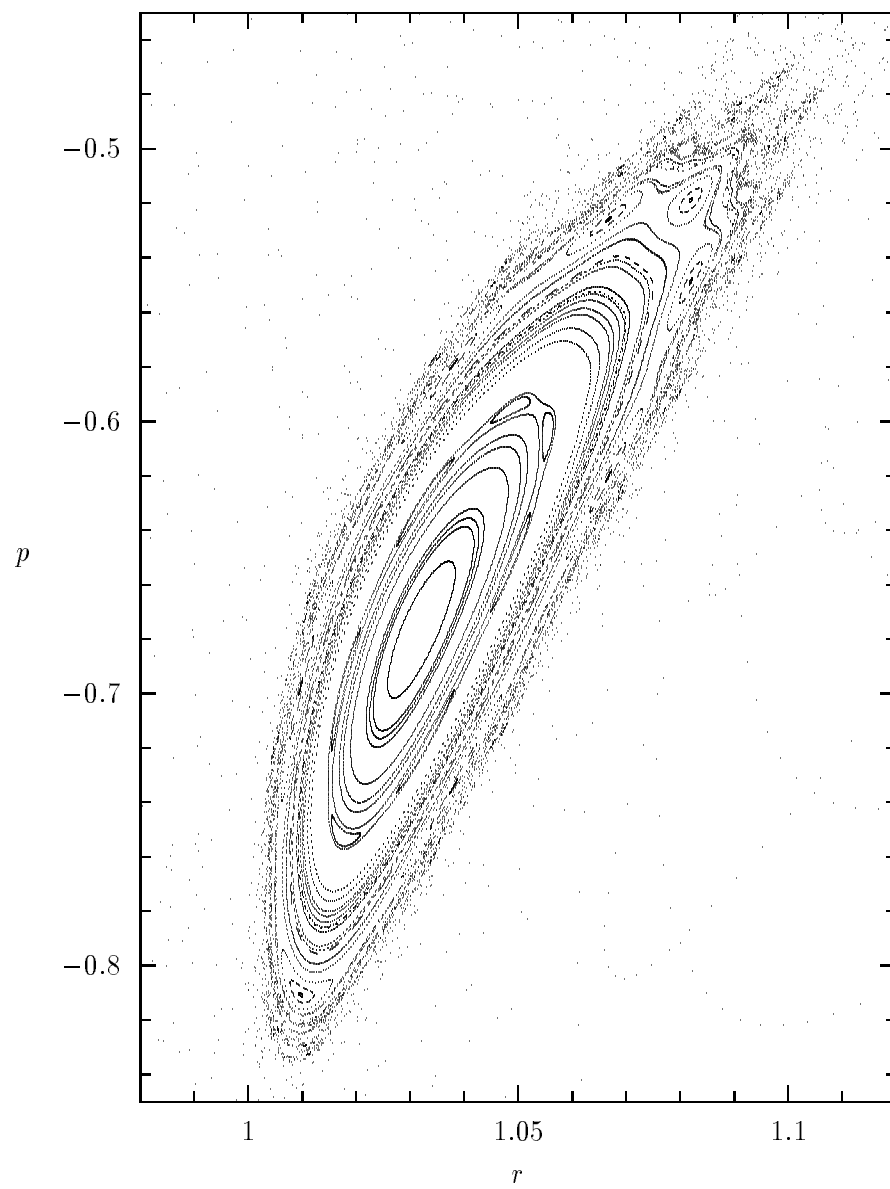


Abbildung 3.4: $K = 0.3962$. Ein 7-Zyklus ist aus dem elliptischen Fixpunkt bifurkiert.

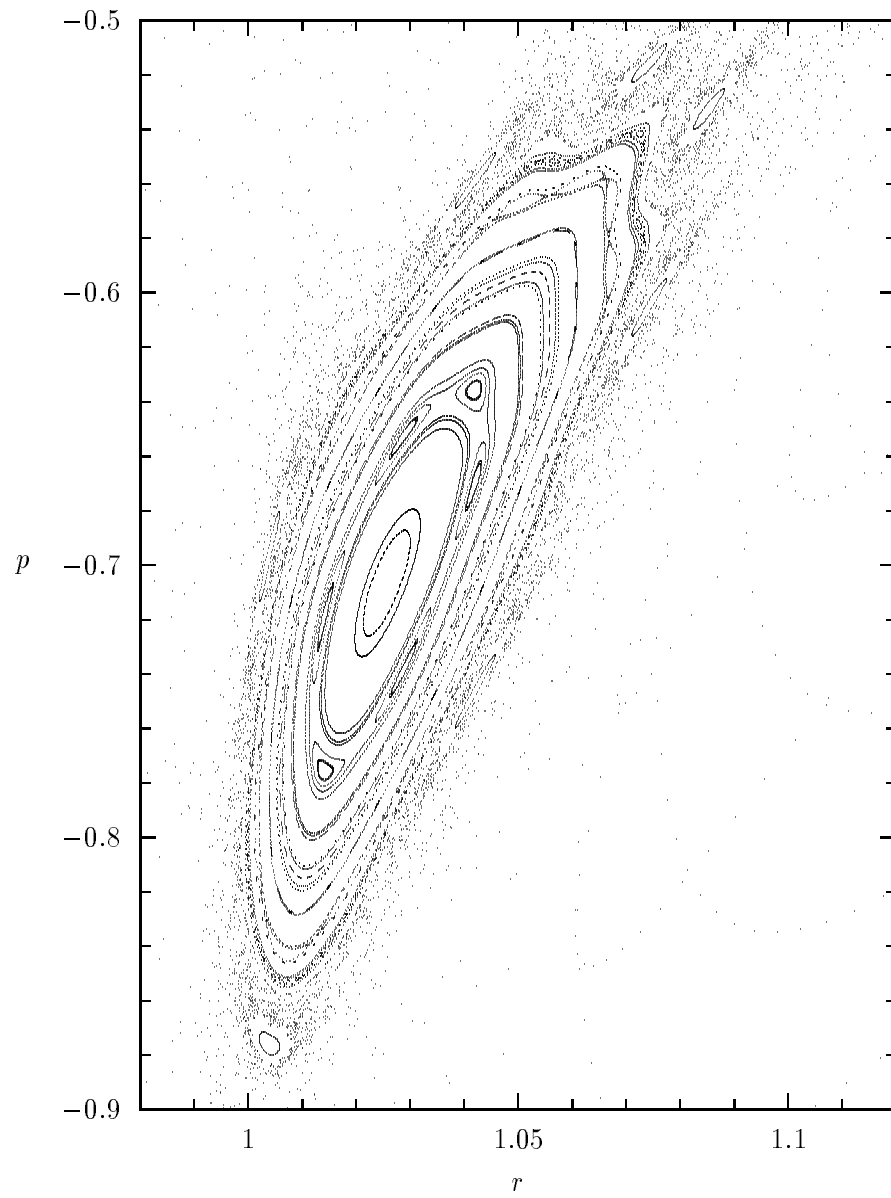


Abbildung 3.5: $K = 0.4013$. Ein 6-Zyklus ist entstanden. Der 7-Zyklus ist außen noch schwach zu erkennen.

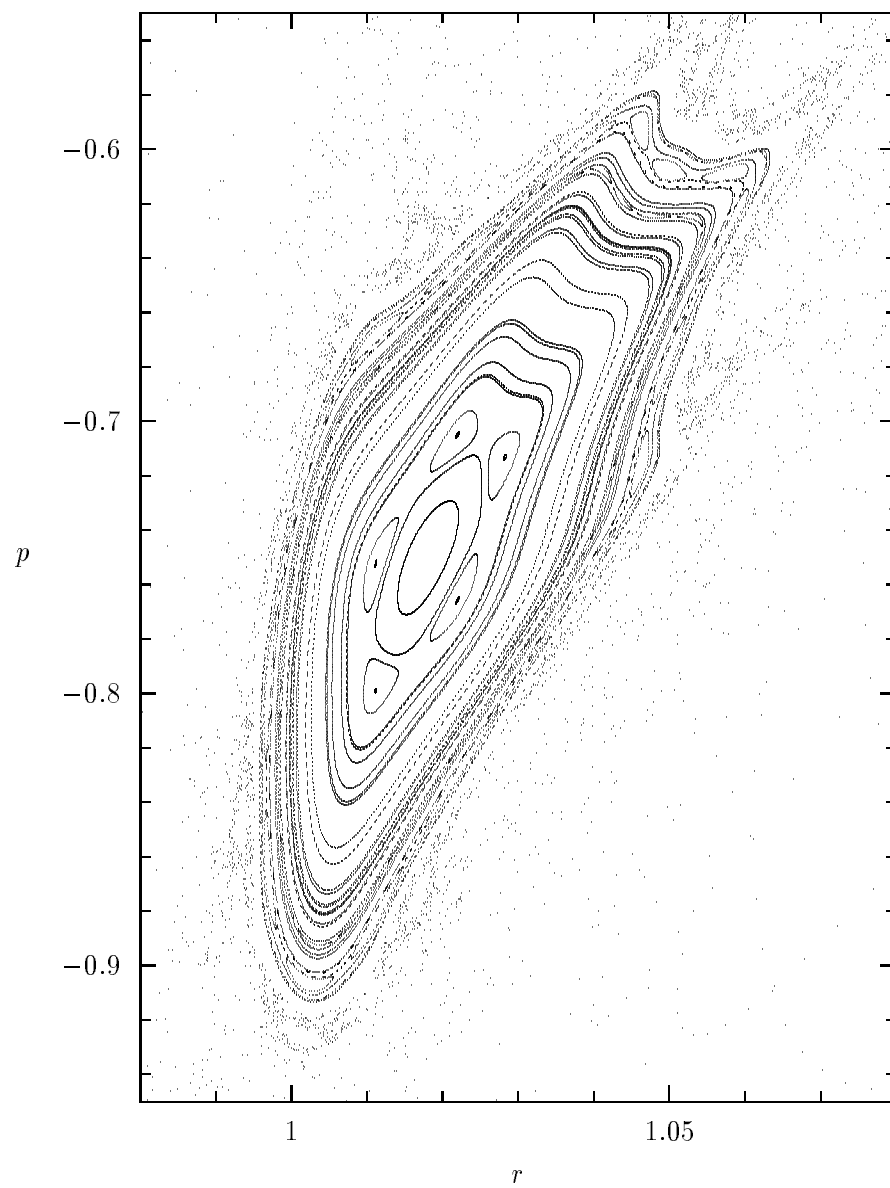


Abbildung 3.6: $K = 0.4103$. Ein 5-Zyklus ist aus dem Fixpunkt bifurkiert.

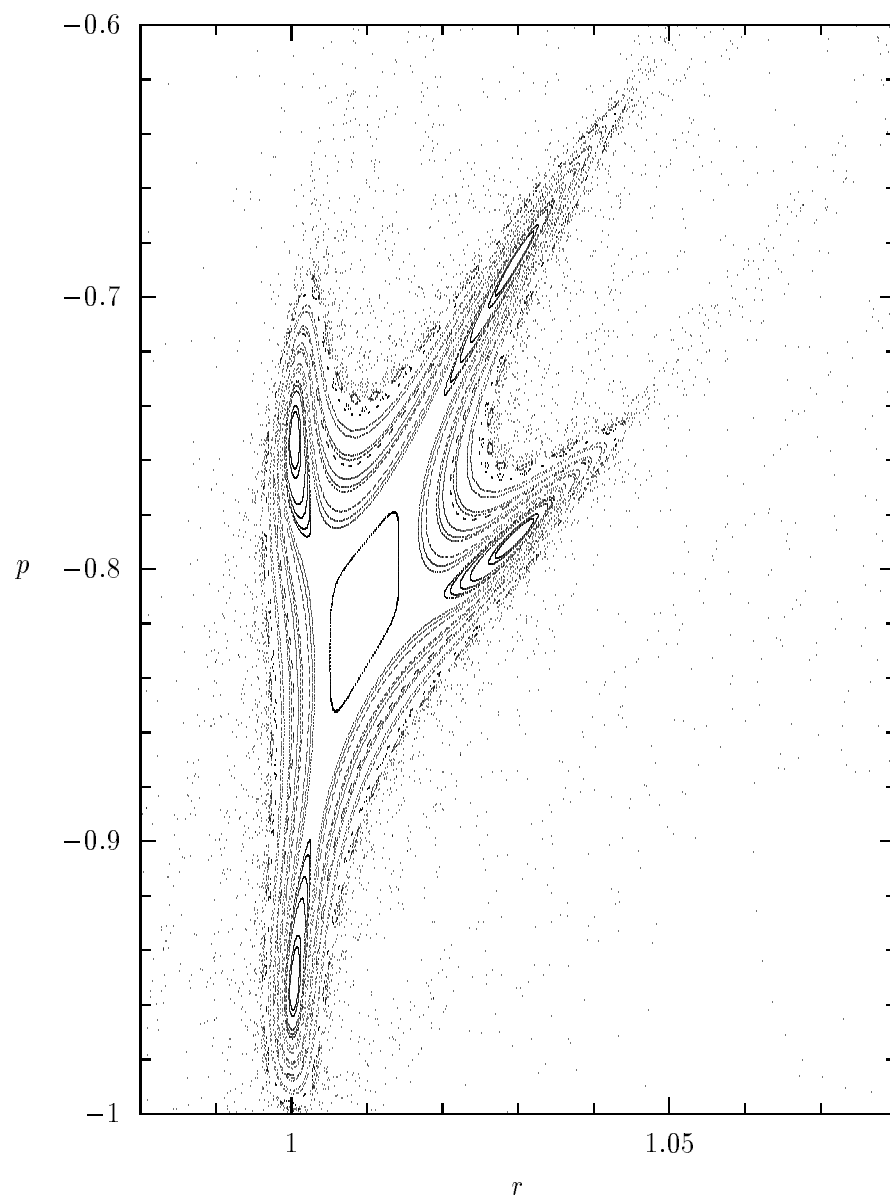


Abbildung 3.7: $K = 0.4272$. Durch vier simultane Sattel–Zentrum–Bifurkationen sind ein stabiler und ein instabiler 4–Zyklus entstanden.

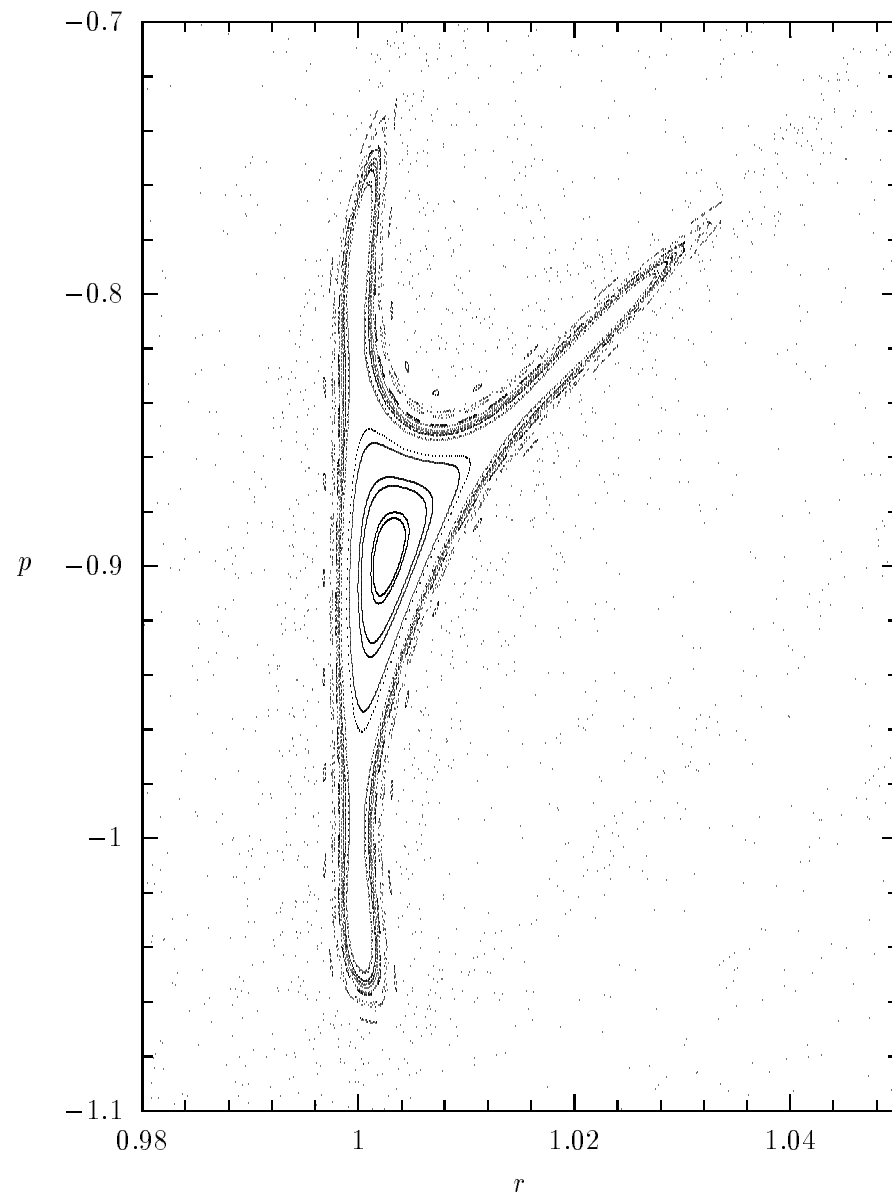


Abbildung 3.8: $K = 0.454312$. Durch drei simultane Sattel–Zentrum–Bifurkationen sind ein stabiler und ein instabiler 3–Zyklus entstanden.

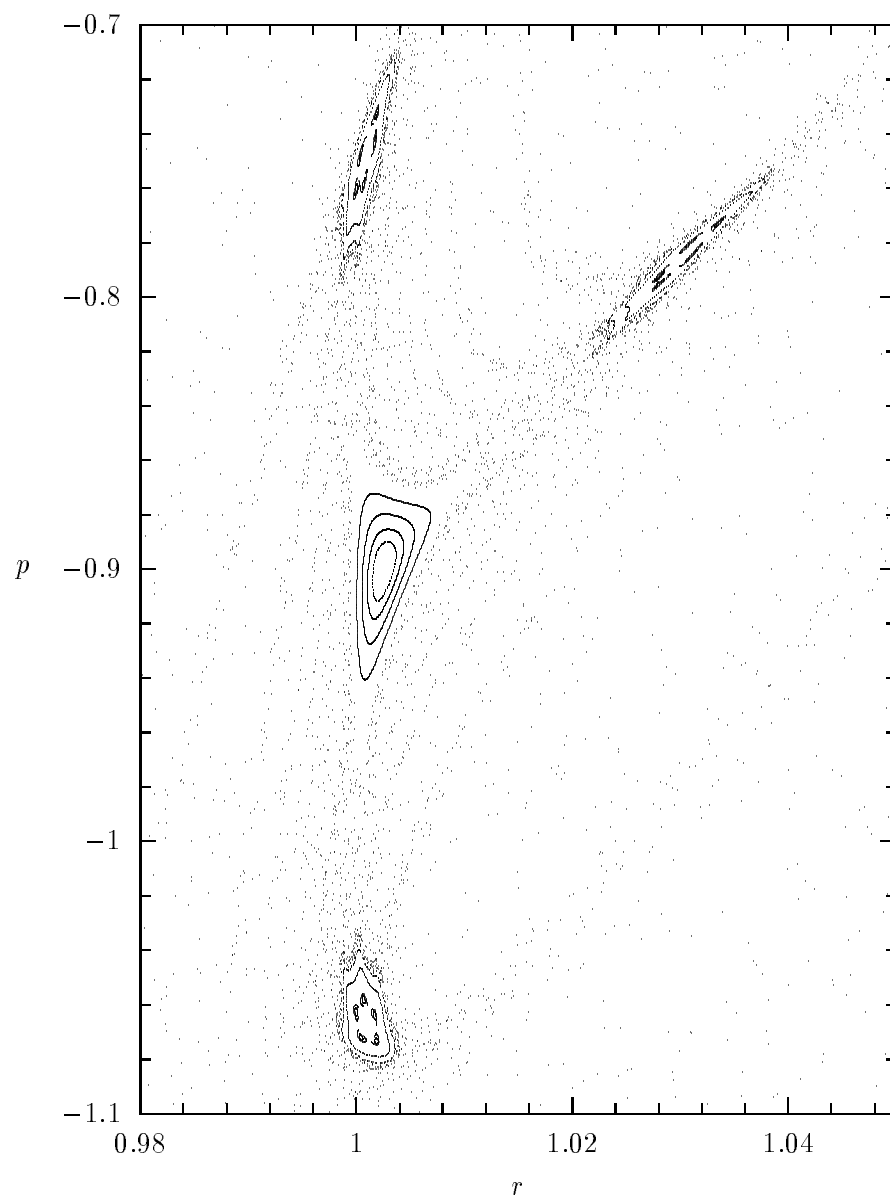


Abbildung 3.9: $K = 0.456$. Der 3-Zyklus ist vom Bereich invarianter Linien um den Fixpunkt separiert. Er ist von einem 15-Zyklus umgeben.

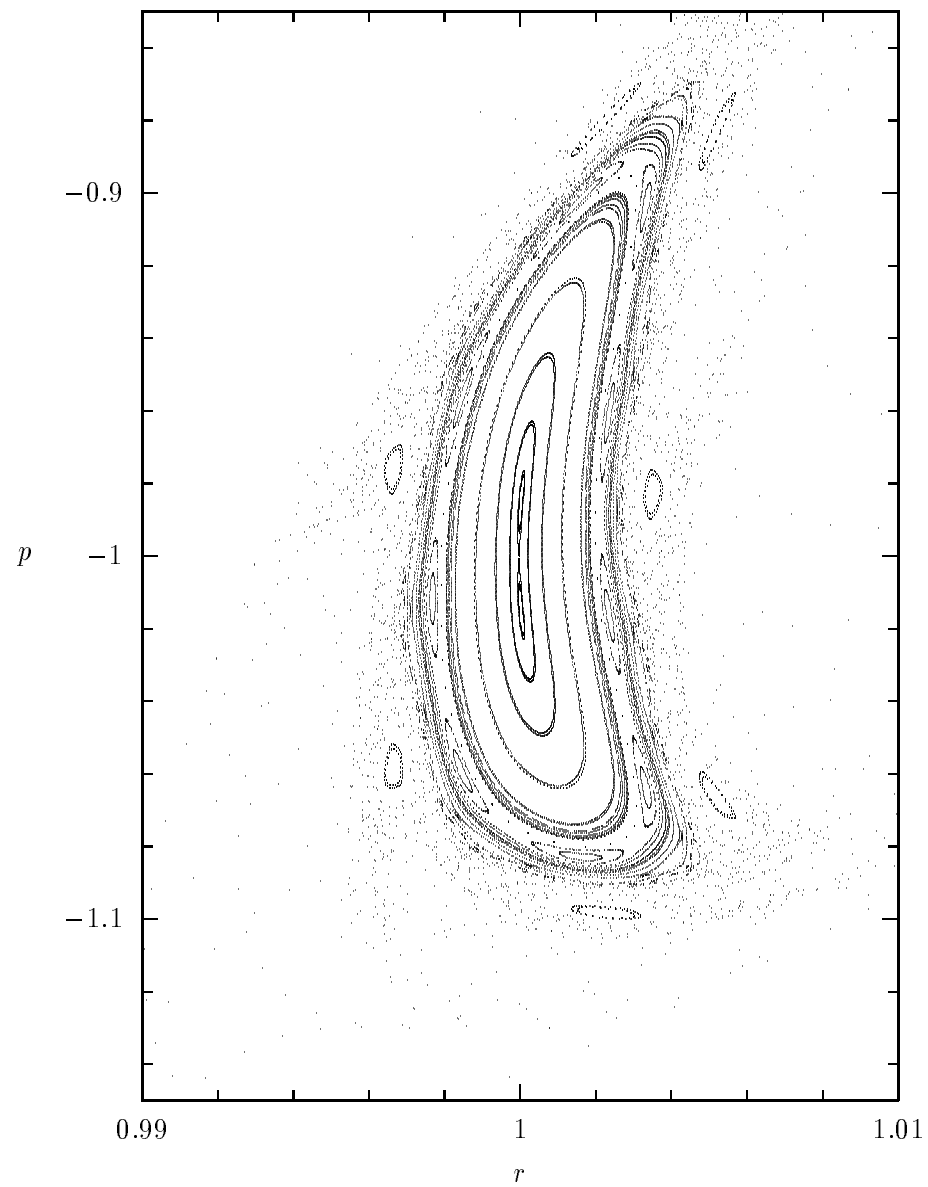


Abbildung 3.10: $K = 0.5002$. Aus dem elliptischen Fixpunkt ist durch Flip-Bifurkation ein invers hyperbolischer Fixpunkt und ein 2-Zyklus entstanden.

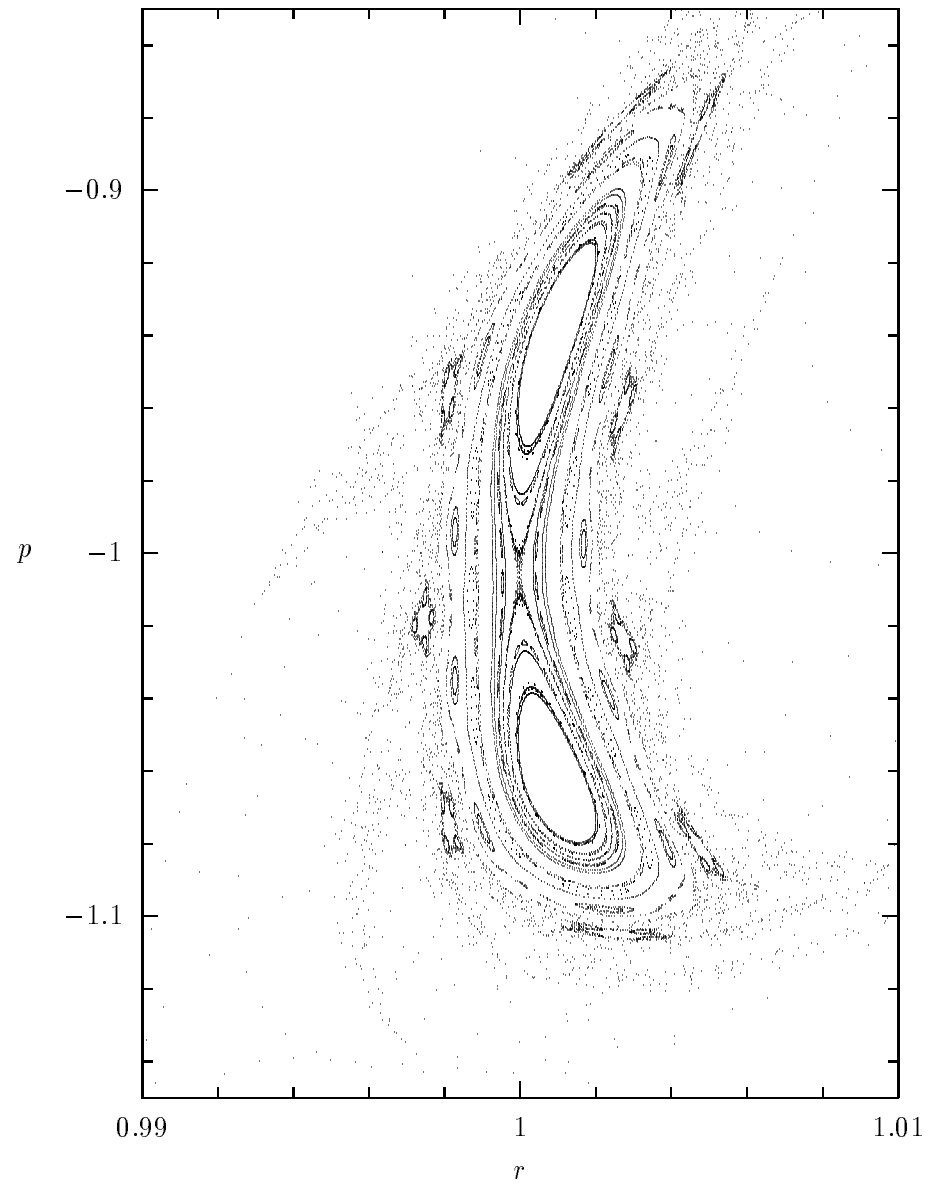


Abbildung 3.11: $K = 0.503$. Der elliptische 2-Zyklus ist von invarianten Linien umgeben.

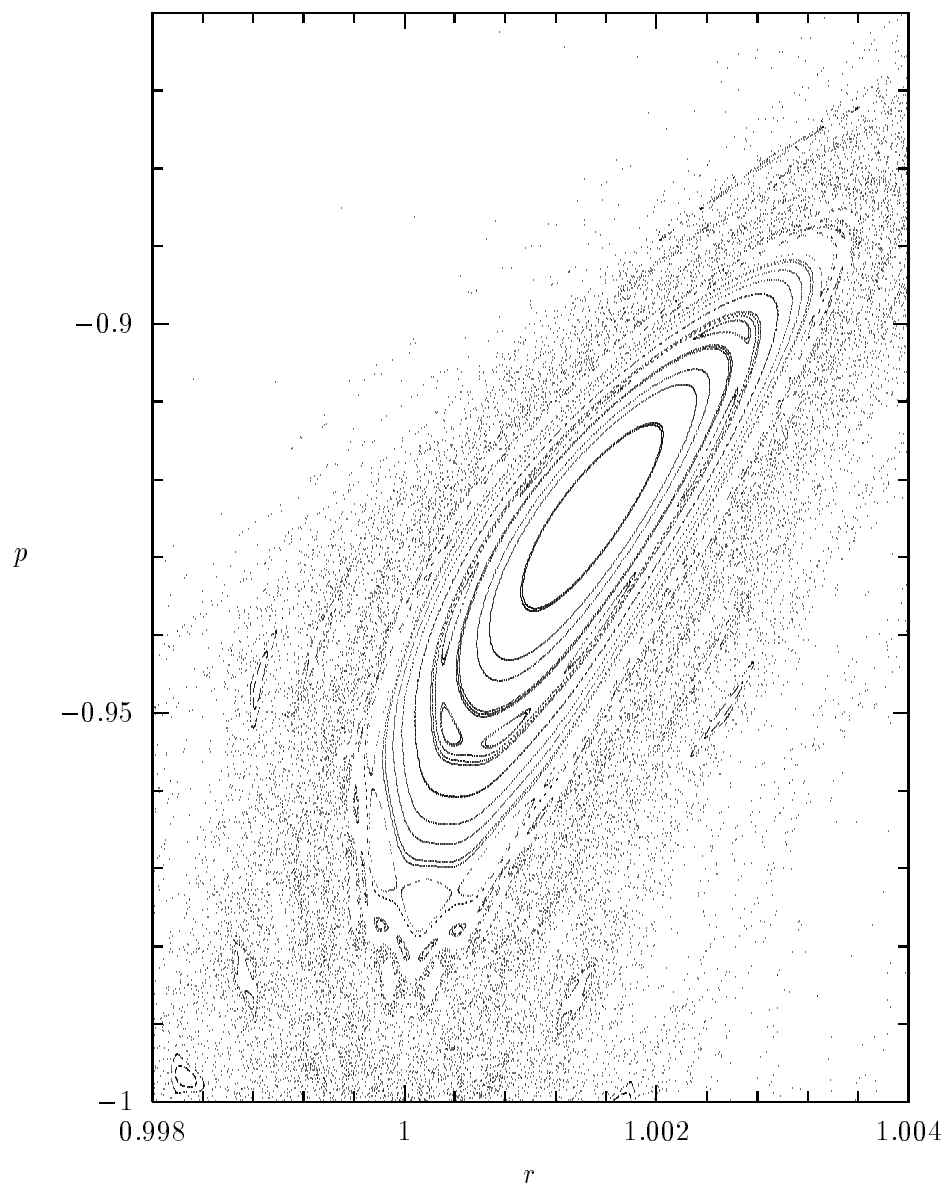


Abbildung 3.12: Ein Punkt des elliptischen 2-Zyklus bei $K = 0.5045$. Er ist von der „Hälfte“ eines 14-Zyklus umgeben.

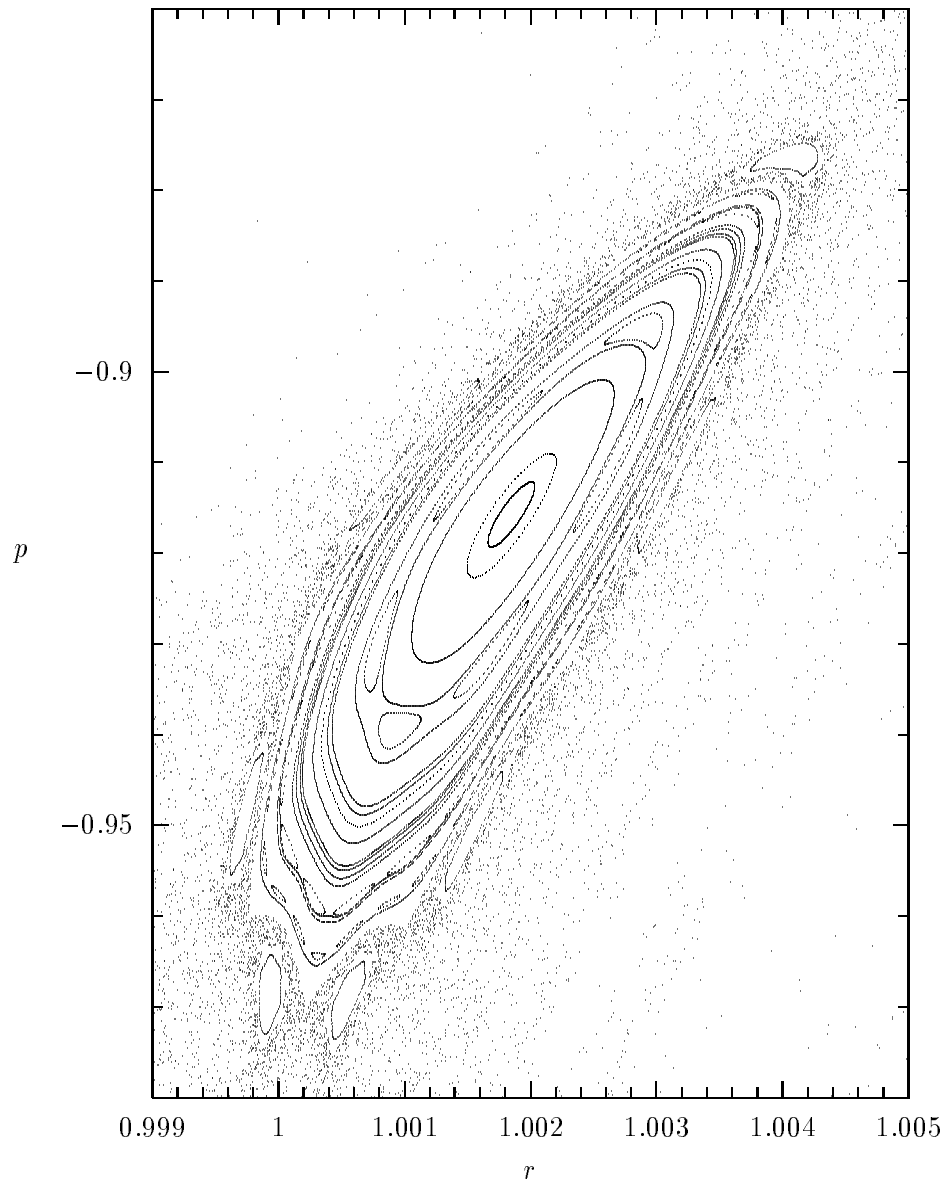


Abbildung 3.13: $K = 0.5056$. Der 14-Zyklus ist nach außen gewandert. Ein 12-Zyklus ist entstanden, von dem eine „Hälfte“ im Bild dargestellt ist.

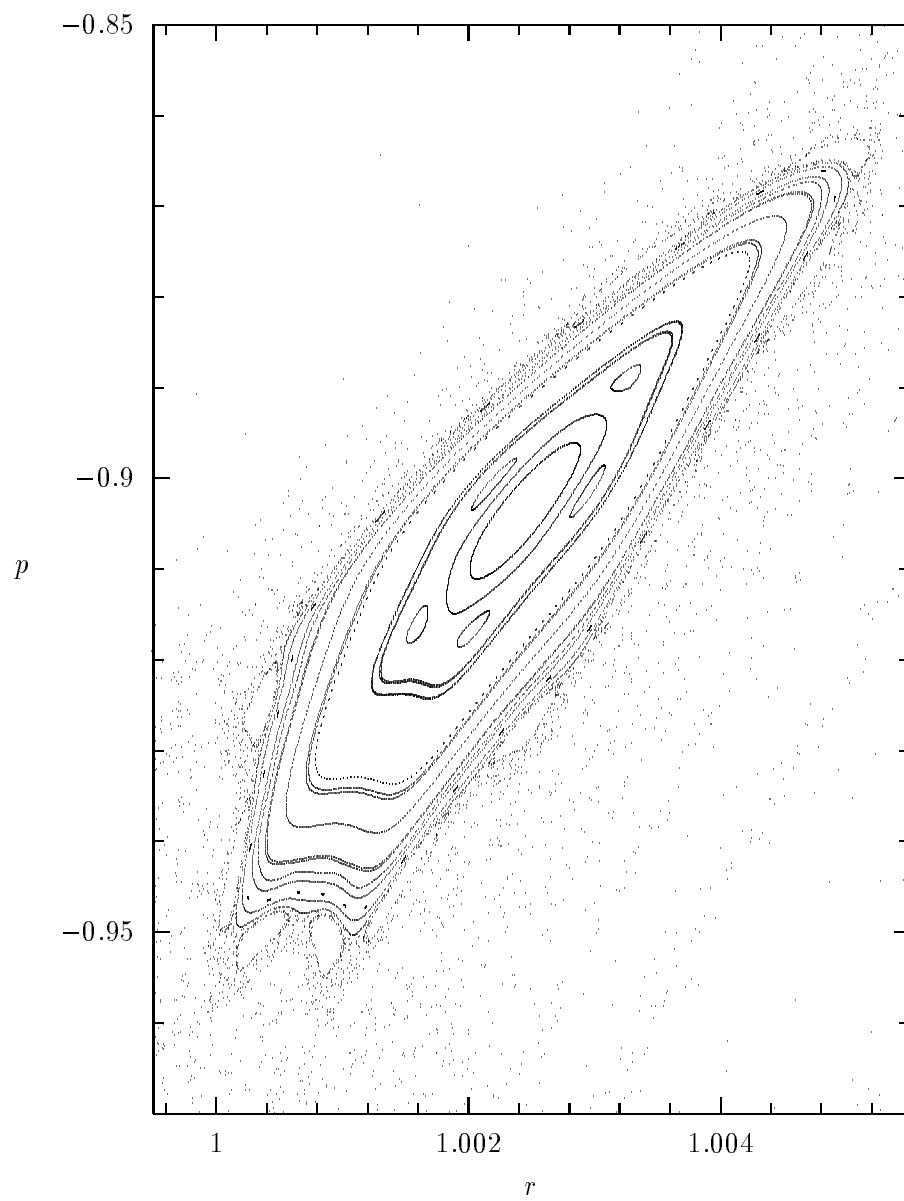


Abbildung 3.14: $K = 0.50741$. Der Punkt des elliptischen 2-Zyklus ist von der Hälfte eines 10-Zyklus umgeben.

3.2 Invariante Mannigfaltigkeiten des hyperbolischen Fixpunktes

Die Existenz von Singularitäten in der Streuabbildung σ steht in einem unmittelbaren Zusammenhang mit der Existenz von hyperbolischen Fixpunkten und periodischen Orbits des Systems. Auch in einem zeitunabhängigen, zentralsymmetrischen System mit *regulärer* Streudynamik führt die Existenz von hyperbolischen Fixpunkten zu Singularitäten in der Streuabbildung (Orbiting). Erst wenn jedoch die Menge der Singularitäten in σ wie in dem hier untersuchten System eine Cantor-Menge bildet, spricht man von *irregulärer Streuung* [6].

Existieren keine Fixpunkte, so kann auch kein Orbiting-Prozeß zu Singularitäten führen. Dementsprechend muß in dem hier untersuchten System für $K < K_1$ die Streuabbildung σ regulär sein. Abbildung 3.15 zeigt die Out-Variablen E_{out} und τ_{out} für verschiedene E_{in} bei $K = 0.37$. Dieser K -Wert ist kleiner als K_1 , es existieren also keine Fixpunkte. Offensichtlich weist σ für diesen K -Wert keine Singularitäten auf, die Streudynamik ist regulär. Die numerischen Berechnungen wurden mit Hilfe von (2.9) durchgeführt, wobei jedoch die Abbildung Φ an Stelle von Φ_L benutzt wurde.

Durch die Sattel-Zentrum-Bifurkation bei $K = K_1$ entstehen ein elliptischer und ein hyperbolischer Fixpunkt. Der äußere, hyperbolische Fixpunkt wird im folgenden mit (\bar{r}, \bar{p}) bezeichnet. Nach dem *Stable-Manifold-Theorem* [19] existieren für (\bar{r}, \bar{p}) stabile und instabile Mannigfaltigkeiten

$$\begin{aligned} W^s &= \left\{ (r, p) \mid \Phi^k(r, p) \rightarrow (\bar{r}, \bar{p}) \text{ für } k \rightarrow \infty \right\} \\ \text{bzw. } W^u &= \left\{ (r, p) \mid \Phi^k(r, p) \rightarrow (\bar{r}, \bar{p}) \text{ für } k \rightarrow -\infty \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

W^s und W^u sind eindimensionale, glatte Kurven, die sich im Fixpunkt (\bar{r}, \bar{p}) transversal schneiden. Liegt ein Punkt (r, p) auf W^s oder W^u , so kann er unter der Dynamik des Systems diese Mannigfaltigkeiten nicht verlassen. Liegt ein Punkt sowohl auf W^s als auch auf W^u , so muß er unter Vorwärts- und Rückwärtsdynamik stets wieder auf beiden Mannigfaltigkeiten liegen. Ein solcher Schnittpunkt von W^s und W^u wird als *homokliner Punkt* bezeichnet. Die Existenz *eines* homoklinen Punktes impliziert sofort die Existenz *unendlich vieler* Schnittpunkte.

Abbildung 3.16 zeigt stabile und instabile Mannigfaltigkeiten des äußeren Fixpunktes für $K = 0.4$ unmittelbar nach der Sattel-Zentrum-Bifurkation bei $K = K_1$. Beide Mannigfaltigkeiten des Fixpunktes bestehen aus zwei Ästen: Jeweils ein Ast läuft direkt in die asymptotische Region des Phasenraumes, der andere verläuft zunächst in Richtung des Ursprungs, um sich dann in unendlich vielen homoklinen Punkten mit der anderen Mannigfaltigkeit zu schneiden. Die

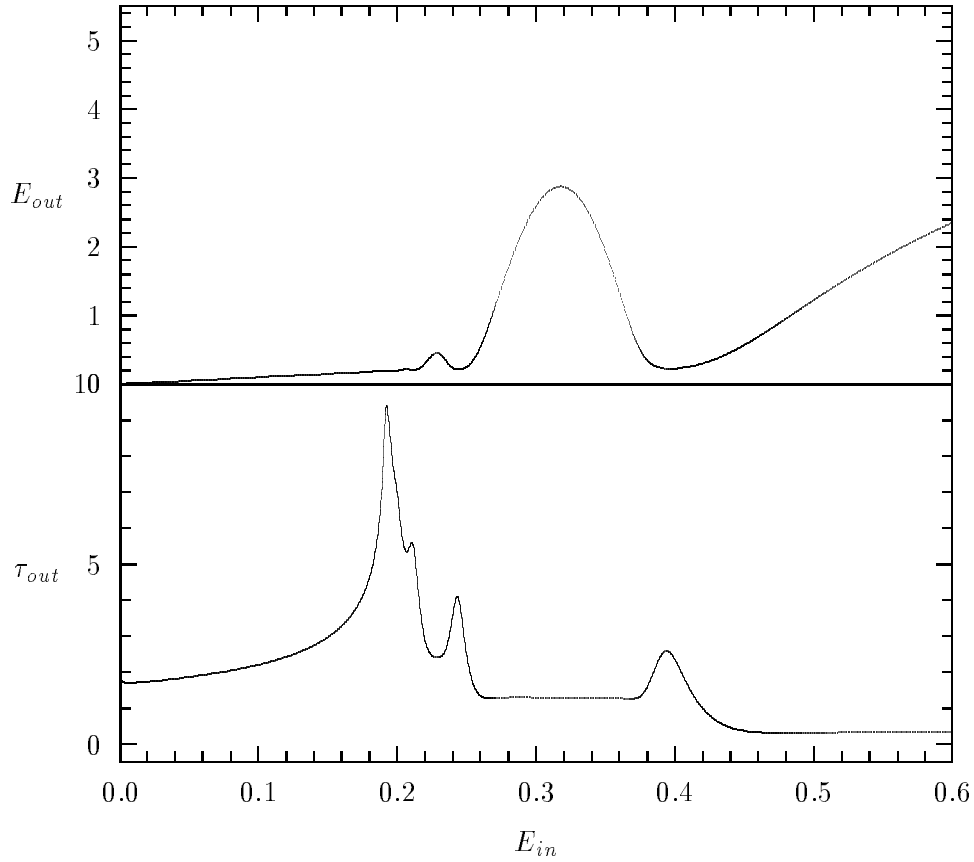


Abbildung 3.15: $E_{out}(E_{in})$ und $\tau_{out}(E_{in})$ für $K = 0.37$, $\tau_{in} = 0.5$.

Schlaufen, die jeweils zwischen zwei homoklinen Punkten von den Mannigfaltigkeiten gebildet werden, werden unter der Dynamik der Abbildung Φ aufeinander abgebildet. Sie müssen, da Φ eine flächenerhaltende Abbildung ist, jeweils den gleichen Flächeninhalt haben. Da die Schlaufen zum Fixpunkt hin immer schmaler werden, müssen sie gleichzeitig immer länger werden. Die Schlaufen der stabilen Mannigfaltigkeit schmiegen sich dem anderen Ast der Mannigfaltigkeit an und folgen seinem Verlauf bis in den asymptotischen Bereich. Gleiches gilt für die Schlaufen der instabilen Mannigfaltigkeit.

Dieses Szenario erzeugt eine äußerst komplizierte Dynamik in der Umgebung des Fixpunktes. Es kann gezeigt werden, daß die Dynamik in diesem Bereich des Phasenraumes topologisch konjugiert zur *Horseshoe-Abbildung* ist [19, 8]. Hier existiert eine hyperbolische Menge Λ , die unter der Dynamik invariant ist. Λ besteht aus unendlich vielen periodischen und aperiodischen lokalisierten instabilen Orbits. Alle diese Orbits besitzen ihrerseits stabile und instabile Mannigfaltigkeiten, die innerhalb der Schlaufen von W^s und W^u des Fixpunktes bis

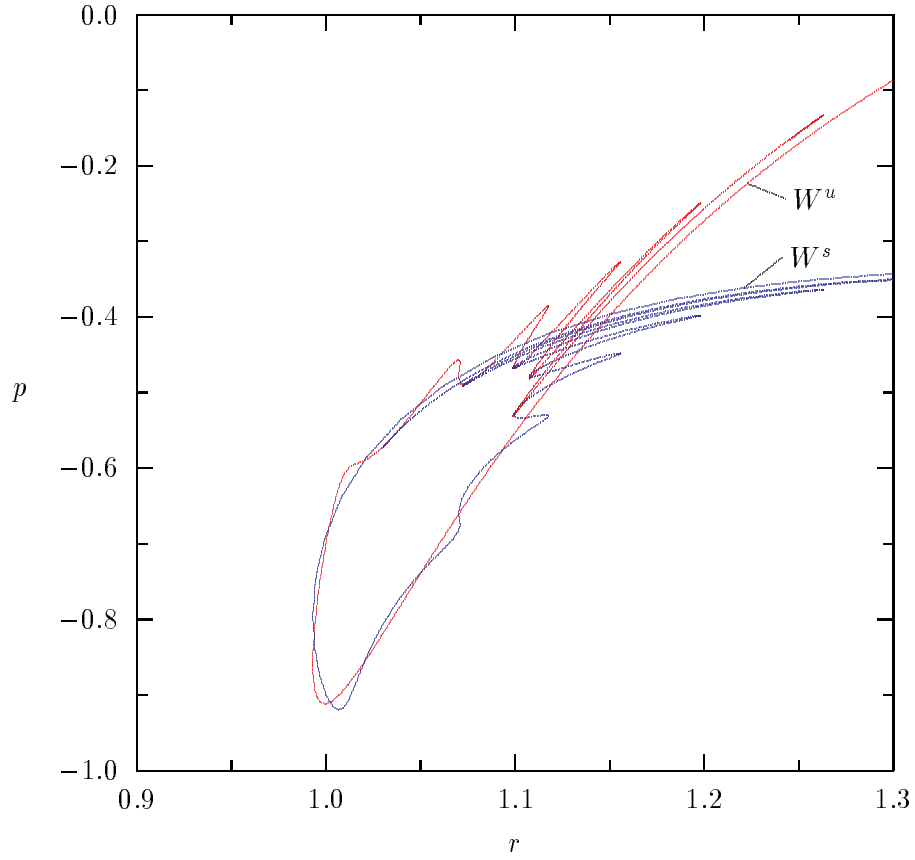


Abbildung 3.16: Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten W^s (blau) und W^u (rot) des äußeren Fixpunktes für $K = 0.4$.

in den asymptotischen Bereich reichen.

3.3 Exponentielle Skalierung der Streuabbildung

Die stabile Mannigfaltigkeit W^s und die instabile Mannigfaltigkeit W^u erstrecken sich bis in den Bereich des Phasenraumes, in dem das System asymptotisch in ein zeitunabhängiges System übergeht. Hier verlaufen sie – aufgrund der Energieerhaltung in diesem Bereich des Phasenraumes – parallel zur r -Achse. Immer wenn die Anfangsbedingung (E_{in}, τ_{in}) einer Trajektorie auf der stabilen Mannigfaltigkeit W^s liegt, wird der Orbit von dem instabilen Fixpunkt „eingefangen“. In diesem Fall sind die Out-Variablen E_{out} und τ_{out} nicht definiert. Ebenso entstehen durch die Schnittpunkte mit den invarianten Mannigfaltigkeiten der instabilen Orbits in Λ unendlich viele weitere Singularitäten. Alle diese Schnittpunkte führen zu einer fraktalen Menge von Streusingularitäten.

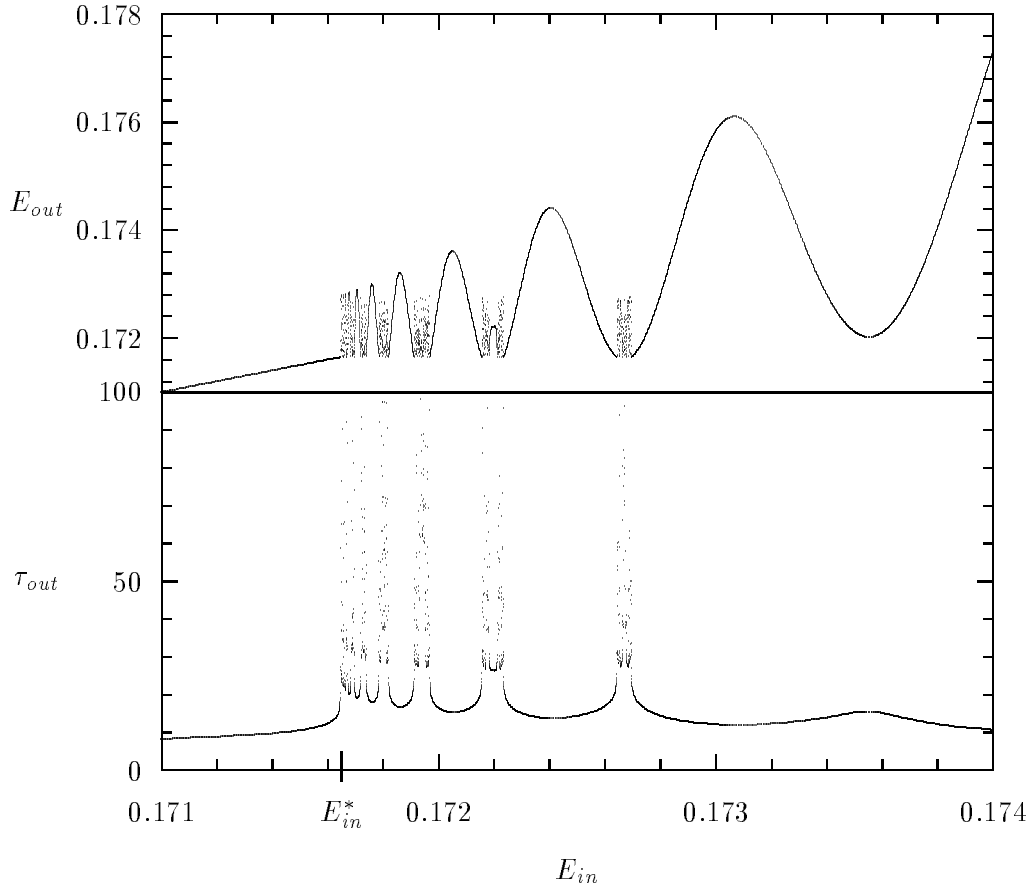


Abbildung 3.17: E_{out} und τ_{out} als Funktion der Variablen E_{in} für $\tau_{in} = 0.5$, $K = 0.4$.

Wie aus Abbildung 3.16 ersichtlich ist, wird der Phasenraum durch den direkt in den asymptotischen Bereich verlaufenden Ast von W^s in zwei Teile separiert. Eine Trajektorie, die oberhalb dieses Astes startet, kann ihn im Laufe der Φ -Dynamik nicht überschreiten und wird somit von dem Horseshoe-Szenario in der Umgebung des Fixpunktes abgeschirmt. Für solche Anfangsbedingungen muß die Streuabbildung regulär sein. Liegt ein Orbit unterhalb dieses Astes, so kann er durch die Zungen von W^s , die bis in den asymptotischen Bereich des Phasenraumes reichen, eingefangen und von dem Horseshoe-Szenario in der Umgebung des äußeren, hyperbolischen Fixpunktes (\bar{r}, \bar{p}) erfaßt werden. Für (E_{in}, τ_{in}) -Werte aus diesem Bereich des Phasenraumes ist die Streuabbildung chaotisch.

Abbildung 3.17 zeigt die Variablen E_{out} und τ_{out} in Abhängigkeit von E_{in} für $\tau_{in} = 0.5$, $K = 0.4$. Eine solche Menge von Anfangsbedingungen entspricht einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit, die von W^s transversal geschnitten

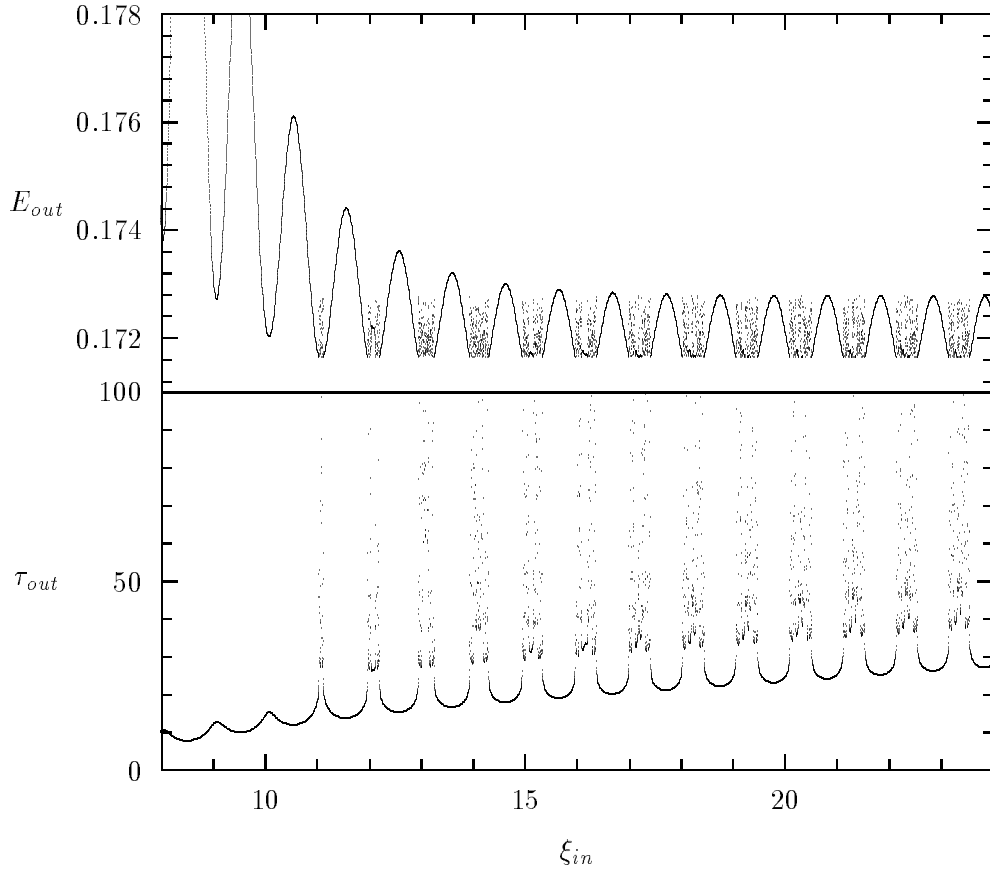


Abbildung 3.18: E_{out} und τ_{out} als Funktionen der skalierten In-Größe ξ_{in} für $\tau_{in} = 0.5$, $K = 0.4$.

wird. Für $E_{in}^* = 0.17165\dots$ ist eine Singularität zu erkennen, die durch den Schnittpunkt mit W^s entsteht. E_{in}^* stellt eine Grenze zwischen regulärer und irregulärer Streudynamik dar. Für $E < E_{in}^*$ (Anfangsbedingung oberhalb von W^s in der (r, p) -Ebene) sind E_{out} und τ_{out} entsprechend den obigen Überlegungen stetige Funktionen. Für $E_{in} > E_{in}^*$ (Anfangsbedingungen unterhalb von W^s) zeigen sich weitere Singularitäten, die durch Schnittpunkte mit den Schleifen von W^s sowie den invarianten Mannigfaltigkeiten aller Orbits in Λ entstehen. Diese Singularitäten häufen sich für $E_{in} \rightarrow E_{in}^*$.

Abbildung 3.18 zeigt die Out-Variablen E_{out} und τ_{out} als Funktionen der Größe

$$\xi_{in} = -\frac{\log(E_{in} - E_{in}^*)}{\log \lambda_1} . \quad (3.25)$$

λ_1 bezeichnet hier den instabilen Eigenwert des hyperbolischen Fixpunktes, d. h. es ist $\lambda_1 > 1$. Für $K = 0.4$ ergibt die numerische Berechnung $\lambda_1 \approx 1.9038$. Für große ξ_{in} , also für $E_{in} \rightarrow E_{in}^*$, erkennt man, daß $E_{out}(\xi_{in})$ in eine periodische

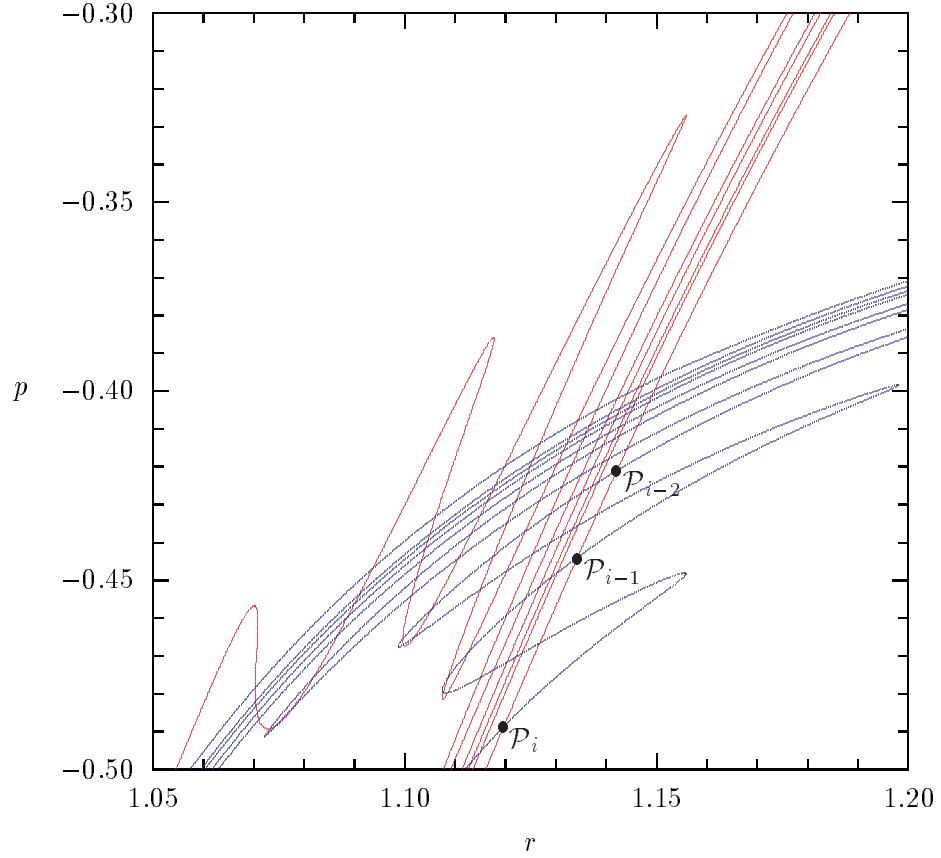


Abbildung 3.19: Vergrößerung des Bereiches um den hyperbolischen Fixpunkt in Abbildung 3.16 mit einigen homoklinen Schnittpunkten \mathcal{P}_i von W^s und W^u .

Funktion übergeht, $\tau_{out}(\xi_{in})$ in eine Überlagerung einer linearen und einer periodischen Funktion. Diese exponentielle Skalierung ist typisch für chaotische Streusysteme, in denen ein hyperbolischer Fixpunkt und das durch homokline Schnitte seiner Mannigfaltigkeiten entstandene Horseshoe-Szenario zu Singularitäten in der Streuabbildung führen [20, 21].

In Abbildung 3.19 sind die Umgebung des Fixpunktes (\bar{r}, \bar{p}) sowie die Mannigfaltigkeiten W^s und W^u dargestellt. Zusätzlich sind einige homokline Punkte \mathcal{P}_i gezeigt. Sie sind Punkte eines homoklinen Orbits, d. h. es gilt

$$\mathcal{P}_i = \Phi(\mathcal{P}_{i-1}) \quad . \quad (3.26)$$

Da die Dynamik in der Umgebung des Fixpunktes nach dem *Hartman–Grobman Theorem* [19] topologisch konjugiert zur linearisierten Dynamik

$$\begin{pmatrix} \mu_{i+1} \\ \nu_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_i \\ \nu_i \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

ist, gilt für den Abstand l_i zwischen zwei homoklinen Punkten \mathcal{P}_i und \mathcal{P}_{i-1} asymptotisch die Beziehung

$$l_{i-1} = \frac{1}{\lambda_1} l_i \quad . \quad (3.28)$$

Eine eindimensionale Menge von Anfangsbedingungen, die W^s transversal schneidet, wird unter der Φ -Dynamik beliebig nah an W^u abgebildet. Sie wird von den Schleifen von W^s in Intervalle I_i unterteilt, für deren Länge asymptotisch ebenfalls die Relation (3.28) gilt. Durch den Übergang zu der skalierten In-Variablen ξ_{in} erhalten diese Intervalle alle die Länge 1. Anfangsbedingungen aus einem Intervall I_{i-1} werden dabei zu den gleichen Werten für die Out-Variablen führen wie Anfangsbedingungen aus I_i – mit dem einzigen Unterschied, daß sie eine Iteration länger im Wechselwirkungsbereich des Potentials verbleiben. $E_{out}(\xi_{in})$ sowie der periodische Anteil von $\tau_{out}(\xi_{in})$ müssen also periodisch mit der Periode 1 sein, die Steigung des linearen Anteils von $\tau_{out}(\xi_{in})$ muß ebenfalls 1 betragen.

Kapitel 4

Chaotische Streuung im Falle $n = 1$

In diesem Kapitel wird die Streudynamik für den Fall $n = 1$ untersucht. Für das Kickpotential $V(r)$ ergibt sich bei dieser Wahl von n :

$$V(r) = -\frac{K}{r} \quad , \quad (4.1)$$

für die Kraftfunktion gilt somit

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} \quad . \quad (4.2)$$

Für $n = 1$ verschwindet der repulsive Drehimpulsterm für $r \rightarrow \infty$ schneller als das attraktive Streupotential. Für große Abstände zum Ursprung geht die Dynamik des Systems also in die eines zeitunabhängigen Coulomb-Systems über. Die Bewegung findet je nach dem Vorzeichen der Energie asymptotisch auf Hyperbeln, Parabeln oder Ellipsen statt. Anders als im Fall $n = 4$ kann sich hier aufgrund der unendlichen Reichweite des attraktiven Coulomb-Potentials ein gebundener Orbit auf einer ellipsenförmigen Bahn beliebig weit vom Streuzentrum entfernen. Ferner sind in diesem Falle parabolische Out-Orbits, also Orbits, die das System mit der Energie $E_{out} = 0$ verlassen, möglich. Diese parabolischen Out-Orbits sind, wie die Überlegungen in diesem Kapitel zeigen, verantwortlich für eine algebraische Skalierung der Streuabbildung. Abbildung 4.1 zeigt einen typischen Streuorbit für $n = 1$.

4.1 Asymptotisch konstante Variablen für $n = 1$

Die in Kapitel 2 beschriebene Transformation (2.5) auf asymptotisch konstante Variablen kann im Falle $n = 1$ nicht benutzt werden, da die mit (2.5) definierte Variable τ im Potential (4.1) asymptotisch nicht konstant wird. Grund hierfür sind logarithmische Zusatzterme, die in der Beschreibung des asymptotischen Zeitverhaltens des Teilchens zusätzlich zur linearen Dynamik des freien Teilchens auftreten.

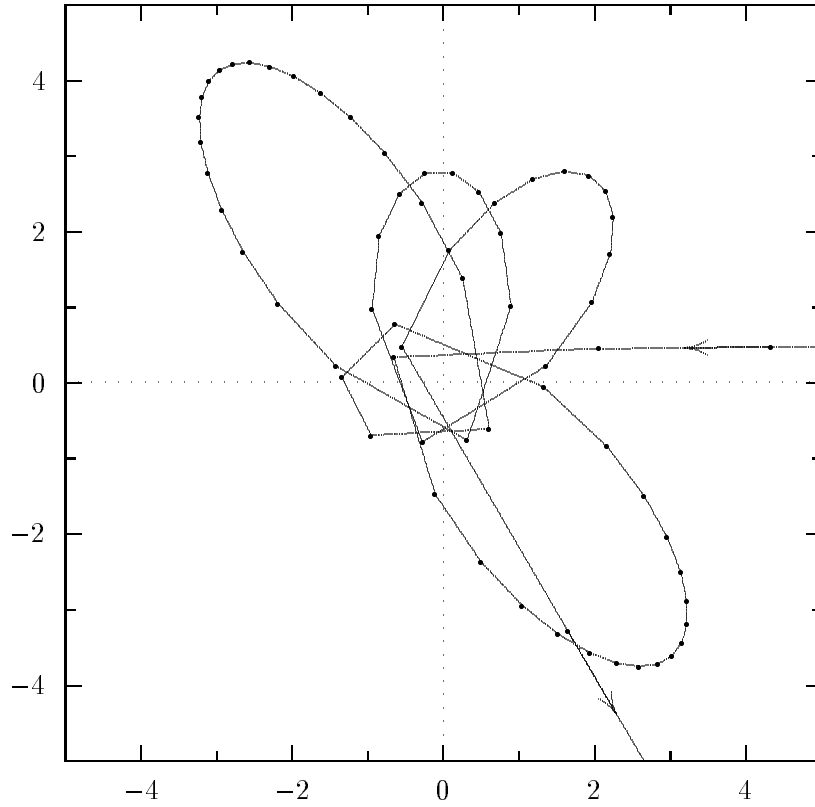


Abbildung 4.1: Typischer Streuorbit im Konfigurationsraum für $n = 1$. $E_{in} = 1.98992\dots$, $\tau_{in} = 0.5$, $K = 2$. Die Orte des Teilchens zu den Kickzeitpunkten sind mit Punkten markiert.

Eine geeignete Variable für das Coulomb-System stellt die Zeit τ dar, zu der das Teilchen im zeitunabhängigen System den Umkehrpunkt einer Hyperbelbahn durchläuft. τ ist für $E > 0$ durch den Ausdruck

$$\tau = t \mp \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \left(E - \frac{L^2}{2m r'^2} + \frac{K}{r'} \right)^{-1/2} dr' \quad (4.3)$$

für $t \gtrless \tau$

gegeben. r_0 bezeichnet den Radius im Umkehrpunkt und ist durch

$$r_0 = -\frac{K}{2E} + \sqrt{\frac{K^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2mE}} \quad (4.4)$$

eindeutig bestimmt. Führt man die Integration in (4.3) aus, so erhält man

schließlich mit (4.4) die zeitabhängige Transformation

$$\begin{aligned}
T_t: \quad (r, p) &\rightarrow (E, \tau) \\
E &= \frac{p^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r} \\
\tau &= t \mp \sqrt{\frac{m}{2E}} \left[\sqrt{r^2 + \frac{K}{E}r - \frac{L^2}{2mE}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{K}{2E} \log \left(\frac{2E}{K} \frac{\sqrt{r^2 + \frac{K}{E}r - \frac{L^2}{2mE}} + r + \frac{K}{2E}}{\sqrt{\frac{2L^2E}{mK^2} + 1}} \right) \right] \quad (4.5) \\
&\text{für } t \geq t_0 \quad .
\end{aligned}$$

In [22] wird gezeigt, daß diese Transformation kanonisch und somit flächenerhaltend ist.

Da das untersuchte System für $r \rightarrow \infty$ in ein zeitunabhängiges Coulomb-System übergeht, nimmt das mit (4.5) definierte Variablenpaar (E, τ) für große Abstände zum Ursprung asymptotisch konstante Werte an.

Mit Hilfe von (4.5) kann nun wie in (2.8) die Streuabbildung σ definiert werden, die die Variablen (E_{in}, τ_{in}) vor dem Streuvorgang auf die Variablen (E_{out}, τ_{out}) nach dem Durchgang durch den Wechselwirkungsbereich abbildet. Bei der numerischen Berechnung der Streuabbildung muß die Tatsache beachtet werden, daß sich ein gebundener Orbit mit $E < 0$ auf einer ellipsenförmigen Bahn beliebig weit vom Ursprung entfernen kann. Die Berechnung darf demnach nur abgebrochen werden, wenn ein festgelegter Abstand vom Ursprung erreicht ist und gleichzeitig die Energie größer oder gleich Null ist.

Die Abbildungen 4.2 und 4.3 zeigen die Out-Variablen (E_{out}, τ_{out}) für verschiedene E_{in} bei festem τ_{in} . Wie im Fall $n = 4$ zeigt sich, daß sich auch hier stetige und unstetige Intervalle abwechseln, die unstetigen Bereiche enthalten bei Vergrößerung wieder stetige Intervalle. Es existiert also auch hier wie für $n = 4$ eine Menge von Streusingularitäten mit der Struktur einer Cantor-Menge. Auf der Grenze zwischen einem stetigen und einem unstetigen Bereich liegt dabei immer ein parabolischer Out-Orbit. Die numerischen Berechnungen für die Abbildungen in diesem Kapitel wurden mit Hilfe von (1.37) bei $K = 2$ durchgeführt.

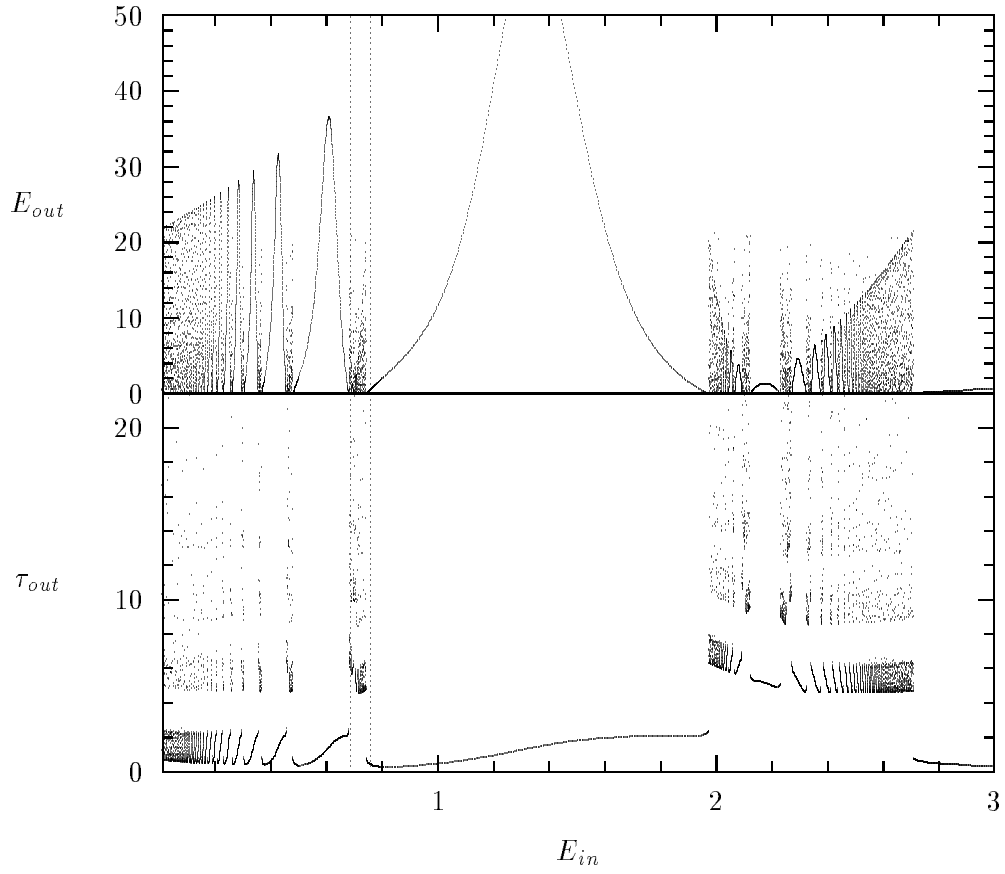


Abbildung 4.2: E_{out} und τ_{out} in Abhängigkeit von E_{in} für $\tau_{in} = 0.5$, $K = 2$. Der markierte Bereich ist in Abbildung 4.3 vergrößert dargestellt.

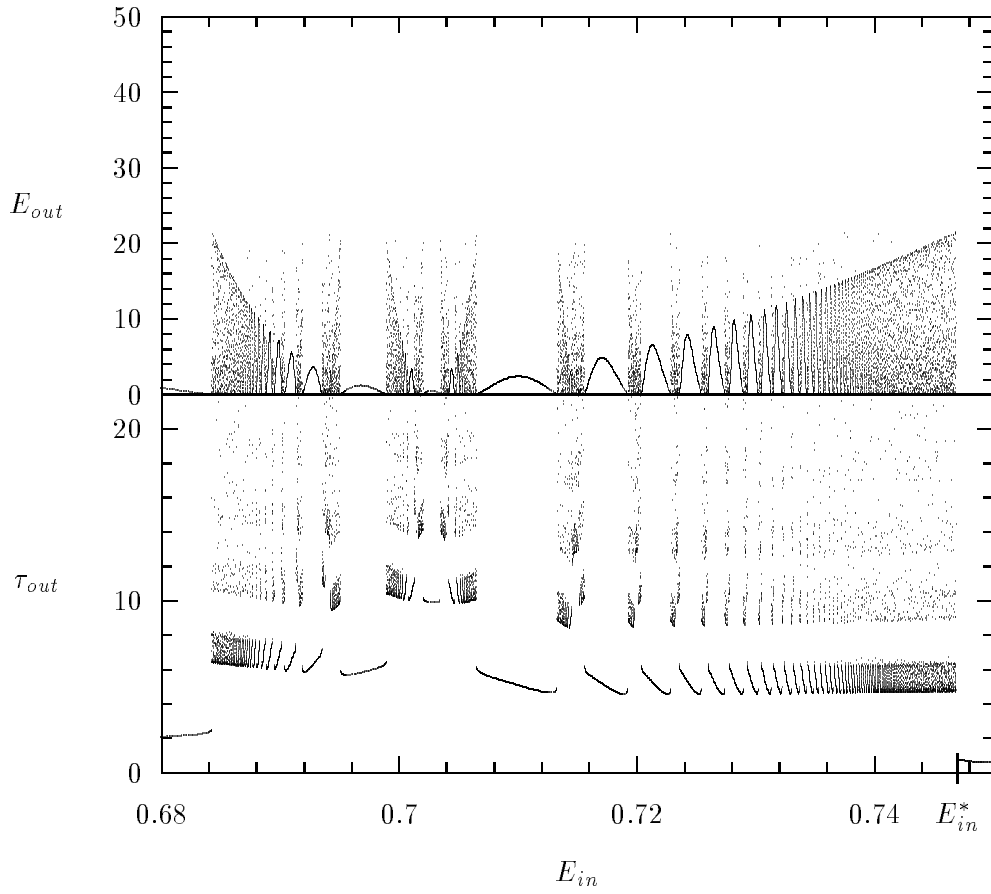


Abbildung 4.3: Vergrößerung des markierten Bereichs aus Abbildung 4.2. Der markierte Wert E_{in}^* entspricht einer In-Energie, die zu einem parabolischen Out-Orbit führt.

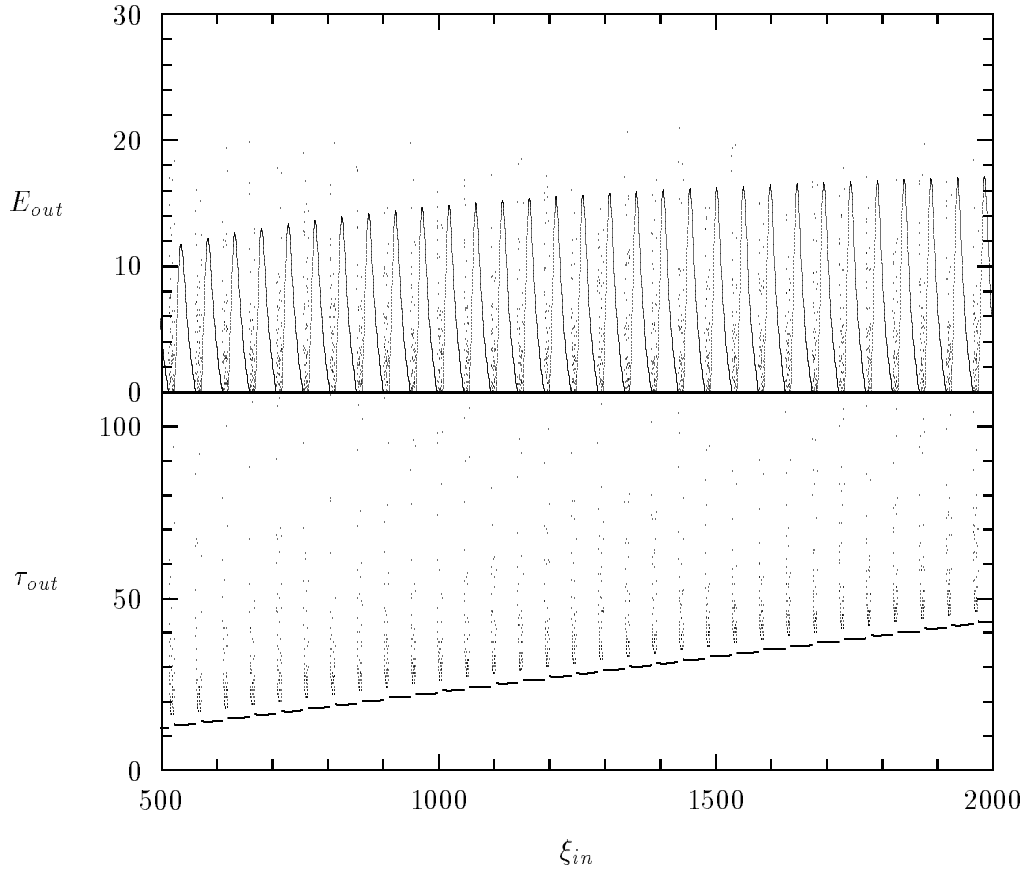


Abbildung 4.4: E_{out} und τ_{out} als Funktion der skalierten Größe ξ_{in} .

4.2 Algebraische Skalierung der Streuabbildung

Abbildung 4.4 zeigt die Out-Variablen E_{out} und τ_{out} in Abhängigkeit der skalierten Größe

$$\xi_{in} = |E_{in} - E_{in}^*|^{-\frac{3}{2}} \quad ; \quad (4.6)$$

E_{in}^* entspricht dabei einer Anfangsbedingung, die zu einem parabolischen Out-Orbit führt. Für die Berechnungen wurde der in Abbildung 4.3 markierte Wert $E_{in}^* = 0.746974\dots$ benutzt. Ähnlich wie in Kapitel 3 gehen auch hier $E_{out}(\xi_{in})$ in eine periodische und $\tau_{out}(\xi_{in})$ in die Überlagerung einer periodischen und einer linearen Funktion über. Diese algebraische Skalierung der Streuabbildung ist in [5] allgemein für periodisch zeitabhängige Streusysteme, in denen die Dynamik für große Abstände vom Ursprung in die eines zeitunabhängigen Systems mit einem attraktiven Streupotential übergeht, erklärt worden. Der Mechanismus, der zu der algebraischen Skalierung (4.6) führt, soll hier auf das in dieser Arbeit

untersuchte System übertragen werden.

Der Einfachheit halber sei angenommen, daß das System jenseits eines Abstands R vom Ursprung vollständig in das zeitunabhängige System mit der Hamilton-Funktion

$$H(r, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r} \quad (4.7)$$

übergeht. E_R bezeichne die Energie des Systems bei $r = R$. Im folgenden sei τ_{in} fest, E_{in} variabel. E_{in}^* sei im folgenden eine beliebige In-Energie, die zu einem parabolischen Out-Orbit führt. E_R kann in einer Umgebung von E_{in}^* linearisiert werden:

$$E_R = -C (E_{in} - E_{in}^*) \quad . \quad (4.8)$$

Die Konstante C sei o. B. d. A. positiv. Es gilt nun die folgende Fallunterscheidung:

- $E_{in} < E_{in}^* \Rightarrow E_R > 0$. Der Orbit verläßt den Wechselwirkungsbereich auf einer Hyperbel mit $E_{out} = E_R$. Diese Anfangsbedingung führt zu regulärer Streuung.
- $E_{in} = E_{in}^* \Rightarrow E_R = 0$. Der Orbit verläßt den Wechselwirkungsbereich auf einer Parabel mit $E_{out} = 0$ und nicht definiertem τ_{out} .
- $E_{in} > E_{in}^* \Rightarrow E_R < 0$. Der Orbit bewegt sich mit konstanter Energie E_R auf einer elliptischen Bahn; er wird nach einer *Wiederkehr-Zeit* T_{Ret} nach $r = R$ zurückkehren und anschließend wieder in den Wechselwirkungsbereich des zeitabhängigen Potentials eintreten. Diese Anfangsbedingung führt zu irregulärer Streuung.

Die Wiederkehr-Zeit T_{Ret} läßt sich berechnen, indem man längs des elliptischen Orbit von $r = R$ bis zum Umkehrpunkt \bar{R} und zurück integriert. Man erhält

$$T_{Ret} = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_R^{\bar{R}} \left(E_R - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r} \right)^{-1/2} dr \quad . \quad (4.9)$$

Der Umkehrpunkt \bar{R} ist hierbei durch

$$\bar{R} = \frac{1}{2|E_R|} \left(K + \sqrt{K^2 - \frac{2|E_R|L^2}{m}} \right) \quad (4.10)$$

gegeben. Führt man die Integration in (4.9) aus, erhält man

$$T_{Ret} = \left[-\frac{\sqrt{2mK r - 2m|E_R| r^2 - L^2}}{|E_R|} - K \sqrt{\frac{m}{2}} |E_R|^{-3/2} \arcsin \frac{K - 2|E_R| r}{\sqrt{K^2 - 2|E_R| L^2 / m}} \right]_{\bar{R}}^R. \quad (4.11)$$

Für $|E_R| \rightarrow 0$ ergibt sich aus (4.11)

$$T_{Ret} = K \pi \sqrt{\frac{m}{2}} |E_R|^{-3/2}. \quad (4.12)$$

Unterscheiden sich nun für zwei verschiedene Orbits mit der gleichen Energie E_R die Wiederkehr-Zeiten um ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer des Potentials, so treten die Trajektorien mit der gleichen Energie E_R und mit der gleichen Phase relativ zum Potential wieder in den Bereich zeitabhängiger Wechselwirkung ein. Die weitere Dynamik dieser Orbits muß demnach identisch sein. Sie müssen also, sobald sie den Wechselwirkungsbereich endgültig verlassen, die gleiche Out-Energie E_{out} haben. In der Variablen τ_{out} unterscheiden sie sich um die Zeitdifferenz ihrer Wiederkehr-Zeiten.

Solche Orbits häufen sich wegen (4.12) für $E_R \rightarrow 0$, also in der Umgebung von jedem parabolischen Out-Orbit. In der Skalierung (4.6) folgen sie für $\xi_{in} \rightarrow \infty$ äquidistant. Die Periodizität der Out-Variablen in Abbildung 4.4 ist also eine Konsequenz von (4.12).

Schluß

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der chaotischen Dynamik in einem periodisch zeitabhängigen Hamilton-System, das durch die Wahl einer speziellen Form der Zeitabhängigkeit die Gestalt eines „Kicksystems“ erhielt.

In diesem Kicksystem wurde die Streudynamik exemplarisch an einem speziellen zentralsymmetrischen Kickpotential untersucht. Es zeigte sich, daß je nach Reichweite des Kickpotentials zwei unterschiedliche Mechanismen die chaotische Dynamik und somit auch die Struktur der Streuabbildung beeinflussen.

Bedingt durch diese zwei Mechanismen, weist die Streuabbildung zwei verschiedene Skalierungseigenschaften auf: exponentielle Skalierung bei kurzer, algebraische bei langer Reichweite. Beide Skalierungseigenschaften konnten erklärt und numerisch bestätigt werden. In beiden Fällen zeigte sich, daß die Streuabbildung für eine fraktale Menge von Anfangsbedingungen singulär wird.

Die Wahl eines Kicksystems für die Untersuchungen ermöglichte die Beschreibung der Dynamik des Systems durch die Iteration einer diskreten Abbildung. Dies hatte zur Folge, daß die numerischen Berechnungen gegenüber der Integration eines Differentialgleichungssystems erheblich vereinfacht wurden.

Diese Arbeit kann als eine Vorarbeit für die Analyse von Streuexperimenten angesehen werden, in denen die explizite Zeitabhängigkeit durch Überlagerung äußerer elektromagnetischer Wechselfelder realisiert wird.

Literaturverzeichnis

- [1] T. Schridde, Diplomarbeit: *Chaos und Ordnung in einem zentralsymmetrischen Kickpotential*, Universität Münster (1993)
- [2] C. Hippel, Diplomarbeit: *Stochastische Netze: Struktur und diffusives Verhalten*, Universität Münster (1994)
- [3] G. Troll, U. Smilansky, *A Simple Model for Chaotic Scattering. I: Classical Theory*, Physica D **35** (1989) 34–64
- [4] S. A. Rice, P. Gaspard, *Unimolecular Reactions Revisited*, Israel J. Chem. **30** (1990) 23–37
- [5] A. Beeker, P. Eckelt, *Scaling and Decay in Periodically Driven Scattering Systems*, Chaos **3** (1993) 487–494
- [6] B. Eckhardt, *Irregular Scattering*, Physica D **33** (1988) 89–98
- [7] B. Eckhardt, *Fractal Properties of Scattering Singularities*, J. Phys. A **20** (1987) 5971–5979
- [8] C. Jung, H.–J. Scholz, *Chaotic Scattering off the Magnetic Dipole*, J. Phys. A **21** (1988) 2301–2311
- [9] Y.–C. Lai, C. Grebogi, *Chaotic Scattering in Time-dependent Hamiltonian Systems*, Int. Journal of Bifurcation and Chaos **1** (1991) 667–679
- [10] Z.–M. Lu et al., *Controlling Chaotic Scattering: Impulsively Driven Morse Potential*, Phys. Rev. A, **45** (1992) 5512–5523
- [11] R. L. Devaney, *Reversible Diffeomorphisms and Flows*, Trans. Am. Math. Soc. **218** (1976) 89
- [12] J. S. W. Lamb, *Reversing Symmetries in Dynamical Systems*, J. Phys. A **25** (1992) 925–937
- [13] W. H. Press et al., *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge (1988)

- [14] P. T. Boyd, S. L. W. McMillan, *Initial-value Space Structures in Irregular Gravitational Scattering*, Phys. Rev. A **46** (1992) 6277–6287
- [15] C. Jung, *Scattering Chaos in the Harmonically Driven Morse System*, in: D. Hestenes, A. Weingartshofer (Hrsg.), *The Electron: New Theory and Experiment*, Kluwer Academic, Dordrecht, Boston (1991)
- [16] Y.-T. Lau, J. M. Finn, E. Ott, *Fractal Dimension in Nonhyperbolic Chaotic Scattering*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 978–981
- [17] C. Grebogi, S. W. McDonald, E. Ott, J. A. Yorke, *Final State Sensitivity: An Obstruction to Predictability*, Phys. Lett. A **99** (1988) 415–418
- [18] S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke *Fractal Basin Boundaries*, Physica D **17** 125–153 (1985)
- [19] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York (1983)
- [20] M. Ding et al., *Transition to Chaotic Scattering*, Phys. Rev. A **42** (1990) 7025–7040
- [21] C. Jung, *A Simple Model System for Irregular Scattering*, Acta Phys. Pol. B **23** (1992) 177–218
- [22] R. Horstmann, Diplomarbeit: *Dreikörperproblem*, Universität Münster (1989)

Hiermit bestätige ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, den 27. November 1994