



Institut für Theoretische Physik

Bachelorarbeit

Überprüfung der Allgemeinen Relativitätstheorie mittels des Hulse-Taylor-Pulsars

Msab Zamout

Martikelnr.: 453645
zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

Erstgutachter: Jun.-Prof. Dr. Kai Schmitz

Zweitgutachter: apl. Prof. Dr. Jochen Heitger

19. September 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretischer Hintergrund	3
2.1	Allgemeine Relativitätstheorie in Linearisierter Theorie	3
2.1.1	Die Feldgleichung	3
2.1.2	General Koordinatentransformation	4
2.1.3	Linearisierte Theorie	4
2.1.4	Infinitesimale lokale Transformation	4
2.1.5	Endliche globale Lorentz-Transformation	5
2.1.6	Die Bewegungsgleichung	5
2.1.7	Lorentz-Eichung	6
2.1.8	Die Bewegungsgleichung unter Lorentz-Eichung	6
2.1.9	Transversal-Spurlose Eichung	7
2.1.10	Freiheitsgraden	8
2.1.11	Projektion auf die Transversal-Spurlose Eichung	8
2.2	Energie der Gravitationswellen	9
2.2.1	Trennung der Gravitationswellen vom Hintergrund	9
2.2.2	Kurzwellenentwicklung	10
2.2.3	Energie-Impuls-Tensor der GW	12
2.2.4	Energiefluss	13
2.3	Generation von GW in linearsierte Theorie	15
2.3.1	Lösung der Bewegungsgleichung	15
2.3.2	Die Lösung in TT-Eichung und Ihre Entwicklung	16
2.3.3	Multipolentwicklung	17
2.3.4	Quadrupolformel	18
3	Hulse-Taylor-Pulsar	20
3.1	Elliptische Umlaufbahnen	20
3.2	Abgestrahlte Energie in Form von Gravitationswellen	24
3.3	Die zeitliche Ableitung der Umlaufperiode in Linearisierte Theorie	31
3.4	Anwendung auf Hulse-Taylor-Pulsar	32

4	Zusammenfassung	36
A	Anhang A	38
A.1	Notationen und Definitionen	38
A.2	Tensoren unter Koordinatentransformation	39
A.3	Trigonometrieformeln für Sinus und Kosinus	40
A.4	Herleitung der Identität $S^{ij} = \frac{1}{2}\ddot{M}^{ij}$	40
A.5	Integration des Lambda-Tensors	41
	Literaturverzeichnis	41

Einleitung

Ein Pulsar ist ein schnell rotierender Neutronenstern, bei dem die Symmetrieachse des Magnetfelds von der Rotationsachse abweicht, deshalb wird Synchrotronstrahlung entlang der Dipolachse ausgesendet. Wenn die Erde im Strahlungsfeld des Pulsars liegt, empfängt sie regelmäßig wiederkehrende Signale. Die Entdeckung eines Binärsystems aus einem Pulsar und seinem Begleiter durch Hulse und Taylor [1] war von großer Bedeutung. Es handelt sich dabei um zwei massive, aber astronomisch kleine Objekte, die sich in einer Distanz von ungefähr ein paar Mal der Entfernung zwischen Erde und Mond befinden und eine Masse haben, die etwa der unserer Sonne entspricht, jeder mit einem Radius von etwa zehn Kilometern [2]. Die Pulsperiode, also die Zeit zwischen zwei Signalimpulsen des Pulsars, beträgt 0,05903 s. Diese erhöht sich über einen Zeitraum von einer Million Jahren um weniger als 5% [2]. Das bedeutet, dass der Pulsar als Uhr verwendet werden kann, deren Genauigkeit mit den besten Atomuhren vergleichbar ist. Das Verhalten eines solchen Systems, das in Abbildung 1.1 schematisch dargestellt ist, weicht von dem ab, was man für ein Paar Himmelskörper nach Newtons Theorie erwarten würde. Es war daher eine großartige Gelegenheit, um die Allgemeine Relativitätstheorie zu überprüfen.

Die von Einstein aufgestellte Allgemeine Relativitätstheorie besagt, dass beschleunigte Massen die Raumzeit deformieren. Als Folge können Wellen in der Raumzeit entstehen und sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Diese werden Gravitationswellen, kurz GW, genannt. Der Hulse-Taylor-Pulsar wurde verwendet, um einen indirekten Beweis für die Existenz dieser Gravitationswellen zu finden.

Das System wurde über mehrere Jahre hinweg untersucht. Es wurde herausgefunden, dass die Umlaufperiode abnimmt. Die beiden Himmelskörper rotieren mit der Zeit immer schneller umeinander, wobei die Umlaufbahn kleiner wird [3]. Dies entspricht einer Verkürzung der Umlaufzeit um etwa $75 \cdot 10^{-6}$ Sekunden pro Jahr [2]. Diese Abnahme tritt auf, weil das System Energie in Form von Gravitationswellen verliert. Dies steht im Einklang mit der Allgemeinen Relativitätstheorie, die dies für Massen vorhersagt, die sich relativ zueinander bewegen.

Pulsare werden heutzutage genutzt, um den Gravitationswellenhintergrund zu untersuchen. Eine internationale Forscherkooperation hat den 15-jährigen Pulsar-Timing-Datensatz des North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves kurz NANOGrav analysiert. Dieser basiert auf Messungen von kleinen Zeitschwankungen in

den Radiosignalen von 67 Pulsaren. Damit lassen sich die Amplitude und das Spektrum des Gravitationswellenhintergrunds bestimmen. Diese Ergebnisse stimmen mit den astrophysikalischen Erwartungen für ein Signal von einer Population supermassiver Binärsysteme aus Schwarzen Löchern überein, wobei exotischere kosmologische und astrophysikalische Quellen nicht ausgeschlossen werden können [4].

In dieser Arbeit wird die Berechnung der Abnahme der Umlaufperiode auf Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie durchgeführt. Dabei lässt sich ein Term für die emittierte Energie mithilfe der Linearisierten Theorie herleiten. Zusammen mit den keplerschen Gesetzen kann man die zeitliche Ableitung der Umlaufperiode in der Linearisierten Theorie berechnen. Anschließend wird der theoretisch berechnete Wert mit dem experimentell ermittelten Wert verglichen. Die Rechnungen in dieser Arbeit orientieren sich an das Buch von Michele Maggiore, *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments* [5].

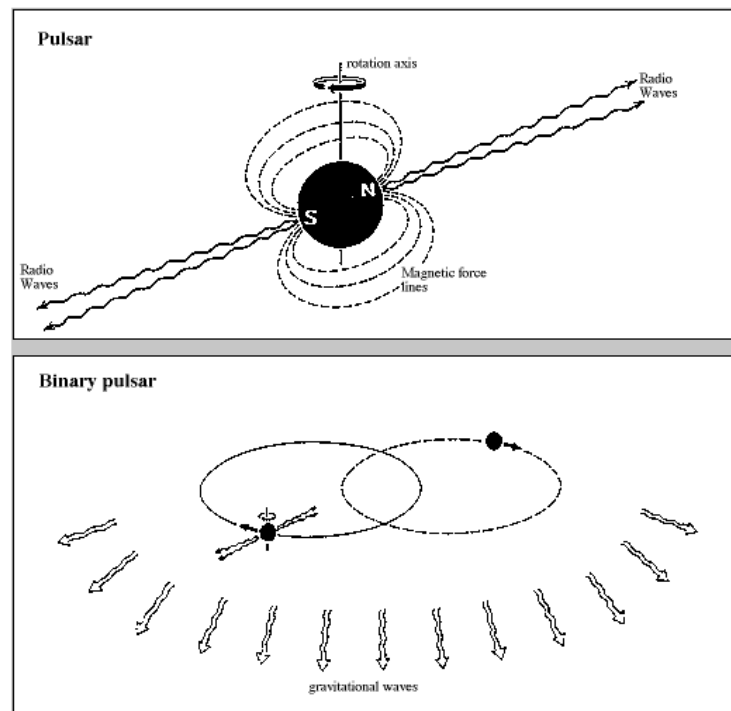


Abbildung 1.1: Das Bild oben zeigt eine Schematische Darstellung eines Pulsars, der Synchrotronstrahlung entlang der Dipolachse aussendet, die sich in Raum propagieren. Der Pulsar dreht sich dabei um seine Rotationsachse. Das Bild unten zeigt Schematische Darstellung des binären Systems PSR 1913 + 16. Das System von einem Pulsar und seinem Begleiter emittiert Gravitationswellen, und verliert dabei Energie. Abbildung entnommen aus [2]

Theoretischer Hintergrund

2.1 Allgemeine Relativitätstheorie in Linearisierter Theorie

Die in dieser Arbeit verwendeten Definitionen und Notationen sind im Anhang A, Abschnitt A.1 zu finden.

2.1.1 Die Feldgleichung

Die einsteinische Feldgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie lässt sich aus der Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH} und der Wirkung der Materie S_M herleiten. Die gesamte Wirkung lässt sich schreiben als:

$$S = S_{EH} + S_M.$$

Die Einstein-Hilbert-Wirkung ist angegeben durch:

$$S_{EH} = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R.$$

Der Energie-Impuls Tensor $T_{\mu\nu}$ ist definiert durch die Variation der Wirkung S_M unter $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, also:

$$\delta S_M = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist, G die newtonsche Gravitationskonstante, g der Betrag der Determinante des metrischen Tensors $\det(g_{\mu\nu}) = g$, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ der Ricci-Skalar, und $R_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor. Unter kleinen Variationen der Metrik $\delta g_{\mu\nu}$, ist die Bewegungsgleichung aus der gesamten Wirkung herzuleiten:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Diese ist auch als die einsteinische Feldgleichung bekannt. Die Allgemeine Relativitätstheorie ist eine geometrische Theorie der Gravitation. Materie verursacht eine Krümmung der Raumzeit, die Bewegung erfolgt in gerade Linien auf die gekrümmte Raumzeit, also Geodäten. Gravitation entsteht also durch die durch Materie veränderte Geometrie der

Raumzeit.

Die Feldgleichung kann auch in die Form

$$\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) = R_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

gebracht werden.

2.1.2 General Koordinatentransformation

In einer Koordinatentransformation werden die Komponenten der Transformationsmatrix $\Lambda^\mu{}_\alpha$ gebildet, indem man die partielle Ableitung einer Koordinate nach der anderen nimmt $\Lambda^\mu{}_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}$. Allgemeine Relativitätstheorie ist invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen, für eine allgemeine Koordinate x^μ lautet die Transformation :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu,$$

x'^μ ist dabei invertierbar. Sowohl die Transformation als auch ihre Inverse sind differenzierbar, das heißt x'^μ ist ein beliebiger Diffeomorphismus.

Der metrische Tensor lässt sich wie ein Tensor zweiter Stufe transformieren :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x). \quad (2.3)$$

Diese Symmetrie ist die Eichsymmetrie der Allgemeinen Relativitätstheorie. Die Definition der Koordinatentransformation, und die Transformation eines allgemeinen Tensors sind im Anhang A, Abschnitt A.2 zu finden.

2.1.3 Linearisierte Theorie

Um die GW zu untersuchen, werden diese als Störung in der Metrik behandelt. Dazu entwickelt man die Einstein-Gleichungen um die flache Raummetrik.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.4)$$

Da die numerischen Werte der Komponenten eines Tensors vom Bezugssystem abhängig sind, ist es erforderlich, dass es ein Bezugssystem existiert, in dem $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ in einer ausreichend großen Region des Raumes gilt. Es gilt außerdem dass

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}.$$

2.1.4 Infinitesimale lokale Transformation

Eine residuale Eichsymmetrie bleibt auch bei der Fixierung des Bezugssystems, wo Gleichung 2.4 erhalten ist. Man kann eine Koordinatentransformation betrachten

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu(x),$$

es gilt dabei, dass

$$|\partial_\mu \zeta_\nu| \lesssim |h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

Die Transformation von $h_{\mu\nu}$ in niedrigster Ordnung ist anhand der Gleichung 2.3 zu finden

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu). \quad (2.5)$$

Somit wenn $|\partial_\mu \zeta_\nu| \lesssim |h_{\mu\nu}|$ gilt, bleibt die Bedingung $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ erhalten, und man bleibt in der Linearisierten Theorie mit der Eichsymmetrie.

2.1.5 Endliche globale Lorentz-Transformation

Man kann auch endliche globale Lorentz-Transformationen durchführen

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu.$$

Nutzt man die Definition der Lorentz-Transformation, lässt sich auch ablesen, dass die Matrix $\Lambda^\mu{}_\nu$ der Relation

$$\Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}$$

genügt. Somit lässt sich die Metrik wie folgt transformieren

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta g_{\alpha\beta}(x) \\ &= \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta [\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x)] \\ &= \eta_{\mu\nu} + \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta h_{\alpha\beta}(x) \\ &= \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x'). \end{aligned}$$

Die Metrikstörung lässt sich also unter Lorentz-Transformationen wie ein Tensor transformieren

$$h'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta h_{\alpha\beta}(x).$$

2.1.6 Die Bewegungsgleichung

Der Krümmungstensor in linearer Ordnung von $h_{\mu\nu}$ ist dann

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\beta} + \partial_\mu \partial_\beta h_{\nu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\beta} - \partial_\nu \partial_\beta h_{\mu\alpha}). \quad (2.6)$$

Der linearisierte Krümmungstensor ist dabei invariant unter der residuellen Eichsymmetrie in Gleichung 2.5. Um die linearisierte Bewegungsgleichung kompakter zu schreiben, definiert man

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (2.7)$$

mit

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -h,$$

wobei $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ die Spur ist. Die Störung $\bar{h}_{\mu\nu}$ ist als Spur-umgekehrte Metrik bekannt. Benutzt man die Konvention, dass man die Indizesstellung mit der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$

ändern kann, und Gleichung 2.6, dann ist der Einstein-Tensor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ zu berechnen. Die Linearisierung der einsteinsche Bewegungsgleichung 2.1 ergibt sich somit als

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\nu\alpha} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

2.1.7 Lorentz-Eichung

Man kann Gleichung 2.5 verwenden, um eine Lorentz-Eichung auszuwählen, diese lautet dann

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.9)$$

Um dies zu beweisen, verwendet man die Transformation in Gleichung 2.5 mit der Bedingung 2.9, so dass die Transformation von der Spur-umgekehrten Metrik ergibt

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha),$$

und es ergibt sich für die Transformation des entsprechenden Divergenzterms

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow (\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu.$$

Die Funktion ξ_μ wird so gewählt, so dass man die Lorentz-Eichung 2.9 erhält.

2.1.8 Die Bewegungsgleichung unter Lorentz-Eichung

Mit der Lorentz-Eichung 2.9 verschwinden in der Bewegungsgleichung 2.8 die drei Terme mit $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}$, und man erhält die Wellengleichung

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Die Energie-Impulserhaltung lässt sich hier mithilfe der Lorentz-Eichung 2.9 gewinnen

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.11)$$

Die rechte Seite der Gleichung 2.10 beschreibt die Massen, die die Gravitationswellen generieren. Diese bewegen sich im Minkowski-Raum. Ihre Trajektorien, die durch ihre gegenseitige Beeinflussung entstehen, lassen sich also anhand der newtonschen Dynamik beschreiben. Die linke Seite der Gleichung beinhaltet die Metrikstörungen. Die Lösung der Wellengleichung 2.10 kann dann benutzt werden, um die Reaktion der Testmassen auf die Gravitationswelle zu berechnen. Die Terme der Ordnung $O(h^2)$ und höher werden bei den Berechnungen vernachlässigt.

2.1.9 Transversal-Spurlose Eichung

Weit entfernt von einer GW-Quelle, wo $T_{\mu\nu} = 0$ ist, ergibt sich für die Wellengleichung 2.10 Folgendes

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \left(-\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \nabla^2 \right) \bar{h}_{\mu\nu} = 0.$$

Diese Wellengleichung außerhalb einer GW-Quelle impliziert, dass GW mit Lichtgeschwindigkeit propagieren. Die Bedingung $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ bleibt erhalten, auch bei einer Koordinatentransformation $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ der Art, dass

$$\square \xi_\mu = 0,$$

wenn $\square \xi_\mu$ gleich null ist, dann ist $\square \xi_{\mu\nu} = 0$, mit

$$\xi_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha.$$

Die Bewegungsgleichung bleibt also unverändert

$$\square(\bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu\nu}) = \square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.12)$$

Man kann ξ_μ nutzen, um vier weitere Bedingungen an $h_{\mu\nu}$ zu erzwingen. Da es sechs unabhängige Komponenten von $\bar{h}_{\mu\nu}$ gibt, die die Gleichung $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ erfüllen, kann man die Funktionen $\xi_{\mu\nu}$ abziehen, die von vier unabhängigen Funktionen ξ_μ abhängen, und dieselbe Gleichung $\square \xi_{\mu\nu} = 0$ erfüllen. Man kann also ξ^0 so wählen, so dass die Spur $\bar{h} = 0$ ist. So wird wegen Gleichung 2.7 $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Die drei anderen Funktionen $\xi^i(x)$ sind so zu wählen, so dass $h^{0i}(x) = 0$ ist.

Mit der Lorentz-Eichung 2.9 bei $\mu = 0$ und aufgrund von $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ bekommt man

$$\partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = 0,$$

da $h_{0i} = 0$ ist, erhält man

$$\partial^0 h_{00} = 0. \quad (2.13)$$

h_{00} ist damit zeitlich konstant. Dieser Term beschreibt also das newtonsche Potential der Quelle, die die GW erzeugt hat, weil er dem statischen Teil der Gravitationswechselwirkung entspricht. Der Teil, der die Gravitationswelle beschreibt, ist der zeitabhängige Teil. Das bedeutet für die Gravitationswelle und mit der Bedingung aus Gleichung 2.13, dass $h_{00} = 0$. Somit verschwinden die vier Komponenten von $h_{0\mu}$, also

$$h^{0\mu} = 0. \quad (2.14)$$

Die Lorentz-Eichung reduziert sich auf die räumlichen Komponenten h_{ij} , es ergibt sich

$$\partial^j h_{ij} = 0. \quad (2.15)$$

Mit der Bedingung $\bar{h} = 0$, erhält man für die Spur von $h_{\mu\nu}$

$$h^i_i = 0. \quad (2.16)$$

Die Bedingungen in den Gleichungen 2.14, 2.15, und 2.16 definieren die Transversal-Spurlose Eichung, die auch als TT-Eichung bekannt ist. Die Metrikstörung in dieser Eichung wird mit h_{ij}^{TT} bezeichnet.

Die Transversal-Spurlose Eichung funktioniert nicht innerhalb einer Quelle der Gravitationswellen, da dann $\square \bar{h}_{\mu\nu} \neq 0$ ist. Man kann in dem Fall die Lorentz-Eichung einführen und eine Transformation mit $\square \xi_\mu = 0$ durchführen, aber man kann keine weiteren Bedingungen festlegen, um zusätzliche Komponenten von $\bar{h}_{\mu\nu}$ verschwinden zu lassen, beim Subtrahieren einer Funktion, die die Gleichung 2.12 erfüllt.

2.1.10 Freiheitsgraden

Da $h_{\mu\nu}$ eine (4x4) symmetrische Matrix ist, hat sie 10 Freiheitsgrade. Durch die Einführung der Lorentz-Eichung 2.9 mit vier Eichbedingungen verringert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf sechs. Die Transversal-Spurlose Eichbedingungen 2.14, 2.15, 2.16 reduzieren die Anzahl der Freiheitsgrade weiter auf zwei. Für eine Welle, die in Richtung $\hat{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$ propagiert, liegen wegen der Gleichungen 2.14, 2.15, und 2.16 die Komponenten von h_{ij}^{TT} in einer Ebene, die senkrecht zu $\hat{n}$ steht. Für eine ebene Welle, die in z Richtung propagiert, und für h_{ij} symmetrisch und spurlos lässt sich h_{ij}^{TT} schreiben als

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix}_{ab} \cos[\omega(t - z/c)],$$

wobei $a, b = 1, 2$ Indizes in der transversal Ebene (x, y) sind, h_+ und $h_\times$ sind Amplituden der 'Plus' und 'Kreuz' Polarisationszustände der Welle.

2.1.11 Projektion auf die Transversal-Spurlose Eichung

Eine ebene Welle $h_{\mu\nu}$ mit dem Wellenvektor $\vec{k}$, die sich in Richtung $\hat{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ außerhalb der Quelle propagiert. Wenn sie bereits in der Lorentz-Eichung, aber noch nicht in der Transversal-Spurlosen Eichung ist, kann ihre Form in der Transversal-Spurlosen Eichung mithilfe des Lambda-Tensors $\Lambda_{ij,kl}$ gefunden werden. Der Lambda Tensor ist definiert als

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = & \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} \\ & + \frac{1}{2}n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2}n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2}n_i n_j n_k n_l. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Mit dem Tensor

$$P_{ij}(\hat{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j$$

lässt sich der Lambda Tensor kompakter ausdrücken

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}. \quad (2.18)$$

Der Tensor P_{ij} ist symmetrisch und transversal, er erfüllt $n^i P_{ij}(\hat{n}) = 0$, seine Spur beträgt $P_{ii} = 2$. Er ist ein Projektor, also im allgemeinen gilt $P_{ik}P_{kj} = P_{ij}$.

Der Lambda Operator ist symmetrisch unter dem Austausch der Indizes $(i, j) \leftrightarrow (k, l)$, und ist auch ein Projektor, wobei

$$\Lambda_{ij,kl}\Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn}. \quad (2.19)$$

Er hat die Eigenschaft

$$n^a \Lambda_{ij,kl} = 0 \quad ; \quad a = i, j, k, l.$$

Er ist also transversal für alle Indizes. Darüber hinaus ist er spurlos in Bezug auf die Indizes i, j und k, l ,

$$\Lambda_{ii,kl} = \Lambda_{ij,kk} = 0. \quad (2.20)$$

Somit ist für eine ebene Welle $h_{\mu\nu}$ in der Lorentz-Eichung die Gravitationswelle in der Transversal-Spurlosen Eichung durch die Komponenten h_{ij} gegeben

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl}. \quad (2.21)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist transversal und spurlos in den Indizes i, j . h_{ij}^{TT} genügt der Wellengleichung $\square h_{ij}^{\text{TT}} = 0$, da $h_{\mu\nu}$ vorausgesetzt eine Lösung der Wellengleichung 2.10 ist.

2.2 Energie der Gravitationswellen

In diesem Abschnitt wird die Energie der GW bestimmt, dazu wird eine sinnvolle Trennung der GW vom Hintergrund durchgeführt. Damit lässt sich der Energie-Impuls-Tensor der GW bestimmen. Anschließend kann eine Gleichung für den Energiefluss der GW hergeleitet werden.

2.2.1 Trennung der Gravitationswellen vom Hintergrund

Um den Energie-Impuls-Gehalt der Gravitationswellen zu bestimmen, muss man ihren Beitrag zur Krümmung der Raumzeit untersuchen. Um dies zu erreichen, kann man Gravitationswellen nicht mehr als Störungen auf der flachen Metrik $\eta_{\mu\nu}$ betrachten, wie man es im Abschnitt 2.1.3 definiert hat. Denn in diesem Fall kann keine Krümmung durch die Gravitationswellen in dieser Raumzeit entstehen. Es wird zugelassen, dass die Hintergrund-Raumzeit dynamisch ist, damit die Gravitationswellen als Störungen über einer gekrümmten dynamischen Raumzeit definiert werden können. Der Metriktensor dieser Raumzeit ist $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$, und der gesamte Metriktensor ist dann gegeben durch

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.22)$$

Die Aufteilung der Metrik in gekrümmten Hintergrund und Störungen ist nicht mehr so klar, wie in der Linearisierten Theorie, wo die Hintergrundmetrik immer die Minkowskimetrik $\eta_{\mu\nu}$ ist. Gravitationswellen können aber vom Hintergrund getrennt werden, wenn ihre typische Skala der räumlichen Variation $\tilde{\lambda}$, viel kleiner ist, als die Skala der räumlichen

Variation des Hintergrunds L_B , oder wenn sie mit wesentlich höheren Frequenzen f oszillieren im Vergleich zur maximalen Frequenz, die im Oszillationsspektrum des Hintergrunds f_B enthalten ist. Also die Bedingungen sind

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} \ll L_B, \quad (2.23)$$

oder

$$f_B \ll f. \quad (2.24)$$

Die Wellenlänge λ und Frequenz f einer Gravitationswelle, die einer Wellengleichung genügt, sind durch $\lambda = c/f$ verknüpft. Die Skalen des Hintergrunds L_B und f_B sind jedoch nicht miteinander verbunden, daher sind die Bedingungen in den Gleichungen 2.23 und 2.24 unabhängig voneinander, und es genügt, wenn eine davon erfüllt ist.

Die Zwischenlängenskala $\bar{l}$ und die Zwischenzeitskala $\bar{t}$ definiert man wie folgt

$$\tilde{\lambda} \ll \bar{l} \ll L_B, \quad \frac{1}{f} \ll \bar{t} \ll \frac{1}{f_B}.$$

Diese können verwendet werden, um räumliche bzw. zeitliche Mittelungen durchzuführen. Bei einer Mittelung über das räumliche Volumen mit der Seitenlänge $\bar{l}$, bleiben die Moden, die eine Wellenlänge der Größenordnung L_B haben, unverändert, da diese konstant über dieses Volumen sind. Die Moden einer Wellenlänge $\tilde{\lambda}$ mitteln sich zu Null, da sie im Vergleich sehr schnell oszillieren. Bei einer Mittelung über $\bar{t}$, wird über mehrere Perioden der Gravitationswelle gemittelt, da ihre Periode $1/f$ keiner als $\bar{t}$ ist. $\bar{t}$ ist dabei viel kleiner als die Zeitskala $1/f_B$ des Hintergrunds. $h_{\mu\nu}$ ist in diesem Fall eine hochfrequente Störung über einen quasi statischen Hintergrund.

2.2.2 Kurzwellenentwicklung

Um zu verstehen, wie die GW die Hintergrundraumzeit beeinflussen, und um ihren Energieinhalt zu bestimmen, entwickelt man den Ricci-Tensor in der Feldgleichung zum zweiten Ordnung der Metrikstörungen

$$\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) = R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots, \quad (2.25)$$

mit $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ die Spur des Energie-Impuls-Tensors. $\bar{R}_{\mu\nu}$ hängt von der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ ab. $R_{\mu\nu}^{(1)} \sim \partial^2 h$ ist linear in $h_{\mu\nu}$, und $R_{\mu\nu}^{(2)} \sim (\partial h)^2$ ist quadratisch in $h_{\mu\nu}$. Eine Mittelung beider Seiten über Zwischenlängenskala $\bar{l}$ oder Zwischenzeitskala $\bar{t}$ kann durchgeführt werden, dabei sind die Terme bis zur zweiten Ordnung in den metrischen Störungen. Es ergibt sich dann

$$\bar{R}_{\mu\nu} + \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \frac{8\pi G}{c^4} \left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right\rangle, \quad (2.26)$$

wobei $\langle \dots \rangle$ eine räumliche Mittelung über mehrere reduzierte Wellenlängen $\tilde{\lambda}$ kennzeichnet, wenn die Gleichung 2.23 gilt, oder eine zeitliche Mittelung über mehrere Perioden $1/f$ der

Gravitationswelle, wenn die Bedingung 2.24 gilt.

Der Term $\bar{R}_{\mu\nu} \sim \bar{g}_{\mu\nu}$ enthält nur tieffrequente Moden. Der Term $R_{\mu\nu}^{(1)}$ besteht ausschließlich aus Kurzwellentermen (hochfrequente Moden), und ergibt somit null bei der Mittelung. Der Term $R_{\mu\nu}^{(2)}$ besteht aus hohen und tiefen Frequenzen. Dies ist der Fall bei einem Term mit $\sim h_{\mu\nu} h_{\alpha\beta}$, eine hochfrequente Mode mit dem Wellenvektor $\vec{k}_1$ aus $h_{\mu\nu}$ kann mit einer anderen hochfrequenten Mode mit $\vec{k}_2 \simeq -\vec{k}_1$ aus $h_{\alpha\beta}$ kombiniert werden, wodurch eine tieffrequente Mode entstehen kann.

Ein effektiver tieffrequenter Energie-Impuls-Tensor $\bar{T}_{\mu\nu}$ kann definiert werden mit

$$\left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right\rangle = \bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{T},$$

wobei $\bar{T} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{T}_{\mu\nu}$ Spur dieses Tensors ist.

Somit kann die Gleichung 2.26 mit $\bar{T}_{\mu\nu}$ wie folgt geschrieben werden:

$$\bar{R}_{\mu\nu} + \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{T} \right). \quad (2.27)$$

Wenn man beide Seiten mit der inversen Metrik des Hintergrunds $\bar{g}^{\mu\nu}$ kontrahiert, erhält man

$$-\frac{8\pi G}{c^4} \bar{T} = \bar{R} + \langle R^{(2)} \rangle. \quad (2.28)$$

Es wurde dabei benutzt, dass

$$\bar{T} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{T}_{\mu\nu}, \quad \bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu}, \quad R^{(2)} = \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)},$$

und die Identität $\bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\mu\nu} = 4$. Die Eigenschaft $\bar{g}^{\mu\nu} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \langle \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$ gilt, da die Hintergrundmetrik $\bar{g}^{\mu\nu}$ per Definition eine tieffrequente Größe ist. Die Gleichung 2.28 kann wiederum in Gleichung 2.27 eingesetzt werden, und es ergibt sich

$$\frac{8\pi G}{c^4} \bar{T}_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} + \left[\left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} R^{(2)} \right\rangle \right]. \quad (2.29)$$

Die Größe $t_{\mu\nu}$ definiert man als

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} R^{(2)} \right\rangle, \quad (2.30)$$

wobei $R^{(2)}$ die Spur von $R_{\mu\nu}^{(2)}$ ist.

Man kann diese Definition von $t_{\mu\nu}$ in die eckige Klammern in Gleichung 2.29 einsetzen, dann erhält man

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} = \frac{8\pi G}{c^4} (\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}). \quad (2.31)$$

Diese ist als die Coarse-grained-Feldgleichung bekannt. Sie zeigt, dass die Gravitationswellen die Krümmung des Hintergrunds auf die gleiche Weise wie Materie beeinflussen. Der Energie-Impuls-Tensor der GW in zweiter Ordnung der Störung ist dann $t_{\mu\nu}$. Es ist somit nicht möglich, eine flache Metrik für den Hintergrund $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ im zweiten Ordnung anzunehmen.

2.2.3 Energie-Impuls-Tensor der GW

Um der Energie-Impuls-Tensor den GW $t_{\mu\nu}$ auszuwerten, ist $R_{\mu\nu}^{(2)}$ zu berechnen. Der Tensor $R_{\mu\nu}^{(1)}$ ergibt

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{D}^\alpha \bar{D}_\mu h_{\nu\alpha} + \bar{D}^\alpha \bar{D}_\nu h_{\mu\alpha} - \bar{D}^\alpha \bar{D}_\alpha h_{\mu\nu} - \bar{D}_\nu \bar{D}_\mu h),$$

wobei $\bar{D}_\mu$ die kovariante Ableitung im Bezug auf die Hintergrundmetrik ist. Die Definition der kovarianten Ableitung ist im Anhang A, Abschnitt A.1, Gleichung A.1 zu finden. In der zweiten Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{g}^{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} \bar{D}_\mu h_{\rho\alpha} \bar{D}_\nu h_{\sigma\beta} + (\bar{D}_\rho h_{\nu\alpha}) (\bar{D}_\sigma h_{\mu\beta} - \bar{D}_\beta h_{\mu\sigma}) \right. \\ & + h_{\rho\alpha} (\bar{D}_\nu \bar{D}_\mu h_{\sigma\beta} + \bar{D}_\beta \bar{D}_\sigma h_{\mu\nu} - \bar{D}_\beta \bar{D}_\nu h_{\mu\sigma} - \bar{D}_\beta \bar{D}_\mu h_{\nu\sigma}) \\ & \left. + (\frac{1}{2} \bar{D}_\alpha h_{\rho\sigma} - \bar{D}_\rho h_{\alpha\sigma}) (\bar{D}_\nu h_{\mu\beta} + \bar{D}_\mu h_{\nu\beta} - \bar{D}_\beta h_{\mu\nu}) \right]. \end{aligned}$$

In großer Entfernung von der Quelle kann man an die Hintergrund-Raumzeit als flache Raumzeit approximieren. In diesem Fall lässt sich der kovariante Ableitungsoperator $\bar{D}_\mu$ durch den partiellen Ableitungsoperator der flachen Metrik ∂_μ ersetzen. Es erfolgt für $R_{\mu\nu}^{(2)}$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta h_{\alpha\mu} - h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} \right. \\ & + h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} + \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\mu} \\ & + \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\nu h_{\alpha\mu} \\ & \left. + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\mu h_{\alpha\nu} \right]. \end{aligned}$$

Die Lorentz-Eichung in Gleichung 2.9 kann verwendet werden, um sechs Freiheitsgrade zu eliminieren, von denen nur zwei physikalisch relevant sind und in h_{ij}^{TT} enthalten sind, wie im Abschnitt 2.1.9 gezeigt wurde. Dann wird ξ_μ mit $\square \xi_\mu = 0$ so gewählt, was zur Bedingung $h = 0$ führt, und somit ist $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Die Lorentz-Eichung reduziert sich dann auf $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$.

In Gleichung 2.30 befindet sich $R_{\mu\nu}^{(2)}$ innerhalb der Mittelwertklammern. Mit partieller Integration lassen sich die Randterme verschwinden, benutzt man dazu die Lorentz-Eichung, $h = 0$ und $\square h_{\mu\nu} = 0$, So werden alle anderen Terme außer den zwei Ersten auf null gesetzt. Die beiden verbleibenden Terme ergeben durch partielle Integration den gleichen Term und werden voneinander subtrahiert. Es ergibt sich

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle.$$

Die Spur ergibt unter Verwendung derselben Methode und der gleichen Bedingungen

$$\langle R^{(2)} \rangle = 0.$$

Daher ergibt sich für $t_{\mu\nu}$ durch Einsetzen in die Gleichung 2.30

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle.$$

Es lässt sich zeigen, dass $t_{\mu\nu}$ unter der residualen Eichung in Gleichung 2.5 invariant bleibt. Es ergibt sich für die Variation

$$\begin{aligned}\delta t_{\mu\nu} &= \frac{c^4}{32\pi G} [\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu (\delta h^{\alpha\beta}) \rangle + \langle \partial_\mu (\delta h_{\alpha\beta}) \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle] \\ &= \frac{c^4}{32\pi G} [\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu (\partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha) \rangle + \langle \partial_\mu (\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha) \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle] \\ &= \frac{c^4}{16\pi G} [\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu \partial^\alpha \xi^\beta \rangle + \langle \partial_\mu \partial_\alpha \xi_\beta \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle].\end{aligned}$$

Durch partielle Integration und Anwendung der Lorentz-Eichung werden die Terme in der Mittelung auf Null gesetzt. $t_{\mu\nu}$ hängt nur von den physikalischen Freiheitsgraden in h_{ij}^{TT} ab. Es lässt sich schreiben

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{ij}^{\text{TT}} \partial_\nu h_{ij}^{\text{TT}} \rangle. \quad (2.32)$$

Die Null-Null-Komponente des Energie-Impuls-Tensors t^{00} liefert die Energiedichte der Gravitationswelle

$$t^{00} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \rangle,$$

wobei $\dot{h}$ die partielle Ableitung nach der Zeit $\dot{h} = \partial_t h = c \partial_0 h$ bezeichnet. Die linke Seite der Gleichung 2.31 ergibt unter kovarianter Ableitung aufgrund der Bianchi-Identität $\bar{D}^\mu (\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R}) = 0$, die Bianchi-Identität ist im Anhang A, Gleichung A.2 zu finden. Somit ergibt sich für die rechte Seite

$$\bar{D}^\mu (\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) = 0.$$

Für große Entfernungen von der Quelle nähert sich die Metrik der flachen Raumzeitmetrik an, und dann lässt sich $\bar{D}^\mu \rightarrow \partial^\mu$ ersetzen. Außerdem ist $\bar{T}_{\mu\nu} = 0$ außerhalb der Quelle. Es ergibt sich dann

$$\partial^\mu t_{\mu\nu} = 0 \quad (2.33)$$

die Kontinuitätsgleichung für den Energie-Impuls-Tensor der Gravitationswelle.

2.2.4 Energiefluss

Mit dem Energie-Impuls-Tensor der Gravitationswelle lässt sich der Energiefluss berechnen. Er ist im Allgemeinen die Energie der GW, die durch eine Einheitsfläche pro Zeiteinheit in großer Entfernung von der Quelle fließt. Die Kontinuitätsgleichung 2.33 lässt sich schreiben als

$$\int_V d^3x \partial_0 t^{00} = - \int_V d^3x \partial_i t^{i0}, \quad (2.34)$$

wobei V ein räumliches Volumen ist, das durch die Oberfläche S begrenzt und von der Quelle entfernt ist. Die Energie der GW innerhalb von V ist dann

$$E_V = \int_V d^3x t^{00}. \quad (2.35)$$

Gleichung 2.34 lässt sich dann schreiben als

$$\frac{1}{c} \frac{dE_V}{dt} = - \int_V d^3x \partial_i t^{0i},$$

sei $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor zur Oberfläche S mit dem Oberflächenelement dA dann lässt sich das Integral mit dem gaußschen Integralsatz schreiben zu

$$\frac{1}{c} \frac{dE_V}{dt} = - \int_S dA n_i t^{0i},$$

sei S dabei eine sphärische Fläche, mit dem Abstand r weit entfernt von der Quelle und dem Oberflächenelement dA , ihr Normaleinheitsvektor ist $\hat{n} = \hat{r}$. Somit ist die Gleichung dann

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int_S dA t^{0r},$$

wobei t^{0r} aus der Gleichung 2.32 entnommen werden kann

$$t^{0r} = \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \partial^0 h_{ij}^{\text{TT}} \frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{\text{TT}} \right\rangle.$$

Eine radial propagierende GW hat bei einem großen Abstand r die allgemeine Form

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, r) = \frac{1}{r} f_{ij}(t - r/c),$$

$f_{ij}(t - r/c)$ ist eine Funktion mit der retardierten Zeit $t_{\text{ret}} = t - r/c$. Die Ableitung dieser Funktion nach r ist dann

$$\frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{\text{TT}}(t, r) = -\frac{1}{r^2} f_{ij}(t - r/c) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f_{ij}(t - r/c).$$

Der erste Term ist von der Ordnung $O(1/r^2)$ und kann vernachlässigt werden, für den zweiten gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial r} f_{ij}(t - r/c) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f_{ij}(t - r/c),$$

damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{\text{TT}}(t, r) &= -\partial_0 h_{ij}^{\text{TT}}(t, r) + O(1/r^2) \\ &= +\partial^0 h_{ij}^{\text{TT}}(t, r) + O(1/r^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt $t^{0r} = t^{00}$ in großer Entfernung, die Energie in dem Volumen V ist dann

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int dA t^{00}.$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass E_V abnimmt. Die propagierte GW trägt also einen Energiefluss mit, der ist somit

$$\frac{dE}{dAdt} = +ct^{00} = \frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \rangle. \quad (2.36)$$

Es lässt sich auch mit $dA = r^2 d\Omega$ für den Energiefluss schreiben

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \int d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \rangle. \quad (2.37)$$

2.3 Generation von GW in linearisierte Theorie

Um die Entstehung der Gravitationswellen im Rahmen der Linearisierten Theorie zu verstehen und ihre Energie zu berechnen, ist eine Quelle am Ursprung des Ortsraums mit einem hinreichend schwachen Gravitationsfeld zu betrachten. Für eine solche Quelle kann die Hintergrundraumzeit in niedrigster Ordnung als flach angenommen werden, so dass die Dynamik der Quelle mit den Newtonschen Gesetzen berechnet werden kann. Die Rückwirkung der GW auf die Quelle wird vernachlässigt. Ein Beobachter mit einer großen Entfernung von der Quelle misst bei $\vec{x} = r\vec{n}$, die in Richtung $\vec{n}$ propagierten GW. Somit lässt sich bei solch einem System die im Abschnitt 2.1.3 besprochene Linearisierte Theorie anwenden.

2.3.1 Lösung der Bewegungsgleichung

Im Abschnitt 2.1.8, ist die Gleichung

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

die Bewegungsgleichung unter Lorentz-Eichung, diese lässt sich anhand der Greenschen Funktion lösen. Die Greensche Funktion $G(x - x')$ ist eine Lösung der Gleichung

$$\square_x G(x - x') = \delta^{(4)}(x - x'). \quad (2.38)$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung ist dann gegeben durch

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x'). \quad (2.39)$$

Die retardierte Greensche Funktion ist die Lösung der Gleichung 2.38 mit den gegebenen Randbedingungen, und hat die Form

$$G(x - x') = -\frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(x_{\text{ret}}^0 - x'^0),$$

wobei $x'^0 = ct'$, $x_{\text{ret}}^0 = ct_{\text{ret}}$, und die retardierte Zeit ist durch

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$$

definiert. Die Differenz zwischen der Beobachterzeit t und der retardierten Zeit t_{ret} ergibt die Zeit, die eine GW mit Lichtgeschwindigkeit benötigt, um die Distanz $|\vec{x} - \vec{x}'|$ von x' innerhalb der Quelle zum Ort x des Beobachters zurückzulegen.

Es ergibt sich damit für die Lösung in Gleichung 2.39

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = +\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(x_{\text{ret}}^0 - x'^0) T_{\mu\nu}(x').$$

Das Zeitintegral $\int dx'^0$ lässt sich mit der Delta-Funktion $\delta(x_{\text{ret}}^0 - x'^0)$ auswerten, und es ergibt sich

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}' \right). \quad (2.40)$$

2.3.2 Die Lösung in TT-Eichung und Ihre Entwicklung

Außerhalb der Quelle kann man die Lösung in Gleichung 2.40 mit Hilfe des Lambda-Operators 2.18 in TT-Eichung schreiben. Mit der Gleichung 2.21 und der Eigenschaft in Gleichung 2.20 gilt $h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl}$, und für die gesamte Lösung ergibt sich

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{kl} \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}' \right), \quad (2.41)$$

mit $\hat{n} = \hat{x}$ der Einheitsvektor in Richtung des Detektors. Die Komponenten $h_{0\mu}$ verschwinden in TT-Eichung nach der Bedingung in Gleichung 2.14. Die Komponenten $T_{0\mu}$ des Energie-Impuls-Tensors sind mit T_{kl} verknüpft, da $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ ist.

Wenn d der Radius der Quelle und $|\vec{x}| = r$ der Abstand zwischen Quelle und Beobachter ist, dann für große Abstände $r \gg d$ lässt sich der Ausdruck $|\vec{x} - \vec{x}'|$ entwickeln,

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = r - \vec{x}' \cdot \hat{n} + O\left(\frac{d^2}{r}\right). \quad (2.42)$$

Eine schematische Darstellung dieser Näherung ist in Abbildung 2.1 zu sehen.

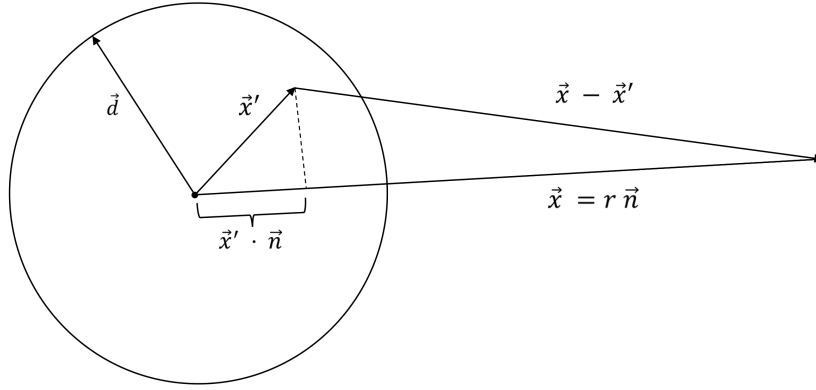


Abbildung 2.1: Eine schematische Darstellung der Näherung $|\vec{x} - \vec{x}'| = r - \vec{x}' \cdot \hat{n} + O\left(\frac{d^2}{r}\right)$. d ist dabei der Radius der Quelle, $\vec{x} - \vec{x}'$ stellt den Abstand zwischen einem Vektor $\vec{x}'$ innerhalb der Quelle und $\vec{x}$ dem Ort eines Beobachters, $\vec{n}$ ist der Normalvektor der propagierten GW.

Es ergibt sich für h_{ij}^{TT} in großen Abständen mit $r \rightarrow \infty$ für festes t , wenn man den ersten

Term mit der Ordnung $O(1/r) = (1/|\vec{x} - \vec{x}'|)$ behält und die Entwicklung in Gleichung 2.42 in Gleichung 2.41 einsetzt

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int d^3x' T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{n}}{c}, \vec{x}' \right) \quad (2.43)$$

plus die zu vernachlässigenden Terme der Ordnung $O(1/r^2)$.

2.3.3 Multipolentwicklung

Wenn die typische Geschwindigkeit innerhalb der Quelle viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit wäre, dann ist eine Multipolentwicklung durchführbar. Wenn die Bewegung innerhalb eines solchen Systems mit der Größe d die typische Frequenz ω_s hat, dann ist die typische Geschwindigkeit innerhalb der Quelle $v \sim \omega_s d$. Die Frequenz der generierten GW ist dann $\omega \sim \omega_s \sim v/d$, und die typische Wellenlänge ist somit

$$\tilde{\lambda} = \frac{c}{\omega} \sim \frac{c}{v} d.$$

Bei einem nichtrelativistischen System $v \ll c$ ist die Wellenlänge der GW viel größer als die Quelle $d \ll \tilde{\lambda}$, somit es ist nicht erforderlich, die genaue Dynamik der Quelle zu berechnen. Die Emission von GW kann durch das niedrigste Multipolmoment der Multipolentwicklung in den Ordnungen $v/c \sim \omega_s d/c$ beschrieben werden.

Die Fourier-Transformation von T_{kl} in Gleichung 2.43 ist

$$T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{n}}{c}, \vec{x}' \right) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{T}_{kl}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega(t-r/c + \vec{x}' \cdot \hat{n}/c) + i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \quad (2.44)$$

Der Energie-Impuls-Tensor ist $T_{kl} \neq 0$ innerhalb der Quelle, somit ist das Integral in Gleichung 2.43 auf $|\vec{x}'| \leq d$ beschränkt. Die Quelle $\tilde{T}_{kl}(\omega, \vec{k})$ hat im Frequenzraum einen Peak um den Frequenz ω_s mit $\omega_s d \ll c$. Der Hauptbeitrag von h_{ij}^{TT} hat Frequenzen ω , die die Bedingung

$$\frac{\omega}{c} \vec{x}' \cdot \hat{n} \lesssim \frac{\omega_s d}{c} \ll 1$$

erfüllen. Man kann somit die Exponentialfunktion in Gleichung 2.44 entwickeln

$$e^{-i\omega(t-r/c + \vec{x}' \cdot \hat{n}/c) + i\vec{k} \cdot \vec{x}'} = e^{-i\omega(t-r/c)} \cdot \left[1 - i\frac{\omega}{c} x'^i n^i + \frac{1}{2} \left(-i\frac{\omega}{c} \right)^2 x'^i x'^j n^i n^j + \dots \right] \quad (2.45)$$

Diese ist äquivalent zur Entwicklung

$$T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{n}}{c}, \vec{x}' \right) = T_{kl}(x'_{\text{ret}}) + \frac{x'^i n^i}{c} \partial_t T_{kl}(x'_{\text{ret}}) + \frac{1}{2c^2} x'^i x'^j n^i n^j \partial_t^2 T_{kl}(x'_{\text{ret}}) + \dots, \quad (2.46)$$

die Ableitungen werden an dem Punkt $x'_{\text{ret}} = (t - r/c, \vec{x}')$ ausgewertet. Man kann die Momente des Spannungstensors T^{ij} definieren als

$$\begin{aligned} S^{ij}(t) &= \int d^3x T^{ij}(t, \vec{x}), \\ S^{ij,k}(t) &= \int d^3x T^{ij}(t, \vec{x}) x^k, \\ S^{ij,kl}(t) &= \int d^3x T^{ij}(t, \vec{x}) x^k x^l, \end{aligned}$$

usw für alle Momente höherer Ordnung. Da der Energie-Impuls-Tensor symmetrisch ist $T^{ij} = T^{ji}$, dann sind die Momente in den ersten zwei Indizes auch symmetrisch $S^{ij} = S^{ji}$, $S^{ij,k} = S^{ji,k}$, auch in den Zweiten $S^{ij,kl} = S^{ij,lk}$, da x^k mit x^l tauschbar ist. Das Einsetzen dieser Momente in Gleichung 2.43 mit der Entwicklung in Gleichung 2.46 ergibt

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \cdot \left[S^{kl} + \frac{1}{c} n_m \dot{S}^{kl,m} + \frac{1}{2c^2} n_m n_p \ddot{S}^{kl,mp} + \dots \right]_{\text{ret}}, \quad (2.47)$$

wobei die Notation $\partial_t S = \dot{S}$ angewendet wurde, und ret weist darauf, dass die Ableitungen an $t - r/c$ die retardierte Zeit ausgewertet werden. Jede Ableitung im Exponenten in Gleichung 2.45 und entsprechend in Gleichung 2.46 ergibt einen Term der Ordnung $\omega_s d/c \sim v/c$. Der zweite Term ist daher von der Ordnung $\sim v/c$ und der dritte von der Ordnung $\sim v^2/c^2$ usw. Die Terme in Gleichung 2.47 sind damit Korrekturen derart, dass $\dot{S}^{kl,m}$ eine Korrektur der Ordnung $O(v/c)$ zu S^{kl} , und $\ddot{S}^{kl,mp}$ ist eine Korrektur der Ordnung $O(v^2/c^2)$ zum vorherigen Term $\dot{S}^{kl,m}$.

Um die physikalische Bedeutung der Terme in Gleichung 2.47 klarzumachen, kann man die Momente von T^{ij} in Momente der Energiedichte T^{00} und der Impulsdichte T^{0i} ausdrücken. In Linearisierter Theorie bei der niedrigsten Ordnung der Multipolentwicklung in v/c entspricht T^{00}/c^2 der Massendichte. Die Momente von T^{00} definiert man als

$$Mc^2 = \int d^3x T^{00}(t, \vec{x}), \quad M^i c^2 = \int d^3x T^{00}(t, \vec{x}) x^i, \quad M^{ij} c^2 = \int d^3x T^{00}(t, \vec{x}) x^i x^j, \quad \dots, \quad (2.48)$$

und die Momente der Impulsdichte T^{0i} sind

$$P^i c = \int d^3x T^{0i}(t, \vec{x}), \quad P^{i,j} c = \int d^3x T^{0i}(t, \vec{x}) x^j, \quad P^{i,jk} c = \int d^3x T^{0i}(t, \vec{x}) x^j x^k, \quad \dots. \quad (2.49)$$

Diese Momente erfüllen verschiedene Identitäten, eine davon ist,

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{M}^{ij}. \quad (2.50)$$

Die Herleitung dieser Identität ist im Anhang A, Abschnitt A.4 zu finden.

2.3.4 Quadrupolformel

Anhand der Identität in Gleichung 2.50 kann man S^{kl} in dem Term niedrigster Ordnung in Gleichung 2.47, in $\ddot{M}^{kl}$ umschreiben. Man erhält somit

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \ddot{M}^{kl}(t - r/c). \quad (2.51)$$

Man kann sehen, dass es sich um Massenquadrupol handelt, also für GW sind keine Monopole oder Dipole vorhanden. Dies ist der Fall, da ein Monopolterm von M abhängig wäre, und ein Dipolterm von P^i , das Massendipolmoment M^i verschwindet mit einer Verschiebung des Koordinatensystems. Die Momente werden in h_{ij}^{TT} nach der Zeit abgeleitet, da GW nicht von einer statischen Quelle generiert werden können. In Linearisierter Theorie

sind M und P^i erhaltene Größen, und somit verschwinden ihre Beiträge.

Um die abgestrahlte Leistung zu berechnen, setzt man die Gleichung 2.51 in die gefundene Gleichung 2.37 für den Energiefluss. Dabei ist die Eigenschaft des Lambdatensors in Gleichung 2.19 zu verwenden. Man erhält damit

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{r^2 c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \rangle \\ &= \frac{G}{8\pi c^5} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \langle \ddot{M}_{ij} \ddot{M}_{kl} \rangle_{t-r/c}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Die Mittelung ist eine zeitliche Mittelung über mehrere charakteristische Perioden der GW, und $\ddot{M}_{ij}$ wird dabei mit retardierter Zeit ausgewertet. Die Winkelintegration kann mit der Definition des Lambda-Tensors in Gleichung 2.17 und den Identitäten

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (2.53)$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j n_k n_l = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.54)$$

berechnet werden, wobei die Abhängigkeit von $\hat{n}$ nur im Lambda-Tensor gegeben ist. Die allgemeine Form der Identitäten in den Gleichungen 2.53 und 2.54 ist im Anhang A, Abschnitt A.5, Gleichung A.15 zu finden. Es ergibt sich somit für die Integration des Lambda-Tensors

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \frac{2\pi}{15} (11\delta_{ik} \delta_{jl} - 4\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Die Rechnung dazu ist im Anhang A, Abschnitt A.5 zu finden. Die gesamte abgestrahlte Leistung ist somit in Quadrupolnäherung

$$P_{\text{quad}} = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{M}_{ij} \ddot{M}_{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{kk})^2 \right\rangle_{t-r/c}. \quad (2.55)$$

Dies ist die bekannte von Einstein hergeleitete Quadrupolformel

Hulse-Taylor-Pulsar

Das PSR B1913+16 auch als Hulse-Taylor-Doppelpulsar bekannt, besteht aus einem Pulsar und seinem Begleiter. Die Umlaufzeit P_b des Binärpulsars beträgt weniger als 8 Stunden (siehe Tabelle 3.1), also ist die Umlaufgeschwindigkeit der Ordnung $v \sim 10^{-3}c$, das System kann also benutzt werden, um die Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu überprüfen. Es wurde festgestellt, dass der Abstand zwischen den beiden Sternen abnimmt und dies somit zur Verkürzung der Umlaufdauer führt, aufgrund der Drehimpulserhaltung. Das System soll nach der Allgemeinen Relativitätstheorie Gravitationswellen abstrahlen, welche eine Verschiebung der Massendichte verursacht, wie im Abschnitt 2.2 besprochen wurde, und damit verringert sich die Umlaufdauer.

Die Energie der GW lässt sich berechnen, wie im Abschnitt 2.3 besprochen wurde. Damit und anhand der keplerschen Gesetzen kann man die zeitliche Ableitung der Umlaufzeit $\dot{P}_b$ in Linearisierter Theorie bestimmen und die Ergebnisse mit dem Experiment vergleichen. Da das System weit entfernt von der Erde liegt, gilt die Näherung bei großen Abständen $r \gg d$, die bei Herleitung der Quadrupolformel im Abschnitt 2.3.2 gemacht wurde. Da es sich um ein System mit $v \sim 10^{-3}c$ handelt, kann man die Entwicklung im Abschnitt 2.3.3 anwenden. Außerdem kann man das System mit den keplerschen Gesetzen beschreiben, wie im Abschnitt 2.1.8 bei der Diskussion der Gleichung 2.10 besprochen wurde.

3.1 Elliptische Umlaufbahnen

Der Pulsar und sein Begleiter befinden sich auf einer elliptischen keplerschen Umlaufbahn. Da es sich um zwei kompakte Sterne handelt, werden diese in der Rechnung als punktförmig angenommen. m_p ist die Masse des Pulsars, der sich am Ort $\vec{r}_p$ befindet, m_c ist die Masse des Begleiters, mit dem Ort $\vec{r}_c$. $m = m_p + m_c$ ist die gesamte Masse. Man kann mit der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_p m_c}{m_p + m_c}$ das System auf ein Einkörperproblem reduzieren, mit dem Koordinatenursprung am Ort des Schwerpunkts. Man hat in diesen Koordinaten ein Teilchen mit der Masse μ , das die Beschleunigung

$$\vec{\ddot{r}} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r} \quad (3.1)$$

erfährt, wobei $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_c$ die relative Koordinate ist.

Der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ ist definiert als das Kreuzprodukt aus dem Ortsvektor $\vec{r}$ und dem Impuls $\vec{p} = \mu\vec{v}$, also ist $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu(\vec{r} \times \vec{v})$. Für die Bewegung um den Schwerpunkt unter dem Einfluss der Gravitation ist der Drehimpuls konstant $\frac{d}{dt}\vec{L} = 0$, dies bedeutet, dass die Umlaufbahn in einer Ebene liegt.

In einem ebenen Polarkoordinatensystem ist

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix},$$

ψ ist dabei die Winkelposition entlang der Umlaufbahn. Die Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ ist in Polarkoordinaten

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \psi - r\dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{r} \sin \psi + r\dot{\psi} \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich für das Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{v} &= r\dot{r} \cos \psi \sin \psi + r^2\dot{\psi} \cos^2 \psi - r\dot{r} \cos \psi \sin \psi + r^2\dot{\psi} \sin^2 \psi \\ &= r^2\dot{\psi}, \end{aligned}$$

dabei hat man den Satz des Trigonometrischen Pythagoras benutzt (siehe Anhang A, Gleichung A.3). Der Betrag vom Drehimpuls L ist somit

$$L = \mu r^2 \dot{\psi}. \quad (3.2)$$

Die Energie ergibt sich als Summe aus der kinetischen und potentiellen Energie

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{G\mu m}{r},$$

mit $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2$ in Polarkoordinaten, es ergibt sich

$$E = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2) - \frac{G\mu m}{r},$$

mit dem Drehimpuls in Gleichung 3.2 kann man die Energie weiterhin schreiben als

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G\mu m}{r}. \quad (3.3)$$

Es lässt sich nach $\dot{r}$ umformulieren zu

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}E + \frac{2Gm}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}.$$

Mit der Gleichung 3.2 ergibt sich für $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = \frac{L}{\mu r^2}.$$

Dann lässt sich $\frac{d\psi}{dr}$ finden mit

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{\dot{\psi}}{\dot{r}} = \frac{\frac{L}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}E + \frac{2Gm}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}},$$

formt man um, erhält man

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\frac{L}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}E + \frac{2Gm}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}} \cdot dr \\ d\psi &= \frac{\frac{L}{\mu r^2}}{\sqrt{\underbrace{\frac{2}{m}E + \frac{G^2 \mu^2 m^2}{L^2}}_{=\beta^2} - \underbrace{\left(\frac{G\mu m}{L} - \frac{L}{\mu r}\right)^2}_{=u^2}}} \cdot dr \\ d\psi &= \frac{\frac{L}{\mu r^2}}{\sqrt{\beta^2 - u^2}} \cdot dr, \end{aligned}$$

β ist also eine Konstante und u eine neue Variable, integriert man beide Seiten, erhält man

$$\int_{\psi_0}^{\psi} d\psi' = \int_{r_0}^r \frac{\frac{L}{\mu r'^2}}{\sqrt{\beta^2 - u^2}} \cdot dr'.$$

Das Integral nach r' lässt sich mit der Substitution $u = \left(\frac{G\mu m}{L} - \frac{L}{\mu r}\right)$ lösen, und man erhält damit

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{L}{\mu r^2} \\ dr &= du \cdot \frac{\mu r^2}{L}, \end{aligned}$$

setzt man dr' in das Integral ein, erhält man

$$\psi - \psi_0 = \int_{u_0}^u \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - u^2}} \cdot du'. \quad (3.4)$$

Die Lösung dieses Integrals ist dabei

$$\arcsin \frac{u}{\beta} = \int \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - u^2}} \cdot du',$$

also für die gesamte Gleichung

$$\begin{aligned} \psi - \psi_0 &= \arcsin \frac{u}{\beta} - \arcsin \frac{u_0}{\beta} \\ \sin(\psi + c) &= \frac{u}{\beta}, \end{aligned}$$

mit $c = -\psi_0 + \arcsin \frac{u_0}{\beta}$ eine Konstante. Mit dem Additionstheorem für Sinus (siehe Anhang A, Gleichung A.6) kann man schreiben

$$\begin{aligned} \sin(\psi) \cos(c) + \sin(c) \cos(\psi) &= \frac{u}{\beta} \\ \sin(\psi) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\psi) &= \frac{u}{\beta} \\ 0 + \cos(\psi) &= \frac{u}{\beta}, \end{aligned}$$

c wurde als $c = \frac{\pi}{2}$ gewählt. wenn man nach r auflöst, erhält man

$$\beta \cdot \cos(\psi) = \frac{G\mu m}{L} - \frac{L}{\mu r}$$

$$r = \frac{\frac{L^2}{G\mu^2 m}}{1 - \frac{L}{G\mu m} \beta \cos(\psi)}.$$

Man kann den Halbparameter R und die Exzentrizität e definieren

$$R := \frac{L^2}{G\mu^2 m}, \quad (3.5)$$

$$e := \frac{L}{G\mu m} \beta = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 m^2 \mu^3}}. \quad (3.6)$$

Die Größe R wird auch als Semilatus rectum bezeichnet. Der gesamte Latus rectum ist die Länge der Sehne, die von einem Brennpunkt senkrecht auf die Brennnachse gezogen wird. Die Exzentrizität e definiert den Abstand vom Mittelpunkt zu den Brennpunkten der Ellipse. Man erhält für r den Ausdruck

$$r = \frac{R}{1 - e \cos(\psi)}. \quad (3.7)$$

Diese ist die Formel eines Kegelschnitts, in diesem Fall eine Ellipse, mit den Parametern R und e . Die zwei Halbachsen der Ellipse sind gegeben durch

$$a = \frac{R}{1 - e^2}, \quad (3.8)$$

ist die große Halbachse a , sie ist die Hälfte der Länge des größten Durchmessers einer Ellipse, der auch als Hauptachse bezeichnet wird, und

$$b = \frac{R}{(1 - e^2)^{1/2}}, \quad (3.9)$$

ist die kleine Halbachse b , sie ist die Hälfte der Länge des kürzesten Durchmessers einer Ellipse, der auch als Nebenachse bezeichnet wird.

Mit dem Ausdruck für e in Gleichung 3.6 lässt sich a auch schreiben als

$$a = \frac{Gm\mu}{2|E|}. \quad (3.10)$$

a hat keine Abhängigkeit von L , also haben Umlaufbahnen mit dem gleichen Wert von a die gleiche Energie.

Mit Gleichung 3.8 kann man Gleichung 3.7 in die Form

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \psi} \quad (3.11)$$

bringen. Die zeitliche Ableitung von ψ lässt sich mit den Gleichungen 3.2 und 3.5 schreiben als

$$\dot{\psi} = \frac{(GmR)^{1/2}}{r^2}. \quad (3.12)$$

Mit den Gleichungen 3.11 und 3.8 ergibt sich folgender Ausdruck für $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = \left(\frac{Gm}{a^3} \right)^{1/2} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e \cos \psi)^2. \quad (3.13)$$

Die Umlaufperiode P_b ist

$$P_b = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (3.14)$$

mit ω_0 die Kreisfrequenz, die in Abhängigkeit von der großen Halbachse a laut des dritten keplerschen Gesetzes gegeben werden kann

$$\omega_0^2 = \frac{Gm}{a^3}. \quad (3.15)$$

3.2 Abgestrahlte Energie in Form von Gravitationswellen

Das Doppelsternsystem sendet Gravitationswellen aus, was dazu führt, dass die Umlaufperiode im Laufe der Zeit aufgrund von Energieverlust abnimmt. Um den Energieverlust zu berechnen, kann man die Quadrupolformel in Gleichung 2.55 anwenden. Dazu ist die dritte zeitliche Ableitung des zweiten Massenmoments M^{ij} , das in Gleichung 2.48 definiert wurde, zu berechnen. Für ein isoliertes System mit Koordinatenursprung am Ort des Schwerpunkts ist die Energiedichte für ein Teilchen der Masse μ und Koordinate $r_0^i(t)$ gegeben durch,

$$T^{00}(t, \vec{r}) = \mu c^2 \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0(t)),$$

wobei $\vec{r}_0(t)$ die relative Koordinate ist. Das zweite Massenmoment ist also dann

$$M^{ij}(t) = \mu r_0^i(t) r_0^j(t).$$

In Polarkoordinaten mit einem Bezugssystem, in dem die Umlaufbahn in der (x, y) Ebene liegt, ist $M^{ij}(t)$ durch die (2x2) Matrix gegeben

$$M_{ab} = \mu r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi \end{pmatrix}_{ab}, \quad (3.16)$$

mit den Indizes $a, b = 1, 2$ in der (x, y) Ebene. Die Zeitabhängigkeit ist in $r(t)$ und $\psi(t)$ enthalten, um die dritte Ableitung zu berechnen, kann man $r(t)$ mit Hilfe der Gleichung 3.11 umschreiben. Dann ist die zeitliche Abhängigkeit bei M_{ab} in $\psi(t)$. Es ergeben sich damit

$$\begin{aligned} M_{11} &= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\cos^2 \psi}{(1 + e \cos \psi)^2}, \\ M_{12} &= M_{21} = \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\sin \psi \cos \psi}{(1 + e \cos \psi)^2}, \\ M_{22} &= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\sin^2 \psi}{(1 + e \cos \psi)^2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Ableitungen können berechnet werden. Die zeitliche Ableitung von ψ ist durch Gleichung 3.13 gegeben. Mit der Umbenennung der Konstanten als

$$D := \left(\frac{Gm}{a^3} \right)^{1/2} (1 - e^2)^{-3/2},$$

ergibt sich

$$\dot{\psi} = D(1 + e \cos \psi)^2.$$

Man kann die Vorfaktoren in Gleichungen 3.17 auch wie folgt schreiben,

$$S := \mu a^2 (1 - e^2)^2.$$

Für M_{11} sind die Ableitungen

$$M_{11} = S \frac{\cos^2 \psi}{(1 + e \cos \psi)^2}, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{11} &= S \dot{\psi} \frac{2(-\sin \psi) \cos \psi \cdot (1 + e \cos \psi)^2 - 2 \cos^2 \psi (-e \sin \psi)(1 + e \cos \psi)}{(1 + e \cos \psi)^4} \\ &= 2SD \left[-\sin \psi \cos \psi + \frac{e \cos^2 \psi \sin \psi}{(1 + e \cos \psi)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{11} &= 2SD \dot{\psi} \left[\sin^2 \psi - \cos^2 \psi + \frac{e(1 + e \cos \psi) [-2 \cos \psi \sin^2 \psi + \cos^3 \psi] + e^2 \cos^2 \psi \sin^2 \psi}{(1 + e \cos \psi)^2} \right] \\ &= 2SD^2 \left[-(1 + e \cos \psi)^2 \cos 2\psi + e(1 + e \cos \psi) (\cos^3 \psi - 2 \cos \psi \sin^2 \psi) + e^2 \cos^2 \psi \sin^2 \psi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{11} &= 2SD^2 \dot{\psi} \left[2 \sin 2\psi (1 + e \cos \psi)^2 + 2e \sin \psi (1 + e \cos \psi) \cos 2\psi - e^2 \sin \psi [\cos^3 \psi - 2 \cos \psi \sin^2 \psi] \right. \\ &\quad \left. + e(1 + e \cos \psi) [-3 \cos^2 \psi \sin \psi + 2 \sin^3 \psi - 4 \cos^2 \psi \sin \psi] + e^2 (2 \cos^3 \psi \sin \psi - 2 \cos \psi \sin^3 \psi) \right] \\ &= 2SD^2 \dot{\psi} \left[2 \sin 2\psi + e \cdot \underbrace{(4 \sin 2\psi \cos \psi + 2 \sin \psi \cos 2\psi - 7 \cos^2 \psi \sin \psi + 2 \sin^3 \psi)}_A \right. \\ &\quad \left. + e^2 \cdot \underbrace{(2 \sin 2\psi \cos^2 \psi + 2 \sin \psi \cos \psi \cos 2\psi - \sin \psi \cos^3 \psi + 2 \cos \psi \sin^3 \psi - 5 \cos^3 \psi \sin \psi)}_B \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \cos^2 \psi \sin \psi + 2 \sin \psi \cos^2 \psi - 2 \sin^3 \psi + 2 \sin^3 \psi \\ &= 3 \cos^2 \psi \sin \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 4 \sin \psi \cos^3 \psi + 2 \sin \psi \cos^3 \psi - 2 \sin \psi^3 \cos \psi + 2 \cos \psi \sin^3 \psi - 6 \cos^3 \psi \sin \psi \\ &= 0 \end{aligned}$$

es ergibt sich also

$$\ddot{M}_{11} = 2SD^2 \dot{\psi} [2 \sin 2\psi + 3e \sin \psi \cos^2 \psi]. \quad (3.19)$$

Für M_{22} sind die Ableitungen

$$M_{22} = S \frac{\sin^2 \psi}{(1 + e \cos \psi)^2}, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{22} &= S \dot{\psi} \frac{2 \sin \psi \cos \psi (1 + e \cos \psi)^2 + \sin^3 \psi \cdot 2e(1 + e \cos \psi)}{(1 + e \cos \psi)^4} \\ &= 2SD \left[\sin \psi \cos \psi + e \frac{\sin^3 \psi}{(1 + e \cos \psi)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{22} &= 2SD^2 \left[(1 + e \cos \psi)^2 (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) + e(1 + e \cos \psi)^2 \frac{3 \sin^2 \psi \cos \psi (1 + e \cos \psi) + e \sin^4 \psi}{(1 + e \cos \psi)^2} \right] \\ &= 2SD^2 \left[(1 + e \cos \psi)^2 \cos 2\psi + 3e \sin^2 \psi \cos \psi (1 + e \cos \psi) + e^2 \sin^4 \psi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{22} &= 2SD^2 \dot{\psi} \left[-2 \sin 2\psi (1 + e \cos \psi)^2 - 2e \cos 2\psi \sin \psi (1 + e \cos \psi) + 6e \cos^2 \psi \sin \psi - 3e \sin^3 \psi \right. \\ &\quad \left. + 6e^2 \sin \psi \cos^3 \psi - 2e^2 \sin^3 \psi \cos \psi \right] \\ &= 2SD^2 \dot{\psi} \left[-2 \sin 2\psi - \underbrace{4e \cos \psi \sin 2\psi - 2e \cos 2\psi \sin \psi + 6e \cos^2 \psi \sin \psi - 3e \sin^3 \psi}_A \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{2e^2 \sin 2\psi \cos^2 \psi - 2e^2 \cos 2\psi \sin \psi \cos \psi + 6e^2 \sin \psi \cos^3 \psi - 2e^2 \sin^3 \psi \cos \psi}_B \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= -4e \sin \psi \cos^2 \psi - e \sin^3 \psi = -e \sin \psi (\sin^2 \psi + 4 \cos^2 \psi) \\ &= -e \sin \psi (1 + 3 \cos^2 \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -4e^2 \sin \psi \cos^3 \psi - 2e^2 \sin \psi \cos^3 \psi + 2e^2 \sin^3 \psi \cos \psi + 6e^2 \sin \psi \cos^3 \psi - 2e^2 \sin^3 \psi \cos \psi \\ &= 0 \end{aligned}$$

es ergibt sich also

$$\ddot{M}_{22} = 2SD^2 \dot{\psi} [-2 \sin 2\psi - e \sin \psi (1 + 3 \cos^2 \psi)]. \quad (3.21)$$

Für M_{12} sind die Ableitungen

$$M_{12} = S \frac{\sin \psi \cos \psi}{(1 + e \cos \psi)^2}, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_{12} &= S\dot{\psi} \frac{(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi)(1 + e \cos \psi)^2 + 2e \sin^2 \psi \cos \psi(1 + e \cos \psi)}{(1 + e \cos \psi)^4} \\
 &= SD \left[\cos 2\psi + 2e \frac{\sin^2 \psi \cos \psi}{(1 + e \cos \psi)} \right] \\
 \ddot{M}_{12} &= SD\dot{\psi} \left[-2 \sin 2\psi + 2e \frac{(2 \sin \psi \cos^2 \psi - \sin^3 \psi)(1 + e \cos \psi) + \sin^3 \psi \cos \psi \cdot e}{(1 + e \cos \psi)^2} \right] \\
 &= SD^2 \left[-2 \sin 2\psi - 4e \sin 2\psi \cos \psi - 2e^2 \sin 2\psi \cos^2 \psi + 4e \sin \psi \cos^2 \psi - 2e \sin^3 \psi \right. \\
 &\quad \left. + 4e^2 \sin \psi \cos^3 \psi - 2e^2 \sin^3 \psi \cos \psi + 2e^2 \sin^3 \psi \cos \psi \right] \\
 \ddot{M}_{12} &= SD^2\dot{\psi} \left[+2 \sin 2\psi \cdot 2e \sin \psi(1 + e \cos \psi) - 4 \cos 2\psi(1 + e \cos \psi)^2 - 2e \cos \psi + 6e \cos^3 \psi \right. \\
 &\quad \left. - 12e \sin^2 \psi \cos \psi + 4e^2 \cos^4 \psi - 12e^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi \right] \\
 &= SD^2\dot{\psi} \left[-4 \cos 2\psi + e \cdot \underbrace{(4 \sin 2\psi \sin \psi - 8 \cos 2\psi \cos \psi - 2 \cos \psi + 6 \cos^3 \psi - 12 \sin^2 \psi \cos \psi)}_A \right. \\
 &\quad \left. + e^2 \cdot \underbrace{(-4 \cos 2\psi \cos^2 \psi + 4 \sin 2\psi \sin \psi \cos \psi + 4 \cos^4 \psi - 12 \sin^2 \psi \cos^2 \psi)}_B \right] \\
 A &= 8 \sin^2 \psi \cos \psi - 8 \cos^3 \psi + 8 \sin^2 \psi \cos \psi - 2 \cos \psi + 6 \cos^3 \psi - 12 \sin^2 \psi \cos \psi \\
 &= 4 \sin^2 \psi \cos \psi - 2 \cos^3 \psi - 2 \cos \psi \\
 &= 2 \cos \psi (1 - 3 \cos^2 \psi) \\
 B &= 8 \sin^2 \psi \cos^2 \psi - 4 \cos^4 \psi + 4 \cos^2 \psi \sin^2 \psi + 4 \cos^4 \psi - 12 \sin^2 \psi \cos^2 \psi \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

es ergibt sich also

$$\ddot{M}_{12} = 2SD^2\dot{\psi} [-2 \cos 2\psi + e \cos \psi (1 - 3 \cos^2 \psi)]. \quad (3.23)$$

Mit

$$\begin{aligned}
 2SD^2\dot{\psi} &= 2 \cdot \mu a^2 (1 - e^2)^2 \cdot \left(\frac{Gm}{a^3} \right) (1 - e^2)^{-3} \cdot \left(\frac{Gm}{a^3} \right)^{1/2} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e \cos \psi)^2 \\
 &= \left(\frac{4G^3 \mu^2 m^3}{a^5 (1 - e^2)^5} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + e \cos \psi)^2,
 \end{aligned}$$

definiert man

$$\beta \equiv \left(\frac{4G^3 \mu^2 m^3}{a^5 (1 - e^2)^5} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Man erhält also für die dritte Ableitung von M_{ab} mit den Gleichungen 3.19, 3.21, und 3.23

die Terme

$$\begin{aligned}\ddot{M}_{11} &= \beta(1 + e \cos \psi)^2 [2 \sin 2\psi + 3e \sin \psi \cos^2 \psi], \\ \ddot{M}_{22} &= \beta(1 + e \cos \psi)^2 [-2 \sin 2\psi - e \sin \psi (1 + 3 \cos^2 \psi)], \\ \ddot{M}_{12} &= \beta(1 + e \cos \psi)^2 [-2 \cos 2\psi + e \cos \psi (1 - 3 \cos^2 \psi)].\end{aligned}\tag{3.24}$$

Die Quadrupolformel in Gleichung 2.55 lässt sich ausschreiben als

$$\begin{aligned}P(\psi) &= \frac{G}{5c^5} \left[\ddot{M}_{11}^2 + \ddot{M}_{22}^2 + 2\ddot{M}_{12}^2 - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{11} + \ddot{M}_{22})^2 \right] \\ &= \frac{2G}{15c^5} \left[\ddot{M}_{11}^2 + \ddot{M}_{22}^2 + 3\ddot{M}_{12}^2 - \ddot{M}_{11}\ddot{M}_{22} \right],\end{aligned}$$

Einsetzen der einzelnen Ausdrücke für die dritte Ableitung von Gleichungen 3.24 ergibt sich für die abgestrahlte Leistung

$$\begin{aligned}P(\psi) &= \frac{2G}{15c^5} \cdot \beta^2(1 + e \cos \psi)^4 \left[(2 \sin 2\psi + 3e \sin \psi \cos^2 \psi)^2 + (-2 \sin 2\psi - e \sin \psi (1 + 3 \cos^2 \psi))^2 \right. \\ &\quad + 3(-2 \cos 2\psi + e \cos \psi (1 - 3 \cos^2 \psi))^2 \\ &\quad \left. - (2 \sin 2\psi + 3e \sin \psi \cos^2 \psi)(-2 \sin 2\psi - e \sin \psi (1 + 3 \cos^2 \psi)) \right] \\ &= \frac{2G}{15c^5} \cdot \beta^2(1 + e \cos \psi)^4 \left[4 \sin^2 2\psi + 4 \sin^2 2\psi + 12 \cos^2 2\psi + 4 \sin^2 2\psi \right. \\ &\quad + e \cdot (12 \sin 2\psi \sin \psi \cos^2 \psi + 4 \sin 2\psi \sin \psi (1 + 3 \cos^2 \psi) - 12 \cos 2\psi \cos \psi (1 - 3 \cos^2 \psi) \\ &\quad \left. + 2 \sin 2\psi \sin \psi (1 + 3 \cos^2 \psi) + 6 \sin 2\psi \sin \psi \cos^2 \psi) \right. \\ &\quad + e^2 \cdot (9 \sin^2 \psi \cos^4 \psi + \sin^2 \psi (1 + 3 \cos^2 \psi)^2 + 3 \cos^2 \psi (1 - 3 \cos^2 \psi)^2 \\ &\quad \left. + 3 \sin^2 \psi \cos^2 \psi (1 + 3 \cos^2 \psi)) \right] \\ &= \frac{2G}{15c^5} \cdot \beta^2(1 + e \cos \psi)^4 \left[12 \sin^2 2\psi + 12 \cos^2 2\psi \right. \\ &\quad + e \cdot \underbrace{(36 \sin 2\psi \sin \psi \cos^2 \psi + 6 \sin 2\psi \sin \psi - 12 \cos 2\psi \cos \psi + 36 \cos 2\psi \cos^3 \psi)}_A \\ &\quad \left. + e^2 \cdot \underbrace{(27 \sin^2 \psi \cos^4 \psi + \sin^2 \psi + 9 \sin^2 \psi \cos^2 \psi + 3 \cos^2 \psi - 18 \cos^4 \psi + 27 \cos^6 \psi)}_B \right] \\ A &= 36 \cdot 2 \cdot \sin^2 \psi \cos^3 \psi + 12 \cdot \sin^2 \psi \cos \psi - 12 \cos^3 \psi + 12 \sin^2 \psi \cos \psi + 36 \cos^5 \psi - 36 \sin^2 \psi \cos^3 \psi \\ &= 24 \cos \psi \\ B &= \sin^2 \psi + 27 \cos^4 \psi - 27 \cos^6 \psi + 9 \cos^2 \psi - 9 \cos^4 \psi + 3 \cos^2 \psi - 18 \cos^4 \psi + 27 \cos^6 \psi \\ &= \sin^2 \psi + 12 \cos^2 \psi\end{aligned}$$

es ergibt sich also insgesamt

$$\begin{aligned} P(\psi) &= \frac{2G}{15c^5} \cdot \beta^2 (1 + e \cos \psi)^4 \left[12 + 24e \cos \psi + 12e^2 \cos^2 \psi + e^2 \sin^2 \psi \right] \\ &= \frac{2G}{15c^5} \cdot \left(\frac{4G^3 \mu^2 m^3}{a^5 (1 - e^2)^5} \right) (1 + e \cos \psi)^4 \left[12(1 + 2e \cos \psi + e^2 \cos^2 \psi) + e^2 \sin^2 \psi \right], \end{aligned}$$

somit ergibt sich für die abgestrahlte Leistung in Abhängigkeit von ψ

$$P(\psi) = \frac{8G^4}{15c^5} \frac{\mu^2 m^3}{a^5 (1 - e^2)^5} (1 + e \cos \psi)^4 \left[12(1 + e \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi \right]. \quad (3.25)$$

Wie im Abschnitt 2.2.2 besprochen wurde, lässt sich die Energie der GW mit einer zeitlichen Mittelung über mehrere Perioden berechnen. Für periodische Bewegung entspricht die Mittelung über mehrere Perioden der Welle der Mittelung über eine Umlaufperiode T . Man kann $P(\psi)$ über die Periode T integrieren

$$\begin{aligned} P &\equiv \frac{1}{T} \int_0^T P(\psi) dt \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\psi) \frac{d\psi}{\dot{\psi}} \\ &= \frac{1}{2\pi} (1 - e^2)^{3/2} \int_0^{2\pi} P(\psi) (1 + e \cos \psi)^{-2} d\psi \\ &= \frac{8G^4 \mu^2 m^3}{2\pi 15c^5 a^5} (1 - e^2)^{-7/2} \cdot \int_0^{2\pi} \left[12(1 + e \cos \psi)^4 + e^2 (1 + e \cos \psi)^2 \sin^2 \psi \right] d\psi, \end{aligned} \quad (3.26)$$

löst man das Integral :

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{[12(1 + e \cos \psi)^4]}_B + \underbrace{e^2(1 + e \cos \psi)^2 \sin^2 \psi}_A d\psi$$

$$\begin{aligned} A : e^2(1 + e \cos \psi)^2 \sin^2 \psi &= (e^2 + 2e^3 \cos \psi + e^4 \cos^2 \psi) \sin^2 \psi \\ &= (e^2 + 2e^3 \cos \psi + e^4 \cos^2 \psi) (1 - \cos^2 \psi) \\ &= e^2 + 2e^3 \cos \psi + e^4 \cos^2 \psi - e^2 \cos^2 \psi - 2e^3 \cos^3 \psi - e^4 \cos^4 \psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B : 12(1 + e \cos \psi)^4 &= 12(1 + e \cos \psi)^2 (1 + e \cos \psi)^2 \\ &= 12(1 + 2e \cos \psi + e^2 \cos^2 \psi + 2e \cos \psi + 4e^2 \cos^2 \psi + 2e^3 \cos^3 \psi + e^2 \cos^2 \psi \\ &\quad + 2e^3 \cos^3 \psi + e^4 \cos^4 \psi) \\ &= 12(1 + 4e \cos \psi + 6e^2 \cos^2 \psi + 4e^3 \cos^3 \psi + e^4 \cos^4 \psi), \end{aligned}$$

es ergibt sich also insgesamt

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} (B + A) d\psi &= \int_0^{2\pi} \left(12(1 + e \cos \psi)^4 + e^2(1 + e \cos \psi)^2 \sin^2 \psi \right) d\psi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left([e^2 + 2e^3 \cos \psi + e^4 \cos^2 \psi - e^2 \cos^2 \psi - 2e^3 \cos^3 \psi - e^4 \cos^4 \psi] \right. \\
 &\quad \left. + [12 + 12 \cdot 4e \cos \psi + 12 \cdot 6e^2 \cos^2 \psi + 12 \cdot 4e^3 \cos^3 \psi + 12e^4 \cos^4 \psi] \right) d\psi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{(e^2 + 12) + \cos \psi (2e^3 + 12 \cdot 4e)}_{(1)} + \underbrace{\cos^2 \psi (e^4 - e^2 + 12 \cdot 6e^2)}_{(2)} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\cos^3 \psi (12 \cdot 4e^3 - 2e^3)}_{(3)} + \underbrace{\cos^4 \psi (12e^4 - e^4)}_{(4)} \right) d\psi \\
 (1) : \int_0^{2\pi} d\psi [(e^2 + 12) + \cos \psi (2e^3 + 12 \cdot 4e)] &= [(e^2 + 12) \psi + \sin \psi (2e^3 + 12 \cdot 4e)]_0^{2\pi} \\
 &= 2\pi (e^2 + 12) + 0 \\
 (2) : \int_0^{2\pi} d\psi \cos^2 \psi (e^4 - e^2 + 12 \cdot 6e^2) &= \int_0^{2\pi} d\psi \frac{(\cos 2\psi + 1)}{2} (e^4 - e^2 + 12 \cdot 6e^2) \\
 &= \left[\frac{\sin 2\psi}{2} + \psi \right]_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2} (e^4 - e^2 + 12 \cdot 6e^2) \\
 &= \pi (e^4 - e^2 + 12 \cdot 6e^2) \\
 (3) : \int_0^{2\pi} d\psi \cos^3 \psi (12 \cdot 4e^3 - 2e^3) &= \int_0^{2\pi} d\psi \cos \psi \cos^2 \psi (12 \cdot 4e^3 - 2e^3) \\
 &= \int_0^{2\pi} d\psi \cos \psi (1 - \sin^2 \psi) (12 \cdot 4e^3 - 2e^3) \\
 &= \left[\sin \psi - \frac{\sin^3 \psi}{3} \right]_0^{2\pi} \cdot (12 \cdot 4e^3 - 2e^3) \\
 &= 0 \\
 (4) : \int_0^{2\pi} d\psi \cos^4 \psi (11e^4) &
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \cos^4 \psi &= \cos^2 \psi \cdot \cos^2 \psi = \frac{1}{2^2} (\cos 2\psi + 1)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2\psi + \cos^2 2\psi) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2\psi + \frac{\cos 4\psi + 1}{2} \right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\psi + \frac{1}{8} \cos 4\psi
 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$(4) : \int_0^{2\pi} d\psi \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\psi + \frac{1}{8} \cos 4\psi \right] \cdot 11e^4 = \left[\frac{3}{8}\psi + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\psi}{2} + \frac{1}{8} \frac{\sin 4\psi}{4} \right]_0^{2\pi} \cdot 11e^4 \\ = \frac{3}{8} \cdot 2\pi \cdot 11e^4$$

mit (1) + (2) + (3) + (4) ergibt sich

$$= 2\pi(e^2 + 12) + \pi(e^4 - e^2 + 12 \cdot 6e^2) + 0 + \frac{3}{4}\pi \cdot 11e^4 \\ = 2\pi \left[12 + e^2 - \frac{e^2}{2} + \frac{12 \cdot 6}{2}e^2 + \frac{e^4}{2} + \frac{3}{8} \cdot 11e^4 \right] \\ = 12 \cdot 2\pi \cdot \left[1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right].$$

Also für das gesamte Integral in Gleichung 3.26 ergibt sich

$$P = \frac{8G^4\mu^2m^3}{2\pi 15c^5a^5} (1 - e^2)^{-7/2} \cdot 12 \cdot 2\pi \cdot \left[1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right],$$

es lässt sich folgendes definieren

$$f(e) = \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right). \quad (3.27)$$

Bei den Rechnungen von den Ableitungen in Gleichungen 3.19, 3.21, und 3.23, der abgestrahlten Leistung $P(\psi)$ in Gleichung 3.25 und im Rahmen der Berechnung des Integrals in Gleichung 3.26, wurden die trigonometrischen Relationen A.3, A.4, und A.5 benutzt, die im Anhang A, Abschnitt A.3 zu finden sind.

Die emittierte Energie beim Abstrahlen der Gravitationswellen für ein Doppelsternsystem ist somit

$$P = \frac{32G^4\mu^2m^3}{5c^5a^5} f(e). \quad (3.28)$$

Die hängt von den Massen m_p , m_c , der großen Halbachse a und der Exzentrizität e . Wenn $e = 0$ wäre, dann ist $f(e) = 1$ und wir erhalten das Ergebnis für eine Kreisbahn, wobei a der Radius dieses Kreises darstellt. Im Grenzfall $e \rightarrow 1$ wird $R \rightarrow 0$ wegen Gleichung 3.8 mit a Konstant gehalten. Dies bedeutet für r wegen Gleichung 3.7, dass $r \rightarrow 0$ ist, damit divergiert die Beschleunigung in Gleichung 3.1, und die Generation von GW divergiert. Die Divergenz entsteht durch die Behandlung der beiden Sterne als punktförmig. Bei Hulse-Taylor-Pulsar beträgt die Exzentrizität $e = 0,6171338(4)$ [6], man kann also mit dieser Näherung rechnen.

3.3 Die zeitliche Ableitung der Umlaufperiode in Linearisierte Theorie

Mit den Gleichungen 3.14 und 3.15 lässt sich die Umlaufperiode ergeben als

$$P_b = \frac{2\pi}{(Gm)^{1/2}} a^{3/2}, \quad (3.29)$$

nutzt man Gleichung 3.10, ergibt sich für P_b in Abhängigkeit von der Energie E

$$P_b = \frac{2\pi}{(Gm)^{1/2}} \left(\frac{Gm\mu}{2|E|} \right)^{3/2} = 2^{-1/2} \pi Gm\mu^{3/2} \cdot (-E)^{-3/2},$$

also es ist

$$P_b = \text{Konst} \cdot (-E)^{-3/2},$$

und somit ergibt sich für die zeitliche Ableitung

$$\frac{\dot{P}_b}{P_b} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{E}}{E}. \quad (3.30)$$

Der Energieverlust entspricht der über eine Periode emittierten Energie, die in Gleichung 3.28 gegeben ist. Es ist also $\dot{E} = -P$. Einsetzen in die obige Gleichung, und unter Benutzung von Gleichung 3.10 ergibt sich

$$\frac{\dot{P}_b}{P_b} = -\frac{96}{5} \frac{G^3 \mu m^2}{c^5 a^4} f(e),$$

mit Gleichung 3.29 kann man a in P_b umschreiben, und erhält

$$\frac{\dot{P}_b}{P_b} = -\frac{96}{5} \frac{G^{5/3} \mu m^{2/3}}{c^5} \left(\frac{P_b}{2\pi} \right)^{-8/3} f(e),$$

und damit für die Rate $\dot{P}_b$ in Linearisierte Theorie

$$\dot{P}_b = -\frac{192\pi G^{5/3}}{5c^5} \frac{m_p m_c}{(m_p + m_c)^{1/3}} \left(\frac{2\pi}{P_b} \right)^{5/3} f(e). \quad (3.31)$$

3.4 Anwendung auf Hulse-Taylor-Pulsar

Der binäre Pulsar PSR B1913+16 wurde im Jahr 1974 von Hulse und Taylor entdeckt. Es ist ein Pulsar, dessen Pulsationsperiode über einen Zyklus von 0,3230 Tagen systematisch zwischen 0,058967s und 0,059045s schwankt. Keine Verfinsterungen wurden dabei beobachtet. Die gelieferte Geschwindigkeitskurve deutet auf ein binäres System aus einem Pulsar und seinem Begleiter hin [1]. Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie soll dieses System Energie als Gravitationswellen emittieren. Dies führt zur Verringerung der Umlaufbahn, sodass die Umlaufperiode abnehmen soll. Mit der Gleichung 3.31 kann man die Veränderung der Umlaufperiode, die aus der Allgemeinen Relativitätstheorie in Linearisierter Theorie hergeleitet wurde, berechnen. Dann kann man den aus der Theorie berechneten Wert mit dem experimentell ermittelten Wert vergleichen. Die gemessenen Orbitalparameter sind aus der Tabelle 3.1 zu entnehmen.

Tabelle 3.1: Tabelle der gemessenen Orbitalparameter von PSR B1913+16 mit den Unsicherheiten. e ist die Exzentrizität. $P_{b,\text{exp}}$ ist die Umlaufperiode angegeben in Tagen. $\dot{P}_{b,\text{exp}}$ ist die zeitliche Ableitung der Umlaufperiode, angegeben in ss^{-1} , entnommen aus [6].

Parameter	Größe
e	0,6171338(4)
$P_{b,\text{exp}}$	0,322997448930(4) d
$\dot{P}_{b,\text{exp}}$	$-2,4184(9) \cdot 10^{-12} \text{ss}^{-1}$

Die Massen des Pulsars m_p und seines Begleiters m_c , lassen sich aus experimentell gemessenen Werten der Bahngrößen berechnen. Die Formeln dafür sind in [7] zu finden. In der Tabelle 3.2 sind die berechneten Größen zu finden.

Tabelle 3.2: Tabelle der aus Orbitalparametern berechneten Massen des Pulsars und seines Begleiters des binären Systems PSR B1913+16 mit den Unsicherheiten, entnommen aus [6]. Die Massen sind in Sonnenmasse $1M_\odot = 1,9891 \cdot 10^{33} \text{g}$ [8] angegeben.

Massen	Größe
m_p	1,4414(2) $M_\odot$
m_c	1,3867(2) $M_\odot$

Mit dem experimentell gefunden Wert $P_{b,\text{exp}}$ aus Tabelle 3.1, und den Werten der Massen m_p und m_c aus Tabelle 3.2, kann man anhand der Gleichung 3.29 nach Umstellung

$$a = [G(m_p + m_c)]^{1/3} \left(\frac{P_b}{2\pi} \right)^{2/3}$$

die große Halbachse a des Systems berechnen. Es ergibt sich somit $a \simeq 2,2 \cdot 10^9 \text{m}$. Der Sonnenradius ist $R_\odot \simeq 7 \cdot 10^8 \text{m}$ [9], also die große Halbachse des Systems a ist ungefähr $3R_\odot$. Die Umlaufbahn ist also sehr kompakt. Da es auch keine Verfinsterungen beobachtet wurden [1], und die Tatsache, dass der Begleiter eine Masse besitzt, die der des Pulsars vergleichbar ist (siehe Tabelle 3.2), weist dies darauf hin, dass der Begleiter ein Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch sein muss [10]. Die Behandlung der zwei Sterne als punktförmige Körper bei der Herleitung der Gleichung 3.31 in den Abschnitten 3.1, 3.2 und 3.3 ist also berechtigt.

Die Gravitationskonstante beträgt $G = 6,67430(15) \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ [11]. Die Lichtgeschwindigkeit ist gegeben als $c = 299792458 \text{ms}^{-1}$ [12]. Die Exzentrizität e und die Umlaufperiode $P_{b,\text{exp}}$ sind aus der Tabelle 3.1 zu entnehmen. Die Massen m_p und m_c sind aus Tabelle 3.2 zu entnehmen. Somit kann man mittels Gleichung 3.31 den theoretisch erwarteten Wert für $\dot{P}_{b,GR}$ berechnen, es ergibt sich aus [6]

$$\dot{P}_{b,GR} = -2,40242(2) \cdot 10^{-12} \text{ss}^{-1}. \quad (3.32)$$

Um den berechneten Wert $\dot{P}_{b,\text{GR}}$ mit dem experimentel gefunden Wert $\dot{P}_{b,\text{exp}}$ zu vergleichen, muss man zuerst eine Doppler-Korrektur $\dot{P}_{b,\text{Gal}}$ von $\dot{P}_{b,\text{exp}}$ abziehen. Diese wird durch die relative Beschleunigung zwischen dem Sonnensystem und dem Pulsar, projiziert auf die Sichtlinie, induziert [13]. Also der korrigierte Term ist somit aus [6]

$$\dot{P}_{b,K} = \dot{P}_{b,\text{exp}} - \dot{P}_{b,\text{Gal}} = 2,4056(51) \cdot 10^{-12} \text{ s s}^{-1}.$$

Es ergibt sich für das Verhältnis der beiden Größen aus [6]

$$\frac{\dot{P}_{b,K}}{\dot{P}_{b,\text{GR}}} = 1,0013(21). \quad (3.33)$$

Der korrigierte gemessene Wert von der zeitlichen Ableitung der Umlaufperiode $\dot{P}_{b,K}$ stimmt mit einer Abweichung von 0,13(21)% mit dem aus der Allgemeinen Relativitätstheorie gerechneten Wert $\dot{P}_{b,\text{GR}}$ überein. Dieses Ergebnis bestätigt die Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie und die Existenz der Gravitationswellen.

Um diese Änderung der Umlaufperiode grafisch darzustellen, wurde die kumulative Verschiebung der Periastronzeit in Abhängigkeit von der Beobachtungszeit geplottet. Die kumulative Orbitalphase des Pulsars ϕ_b lässt sich entwickeln als

$$\frac{1}{2\pi}\phi_b(T) = \nu_b T + \frac{1}{\rho}\dot{\nu}_b T^2 + \dots, \quad (3.34)$$

mit der Umlauffrequenz $\nu_b = 1/P_b$, und T ist die Periastronzeit. Die Terme zweiter Ordnung in ν_b und höher werden vernachlässigt. Der Startpunkt wird so definiert, dass beim Periastron-Durchgang T_0 die Orbitalphase $\phi_b(T_0) = 0$ ist. Nach n Periastron-Durchgängen T_n erfolgt bei $\phi_b(T_n) = 2\pi n$, man erhält also

$$\begin{aligned} \nu_b T_n + \frac{1}{2}\dot{\nu}_b T_n^2 &= n \\ \Rightarrow T_n - \frac{n}{\nu_b} &= -\frac{\dot{\nu}_b}{2\nu_b} T_n^2, \end{aligned}$$

mit $\nu_b = 1/P_b$ ergibt sich

$$T_n - P_b n = \frac{\dot{P}_b}{2P_b} T_n^2. \quad (3.35)$$

Dies ist eine Parabel mit dem Koeffizienten $\frac{\dot{P}_b}{2P_b} < 0$. Die linke Seite der Gleichung ergibt den Unterschied zwischen der Periastronzeit und der Umlaufperiode. Wenn die Umlaufbahn sich nicht verringern soll, dann bleibt $T_n - P_b n = 0$ für alle Durchgänge des Periastrons n , weil die Periode sich nicht ändert und ist dann immer gleich Periastronzeit. Der Koeffizient in der rechten Seite der Gleichung ist mit der Allgemeinen Relativitätstheorie in Linearisierter Theorie zu berechnen, dann kann man die Zeit in T_n^2 einsetzen und erhält die Kurve als Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie. Mit den gemessenen Daten aus den verschiedenen Jahren, kann man die Gültigkeit der Theorie prüfen. Wie in Abbildung 3.1 zu sehen ist, stimmen die Datenpunkte des Experiments aus den Jahren 1975

bis 2007 mit der theoretisch erwarteten Kurve überein. Die kumulative Abweichung der Periastronzeit beträgt ≈ -43 s bei der letzten Messung. Die Nulllinie stellt die erwartete Linie dar, wenn die Umlaufbahn unverändert, also konstant bleibt, was hier jedoch nicht der Fall ist.

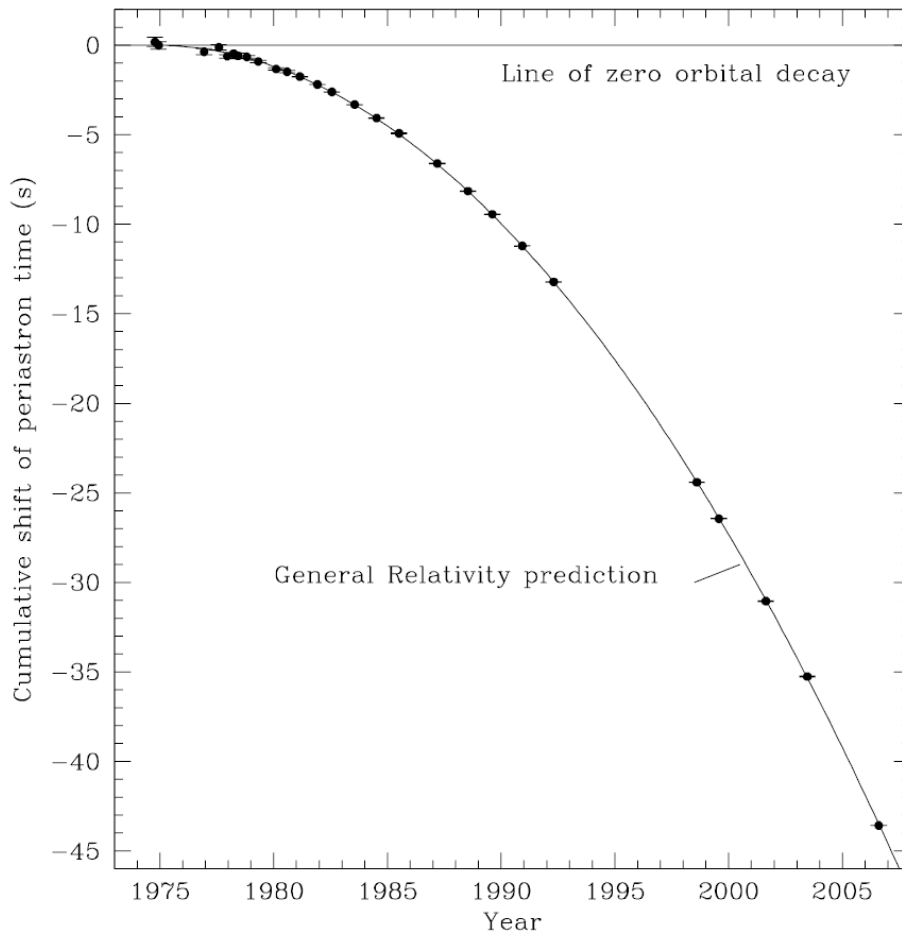


Abbildung 3.1: Die Abbildung zeigt die kumulative Abweichung der Periastronzeit in s zwischen den Jahren 1975 und 2007. Die Nulllinie ergibt sich, wenn keine Änderung in der Umlaufperiode stattfindet, und damit bleibt die kumulative Abweichung der Periastronzeit konstant gleich Null. Die Parabel ergibt sich als Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie in Linearisierter Theorie für ein binäres System, das Energie in Form von Gravitationswellen verliert. Die Datenpunkte sind die gemessenen Werte für die kumulative Abweichung der Periastronzeit über die Jahre. Die Unsicherheiten werden von der Unsicherheit in der galaktischen Beschleunigung dominiert. Abbildung entnommen aus [3]

Zusammenfassung

Durch den Hulse-Taylor-Pulsar ist es gelungen, den ersten indirekten Nachweis auf die Existenz der GW zu erbringen, und die Gültigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie zu beweisen. Das im Jahr 1975 entdeckte Binärsystem besteht aus einem Pulsar und seinem Begleiter [1]. Eine schematische Darstellung des Systems ist in Abbildung 1.1 zu sehen. Die Allgemeine Relativitätstheorie besagt, dass dieses System Energie in Form von GW emittieren soll, was dazu führt, dass sich die Umlaufperiode mit der Zeit reduzieren wird. Diese Änderung lässt sich aus der Theorie berechnen und anschließend mit dem Experiment vergleichen. Um eine Formel für die Änderung der Umlaufperiode herzuleiten, wurde zuerst im Abschnitt 2.1.1 die von Einstein hergeleitete Feldgleichung präsentiert. Die gesamte Metrik wurde als die Flachmetrik plus eine Störung $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, geschrieben, diese Entwicklung ist auch als die Linearisierte Theorie bekannt. Damit erfolgt die linearisierte Bewegungsgleichung 2.8 für GW als Störungen auf der flachen Metrik. Mit der Spur-umgekehrten Metrik $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ und der Lorentz-Eichung $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu $\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ mit der Energie-Impulserhaltung $\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0$. Die drei Bedingungen $h^{0\mu} = 0$, $\partial^j h_{ij} = 0$, und $h^i_i = 0$ definieren die TT-Eichung, mit der und der Lorentz-Eichung reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade der Metrikstörung h_{ij}^{TT} auf 2. Mit Hilfe des Lambda-Tensors $\Lambda_{ij,kl}$ in Gleichung 2.17 kann man eine Welle, die bereits die Lorentz-Eichung erfüllt, auf die TT-Eichung projizieren, also $h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl}h_{kl}$. Um den Energie-Impuls-Tensor der GW zu bestimmen, muss man von einer dynamischen Raumzeit ausgehen, bei der die Metrik die Form $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ hat. Dann kann man den Ricci-Tensor in der Feldgleichung 2.25 entwickeln, dann lässt sich eine Mittelung über Zwischenlängenskala $\bar{l}$ oder Zwischenzeitskala $\bar{t}$ durchführen. Es lässt sich dann eine Feldgleichung 2.31 für diese Raumzeit herleiten, bei der $t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(2)} \rangle$ der Energie-Impuls-Tensor der GW definiert. Um diesen auszuwerten, berechnet man $R_{\mu\nu}^{(2)}$ in großer Entfernung von der Quelle, es ergibt sich mit Mittelung $\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle$ und $\langle R^{(2)} \rangle = 0$. Daher ist $t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle$. Mit dem und anhand der Gleichung $\partial^\mu t_{\mu\nu} = 0$ lässt sich die Gleichung 2.37 für den Energiefluss der GW herleiten. Die Lösung der Wellengleichung $\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ kann mit der Greenschen Funktionen gefunden werden. Anhand des Lambda-Tensors kann man die Lösung in TT-Eichung finden. Dann lässt sich die Lösung $h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x})$ in großen Abständen von der Quelle entwickeln, man erhält

$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int d^3x' T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{n}}{c}, \vec{x}' \right)$. Im Abschnitt 2.3.3 wurde die Multipolentwicklung durchgeführt. Da das System eine Umlaufgeschwindigkeit der Ordnung $v \sim 10^{-3}c$ hat, kann die GW durch das niedrigste Multipolmoment der Multipolentwicklung für T_{kl} beschrieben werden. Mit dem Tensor $S^{ij}(t) = \int d^3x T^{ij}(t, \vec{x})$, den in Gleichungen 2.48 definierten Momenten, und der Relation $S^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{M}^{ij}$ kann die Lösung als $h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \ddot{M}^{kl}(t - r/c)$ geschrieben werden. Diese kann man in der Gleichung 2.37 für den Energiefluss einsetzen und das Integral $\int d\Omega$ durchführen, um die Quadrupolformel $P_{\text{quad}} = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{M}_{ij} \ddot{M}_{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{kk})^2 \right\rangle_{t-r/c}$ zu bekommen. Das System lässt sich mit $\mu = \frac{m_p m_c}{m_p + m_c}$ die reduzierte Masse, $m = m_p + m_c$ die gesamte Masse und $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_c$ die relative Koordinate auf ein Einkörperproblem auf einer elliptischen Umlaufbahn reduzieren. Die Sterne wurden dabei als punktförmig behandelt. Die Bewegungsgleichung dieser Umlaufbahn wurde im Abschnitt 3.1 gelöst, dabei wurden der Halbparameter R und die Exzentrizität e in den Gleichungen 3.5 und 3.6 definiert. Es ergibt sich somit die große Halbachse als $a = \frac{Gm\mu}{2|E|}$, und $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \psi}$. Damit lässt sich ein Ausdruck 3.13 für $\dot{\psi}$ herleiten. Die Umlaufperiode ist $P_b = \frac{2\pi}{\omega_0}$ und die Frequenz $\omega_0^2 = \frac{Gm}{a^3}$. Im Abschnitt 3.2 wurde die dritte Ableitung des zweiten Massenmoments $M^{ij}(t) = \mu r_0^i(t) r_0^j(t)$ bestimmt, und in der Quadrupolformel eingesetzt, danach wurde über die Periode T integriert. Es ergibt sich damit die emittierte Energie beim Abstrahlen der GW als $P = \frac{32G^4 \mu^2 m^3}{5c^5 a^5} f(e)$, mit der in Gleichung 3.27 definierten Funktion $f(e)$. Mit $P_b = \frac{2\pi}{(Gm)^{1/2}} a^{3/2}$ und $\frac{\dot{P}_b}{P_b} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{E}}{E}$ ergibt sich für die zeitliche Ableitung der Umlaufperiode in Linearisierte Theorie $\dot{P}_b = -\frac{192\pi G^{5/3}}{5c^5} \frac{m_p m_c}{(m_p + m_c)^{1/3}} \left(\frac{2\pi}{P_b} \right)^{5/3} f(e)$. Mit den gelieferten Parametern in den Tabellen 3.1 und 3.2 aus [6] lässt sich die zeitliche Ableitung der Umlaufperiode berechnen. Die Massen wurden mit den aus [7] gelieferten Formeln berechnet. Es ergibt sich $\dot{P}_{b,\text{GR}} = -2,40242(2) \cdot 10^{-12} \text{ s s}^{-1}$ [6]. a wurde ebenfalls berechnet und ergab $a \simeq 3R_\odot$, das System ist also sehr kompakt. Es wurde eine Doppler-Korrektur von dem experimentell gefundenen Wert $\dot{P}_{b,\text{exp}}$ subtrahiert, es ergab sich $\dot{P}_{b,\text{K}} = \dot{P}_{b,\text{exp}} - \dot{P}_{b,\text{Gal}} = 2,4056(51) \cdot 10^{-12}$ [6]. Das Verhältnis zwischen dem aus der Theorie berechneten Wert und dem korrigierten gemessenen Wert ergibt $\frac{\dot{P}_{b,\text{K}}}{\dot{P}_{b,\text{GR}}} = 1,0013(21)$ [6]. Die Theorie stimmt mit einer Abweichung von 0,13(21)% mit dem Experiment überein. Diese Übereinstimmung ist grafisch in Abbildung 3.1 zu sehen. Dabei wurde über mehrere Jahre die kumulative Abweichung der Periastronzeit gemessen. Die Datenpunkte liegen auf der aus der Theorie vorhergesagten Parabel.

Anhang A

A.1 Notationen und Definitionen

Griechische Buchstaben wie $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$ sind Indizes, die die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen. Die Lateinischen werden als räumliche Indizes benutzt, und nehmen die Werte 1, 2, 3 an.

Ein kontravarianter Vierervektor ist gegeben durch

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}), \quad \text{mit} \quad x^0 = ct.$$

Ein kovarianter Vierervektor ist gegeben durch

$$x_\mu = (x_0, -\vec{x}), \quad \text{mit} \quad x_0 = ct.$$

Die Ableitung ist dann

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \partial_i \right).$$

Der D'Alembert-Operator ist in Linearisierter Theorie gegeben durch

$$\square = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \partial_\mu \partial^\mu.$$

Der Metriktensor $\eta_{\mu\nu}$ des flachen Minkowski-Raums ist definiert als

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

Der Metriktensor für gekrümmte Raumzeit $g_{\mu\nu}$ ist ein symmetrischer (0, 2) Tensor mit $g = |g_{\mu\nu}|$ ungleich Null, und mit dem Inverstensor $g^{\mu\nu}$ gilt

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} = \delta^\mu_\sigma.$$

Das Linienelement der Allgemeinen Relativitätstheorie ist gegeben als

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Das Vertauschen von Indizes erfolgt mit dem Metriktensor

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu.$$

Die Christoffelsymbole sind definiert als

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}).$$

Der riemannsche Krümmungstensor ist gegeben durch

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}.$$

Der Ricci-Tensor ist definiert als

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu},$$

der Ricci-Skalar ist damit

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}.$$

Die kovariante Ableitung ist definiert als

$$D_{\mu}x^{\nu} = \partial_{\mu}x^{\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}x^{\sigma},$$

$$D_{\mu}x_{\nu} = \partial_{\mu}x_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}x_{\sigma},$$

und die allgemeine Definition ist

$$\begin{aligned} D_{\sigma}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} &= \partial_{\sigma}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ &+ \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1}T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2}T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots \\ &- \Gamma_{\sigma\nu_1}^{\lambda}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^{\lambda}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_1\cdots\nu_l} - \cdots. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Die Bianchi-Identität ist gegeben als

$$D^{\mu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}D_{\nu}R. \quad (\text{A.2})$$

A.2 Tensoren unter Koordinatentransformation

Die Koordinatentransformation ist definiert durch

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}dx^{\mu}.$$

Ein (k, l) Tensor ist eine Multilinearform, der k Kovektoren und l Vektoren einen Wert in $\mathbb{R}$ zuordnet. Die Transformation eines Tensors ist gegeben durch

$$T^{\mu'_1\cdots\mu'_k\nu'_1\cdots\nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1\cdots\mu_k\nu_1\cdots\nu_l}.$$

A.3 Trigonometrieformeln für Sinus und Kosinus

Trigonometrischer Pythagoras für einen Winkel x ist:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (\text{A.3})$$

Die Doppelwinkelfunktionen für Sinus und Kosinus sind wie folgt gegeben:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x \quad (\text{A.4})$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (\text{A.5})$$

Additionstheoreme für Sinus und Kosinus:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \quad (\text{A.6})$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (\text{A.7})$$

A.4 Herleitung der Identität $S^{ij} = \frac{1}{2}\ddot{M}^{ij}$

Die zeitliche Ableitung von M^{ij} mit $\dot{M} = c\partial_0 M$ ergibt

$$\dot{M}^{ij}c = \int_V d^3x (\partial_0 T^{00}(t, \vec{x})) x^i x^j, \quad (\text{A.8})$$

Für das Integral definiert man ein Volumen V größer als die Quelle mit dem Rand ∂V , so dass am Rand $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$ erfüllt ist.

Mit der Energie-Impulserhaltung in Gleichung 2.11 in Linearisierte Theorie erhält man

$$\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{0i}.$$

Es ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned} \dot{M}^{ij}c &= - \int_V d^3x (\partial_k T^{0k}) x^i x^j \\ &= \int_V d^3x T^{0k} \partial_k (x^i x^j) \\ &= \int_V d^3x T^{0k} (\delta_k^i x^j + \delta_k^j x^i) \\ &= \int_V d^3x T^{0i} x^j + \int_V d^3x T^{0j} x^i, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

mit den Momenten der Impulsdichte $P^{i,j}$ in Gleichungen 2.49, erhält man dann

$$\dot{M}^{ij} = P^{i,j} + P^{j,i}. \quad (\text{A.10})$$

Analog zum Integral in A.9 lässt sich zeigen dass

$$\dot{P}^{i,j} = S^{ij}, \quad (\text{A.11})$$

zusammen mit der zeitlichen Ableitung von Gleichung A.10 und der Eigenschaft $S^{ij} = S^{ji}$ erhält man

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{M}^{ij}. \quad (\text{A.12})$$

A.5 Integration des Lambda-Tensors

Man erhält für die Integration des Lambda-Tensors mit Gleichung 2.17

$$\begin{aligned} \int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \int d\Omega \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2} n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2} n_i n_j n_k n_l \right), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

mit den Identitäten in Gleichungen 2.53 und 2.54 ergibt sich

$$\begin{aligned} \int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = & 4\pi \cdot \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{jl} \delta_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \delta_{jl} \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} \delta_{kl} \delta_{ij} + \frac{1}{6} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2 \cdot 15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \\ = & 4\pi \cdot \left(\frac{1}{3} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{6} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2 \cdot 15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \\ = & \frac{2\pi}{15} (11 \delta_{ik} \delta_{jl} - 4 \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Die allgemeine Form der Identitäten in den Gleichungen 2.53 und 2.54 ist gegeben durch

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_{i_1} \cdots n_{i_{2l}} = \frac{1}{(2l+1)!!} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \cdots \delta_{i_{2l-1} i_{2l}} + \cdots). \quad (\text{A.15})$$

Literatur

- [1] R. A. Hulse und J. H. Taylor. „Discovery of a pulsar in a binary system“. In: *Astrophys. J. Lett.* 195 (1975), S. L51–L53. DOI: [10.1086/181708](https://doi.org/10.1086/181708).
- [2] T. N. P. in Physics 1993. *Press Release*. 10.08.2024. 1993. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1993/press-release/>.
- [3] J. M. Weisberg, D. J. Nice und J. H. Taylor. „Timing Measurements of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16“. In: *Astrophys. J.* 722 (2010), S. 1030–1034. DOI: [10.1088/0004-637X/722/2/1030](https://doi.org/10.1088/0004-637X/722/2/1030). arXiv: [1011.0718 \[astro-ph.GA\]](https://arxiv.org/abs/1011.0718).
- [4] G. Agazie u. a. „The NANOGrav 15 yr Data Set: Evidence for a Gravitational-wave Background“. In: *The Astrophysical Journal Letters* 951.1 (Juni 2023), S. L8. ISSN: 2041-8213. DOI: [10.3847/2041-8213/acdac6](https://doi.org/10.3847/2041-8213/acdac6). URL: <http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/acdac6>.
- [5] M. Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2008. ISBN: 9780198570745. URL: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001>.
- [6] J. M. Weisberg und J. H. Taylor. „Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis“. In: *ASP Conf. Ser.* 328 (2005), S. 25. arXiv: [astro-ph/0407149](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0407149).
- [7] J. H. Taylor und J. M. Weisberg. „A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16“. In: 253 (Feb. 1982), S. 908–920. DOI: [10.1086/159690](https://doi.org/10.1086/159690).
- [8] T. I. A. U. (IAU). 10.08.2024. 2024. URL: <https://www.iau.org/public/themes/measuring/>.
- [9] G. A. of the International Astronomical Union. *RESOLUTION B1*. 10.08.2024. 2015. URL: https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2015_English.pdf.
- [10] M. Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. See p. 304. Oxford, UK: Oxford University Press, 2008. ISBN: 9780198570745. URL: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001>.

- [11] T. N. I. of Standards und T. (NIST). *The NIST Reference on Constants, Units and Uncertainty*. 10.08.2024. 2024. URL: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg>.
- [12] D. Braun, F. Schneiter und U. R. Fischer. „Intrinsic measurement errors for the speed of light in vacuum“. In: *Class. Quant. Grav.* 34.17 (2017), S. 175009. DOI: [10.1088/1361-6382/aa8058](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa8058). arXiv: [1502.04979](https://arxiv.org/abs/1502.04979) [quant-ph].
- [13] T. Damour und J. H. Taylor. „On the Orbital Period Change of the Binary Pulsar PSR 1913+16“. In: 366 (Jan. 1991), S. 501. DOI: [10.1086/169585](https://doi.org/10.1086/169585).