

Levin Alexander Wissing

› Produktion von axionischer Dunkler Materie in modifizierten Expansionsszenarien des heißen Urknalls

2024



Produktion von axionischer Dunkler Materie in modifizierten Expansionsszenarien des heißen Urknalls

BACHELORARBEIT

eingereicht an der

Universität Münster

von

Levin Alexander Wissing

September 2024

Erstprüfer:

Jun.-Prof. Dr. Kai Schmitz

Zweitprüfer:

Prof. Dr. Michael Klasen

Tag der Einreichung:

25. September 2024

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Produktion von Dunkler Materie aus Axionen durch den Misalignment-Mechanismus untersucht. Diese wird zunächst im Rahmen des kosmologischen Standard-Szenarios betrachtet, wobei analytische und numerische Methoden zur Beschreibung dienen. Zentral ist hier jedoch die Dunkle Materie-Produktion innerhalb modifizierter Expansionsszenarien („Non Standard Cosmologies“ (NSC)) des frühen Universums. Solche Modelle sind im Vergleich zum kosmologischen Standard-Szenario durch die Einführung eines exotischen Feldes ϕ charakterisiert, welches verschiedene Stadien durchläuft und die Expansion des Universums dabei beeinflusst. Die Dunkle Materie-Produktion wird hier durch eine Entropieverdünnung der Axion-Energiedichte beeinflusst. Die Ausdrücke für die Energiedichte sind abhängig von der Axion-Masse m_a , was genutzt wird, um durch den Vergleich zu experimentellen Daten, Rückschlüsse auf mögliche m_a -Werte zu ziehen. Ziel der Arbeit ist, einen Parameterraum für die Axion-Masse gegenüber dem NSC-Parameter T_{eq} herzuleiten. Dazu wird sich analytischer Methoden bedient. Es zeigt sich, dass dieses Ziel insbesondere bezüglich der Ermittlung von Größenordnungen erfüllt wird, wobei eine exakte Beschreibung durch die approximative Natur der analytischen Methode nicht erreicht werden kann. Dazu werden weiterführende numerische Verfahren vorgeschlagen.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Levin Alexander Wissing, dass die vorliegende Arbeit über *Produktion von axionischer Dunkler Materie in modifizierten Expansionsszenarien des heißen Urknalls* selbstständig von mir und ohne fremde Hilfe verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind. Mir ist bekannt, dass es sich bei einem Plagiat um eine Täuschung handelt, die gemäß der Prüfungsordnung sanktioniert werden kann.

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in einer Datenbank einverstanden.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit oder Teile daraus nicht anderweitig als Prüfungsarbeit eingereicht habe.

Münster, 25. September 2024

Levin Alexander Wissing

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen der Axion-Kosmologie	3
2.1	Das Axion und dessen Entstehung im frühen Universum	3
2.2	Axion-Dunkle Materie und der Misalignment-Mechanismus	7
3	Expansionsszenarien des frühen Universums	10
3.1	Das kosmologische Standard-Szenario	10
3.1.1	Analytische Betrachtung	11
3.1.2	Numerische Betrachtung	19
3.2	Modifizierte Expansionsszenarien	27
3.2.1	Analytische Betrachtung	30
3.2.2	Numerische Betrachtung	37
4	Ergebnisse	41
4.1	Analytische Resultate	41
4.1.1	Oszillation in Region 1: Strahlungs-Dominanz	42
4.1.2	Oszillation in Region 2: ϕ —Dominanz ohne Zerfall	45
4.1.3	Oszillation in Region 3: ϕ —Dominanz mit Zerfall	49
4.2	Analyse und Diskussion der Ergebnisse	54
5	Schlussfolgerung	61
	Literatur	64

Einleitung

1

In dieser Arbeit wird die Entstehung von Dunkler Materie aus Axionen im frühen Universum thematisiert. Axionen sind hypothetische Teilchen, welche aufgrund ihrer Eigenschaften in zahlreichen Anwendungsgebiete auftreten und in der aktuellen Forschung von großem Interesse sind. Insbesondere im Rahmen der Kosmologie können durch sie zahlreiche, noch unerklärte Phänomene, wie beispielsweise Dunkle Energie oder die erwähnte Dunkle Materie erklärt werden. Es existieren verschiedene experimentelle Bestrebungen zum Nachweis von Axionen, welche in den nächsten Jahren und Jahrzehnten weiter ausgebaut werden [1]. Die Weiterentwicklung zielt dabei insbesondere darauf ab, immer größere Bereiche für eine mögliche Axion-Masse m_a durch die Experimente abzudecken. Die Eingrenzung der Axion-Masse ist auch in dieser Arbeit von Bedeutung und geschieht im Rahmen der Analyse der Produktion axionischer Dunkler Materie. Dabei wird auf den sogenannten Misalignment Produktionsmechanismus eingegangen. Es zeigt sich, dass der Ausdruck für die entstehende Dunkle Materie-Energiedichte eine Abhängigkeit von der Axion-Masse aufweist. Dies kann genutzt werden, um einen Vergleich zu experimentellen Daten der Energiedichte vorzunehmen und letztendlich Schlüsse für mögliche Werte von m_a zu ziehen.

Die Dunkle Materie-Produktion wird in dieser Arbeit zusätzlich vor dem Hintergrund modifizierter Expansionsszenarien (sogenannter „Nonstandard Cosmologies“ (NSC)) diskutiert, welche ebenfalls ein zentrales aktuelles Forschungsthema der Kosmologie darstellen. Diese unterscheiden sich von dem sogenannten kosmologischen Standard-Szenario, d.h. einer Strahlungs-Dominanz vor Beginn der primordialen Nukleosynthese, durch die Einführung eines allgemeinen exotischen Teilchenfeldes ϕ , welches Einfluss auf die Expansion des Universums nimmt.

Die Produktion von axionischer Dunkler Materie wird durch ein solches Szenario beeinflusst, was sich entsprechend auf mögliche m_a -Werte auswirkt.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Parameterraum für - im Rahmen der Dunkle Materie-Produktion - mögliche Axion-Massen gegenüber Werten der freien Parameter eines NSC-Modells zu erhalten. Dabei wird sich analytischer Methoden bedient. Um dies zu erreichen wird in den folgenden Kapiteln und Abschnitten wie folgt vorgegangen: In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen der Axion-Kosmologie und der Dunkle Materie-Produktion erläutert. Anschließend erfolgt in Kapitel 3 eine generelle Einführung in die Expansionsszenarien des frühen Universum, in welcher neben dem Standard-Fall auch die erwähnten NSC-Szenarien diskutiert werden. Die Beschreibung erfolgt dabei im analytischen Sinne, aber auch unter Nutzung numerischer Verfahren, welche die ablaufenden Prozesse möglichst exakt darstellen sollen. Hier wird die wesentliche Vorarbeit für die in Kapitel 4 dargestellten Hauptergebnisse geleistet, welche sich auf die erwähnten mit analytischen Methoden ermittelten Parameterräume beziehen. Schlussendlich erfolgt eine Diskussion der Ergebnisse.

Es sei erwähnt, dass diese Arbeit auf Quelle [2] basiert. Vorgehen und Zielsetzung sind dabei im Wesentlichen identisch. Einige der hier präsentierten numerischen Methoden können jedoch unter gewissen Annahmen als exakter angesehen werden, was genauer in Abschnitt 3.1.2 beschrieben wird.

Theoretische Grundlagen der Axion-Kosmologie

2

2.1 Das Axion und dessen Entstehung im frühen Universum

Das Axion ist ein hypothetisches Teilchen, welches im Rahmen aktueller Forschung als Ergänzung zum Standard-Modell der Teilchenphysik diskutiert wird. Es wurde ursprünglich in den 1970er-Jahren im Rahmen eines Lösungsansatzes für das sogenannte starke CP-Problem des Standardmodells eingeführt [3–5]. Maßgeblich an der Einführung beteiligt waren die Physiker Roberto Peccei und Helen Quinn, welche die grundlegende Theorie vorschlugen [3]. Über dieses konkrete Beispiel hinaus, besitzt das Axion mittlerweile zahlreiche weiterführende Anwendungsgebiete. In der Kosmologie ist es insofern von Bedeutung, als dass es zur Erklärung verschiedener ungelöster Fragestellungen dienen kann. Dies hängt mit seinen Eigenschaften zusammen, welche es per Definition erhält: Es handelt sich um ein schwach interagierendes, leichtes und langlebiges Teilchen [6]. In dieser Arbeit von zentraler Bedeutung ist das Axion als Kandidat für Dunkle Materie (DM). Dunkle Materie ist eine Form von Materie, welche bezüglich ihrer grundlegenden Eigenschaften, z.B. der Wechselwirkung aber auch ihrer mikroskopischen Zusammensetzung, noch viele offene Fragestellungen mit sich bringt. Sie stellt dabei, im Vergleich zu gewöhnlicher baryonischer Materie, den Großteil der gesamten Materie-Energiedichte des Universums dar [7]. Die Gesamtenergiedichte der Dunklen Materie wird experimentell zu $\Omega_{\text{DM}} = 0,26$ bestimmt, was aus Messungen des Planck Satelliten folgt [8].

Das Axion kann entweder die gesamte DM-Population ausmachen oder lediglich einen Bestandteil dieser darstellen. Um mithilfe des Axions zu erklären, wie eine ausreichend große DM-Population erzeugt werden kann, werden verschiedene Produktionsmechanismen in Betracht gezogen. Beispiele hierfür sind die thermale Axion-Produktion oder Zerfälle von sogenannten topologischen Defekten (z.B. Strings) [6]. Einer der wichtigsten Mechanismen, welcher in dieser Arbeit von zentraler Bedeutung ist, ist der sogenannte Misalignment-Mechanismus. Das diesem zugrundeliegende Prinzip ist eng mit der Entstehungsgeschichte des Axion-Feldes im frühen Universums verknüpft. Bevor der Misalignment-Mechanismus somit im nächsten Abschnitt genauer diskutiert wird, soll im Folgenden zunächst die kosmologische Entwicklung des Axion-Feldes erläutert werden. Für die folgende Beschreibung ist zu bedenken, dass eine fortschreitende Zeit in der Entwicklung des Universums eine sinkende Temperatur impliziert.

Die Entwicklung lässt sich im Wesentlichen in drei verschiedene Schritte einteilen, welche anhand des Potentials des Feldes (vergleiche Abbildung 2.1) deutlich werden. Diese sollen nun beschrieben werden, wobei sich, auch in der mathematischen Beschreibung, an Quelle [9] orientiert wird. Ausgangspunkt für sehr hohe Temperaturen, d.h. frühe Zeiten, ist zunächst ein verallgemeinertes komplexes skalares Feld (Peccei-Quinn-Feld oder PQ-Feld) Φ , welches ein quadratisches Potential erfährt. Sinkt die Temperatur nun unter einen bestimmten Wert f_a , so kommt es zur ersten zentralen Änderung des Potentials. Diese resultiert in einem Prozess bestimmt, der auch als spontane Symmetriebrechung bezeichnet wird. Das Feld erfährt nun ein sogenanntes „Wine Bottle“-Potential, welches ebenfalls in Abbildung 2.1 dargestellt ist. Dieses wird charakterisiert durch ein zentrales lokales Maximum umgeben von einer kreisrunden Potentialmulde. An den Rändern geht das Potential ins Unendliche. Mathematisch kann das Wine Bottle-Potential in der Form

$$V_{\text{PQ}}(|\Phi|) = \frac{\lambda}{8} (|\Phi|^2 - f_a^2)^2 \quad (2.1)$$

geschrieben werden. Die Symmetriebrechung kommt nun dadurch zustande, dass sich das Feld anfangs auf dem zentralen Potentialmaximum befindet und somit,

zur Minimierung seiner Energie, in die Potentialmulde „rollt“. Dieser Schritt kann auch als „Entstehung“ des Axions aufgefasst werden. Das komplexe PQ-Feld lässt sich nun - analog zur Polardarstellung klassischer komplexer Zahlen - in der Form $\Phi = |\Phi| e^{i\theta}$ darstellen, d.h. mit $|\Phi|$ als Betrag bzw. Radialanteil und θ als Phase, welche die Drehung in der Ebene beschreibt. Diese Phase θ , d.h. der winkelbezogene Freiheitsgrad des komplexen skalaren Feldes Φ , stellt das Axion dar. Dieses besitzt in diesem Stadium eine Verschiebungssymmetrie innerhalb der Potentialmulde. Da es zu diesem Zeitpunkt kein Potential erfährt, erscheint es als masseloses Teilchen. Die in Gleichung 2.1 eingehende Größe f_a ist eine charakteristische Skala bei welcher die spontane Symmetriebrechung stattfindet. Aus dem Winkel θ kann über f_a später das Axion-Feld a definiert werden, wobei $a \equiv f_a \theta$ gilt [2].

Sinkt die Temperatur weiter kommt es bei einer Temperatur $T_{\text{QCD}} \approx 150 \text{ MeV}$ [2] zum nächsten zentralen Schritt, dem sogenannten QCD-Phasenübergang. Die Abkürzung „QCD“ steht hierbei für „Quantenchromodynamik“, welche die Quantenfeldtheorie der starken Wechselwirkung darstellt. Die zuvor im heißen Plasma noch frei beweglichen Quarks, nehmen ab diesem Zeitpunkt zusammen mit anderen Quarks Bindungszustände ein, woraus sich sogenannte Hadronen ergeben. Klassische Beispiele für Hadronen sind das Proton und das Neutron. Diese werden durch die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks zusammengehalten, welche durch den Austausch von Gluonen vermittelt wird. Auch das Axion wird durch den QCD-Phasenübergang beeinflusst, da es an die Gluonen koppelt. Es erfolgen dabei zentrale Änderungen: Das Axion erfährt nun aufgrund von sogenannten Instanton-Effekten ein Potential der Form

$$V_{\text{QCD}}(\theta) = \chi(T) (1 - \cos \theta), \quad (2.2)$$

wobei das Gesamtpotential durch

$$V(\Phi) = V_{\text{PQ}}(|\Phi|) + V_{\text{QCD}}(\theta) \quad (2.3)$$

gegeben ist. Die Verschiebungssymmetrie des Axions ist damit gebrochen, d.h. es liegt eine explizite Symmetriebrechung vor. Durch das Potential V_{QCD} , welches das Axion nun erfährt, erhält das Teilchen eine ab diesem Zeitpunkt konstant bleibende Masse m_a die mit der Kopplungskonstante f_a durch [2]

$$m_a \simeq 5,69 \text{ meV} \left(\frac{10^9 \text{ GeV}}{f_a} \right) \quad (2.4)$$

zusammenhängt.

Insgesamt kann die Temperaturabhängigkeit der Axion-Masse während der Entwicklung durch die Funktion [2]

$$\tilde{m}_a(T) = \frac{\sqrt{\chi(T)}}{f_a} \quad (2.5)$$

beschrieben werden. Das ebenfalls in V_{QCD} aus Gleichung 2.2 eingehende $\chi(T)$ wird als topologische Suszeptibilität bezeichnet. Es stammt aus der Quantenchromodynamik und beschreibt den Einfluss der erwähnten Instantone im Zeit- bzw. Temperaturverlauf und damit die Entwicklung des Axion-Potentials. Wichtig zu erwähnen ist, dass die Effekte der Instantonen bereits vor dem QCD-Phasenübergang von Bedeutung sind, da sie mit sinkender Temperatur zunehmend bewirken, dass sich das anfangs flache Axion-Potential stetig dem späteren cosinusförmigen Verlauf annähert [9]. Das bedeutet, dass das Axion bereits vorher eine nichtverschwindende, im Zeitverlauf ansteigende Masse besitzt, die bei sehr hohen Temperaturen jedoch sehr klein ist. Mathematisch soll dieses Verhalten im Folgenden durch [2]

$$\tilde{m}_a(T) \simeq m_a \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } T \leq T_{\text{QCD}} \\ \left(\frac{T}{T_{\text{QCD}}} \right)^{-4} & \text{für } T \geq T_{\text{QCD}} \end{cases} \quad (2.6)$$

approximiert werden, was später insbesondere für die analytischen Rechnungen relevant wird. Anhand von Berechnungen der topologischen Suszeptibilität in Quelle [10] kann festgestellt werden, dass diese Approximation eine gute Näherung für die Masse darstellt.

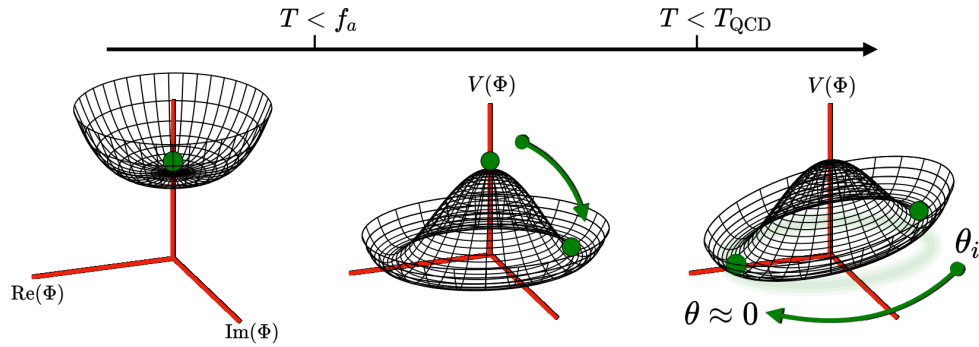


Abbildung 2.1: Schematische Entwicklung des Potentials des komplexen skalaren Feldes im Temperaturverlauf. Es zeigen sich drei wesentliche Stadien: Für hohe Temperaturen liegt ein quadratisches Potential (links) vor. Für $T < f_a$ kommt es durch thermische Effekte zum Übergang zu einem „Wine Bottle“-Potential (Mitte), was eine spontane Symmetriebrechung bewirkt. Das Feld „rollt“ in die Potentialmulde. Es kommt zur „Entstehung“ des Axion-Feldes. Bei einer Temperatur T_{QCD} folgt der QCD-Phasenübergang und das Axion erfährt ein Potential (rechts). Durch eine mögliche Deplatzierung vom Potentialminimum beginnt das Axion-Feld zu oszillieren, was Grundlage für den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Misalignment-Mechanismus ist (Abbildung entnommen aus Quelle [9]).

2.2 Axion-Dunkle Materie und der Misalignment-Mechanismus

Vor dem Hintergrund der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Entstehungsgeschichte des Axions soll nun die Produktion axionischer Dunkler Materie durch den Misalignment-Mechanismus näher diskutiert werden. Die Erläuterungen beziehen sich dabei auf das kosmologische Standard-Szenario, d.h. es werden noch

nicht die in den folgenden Abschnitten relevanten modifizierten Expansions Szenarien miteinbezogen.

Nach der spontanen Symmetriebrechung befindet sich das Feld bei einem willkürlichen initialen Winkel θ_i . Es ist möglich, dass das Feld nun innerhalb des Potentials, welches es insbesondere nach dem QCD-Phasenübergang erfährt, vom Potentialminimum deplaziert ist. Im Zuge der Energieminimierung beginnt das Feld schließlich innerhalb der quadratischen Potentialmulde zu oszillieren um das Minimum zu erreichen. Diese Feldoszillationen sind mit einer Energiedichte verbunden. Die Temperatur T_{osc} ab welcher die Oszillationen auftreten hängt mit der Hintergrundexpansion des Universums zusammen. Die Expansionsrate wird in der Kosmologie grundsätzlich durch den zeit- bzw. temperaturabhängigen Hubble-Parameter H charakterisiert, welcher über den Skalenfaktor R als $H = \dot{R}/R$ definiert ist [11]. Die Expansion wirkt auf das Axion-Feld als eine Art Dämpfung: Zu frühen Zeiten ist die Expansionsrate im Vergleich zur Axion-Masse sehr groß, d.h. das Feld wird überdämpft [9]. Es verharrt somit an seiner initialen Position θ_i , sodass noch keine Oszillationen stattfinden können. Mit einem mit sinkender Temperatur bzw. steigenden Skalenfaktor abnehmenden Wert von H , wird auch die Dämpfung geringer und der Winkel θ weicht zunehmend von θ_i ab. Bei dem erwähnten Punkt T_{osc} , welcher über die Relation [2]

$$3 H(T_{\text{osc}}) = \tilde{m}_a(T_{\text{osc}}) \quad (2.7)$$

definiert ist, endet die überdämpfte Phase und es kommt zu der beschriebenen, durch die Expansion weiterhin gedämpften Oszillation. Diese setzt sich bei einer weiter abnehmenden Expansionsrate fort. In Abschnitt 3.1 wird die Entwicklung von θ im Zeit- bzw. Temperaturverlauf mathematisch genauer beschrieben. Das allgemeine Prinzip des Misalignment-Mechanismus für ein beliebiges skalares Feld ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Dies lässt sich direkt auf das Axion-Feld übertragen.

Der Grund für die Identifizierung der mit den Oszillationen verbundenen Energiedichte ρ_a mit Dunkler Materie hängt mit der Abhängigkeit von ρ_a mit dem Skalenfaktor zusammen: Vor Einsetzen der Oszillation liegt eine konstante Energiedichte vor, was dem klassischen Verhalten Dunkler Energie entspricht [9]. Nach Erfüllung der Oszillationsbedingung, Gleichung 2.7, ändert sich dies, da ρ_a nun langfristig mit R^{-3} abnimmt. Dies entspricht dem klassischen Verhalten von Materie [9], weshalb geschlossen werden kann, dass die diskutierten Prozesse zur Entstehung einer Dunkle Materie-Population führen können. Wie sich in den folgenden Abschnitten zeigen wird, hängt die entstandene Gesamtenergiedichte von dem initialen Winkel θ_i sowie der Axion-Masse m_a ab.

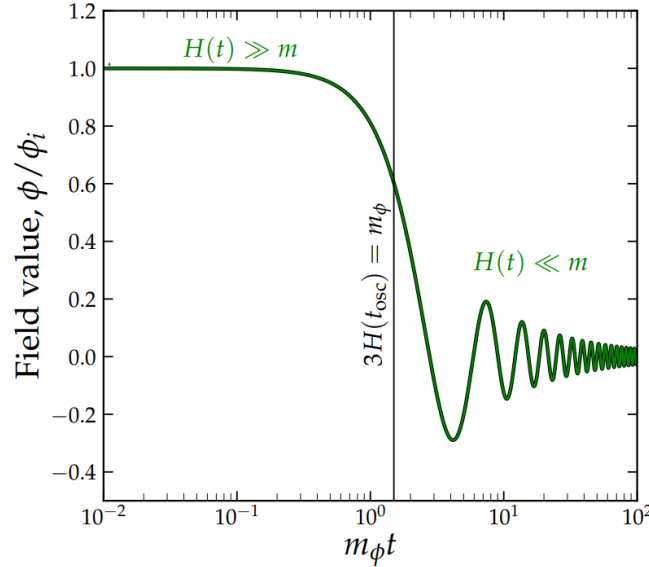


Abbildung 2.2: Darstellung der Entwicklung eines vom Potentialminimum deplatzierten beliebigen skalaren Feldes ϕ . Aufgetragen ist der auf den initialen Wert ϕ_i normierte Feldwert ϕ gegen die Zeit multipliziert mit der Masse m_ϕ . Zu Beginn verharrt das Feld bei ϕ_i , da die Hubble-Rate sehr viel größer als die Masse ist und es zur Überdämpfung kommt. Mit sinkendem H im Zeitverlauf wird die Dämpfung schwächer und das Feld beginnt sich von ϕ_i zu entfernen. Bei Erfüllung der Oszillationsbedingung, $3H(t_{\text{osc}}) = m_\phi$, beginnt die gedämpfte Oszillationsphase, wobei ϕ versucht, das Potentialminimum zu erreichen (Abbildung entnommen aus Quelle [9]).

Expansionsszenarien des frühen Universums

3

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen der Produktion axionischer Dunkler Materie durch den Misalignment-Mechanismus im Rahmen verschiedener Expansionsszenarien des frühen Universums dargestellt. Dabei wird zwischen dem kosmologischen Standardszenario und sogenannten modifizierten Expansionsszenarien (englisch „Nonstandard Cosmologies“) unterschieden. Für beide Fälle sollen im Folgenden sowohl mit analytisch-approximativen als auch numerisch-exakten Methoden die wesentlichen Relationen und Zusammenhänge ermittelt werden.

3.1 Das kosmologische Standard-Szenario

Zunächst wird das kosmologische Standard-Szenario betrachtet. Dieses geht von einer Dominanz der Strahlungs-Energiedichte im frühen Universum aus. Strahlungsdominanz bedeutet hierbei, dass relativistische Teilchen den größten Anteil der gesamten Energiedichte des Universums ausmachen. Ziel in diesem Kapitel ist es zunächst analytisch einen Ausdruck für die Gesamtenergiedichte axionischer Dunkler Materie „heutzutage“ zu erhalten, welcher von den freien Parametern des Modells abhängt. Bei Letzteren handelt es sich konkret um die Axion-Masse m_a und den initialen Feld- bzw. Winkelwert θ_i . Durch den Vergleich dieser Relation mit dem experimentellen Wert der Dunkle Materie-Energiedichte kann schließlich ein Wertebereich für die freien Parameter ermittelt werden. Numerisch wird ähnlich vorgegangen, wobei keine Approximationen vorgenommen sondern die relevanten Gleichungen exakt gelöst werden.

3.1.1 Analytische Betrachtung

Für die analytische Betrachtung wird zunächst der Hubble-Parameter notiert. Dieser ist gegeben durch die erste Friedmann-Gleichung, wobei die kosmologische Konstante sowie die Krümmung der Metrik hier nicht berücksichtigt werden. Es gilt [11]

$$H^2 = \frac{\rho}{3 M_P^2}, \quad (3.1)$$

wobei ρ die gesamte Energiedichte des Universums darstellt. M_P ist die reduzierte Planck-Masse gegeben durch $M_P = 1/\sqrt{8\pi G} \approx 2,4 \cdot 10^{18} \text{ GeV}$, mit G als Gravitationskonstante [6]. Im Falle einer Dominanz der Strahlungs-Energiedichte ρ_R über alle anderen Beiträge zu ρ gilt

$$H(T) = \sqrt{\frac{\rho_R(T)}{3 M_P^2}}. \quad (3.2)$$

Eine explizite Temperaturabhängigkeit von H lässt sich durch

$$H(T) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{g_*(T)}{10}} \frac{T^2}{M_P} \quad (3.3)$$

herstellen. Dies gilt, da ρ_R allgemein gegeben ist durch [11]

$$\rho_R(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4. \quad (3.4)$$

Die temperaturabhängige Größe g_* entspricht der Anzahl relativistischer Freiheitsgrade bezüglich ρ_R und folgt aus der Teilchenphysik. Dabei werden die Beiträge aller entsprechenden Teilchensorten berücksichtigt [11].

Der Ausdruck für $H(T)$ aus Gleichung 3.3 kann genutzt werden um die Temperatur T_{osc} , bei welcher das Axion-Feld beginnt zu oszillieren, zu bestimmen. Dazu wird

die in Abschnitt 2.2 eingeführte Oszillationsbedingung, Gleichung 2.7, genutzt, wobei durch Einsetzen von H sowie anschließender Umformung

$$\begin{aligned} 3H(T_{\text{osc}}) &= \pi \sqrt{\frac{g_{\star}(T_{\text{osc}})}{10}} \frac{T_{\text{osc}}^2}{M_P} \stackrel{!}{=} \tilde{m}_a(T_{\text{osc}}) \\ \Leftrightarrow T_{\text{osc}} &= \left(\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{10}{g_{\star}(T_{\text{osc}})}} M_P \tilde{m}_a(T_{\text{osc}}) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

resultiert.

Je nachdem ob T_{osc} größer oder kleiner als die QCD-Phasenübergangstemperatur T_{QCD} ist, werden unterschiedliche Ausdrücke für $\tilde{m}_a$ nach Gleichung 2.6 erhalten. Einsetzen und Umformen ergibt folgende Relation für die Oszillationstemperatur

$$T_{\text{osc}} \simeq \begin{cases} \left(\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{10}{g_{\star}(T_{\text{osc}})}} m_a M_P \right)^{1/2} & \text{für } T_{\text{osc}} \leq T_{\text{QCD}} \\ \left(\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{10}{g_{\star}(T_{\text{osc}})}} m_a M_P T_{\text{QCD}}^4 \right)^{1/6} & \text{für } T_{\text{osc}} \geq T_{\text{QCD}}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Dieses Resultat stimmt mit jenem aus Quelle [2] überein. Grundsätzlich werden im Folgenden, wie auch in den nächsten Abschnitten, oft analoge Ergebnisse zu dieser Arbeit hergeleitet. Allerdings wird in diesen Fällen auf Zitation verzichtet.

Neben dem Hubble-Parameter charakterisiert auch die Entropiedichte $s(T)$, welche die Standardmodell-Teilchen beschreibt, die Entwicklung des Universums und dessen Konstituenten. Diese ist in Abhängigkeit der Temperatur gegeben durch [11]

$$s(T) = \frac{2\pi^2}{45} g_{\star S}(T) T^3, \quad (3.7)$$

wobei $g_{\star S}(T)$ der Anzahl entropischer Freiheitsgrade bezüglich des Standard Modells Sektors entspricht. „Heutzutage“, bei $T = T_0$, beläuft sich der Wert für die Entropiedichte auf $s(T_0) \simeq 2,9 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3}$ [2], was für folgende Berechnungen relevant wird. Für die spätere Analyse wird auch die Zeitentwicklung von s benötigt, welche sich aus einer im Folgenden motivierten Differentialgleichung ergibt: Ausgangspunkt hierfür ist die Erhaltung der Gesamtentropie S im Zeitverlauf, d.h. $dS/dt = 0$. Die Entropiedichte ist definiert als Entropie pro Skalenfaktorvolumen, sodass

$$s = \frac{S}{R^3} \Leftrightarrow S = R^3 s \quad (3.8)$$

gilt. Eingesetzt in obige Bedingung für die Entropieerhaltung ergibt sich

$$\frac{dS}{dt} = s \frac{d}{dt} R^3 + R^3 \frac{ds}{dt} = 3R^2 s \frac{dR}{dt} + R^3 \frac{ds}{dt} = 0. \quad (3.9)$$

Da R^3 im betrachteten Intervall nicht Null wird, resultiert Teilen durch dieses unter Berücksichtigung von $H = \dot{R}/R$ in

$$\frac{ds}{dt} + 3 H s = 0. \quad (3.10)$$

Diese Relation ist insofern relevant, als dass mit ihr eine Beziehung zwischen Temperatur und Skalenfaktor hergestellt werden kann. Dies wird im numerischen Teil dieses Abschnitts genauer erläutert.

Nun wird genauer betrachtet, wie sich das Axion-Feld im expandierenden Universum entwickelt. Dazu soll im Folgenden dessen Bewegungsgleichung hergeleitet werden, welche aus der Lagrange-Dichte-Funktion $\mathcal{L}$ unter Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen folgt. $\mathcal{L}$ ergibt sich klassischerweise aus der Differenz von kinetischer Energie und Potential. Es folgt somit unter Berücksichtigung des Axion-Potentials aus Gleichung 2.2 nach [2]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a - \tilde{m}_a^2(t) f_a^2 \left(1 - \cos \frac{a}{f_a} \right). \quad (3.11)$$

In diesem Fall wird von der Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) Metrik ausgegangen, welche im Falle einer vernachlässigten Metrikkrümmung gegeben ist durch [11]

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, R^2, R^2, R^2) \quad (3.12)$$

Zudem wird $g = \det(g_{\mu\nu}) = -R^6$ als Determinante des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ eingeführt. Die Euler-Lagrange-Gleichung ist im Rahmen der betrachteten Metrik gegeben durch [9]

$$\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial a} - \partial_\mu \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu a)} = 0 \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow R^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} - \partial_\mu \left(R^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu a)} \right) = 0, \quad (3.14)$$

wobei letztere Umformung durch Einsetzen von g aus dem FLRW-Fall erfolgt. Es sollen nun beide Summanden der linken Seite letzterer Gleichung separat betrachtet werden. Beginnend beim ersten Summanden folgt durch Einsetzen von $\mathcal{L}$

$$R^3 \frac{\partial}{\partial a} \left(\tilde{m}_a^2 f_a^2 \cos \left(\frac{a}{f_a} \right) \right) = -R^3 \tilde{m}_a^2 f_a \sin \left(\frac{a}{f_a} \right). \quad (3.15)$$

Für den zweiten Summanden folgt unter Verwendung von

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu a)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu a)} \partial_\gamma a \partial^\gamma a \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu a)} g^{\gamma\nu} \partial_\gamma a \partial_\nu a \\
&= \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} (\delta_\gamma^\mu \partial_\nu a + \partial_\gamma a \delta_\nu^\mu) \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu a + \frac{1}{2} g^{\gamma\mu} \partial_\gamma a \\
&= \frac{1}{2} \partial^\mu a + \frac{1}{2} \partial^\mu a \\
&= \partial^\mu a.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Wiedereinsetzen der Summanden in die Euler-Lagrange-Gleichung resultiert in

$$-\partial_\mu (R^3 \partial^\mu a) - R^3 \tilde{m}_a^2 f_a \sin\left(\frac{a}{f_a}\right) = 0. \tag{3.17}$$

In diesem Fall ist aufgrund von Homogenitätsannahmen lediglich die Zeitentwicklung von Interesse, sodass nur die nullte Komponente der Gleichung betrachtet wird:

$$-\partial_t (R^3 \dot{a}) - R^3 \tilde{m}_a^2 f_a \sin\left(\frac{a}{f_a}\right) = 0 \tag{3.18}$$

Nach Anwendung der Kettenregel sowie weiteren Umformungen folgt

$$\ddot{a} + 3\dot{a} \frac{\dot{R}}{R} + \tilde{m}_a^2 f_a \sin\left(\frac{a}{f_a}\right) = 0, \tag{3.19}$$

was unter Nutzung von $\theta = a/f_a$ sowie Teilen durch f_a in der gesuchten Bewegungsgleichung für das Axion

$$\ddot{\theta} + 3H(t)\dot{\theta} + \tilde{m}_a^2(t) \sin \theta = 0 \tag{3.20}$$

resultiert. Für eine im strahlungsdominierten Universum klassische Zeitabhängigkeit von H (vergleiche Quelle [11]) kann diese als Differentialgleichung eines zeitabhängig gedämpften harmonischen Oszillators identifiziert werden, was mit den Überlegungen aus Abschnitt 2.2 korrespondiert.

Mithilfe der Lösung dieser Differentialgleichung θ kann schließlich die mit der Schwingung des Axionfeldes verbundene Energiedichte berechnet werden. Diese folgt unter Verwendung des Energie-Impuls-Tensors und ergibt sich nach Quelle [2] zu

$$\rho_a(t) = \frac{\dot{a}^2}{2} + \tilde{m}_a^2(t) f_a^2 \left(1 - \cos \left(\frac{a}{f_a} \right) \right). \quad (3.21)$$

Die Energiedichte ρ_a lässt sich ebenfalls durch die im Zeitverlauf erhaltene Axion-Teilchenzahl N_a ausdrücken, was sich für die folgenden analytischen Rechnungen als vorteilhaft erweist. Grundsätzlich gilt hierbei [2]

$$\rho_a(t) = \tilde{m}_a(t) n_a(t) \quad (3.22)$$

mit n_a als Teilchendichte $n_a = N_a/R^3$. Da wie bereits erwähnt ein Vergleich zum experimentellen Wert der Energiedichte Ω_{DM} zur Ermittlung eines Wertebereiches für die freien Parameter angestrebt wird, wird ρ_a zum Zeitpunkt t_0 , also „heutzutage“, ausgewertet. Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \rho_a(t_0) &= \tilde{m}_a(t_0) n_a(t_0) \\ &= \tilde{m}_a(t_0) \frac{N_a(t_0)}{R(t_0)^3} && (\text{mit } n_a = \frac{N_a}{R^3}) \\ &= \tilde{m}_a(t_0) n_a(t_{\text{osc}}) \left(\frac{R(t_{\text{osc}})}{R(t_0)} \right)^3 && (\text{mit Erhaltung } N_a(t_0) = N_a(t_{\text{osc}})) \\ &= \rho_a(t_{\text{osc}}) \frac{m_a}{\tilde{m}_a(t_{\text{osc}})} \left(\frac{R_{\text{osc}}}{R_0} \right)^3 && (\text{mit } \tilde{m}_a(t_0) = m_a \text{ da } T_0 \leq T_{\text{QCD}}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

wobei $R(t_0) \equiv R_0$ und $R(t_{\text{osc}}) \equiv R_{\text{osc}}$ eingeführt werden.

Weiter lässt sich unter Nutzung von [2]

$$\rho_a(T_{\text{osc}}) \simeq \frac{\tilde{m}_a^2(T_{\text{osc}})}{2} f_a^2 \theta_i^2, \quad (3.24)$$

wobei die Zeitvariable durch die Temperatur ersetzt wird, die Relation

$$\begin{aligned} \rho_a(t_0) &\simeq \frac{\tilde{m}_a^2(T_{\text{osc}})}{2} f_a^2 \theta_i^2 \frac{m_a}{\tilde{m}_a(T_{\text{osc}})} \left(\frac{R(T_{\text{osc}})}{R_0} \right)^3 \\ &= \frac{\tilde{m}_a(T_{\text{osc}})}{2} m_a f_a^2 \theta_i^2 \frac{s(T_0)}{s(T_{\text{osc}})}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

herleiten. Hierbei wird im letzten Schritt Entropieerhaltung $S(T_0) = S(T_{\text{osc}})$ genutzt, woraus folgt $s(T_0)/s(T_{\text{osc}}) = (R(T_{\text{osc}})/R_0)^3$.

Mithilfe dieser Ausdrücke lässt sich eine Relation für die Gesamtenergiedichte der axionischen Dunklen Materie Ω_a herleiten. Diese ergibt sich als Quotient von $\rho_a(t_0)$ und der kritischen Energiedichte ρ_c [2]. Ausgangspunkt für die Bestimmung ist die Approximation von $\rho_a(t_0)$ aus Gleichung 3.25: Für $\tilde{m}_a$ wird hier der entsprechende Fall aus Gleichung 2.6 genutzt. Die Entropiedichte s ergibt sich gemäß Gleichung 3.7. In diese Funktionen geht der unter Gleichung 3.6 eingeführte Ausdruck für T_{osc} ein. Die Größe f_a in Abhängigkeit von m_a ist durch Gleichung 2.4 gegeben und zur Auswertung der Funktionen der relativistischen Freiheitsgrade bei der Oszillationstemperatur wird $T_{\text{osc}} \approx T_{\text{QCD}}$ angenommen. Dies erscheint insofern als gerechtfertigt, als dass in den Folgeresultaten lediglich die Größenordnung von Interesse ist. Nach einigen Rechenschritten folgt schließlich für die Gesamtenergiedichte

$$\Omega_a \equiv \frac{\rho_a(T_0)}{\rho_c} \simeq \begin{cases} 0,006 \theta_i^2 \left(\frac{m_a}{5,6 \mu\text{eV}} \right)^{-3/2} & \text{für } m_a \lesssim 3 H(T_{\text{QCD}}) \\ 0,17 \theta_i^2 \left(\frac{m_a}{5,6 \mu\text{eV}} \right)^{-7/6} & \text{für } m_a \gtrsim 3 H(T_{\text{QCD}}), \end{cases} \quad (3.26)$$

wobei ρ_c einem Wert von $\rho_c \simeq h^2 \cdot 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}/\text{cm}^3$ mit $h \simeq 0,674$ entspricht [2].

Hier wird anstelle der Bedingungen an die Temperatur relativ zu T_{QCD} eine äquivalente Bedingung an m_a relativ zu $3H(T_{\text{QCD}})$ gestellt. Letzterer Ausdruck entspricht der Axion-Masse bei T_{QCD} , welche sich unter Verwendung von H aus Gleichung 3.3 zu

$$3 H(T_{\text{QCD}}) \simeq 4,8 \cdot 10^{-11} \text{ eV} \quad (3.27)$$

ergibt.

3.1.2 Numerische Betrachtung

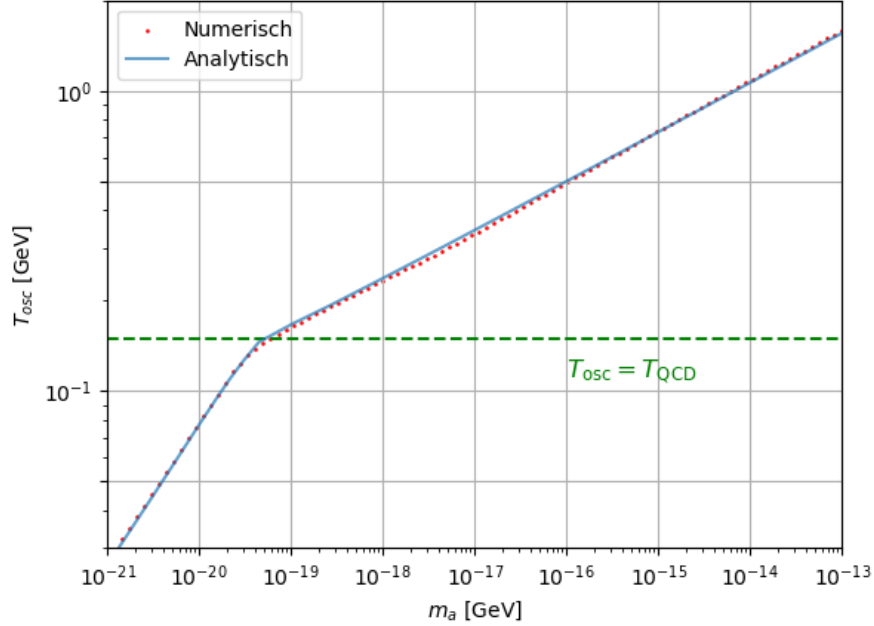


Abbildung 3.1: Darstellung der Oszillationstemperatur T_{osc} in Abhängigkeit der Axion-Masse m_a für das kosmologische Standard-Szenario. Eingezeichnet sind sowohl die numerischen als auch die analytischen Resultate. Zudem wird ein Richtwert $T_{\text{osc}} = T_{\text{QCD}} = 150 \text{ MeV}$ angegeben.

Nun erfolgt eine Beschreibung des numerischen Verfahrens. Zunächst soll die Oszillationstemperatur T_{osc} in Abhängigkeit der Axion-Masse m_a für das kosmologische Standard-Szenario bestimmt werden. Dazu wird die allgemeine Definition von T_{osc} nach Gleichung 2.7 genutzt, wobei H durch Gleichung 3.3 gegeben ist. Für $\tilde{m}_a$ wird die exakte Relation für die temperaturabhängige Axion-Masse, Gleichung 2.5, genutzt. Hier wird für f_a Gleichung 2.4 eingesetzt, sodass sich eine Abhängigkeit von m_a ergibt. Eine numerische Funktion für die in Gleichung 2.5 eingehende topologische Suszeptibilität χ in Abhängigkeit der Temperatur wird mithilfe von [10] konstruiert. Die resultierende Gleichung wird numerisch für ein bestimmtes Intervall von m_a gelöst. Die Ergebnisse können in Abbildung 3.1 eingesehen werden.

Der Verlauf der Kurve lässt sich anschaulich folgendermaßen interpretieren: Wird die Oszillationsbedingung für das Axion Feld, Gleichung 2.7, unter Berücksichtigung der approximativen Temperaturabhängigkeit von $\tilde{m}_a$ aus Gleichung 2.6, genauer betrachtet, fällt auf, dass für steigende Werte von m_a bzw. $\tilde{m}_a$ die Bedingung $3H = \tilde{m}_a$ früher erfüllt ist. T_{osc} nimmt daher entsprechend höhere Werte an. Für $T_{\text{osc}} > T_{\text{QCD}}$ ändert sich das Verhalten der Oszillationstemperatur, da die Steigung der Kurve abnimmt. Dies liegt an der Änderung der Temperaturabhängigkeit von $\tilde{m}_a$ beim QCD-Phasenübergang: Für Temperaturen größer als T_{QCD} ist die Axion-Masse stets kleiner als der sich unterhalb von T_{QCD} einstellende konstante Wert m_a . Dies hat ebenfalls Einfluss darauf, wann die Oszillationsbedingung erfüllt wird, was in dem erwähnten veränderten Gradienten resultiert. Die hier ermittelten numerischen Resultate weisen eine gute Übereinstimmung zum ebenfalls in Abbildung 3.1 dargestellten analytischen Ergebnis auf. Letzteres ergibt sich anhand von Gleichung 3.6. Es ist davon auszugehen, dass die teils minimalen Abweichungen (z.B. an dem Punkt $T_{\text{osc}} = T_{\text{QCD}}$) auf die approximative Natur der analytischen Methode, insbesondere bezüglich Gleichung 2.6, zurückzuführen ist.

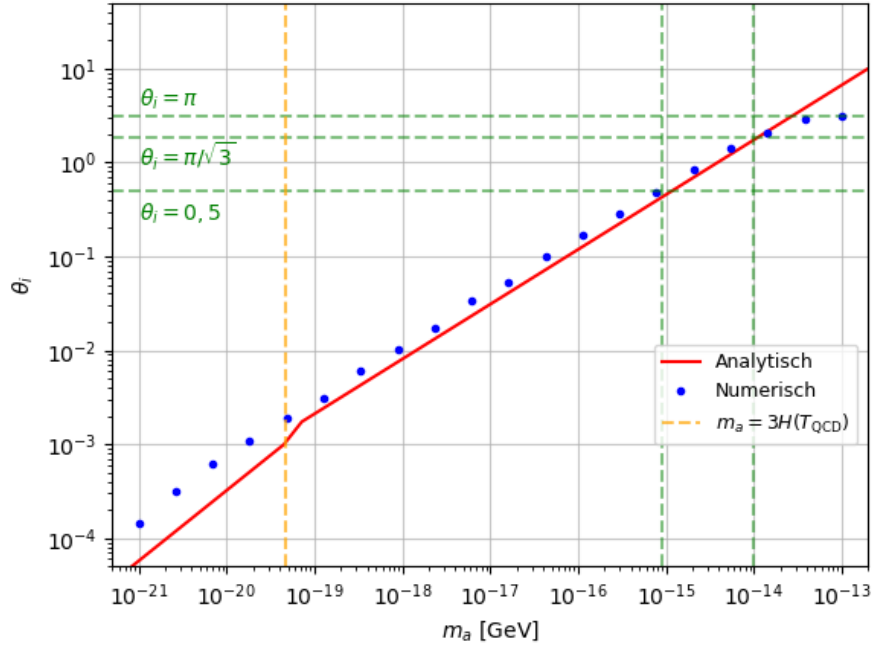


Abbildung 3.2: Darstellung des initialen Winkels θ_i in Abhängigkeit der Axion-Masse m_a . Die durch die Kurven angegebenen Werte korrespondieren mit der experimentellen Dunkle Materie-Energiedichte Ω_{DM} . Eingezeichnet sind sowohl die numerischen als auch die analytischen Resultate. Zudem sind einige θ_i -Werte und die korrespondierenden Massen explizit angegeben. Durch diese sollen relevante Änderungen im Verhalten der Kurve markiert werden. Außerdem ist die Axion-Masse beim QCD-Phasenübergang, $3H(T_{\text{QCD}})$, eingezeichnet.

In einem nächsten Schritt wird mit numerischen Methoden der Parameterraum θ_i gegen m_a ermittelt, welcher mit dem experimentellen Wert der Dunkle Materie-Energiedichte $\Omega_{\text{DM}} \approx 0,26$ korrespondiert. Dazu werden zunächst einige weitere analytische Relationen hergeleitet: Zunächst wird die Entwicklung der Temperatur mit dem Skalenfaktor benötigt. Ausgangspunkt hierfür ist Gleichung 3.10 in welche für s Gleichung 3.7 eingesetzt wird. Anschließende Umformung sowie Nutzung der Produktregel ergibt

$$T^3 \frac{dg_{*S}}{dt} + g_{*S} \frac{d}{dt} T^3 + 3H g_{*S} T^3 = 0 \quad (3.28)$$

Für die Zeitableitungen der temperaturabhängigen Funktionen wird die Kettenregel genutzt, wobei sich im Fall von g_{*S} konkret

$$\frac{d}{dt}g_{*S}(T(t)) = \frac{dg_{*S}}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{dg_{*S}}{dT} \frac{dT}{dR} \frac{dR}{dt} \quad (3.29)$$

ergibt. Im letzten Schritt wird hier die Kettenregel für T in Abhängigkeit von R genutzt. Analoges Vorgehen für die andere Zeitableitung führt auf

$$T^3 \frac{dg_{*S}}{dT} \frac{dT}{dR} \frac{dR}{dt} + 3g_{*S}T^2 \frac{dT}{dR} \frac{dR}{dt} + 3Hg_{*S}T^3 = 0 \quad (3.30)$$

Unter Nutzung von $H = \dot{R}/R$ folgt nach Umformung eine Differentialgleichung für $T(R)$ der Form

$$\frac{dT}{dR} = - \left(1 + \frac{T}{3g_{*S}} \frac{dg_{*S}}{dT} \right)^{-1} \left(\frac{T}{R} \right). \quad (3.31)$$

Diese wird numerisch gelöst.

Zur Ermittlung des Parameterraums muss nun die Axion-Energiedichte in Abhängigkeit von θ_i und m_a numerisch bestimmt werden, sodass ein Vergleich zur gegebenen Dunkle Materie-Energiedichte möglich wird. Hierfür wird Gleichung 3.21 benötigt. Der hier eingehende Axion-Feldwert a bzw. der Winkel θ muss somit zunächst mithilfe der Axion-Bewegungsgleichung 3.20 numerisch bestimmt werden. Es erweist sich als sinnvoll θ hier als Funktion des Skalenfaktors aufzufassen, welcher wiederum zeitabhängig ist. Gleichung 3.20 muss daher als Differentialgleichung in R umgeschrieben werden. Für die Zeitableitungen ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\theta(R(t)) = \frac{d\theta}{dR} \frac{dR}{dt} \quad (3.32)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{d\theta}{dR} \frac{d^2R}{dt^2}. \quad (3.33)$$

Wird dies in die Bewegungsgleichung eingesetzt folgt nach Teilen durch $\dot{R}^2$

$$\theta'' + \left(\frac{\ddot{R}}{\dot{R}^2} + 3\frac{\dot{H}}{\dot{R}} \right) \theta' + \frac{1}{\dot{R}^2} \tilde{m}_a^2 \sin \theta = 0, \quad (3.34)$$

wobei Striche Ableitungen nach dem Skalenfaktor und Punkte, wie üblich, Ableitungen nach der Zeit repräsentieren. Die Klammer im zweiten Summanden lässt sich unter Nutzung der Ableitung des Hubble-Parameters nach dem Skalenfaktor, welche nach Quotienten- und Kettenregel durch

$$H' = \frac{\ddot{R}}{R\dot{R}} - \frac{\dot{R}}{R^2} \quad (3.35)$$

gegeben ist, weiter umschreiben. Es ergibt sich letztendlich unter Berücksichtigung der Definition des Hubble-Parameters

$$\theta'' + \left(\frac{4}{R} + \frac{H'(R)}{H(R)} \right) \theta' + \left(\frac{\tilde{m}_a(R)}{H(R)R} \right)^2 \sin \theta = 0. \quad (3.36)$$

Diese Differentialgleichung wird numerisch implementiert und für verschiedene Werte von m_a und θ_i gelöst. Das Verfahren läuft dabei folgendermaßen ab: Es wird zunächst für einen bestimmten Wertebereich über m_a iteriert, wobei die Differentialgleichung 3.36 bzw. das eingehende $\tilde{m}_a$ nach Gleichung 2.5 pro Iteration neu gesetzt werden. Um in letzterer Gleichung eine m_a -Abhängigkeit herzustellen wird f_a mithilfe von Gleichung 2.4 ersetzt. Der in die Differentialgleichung eingehende Hubble-Parameter wird mit Gleichung 3.3 berechnet, wobei H' durch die sich hieraus ergebende Ableitung nach R gegeben ist. Letztere hängt ebenfalls von der durch Gleichung 3.31 gegebenen Ableitung dT/dR ab. Die Abhängigkeit von dem Skalenfaktor lässt sich in den beiden Funktionen durch die bekannte Lösung $T(R)$ realisieren. In jedem Schritt der Iteration über m_a erfolgt eine weitere Iteration über den initialen Winkel θ_i über einen bestimmten Wertebereich. Für jeden

θ_i -Wert wird die Differentialgleichung nun gelöst, wobei dieser als Anfangsbedingung fungiert. Als weitere Anfangsbedingung wird $\theta'(R_{\text{init}}) = 0$ genutzt. Das weitere Vorgehen orientiert sich an jenem aus Quelle [10]: Das Lösen erfolgt in einem Temperaturintervall von $5T_{\text{osc}}(m_a)$ bis $0,1T_{\text{osc}}(m_a)$, welches numerisch in ein entsprechendes Intervall des Skalenfaktors umgerechnet wird. Mit der Lösung $\theta(R)$ bzw. dem aus der bekannten Relation $T(R)$ bestimmbaren $\theta(T)$ kann die Energiedichte $\rho_a(t)$ aus Gleichung 3.21 berechnet werden. Aus Gründen die im Folgenden ersichtlich werden, wird allerdings zunächst die Teilchendichte n_a berechnet, welche mit der Energiedichte über Gleichung 3.22 zusammenhängt. Das hier eingehende $\tilde{m}_a$ ist wiederum durch Gleichung 2.5 gegeben, wobei die m_a Abhängigkeit durch Nutzung von Gleichung 2.4 folgt. Die ebenfalls auftretende Ableitung von θ nach der Zeit kann wiederum, unter Berücksichtigung der Kettenregel, durch die bekannte Ableitung von θ nach R berechnet werden. Gesucht ist nun $\rho_a(t_0)$, welches durch Gleichung 3.23 gegeben ist. Diese Relation kann unter Berücksichtigung von Gleichung 3.22 in Abhängigkeit der Teilchendichte ausgedrückt werden, wobei sich zusätzlich unter Nutzung der Entropieerhaltung

$$\rho_a(t_0) = \frac{n_a(t_{\text{osc}})}{s(t_{\text{osc}})} m_a s(t_0) \quad (3.37)$$

ergibt. Für die folgenden Überlegungen ist relevant, dass es sich bei dem Faktor n_a/s um eine Erhaltungsgröße handelt, was unter Berücksichtigung von Entropie- und Teilchenzahlerhaltung ersichtlich wird: Es erweist sich in den verschiedenen Iterationen als sinnvoll den Faktor n_a/s nicht bei t_{osc} bzw. T_{osc} auszuwerten, sondern diesen innerhalb eines bestimmten Temperaturintervalls zu mitteln. Dieses Temperaturintervall ist gegeben durch $0,2T_s$ bis $0,8T_s$, wobei T_s dem „tatsächlichen“ Beginn der Oszillationsphase entspricht. Konkret markiert T_s den Punkt, an welchem in $\theta(T)$ der erste Vorzeichenwechsel geschieht. Dies kann numerisch ermittelt werden.

Die nun ermittelte Gesamtenergiedichte Ω_a , welche aus Division von $\rho_a(t_0)$ aus Gleichung 3.37 und ρ_c folgt, wird nun in eine Lösungsmatrix eingetragen, wobei Zeile bzw. Spalte den betrachteten m_a - bzw. θ_i -Wert angeben. Nach Durchlaufen

aller θ_i -Werte für ein spezifisches m_a wird die Matrixzeile interpoliert, sodass eine Funktion der Energiedichte in Abhängigkeit von θ_i resultiert. Diese Funktion kann nun mit dem experimentellen Wert $\Omega_{\text{DM}} = 0,26$ gleichgesetzt werden. Nach numerischer Lösung dieser Gleichung wird derjenige θ_i -Wert erhalten, welcher für das betrachtete m_a die korrekte experimentelle Energiedichte liefert. Dieser Wert wird in einem Lösungsvektor gespeichert. Nach Durchlaufen aller m_a -Iterationsschritte ergibt sich schließlich die gesuchte Lösung $\theta_i(m_a)$.

Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.2 dargestellt. Ebenfalls eingezeichnet ist das analytische Resultat, welches unter Verwendung von Gleichung 3.26 resultiert. Der Vergleich zwischen numerischem und analytischem Ergebnis zeigt für kleine m_a -Werte trotz geringerer Abweichungen ein in etwa gleiches Verhalten von $\theta_i(m_a)$. Die insbesondere für m_a -Werte kleiner als die Axion-Masse beim QCD-Phasenübergang, $3H(T_{\text{QCD}})$, auftretenden Abweichungen, können wiederum auf die approximative Natur des analytischen Verfahrens zurückgeführt werden. Ein relevanter Unterschied zwischen dem Verhalten von numerischem und analytischem Ergebnis liegt jedoch bei $\theta_i \gtrsim \pi/\sqrt{3}$ vor. Der Grund hierfür sind Anharmonizitäten im Axion-Potential, welche genauer in Quelle [2] beschrieben werden. Die Axion-Bewegungsgleichung hängt nach Gleichung 3.20 bzw. Gleichung 3.36 von $\sin \theta$ ab, wobei für kleine Winkel in guter Näherung $\sin \theta \sim \theta$ gilt. Dies geht in die analytischen Resultate ein. Für $\theta \sim \pi$ gilt die Approximation jedoch nicht mehr, was in dem analytischen Verfahren nicht berücksichtigt wird. Numerisch wird keine Approximation vorgenommen, weshalb die Ergebnisse in diesem Bereich exakter sind. Daher muss auch der in Quelle [2] eingeführte „anharmonische Faktor“ hier nicht berücksichtigt werden. Dieser Faktor wird genutzt, um die ungenaue Approximation des Sinus bei hohen θ -Werten zu kompensieren. Dadurch, dass dieser Faktor in Quelle [2] im Rahmen des numerischen Verfahrens eingeführt wird, ist davon auszugehen, dass - trotz fehlender Angaben zum konkreten Verfahren - die numerischen Ergebnisse lediglich Korrekturen der analytischen Resultate darstellen. Es wird dort somit aller Voraussicht nach kein exaktes numerisches Verfahren durchlaufen, sondern in die Ergebnisse fließen zunächst sämtliche Approximationen der analytischen Methode mit ein. Der anharmonische Faktor sorgt in

Quelle [2] lediglich dafür, dass die Kurve $\theta_i(m_a)$ in dem Bereich großer Winkel einen ähnlichen Verlauf wie bei den hier präsentierten Ergebnissen, Abbildung 3.2, aufweist. Das Ergebnis dieser Arbeit kann, falls die Annahmen über das Verfahren aus Quelle [2] korrekt sind, somit als präziser angesehen werden.

3.2 Modifizierte Expansionsszenarien

In dieser Arbeit von zentraler Bedeutung sind modifizierte Expansionsszenarien des frühen Universums. Diese Modelle werden in verschiedenen Zusammenhängen diskutiert und stellen ein aktuelles Forschungsthema dar. Grundsätzlich fallen unter den Begriff Szenarien, welche die Evolution des Universums abweichend vom kosmologischen Standardmodell, beispielsweise anhand einer veränderten Entwicklung der relevanten Energiedichten, beschreiben. Es existieren viele verschiedene Modelle und Ansätze. In diesem Fall besteht die Modifikation in der Einführung eines generalisierten und nicht im kosmologischen Standardmodell enthaltenen Teilchenfeldes ϕ , welches mit einer Energiedichte ρ_ϕ verbunden ist. Ferner ist das Feld ϕ nicht Bestandteil des Standardmodells der Teilchenphysik und wird somit auch in seiner mathematischen Beschreibung in Abgrenzung zu den weiteren Energiedichten, insbesondere zu der im frühen Universum dominanten Standardmodell-Strahlung ρ_R , behandelt. ρ_ϕ durchläuft verschiedene im Folgenden erläuterte Phasen (vergleiche auch Abbildung 3.3), und erreicht dabei Größenordnungen, welche mit jenen von ρ_R vergleichbar sind. Entsprechend wird die Entwicklung bzw. Expansion des Universums durch ϕ (mit-)bestimmt und im Vergleich zum Standard-Fall modifiziert. Motiviert wird die Einführung von ϕ dadurch, dass bisher nicht erwiesen ist, dass in der Zeit vor Beginn der primordialen Nukleosynthese ab $T_{\text{BBN}} \approx 4 \text{ MeV}$ (BBN für „Big Bang Nucleosynthesis“) eine Dominanz der Strahlungs-Energiedichte vorlag [2]. Dies wird zwar typischerweise diskutiert, muss jedoch nicht der Fall gewesen sein. Während der primordialen Nukleosynthese kam es im Universum zur Entstehung der ersten leichten Atomkerne wie Helium und dessen Isotopen. Mithilfe von speziellen Messungen (z.B. anhand von Elementhäufigkeiten) kann diese Phase rekonstruiert werden, was eine Begrenzung für die Einführung einer möglichen modifizierten Expansion setzt. Neben ρ_R kann somit vor T_{BBN} eine Existenz von ρ_ϕ in Betracht gezogen werden.

Modifizierte Expansionsszenarien in diesem Kontext werden charakterisiert über einen Parameter β und anhand dessen unterschieden. Dieser wird definiert über

den Zustandsgleichungs-Parameter $\omega_\phi = p_\phi/\rho_\phi$ (im Folgenden nur als ω bezeichnet) des Feldes ϕ , welcher sich klassischerweise als Quotient aus Druck und Energiedichte ergibt [11]. Es gilt schließlich $\beta \equiv 3(\omega + 1)$. In dieser Arbeit werden Fälle betrachtet in denen $\beta < 4$ ist, was mit $\omega < 1/3$ korrespondiert. Der Fall $\beta = 3$ wird auch als Frühe Materie Dominanz (englisch „Early Matter Domination“ (EMD)) bezeichnet. Neben Fällen mit $\beta < 4$ werden in der aktuellen Forschung weitere Fälle diskutiert, z.B. die sogenannte „Kination“, d.h. eine Dominanz der kinetischen Energie (vergleiche Quelle [2]). Diese geht mit einem Wert von $\beta = 6$ einher.

Nun sollen Szenarien mit $\beta < 4$ genauer diskutiert und mathematisch beschrieben werden. Dazu werden zunächst die drei wesentlichen Stadien, welche das Feld ϕ per Definition in seiner Entwicklung durchläuft, erläutert. Durch Eingrenzen dieser Stadien auf bestimmte Temperatur- bzw. Skalenfaktorintervalle ergeben sich für das NSC drei Regionen, welche nun näher beschrieben werden. Vorab sei erwähnt, dass sich die Energiedichten von ϕ bzw. der Strahlung bei unabhängiger Betrachtung voneinander gemäß

$$\rho_\phi(R) = \rho_{\text{eq}} \left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^\beta \quad (3.38)$$

bzw.

$$\rho_R(R) = \rho_{\text{eq}} \left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^4 \quad (3.39)$$

entwickeln. Diese beiden Gleichungen ergeben sich aus grundlegenden Relationen der Kosmologie, welche die R -Abhängigkeit der Energiedichte mithilfe der jeweiligen Zustandsgleichung ausdrücken (vergleiche hierfür zum Beispiel Quelle [11]). Die hier eingehenden Konstanten bzw. Anfangswerte R_{eq} und ρ_{eq} werden weiter unten eingeführt.

Beginnend bei Region 1, d.h. bei hohen Temperaturen, liegt zunächst eine Dominanz der Strahlungs-Energiedichte vor. Diese dominiert in dem Zeitraum somit die Expansion des Universums entsprechend $H \sim \sqrt{\rho_R}/M_P$. Die Energiedichte ρ_ϕ

nimmt ab, allerdings weniger stark als ρ_R (vergleiche Gleichungen 3.38 und Gleichung 3.39). Sie ist dabei noch nicht von einer vergleichbaren Größenordnung wie die Strahlungs-Energiedichte, allerdings nähern sich die beiden Energiedichten stetig an. Kühlt das Universum weiter ab, kommt es bei einer Temperatur T_{eq} zum Beginn von Region 2: Bei T_{eq} ist ρ_ϕ gegenüber ρ_R von gleicher Größenordnung. Da ρ_ϕ ab diesem Punkt weiterhin weniger stark abnimmt im Vergleich zum mit R^{-4} abfallenden ρ_R , dominiert es in dieser Region die Energiedichte und damit die Expansion entsprechend $H \sim \sqrt{\rho_\phi}/M_P$. Anschließend folgt Region 3, welche mit einer weiteren Charakteristik von ϕ zusammenhängt: Das Feld zerfällt in andere Teilchen, welche wiederum Bestandteile des Standardmodells der Teilchenphysik sind. Dies ist nicht nur für die Entwicklung von ρ_ϕ , sondern auch für die daran gekoppelte Entwicklung von ρ_R relevant. Ab einem als T_c definierten Punkt, welcher das Ende von Region 2 und den Beginn von Region 3 markiert, treten diese Zerfälle in ausreichend großem Ausmaß auf um die Energiedichte ρ_R bzw. die Standard Modell-Temperatur signifikant zu beeinflussen [2]. Durch die Zerfälle kommt es hier zu einem relativen Anstieg von ρ_R/ρ_ϕ . Dennoch liegt auch in dieser Region noch eine Dominanz von ρ_ϕ vor. Der Punkt T_{end} bei dem der vollständige Zerfall von ϕ einsetzt bzw. ρ_ϕ aufgrund der dominierenden Zerfälle sehr steil abfällt und viel kleiner als ρ_R wird, stellt das Ende von Region 3 dar. ρ_R nimmt anschließend von einem höheren Wert ausgehend gemäß Gleichung 3.39 ab und dominiert fortan die Gesamtenergiedichte. Wichtig zu erwähnen ist, dass die hier beschriebenen Prozesse kontinuierlich aneinander anschließen und die Änderungen im Verhalten der Energiedichten bei Beginn einer neuen Region nicht sprunghaft auftreten. So findet bei T_{end} kein instantaner Zerfall des Feldes statt, sondern die Zerfälle beginnen gegenüber dem vorigen relativen Anstieg von ρ_ϕ zu überwiegen. Bei T_{end} endet auch das NSC-Szenario, da die Expansion des Universums fortan wieder durch das dominierende ρ_R bestimmt wird. Das Verhalten der Energiedichten ρ_R und ρ_ϕ wird ebenfalls in dem numerischen Resultat in Abbildung 3.3 dargestellt.

3.2.1 Analytische Betrachtung

Nun soll das Verhalten von ρ_R und ρ_ϕ mathematisch analysiert werden. Die Zeitentwicklung dieser Größen wird durch zwei gekoppelte Boltzmann-Gleichungen beschrieben. Diese sind gegeben durch [2]

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + 3(1 + \omega) H \rho_\phi = -\Gamma_\phi \rho_\phi \quad (3.40)$$

$$\frac{ds}{dt} + 3 H s = \frac{\Gamma_\phi}{T} \rho_\phi, \quad (3.41)$$

wobei Γ_ϕ die totale Zerfallsrate von ϕ darstellt. Γ_ϕ hat die Dimension einer Energie. Die zweite Gleichung für die Entropiedichte s kann - wie weiter unten beschrieben - in eine Differentialgleichung für ρ_R umgeschrieben werden. Die rechte Seite der beiden Boltzmann-Gleichungen kann als „Quellterm“ verstanden werden. Dieser bezieht sich auf den Zerfall von ϕ , welcher ab einem bestimmten Punkt den relativen Anstieg von ρ_R bewirkt. Die rechte Seite der Gleichung für s , Gleichung 3.41, wird daher in Abhängigkeit von ρ_ϕ geschrieben und positiv gewertet. Aus dimensional Gründen für s wird zusätzlich ein Faktor $1/T$ berücksichtigt. Die rechte Seite von Gleichung 3.40 ist aufgrund des Zerfalls und der damit einhergehenden steileren Abnahme von ρ_ϕ negativ.

Durch Lösen der Boltzmann-Gleichungen kann ein während des NSC-Szenarios gültiger Ausdruck für die Energiedichten erhalten werden. Um die Entwicklung von ρ_ϕ zu erhalten wird Gleichung 3.40 zunächst als Differentialgleichung bezüglich des Skalenfaktors geschrieben, sodass

$$\frac{d\rho_\phi}{dR} + \beta \frac{\rho_\phi}{R} = -\frac{\Gamma_\phi \rho_\phi}{H R} \quad (3.42)$$

folgt. Nun wird die Substitution

$$\rho_\phi = u \rho_{\text{eq}} r^{-\beta} \quad (3.43)$$

$$r = \frac{R}{R_{\text{eq}}} \quad (3.44)$$

in diese eingesetzt, sodass sich nach Anwendung der Produktregel

$$\frac{du}{u^{1/2}} = -\frac{\Gamma_\phi}{H_{\text{eq}}} r^{\beta/2-1} dr \quad (3.45)$$

ergibt. ρ_{eq} stellt dabei die Energiedichte von ϕ bzw. der Strahlung bei T_{eq} dar. Zudem wird hier verwendet, dass $H \sim \sqrt{\rho_\phi}/M_P$. Dies gilt da die Lösung der Differentialgleichung in einer Phase der ϕ -Dominanz gesucht wird. Damit gilt bei Gleichheit der Energiedichten $H_{\text{eq}} \equiv H(T_{\text{eq}}) \sim \sqrt{\rho_{\text{eq}}}/M_P$.

Gleichung 3.45 kann durch Trennung der Variablen gelöst werden. Integration beider Seiten ergibt nach Resubstitution und anschließender Umformung

$$\rho_\phi(R) = \rho_{\text{eq}} \left[-\frac{\Gamma_\phi}{H_{\text{eq}} \beta} + \frac{C}{2} \left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^{\beta/2} \right]^2, \quad (3.46)$$

wobei C die von beiden Seiten zusammengefasste Integrationskonstante darstellt. Diese ergibt sich durch die Anfangsbedingung $\rho_\phi(R_{\text{eq}}) = \rho_{\text{eq}}$, sodass

$$C = 2 \left(1 + \frac{\Gamma_\phi}{H_{\text{eq}} \beta} \right). \quad (3.47)$$

Somit folgt für die Lösung ρ_ϕ

$$\rho_\phi(R) = \rho_{\text{eq}} \left[\frac{\Gamma_\phi}{H_{\text{eq}} \beta} - \left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^{\beta/2} \left(1 + \frac{\Gamma_\phi}{H_{\text{eq}} \beta} \right) \right]^2 \quad (3.48)$$

$$\approx \rho_{\text{eq}} \left[\left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^\beta - \frac{2}{\beta} \frac{\Gamma_\phi}{H_{\text{eq}}} \left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^{\beta/2} \right], \quad (3.49)$$

wobei im letzten Schritt Terme höherer Ordnung in $\Gamma_\phi/H_{\text{eq}}$ vernachlässigt werden.

Mit dieser Lösung kann nun auch ρ_R bestimmt werden. Ausgangspunkt ist die Boltzmann-Gleichung für s , Gleichung 3.41, welche zunächst als Differentialgleichung für ρ_R umgeschrieben werden soll. Dies geschieht unter Nutzung der allgemeinen Relation

$$s = \frac{\rho_R + p_R}{T} = \rho_R \frac{1 + \omega_R}{T} = \frac{4}{3} \frac{\rho_R}{T}, \quad (3.50)$$

wobei im letzten Schritt die Zustandsgleichung für Strahlung, $\omega_R = \frac{1}{3}$, genutzt wird [11]. Nach Einsetzen ergibt sich eine Abhängigkeit von der Zeitableitung der Temperatur. Diese lässt sich berechnen, indem T als Funktion von R aufgefasst wird und die Zeitableitung nach Kettenregel durch eine Ableitung nach dem Skalenfaktor ausgedrückt wird. Letztere lässt sich analog zum kosmologischen Standard-Szenario, Gleichung 3.31, herleiten und ergibt sich zu

$$\frac{dT}{dR} = \left(1 + \frac{T}{3 g_{\star S}} \frac{dg_{\star S}}{dT} \right)^{-1} \left[-\frac{T}{R} + \frac{\Gamma_\phi \rho_\phi}{3 H s R} \right] \approx -\frac{T}{R} + \frac{\Gamma_\phi \rho_\phi}{3 H s R}. \quad (3.51)$$

Im letzten Schritt wird hier $g_{\star S}$ als konstant angenommen. Nach einigen Rechenschritten resultiert die Differentialgleichung für ρ_R in der Zeit. Von Interesse ist jedoch die Differentialgleichung in R , für welche

$$\frac{d\rho_R}{dR} + 4 \frac{\rho_R}{R} = \frac{\Gamma_\phi \rho_\phi}{H R} \quad (3.52)$$

folgt. Diese kann gelöst werden, wobei der Ansatz

$$\rho_R = v \rho_{\text{eq}} r^{-4} \quad (3.53)$$

$$r = \frac{R}{R_{\text{eq}}} \quad (3.54)$$

genutzt wird. Nach Einsetzen folgt unter Verwendung von $H \sim \sqrt{\rho_\phi}/M_P$

$$dv = \frac{\Gamma_\phi}{\rho_{\text{eq}}} \rho_\phi^{1/2} r^3 dr. \quad (3.55)$$

Für das ebenfalls r abhängige ρ_ϕ wird nun Gleichung 3.48 eingesetzt, sodass anschließend beide Seiten integriert werden können. Ein analoges Verfahren zur Lösung der ρ_ϕ -Differentialgleichung, d.h. Resubstitution und Bestimmung der Integrationskonstanten über die Anfangsbedingung $\rho_R(R_{\text{eq}}) = \rho_{\text{eq}}$, führt auf

$$\rho_R(R) = \rho_{\text{eq}} \left[\left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^4 + \frac{2\Gamma_\phi}{(8-\beta)H_{\text{eq}}} \left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^{\beta/2} - \frac{2\Gamma_\phi}{(8-\beta)H_{\text{eq}}} \left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^4 \right] \quad (3.56)$$

$$\approx \rho_{\text{eq}} \left[\left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^4 + \frac{2}{8-\beta} \frac{\Gamma_\phi}{H_{\text{eq}}} \left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^{\beta/2} \right]. \quad (3.57)$$

Zur Ermittlung dieser Ausdrücke werden Terme der Ordnung $\mathcal{O}((\Gamma_\phi/H_{\text{eq}})^2)$ vernachlässigt.

Bei genauerer Betrachtung der Lösungen, Gleichungen 3.49 und 3.57, fällt auf, dass diese sich einerseits aus den vor dem Zerfall gültigen Relationen 3.38 und 3.39 zusammensetzen. Zu diesen Termen hinzu kommt in den Gleichungen 3.49 und 3.57 allerdings noch ein Korrekturterm, welcher den Zerfall berücksichtigt. Je nachdem welche Temperaturen bzw. Skalenfaktoren betrachtet werden, sind die Terme unterschiedlich relevant und die gesamte Lösung lässt sich entsprechend gut durch die jeweiligen Einzeltermen approximieren. Außerhalb von Region 3 sind

die Korrekturterme somit klein gegenüber den Termen aus den Gleichungen 3.38 und 3.39.

Diese Tatsache kann nun genutzt werden um analytische Ausdrücke für einige der im NSC-Szenario relevanten Temperatur- bzw. Skalenfaktorschritte zu bestimmen. Diese sind insbesondere für die Ergebnisse in Abschnitt 4 von Bedeutung. Bei dem Skalenfaktor R_{end} bei welchem die modifizierte Expansion durch den vollständigen Zerfall von ϕ endet, ist ρ_ϕ klein. Das bedeutet, dass in Gleichung 3.49 für $\rho_\phi(R_{\text{end}})$ beide Summanden in etwa gleich sein müssen. Umformen ergibt

$$R_{\text{end}} \approx R_{\text{eq}} \left(\frac{\beta}{2} \frac{H_{\text{eq}}}{\Gamma_\phi} \right)^{2/\beta} = R_{\text{eq}} \left(\frac{\beta}{2} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_{\text{end}}} \right)^2 \right)^{2/\beta} \quad (3.58)$$

unter Nutzung von

$$\frac{H_{\text{eq}}}{\Gamma_\phi} = \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_{\text{end}}} \right)^2, \quad (3.59)$$

im letzten Schritt. Letztere Relation ergibt sich folgendermaßen: T_{end} ist definiert über die Bedingung $H(T_{\text{end}}) = \Gamma_\phi$ [2], da der Zerfall an diesem Punkt besonders relevant ist. Unter Verwendung der bei T_{end} wieder gültigen Gleichung 3.3 für H , folgt

$$\Gamma_\phi = \frac{\pi}{3M_P} \sqrt{\frac{g_\star(T_{\text{end}})}{10}} T_{\text{end}}^2. \quad (3.60)$$

Wird H_{eq} ebenfalls via Gleichung 3.3 ausgedrückt, so folgt - unter Vernachlässigung der Änderung in den Freiheitsgraden - durch Division beider Ausdrücke Gleichung 3.59.

Der Skalenfaktor R_c bei dem der Standard Modell-Sektor durch den Zerfall von ϕ beeinflusst wird, soll ebenfalls ermittelt werden. Bei R_c muss der Korrekturterm in Gleichung 3.57 mitberücksichtigt werden. Da zu diesem Zeitpunkt noch keiner

der Summanden dominant ist, sind beide in etwa gleich, sodass mit Gleichung 3.59 folgt

$$R_c \approx R_{\text{eq}} \left(\frac{8 - \beta}{2} \frac{H_{\text{eq}}}{\Gamma_\phi} \right)^{\frac{2}{8-\beta}} = R_{\text{eq}} \left(\frac{8 - \beta}{2} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_{\text{end}}} \right)^2 \right)^{\frac{2}{8-\beta}}. \quad (3.61)$$

Hieraus kann ebenfalls eine Relation für T_c hergeleitet werden. Wird die Relation für ρ_R aus Gleichung 3.4 mit der Relation aus Gleichung 3.39 bei T_c bzw. R_c gleichgesetzt, folgt nach Umformung

$$T_c \simeq T_{\text{eq}} \left(\frac{2}{8 - \beta} \frac{T_{\text{end}}^2}{T_{\text{eq}}^2} \right)^{\frac{2}{8-\beta}}. \quad (3.62)$$

Ebenfalls diskutiert werden muss die Rolle des Axions im Rahmen der modifizierten Expansionsszenarien. Für die vorangegangenen Überlegungen ist dieses noch nicht von Bedeutung, da die im Zuge der Feldoszillation produzierte Energiedichte zu keinem Zeitpunkt des NSC-Szenarios mit den Energiedichten ρ_R und ρ_ϕ vergleichbar ist [2]. Die Entwicklung des Axions kann somit unabhängig betrachtet werden. Für die Ermittlung der Axion-Masse m_a in Abschnitt 4 ist insbesondere die Energiedichte „heutzutage“ $\rho_a(T_0)$ von Relevanz. Diese unterscheidet sich vom kosmologischen Standard-Szenario, da bei einem nicht vernachlässigbaren Einfluss des Zerfalls von ϕ die Gesamtentropie S nicht erhalten ist. Dies ist in Region 3 der Fall. Entropieerhaltung gilt somit nur wenn $T > T_c$ oder $T < T_{\text{end}}$, allerdings nicht während $T_{\text{end}} < T < T_c$. Ausgangspunkt für die Herleitung von $\rho_a(T_0)$ ist Gleichung 3.23. Der hier eingehende Faktor $(R_{\text{osc}}/R_0)^3$ kann umgeschrieben werden zu

$$\left(\frac{R_{\text{osc}}}{R_0} \right)^3 = \frac{S_{\text{osc}}}{s_{\text{osc}}} \frac{s_0}{S_0} = \frac{s_0}{s_{\text{osc}}} \frac{S_{\text{osc}}}{S_{\text{end}}}, \quad (3.63)$$

wobei im letzten Schritt genutzt wird, dass nach dem NSC-Szenario $S_{\text{end}} = S_0$ aufgrund von Entropieerhaltung gilt. Dies ist anders als im kosmologischen Standard-Szenario, da sich hier die beiden Entropien wegen der Erhaltung herauskürzen

würden. Wird der Ausdruck in Gleichung 3.23 eingesetzt, ergibt sich für die Energiedichte

$$\rho_a(T_0) = \rho_a(T_{\text{osc}}) \frac{m_a}{\tilde{m}_a(T_{\text{osc}})} \frac{s(T_0)}{s(T_{\text{osc}})} \gamma. \quad (3.64)$$

mit

$$\gamma \equiv \frac{S_{\text{osc}}}{S_{\text{end}}}. \quad (3.65)$$

Der Faktor γ wird auch als Entropie-Verdünnungsfaktor bezeichnet, da die durch die Oszillation während des NSC-Szenarios erzeugte Energiedichte durch die zunehmende Entropie „verdünnt“ wird. Je nachdem in welcher Region des NSC Szenarios es zur Oszillation des Axion-Feldes ergeben sich unterschiedliche Ausdrücke für den Entropie-Verdünnungsfaktor. Dies wird genauer in Abschnitt 4.1 betrachtet.

3.2.2 Numerische Betrachtung

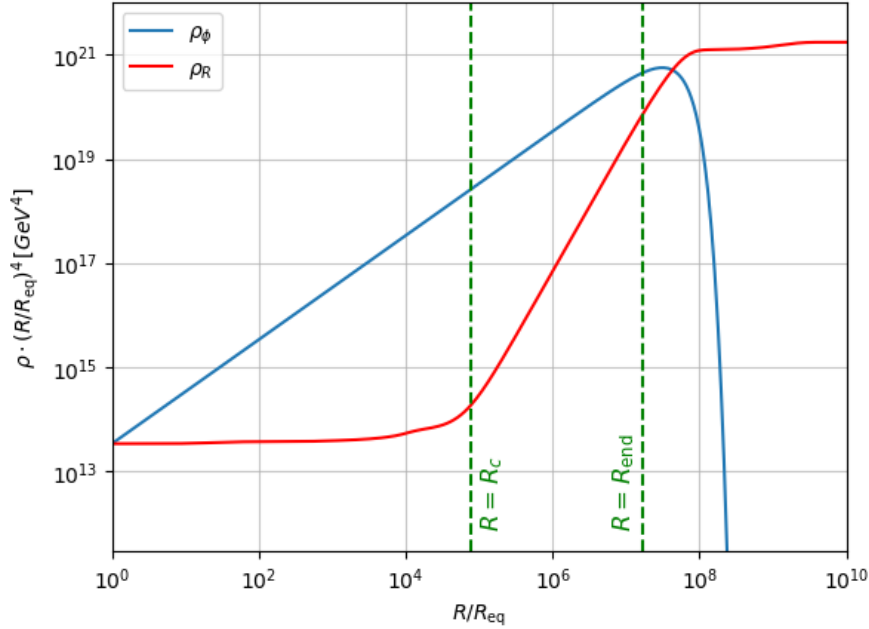


Abbildung 3.3: Darstellung des Verhaltens der Energiedichten ρ_R (rot) und ρ_ϕ (blau) multipliziert mit $(R/R_{\text{eq}})^4$ gegen den auf R_{eq} normierten Skalenfaktor R für ein NSC-Szenarios mit $\beta = 3$. Die Ergebnisse resultieren aus dem numerischen Verfahren durch exaktes Lösen der Boltzmann-Gleichungen 3.40 und 3.41. Das System wird dabei bei R_{eq} initialisiert, sodass die Regionen 2 und 3 des NSC-Szenarios dargestellt sind. Links der Grenze $R = R_c$ befindet sich Region 2 und zwischen $R = R_c$ und $R = R_{\text{end}}$ Region 3. Für Skalenfaktoren kleiner als R_{eq} liegt Region 1 vor, welche nicht dargestellt ist. Bei $R = R_{\text{end}}$ endet das NSC-Szenario. Es werden $T_{\text{eq}} = 10^3 \text{ GeV}$ und $T_{\text{end}} = 4 \text{ MeV}$ gesetzt.

Für die numerische Behandlung der modifizierten Expansionsszenarien soll zunächst das in Abschnitt 3.2 beschriebene Verhalten der Energiedichten ρ_R und ρ_ϕ exakt bestimmt und visualisiert werden. Dazu wird von den als Differentialgleichungen in R umgeschriebenen Boltzmann-Gleichungen, Gleichungen 3.42 und 3.52, ausgegangen. Parallel ist die Entwicklung der Temperatur mit dem Skalenfaktor von Interesse, welche durch Gleichung 3.51 beschrieben wird. Die in die

drei Gleichungen eingehenden Größen ρ_ϕ , ρ_R , T sowie die Variable R werden zur besseren numerischen Lösbarkeit auf die entsprechenden Werte ρ_{eq} , T_{eq} sowie R_{eq} reskaliert. Das bedeutet, dass beispielsweise $\rho_\phi/\rho_{\text{eq}}$ betrachtet wird. Die resultierenden Gleichungen werden somit einheitenlos. Die Boltzmann-Gleichungen und die Temperatur-Skalenfaktor-Relation werden schließlich zusammen in einem System gekoppelter Differentialgleichungen implementiert. Da die Ausdrücke vom Hubble-Parameter abhängen, muss dieser ebenfalls innerhalb des Systems berechnet werden. Dazu wird die Relation

$$H = \sqrt{\frac{\rho_R + \rho_\phi}{3M_P^2}} \quad (3.66)$$

verwendet. Das ebenfalls eingehende Γ_ϕ ist durch den Ausdruck aus Gleichung 3.60 gegeben und s entspricht Gleichung 3.50. Das Differentialgleichungssystem wird nun zu Beginn von Region 2, d.h. bei R_{eq} , initialisiert und von dort aus gelöst. Die Anfangsbedingungen lauten damit ρ_{eq} und T_{eq} . Um wieder die ursprünglichen unskalierten Größen zu erhalten, werden ρ_{eq} , welches nach Gleichung 3.4 berechnet wird, und T_{eq} mit den Lösungen multipliziert. Die Entwicklung der Energiedichten ρ_R und ρ_ϕ multipliziert mit $(R/R_{\text{eq}})^4$ sind für $\beta = 3$, $T_{\text{end}} = 4 \text{ MeV}$ sowie $T_{\text{eq}} = 10^3 \text{ GeV}$ in Abbildung 3.3 dargestellt. Es zeigt sich das in Abschnitt 3.2 beschriebene Verhalten für die Regionen 2 und 3, deren Grenzen ebenfalls eingezeichnet sind.

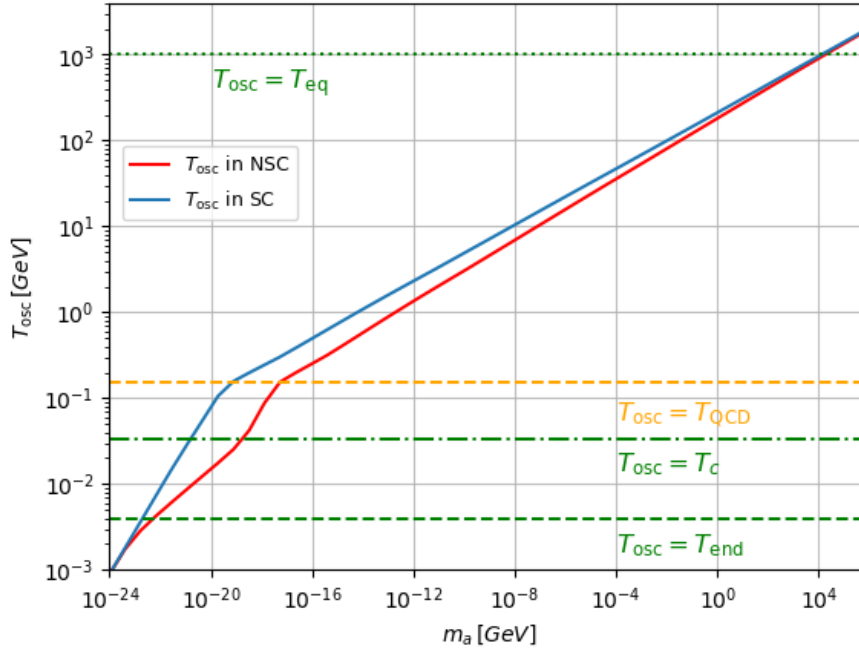


Abbildung 3.4: Darstellung der Oszillationstemperatur T_{osc} in Abhängigkeit der Axion-Masse m_a für ein NSC-Szenario mit $\beta = 3$ (rot). Es werden $T_{\text{end}} = 4 \text{ MeV}$ sowie $T_{\text{eq}} = 10^3 \text{ GeV}$ gewählt. Die verschiedenen Regionen des NSC-Szenarios sind durch die entsprechenden Temperaturgrenzen markiert. Zudem ist $T_{\text{osc}} = T_{\text{QCD}}$ angegeben. Zum Vergleich sind ebenfalls die Resultate aus dem kosmologischen Standard-Szenario eingezeichnet (blau).

Zudem wird die m_a -Abhängigkeit der Oszillationstemperatur bestimmt. Dazu wird analog zu Abschnitt 3.1.2 vorgegangen, wobei der Hubble-Parameter durch die Lösungen des zuvor beschriebenen Differentialgleichungssystems gemäß Gleichung 3.66 gegeben ist. H wird mit der Lösung für T interpoliert, sodass sich eine Funktion $H(T)$ ergibt. Nach numerischer Lösung von Gleichung 2.7 ergibt sich der in Abbildung 3.4 dargestellte Plot, welcher sich ebenfalls auf $\beta = 3$, $T_{\text{end}} = 4 \text{ MeV}$ und $T_{\text{eq}} = 10^3 \text{ GeV}$ bezieht. Als Referenz wird hier ebenfalls $T_{\text{osc}}(m_a)$ aus dem kosmologischen Standard-Szenario eingetragen. Der Plot lässt sich auch in Anlehnung zum kosmologischen Standard-Szenario interpretieren. Für das NSC Szenario sind ferner die markierten Regionen relevant, in welchen die Oszillation des Axion-Feldes stattfinden können. Für jede Oszillations-Region weist T_{osc}

ein unterschiedliches Verhalten auf. Im Vergleich zum kosmologischen Standard-Szenario zeigt sich, dass für mittlere Werte von m_a die Oszillationstemperatur im NSC-Szenario stets geringer ist. Dies kann dadurch begründet werden, dass der Hubble Parameter bei der modifizierten Expansion größer ist als im Standard-Szenario. Letzteres ergibt sich unter Betrachtung von Gleichung 3.66 durch den zusätzlichen Summanden ρ_ϕ in dem Wurzelterm. Ein größeres H impliziert, dass die Oszillationsbedingung, Gleichung 2.7, bei gleichen Massen „später“ erfüllt wird und sich T_{osc} zu entsprechend kleineren Werten verschiebt. Für sehr große Massen bzw. T_{osc} -Werte gehen die Kurven für Standard- und Nicht-Standard-Szenario ineinander über. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Oszillationen ab einem bestimmten Punkt vor oder kurz nach T_{eq} auftreten, sodass der Effekt des größeren Hubble-Parameters nur marginal ist. Auch für sehr kleine T_{osc} -Werte gleichen sich die Kurven an, was darauf zurückzuführen ist, dass für $T < T_{\text{end}}$ wieder eine Dominanz von ρ_R vorliegt und ρ_ϕ vernachlässigbar ist.

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit präsentiert. Hierbei werden die im letzten Kapitel beschriebenen einzelnen Regionen von modifizierten Expansionsszenarien im Hinblick auf die Axion-Feldoszillationen genauer untersucht. Es wird konkret betrachtet, was eine Oszillation in den Regionen für die Dunkle Materie-Produktion bedeutet und welche Schlüsse sich daraus für die damit zusammenhängende Axion-Masse m_a ziehen lassen. Ziel ist es einen Parameterraum T_{eq} gegen m_a herzuleiten, welcher mit dem experimentellen Wert der Dunkle Materie-Energiedichte korrespondiert. Dabei werden beispielhaft NSC-Szenarien mit $\beta = 2$ und $\beta = 3$ betrachtet.

4.1 Analytische Resultate

Ziel dieses Abschnitts ist es analytische Ausdrücke für die Axion-Masse m_a in Abhängigkeit der freien Parameter des NSC-Szenarios zu ermitteln. Außerdem werden Grenzwerte für m_a ermittelt, sodass ein Massenbereich resultiert. Das Vorgehen orientiert sich dabei an Quelle [2]. Grundsätzlich müssen zwei wesentliche Fallunterscheidungen getätigt werden. Einerseits muss aufgrund der unterschiedlichen Entropie-Verdünnung (vergleiche Gleichung 3.65) unterschieden werden, in welcher Region des NSC-Szenarios die Oszillation des Axion-Feldes stattfindet. In jeder Region muss zusätzlich berücksichtigt werden, dass sich das Verhalten von $\tilde{m}_a(T)$ bei der QCD-Phasenübergangstemperatur T_{QCD} ändert (vergleiche Gleichung 2.6). Falls T_{osc} größer als T_{QCD} ist, liegt zum Zeitpunkt der Oszillation noch ein sehr kleiner, mit abnehmender Temperatur steigender Wert von $\tilde{m}_a$ vor. Da thermische Effekte die Entwicklung der Axion-Masse in dieser Phase beeinflussen, wird im Folgenden auch von der thermischen Axion-Masse gesprochen. Falls

T_{osc} kleiner als T_{QCD} ist, oszilliert das Feld bei einer konstanten Masse. In den folgenden Abschnitten werden die einzelnen Fälle im Hinblick auf die zugehörige Axion-Masse m_a näher diskutiert.

4.1.1 Oszillation in Region 1: Strahlungs-Dominanz

In Region 1 liegt eine Dominanz der Strahlungs-Energiedichte vor, wobei eine Entropieinjektion zum Standard Modell-Sektor und damit eine Verdünnung der Axion-Energiedichte stattfindet [2]. Für eine Oszillation des Axion-Feldes in Region 1 muss die Bedingung

$$T_{\text{eq}} \ll T_{\text{osc}} \quad (4.1)$$

erfüllt sein.

Zur Ermittlung eines Ausdrucks für m_a in Abhängigkeit der freien Parameter wird die in dieser Region erzeugte Gesamtenergiedichte benötigt. Nach den in Abschnitt 3.2.1 angeführten Überlegungen muss hierbei der Entropie-Verdünnungsfaktor γ berücksichtigt werden, welcher spezifisch für diese Region berechnet werden muss. Unter Nutzung der Definition nach Gleichung 3.65, sowie der Tatsache, dass bis T_c Entropieerhaltung $S_{\text{osc}} = S_c$ gilt folgt

$$\gamma_{R_1} = \frac{S_c}{S_{\text{end}}} = \frac{s_c}{s_{\text{end}}} \left(\frac{R_c}{R_{\text{end}}} \right)^3 = \left(\frac{T_c R_c}{T_{\text{end}} R_{\text{end}}} \right)^3, \quad (4.2)$$

wobei im letzten Schritt die Relation für die Standard Modell-Entropiedichte aus Gleichung 3.7 genutzt wird. Unter Verwendung der Gleichungen 3.58, 3.61, 3.62 folgt schließlich

$$\gamma_{R_1} \simeq \left[\left(\frac{4}{\beta^2} \right) \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{eq}}} \right)^{4-\beta} \right]^{3/\beta}. \quad (4.3)$$

Ausgangspunkt für die Bestimmung der Gesamtenergiedichte ist Gleichung 3.64 in welche γ_{R_1} eingesetzt wird. Für $\rho_a(T_{\text{osc}})$ wird die Approximation aus Gleichung 3.24 genutzt. T_{osc} entspricht dem jeweils betrachteten Fall aus Gleichung 3.6 und wird in die entsprechenden Funktionen eingesetzt. $s(T_{\text{osc}})$ wird dabei anhand von Gleichung 3.7 berechnet und $\tilde{m}_a$ entspricht dem betrachteten Fall aus Gleichung 2.6. Nach einigen Rechenschritten kann ein Teil des Ausdrucks als Energiedichte Ω_a aus dem kosmologischen Standard-Szenario, Gleichung 3.26, identifiziert werden. Im Folgenden wird in Gleichung 3.26 der Fall $m_a \lesssim 3H(T_{\text{QCD}})$ als $\Omega_{\text{std},-3/2}$ und der Fall $m_a \gtrsim 3H(T_{\text{QCD}})$ als $\Omega_{\text{std},-7/6}$ bezeichnet. Als Resultat für die Energiedichte bei Oszillation in Region 1 ergibt sich schließlich

$$\Omega_{R_1} = \Omega_a \gamma_{R_1} = \gamma_{R_1} \begin{cases} \Omega_{\text{std},-3/2} & \text{für } m_a \lesssim m_{R_1} \\ \Omega_{\text{std},-7/6} & \text{für } m_a \gtrsim m_{R_1}, \end{cases} \quad (4.4)$$

wobei $m_{R_1} = 3H(T_{\text{QCD}})$ der Axion-Masse bei T_{QCD} entspricht. Diese ergibt sich unter Berücksichtigung von H entsprechend Gleichung 3.3 zu

$$m_{R_1} \approx 10^{-11} \text{ eV}. \quad (4.5)$$

Hierbei werden die Änderungen in den relativistischen Freiheitsgraden vernachlässigt.

Konstante Axion-Masse

Eine Oszillation bei konstanter Axion-Masse liegt vor, wenn $T_{\text{osc}} \lesssim T_{\text{QCD}}$. Aus der allgemeinen Bedingung für diesen Fall

$$T_{\text{eq}} \ll T_{\text{osc}} \lesssim T_{\text{QCD}} \quad (4.6)$$

lässt sich mithilfe der Relation für die Oszillationstemperatur aus dem kosmologischen Standard-Szenario ein entsprechender Massenbereich herleiten. Benötigt

wird somit der hier vorliegende Fall aus Gleichung 3.6. Insgesamt ergibt sich nach Umformung und Einsetzen der entsprechenden Zahlenwerte ein Massenbereich von

$$4,1 \cdot 10^{-12} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{0,1 \text{ GeV}} \right)^2 \ll m_a \lesssim m_{R_1}. \quad (4.7)$$

Nun soll m_a in Abhängigkeit der freien Parameter berechnet werden. Dazu wird Gleichung 4.4 benötigt, wobei für Ω_a der Fall $m_a \lesssim 3H(T_{\text{QCD}})$ genutzt wird. Es ergibt sich

$$\Omega_{R_1} = 0,006 \theta_i^2 \left(\frac{m_a}{5,6 \mu\text{eV}} \right)^{-3/2} \left[\left(\frac{4}{\beta^2} \right) \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{eq}}} \right)^{4-\beta} \right]^{3/\beta}. \quad (4.8)$$

Dies wird mit dem experimentellen Wert von $\Omega_{\text{DM}} = 0,26$ gleichgesetzt, sodass nach m_a umgeformt werden kann. Es ergibt sich

$$m_a \simeq \begin{cases} 7 \cdot 10^{-10} \text{ eV} \theta_i^{4/3} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^2 \left(\frac{0,1 \text{ GeV}}{T_{\text{eq}}} \right)^2 & \text{für } \beta = 2 \\ 3 \cdot 10^{-8} \text{ eV} \theta_i^{4/3} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{2/3} \left(\frac{0,1 \text{ GeV}}{T_{\text{eq}}} \right)^{2/3} & \text{für } \beta = 3. \end{cases} \quad (4.9)$$

Die Temperatur $T_{\text{BBN}} = 4 \text{ MeV}$ wird hier im Zuge einer Reskalierung als Vergleichswert für T_{end} eingefügt. In Anlehnung an Quelle [2] wird $T_{\text{end}} \sim T_{\text{BBN}}$ für eine maximale Verdünnung der Axion-Energiedichte gewählt. Grundsätzlich werden die Reskalierungen für die Temperaturen - auch in den folgenden Ergebnissen - durchgeführt, um den Vergleich zu relevanten Temperaturschritten, z.B. $T_{\text{QCD}} \approx 0,1 \text{ GeV}$, zu ermöglichen. In manchen Fällen sollen die Vergleichswerte ebenfalls genutzt werden, um einen in der Forschung typischerweise diskutierten Axion-Massenwert von $m_a \approx 10^{-10} \text{ eV}$ [1] zu reproduzieren. Es wird somit beispielsweise geprüft wie groß T_{eq} sein müsste, damit sich ein solcher m_a -Wert ergibt.

Thermische Axion-Masse

Im Falle der Oszillation bei thermischer Axion-Masse lautet die Bedingung für die Oszillationstemperatur $T_{\text{QCD}} \lesssim T_{\text{osc}}$. Für die Masse gilt damit $m_a \gtrsim m_{R_1}$. Die Bedingung für die Oszillation in Region 1, Gleichung 4.1, wird mithilfe des entsprechenden Falls aus Gleichung 3.6 umgeschrieben. Nach Umformung und Einsetzen der Zahlenwerte ergibt sich als untere Grenze

$$8,2 \cdot 10^{-13} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{0,1 \text{ GeV}} \right)^6 \ll m_a. \quad (4.10)$$

Für die Masse in Abhängigkeit der freien Parameter wird analog zur konstanten Axion-Masse vorgegangen. Ω_a ist hierbei durch den Fall $m_a \gtrsim 3H(T_{\text{QCD}})$ aus Gleichung 3.26 gegeben. Gleichsetzen und Umformen führt auf

$$m_a \simeq \begin{cases} 1,7 \cdot 10^{-10} \text{ eV} \theta_i^{12/7} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{18/7} \left(\frac{0,2 \text{ GeV}}{T_{\text{eq}}} \right)^{18/7} & \text{für } \beta = 2 \\ 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ eV} \theta_i^{12/7} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{6/7} \left(\frac{0,1 \text{ GeV}}{T_{\text{eq}}} \right)^{6/7} & \text{für } \beta = 3. \end{cases} \quad (4.11)$$

4.1.2 Oszillation in Region 2: ϕ —Dominanz ohne Zerfall

Eine Oszillation des Axion-Feldes in Region 2 impliziert die Bedingung

$$T_c \ll T_{\text{osc}} \ll T_{\text{eq}}. \quad (4.12)$$

Um aus dieser Bedingung erneut einen Massenbereich herzuleiten, muss T_{osc} für diese Region bestimmt werden. Diese unterscheidet sich von dem Ausdruck aus dem strahlungsdominierten Universum in Region 1, Gleichung 3.6, da die Expansion durch einen anderen Hubble-Parameter beschrieben wird. Nach der ersten Friedmann Gleichung, Gleichung 3.1, ist dieser aufgrund der Dominanz von ρ_ϕ gegeben durch

$$H \approx \sqrt{\frac{\rho_\phi}{3M_P^2}}. \quad (4.13)$$

Nach Einsetzen der vor dem Zerfall gültigen Gleichung 3.38 kann dies approximiert werden durch

$$H \approx H_{\text{eq}} \left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^{\beta/2} = H_{\text{eq}} \left(\frac{T}{T_{\text{eq}}} \right)^{\beta/2}, \quad (4.14)$$

wobei $H_{\text{eq}} \approx \sqrt{\rho_{\text{eq}}/3M_P^2}$. Im letzten Schritt wird die klassische Relation zwischen Temperatur und Skalenfaktor $T \sim R^{-1}$ [11] verwendet, welche gültig ist, da die Strahlungstemperatur noch nicht von den Zerfällen von ϕ beeinflusst wird. Mit Gleichung 2.7 unter Berücksichtigung von Gleichung 2.6 ergibt sich mit diesem H für die Oszillationstemperatur in Region 2

$$T_{\text{osc}, R_2} \approx \begin{cases} T_{\text{eq}} \left(\frac{M_P m_a}{T_{\text{eq}}^2} \right)^{2/\beta} & \text{für } m_a \lesssim m_{R_2} \\ \left(T_{\text{eq}}^{\frac{\beta-4}{2}} M_P m_a T_{\text{QCD}}^4 \right)^{\frac{2}{\beta+8}} & \text{für } m_a \gtrsim m_{R_2}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Hierbei wird zudem verwendet, dass bei T_{eq} der Hubble-Parameter durch Gleichung 3.3 approximiert werden kann.

Zur Angabe oberer und unterer Grenzwerte für m_a muss zudem ein Ausdruck für die Masse beim QCD-Phasenübergang in dieser Region, m_{R_2} , gefunden werden. Dazu wird Gleichung 4.14 genutzt und bei T_{QCD} ausgewertet. Es folgt

$$m_{R_2} = 3 H(T_{\text{QCD}}) = 3 H_{\text{eq}} \left(\frac{T_{\text{QCD}}}{T_{\text{eq}}} \right)^{\beta/2} = \frac{T_{\text{eq}}^2}{M_P} \left(\frac{T_{\text{QCD}}}{T_{\text{eq}}} \right)^{\beta/2}, \quad (4.16)$$

wobei im letzten Schritt H_{eq} wiederum durch Gleichung 3.3 approximiert wird. Insgesamt ergibt sich nach Einsetzen der Werte für die betrachteten Fälle von β

$$m_{R_2} \simeq \begin{cases} 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{2 \text{ GeV}} \right) & \text{für } \beta = 2 \\ 2,4 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{10^4 \text{ GeV}} \right)^{1/2} & \text{für } \beta = 3. \end{cases} \quad (4.17)$$

Für die Bestimmung der Masse m_a wird erneut ein Ausdruck für die erzeugte Energiedichte in dieser Region benötigt. Ausgangspunkt hierfür ist wiederum Gleichung 3.64 mit welcher analog zu Region 1 vorgegangen wird. Der Verdünnungsfaktor γ entspricht jenem aus Gleichung 4.3. Für T_{osc} wird Gleichung 4.15 genutzt. Nach Identifizierung eines Teils der Gleichung mit der Energiedichte des kosmologischen Standard-Szenarios folgt als Resultat

$$\Omega_{R_2} \simeq \begin{cases} \Omega_{\text{std}, -3/2} \left(\frac{\beta^2}{4} \right)^{-3/\beta} \left(\frac{T_{\text{end}}^2}{m_a M_P} \right)^{\frac{3}{2\beta}(4-\beta)} & \text{für } m_a \lesssim m_{R_2} \\ \Omega_{\text{std}, -7/6} \left(\frac{\beta^2}{4} \right)^{-3/\beta} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{eq}}} \right)^{\frac{3}{\beta}(4-\beta)} \left[\frac{T_{\text{eq}}^7}{(T_{\text{QCD}}^4 m_a M_P)^{7/6}} \right]^{\frac{4-\beta}{\beta+8}} & \text{für } m_a \gtrsim m_{R_2}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Konstante Axion-Masse

Nach diesen Vorüberlegungen soll nun für den Fall der konstanten Axion-Masse ein Massenbereich bestimmt werden. Werden Gleichung 4.12 und die Bedingung der Oszillation nach dem QCD-Übergang kombiniert ergibt sich

$$T_c \ll T_{\text{osc}} \lesssim T_{\text{QCD}}. \quad (4.19)$$

Die rechte Ungleichung $T_{\text{osc}} \lesssim T_{\text{QCD}}$ lässt sich erneut über m_{R_2} in einen Massenbereich umschreiben. In der linken Ungleichung $T_c \ll T_{\text{osc}}$ wird für die Oszillationstemperatur der Fall $m_a \lesssim m_{R_2}$ aus Gleichung 4.15 eingesetzt und für T_c Gleichung 3.62 genutzt. Insgesamt ergibt sich somit nach Umformung

$$\frac{T_{\text{eq}}^2}{M_P} \left(\frac{2}{8-\beta} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{eq}}} \right)^2 \right)^{\frac{\beta}{8-\beta}} \ll m_a \ll m_{R_2}. \quad (4.20)$$

Werden hier die beiden betrachteten Werte für β eingesetzt, so ergibt sich im Fall $\beta = 2$ ein Massenbereich von

$$1,8 \cdot 10^{-11} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{2/3} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{2 \text{ GeV}} \right)^{4/3} \ll m_a \ll m_{R_2}. \quad (4.21)$$

Für $\beta = 3$ folgt

$$5,1 \cdot 10^{-10} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{6/5} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{10^4 \text{ GeV}} \right)^{4/5} \ll m_a \ll m_{R_2}. \quad (4.22)$$

Für die Axion-Masse in Abhängigkeit der freien Parameter wird die Energiedichte in Region 2, Gleichung 4.18, benötigt. Die konstante Axion-Masse impliziert den Fall $m_a \lesssim m_{R_2}$. Analog zu den vorherigen Abschnitten wird die Energiedichte mit dem experimentellen Wert von $\Omega_{\text{DM}} = 0,26$ gleichgesetzt, sodass nach m_a umgeformt werden kann. Die Abhängigkeit von dem Winkel θ_i ergibt sich durch Einsetzen von $\Omega_{\text{std}, -3/2}$. Es folgt schließlich für beide Fälle von β

$$m_a \simeq \begin{cases} 5,5 \cdot 10^{-11} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right) \theta_i^{2/3} & \text{für } \beta = 2 \\ 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{1/2} \theta_i & \text{für } \beta = 3. \end{cases} \quad (4.23)$$

Thermische Axion-Masse

Für die thermische Axion-Masse lautet die Bedingung an T_{osc}

$$T_{\text{QCD}} \lesssim T_{\text{osc}} \ll T_{\text{eq}}. \quad (4.24)$$

Analog zur konstanten Masse wird hieraus zunächst ein Ausdruck für den Massenbereich hergeleitet. Unter Verwendung des Falls $m_a \gtrsim m_{R_2}$ aus Gleichung 4.15 kann die rechte Ungleichung $T_{\text{osc}} \ll T_{\text{eq}}$ nach m_a umgeformt werden. Insgesamt ergibt sich unabhängig von β

$$m_{R_2} \ll m_a \ll \frac{T_{\text{eq}}^6}{M_P T_{\text{QCD}}^4} = 3,8 \cdot 10^{-8} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{0,6 \text{ GeV}} \right)^6. \quad (4.25)$$

Zur Bestimmung von m_a wird der Fall $m_a \gtrsim m_{R_2}$ aus Gleichung 4.18 genutzt. Ein analoges Vorgehen wie bei der konstanten Masse führt auf

$$m_a \simeq \begin{cases} 3,0 \cdot 10^{-10} \text{ eV} \left(\frac{0,1 \text{ GeV}}{T_{\text{eq}}} \right)^{8/7} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{15/7} \theta_i^{10/7} & \text{für } \beta = 2 \\ 1,7 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \left(\frac{10^4 \text{ GeV}}{T_{\text{eq}}} \right)^{2/7} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{11/14} \theta_i^{11/7} & \text{für } \beta = 3. \end{cases} \quad (4.26)$$

4.1.3 Oszillation in Region 3: ϕ –Dominanz mit Zerfall

Im Folgenden wird die Oszillation in Region 3 betrachtet, in welcher ρ_ϕ weiterhin dominant ist, jedoch zunehmend in Standard Modell-Strahlung zerfällt. Für die Oszillationstemperatur gilt die Bedingung

$$T_{\text{end}} \ll T_{\text{osc}} \ll T_c. \quad (4.27)$$

Zur Ermittlung der Massenbereiche sowie der Ausdrücke für m_a muss T_{osc} bestimmt werden. Dazu wird der Hubble Parameter benötigt, welcher der Skalenfaktor Relation aus Gleichung 4.14 entspricht. Dies liegt daran, dass ein Zeitraum zu Beginn von Region 3 betrachtet wird. Um eine Temperaturabhängigkeit von H herzuleiten wird die Entwicklung der Strahlungs-Energiedichte betrachtet. Diese wird durch Gleichung 3.57 beschrieben. ρ_R setzt sich hier aus der Lösung vor Beginn des Zerfalls sowie aus einem Korrekturterm zusammen, welcher den Zerfall berücksichtigt. Da in dieser Region der Zerfall zunehmend relevant wird, kann ρ_R in guter Näherung durch den Korrekturterm approximiert werden. Der Abfall von

ρ_R ist zudem allgemein gegeben durch Gleichung 3.4. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke unter Vernachlässigung der Änderung der Freiheitsgrade

$$\rho_{\text{eq}} \frac{2\Gamma_\phi}{(8-\beta)H_{\text{eq}}} \left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^{\beta/2} = \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (4.28)$$

folgt nach Umformung gemäß Quelle [2]

$$\left(\frac{R_{\text{eq}}}{R} \right)^{\beta/2} = \left(\frac{8-\beta}{2} \right) \frac{T^4}{T_{\text{end}}^2 T_{\text{eq}}^2}. \quad (4.29)$$

Dieser Faktor geht ebenfalls in den Ausdruck für den Hubble-Parameter, Gleichung 4.14, ein, sodass nach Einsetzen die Temperaturabhängigkeit

$$H(T) = H_{\text{eq}} \left(\frac{8-\beta}{2} \right) \frac{T^4}{T_{\text{end}}^2 T_{\text{eq}}^2}. \quad (4.30)$$

resultiert. Mit diesem Ausdruck lässt sich auf analoge Weise eine Relation für die Oszillationstemperatur herleiten. Unter Nutzung von Gleichung 2.7 folgt

$$T_{\text{osc}, R_3} = \begin{cases} \left(\frac{2m_a M_P T_{\text{end}}^2}{8-\beta} \right)^{1/4} & \text{für } m_a \lesssim m_{R_3} \\ \left(\frac{2m_a M_P T_{\text{QCD}}^4 T_{\text{end}}^2}{8-\beta} \right)^{1/8} & \text{für } m_a \gtrsim m_{R_3}. \end{cases} \quad (4.31)$$

Zudem soll ein Ausdruck für die Energiedichte bei Oszillation in Region 3 gefunden werden. Ausgangspunkt ist Gleichung 3.64, wobei γ zunächst für diese Region bestimmt werden muss. Nach Definition des Verdünnungsfaktors folgt

$$\gamma_{R_3} = \frac{s_{\text{osc}}}{s_{\text{end}}} \left(\frac{R_{\text{osc}}}{R_{\text{end}}} \right)^3 = \left(\frac{T_{\text{osc}}}{T_{\text{end}}} \right)^3 \left(\frac{R_{\text{osc}}}{R_{\text{end}}} \right)^3, \quad (4.32)$$

wobei im letzten Schritt genutzt wird, dass die Standard Modell-Entropiedichte s durch Gleichung 3.7 gegeben ist. Der R -abhängige Faktor kann weiter umgeschrieben werden: Durch Umformung von Gleichung 4.29 nach dem Skalenfaktor folgt für R_{osc}

$$R_{\text{osc}} = R_{\text{eq}} \left[\frac{2}{8 - \beta} \frac{T_{\text{end}}^2 T_{\text{eq}}^2}{T^4} \right]^{2/\beta}, \quad (4.33)$$

während für R_{end} Gleichung 3.58 genutzt werden kann. Letztendlich ergibt sich für den Verdünnungsfaktor

$$\gamma_{R_3} = \left(\frac{4}{\beta(8 - \beta)} \right)^{6/\beta} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{osc}}} \right)^{24/\beta - 3}. \quad (4.34)$$

Mithilfe von γ_{R_3} kann die gesamte Energiedichte für diese Region bestimmt werden. Dazu wird analog zu Region 2 vorgegangen, d.h. ausgehend von Gleichung 3.64 werden die relevanten Größen eingesetzt. Letztendlich lässt sich die Energiedichte aus dem kosmologischen Standard-Szenario identifizieren, welche mit weiteren Faktoren multipliziert wird. Das Resultat lautet

$$\Omega_{R_3} = \begin{cases} \Omega_{\text{std}, -3/2} \left(\frac{2}{\beta} \right)^{6/\beta} \left(\frac{T_{\text{end}}^2}{m_a M_P} \right)^{\frac{3}{2\beta}(4-\beta)} & \text{für } m_a \lesssim m_{R_3} \\ \Omega_{\text{std}, -7/6} (8 - \beta)^{\frac{\beta+6}{2\beta}} \left(\frac{T_{\text{end}}^6}{T_{\text{QCD}}^4 m_a M_P} \right)^{3/\beta - 2/3} & \text{für } m_a \gtrsim m_{R_3}. \end{cases} \quad (4.35)$$

Konstante Axion-Masse

Im Falle der konstanten Axion-Masse gilt $m_a \lesssim m_{R_3}$. Zur Ermittlung des korrespondierenden Massenbereiches wird Gleichung 4.27 betrachtet. Diese wird unter Verwendung von T_{osc, R_3} aus Gleichung 4.31 zu beiden Seiten umgeformt, wobei für T_c Gleichung 3.62 verwendet wird. Für die rechte Seite der Ungleichung folgt

$$m_a \ll \frac{1}{M_P} T_{\text{eq}}^2 \left(\frac{2}{8-\beta} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{eq}}} \right)^2 \right)^{\frac{\beta}{8-\beta}} \quad (4.36)$$

und für die linke Seite ergibt sich nach Umformung

$$\frac{1}{M_P} \left(\frac{8-\beta}{2} \right) T_{\text{end}}^2 \ll m_a. \quad (4.37)$$

Zusammensetzen beider Bedingungen und Einsetzen der Werte liefert für $\beta = 2$

$$2,0 \cdot 10^{-14} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^2 \ll m_a \ll 4,6 \cdot 10^{-11} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{2/3} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{4 \text{ GeV}} \right)^{4/3} \quad (4.38)$$

und $\beta = 3$

$$1,7 \cdot 10^{-14} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^2 \ll m_a \ll 3,2 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{6/5} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{10^5 \text{ GeV}} \right)^{4/5}. \quad (4.39)$$

Um einen Ausdruck für die Axion-Masse in dieser Region herzuleiten, wird, völlig analog zu den vorherigen Abschnitten, die Energiedichte aus Gleichung 4.35 dem experimentellen Wert $\Omega_{\text{DM}} = 0,26$ gleichgesetzt. Es ergibt sich schließlich nach Umformung

$$m_a \simeq \begin{cases} 5,5 \cdot 10^{-11} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right) \theta_i^{2/3} & \text{für } \beta = 2 \\ 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{1/2} \theta_i & \text{für } \beta = 3. \end{cases} \quad (4.40)$$

Thermische Axion-Masse

Für die thermische Axion-Masse gilt $m_a \gtrsim m_{R_3}$. Der Massenbereich ergibt sich nach Umformung der rechten Ungleichung aus Formel 4.27 zu

$$m_{R_3} \ll m_a \ll f_\beta, \quad (4.41)$$

wobei f_β als

$$f_\beta \equiv \frac{T_{\text{eq}}^6}{M_P T_{\text{QCD}}^4} \left(\frac{2 T_{\text{end}}^2}{(8 - \beta) T_{\text{eq}}^2} \right)^{\frac{8+\beta}{8-\beta}}$$

$$= \begin{cases} 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{10/3} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{10^3 \text{ GeV}} \right)^{8/3} & \text{für } \beta = 2 \\ 4,9 \cdot 10^{-7} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{22/5} \left(\frac{T_{\text{eq}}}{10^7 \text{ GeV}} \right)^{8/5} & \text{für } \beta = 3 \end{cases} \quad (4.42)$$

definiert wird. Der konkrete Wert für die Axion-Masse bei T_{QCD}, m_{R_3} , folgt aus dem Schnittpunkt der beiden Fälle für T_{osc, R_3} aus Gleichung 4.31. Nach Gleichsetzen und Umformen ergibt sich

$$m_{R_3} \simeq 2,1 \cdot 10^{-13} \text{ eV} \left(\frac{\text{GeV}}{T_{\text{end}}} \right)^2, \quad (4.43)$$

wobei die schwache β -Abhängigkeit von T_{osc, R_3} hier vernachlässigt wird.

Für die parameterabhängige Axion-Masse folgt nach analogen Überlegungen zum konstanten Fall

$$m_a \simeq \begin{cases} 1,2 \cdot 10^{-11} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{5/2} \theta_i & \text{für } \beta = 2 \\ 8,7 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \left(\frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{BBN}}} \right)^{4/3} \theta_i^{4/3} & \text{für } \beta = 3. \end{cases} \quad (4.44)$$

4.2 Analyse und Diskussion der Ergebnisse

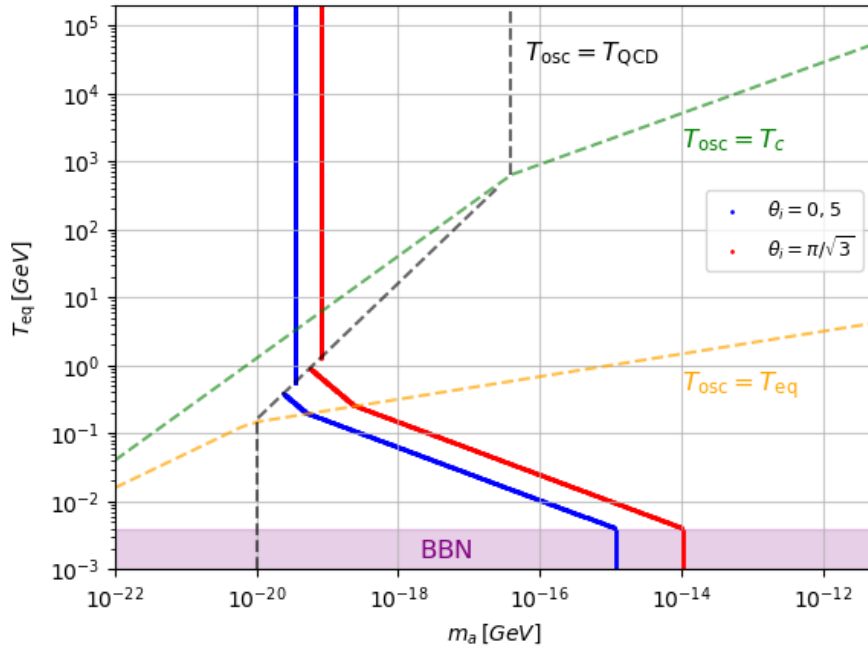


Abbildung 4.1: Darstellung des Parameterraums T_{eq} gegen m_a für $\beta = 2$. Die blaue und die rote Kurve geben für die entsprechenden θ_i -Werte an, welche Wertekombinationen in den markierten Oszillations-Regionen zu der experimentellen Dunkle Materie Energiedichte Ω_{DM} führen. Außerdem wird der Bereich der primordialen Nukleosynthese markiert, in welchem das kosmologische Standard-Szenario vorliegt. Grundsätzlich wird für die Ermittlung $T_{\text{end}} = 4 \text{ MeV}$ gewählt.

Die in Abschnitt 4.1 dargestellten Resultate sollen nun interpretiert und diskutiert werden. In den Abbildungen 4.1 (für $\beta = 2$) und 4.2 (für $\beta = 3$) sind die analytischen Ergebnisse visualisiert. Konkret ist hier der zum entsprechenden NSC-Szenario zugehörige Parameterraum für die Temperatur T_{eq} gegen die Masse m_a dargestellt. Der rote bzw. der blaue Graph gibt dabei alle (m_a, T_{eq}) -Kombinationen an, welche zu der korrekten experimentellen Dunkle Materie-Energiedichte Ω_{DM} führen. Der Parameterraum ergibt sich dadurch, dass für einen bestimmten Bereich von T_{eq} -Werten jeweils die zugehörigen m_a -Werte aus den analytischen Ausdrücken für jeden Fall (vergleiche Abschnitt 4.1) ermittelt werden. In jedem Schritt wird für die einzelnen Massen geprüft, ob diese innerhalb des für ihren Fall angegebenen Massenbereiches liegen. Ist dies bei einem bestimmten T_{eq} für ein m_a der Fall, so wird diese Masse als zu dieser Temperatur zugehörige Lösung genutzt. Grundsätzlich wird hierbei $T_{\text{end}} = 4 \text{ MeV}$ gewählt. Der initiale Winkel θ_i wird jeweils auf einen festen Wert gesetzt, wobei hier explizit die Fälle $\theta_i = 0,5$ (blauer Graph) sowie $\theta_i = \pi/\sqrt{3}$ (roter Graph) betrachtet werden. Die Graphen für diese Fälle sind in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellt, wobei sie auch als Grenzen eines von ihnen eingeschlossenen Bereiches aufgefasst werden können, welcher mit den im Intervall $[0,5; \pi/\sqrt{3}]$ liegenden θ_i -Werten korrespondiert. Generell führt jeder Punkt innerhalb des eingeschlossenen Bereiches auf den korrekten Wert von Ω_{DM} . Die Regionen links des korrekten Parameterbereiches führen auf eine zu hohe Dunkle Materie-Energiedichte, wohingegen die Regionen rechts davon nur einen geringeren Anteil des tatsächlichen Wertes liefern [2].

Abgesehen davon sind in den Abbildungen Grenzen eingezeichnet, welche die einzelnen Oszillations-Bereiche markieren: Die orangene Linie, $T_{\text{osc}} = T_{\text{eq}}$, sowie die grüne Linie, $T_{\text{osc}} = T_c$, grenzen die jeweilige Oszillations-Region ein, d.h. der Bereich unterhalb der orangenen Linie entspricht Region 1, der Bereich zwischen orangener und grüner Linie entspricht Region 2 und der Bereich oberhalb der grünen Linie entspricht Region 3. Die schwarze Linie, $T_{\text{osc}} = T_{\text{QCD}}$, markiert jeweils die Grenze zwischen den Bereichen in denen eine Oszillation bei konstanter und eine Oszillation bei thermischer Axion-Masse vorliegt. Diese ergibt sich für jede Region aus den entsprechenden Massen beim QCD-Phasenübergang, m_{R_1} , m_{R_2} und m_{R_3} . Links der schwarzen Linie liegt jeweils der Fall einer konstanten und

rechts der schwarzen Linie der Fall einer thermischen Axion-Masse vor. Ebenfalls eingezeichnet ist der Parameterbereich des kosmologischen Standard-Szenarios, welcher bei kleinen T_{eq} -Werten mit $T_{\text{eq}} \leq 4 \text{ MeV} = T_{\text{BBN}}$ einsetzt. Nach dem Einsetzen der primordialen Nukleosynthese kann - wie bereits erwähnt - ein NSC-Szenario ausgeschlossen werden. Der Parameterbereich ergibt sich in diesem Fall durch Gleichsetzen des Falls $m_a \gtrsim 3H(T_{\text{QCD}})$ aus Gleichung 3.26 mit dem experimentellen Wert Ω_{DM} und anschließender Umformung nach m_a . Der resultierende Ausdruck ist unabhängig von T_{eq} innerhalb des Bereiches der primordialen Nukleosynthese gültig.

Die Parameterräume sollen nun beginnend beim Fall $\beta = 2$ näher analysiert werden. Dabei wird unter anderem für jede Region anhand des Plots abgeschätzt, was die kleinsten m_a -Werte sind, welche zu der korrekten experimentellen Dunkle Materie-Energiedichte führen. Wird in Abbildung 4.1 zunächst Region 1 betrachtet, so zeigt sich, dass für den betrachteten oben genannten Winkel-Bereich keine Lösungen für den Fall der konstanten Axion-Masse gefunden werden. Es sei erwähnt, dass solche Lösungen prinzipiell existieren können wenn Winkel $\theta_i < 0,5$ betrachtet werden. Analoges gilt hier für den Fall der thermischen Axion-Masse in Region 3, für welchen im betrachteten Winkel-Bereich ebenfalls keine Lösungen existieren. Diese sind im Falle $\theta_i > \pi/\sqrt{3}$ möglich. Für den thermischen Fall in Region 1 wird eine Lösung gefunden. Die Angaben der kleinsten Massen beziehen sich im Folgenden stets auf den Winkel $\theta_i = 0,5$. Für Region 1 bei thermischer Axion-Masse beträgt diese

$$m_a \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ eV} \quad (4.45)$$

bei einer Temperatur von $T_{\text{eq}} \approx 2 \cdot 10^{-1} \text{ GeV}$.

Für Region 2 verläuft der Parameterbereich sowohl durch den Teil konstanter als auch thermischer Masse. Die jeweils kleinsten Massen betragen im Falle der thermischen Axion-Masse

$$m_a \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ eV} \quad (4.46)$$

für $T_{\text{eq}} \approx 4 \cdot 10^{-1} \text{ GeV}$ und bei konstanter Axion-Masse

$$m_a \approx 4 \cdot 10^{-11} \text{ eV} \quad (4.47)$$

für $T_{\text{eq}} \approx 5 \cdot 10^{-1} \text{ GeV}$. Für größerer Temperaturen als letzteres T_{eq} verhardt m_a konstant bei $m_a \approx 4 \cdot 10^{-11} \text{ eV}$, d.h. in Region 3 bei konstanter Axion-Masse liegt dieser Wert ebenfalls vor.

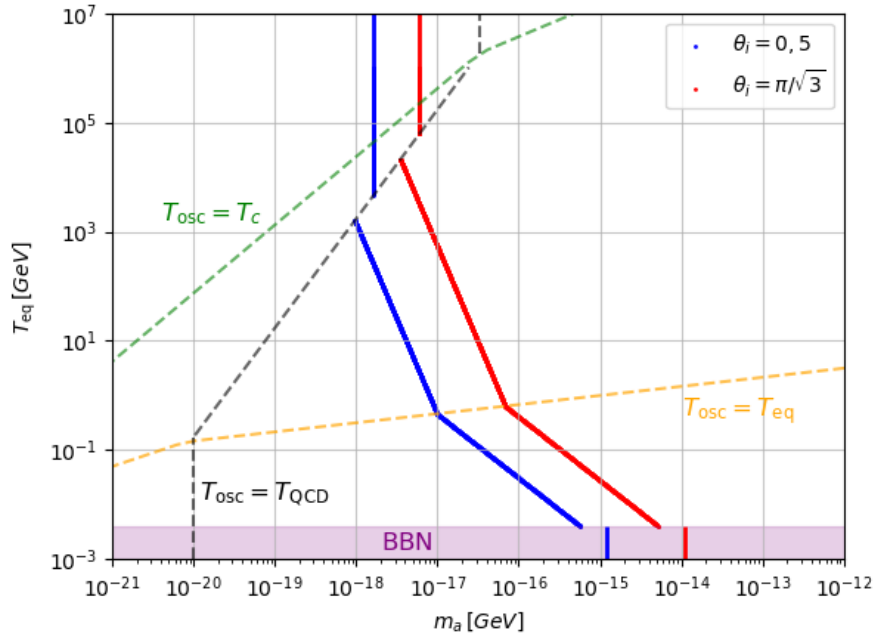


Abbildung 4.2: Darstellung des Parameterraums T_{eq} gegen m_a für $\beta = 3$. Die blaue und die rote Kurve geben für die entsprechenden θ_i -Werte an, welche Wertekombinationen in den markierten Oszillations-Regionen zu der experimentellen Dunkle Materie Energiedichte Ω_{DM} führen. Außerdem wird der Bereich der primordialen Nukleosynthese markiert, in welchem das kosmologische Standard-Szenario vorliegt. Grundsätzlich wird für die Ermittlung $T_{\text{end}} = 4 \text{ MeV}$ gewählt.

Für $\beta = 3$ wird Abbildung 4.2 näher betrachtet. Wie auch bei $\beta = 2$ zeigt sich hier, dass für den betrachteten Bereich der θ_i -Werte keine Lösungen im Falle der konstanten Axion-Masse in Region 1 sowie im Falle der thermischen Axion-Masse

in Region 3 existieren. Hier kann somit nicht die korrekte Energiedichte der Dunklen Materie erzeugt werden. Die Ermittlung der kleinsten Axion-Massen pro Region liefert für den thermischen Fall in Region 1

$$m_a \approx 1 \cdot 10^{-8} \text{ eV} \quad (4.48)$$

für $T_{\text{eq}} \approx 4 \cdot 10^{-1} \text{ GeV}$. Für Region 2 ergeben sich bei thermischer Axion-Masse

$$m_a \approx 1 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \quad (4.49)$$

für $T_{\text{eq}} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ GeV}$ und bei konstanter Axion-Masse

$$m_a \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \quad (4.50)$$

für $T_{\text{eq}} \approx 4 \cdot 10^3 \text{ GeV}$ als kleinste Massen. Auch hier verharrt m_a für $T_{\text{eq}} > 4 \cdot 10^3 \text{ GeV}$ konstant bei $m_a \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$, was sich in Region 3 für den Fall der Oszillation bei konstanter Masse fortsetzt.

Die zuvor für $\beta = 2$ und $\beta = 3$ ermittelten kleinsten Massen m_a in den verschiedenen Regionen können mit einem typischerweise diskutierten Wert $m_a \approx 10^{-10} \text{ eV}$ [1] verglichen werden. Es zeigt sich, dass bei Betrachtung eines NSC-Szenarios mit $\beta = 2$ kleinere Werte für m_a der Größenordnung $\mathcal{O}(10^{-11} \text{ eV})$ gefunden werden können. Diese liegen in jeder der oben betrachteten Oszillations-Regionen vor (vergleiche Gleichungen 4.45, 4.46 und 4.47). Die Werte sind dabei an die Bedingung gekoppelt, dass durch sie die gesamte Dunkle Materie-Energiedichte Ω_{DM} erzeugt wird. Für $\beta = 3$ liegen die m_a -Werte in allen Regionen bzw. für alle T_{eq} -Werte oberhalb einer typischen Axion-Masse von $m_a \approx 10^{-10} \text{ eV}$.

Bei Betrachtung der Ergebnisse aus Abbildung 4.1 und Abbildung 4.2 fällt auf, dass es in Region 2 beim Wechsel zwischen thermischer und konstanter Axion-Masse zu einer Diskontinuität bzw. einem Sprung kommt. Dieser kann darauf zurückgeführt werden, dass in den analytischen Rechnungen die Änderungen in den

Freiheitsgraden $g_*(T)$ und $g_{*S}(T)$ vernachlässigt werden. Bei Betrachtung der Entwicklung der Freiheitsgrade im Temperaturverlauf (vergleiche Abbildung 4.3) zeigt sich, dass vor allem in einem Bereich zwischen $T = 10^2 \text{ GeV}$ und $T = T_{\text{QCD}}$ starke Änderungen in g_* und g_{*S} auftreten, welche durchaus Einfluss auf die Axion-Masse in diesem Bereich haben könnten. Vor diesem Hintergrund ist davon auszugehen, dass die ermittelten Parameterbereiche in den verschiedenen Regionen grundsätzlich leichte Verschiebungen im Vergleich zu den tatsächlichen Werten aufweisen. Für den Fall $\beta = 3$ zeigt sich in Abbildung 4.2 ebenfalls eine Diskontinuität beim Übergang zwischen Region 1 des NSC-Szenarios und dem Bereich des kosmologischen Standard-Szenarios. Auch hier können die Freiheitsgrade als mögliche Ursache in Erwägung gezogen werden. Allerdings sind in diesem Fall auch andere Ursachen möglich, welche mit dem analytischen Verfahren des kosmologischen Standard-Szenarios zusammenhängen können. Diesbezüglich können weiterführende Untersuchungen empfohlen werden.

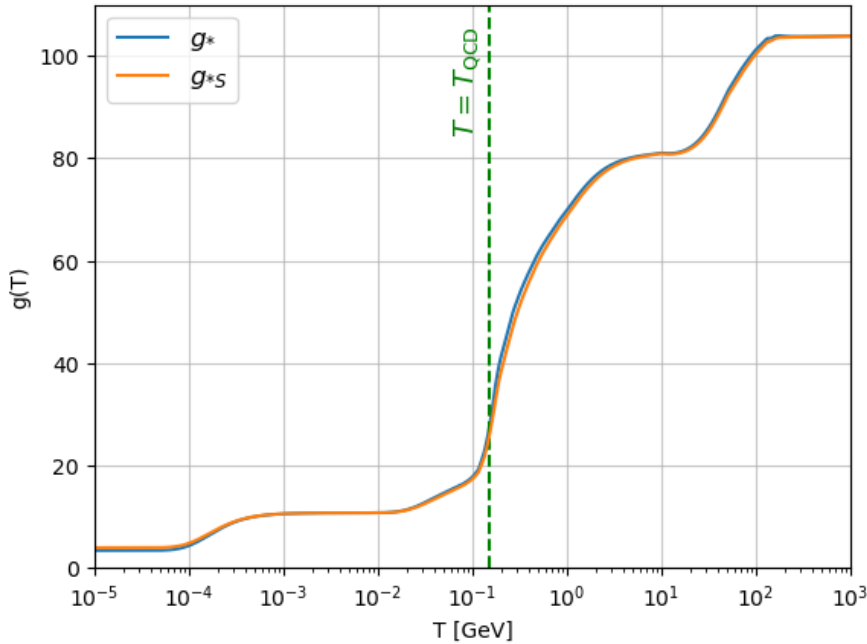


Abbildung 4.3: Darstellung der relativistischen Freiheitsgraden g_* (blau) und g_{*S} (orange) als Funktion der Temperatur. Eingezeichnet ist ebenfalls der QCD-Phasenübergang bei T_{QCD} . Die Datengrundlage liefert Quelle [12].

Anhand der geschilderten Aspekte kann geschlussfolgert werden, dass die analytische Methode lediglich zur approximativen Ermittlung des Parameterraums dient und insbesondere durch die Vernachlässigung der Änderung in den Freiheitsgraden keine exakten Ergebnisse liefern kann. Weiterführend kann empfohlen werden den Parameterraum mithilfe numerischer Methoden zu bestimmen. Diese könnten beispielsweise auf demselben Verfahren basieren, welches für die Ermittlung des Parameterraums θ_i gegen m_a im kosmologischen Standard-Szenario (vergleiche Abschnitt 3.1.2) vorgeschlagen wird. Der Vergleich zwischen beiden Methoden könnte Aufschluss über die tatsächlichen Abweichungen des hier ermittelten analytischen Parameterraums geben und zeigen, für welche Bereiche von m_a - bzw. T_{eq} -Werten dieser genauere oder ungenauere Ergebnisse liefert.

Schlussfolgerung

Im Bezug auf die vorangegangenen Analysen und Diskussionen zur Produktion von axionischer Dunkler Materie können folgende zentrale Resultate dieser Arbeit festgehalten werden: Im Bezug auf das kosmologische Standard-Szenario wird im analytischen Verfahren ein Ausdruck für die Gesamtenergiedichte der Dunklen Materie hergeleitet. Dieser hängt von den freien Parametern des Modells, dem initialen Winkel θ_i und der Axion-Masse m_a , ab. Bei der numerischen Betrachtung des Standard-Falls wird zunächst das Verhalten der Oszillationstemperatur T_{osc} für unterschiedliche m_a -Werte ermittelt. Hierbei zeigt sich, dass je größer m_a ist, eine entsprechend höhere Oszillationstemperatur vorliegt. Dies lässt sich anhand der früher erfüllten Oszillationsbedingung, Gleichung 2.7, erklären. Ferner wird mit numerischen Methoden ein Wertebereich für die freien Parameter ermittelt, welcher mit dem experimentellen Wert der Dunkle Materie-Energiedichte Ω_{DM} korrespondiert. Ein Vergleich zu den Resultaten aus dem analytischen Verfahren offenbart die höhere Genauigkeit der Numerik im Bereich großer θ_i -Werte. Die Ursache dafür ist, dass die Axion-Bewegungsgleichung im numerischen Verfahren exakt implementiert und gelöst wird. Das bedeutet, dass im Gegensatz zum analytischen Ansatz keine Approximationen genutzt werden, welche nur im Bereich kleiner Winkel gültig sind. In diesem Kontext wird ebenfalls diskutiert, ob die hier dargestellte numerische Methode genauer als jene aus Quelle [2] ist.

Anschließend folgt die Untersuchung modifizierter Expansionsszenarien. Für den analytischen Teil kann das Verhalten der Energiedichten ρ_R und ρ_ϕ durch näherungsweise Lösen von zwei gekoppelten Boltzmann-Gleichungen (Gleichungen 3.40 und 3.41) ermittelt werden. Die Lösungen setzen sich hierbei aus der klassischen, vor dem Zerfall des Feldes ϕ gültigen Skalenfaktor-Abhängigkeit sowie

einem Korrekturterm zusammen, welcher den Zerfall berücksichtigt. Anhand dessen werden Ausdrücke für wesentliche Temperatur- bzw. Skalenfaktorschritte des NSC-Szenarios (z.B. T_c) ermittelt. Dies legt die Basis für die spätere Bestimmung der Grenzwerte für m_a in den einzelnen Oszillations-Regionen. Zudem wird der Einfluss des NSC-Szenarios auf die Produktion axionischer Dunkler Materie untersucht. Dabei wird, aufgrund nicht mehr geltender Entropieerhaltung, eine Verdünnung der Energiedichte ρ_a festgestellt, welche durch einen Faktor γ beschrieben wird. Durch die numerische Betrachtung des NSC-Szenarios ist eine exakte Beschreibung des Verhaltens von ρ_R und ρ_ϕ möglich. Das Verfahren basiert auf der exakten Lösung der Boltzmann-Gleichungen. Auch für den Fall der modifizierten Expansion wird die Oszillationstemperatur T_{osc} in Abhängigkeit von m_a betrachtet. Im Vergleich zum kosmologischen Standard-Szenario ergibt sich im NSC-Fall für mittlere m_a -Werte eine abgesenkte Oszillationstemperatur, während für sehr große und sehr kleine m_a -Werte die Fälle ineinander übergehen. Die Unterschiede können anhand des größeren Wertes für H bei einer modifizierten Expansion erklärt werden.

Zuletzt wird die Produktion axionischer Dunkler Materie für Feldoszillationen in den unterschiedlichen NSC-Regionen betrachtet. Es wird gezeigt, dass sich die Axion-Masse anhand der Bedingungen für die Oszillationstemperatur auf bestimmte Bereiche eingrenzen lässt. Diese sind spezifisch je nachdem welche Region und welcher Fall, d.h. konstante oder thermische Axion-Masse, betrachtet wird. Zentral sind ebenfalls die mit der gesamten experimentellen Energiedichte Ω_{DM} verbundenen Axion-Massen. Auch diese sind für die einzelnen Fälle spezifisch, da sich für Feldoszillationen in den einzelnen NSC-Regionen unterschiedliche Resultate für die produzierte Dunkle Materie-Energiedichte ergeben. Letztendlich kann mithilfe der Massenbereiche und der Ausdrücke für m_a ein Parameterraum T_{eq} gegen m_a ermittelt werden. Dieser gibt für feste Winkel θ_i an, welche Werte der freien Parameter zu Ω_{DM} führen. Die genauere Analyse der Parameterräume im Hinblick auf die kleinsten Massen zeigt, dass ein NSC-Szenario mit $\beta = 2$ kleinerer Werte für m_a im Vergleich zu typischerweise diskutierten Massen liefert. Es kann dabei eine Größenordnung von $\mathcal{O}(10^{-11} \text{ eV})$ erreicht werden.

Im Rahmen der Diskussion der Parameterräume T_{eq} gegen m_a wird festgehalten, dass die zugrundeliegende analytische Methode nur zu approximativen Zwecken genutzt werden kann. Dies zeigt sich anhand von Diskontinuitäten im Verlauf des Parameterbereiches, welche auf nicht vernachlässigbare Änderungen in den relativistischen Freiheitsgraden zurückgeführt werden können. Weiterführend wird die Ermittlung des Parameterraums mit numerischen Methoden vorgeschlagen. Abschließend kann jedoch festgehalten werden, dass auch das analytische Verfahren eine Annäherung an mögliche Axion-Massenbereiche zulässt und insbesondere in Bezug auf die Größenordnung konsistente Ergebnisse liefert. Das Ziel dieser Arbeit, die Produktion axionischer Dunkler Materie in modifizierten Expansionsszenarien genauer zu verstehen und Schlüsse insbesondere auf die Axion-Masse zu ziehen, kann somit im Allgemeinen als erfüllt angesehen werden. Dennoch bietet sich für exaktere Ergebnisse eine weiterführende Untersuchung der Thematik an.

Literatur

- [1] David J. E. Marsh. „Axions for amateurs“. In: *Contemp. Phys.* 64.1 (2023), S. 1–18. DOI: [10.1080/00107514.2023.2256085](https://doi.org/10.1080/00107514.2023.2256085). arXiv: [2308.16003](https://arxiv.org/abs/2308.16003).
- [2] Paola Arias u. a. „New opportunities for axion dark matter searches in non-standard cosmological models“. In: *JCAP* 11 (2021), S. 003. DOI: [10.1088/1475-7516/2021/11/003](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/11/003). arXiv: [2107.13588](https://arxiv.org/abs/2107.13588) [hep-ph].
- [3] R. D. Peccei und Helen R. Quinn. „CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles“. In: *Phys. Rev. Lett.* 38 (25 Juni 1977), S. 1440–1443. DOI: [10.1103/PhysRevLett.38.1440](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.1440). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.38.1440>.
- [4] Steven Weinberg. „A New Light Boson?“ In: *Phys. Rev. Lett.* 40 (4 Jan. 1978), S. 223–226. DOI: [10.1103/PhysRevLett.40.223](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.223). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.223>.
- [5] F. Wilczek. „Problem of Strong P and T Invariance in the Presence of Instantons“. In: *Phys. Rev. Lett.* 40 (5 Jan. 1978), S. 279–282. DOI: [10.1103/PhysRevLett.40.279](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.279). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.279>.
- [6] David J. E. Marsh. „Axion Cosmology“. In: *Phys. Rept.* 643 (2016), S. 1–79. DOI: [10.1016/j.physrep.2016.06.005](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.06.005). arXiv: [1510.07633](https://arxiv.org/abs/1510.07633) [astro-ph.CO].
- [7] Daniel Aloni, Hengameh Bagherian und Rashmish K. Mishra. „Evaporating Axion Dark Matter and the Hubble Constant“. In: (Sep. 2024). arXiv: [2409.13807](https://arxiv.org/abs/2409.13807) [hep-ph].

- [8] N. Aghanim u. a. „Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters“. In: *Astron. Astrophys.* 641 (2020). [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)], A6. DOI: [10 . 1051 / 0004 – 6361 / 201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910). arXiv: [1807 . 06209](https://arxiv.org/abs/1807.06209) [[astro-ph.CO](#)].
- [9] Ciaran A. J. O’Hare. „Cosmology of axion dark matter“. In: *PoS COSMICWIS-Pers* (2024), S. 040. DOI: [10 . 22323/1 . 454 . 0040](https://doi.org/10.22323/1.454.0040). arXiv: [2403 . 17697](https://arxiv.org/abs/2403.17697) [[hep-ph](#)].
- [10] Sz. Borsanyi u. a. „Calculation of the axion mass based on high-temperature lattice quantum chromodynamics“. In: *Nature* 539.7627 (2016), S. 69–71. DOI: [10 . 1038/nature20115](https://doi.org/10.1038/nature20115). arXiv: [1606 . 07494](https://arxiv.org/abs/1606.07494) [[hep-lat](#)].
- [11] Daniel Baumann. *Cosmology*. Cambridge University Press, 2022.
- [12] Ken’ichi Saikawa und Satoshi Shirai. „Precise WIMP Dark Matter Abundance and Standard Model Thermodynamics“. In: *JCAP* 08 (2020), S. 011. DOI: [10 . 1088/1475–7516/2020/08/011](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/08/011). arXiv: [2005 . 03544](https://arxiv.org/abs/2005.03544) [[hep-ph](#)].