Prof. Dr. G. Münster, S. Kuberski WS 2018/19

Übungen zur *Mathematik für das Lehramt Physik an Haupt-, Real- und Gesamtschulen*

Blatt 3 Abgabe bis Montag, den 29.10.2018, 10:15 Uhr

1. *Reihen II*

(a) In einem großen Bioreaktor ist die maximal mögliche Bakterienmasse nahezu erreicht. Der Zuwachs an Bakterien wird nun täglich gemessen. Am ersten Tag stellt man noch einen Zuwachs von $Z_1 = 100\,\mathrm{mg}$ fest, an allen darauf folgenden Tagen beträgt der Zuwachs Z_n nur noch drei Fünftel des Zuwachses Z_{n-1} des Vortages. **6 P**

- Wie groß ist der Zuwachs am 14. Tag?
- Wie groß ist der Gesamtzuwachs von ersten bis zum 14. Tag?
- Kann sich der Gesamtzuwachs durch eine längere Beobachtungsdauer noch wesentlich erhöhen?

(b) Betrachten Sie die folgende Reihe: **4 P**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Können Sie mittels des Quotientenkriteriums eine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen? Warum?
Bonusfrage: Konvergiert die Reihe?

2. *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) **6 P**

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

(b) **6 P**

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

(c) **6 P**

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

3. ***Elementare Funktionen***

(a) Bilden Sie die Funktionen $f(x) = u(v(x))$ und $g(x) = v(u(x))$ **12 P**

(i) $u(x) = 2 + 5x, \qquad v(x) = 2 - 3x$

(ii) $u(x) = \frac{1}{4+x^2}, \qquad v(x) = \frac{2}{x}$

(iii) $u(x) = \mathrm{e}^x, \qquad v(x) = x^2$

(iv) $u(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad v(x) = \frac{4}{x}$

(b) Bilden Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ **6 P**

(i) $f(x) = -x^3 + 1$

(ii) $f(x) = \frac{3}{\mathrm{e}^x}$

(c) Finden Sie x als Funktion von y **6 P**

(i) $y = \log_{10}(2 - x) + 3$

(ii) $y = a^x \cdot (\mathrm{e}^x)^2$

(d) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ **7 P**

(i) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

(ii) Berechnen Sie die Funktion $g(x) = f(f(x))$.

(iii) Skizzieren Sie $f(x)$, $f^{-1}(x)$ und $g(x)$.