Prof. Dr. G. Münster, S. Kuberski WS 2018/19

Übungen zur *Mathematik für das Lehramt Physik an Haupt-, Real- und Gesamtschulen*

Blatt 2 Abgabe bis Montag, den 22.10.2018, 10:15 Uhr

1. *Potenzen*

(a) Die folgende Aufgabe ist identisch mit Aufgabe 1 b) von Blatt 1. Wenn Sie diese bereits bearbeitet haben, müssen Sie die Aufgabe nicht noch einmal abgeben, die Punkte werden für dieses Blatt angerechnet. Sie können sich jedoch verbessern, wenn Sie eine neue Version der Lösung einreichen.

(b) Die binomischen Formeln beliebiger Potenzen $n \in \mathbb{N}$ lassen sich mit Hilfe der Formel **8 P**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

berechnen. Dabei wird der sogenannte Binomialkoeffizient verwendet, welcher über

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

mit der Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

definiert ist.

- Vergewissern Sie sich zunächst, dass Sie mit dieser Formel die bekannte binomische Formel für $n = 2$, also

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

  erhalten.
- Bestimmen Sie nun durch die explizite Berechnung der entsprechenden Binomialkoeffizienten die binomischen Formeln für $n = 3$ und $n = 4$.

2. *Fakultäten und Binomialkoeffizienten*

(a) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke: **9 P**

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)! \cdot 2!}, \qquad \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!}, \qquad \frac{n^2-9}{(n+3)!} + \frac{6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

(b) Das Produkt aller ungeraden Zahlen kleiner gleich n lässt sich mit Hilfe der Doppelfakultät wie folgt ausdrücken: **4 P**

$$n!! \equiv (2k+1)!! \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Finden Sie eine Darstellung dieser Doppelfakultät, in der lediglich die gewöhnliche Fakultät und Potenzen genutzt werden.

(c) Nutzen Sie die Formel für die Berechnung der Binomialkoeffizienten, um **4 P**

$$\binom{n}{0} \quad \text{und} \quad \binom{n}{1}$$

zu berechnen.

(d) Sie haben n viele von 1 bis n durchnummerierte Lottokugeln in einer Lostrommel und ziehen daraus zwei beliebige Kugeln. Wie viele verschiedene Kombinationsmöglichkeiten gibt es? Können Sie diese Anzahl auch mittels eines Binomialkoeffizienten ausdrücken? **6 P**

3. *Ungleichungen*

(a) Geben Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen an: **6 P**

$$|2x+4| \leq 8, \qquad |x^2 - 2| \leq 7$$

(b) Schätzen Sie für $|x| < 2$ und $|y| < 1$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung **8 P**

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

die folgenden Ausdrücke nach oben ab:

$$|x+3y|, \qquad |8x^2 - 10xy|$$

4. *Reihen*

(a) Nutzen Sie die in der Vorlesung präsentierten endlichen Reihen, um folgende Reihe zu berechnen: **6 P**

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2$$

(b) Ein Frosch sitzt am Rand einer 3 m breiten Straße und will diese überqueren. Beim ersten Sprung springt er einen Meter, beim zweiten einen halben, beim dritten einen Viertelmeter usw. Er erreicht also mit jedem zusätzlichen Sprung nur noch die Hälfte des vorhergehenden. Erreicht er auf diese Weise die andere Straßenseite? **8 P**