Prof. Dr. G. Münster, S. Kuberski WS 2018/19

Übungen zur *Mathematik für das Lehramt Physik an Haupt-, Real- und Gesamtschulen*

Blatt Probeklausur Abgabe bis Montag, den 21.01.2019, 10:15 Uhr

Mit den Aufgaben dieser Probeklausur sollen wichtige Themenbereiche aus den Übungszetteln wiederholt und vertieft werden. Falls Sie eine Korrektur Ihrer Lösungen wünschen, können Sie diese bis zum 21. Januar abgeben.

1. *Abbildungsmatrizen in 2D III*

(a) Gegeben sei der Vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$, welcher mit der x-Achse den Winkel β einschließt.
Bei der Scherung eines Vektors mit der x-Achse als Scherachse wird die x-Komponente des Vektors um ein Stück proportional zur y-Komponente vergrößert. Durch die Scherung mit der Proportionalitätskonstante m wird aus dem Vektor $\vec{v}$ der Vektor $\vec{c}$ erhalten.

(i) Drücken Sie c_1 und c_2 durch v_1, v_2 und m aus.

(ii) Leiten Sie aus den erhaltenen Formeln die Form der Schermatrix $H(m)$ her, welche $H(m) \cdot \vec{v} = \vec{c}$ erfüllt.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Drehmatrix

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(c) Spiegeln Sie den Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit der Spiegelungsmatrix

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

von Blatt 8 an der y-Achse und drehen Sie ihn anschließend um 45°.

2. *Kurvendiskussion*

Die Funktion $f(x)$ sei definiert als

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Unten ist eine Skizze ihres Graphens zu sehen.

(a) Wie ist das asymptotische Verhalten der Funktion, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$?

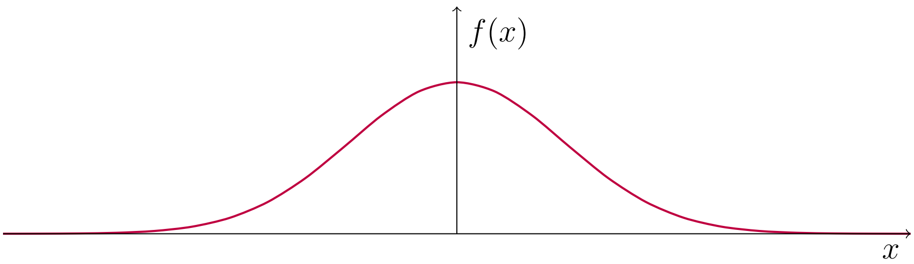
(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$.

(c) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion, ob es sich um Maxima oder Minima handelt und welcher Funktionswert dort angenommen wird.

(d) Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion. Prüfen Sie dafür sowohl die notwendige als auch die hinreichende Bedingung. Geben Sie an, welche Funktionswerte an den Wendepunkten angenommen werden.

Zur Kontrolle: Die dritte Ableitung ist

$$f'''(x) = (-x^3 + 3x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$



3. *Fallschirmspringen*

Eine Fallschirmspringerin springt aus einem Flugzeug und stürzt in Richtung Boden. Zwischen Absprung und dem Auslösen ihres Schirmes lässt sich ihre Bewegung durch den Vektor

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} v\,t \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g\,t^2 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Dabei ist $v = 60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ die Geschwindigkeit des Flugzeugs und die Beschleunigung kann mit $g = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ angenommen werden. Die Luftreibung wird in dieser Aufgabe vernachlässigt.

(a) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t)$.

(b) Wie schnell ist die Fallschirmspringerin nach zwei Sekunden?

(c) Sind $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ orthogonal zueinander? Finden Sie einen Vektor, der zu $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ orthogonal ist.

4. ***Massenspektrometrie***

Mit einem Massenspektrometer kann die Masse (und die Ladung) unbekannter geladener Teilchen bestimmt werden.

(a) Hierfür ist es meist notwendig, die Geschwindigkeit der Teilchen festzulegen. Dies kann mit einem Wienfilter geschehen. Dazu werden die Coulombkraft, die durch ein elektrisches Feld hervorgerufen wird und die Lorentzkraft, welche aus einem Magnetfeld resultiert, genutzt.

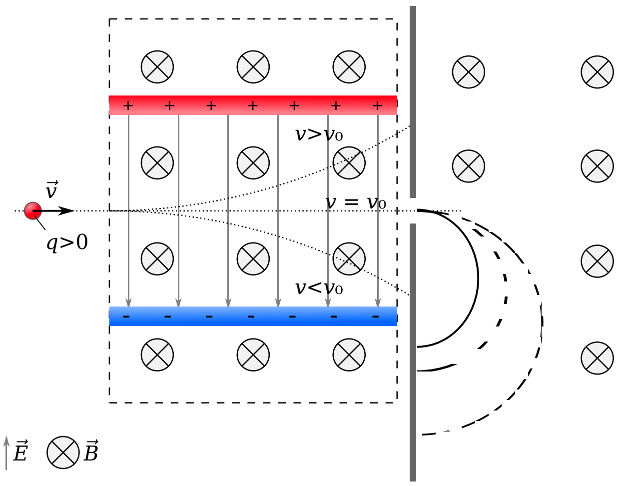


Abbildung 1: Geschwindigkeitsfilter und Massenspektrometer

Die Teilchen bewegen sich in Richtung $\vec{v} = (1{,}1{,}2)^T$.

(i) Das elektrische Feld $\vec{E}$ soll senkrecht zu $\vec{v}$ zeigen. Finden Sie eine mögliche Richtung dieses Feldes.

(ii) Das Magnetfeld $\vec{B}$ soll senkrecht zu $\vec{v}$ und $\vec{E}$ sein. In welche Richtung muss es dann zeigen?

(iii) Coulombkraft $F_C = q\vec{E}$ und Lorentzkraft $F_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$ zeigen in entgegengesetzte Richtung. Wenn die Beträge beider Kräfte gleich groß sind, kann ein Teilchen den Filter passieren. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_0 eines solchen Teilchens in Abhängigkeit von $|\vec{E}|$ und $|\vec{B}|$.

(iv) Teilchen, die den Filter passieren und nicht abgelenkt werden, bewegen sich weiterhin in Richtung $\vec{v} = (1{,}1{,}2)^T$. Sie beobachten ein abgelenktes Teilchen, welches sich am Ende des Filters in Richtung $\vec{u} = (2{,}0{,}2)^T$ bewegt. Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Teilchenbahnen. *Hinweis:* $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) Im Massenspektrometer wirkt nur noch das Magnetfeld. Die Lorentzkraft wirkt als Zentripetalkraft $F_z = \frac{mv^2}{r}$ und zwingt die Teilchen auf eine Kreisbahn. Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Eintrittspunkt in das Massenspektrometer und dem Auftreffen auf dem Schirm in Abhängigkeit ihrer Masse und ihrer Ladung.
Hinweis: In der Abbildung sind die Bahnen verschiedener Teilchen gezeigt.

5. ***Lineare Gleichungssysteme***

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \end{array}$$

6. ***Komplexe Zahlen***

Ermitteln Sie die komplexe Zahl z, welche die Gleichung

$$\frac{-1+\mathrm{i}}{10}\,z + \frac{5+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$$

löst. Schreiben Sie die Lösung in der Standard-Form $z = a + \mathrm{i}\,b$ auf, wobei a und b reelle Koeffizienten sind.