Prof. Dr. G. Münster, S. Kuberski WS 2017/18

Übungen zur *Mathematik für das Lehramt Physik an Haupt-, Real- und Gesamtschulen*

Blatt 7 Abgabe bis Montag, den 04.12.2017, 10:15 Uhr

1. *Abbildungsmatrizen in 2D I* **24 P**

Gegeben sei der Vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$, welcher mit der x-Achse den Winkel β einschließt.

(a) Durch die Drehung um den Winkel α ergibt sich der neue Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)^T$. **8 P**

(i) Nutzen Sie die Additionstheoreme, um a_1 und a_2 durch v_1, v_2 und den Drehwinkel α auszudrücken.

(ii) Leiten Sie aus den erhaltenen Formeln die Form der Drehmatrix $R(\alpha)$ her, welche $R(\alpha) \cdot \vec{v} = \vec{a}$ erfüllt.

(b) Durch Spiegelung an einer Ursprungsgeraden, welche um den Winkel γ relativ zur x-Achse geneigt ist, ergibt sich aus $\vec{v}$ der neue Vektor $\vec{b}$. **8 P**

(i) Nutzen Sie die Additionstheoreme, um b_1 und b_2 durch v_1, v_2 und den Drehwinkel γ auszudrücken.

(ii) Leiten Sie aus den erhaltenen Formeln die Form der Spiegelungmatrix $S(\gamma)$ her, welche $S(\gamma) \cdot \vec{v} = \vec{b}$ erfüllt.

(c) Bei der Scherung eines Vektors mit der x-Achse als Scherachse wird die x-Komponente des Vektors um ein Stück proportional zur y-Komponente vergrößert. Durch die Scherung mit der Proportionalitätskonstante m wird aus dem Vektor $\vec{v}$ der Vektor $\vec{c}$ erhalten. **8 P**

(i) Drücken Sie c_1 und c_2 durch v_1, v_2 und m aus.

(ii) Leiten Sie aus den erhaltenen Formeln die Form der Schermatrix $H(m)$ her, welche $H(m) \cdot \vec{v} = \vec{c}$ erfüllt.

2. *Abbildungsmatrizen in 2D II* **21 P**

Wir betrachten den zweidimensionalen Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Durch Multiplikation des Vektors mit der Spiegelungsmatrix **7 P**

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

wird der Vektor an einer Ursprungsgeraden gespiegelt, die um den Winkel α relativ zur x-Achse verläuft. Berechnen Sie zunächst die allgemeine Form des gespiegelten Vektors

$$\vec{u} = S(\alpha) \cdot \vec{r}.$$

Berechnen Sie dann $\vec{u}$ für die Spiegelung an der x-Achse, an der y-Achse und an der Winkelhalbierenden zwischen beiden Achsen.

(b) Zeichnen Sie $\vec{r}$ und die drei gespiegelten Vektoren aus (a). **4 P**

(c) Mit der Matrix **6 P**

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

kann der Vektor um den Winkel α gedreht werden. Drehen Sie $\vec{r}$ mit $R(30°)$ und mit $R(45°)$.

(d) Drehen Sie nun den mit $R(30°)$ zunächst um 30° gedrehten Vektor mit $R(15°)$ um 15°. Entspricht das Ergebnis ihren Erwartungen? **4 P**

3. *Matrixmultiplikation* **14 P**

(a) Bilden Sie mit den Matrizen **4 P**

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Produkte $B \cdot C$ und $C \cdot B$.

(b) Bilden Sie, wenn möglich, mit den Matrizen **6 P**

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

die Produkte

(i) $D \cdot E$ (ii) $D \cdot E^T$ (iii) $E \cdot D$ (iv) $E^T \cdot D$.

(c) Drücken Sie die Matrix C durch eine symmetrische Matrix S und eine antisymmetrische Matrix A aus, so dass $C = S + A$ gilt. **6 P**