

## Aufgabe 44: Koordinatenwechsel im Zweikörperproblem (2 Punkte)

Für das Zweikörperproblem ist es günstig, Relativkoordinaten  $\vec{r}$  und Schwerpunktkoordinaten  $\vec{r}_s$  einzuführen. Es gilt

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{r}_s = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

wobei  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  die Koordinaten und  $m_1, m_2$  die Massen der beiden Körper sind. Zeigen Sie, dass (für den kinetischen Teil des Hamiltonoperators) gilt

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_s - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta,$$

wobei

$$M = m_1 + m_2, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

und  $\Delta, \Delta_s, \Delta_1, \Delta_2$  die Laplaceoperatoren bezüglich der Relativkoordinaten, Schwerpunktkoordinaten bzw. der Koordinaten der beiden Körper sind.

## Aufgabe 45: Energieniveaus eines HF Moleküls (2 Punkte)

Berechnen Sie das Verhältnis der Energiedifferenz der ersten beiden Rotationsniveaus zur Energiedifferenz der ersten beiden Vibrationsniveaus für das HF Molekül. Verwenden Sie die in der Vorlesung diskutierte Näherung. Das Trägheitsmoment des HF Moleküls ist  $I = 1,35 \cdot 10^{-47} \text{ kg m}^2$ , die Vibrationsfrequenz ist gegeben durch

$$\frac{\omega_0}{2\pi c} = 39,87 \text{ m}^{-1}.$$

## Aufgabe 46: Feinstrukturkonstante (2 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]

Mit welcher Geschwindigkeit (in Einheiten von  $c$ ) kreist ein Elektron auf der ersten Bohr'schen Bahn? In welchem Verhältnis stehen Compton-Wellenlänge und Radius der ersten Bohr'schen Bahn? In welchem Verhältnis steht die Bindungsenergie des Elektrons im Wasserstoffatom zu seiner Ruheenergie? Drücken Sie Ihre Ergebnisse durch die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante aus.

## Aufgabe 47: Feinstruktur wasserstoffähnlicher Ionen (5 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]

Die Feinstruktur bei wasserstoffähnlichen Ionen (Ionen mit nur einem Elektron) wird durch

$$E_{\text{FS}} = -\frac{E_n \alpha^2}{n} \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \cdot Z^2$$

beschrieben. Die Energie  $E_n$  ist der Betrag der Energie des unverschobenen Energieniveaus.

- (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der Korrekturterm für keinen möglichen Wert der Quantenzahlen  $n$  und  $j$  verschwindet, sondern stets zu einer Absenkung gegenüber dem unkorrigierten Energiewert führt.
- (1 Punkt) In wie viele Energieniveaus spalten die Terme des einfach ionisierten Heliums, die zu den Hauptquantenzahlen  $n = 3$  und  $n = 4$  gehören, durch die Feinstruktur-Wechselwirkung auf?

- c) (1,5 Punkte) Tabulieren Sie die absolute energetische Verschiebung dieser Niveaus relativ zu den unverschobenen Termen.
- d) (1,5 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der Auswahlregeln  $\Delta l = \pm 1$ ,  $\Delta j = 0$  bzw.  $\pm 1$  die erlaubten Übergänge.

**Aufgabe 48: Hyperfeinstruktur des Deuteriums (1 Punkt) [Atom- und Molekülphysik]**

Der Grundzustand des Deuteriums  $s_{1/2}$  spaltet in zwei Hyperfeinzustände mit  $F = 1/2$  und  $F = 3/2$  auf. Welche Spinquantenzahl  $I$  hat also das Deuteron? In welche Hyperfeinzustände spaltet dann ein  $p_{3/2}$  Zustand auf?

**Aufgabe 49: Intervall-Regel (2 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]**

Zeigen Sie, dass die Wechselwirkung des magnetischen Kernmoments mit dem vom Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  erzeugten Magnetfeld zu einer Hyperfeinaufspaltung führt, die für zwei benachbarte Energieniveaus, mit  $F - 1$  und  $F$ , proportional zur Quantenzahl  $F$  ist. Wie lautet der Proportionalitätsfaktor?

**Aufgabe 50: Hyperfeinstruktur von Bismut (4 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]**

$^{209}\text{Bi}$  hat einen angeregten Zustand der elektronischen Konfiguration  $^2D_{5/2}$ , der eine Aufspaltung in 6 Hyperfein-Niveaus zeigt. Die Abstände zwischen diesen Niveaus betragen  $0,236\text{ cm}^{-1}$ ,  $0,312\text{ cm}^{-1}$ ,  $0,391\text{ cm}^{-1}$ ,  $0,471\text{ cm}^{-1}$  und  $0,551\text{ cm}^{-1}$ . Wie groß ist die Kernspinquantenzahl  $I$  und die Hyperfeinstrukturkonstante  $a$ ? Tabulieren Sie die Verschiebung der Hyperfein-Niveaus relativ zum hypothetischen unaufgespaltenen Niveau in Einheiten von  $a$ .