Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2018)

Prof. Dr. G. Münster, Jun.-Prof. Dr. C. Schuck; Koordinator: Dr. J. Salomon

Übungsblatt 6 **Abgabe: 07.06.2018, Besprechung: 12./13.06.2018**

Aufgabe 29: Zerlegung nach Eigenfunktionen (7 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem unendlich tiefen eindimensionalen Kastenpotential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| \leq a \\ +\infty & \text{für} \quad |x| > a \end{cases} .$$

Achtung: Der Kasten liegt symmetrisch um 0, anders als in der Vorlesung!
Zu einem bestimmten Zeitpunkt sei sein Zustand durch die Wellenfunktion

$$\psi(x) = N(a^2 - x^2)\,, \quad |x| \leq a$$

gegeben (N ist Normierungskonstante).

a) (4 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum betreffenden Zeitpunkt den Messwert

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} n^2\,, \quad n \in \mathbb{N}\;(n > 0)$$

zu finden.

b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass Erwartungswert und Unschärfe der Energie zu diesem Zeitpunkt durch

$$\langle H \rangle = \frac{5\hbar^2}{4ma^2}\,, \quad \Delta E = \frac{\sqrt{5}\hbar^2}{4ma^2}$$

gegeben sind.
Hinweis: Folgende Formeln werden benötigt

$$\int \mathrm{d}\xi\, \xi^2 \cos(\alpha\xi) = \frac{2\xi}{\alpha^2}\cos(\alpha\xi) + \frac{\alpha^2\xi^2 - 2}{\alpha^3}\sin(\alpha\xi) + C \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+)\,,$$
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

Aufgabe 30: Operatoridentitäten (4 Punkte)

a) (1,5 Punkte) Beweisen Sie die Operatoridentitäten

$$[B, A] = -[A, B], \qquad [A + B, C] = [A, C] + [B, C], \qquad [AB, C] = [A, C]B + A[B, C].$$

b) (1,5 Punkte) Berechnen Sie ausgehend von der Born-Jordanschen Vertauschungsrelation $[P_j, Q_k] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\delta_{jk}\mathbb{1}$ mit Hilfe von Aufgabenteil a) die Kommutatoren

$$[\vec{P}^2, Q_k] \qquad \text{und} \qquad [L_k, Q_l],$$

wobei $L_k = \varepsilon_{ijk} Q_i P_j$ (Summenkonvention!).

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für Operatoren A, B und C die Jacobi-Identität

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

erfüllt ist.

Aufgabe 31: Operator $A^\dagger A$ (2 Punkte)

Sei A ein linearer Operator und $A^\dagger$ sein Adjungiertes, beide definiert auf ganz $\mathcal{H}$. Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) der Operator $A^\dagger A$ ist selbstadjungiert,

b) (1 Punkt) der Operator $A^\dagger A$ ist positiv-semidefinit, d.h. er besitzt nur nichtnegative Erwartungswerte.

Aufgabe 32: Dreidimensionaler harmonischer Oszillator (4 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators mit der Masse m und der Kreisfrequenz ω habe die Form

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Energie der Eigenzustände durch $E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$ ($n \in \mathbb{N}_0$) gegeben ist, indem Sie H als Summe dreier ähnlicher Hamiltonoperatoren H_x, H_y, H_z für eindimensionale Oszillatoren schreiben.

b) (2 Punkte) Geben Sie den Grad der Entartung für die Zustände mit den drei niedrigsten Energien an und zeigen Sie, dass dieser allgemein für Zustände der Energie E_n durch $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ gegeben ist.