Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2018)

Prof. Dr. G. Münster, Jun.-Prof. Dr. C. Schuck; Koordinator: Dr. J. Salomon

Übungsblatt 3 **Abgabe: 10.05.2018, Besprechung: 15./16.05.2018**

Aufgabe 17: Teilchen im unendlich hohen Potenzialtopf (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen im unendlich hohen Potenzialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L, \\ \infty, & \text{sonst}, \end{cases}$$

das sich im stationären Zustand $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$ ($x \in [0, L],\ n = 1, 2, 3, \dots$) befindet.

a) (1,5 Punkte) Berechnen Sie $\langle x \rangle$ und Δx.

b) (1,5 Punkte) Zeigen Sie, dass das Ergebnis für Δx mit dem klassischen Resultat im Falle großer n übereinstimmt. Bestimmen Sie dazu eine klassische Bahnkurve und berechnen sie den zeitlichen Mittelwert von $x(t)$ und $(x(t))^2$ in einem geeigneten Zeitintervall.

c) (3 Punkte) Normieren Sie den Zustand

$$\varphi(x) = Nx(L - x), \qquad 0 \le x \le L$$

und zerlegen Sie ihn dann in die stationären Zustände $\varphi_n(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \varphi_n(x)\,,$$

d. h. bestimmen Sie die Koeffizienten c_n. Möglich ist dies aufgrund der Vollständigkeit der stationären Zustände $\varphi_n(x)$. (Hinweis: Setzen Sie $\varphi(x)$ zu einer antisymmetrischen Funktion fort und bilden Sie dann die zugehörige Fourierreihe.) Zeigen Sie mit Hilfe von $\sum_n |c_n|^2 = 1$, dass gilt:

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{960}\,.$$

Aufgabe 18: Kernpotenzial zwischen Proton und Neutron (5 Punkte)

Das Kernpotenzial zwischen Proton und Neutron kann durch

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ -V_0, & 0 < x < R_0, \\ 0, & R_0 < x, \end{cases}$$

mit $R_0 = 2 \cdot 10^{-15}$ m approximiert werden.

a) (2 Punkte) Leiten Sie die Lösbarkeitsbedingung für gebundene Zustände her:

$$\cot kR_0 = -\frac{\kappa}{k} \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0) \quad \text{und} \quad \kappa^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}E\,.$$

Geben Sie dazu zunächst die Stetigkeitsbedingungen der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödingergleichung an. (Die Stetigkeitsbedingungen müssen nicht hergeleitet werden.)

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass

$$V_0 > \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mR_0^2}$$

gelten muss, damit ein gebundener Zustand existiert.

c) (2 Punkte) Das Deuteron ist der einzige gebundene Zustand. Seine Bindungsenergie beträgt $-E = 2{,}23\,\text{MeV}$. Schätzen Sie hieraus das Potenzial V_0 ab.

Aufgabe 19: Pöschl-Teller-Potenzial, Teil 2 (2 Punkte)

Dies ist eine Fortsetzung von Aufgabe 14. Wir betrachten wieder das Potenzial

$$V(x) = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{m}\frac{1}{\cosh^2(\alpha x)}\,, \qquad \alpha > 0$$

mitsamt der Streulösung

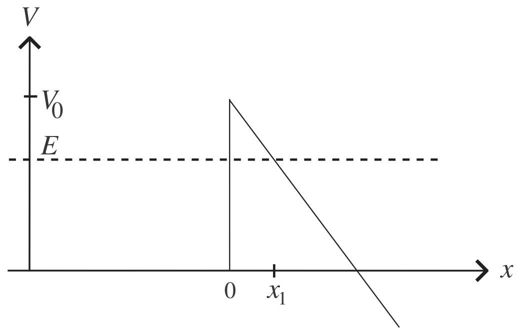
$$\varphi_k(x) = \hat{N}_k(1 + \frac{\mathrm{i}\alpha}{k}\tanh(\alpha x))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,.$$

Bestimmen Sie aus dem asymptotischen Verhalten der Streulösung die Transmissionsamplitude $S(k)$ und den Transmissionskoeffizient $T(k)$. Welcher Anteil der eingehenden Welle wird reflektiert?

Aufgabe 20: Metallelektron mit äußerem E-Feld (3 Punkte)

Das Potenzial eines Elektrons in einem Metall mit angelegtem äußeren elektrischen Feld $\mathcal{E}$ hat näherungsweise die Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0, \\ V_0 - e_0\mathcal{E}x\,, & x \geq 0\,. \end{cases}$$



a) (2 Punkte) Berechnen Sie den Gamow-Faktor $T = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_0}^{x_1} dx\,\sqrt{2m_\mathrm{e}(V(x)-E)}\right)$ für dieses Potenzial.

b) (1 Punkt) Für Wolfram ist die Austrittsarbeit $V_0 - E = 4{,}5$ eV. Berechnen Sie die Feldstärke $\mathcal{E}$, für die $T = 1/\mathrm{e}$ ist.